Kategorische Quotienten und konstruierbare Räume

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

der Fakultät für Mathematik und Physik

der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Devrim Celik

aus Ravensburg

2010

Tag der mündlichen Prüfung: 02.06.2010

Dekan: Prof. Dr. Wolfgang Knapp

1. Berichterstatter: Prof. Dr. Jürgen Hausen

2. Berichterstatter: Prof. Dr. Ivan V. Arzhantsev

Für Erdem, Hatice, Murat und Sevim

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Konstruktion von Quotienten für Äquivalenzrelationen ist ein grundlegendes Problem der Algebraischen Geometrie. In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit folgendem Quotientenbegriff, der lediglich die Minimalanforderung einer universellen Eigenschaft fordert:

Definition. Ein Morphismus $\pi\colon X' \to Y'$ von (Prä)Varietäten heißt *kategorischer Quotient für eine Äquivalenzrelation* $R \subseteq X' \times X'$, falls gilt:

(i) Der Morphismus π ist R-invariant, das heißt π ist konstant auf jeder Äquivalenzklasse von R.
(ii) Zu jedem R-invarianten Morphismus $\varphi\colon X' \to Z'$ von (Prä)Varietäten gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon Y' \to Z'$ mit $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$.

Ein klassisches Beispiel für Äquivalenzrelationen liefern algebraische Gruppenwirkungen $\mu\colon G \times X' \to X'$. Die zu einer solchen Wirkung gehörige Äquivalenzrelation R^G hat genau die G-Bahnen als Äquivalenzklassen. Die Frage nach kategorischen Quotienten für Gruppenwirkungen ist unter anderem Gegenstand der Geometrischen Invariantentheorie, in deren Rahmen man auch nach spezielleren Quotientenkonstruktionen sucht, siehe etwa [16]. Gruppenwirkungen liefern bereits einfache Beispiele, die keine kategorischen Quotienten besitzten:

Beispiel 1. [5, Example 4.3] Wir betrachten den Raum V der (2×3) Matrizen über $\mathbb{K}$. Weiter wirke $G := \mathrm{SL}(2)$ mit der Matrizenmultiplikation von links. Weiter betrachten wir den G-invarianten offenen Unterraum X' mit erster Spalte nicht null. Dieser besitzt keinen Kategorischen Quotienten.

In Beipsiel 1 lässt sich jedoch eine Existenzaussage für kategorische Quotienten erzielen [5, Theorem 1.1], wenn man zu der größeren Kagetorie der *konstruierbaren k-Räume* übergeht:

Definition (Kategorie der k-Räume)**.** Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(i) Ein *quasiaffiner konstruierbarer Raum* (*quasiaffiner k-Raum*) ist ein Raum mit Funktionen, der isomorph zu einem konstruierbaren Unterraum einer affinen Varietät ist.
(ii) Ein *konstruierbarer Raum* (*k-Raum*) ist ein Raum mit Funktionen, der eine endliche offene Überdeckung durch quasiaffine k-Räume erlaubt.
(iii) Ein *Morphismus von k-Räumen* ist ein Morphismus der zu Grunde liegenden Räume mit Funktionen.

Dies verallgemeinert ein von A. Białynicki-Birula in der Arbeit [7] untersuchtes Konzept, die *Kategorie der dc-subsets*: Die Objekte dieser Kategorie sind dichte konstruierbare *Unterräume* von Varietäten. Die Morphismen sind Einschränkungen von Morphismen, die auf offenen Teilmengen der umgebenden Varietäten definiert sind. Die Kategorie der konstruierbaren Räume ist formal analog zur Kategorie der Prävarietäten definiert und viele Begriffsbildungen, wie etwa Glattheit, Normalität, Separiertheit lassen sich formal übertragen. Bereits in elementaren Fragestellungen ergibt sich jedoch ein unterschiedliches Verhalten: In Beispiel 1.1.14 geben wir einen bijektiven glatten Morphismus von konstruierbaren Räumen an, der kein Isomorphismus ist.

Die Kategorie der dc-subsets ist eine volle Unterkategorie der separierten k-Räume ist siehe Bemerkung 1.5.8. Beispiel 3.6.31 zeigt jedoch, dass die Kategorie der dc-subsets eine echte Unterkategorie der separierten k-Räume ist.

Ein erster Schritt zu allgemeinen Existenzaussagen und Quotientenkonstruktionen in der Kategorie der konstruierbaren Räume ist die Untersuchung von Äquivalenzrelationen, die durch Morphismen definiert werden: Jeder Morphismus $\pi\colon X \to Y$ von (Prä)Varietäten definert eine Äquivalenzrelation R_π auf X:

$$(x, x') \in R_\pi \qquad :\Leftrightarrow \qquad \pi(x) = \pi(x').$$

Für Varietäten beobachtet man [8, Lemma II.6.2], dass jeder separable offene surjektive Morphismus π ein kategorischer Quotient für R_π ist. Für *lokal 1-volle k-Räume*, das heißt, k-Räume, die sich lokal mit einem mindestens 2-kodimensionalen Komplement in normale affine Varietäten einbetten lassen siehe Lemma 1.7.15, erhalten wir in Satz 1.9.20 die folgende Aussage:

Satz. *Es seien X, Y lokal 1-volle k-Räume und $\pi\colon X \to Y$ ein surjektiver separabler Morphismus und Y trage die Quotiententopologie bezüglich π. Dann ist $\pi\colon X \to Y$ ein kategorischer Quotient für R_π in der Kategorie k-Räume.*

Ein weiterer für Quotientenkonstruktionen wichtiger Schritt ist die Frage nach der Separierung von Prävarietäten: Jede Prävarietät X' definiert auf natürliche Weise eine Äquivalenzrelation $R_{X'}$ auf X':

$$(x, x') \in R_{X'} \;:\Leftrightarrow\quad \psi(x) = \psi(x') \text{ für alle } \psi \in \mathrm{Mor}(X', Y') \text{ mit } Y' \text{ Varietät.}$$

Einen kategorischen Quotienten $\pi\colon X \to Y$ mit separiertem Y für die Äquivalenzrelation $R_{X'}$ nennen wir eine *universelle Separierung von X'*. Wir untersuchen die Existenz universeller Separierungen für torische Prävarietäten, das heißt, äquivariante offene Einbettungen $T \subseteq X$ eines Torus $T \cong (\mathbb{C}^*)^n$ in eine normale Prävarietät X. Für torische Prävarietäten der Dimension eins und zwei kann man die Existenz universeller Separierungen $\pi\colon X \to Y$ zeigen, siehe [3, Corollary 4.2]. In Dimension drei gibt es bereits Beispiele die keine universelle Separierung besitzen, siehe [4]:

Beispiel 2. Es sei X' die torische Prävarietät die durch das Verkleben zweier Kopien von $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$ entlang von $(\mathbb{C}^*)^3$ via $(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_2, t_2/t_3, t_1)$ ensteht. Die Prävarietät X' besitzt nach [4, Proposition 4.3] keine universelle Separierung in der Kategorie der Varietäten.

In der Kategorie der k-Raume lassen sich jedoch auch in höherer Dimension Existenzresultate erzielen. Wir betrachten dreidimensionale torische Prävarietäten die „spitze allgemeine Lage" haben, die genaue Formulierung dieser Bedingung bezieht sich das beschreibende Fächerssystem der torischen Prävarietät und stellt sicher, dass dessen erzeugende Strahlen einen spitzen Kegel aufspannen und darin allgemeine Lage haben, siehe Definition 4.4.14. In Theorem 4.4.15 erhalten wir

Theorem. *Es sei X' eine komplexe torische Prävarietät mit spitzer allgemeiner Lage der Dimension drei. Dann existiert zu X' eine universelle Separierung in der Kategorie der k-Räume.*

Der Beweis dieses Theorems besteht in einem expliziten Verfahren zur Konstruktion der universellen Separierung. Als eine Anwendung erhalten wir eine Konstruktion kategorischer Quotienten für Wirkungen von Untertori auf torischen Varietäten. Quotientenkonstruktionen in diesem Rahmen sind vielfach untersucht worden, siehe etwa [12], [15] und [19]. Die Frage nach kategorischen Quotienten ist bis zur Komplexität zwei geklärt, siehe [4]; die Komplexität bezeichnet dabei die Kodimension des Untertorus im großen Torus. In der Komplexität drei tauchen erste Beispiele auf, die keinen kategorischen Quotienten in der Kategorie der Varietäten besitzen siehe Beispiel 4.5.19:

Beispiel 3. Wir betrachten die torische Varietät $X' := \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^2 \cup (\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{C}^2$ mit dem Torus $(\mathbb{C}^*)^4$ und die $\mathbb{C}^*$-Wirkung $h * x := (h^{-1}x_1, h^{-1}x_2, hx_3, hx_4)$ auf X'. Dann ist X' eine quasiaffine torische $\mathbb{C}^*$-Varietät und besitzt keinen kategorischen Quotienten in der Kategorie der Varietäten.

In diesem Beispiel erhalten wir einen Quotienten in der Kategorie der separierten k-Räume, es ordnet sich in folgende allgemeine Situation ein: Ein Untertorus H einer torischen Varietät X' wird durch ein Untergitter L des 1-Parametergruppengitters N des großen Torus T beschrieben. Wir sagen, dass H spitze allgemeine Lage besitzt, falls die Bilder in der Strahlen des beschreibenden Fächers in N/L einen spitzen Kegel erzeugen und darin allgemeine Lage besitzen siehe Thoerem 4.5.18

Theorem. *Es sei X' eine komplexe torische H-Varietät mit Komplexität drei. Weiter operiere der Untertorus H abgeschlossen auf X' und habe spitze allgemeine Lage. Dann existiert der kategorische Quotient $\pi\colon X' \to Y$ in der Kategorie der separierten k-Räume.*

Das Beispiel 3 besitzt keinen kategorischen Quotienten in der Kategorie der Varietäten siehe Beispiel 4.5.19. Folgendes Beispiel besitzt einen kategorischen Quotienten in der Kategorie der separierten k-Räume welcher sich nicht in eine Prävarietät einbetten lässt, das heißt, der kategorische Quotient ist kein dc-subset siehe Beispiel 4.5.8:

Beispiel 4. Wir betrachten die quasiaffine torische Varietät

$$X' \quad := \quad \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^4 \ \cup \ (\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^2 \ \cup \ (\mathbb{C}^*)^4 \times \mathbb{C}^2$$

mit dem Torus $(\mathbb{C}^*)^6$. Weiter betrachten wir folgende $(\mathbb{C}^*)^3$-Wirkung auf X':

$$(h_1, h_2, h_3) * x \quad := \quad \left(h_1^{-1}h_2^{-1}x_1, h_1^{-1}h_3x_2, h_2^{-1}x_3, h_1x_4, h_2h_3^{-1}x_5, h_3x_6\right).$$

Die torische $(\mathbb{C}^*)^3$-Varietät X' besitzt einen kategorischen Quotienten in der Kategorie der separierten k-Räume; der Quotientraum ist kein dc-subset.

In Kapitel 1 führen wir die Kategorie der konstruierbaren Räume ein, definieren grundlegende Begriffe und untersuchen sie. Viele Begriffe lassen sich direkt aus der Algebraischen Geometrie in die Welt der konstruierbaren Räume übertragen, wie zum Beispiel Normalität, Glattheit, Dimension, Funktionenkörper, Separiertheit etc.. Am Ende des Kaptiels werden die Begriffe Kurvenüberdeckungseigenschaft und schwach eigentliche Abbildungen diskutiert, die für unsere Quotientenkonstruktionen von entscheidender Bedeutung sind.

In Kapitel 2 werden die konvex-geometrischen Grundlagen zur Beschreibung torische k-Räume gelegt, insbesondere werden die Begriffe polyedrischer Kegel, Fächer und

Fächersystem verallgemeinert. Das Hauptergebnis des Kapitels ist ein Algorithmus, der ein gegebenes k-Gitterfächersystem auf universelle Weise auf einen k-Gitterfächer reduziert. Gegenstand von Kapitel 3 sind torische konstruierbare Räume, welche den Begriff einer torische (Prä)Varietät verallgemeinern. Die Hauptergebnisse sind die konvexgeometrische Beschreibung der Kategorie der torischen k-Räume, sowie die algorithmische Konstruktion *torischer Quotienten*, das heißt, kategorischer Quotienten in der Kategorie der torischen k-Räume.

Kapitel 4 ist der Konstruktion kategorischer Quotienten für torische (Prä)Varietäten in der Kategorie der k-Räume gewidmet. Mögliche Kandidaten sind dabei die torischen Quotienten. Genauer stellen wir fest: Wenn der Algorithmus in jedem Schritt eine universelle Separierung liefert, dann ist der torische Quotient die universelle Separierung siehe Satz 4.1.17. Wir erhalten ein Kriterium für die universelle Separierung für einen torischen k-Raum mit zwei quasiaffinen attraktiven Karten in Dimension drei siehe Satz 4.3.17. Dieses Kriterium kann dann auf torische Prävarietät mit spitzer allgemeiner Lage der Dimension drei angewandt werden und liefert schließlich die Theoreme 4.4.15 und 4.5.18. Mit Satz 4.1.17 lassen sich jedoch auch Fälle behandeln, die keine allgemeine Lage haben, wie etwa Beispiel 4.

Danksagung.

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, durch deren Unterstützung die vorliegende Arbeit moeglich war. Zunächst möchte ich dem Arbeitsbereich Algebra für die vielen konstruktiven Gespräche danken.

Auch die Diskussionen mit Prof. Dr. Ivan V. Arzhantsev waren sehr erkenntnisbringend und bereichernd. Herzlichen Dank dafür.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Jürgen Hausen, der mir die Möglichkeit gegeben hat die Dissertation zu schreiben. Seine ausgezeichnete Betreuung und Unterstützung haben mir viel bedeutet. Er war immer bereit mit mir anstehende Themen zu diskutieren. Seine Gedanken haben sehr zu meiner Inspiration beigetragen.

Zu guter letzt möchte ich den Personen danken, die für mich persönlich wichtig sind; meiner Familie und meinen Freunden. Ohne deren Rückhalt meine Dissertation undenkbar gewesen wäre.

1. Konstruierbare Räume

1.1. **Grundbegriffe.**

Wir führen die Kategorie der konstruierbaren Räume ein und betrachten lokale Eigenschaften wie *Glattheit* und *Normalität*. Erste Beispiele zeigen Unterschiede zur Theorie der Varietäten: In Beispiel 1.1.14 geben wir einen bijektiven Morphismus von glatten konstruierbaren Räumen an, der kein Isomorphismus ist. Für die Grundlagen der Algebraischen Geometrie verweisen wir auf [13, Chapter I].

Eine konstruierbare Menge in einem topologischen Raum X ist eine endliche Vereinigung lokal abgeschlossener Teilmengen von X. Für eine dichte konstruierbare Teilmenge $Y \subseteq X$ schreiben wir auch $Y \sqsubseteq X$. Jede Teilmenge $Y \subseteq X$ eines topologischen Raumes X hat einen offenen Kern $Y_0 := X \setminus A \subseteq Y$, wobei A den Abschluss von $X \setminus Y$ in X bezeichnet. Ist X noethersch und gilt $Y \sqsubseteq X$, so ist der offene Kern $Y_0 \subseteq Y$ dicht in X.

Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Ein Raum mit ($\mathbb{K}$-)Funktionen ist ein topologischer Raum X mit einer Garbe $\mathcal{O}_X$ von $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen; man nennt $\mathcal{O}_X$ auch die Strukturgarbe von X. Für einen Punkt $x \in X$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_{X,x}$ den Halm von $\mathcal{O}_X$ in x.

Ein Morphismus von Räumen X und Y mit Funktionen ist eine stetige Abbildung $\varphi\colon X \to Y$, sodass $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$ gilt, für jede offene Menge $V \subseteq Y$ und jedes $f \in \mathcal{O}_Y(V)$; in diesem Fall hat man einen Komorphismus

$$\varphi_V^*\colon \mathcal{O}_Y(V) \;\to\; \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V)), \qquad f \;\mapsto\; f \circ \varphi.$$

Ein Unterraum eines Raumes X mit Funktionen ist eine Teilmenge Y von X zusammen mit der Teilraumtopologie bezüglich X und der durch $\mathcal{O}_X$ induzierten Strukturgarbe $\mathcal{O}_Y$; letztere ist definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Y(V) \;:=\; \{f\colon V \to \mathbb{K};\ &\text{für alle } x \in V \text{ gibt es eine offene Umgebung } U \subseteq X \\ &\text{von } x \text{ und } F \in \mathcal{O}_X(U) \text{ mit } f_{|U\cap V} = F_{|U\cap V}\}. \end{aligned}$$

Wir versehen im folgenden eine Teilmenge Y eines Raumes X mit Funktionen stets mit dieser Unterraumstruktur. Wir nennen Y einen offenen (abgeschlossenen etc.) Unterraum, falls Y eine offene (abgeschlossene etc.) Teilmenge von X ist.

Unter einer affinen ($\mathbb{K}$-)Varietät verstehen wir einen Raum mit Funktionen, der isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum eines $\mathbb{K}^n$ ist, wobei wir $\mathbb{K}^n$ mit der Zariski-Topologie und mit der Garbe der regulären Funktionen versehen. Eine ($\mathbb{K}$-) Prävarietät ist ein Raum mit Funktionen, der eine endliche offene Überdeckung durch affine Varietäten besitzt. Ein Morphismus von Prävarietäten ist ein Morphismus der zu Grunde liegenden Räume mit Funktionen.

Definition 1.1.1 (Kategorie der k-Räume)**.** Es sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(i) Ein *quasiaffiner konstruierbarer Raum* (*quasiaffiner k-Raum*) ist ein Raum mit Funktionen, der isomorph zu einem konstruierbaren Unterraum einer affinen $\mathbb{K}$-Varietät ist.
(ii) Ein *konstruierbarer Raum* (*k-Raum*) ist ein Raum mit Funktionen, der eine endliche offene Überdeckung durch quasiaffine k-Räume erlaubt.

(iii) Ein *Morphismus von k-Räumen* ist ein Morphismus der zu Grunde liegenden Räume mit Funktionen.

Bemerkung 1.1.2. Die Kategorie der Prävarietäten ist eine volle Unterkategorie der Kategorie der k-Räume.

Bemerkung 1.1.3. Es seien X ein k-Raum und $Y \subseteq X$ eine konstruierbare Teilmenge. Dann ist der Unterraum Y von X ein k-Raum. Ist X ein quasiaffiner k-Raum, so ist Y ebenfalls ein quasiaffiner k-Raum.

Bemerkung 1.1.4. Es sei X ein k-Raum.

(i) X ist ein noetherscher topologischer Raum und jede einpunktige Teilmenge von X ist abgeschlossen in X.
(ii) X besitzt eine Zerlegung $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ in irreduzible Komponenten; das heißt, jedes $X_i \subseteq X$ ist irreduzibel und abgeschlossenen und es gilt $X_i \not\subseteq X_j$, falls $i \neq j$.
(iii) Für jede offene Menge $U \subseteq X$ und jedes $f \in \mathcal{O}_X(U)$ ist $f\colon U \to \mathbb{K}$ eine stetige Abbildung.
(iv) Für jedes $f \in \mathcal{O}_X(X)$ ist $X_f := \{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$ eine offene Menge in X.
(v) Ist $X_1, \ldots, X_m$ eine offene quasiaffine Überdeckung von X, dann ist die Familie $(X_{i_f}; f \in \mathcal{O}_X(X_i))$ eine Basis der Topologie auf X.
(vi) Für jedes $x \in X$ ist die Menge $\mathfrak{m}_x := \{f \in \mathcal{O}_X(X);\ f(x) = 0\}$ ein maximales Ideal in $\mathcal{O}_X(X)$.

Vereinbarung 1.1.5. Es seien A eine $\mathbb{K}$-Algebra, $\mathfrak{m}$ ein Primideal in A und $f \in A$.

(i) Die Lokalisierung von A nach $\mathfrak{m}$ bezeichnen wir mit $A_{\mathfrak{m}}$. Das maximale Ideal in $A_{\mathfrak{m}}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}$.
(ii) Die Lokalisierung von A nach f bezeichnen wir mit A_f.
(iii) Das Maximalspektrum von A bezeichnen wir mit $\mathrm{Spec}(A)$.

Lemma 1.1.6. *Es seien X ein k-Raum und $Y \sqsubseteq X$. Dann definiert die Inklusionsabbildung $\iota\colon Y \to X$ für jedes $y \in Y$ einen Isomorphismus*

$$\iota_y^*\colon \mathcal{O}_{X,y} \to \mathcal{O}_{Y,y}, \qquad f_y \mapsto (f_{|Y})_y.$$

Beweis. Die Abbildung ι_y^* ist offensichtlich surjektiv. Da Y dicht in X liegt und jeder Repräsentant f eines Keimes $f_y \in \mathcal{O}_{X,y}$ stetig ist, muss ι_y^* auch injektiv sein. □

Lemma 1.1.7. *Es seien X ein quasiaffiner k-Raum und $x \in X$. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren*

$$\mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_x} \to \mathcal{O}_{X,x}, \qquad \frac{f}{g} \mapsto (fg^{-1})_x.$$

Beweis. Da X quasiaffin ist, dürfen wir annehmen, dass $X \sqsubseteq X'$ mit einer affinen Varietät X' gilt. Die universelle Eigenschaft der Lokalisierung liefert, dass die Abbildung wohldefiniert ist.

Zur Surjektivität: Es sei $h_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ durch $h \in \mathcal{O}_X(U)$ repräsentiert. Nach Verkleinerung von U können wir annehmen, dass $U = X \cap U'$ mit einer offenen Menge $U' \subseteq X'$ und $h = h'_{|U}$ mit $h' = fg^{-1}$ für $f, g \in \mathcal{O}_{X'}(X')$ gilt. Also ist $f/g \in \mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_x}$ das gesuchte Urbild.

Zur Injektivität: Es sei $(fg^{-1})_x = 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X_g$ von x mit $fg^{-1} = 0 \in \mathcal{O}_X(U)$. Es folgt $f = 0 \in \mathcal{O}_X(U)$. Zu U existiert eine offene Menge $U' \subseteq X'$ mit $U = U' \cap X$. Wir wählen ein Element $h \in \mathcal{O}_{X'}(X')$ mit $h_{|X' \setminus U'} = 0$ und $h(x) \neq 0$. Wegen $X \setminus U \subseteq X' \setminus U'$ gilt $hf = 0$ auf ganz X. Somit ist $f/g = 0$ in $\mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_x}$. □

Folgerung 1.1.8. *Es seien X ein quasiaffiner k-Raum und $Y \sqsubseteq X$. Dann gilt für alle $y \in Y$:*

$$\mathcal{O}_Y(Y)_{\mathfrak{m}_y} \quad = \quad \mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_y}.$$

Beweis. Folgt sofort aus Lemma 1.1.6 und Lemma 1.1.7. □

Beispiele 1.1.9. Wir berechnen für folgende quasiaffine k-Räume den zugehörigen Funktionenring.

(i) Für den quasiaffinen k-Raum $X := (\mathbb{K}^*)^2 \cup \{(0,1)\} \sqsubseteq \mathbb{K}^2$ gilt:

$$\mathcal{O}_X(X) \quad = \quad \mathbb{K}[T_1, T_2]_{T_2}.$$

(ii) Für den quasiaffinen k-Raum $X := (\mathbb{K}^*)^2 \cup \{(0,0)\} \sqsubseteq \mathbb{K}^2$ gilt:

$$\mathcal{O}_X(X) \quad = \quad \mathbb{K}[T_1, T_2].$$

Begründung. Zu (i): Wir wissen, dass $X \subseteq \mathbb{K}^2_{T_2}$ gilt. Somit ist $\mathbb{K}[T_1, T_2]_{T_2} \subseteq \mathcal{O}_X(X)$. Es sei jetzt $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Mit Folgerung 1.1.8 gilt:

$$f \quad \in \quad \mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_{(0,1)}} \quad = \quad \mathcal{O}_{\mathbb{K}^2_{T_2}}(\mathbb{K}^2_{T_2})_{\mathfrak{m}_{(0,1)}}.$$

Somit existiert eine offene Umgebung $(0,1) \in X \subseteq U' \subseteq \mathbb{K}^2_{T_2}$ mit $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}^2_{T_2}}(U')$. Da $X \subseteq U'$ gilt, ist der Schnitt von U' mit jedem Primdivisor von $\mathbb{K}^2_{T_2}$ nicht leer. Also gilt $f \in \mathbb{K}[T_1, T_2]_{T_2}$.

Zu (ii): Analog zu (i). □

Folgerung 1.1.10. *Die beiden quasiaffinen k-Räume $(\mathbb{K}^*)^2 \cup \{(0,1)\} \sqsubseteq \mathbb{K}^2$ und $(\mathbb{K}^*)^2 \cup \{(0,0)\} \sqsubseteq \mathbb{K}^2$ sind nicht isomorph zueinander.*

Definition 1.1.11. Es sei X ein k-Raum.

(i) Ein Punkt $x \in X$ heißt *glatt*, falls der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär ist. Die Menge aller glatten Punkte von X bezeichnen wir mit X^{reg}. Man nennt X *glatt* , falls $X = X^{\mathrm{reg}}$ gilt.
(ii) Ein Punkt $x \in X$ heißt *singulär*, falls x kein glatter Punkt ist. Die Menge aller singulären Punkte von X bezeichnen wir mit X^{sing}.
(iii) Ein Punkt $x \in X$ heißt *normal*, falls der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ normal ist. Die Menge aller normalen Punkte von X bezeichnen wir mit X^{nor}. Der k-Raum X heißt *normal*, falls X irreduzibel ist und $X = X^{\mathrm{nor}}$ gilt.

Beispiel 1.1.12. Folgerung 1.1.8 liefert, dass $X := (\mathbb{K}^*)^2 \cup \{(0,0)\} \sqsubseteq \mathbb{K}^2$ ein glatter k-Raum ist.

Lemma 1.1.13. *Es seien X ein k-Raum und $Y \sqsubseteq X$. Dann gilt für jedes $y \in Y$:*

(i) *y ist normal in Y $\Leftrightarrow$ y ist normal in X.*
(ii) *y ist glatt in Y $\Leftrightarrow$ y ist glatt in X.*

Beweis. Die Aussagen folgen sofort aus Lemma 1.1.6. □

Beispiel 1.1.14. Wir betrachten die Aufblasung $X' := \mathrm{Bl}(\mathbb{K}^2, (0,0))$ mit der birationalen Abbildung $\pi' \colon X' \to \mathbb{K}^2$ und $x_0 \in \pi^{-1}((0,0))$. Dann ist der k-Raum $X := (X' \setminus \pi^{-1}((0,0))) \cup \{x_0\}$ glatt und die Abbildung $\pi := \pi'_{|X} \colon X \to \mathbb{K}^2$ ein bijektiver birationaler Morphismus von glatten k-Räumen jedoch kein Isomomorphismus.

Begründung. Angenommen π ist ein Isomorphismus. Wir wählen eine Gerade C in X wie in Abbildung 1. Dann ist C abgeschlossen in X, das Bild $\pi(C)$ jedoch nicht abgeschlossen in $\mathbb{K}^2$. □

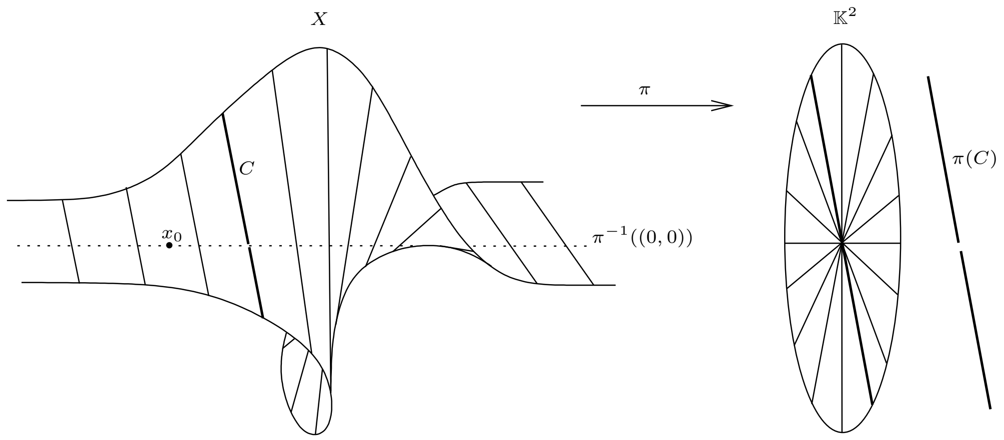

Abbildung 1

Satz 1.1.15. *Es sei X ein k-Raum.*

(i) *Die Menge X^{reg} der glatten Punkte ist offen und dicht in X.*
(ii) *Die Menge X^{nor} der normalen Punkte ist offen und dicht in X.*

Beweis. Zu (i): Die Aussage ist lokaler Natur und somit dürfen wir annehmen, dass $X \sqsubseteq X'$ mit einer affinen Varietät X' gilt. Nach Lemma 1.1.13 gilt $X^{\mathrm{reg}} = (X')^{\mathrm{reg}} \cap X$ und somit ist X^{reg} offen und dicht in X.

Zu (ii): Die Aussage ist lokaler Natur und somit dürfen wir annehmen, dass $X \sqsubseteq X'$ mit einer affinen Varietät X' gilt. Nach Lemma 1.1.13 gilt $X^{\mathrm{nor}} = (X')^{\mathrm{nor}} \cap X$ und somit ist X^{nor} offen und dicht in X. □

1.2. **Morphismen.**

Wir untersuchen Morphismen und definieren einen Einbettungsbegriff. Des Weiteren führen wir die Kategorie der *Raumkeime* ein und sehen, dass man im konstruierbaren Fall im Allgemeinen keine Äquivalenz von Raumkeimen und Halmen der Strukturgarbe hat siehe Bemerkung 1.3.7. Weiter beweisen wir Fortsetzungssätze für Morphismen bzw. Isomorphismen siehe Satz 1.2.8 und Satz 1.2.11. Diese liefern, dass das Bild eines k-Raumes wieder ein k-Raum ist und dass die Kategorie der *dc-subsets* eine volle Unterkategorie der k-Räume ist.

Satz 1.2.1. *Es seien X ein k-Raum und Y' eine affine Varietät. Dann hat man eine Bijektion*

$$\iota\colon \mathrm{Mor}(X,Y') \;\to\; \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{Y'}(Y'),\mathcal{O}_X(X)), \qquad \varphi \;\mapsto\; \varphi^*.$$

Beweis. Zu zeigen ist lediglich die Surjektivität von ι. Es sei dazu ein Homomorphismus $\alpha\colon \mathcal{O}_{Y'}(Y') \to \mathcal{O}_X(X)$ gegeben. Jedes $x \in X$ definiert eine Zerlegung von $f \in \mathcal{O}_X(X)$ als $f = f(x)+(f-f(x))$. Dies liefert eine Zerlegung $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{K}\cdot 1 \oplus \mathfrak{m}_x$ in $\mathbb{K}$-Vektorräume.

Wir zeigen, dass die Menge $\alpha^{-1}(\mathfrak{m}_x)$ ein maximales Ideal in $\mathcal{O}_{Y'}(Y')$ ist. Dazu sei ein Ideal $\mathfrak{n} \subseteq \mathcal{O}_{Y'}(Y')$ mit $\alpha^{-1}(\mathfrak{m}) \subsetneq \mathfrak{n}$ gegeben. Wir wählen ein $g \in \mathfrak{n} \setminus \alpha^{-1}(\mathfrak{m})$ und betrachten die Zerlegung $\alpha(g) = a + f$ mit $a \in \mathbb{K}$ und $f \in \mathfrak{m}_x$. Es folgt $g - a \in \alpha^{-1}(\mathfrak{m}_x)$ und somit $a = g - (g-a) \in \mathfrak{n}$. Also ist $\mathfrak{n} = \mathcal{O}_{Y'}(Y')$.

Wir zeigen nun, dass die folgende Abbildung ψ ein Morphismus mit $\psi^* = \alpha$ ist:

$$\psi\colon X \;\to\; Y', \qquad x \;\mapsto\; y, \quad \text{wobei } \mathfrak{m}_y = \alpha^{-1}(\mathfrak{m}_x).$$

Da α ein Homomorphismus ist, gilt $\alpha(\mathbb{K}\cdot 1) = \mathbb{K}\cdot 1$ und $\alpha(\alpha^{-1}(\mathfrak{m}_x)) \subseteq \mathfrak{m}_x$. Somit ist $g(\psi(x)) = \alpha(g)(x)$ für alle $g \in \mathcal{O}_{Y'}(Y')$ und alle $x \in X$. Aus $\psi^{-1}(Y'_g) = X_{\alpha(g)}$ folgt, dass ψ eine stetige Abbildung ist. Für jedes $f \in \mathcal{O}_{Y'}(Y'_g)$ gilt

$$\psi^*(f) \quad = \quad \psi^*\left(\frac{h}{g^l}\right) \quad = \quad \frac{\alpha(h)}{\alpha(g^l)} \quad \in \quad \mathcal{O}_X(X_{\alpha(g)}),$$

wobei $h \in \mathcal{O}_{Y'}(Y')$ mit $f = h/g^l$ auf Y'_g. Somit ist ψ ein Morphismus mit $\psi^* = \alpha$. □

Definition 1.2.2. Es seien X ein k-Raum und $x \in X$. Zwei offene Umgebungen $Y, Z \subseteq X$ von x heißen *äquivalent in x*, falls es eine offene Umgebungung $x \in U \subseteq X$ gibt, sodass $U \cap Y = U \cap Z$ gilt. Der *Raumkeim X_x* ist die Äquivalenzklasse von x in X. Es seien Y_1, Y_2 zwei offene Umgebungen von x in X. Zwei Morphismen $\varphi_1\colon Y_1 \to Z_1$, $\varphi_2\colon Y_2 \to Z_2$ heißen äquivalent in x, falls $Y_1 \sim Y_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2$ auf einer offenen Umgebung von x in X gilt. Ein *Morphismus $\varphi_x\colon X_x \to Y_y$ von Raumkeimen* ist die Äquivalenzklasse eines Morphismus φ in x.

Satz 1.2.3. *Es sei X ein k-Raum, Y' eine Prävarietät, $x \in X$ und $y \in Y'$. Dann hat man eine Bijektion*

$$\jmath\colon \mathrm{Mor}(X_x, Y'_y) \;\to\; \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{Y',y}, \mathcal{O}_{X,x}), \qquad \varphi \;\mapsto\; \varphi_x^*.$$

Beweis. Da die Aussage lokaler Natur ist, können wir annehmen, dass Y' affin ist. Zu zeigen ist lediglich die Surjektivität von $\jmath$. Es sei dazu ein Homomorphismus $\alpha\colon \mathcal{O}_{Y',y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ gegeben. Wir wissen mit Lemma 1.1.7, dass $\mathcal{O}_{Y'}(Y') \subseteq \mathcal{O}_{Y',y}$

gilt. Außerdem ist $\alpha(\mathcal{O}_{Y'}(Y'))$ eine endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Algebra in $\mathcal{O}_X(X)$. Somit existieren $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_{X,x}$ mit

$$\alpha(\mathcal{O}_{Y'}(Y')) \quad = \quad \mathbb{K}[f_1, \ldots, f_n].$$

Zu jedem f_i existieren $g_i, h_i \in \mathcal{O}_X(X)$ mit $h_i(x) \neq 0$ und $f = gh^{-1}$ in $\mathcal{O}_{X,x}$. Für die offene Menge $x \in U := X_{h_1 \cdots h_n}$ gilt:

$$\alpha(\mathcal{O}_{Y'}(Y')) \quad \subseteq \quad \mathcal{O}_X(X)_{h_1 \cdots h_n} \quad \subseteq \quad \mathcal{O}_X(U).$$

Satz 1.2.1 liefert einen Morphismus $\varphi\colon U \to Y'$ mit $\varphi^* = \alpha$ auf $\mathcal{O}_{Y'}(Y')$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $(\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_y$ gilt. Wir wissen, dass $\alpha^{-1}(\mathfrak{m}_{x_{\mathfrak{m}_x}}) = \mathfrak{m}_{y_{\mathfrak{m}_y}}$ gilt, und erhalten somit

$$\begin{aligned}(\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{m}_x) \quad = \quad \alpha^{-1}(\mathfrak{m}_x) \cap \mathcal{O}_{Y'}(Y') \quad &= \quad \alpha^{-1}(\mathfrak{m}_{x_{\mathfrak{m}_x}} \cap \mathcal{O}_U(U)) \cap \mathcal{O}_{Y'}(Y') \\ &= \quad \mathfrak{m}_{y_{\mathfrak{m}_y}} \cap \mathcal{O}_{Y'}(Y') \\ &= \quad \mathfrak{m}_y.\end{aligned}$$

□

Folgerung 1.2.4. *Es seien X' und Y' Prävarietäten, $x \in X'$ und $y \in Y'$. Dann hat man eine Bijektion*

$$\jmath\colon \operatorname{Iso}(X'_x, Y'_y) \;\to\; \operatorname{Iso}(\mathcal{O}_{Y',y}, \mathcal{O}_{X',x}), \qquad \varphi \;\mapsto\; \varphi^*_x.$$

Vereinbarung 1.2.5. Es sei X' eine irreduzible Prävarietät. Mit $\mathbb{K}(X')$ bezeichnen wir den zu X' zugehörigen Funktionenkörper.

Lemma 1.2.6. *Es seien X' eine irreduzible Prävarietät, Y' eine irreduzible Varietät und $\varphi, \psi\colon X' \to Y'$ dominante Morphismen mit $\varphi^*(f) = \psi^*(f)$ für alle $f \in \mathbb{K}(Y')$. Dann gilt $\varphi = \psi$.*

Beweis. Wir wählen eine affine offene Teilmenge $V' \subseteq Y'$ und setzen $U'_1 := \varphi^{-1}(V')$ bzw. $U'_2 := \psi^{-1}(V')$. Da Y' eine Varietät ist, reicht es zu zeigen, dass $\varphi_{|U'_1 \cap U'_2} = \psi_{|U'_1 \cap U'_2}$ gilt. Die Behauptung folgt mit

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_{V',\varphi(x)} \quad &= \quad \{f \in \mathcal{O}_{V'}(V');\ \varphi^*(f)(x) = 0\} \\ &= \quad \{f \in \mathcal{O}_{V'}(V');\ \psi^*(f)(x) = 0\} \\ &= \quad \mathfrak{m}_{V',\psi(x)}\end{aligned}$$

für alle $x \in U'_1 \cap U'_2$. □

Folgerung 1.2.7. *Es seien $\varphi\colon X' \to Y'$ und $\psi\colon Y' \to X'$ dominante Morphismen von irreduziblen Varietäten mit $\varphi^* \circ \psi^* = \mathrm{id}_{\mathbb{K}(X')}$ und $\psi^* \circ \varphi^* = \mathrm{id}_{\mathbb{K}(Y')}$. Dann sind φ und ψ zueinander inverse Isomorphismen.*

Satz 1.2.8. *Es seien X' eine Prävarietät, Y' eine Varietät, $X \sqsubseteq X'$ ein k-Raum und $\varphi\colon X \to Y'$ ein Morphismus. Dann existiert eine offene Menge $U' \subseteq X'$ mit $X \subseteq U'$ und ein Morphismus $\varphi'\colon U' \to Y'$ mit $\varphi'_{|X} = \varphi$.*

Beweis. Mit Lemma 1.1.6 erhalten wir Homomorphismen $\varphi^*_x\colon \mathcal{O}_{Y',y} \to \mathcal{O}_{X',x}$ für jedes $x \in X$ und $y := \varphi(x)$. Somit gibt es nach Satz 1.2.3 zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U'_x in X' und einen Morphismus ${}_x\psi\colon U'_x \to Y'$ mit $\varphi^*_x = {}_x\psi^*_x$ auf $\mathcal{O}_{Y',y}$. Mit Lemma 1.1.6 und Satz 1.2.3 gilt $\varphi_{|X \cap U'_x} = {}_x\psi_{|X \cap U'_x}$. Da Y' eine Varietät ist, existiert auf der offenen Menge $U' := \bigcup U'_x$ ein Morphismus $\varphi'\colon U' \to Y'$ mit $\varphi'_{|X} = \varphi$. □

Bemerkung 1.2.9. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus von k-Räumen. Dann ist die Menge $\varphi(X)$ nach Satz 1.2.8 konstruierbar in Y.

Bemerkung 1.2.10. Jeder Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ von k-Räumen, lässt sich in einen surjektiven und injektiven Morphismus $X \to \varphi(X) \to Y$ zerlegen.

Satz 1.2.11. *Es seien X', Y' Varietäten, $X \sqsubseteq X'$, $Y \sqsubseteq Y'$ k-Räume und $\varphi\colon X \to Y$ ein Isomorphismus. Dann existieren offene Mengen $X \subseteq U' \subseteq X'$, $Y \subseteq V' \subseteq Y'$ und ein Isomorphismus $\varphi'\colon U' \to V$ mit $\varphi'_{|X} = \varphi$.*

Beweis. Mit Lemma 1.1.6 erhalten wir Isomorphismen $\varphi_x^*\colon \mathcal{O}_{Y',y} \to \mathcal{O}_{X',x}$ für jedes $x \in X$ und $y := \varphi(x)$. Somit gibt es nach Folgerung 1.2.4 zu jedem $x \in X$ jeweils offene Umgebungen U'_x in X', $y \in V'_x$ in Y' und einen Isomorphismus ${}_x\psi\colon U'_x \to V'_x$ mit $\varphi_x^* = {}_x\psi_x^*$ auf $\mathcal{O}_{Y',y}$. Mit Lemma 1.1.6 und Satz 1.2.3 gilt wir $\varphi_{|X \cap U'_x} = {}_x\psi_{|X\cap U'_x}$ bzw. $\varphi^{-1}_{|Y\cap V'_{x'}} = {}_x\psi^{-1}_{|Y\cap V'_x}$. Wir setzen

$$U' \quad := \quad \bigcup_{x\in X} U'_x \qquad \text{und} \qquad V' \quad := \quad \bigcup_{x\in X} V'_x.$$

Nach Voraussetzung sind X' und Y' Varietäten. Somit können wir die Isomorphismen ${}_x\psi$ zu einem Isomorphismus $\varphi'\colon U' \to V'$ mit $\varphi'_{|X} = \varphi$ zusammensetzen. □

Die Kategorie der ,,dc-subsets" wurde in [7] eingeführt und ist wie folgt definiert:

Definition 1.2.12 (Kategorie der dc-subsets)**.**

(i) Eine dichte konstruierbare Teilmenge X einer Varietät X' heißt *dc-subset*.
(ii) Es seien $X \sqsubseteq X'$ und $Y \sqsubseteq Y'$ dc-subsets. Ein Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ ist eine Einschränkung eines Morphismus $\varphi'\colon U' \to V'$, wobei $U' \subseteq X'$ und $V' \subseteq Y'$ jeweils offene Teilmengen sind mit $X \subseteq U'$ und $Y \subseteq V'$.

Folgerung 1.2.13. *Die Kategorie der dc-subsets ist eine volle Unterkategorie der Kategorie der k-Räume.*

Definition 1.2.14. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus von k-Räumen.

(i) Wir nennen φ eine *Einbettung*, falls φ ein Isomorphismus von X auf den Unterraum $\varphi(X)$ ist.
(ii) Wir nennen φ *dominant*, falls $\varphi(X)$ dicht in Y ist.

Lemma 1.2.15. *Es seien X' eine affine Varietät und $X \sqsubseteq X'$ ein konstruierbarer Unterraum. Dann hat man eine Einbettung*

$$\iota\colon X \;\to\; \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X'}(X')) \qquad x \;\mapsto\; \mathfrak{m}_x \cap \mathcal{O}_{X'}(X').$$

Beweis. Es gilt $\iota = \kappa \circ \jmath$, wobei $\jmath\colon X \to X'$ die Inklusionsabbildung bezeichnet und $\kappa\colon X' \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X'}(X'))$ den kanonischen Isomorphismus. □

Lemma 1.2.16. *Es sei X ein quasiaffiner k-Raum, sodass $\mathcal{O}_X(X)$ endlich erzeugt ist. Dann hat man eine Einbettung*

$$\iota\colon X \;\to\; \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X)), \qquad x \;\mapsto\; \mathfrak{m}_x.$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $X \sqsubseteq X'$ mit einer affinen Varietät X' gilt. Wir betrachten den Isomorphismus $\mathrm{id}\colon \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X)$. Dann liefert Satz 1.2.1 einen Morphismus $\iota\colon X \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$ mit $\iota(x) = \mathfrak{m}_x$ und $\iota(X) = \{\mathfrak{m}_x;\ x \in X\}$. Weiter sei $\jmath\colon X \to X'$ die Inklusionsabbildung und $\kappa\colon X' \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X'}(X'))$ der kanonische Isomorphismus. Der Morphismus $\kappa \circ \jmath$ ist eine konstruierbare Einbettung. Es gilt $\kappa(\jmath(X)) = \{\mathfrak{m}_x \cap \mathcal{O}_{X'}(X');\ x \in X\}$. Wir haben wir folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\kappa"] & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X'}(X')) \\ X \arrow[u, "\jmath"] \arrow[r, "\iota"'] & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X)) \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Wobei ψ der Morphismus $\psi\colon \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X)) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X'}(X'))$, $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \cap \mathcal{O}_{X'}(X')$ ist, der durch $\mathcal{O}_{X'}(X') \subseteq \mathcal{O}_X(X)$ induziert wird. Es gilt $\iota^{-1} = (\kappa^{-1} \circ \psi)_{|\iota(X)}$ und somit ist ι eine Einbettung. □

Satz 1.2.17. *Es seien X ein quasiaffiner k-Raum, Y' eine affine Varietät und $\alpha\colon \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{Y'}(Y')$ ein Isomorphismus. Dann existiert eine Einbettung $\varphi\colon X \to Y$ mit $\varphi^* = \alpha$.*

Beweis. Folgt sofort aus Lemma 1.2.16. □

Bemerkung 1.2.18. Für einen k-Raum X und $f \in \mathcal{O}_X(X)$ gilt stets $\mathcal{O}_X(X)_f \subseteq \mathcal{O}_X(X_f)$. Dabei ist Gleichheit im Allgemeinen nicht zu erwarten. Dazu betrachten wir das Beispiel 1.1.9 (ii) mit dem k-Raum $X := (\mathbb{K}^*)^2 \cup \{(0,0)\} \sqsubseteq \mathbb{K}^2$ und $T_1 \in \mathcal{O}_X(X)$. Dann gilt:

$$\mathcal{O}_X(X)_{T_1} \quad = \quad \mathbb{K}[T_1, T_2]_{T_1} \quad \neq \quad \mathcal{O}_X((\mathbb{K}^*)^2) \quad = \quad \mathcal{O}_X(X_{T_1}).$$

Lemma 1.2.19. *Es sei X ein normaler quasiaffiner k-Raum. Dann existiert eine Einbettung $\iota\colon X \to Y'$ mit einer normalen affinen Varietät Y'.*

Beweis. Da X quasiaffin ist können wir annehmen, dass $X \sqsubseteq X'$ gilt mit einer affinen Varietät X'. Da X normal ist, folgt mit Lemma 1.1.6, dass $X \subseteq X'^{\mathrm{norm}}$ gilt. Es sei $\nu\colon \widetilde{X}' \to X'$ die Normalisierung von X'. Wir wissen, dass $\nu^{-1}(X'^{\mathrm{norm}}) \to X'^{\mathrm{norm}}$ ein Isomorphismus von Varietäten ist. Somit ist $X \to \nu^{-1}(X) \to \widetilde{X}'$ eine Einbettung. □

Lemma 1.2.20. *Es seien X ein k-Raum und X' eine normale Prävarietät mit $X \sqsubseteq X'$ und $X \cap D' \neq \emptyset$ für alle Primdivisoren $D' \subseteq X'$. Dann gilt $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{X'}(X')$.*

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass $\mathcal{O}_X(X) \subseteq \mathcal{O}_{X'}(X')$ gilt. Dazu sei $f \in \mathcal{O}_X(X)$ gegeben. Nach Satz 1.2.8 existiert eine offene Menge $X \subseteq U' \subseteq X'$ und ein $f' \in \mathcal{O}_{X'}(U')$ mit $f'_{|X} = f$. Da $X \subseteq U'$ gilt, erhalten wir $U' \cap D' \neq \emptyset$ für alle Primdivisoren $D' \subseteq X'$. Also ist $f' \in \mathcal{O}_{X'}(X')$. □

Lemma 1.2.21. *Es seien X' eine normale Prävarietät und $X \sqsubseteq X'$ ein konstruierbarer Unterraum. Dann existiert eine offene Menge $X \subseteq U' \subseteq X'$ mit $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{U'}(U')$.*

Beweis. Es seien $E_1, \ldots, E_m \subseteq X' \setminus X$ die irreduziblen Komponenten von $X' \setminus X$ mit $\dim(E_i') = \dim(X') - 1$, wobei E_i' den Abschluss von E_i in X' bezeichnet. Wir setzen

$$U' \quad := \quad X' \setminus \bigcup_{E_i' \cap X = \emptyset} E_i'.$$

Es ist klar, dass $X \subseteq U'$ gilt. Weiter gilt für jeden Primdivisor $Y' \subseteq X'$:

$$Y' \cap U' \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad Y' \cap X \neq \emptyset.$$

Somit folgt die Behauptung mit Lemma 1.2.20. □

Satz 1.2.22. *Es sei X ein normaler quasiaffiner k-Raum. Dann existieren Funktionen $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}_X(X)$ mit $X = \bigcup X_{f_i}$ und $\mathcal{O}_X(X_{f_i}) = \mathcal{O}_X(X)_{f_i}$ ist endlich erzeugt.*

Beweis. Nach Lemma 1.2.19 dürfen wir annehmen, dass $X \sqsubseteq X'$ gilt, wobei X' eine eine normale affine Varietät ist. Nach Lemma 1.2.21 existiert eine offene Menge $X \subseteq U' \subseteq X'$ mit $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{U'}(U')$. Es seien $E_1', \ldots, E_r' \subseteq X'$ die irreduziblen Komponenten von $\overline{U' \setminus X}$ mit $\dim(E_i') = \dim(X') - 1$, wobei $\overline{U' \setminus X}$ den Abschluss von $U' \setminus X$ in X' bezeichnet. Da X ein noetherscher topologischer Raum ist, reicht es, für jedes $x \in X$ eine Funktion $f \in \mathcal{O}_X(X)$ mit $x \in X_f$ und $\mathcal{O}_X(X)_f = \mathcal{O}_X(X_f)$ zu konstruieren. Dazu sei $x \in X$ fest gewählt. Die Menge

$$A \quad := \quad X' \setminus U' \quad \cup \quad \bigcup_{x \notin E_i'} E_i'$$

ist abgeschlossen in X'. Somit existiert ein $f \in \mathcal{O}_{X'}(X')$ mit $f_{|A} \equiv 0$ und $f(x) \neq 0$. Es gilt $X_f \subseteq U_f' = X_f'$. Wir wollen zeigen, dass für jeden Primdivisor $D' \subseteq U_f'$ die Menge $D' \cap X_f$ nicht leer ist.

Angenommen es gelte $D' \cap X_f = \emptyset$ für einen Primdivisor $D' \subseteq U_f'$. Dann folgt, dass $D' \subseteq U_f' \setminus X_f \subseteq U' \setminus X$ gilt. Somit ist der Abschluss $\overline{D'}$ von D' in X' gleich einem E_i'. Es gilt $x \in \overline{D'}$, da sonst $f_{\overline{D'}} \equiv 0$ und somit $D' \cap U_f' = \emptyset$ folgen würde. Also ist

$$x \ \in \ (\overline{D'} \ \cap \ X_f) \ \cap \ U_f' \quad = \quad D' \ \cap \ X_f,$$

Widerspruch. Somit folgt mit Lemma 1.2.20:

$$\mathcal{O}_X(X_f) \quad = \quad \mathcal{O}_{U'}(U_f') \quad = \quad \mathcal{O}_{U'}(U')_f \quad = \quad \mathcal{O}_X(X)_f.$$

Außerdem folgt aus $\mathcal{O}_{U'}(U_f') = \mathcal{O}_{X'}(X_f')$, dass $\mathcal{O}_X(X_f)$ endlich erzeugt ist. □

Folgerung 1.2.23. *Es sei X ein normaler k-Raum. Dann besitzt X eine quasiaffine offene Überdeckung $X_1, \ldots, X_r$ mit $\mathcal{O}_{X_i}(X_i)$ endlich erzeugt.*

Beweis. Folgt aus Satz 1.2.22. □

1.3. **Varietöse Punkte.**

Jeder k-Raum enthält eine offene Teilmenge, die eine Prävarietät ist. Die Punkte dieser Menge nennen wir *varietöse Punkte*. Mit Hilfe der varietösen Punkte werden wir die Begriffe *Dimension* und *Funktionenkörper* für k-Räume einführen. Wir werden darüber hinaus einige Eigenschaften dieser Begriffe zeigen.

Definition 1.3.1. Es sei X ein k-Raum. Ein Punkt $x \in X$ heißt *varietös*, falls er eine offene Umgebung $U \subseteq X$ besitzt, sodass U eine Prävarietät ist. Die Menge aller varietösen Punkte von X bezeichnen wir mit X^{var}.

Lemma 1.3.2. *Es sei X ein k-Raum. Die Menge X^{var} der varietösen Punkte ist ein offener dichter Unterraum von X.*

Beweis. Die Aussage ist lokaler Natur. Somit dürfen wir annehmen, dass $X \sqsubseteq X'$ mit einer affinen Varietät X' gilt. Dann ist der offene Kern X_0 von X in X' eine Teilmenge von X^{var}. □

Satz 1.3.3. *Es seien X ein k-Raum und $Y \subseteq X$ ein konstruierbarer Unterraum. Dann sind äquivalent:*

(i) *Y ist dicht in X.*
(ii) *Y^{var} ist offen und dicht in X^{var}.*

Beweis. Die Implikation „(ii)⇒(i)" ergibt sich direkt aus Lemma 1.3.2. Für die Implikation „(i)⇒ (ii)" betrachten wir folgende Fälle:

Fall 1: X ist eine affine Varietät. Wir zeigen, dass Y^{var} offen und dicht in X ist. Nach Lemma 1.1.6 definiert die Inklusionsabbildung $\iota\colon Y^{\mathrm{var}} \to X$ für jedes $y \in Y^{\mathrm{var}}$ einen Isomorphismus

$$\iota_y^*\colon \mathcal{O}_{X,y} \;\to\; \mathcal{O}_{Y^{\mathrm{var}},y} \qquad f_y \;\mapsto\; (f_{|Y^{\mathrm{var}}})_y.$$

Somit gibt es nach Satz 1.2.4 zu jedem $y \in Y^{\mathrm{var}}$ jeweils offene Umgebungen V_y in Y und U_y in X, sodass $\iota_{|V_y}\colon V_y \to U_y$ Isomorphismen sind. Folglich ist Y^{var} offen in X. Weiter gilt $Y^{\mathrm{var}} \subseteq X^{\mathrm{var}}$ und wir erhalten (ii).

Fall 2: X ist ein quasiaffiner k-Raum. Dann dürfen wir $X \sqsubseteq X'$ mit einer affinen Varietät X' annehmen. Dabei gilt $Y \sqsubseteq X'$. Nach Fall 1 liegt Y^{var} dicht in X' und somit auch in X^{var}.

Fall 3: X ist beliebiger k-Raum. Eine lokale Betrachtung führt das Problem auf Fall 2 zurück. □

Folgerung 1.3.4. *Es seien X eine Prävarietät und Y ein dichter konstruierbarer Unterraum von X. Dann gilt $Y^{\mathrm{var}} = X \setminus A$, wobei A den Abschluss von $X \setminus Y$ in X bezeichnet.*

Folgerung 1.3.5. *Es seien X eine Prävarietät und Y ein echter dichter konstruierbarer Unterraum von X. Dann ist Y keine Prävarietät.*

Beispiel 1.3.6. Der konstruierbare Unterraum $X := (\mathbb{K}^*)^2 \cup \{(0,0)\}$ von $\mathbb{K}^2$ ist ein irreduzibler quasiaffiner k-Raum. Es gilt

$$X^{\mathrm{var}} \;=\; (\mathbb{K}^*)^2 \;\neq\; X.$$

Man beachte, dass $\mathcal{O}_{X,0} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{K}^2,0}$ gilt, jedoch keine Umgebung $V \subseteq X$ von 0 isomorph zu einer Umgebung $U \subseteq \mathbb{K}^2$ ist.

Bemerkung 1.3.7. In Satz 1.2.3 haben wir vorausgesetzt, dass Y' eine Prävarietät ist. Diese Voraussetzung ist nach Beispiel 1.3.6 essentiell.

Definition 1.3.8. Es sei X ein k-Raum. Dann definieren wir die *Dimension von* X als $\dim(X) := \dim(X^{\mathrm{var}})$.

Bemerkung 1.3.9. Es seien X ein irreduzibler k-Raum und U eine nichtleere offene Teilmenge von X. Wege $\emptyset \neq U^{\mathrm{var}} \subseteq X^{\mathrm{var}}$ gilt $\dim(U) = \dim(X)$.

Satz 1.3.10. *Es seien X ein k-Raum und $Y \sqsubseteq X$ ein dichter konstruierbarer Unterraum. Dann gilt* $\dim(X) = \dim(Y)$.

Beweis. Mit Satz 1.3.3 erhalten wir

$$\dim(Y) \quad = \quad \dim(Y^{\mathrm{var}}) \quad = \quad \dim(X^{\mathrm{var}}) \quad = \quad \dim(X).$$

□

Folgerung 1.3.11. *Es seien X ein irreduzibler k-Raum und $Y \subseteq X$ ein konstruierbarer Unterraum. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gilt* $\dim(Y) = \dim(X)$.
(ii) *Y ist dicht in X.*

Beweis. Es ist nur zu „(i)⇒(ii)" etwas zu zeigen. Nach Satz 1.3.3 genügt es zu zeigen, dass Y^{var} und X^{var} einen nichtleeren Durchschnitt haben. Dazu dürfen wir annehmen, dass X quasiaffin ist und eine affine Varietät X' mit $X \sqsubseteq X'$ existiert. Für den Abschluss Y' von Y in X' erhalten wir nach Satz 1.3.10

$$\dim(Y') \quad = \quad \dim(Y) \quad = \quad \dim(X) \quad = \quad \dim(X').$$

Folglich gilt $Y' = X'$. Da X irreduzibel ist, muss auch X' irreduzibel sein. Somit haben Y^{var} und X^{var} nichtleeren Durchschnitt. □

Folgerung 1.3.12. *Es seien X ein irreduzibler k-Raum und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum mit* $\dim(Y) = \dim(X)$. *Dann gilt $Y = X$.*

Satz 1.3.13. *Es seien X ein k-Raum und $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ seine Zerlegung in irreduzible Komponenten. Dann gilt*

$$\dim(X) \quad = \quad \max_{i=1,\ldots,n}(\dim(X_i)).$$

Beweis. Zu jedem $i = 1, \ldots, n$ definieren wir einen Unterraum $U_i \subseteq X_i$, sodass U_i offen in X ist:

$$U_i \quad := \quad \widetilde{U}_i^{\mathrm{var}}, \qquad\qquad \text{wobei} \quad \widetilde{U}_i \quad := \quad X \setminus \bigcup_{i \neq j} X_j.$$

Dann ist $U_1 \cup \ldots \cup U_n$ eine Prävarietät und liegt offen und dicht in X. Mit Folgerung 1.3.10 erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim(X) \quad = \quad \dim(U_1 \cup \ldots \cup U_n) \quad &= \quad \max_{i=1,\ldots,n}(\dim(U_i)) \\ &= \quad \max_{i=1,\ldots,n}(\dim(X_i)). \end{aligned}$$

□

Folgerung 1.3.14. *Es seien X ein k-Raum und $Y \subseteq X$ ein konstruierbarer Unterraum. Dann gilt* $\dim(Y) \leq \dim(X)$.

Beweis. Nach Satz 1.3.13 genügt es den Fall, dass X und Y irreduzibel sind, zu behandeln. Wir betrachten zunächst den Fall, dass X ein quasiaffiner k-Raum ist. Dann dürfen wir $X \sqsubseteq X'$ mit einer affinen Varietät X' annehmen. Mit dem Abschluss Y' von Y in X' erhalten wir nach Satz 1.3.10

$$\dim(Y) \quad = \quad \dim(Y') \quad \leq \quad \dim(X') \quad = \quad \dim(X).$$

Im allgemeinen Fall wählen wir uns einen offenen quasiaffinen k-Raum $X_1 \subseteq X$ mit $X_1 \cap Y \neq \emptyset$. Dann ist $Y_1 := X_1 \cap Y$ ein offener dichter Unterraum von Y. Mit Satz 1.3.10 erhalten wir

$$\dim(Y) \quad = \quad \dim(Y_1) \quad \leq \quad \dim(X_1) \quad = \quad \dim(X).$$

□

Satz 1.3.15. *Es sei X ein k-Raum.*

(i) *Gilt* $\dim(X) = 0$*, so ist X endlich.*
(ii) *Gilt* $\dim(X) = 1$*, so ist X eine Prävarietät.*

Beweis. Zu (i): Aus $\dim(X) = 0$ folgt $\dim(X^{\mathrm{var}}) = 0$. Also ist X^{var} endlich. Nach Lemma 1.3.2 ist X endlich.

Zu (ii): Wir behandeln zunächst den Fall, dass X ein quasiaffiner k-Raum ist. Wir dürfen dann annehmen, dass $X \sqsubseteq X'$ mit einer affinen Varietät X' gilt. Es gilt $\dim(X) = \dim(X^{\mathrm{var}}) = \dim(X') = 1$ und somit ist

$$\dim(X' \setminus X) \quad \leq \quad \dim(X' \setminus X^{\mathrm{var}}) \quad = \quad 0.$$

Also muss X ein offener Unterraum von X' sein. Im allgemeinen Fall wählen wir eine offene Überdeckung von X durch quasiaffine $X_1, \ldots, X_n$. Nach Lemma 1.3.14 gilt $\dim(X_i) \leq 1$. Obige Überlegung sowie (i) zeigen, dass jedes X_i eine Prävarietät ist. □

Definition 1.3.16. Es sei X ein irreduzibler k-Raum. Dann definieren wir den Funktionenkörper von X als $\mathbb{K}(X) := \mathbb{K}(X^{\mathrm{var}})$.

Bemerkung 1.3.17. Es sei X ein irreduzibler k-Raum. Dann gilt

$$\dim(X) = \mathrm{tr.deg}\ (\mathbb{K}(X)),$$

wobei tr.deg den Transzendenzgrad bezeichnet.

Folgerung 1.3.18. *Es seien X ein k-Raum und $Y \sqsubseteq X$ ein dichter konstruierbarer Unterraum. Dann gilt* $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(Y)$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 1.3.3. □

Bemerkung 1.3.19. Ist X ein irreduzibler quasiaffiner k-Raum, dann ist $\mathcal{O}_X(X)$ ein Integritätsbereich und $\mathbb{K}(X)$ ist der Quotientenkörper von $\mathcal{O}_X(X)$.

Begründung. Wir dürfen $X \sqsubseteq X'$ mit einer affinen Varietät X' annehmen. Die Behauptung folgt mit

$$\mathcal{O}_{X'}(X') \quad \subseteq \quad \mathcal{O}_X(X) \quad \subseteq \quad \mathcal{O}_X(X^{\mathrm{var}}).$$

□

Lemma 1.3.20. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen k-Räumen. Dann ist $\varphi^*\colon \mathbb{K}(Y) \to \mathbb{K}(X)$ eine Einbettung.*

Beweis. Es sei Y_0 eine quasiaffine offene Teilmenge von Y. Wir setzen $X_0 := \varphi^{-1}(Y_0)$. Mit Folgerung 1.3.18 gilt $\mathbb{K}(Y) = \mathbb{K}(Y_0)$ und $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(X_0)$. Da φ ein dominanter Morphismus ist, ist $\varphi^*\colon \mathcal{O}_Y(Y_0) \to \mathcal{O}_X(X_0)$ injektiv. Nach Bemerkung 1.3.19 ist $\mathbb{K}(Y_0)$ der Quotientenkörper von $\mathcal{O}_Y(Y_0)$. Somit ist $\varphi^*\colon \mathbb{K}(Y_0) \to \mathbb{K}(X_0)$ eine Einbettung. □

Definition 1.3.21. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen k-Räumen. Wir nennen φ einen *separablen* Morphismus, falls die Körpererweiterung $\mathbb{K}(X)/\varphi^*(\mathbb{K}(Y))$ eine separable Körpererweiterung ist.

Bemerkung 1.3.22. Ist $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$, so ist jeder dominante Morphismus von irreduziblen k-Räumen separabel.

Lemma 1.3.23. *Ist $\varphi\colon X \to Y$ eine dominante Einbettung von irreduziblen k-Räumen, dann ist $\varphi^*\colon \mathbb{K}(Y) \to \mathbb{K}(X)$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Einschränkung von φ auf die offene Menge $X^{\mathrm{var}} \subseteq X$ liefert einen Isomorphismus $\varphi_{|X^{\mathrm{var}}}\colon X^{\mathrm{var}} \to (\varphi(X))^{\mathrm{var}}$. □

1.4. **Einfache k-Räume.**

In Abschnitt 1.4 werden wir den Begriff der *Vereinfachung* eines k-Raumes einführen. Die Folgerung 1.4.10 liefert, dass sich jeder irreduzible *einfache k-Raum* in eine Prävarietät einbetten lässt. Konstruktion 1.4.6 wurde in [18] eingeführt. Die Aussage aus Satz 1.4.7 wurde in [18] vermerkt, jedoch nicht bewiesen. Wir geben hier vollständigkeitshalber einen Beweis dafür an.

Definition 1.4.1. Eine *Vereinfachung* eines k-Raumes X ist ein k-Raum X^{s} mit einem Morphismus $\mu\colon X \to X^{\mathrm{s}}$, sodass gilt:

(i) Der Morphismus $\mu\colon X \to X^{\mathrm{s}}$ ist surjektiv und lokal invertierbar, d.h. für jedes $x \in X$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq X$, sodass $U^{\mathrm{s}} := \mu(U)$ offen in X^{s} und $\mu_{|U}\colon U \to U^{\mathrm{s}}$ ein Isomorphismus ist.

(ii) Für jeden surjektiven lokal invertierbaren Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ von k-Räumen existiert genau ein Morphismus $\widetilde{\mu}\colon Y \to X^{\mathrm{s}}$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\mu"'] & & Y \arrow[dl, "\widetilde{\mu}"] \\ & X^s & \end{tikzcd}$$

Wir nennen X *einfach*, falls die Identität $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ eine Vereinfachung von X ist.

Bemerkung 1.4.2. Es sei $\mu\colon X \to X^{\mathrm{s}}$ eine Vereinfachung eines k-Raumes X. Dann ist der k-Raum X^{s} einfach und bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beispiel 1.4.3. Wir betrachten die Prävarietät $X := \mathbb{K}^* \cup \{0_1\} \cup \{0_2\}$. Dann ist X kein einfacher k-Raum, da der kanonische Morphismus $\mu\colon X \to \mathbb{K}$ ein surjektiver lokal invertierbarer Morphismus aber kein Isomorphismus ist. Der Morphismus μ ist die Vereinfachung von X.

Vereinbarung 1.4.4. Für eine $\mathbb{K}$-Algebra A bezeichnen wir die Menge der Lokalisierungen von A nach einem maximalen Ideal von A mit $\mathrm{Loc}(A)$.

Bemerkung 1.4.5. Es sei $\mathbb{K} \subseteq A \subseteq \mathbb{L}$, wobei A eine affine $\mathbb{K}$-Algebra mit Quotientenkörper $\mathbb{L}$ ist. Dann gilt:

(i) Die Zuordnung $\iota\colon \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Loc}(A)$, $\mathfrak{m} \mapsto A_{\mathfrak{m}}$ ist bijektiv.

(ii) Ist $g \in A$ mit $g \notin \mathfrak{m}$ für ein $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$, so gilt $\mathfrak{m}_g \in \mathrm{Spec}(A_g)$ und $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_g \cap A$.

(iii) Für $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$ erlaubt $A_{\mathfrak{m}}$ eine Zerlegung $A_{\mathfrak{m}} = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum, wobei $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} \cdot 1_A \subseteq A$ identifiziert wird. Somit erhalten wir für jedes $f \in A_{\mathfrak{m}}$ eine eindeutige Zerlegung $f = f' + f(A_{\mathfrak{m}})$ mit $f' \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}$ und $f(A_{\mathfrak{m}}) \in \mathbb{K}$.

Konstruktion 1.4.6. Es sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung. Wir betrachten die Menge

$$\mathbb{X}_{\mathbb{L}} \quad := \quad \{A_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathbb{L};\ A \text{ affine } \mathbb{K}\text{-Algebra mit Quotientenkörper } \mathbb{L},\ \mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)\}$$

mit der Topologie erzeugt durch die (offenen) Mengen $\mathrm{Loc}(A)$, wobei A eine affine $\mathbb{K}$-Algebra mit Quotientenkörper $\mathbb{L}$ ist. Mit Bemerkung 1.4.5 (iii) ist für $R \in \mathbb{X}_{\mathbb{L}}$

und jedes $f \in R$ die Zuordnung $f(R) := f(A_{\mathfrak{m}})$ wohldefiniert, wobei $R = A_{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(A)$ und A eine affine $\mathbb{K}$-Algebra mit Quotientenkörper $\mathbb{L}$ ist. Für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{X}_{\mathbb{L}}$ setzen wir

$$\mathcal{O}_{\mathbb{X}_{\mathbb{L}}}(U) \quad := \quad \{f\colon U \to \mathbb{K};\ f \in R \text{ für alle } R \in U\}.$$

und erhalten dadurch eine Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{X}_{\mathbb{L}}}$ auf $\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$. Somit ist $\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$ ein Raum mit Funktionen.

Satz 1.4.7. *Die Abbildung* $\iota\colon \operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Loc}(A)$, $\mathfrak{m} \mapsto A_{\mathfrak{m}}$ *ist ein Isomorphismus von Räumen mit Funktionen, wobei* $\operatorname{Loc}(A)$ *als offener Unterraum von* $\mathbb{X}_{\mathbb{L}}$ *aufgefasst wird.*

Beweis. Nach Konstruktion der Garben $\mathcal{O}_{\mathbb{X}_{\mathbb{L}}}$ bzw. $\mathcal{O}_{\operatorname{Loc}(A)}$ reicht es zu zeigen, dass ι bijektiv, offen und stetig ist. Wir wissen nach Bemerkung 1.4.5 (i), dass ι eine bijektive Abbildung ist. Die Mengen $\operatorname{Spec}(A_f)$ mit $f \in A$ bilden eine Basis der Topologie und sind außerdem affin. Dies liefert, dass ι eine offene Abbildung ist.

Es ist noch zu zeigen, dass ι stetig ist. Dazu sei eine offene Menge $U \subseteq \operatorname{Loc}(A)$ gegeben. Zu U existiert eine affine $\mathbb{K}$-Algebra B mit Quotientenkörper $\mathbb{L}$ und $U = \operatorname{Loc}(A) \cap \operatorname{Loc}(B)$. Zu jedem $R \in \operatorname{Loc}(A) \cap \operatorname{Loc}(B)$ gibt es Ideale $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(A)$ und $\mathfrak{n} \in \operatorname{Spec}(B)$ mit $R = A_{\mathfrak{m}} = B_{\mathfrak{n}}$. Da A und B affine $\mathbb{K}$-Algebren sind, existieren $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{L}$ mit $A = \mathbb{K}[f_1, \ldots, f_n]$, $B = \mathbb{K}[g_1, \ldots, g_m]$. Weiter existieren Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \gamma_1, \ldots \gamma_m \in A$ mit $\gamma_1, \ldots \gamma_m \notin \mathfrak{m}$ und Elemente $\beta_1, \ldots, \beta_n, \delta_1, \ldots, \delta_m \in B$ mit $\delta_1, \ldots, \delta_m \notin \mathfrak{n}$, sodass gilt

$$f_i \quad = \quad \frac{\beta_i}{\delta_i} \in B_{\mathfrak{n}} = A_{\mathfrak{m}} \qquad \text{und} \qquad g_j \quad = \quad \frac{\alpha_j}{\gamma_j} \in A_{\mathfrak{m}} = B_{\mathfrak{n}}.$$

Wir setzen $\gamma := \prod \gamma_j \in A \setminus \mathfrak{m}$, $\delta := \prod \delta_i \in B \setminus \mathfrak{n}$ und betrachten weiter die affine $\mathbb{K}$-Algebra $C := \mathbb{K}[f_1, \ldots f_n, g_1, \ldots g_m]$. Die $\mathbb{K}$-Algebra C hat als Quotientenkörper $\mathbb{L}$ und es gilt in $\mathbb{L}$:

(i) $A \subseteq C \subseteq C_\gamma$ und $B \subseteq C \subseteq C_\delta$
(ii) $A_\gamma = C_\gamma$ und $B_\delta = C_\delta$.

Die Aussage in (i) ist offensichtlich. Zu (iii): Wir zeigen zuerst $A_\gamma = C_\gamma$. Nach (i) wissen wir, dass $A_\gamma \subseteq C_\gamma$. Es sei $f \in C_\gamma$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} f \quad = \quad \frac{f'}{\gamma^l} \quad &= \quad \frac{\sum_\nu a_\nu f_1^{\nu_1} \cdots f_n^{\nu_n} g_1^{\nu_{n+1}} \cdots g_m^{\nu_{n+m}}}{\gamma^l} \\ &= \quad \frac{\sum_\nu a_\nu f_1^{\nu_1} \cdots f_n^{\nu_n} (\frac{\alpha_1}{\gamma_1})^{\nu_{n+1}} \cdots (\frac{\alpha_m}{\gamma_m})^{\nu_{n+m}}}{\gamma^l} \\ &= \quad \frac{\sum_\nu a_\nu f_1^{\nu_1} \cdots f_n^{\nu_n} \gamma^l h}{\gamma^{l'}} \in A_\gamma, \end{aligned}$$

wobei $h \in A$. Die Aussage $B \subseteq C \subseteq C_\delta$ bweist man analog.

Weiter betrachten wir die maximalen Ideale $\mathfrak{m}_C := \mathfrak{m}_\gamma \cap C$ und $\mathfrak{n}_C := \mathfrak{n}_\delta \cap C$ in C. Da A, B und C affine $\mathbb{K}$-Algebren sind, erhalten wir

$$\begin{aligned} C_{\mathfrak{m}_c} \quad = \quad (C_\gamma)_{\mathfrak{m}_\gamma} \quad = \quad (A_\gamma)_{\mathfrak{m}_\gamma} \quad = \quad A_{\mathfrak{m}} \quad &= \quad B_{\mathfrak{n}} \\ &= \quad (B_\delta)_{\mathfrak{n}_\delta} \\ &= \quad (C_\delta)_{\mathfrak{n}_\delta} \quad = \quad C_{\mathfrak{n}_C}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\delta \notin \mathfrak{m}_c = \mathfrak{n}_c$. Es gilt weiter:

$$B \quad \subseteq \quad B_\delta \quad \subseteq \quad (C_\delta)_\gamma \quad = \quad C_{(\delta\gamma)} \quad = \quad (C_\gamma)_\delta \quad = \quad (A_\gamma)_\delta.$$

Dies liefert insbesondere, dass

$$\mathrm{Spec}((A_\gamma)_\delta) \quad \subseteq \quad \mathrm{Spec}(A) \cap \mathrm{Spec}(B)$$

gilt. Für alle maximalen Ideale $\widetilde{\mathfrak{m}} \in \mathrm{Spec}((A_\gamma)_\delta)$ gilt:

$$A_{\widetilde{\mathfrak{m}} \cap A} \quad = \quad ((A_\gamma)_\delta)_{\widetilde{\mathfrak{m}}} \quad = \quad ((C_\gamma)_\delta)_{\widetilde{\mathfrak{m}}} \quad = \quad (B_\delta)_{\widetilde{\mathfrak{m}} \cap B_\delta} \quad = \quad B_{\widetilde{\mathfrak{m}} \cap B}.$$

Also ist $\mathrm{Loc}((A_\gamma)_\delta) \subseteq \mathrm{Loc}(A) \cap \mathrm{Loc}(B)$, was äquivalent zu $\mathrm{Spec}((A_\gamma)_\delta)) \subseteq \iota^{-1}(U)$ ist. Somit ist ι ein Isomorphismus von Räumen mit Funktionen. □

Satz 1.4.8. *Es sei X ein irreduzibler k-Raum. Dann ist $\mu\colon X \to \mathbb{X}_{\mathbb{K}(X)}$, $x \mapsto \mathcal{O}_{X,x}$ ein Morphismus von Räumen mit Funktionen. Insbesondere ist $\mu\colon X \to \mu(X)$ eine Vereinfachung von X.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $\mu\colon X \to \mathbb{X}_{\mathbb{K}(X)}$ ein wohldefinierter Morphismus ist. Dazu betrachten wir zuerst den Fall, dass X ein quasiaffiner k-Raum ist. Wir wollen zeigen, dass μ wohldefiniert ist. Zu X existiert eine dominante Einbettung $\varphi\colon X \to Z'$, wobei Z' eine affine Varietät ist. Nach Lemma 1.3.23 ist $A := \varphi^*(\mathcal{O}_{Z'}(Z')) \subseteq \mathbb{K}(X)$ eine affine $\mathbb{K}$-Algebra mit $A \subseteq \mathcal{O}_X(X)$. Somit gilt $A_{\mathfrak{m}_x \cap A} \subseteq \mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_x}$. Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$A_{\mathfrak{m}_x \cap A} \quad = \quad \mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_x}.$$

Folgerung 1.1.8 liefert, dass $\varphi^*\colon \mathcal{O}_{Z'}(Z')_{\mathfrak{m}_{\varphi(x)}} \to \mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_x}$ ein Isomorphismus ist. Also gibt es zu jedem $f \in \mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_x}$ Funktionen $g, h \in \mathcal{O}_{Z'}(Z')$ mit $h \notin \mathfrak{m}_{\varphi(x)}$ und $\varphi^*(g/h) = f$. Somit ist $A_{\mathfrak{m}_x \cap A} = \mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{m}_x}$. Dies liefert, dass μ wohldefiniert ist.

Bleibt zu zeigen, dass μ ein Morphismus ist. Nach Lemma 1.2.15 ist die Abbildung $\iota\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$ mit $x \mapsto \mathfrak{m}_x \cap A$ eine Einbettung. Somit ist $\mu\colon X \to \mathbb{X}_{\mathbb{K}(X)}$ nach Satz 1.4.7 ein Morphismus. Damit ist $\mu\colon X \to \mu(X)$ ein Isomorphismus und $\mu(X)$ insbesondere ein quasiaffiner k-Raum.

Ist X ein k-Raum und $x \in X$ ein beliebiger Punkt, dann gilt für jede quasiaffine offene Menge $x \in U \subseteq X$:

$$\mathcal{O}_{X,x} \quad = \quad \mathcal{O}_{U,x}.$$

Somit ist $\mu\colon X \to \mathbb{X}_{\mathbb{K}(X)}$ eine wohldefinierte Abbildung. Da für jede quasiaffine offene Teilmenge $U \subseteq X$ die Abbildung $\mu_{|U}\colon U \to \mu(U)$ ein Morphismus ist, ist $\mu\colon X \to \mathbb{X}_{\mathbb{K}(X)}$ ein Morphismus.

Es sei $X_1, \ldots, X_n \subseteq X$ eine offene quasiaffine Überdeckung von X. Dann gilt

$$\mu(X) \quad = \quad \bigcup \mu(X_i).$$

Somit ist $\mu(X)$ ein k-Raum und $\mu\colon X \to \mu(X)$ ein surjektiver lokal invertierbarer Morphismus. Zum Nachweis der universellen Eigenschaft sei $\varphi\colon X \to Y$ ein surjektiver lokal invertierbarer Morphismus von k-Räumen. Wir definieren

$$\mu'\colon\ Y \to\ \mu(X), \qquad y\ \mapsto\ \mu(\varphi^{-1}(y)).$$

Da μ und φ' lokal invertierbar sind, reicht es zu zeigen, dass μ' wohldefiniert ist. Es seien $x, x' \in \varphi^{-1}(y)$. Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X,x'}$ gilt. Zu x und x' existieren offene Mengen $x \in U_x \subseteq X$ bzw. $x' \in U_{x'} \subseteq X$ und $V_x, V_{x'} \subseteq Y$, sodass

$\varphi_{|U_x}\colon U_x \to V_x$ bzw. $\varphi_{|U_{x'}}\colon U_{x'} \to V_{x'}$ Isomorphismen sind. Die Isomorphismen $\varphi_{|U_x}$ und $\varphi_{|U_{x'}}$ liefern wiederum Isomorphismen

$$\begin{aligned}
(\varphi^*_{|U_x})_x &: \mathcal{O}_Y(V_x \cap V_{x'})_{\mathfrak{m}_y} \to \mathcal{O}_{U_x}(U_x)_{\mathfrak{m}_x}, & \frac{f}{g} &\mapsto \frac{f \circ \varphi_{|U_x}}{g \circ \varphi_{|U_x}} \\
(\varphi^*_{|U_{x'}})_{x'} &: \mathcal{O}_Y(V_x \cap V_{x'})_{\mathfrak{m}_y} \to \mathcal{O}_{U_{x'}}(U_{x'})_{\mathfrak{m}_{x'}}, & \frac{f'}{g'} &\mapsto \frac{f' \circ \varphi_{|U_{x'}}}{g' \circ \varphi_{|U_{x'}}}.
\end{aligned}$$

In $\mathbb{K}(X)$ gilt somit

$$\mathcal{O}_{X,x} \quad = \quad \mathcal{O}_{U_x,x} \quad = \quad \mathcal{O}_{U_{x'},x'} \quad = \quad \mathcal{O}_{X,x'}.$$

□

Folgerung 1.4.9. *Ein irreduzibler k-Raum X ist genau dann einfach, wenn für je zwei Punkte $x, x' \in X$ mit $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X,x'}$ in $\mathbb{K}(X)$ stets $x = x'$ gilt.*

Folgerung 1.4.10. *Es sei X ein irreduzibler einfacher k-Raum. Dann existiert eine Prävarietät Y' und eine dominante Einbettung $\mu\colon X \to Y'$.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass eine Einbettung existiert. Wir betrachten die Abbildung

$$\mu\colon X \to \mathbb{X}_{\mathbb{K}(X)}, \qquad x \mapsto \mathcal{O}_{X,x}.$$

Nach Satz 1.4.8 ist die Abbildung $\mu\colon X \to \mu(X)$ die Vereinfachung von X. Da X einfach ist, können wir folgern, dass $\mu\colon X \to \mu(X)$ schon ein Isomorphismus ist. Es seien $X_1, \ldots, X_m$ eine quasiaffine offene Überdeckung von X. Zu jedem i existiert eine dominante Einbettung $\varphi_i\colon X_i \to Z'_i$, wobei Z'_i eine affine Varietät ist. Nach Lemma 1.3.23 ist $A_i := \varphi_i^*(\mathcal{O}_{Z'_i}(Z'_i)) \subseteq \mathbb{K}(X)$ eine affine $\mathbb{K}$-Algebra mit $A_i \subseteq \mathcal{O}_X(X_i)$. Weiter ist die Abbildung $\iota_i\colon X_i \to \operatorname{Spec}(A_i)$ mit $x \mapsto \mathfrak{m}_x \cap A_i$ nach Lemma 1.2.15 eine konstruierbare Einbettung. Wir setzen

$$Y' \quad := \quad \bigcup_{i=1}^m \operatorname{Loc}(A_i) \ \subseteq \ \mathbb{X}_{\mathbb{K}(X)}.$$

Dann ist Y' eine Prävarietät. Weiter ist $\mu(X_i) \subseteq \operatorname{Loc}(A_i)$. Somit ist $\mu\colon X \to Y'$ eine Einbettung. □

1.5. **Produkte und Separiertheit.**

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass in der Kategorie der k-Räume Produkte existieren. Wie im Fall der Prävarietäten werden wir den Begriff des *separierten* k-Raumes einführen. Wir werden zeigen, dass sich der Begriff wie in der Theorie der Varietäten verhält. Zum Beispiel gilt Folgendes: Es seien $\psi, \varphi \colon X \to Y$ zwei Morphismen von k-Räumen, wobei Y ein separierter k-Raum ist. Falls ψ und φ auf einer dichten Teilmenge übereinstimmen, stimmen sie schon auf ganz X überein siehe Folgerung 1.5.12.

Satz 1.5.1. *Es seien X und Y k-Räume. Dann besitzt das kartesische Produkt $X \times Y$ die Struktur eines k-Raumes, sodass es zusammen mit*

$$\pi_X \colon X \times Y \ \to \ X,\ (x,y) \ \mapsto \ x, \qquad \pi_Y \colon X \times Y \ \to \ Y,\ (x,y) \ \mapsto \ y$$

zu einem Produkt in der Kategorie der k-Räume wird.

Lemma 1.5.2. *Es seien X und Y quasiaffine k-Räume. Dann besitzt das kartesische Produkt $X \times Y$ die Struktur eines quasiaffinen k-Raumes, sodass es zusammen mit*

$$\pi_X \colon X \times Y \to \ X,\ (x,y) \ \mapsto \ x, \qquad \pi_Y \colon X \times Y \to \ Y,\ (x,y) \ \mapsto \ y$$

zu einem Produkt in der Kategorie der k-Räume wird.

Beweis. Fall 1: Es gibt affine Varietäten X' und Y' mit $X \subseteq X'$ und $Y \subseteq Y'$. Da Produkte von lokal abgeschlossenen Mengen wieder lokal abgeschlossen sind, ist das mengentheoretische Produkt $X \times Y$ ein konstruierbarer Unterraum von $X' \times Y'$ und somit ein quasiaffiner k-Raum. Die Projektionen π_X und π_Y sind Einschränkungen von Morphismen und damit Morphismen.

Zum Nachweis der universellen Eigenschaft eines Produktes seien ein k-Raum Z und Morphismen $\varphi \colon Z \to X$ sowie $\psi \colon Z \to Y$ gegeben. Wir setzen

$$\kappa \colon Z \ \to \ X \times Y \ \subseteq \ X' \times Y', \qquad z \ \mapsto \ (\varphi(z), \psi(z)).$$

Offensichtlich erfüllt κ die universelle Eigenschaft des Produktes. Da φ und ψ Morphismen sind, gilt $\varphi^*(f) \cdot \psi^*(g) \in \mathcal{O}_z(Z)$ für jedes $f \in \mathcal{O}_{X'}(X')$ und jedes $g \in \mathcal{O}_{Y'}(Y')$. Also ist die Abbildung

$$\kappa^* \colon \mathcal{O}_{X'}(X') \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_{Y'}(Y') \ \to \ \mathcal{O}_Z(Z), \qquad \sum f_i \otimes g_j \ \mapsto \ \sum f_i g_j.$$

ein Homomorphismus und κ nach Satz 1.2.1 somit ein Morphismus.

Fall 2: Die quasiaffinen k-Räume X und Y sind, als Räume mit Funktionen, isomorph zu konstruierbaren Unterräumen $X_1 \subseteq X_1'$ und $Y_1 \subseteq Y_1'$ mit affinen Varietäten X_1' und Y_1', etwa vermöge $\imath \colon X \to X_1$, $\jmath \colon Y \to Y_1$. Wir wissen aus Fall 1, dass $X_1 \times Y_1$ ein quasiaffiner k-Raum ist. Die Struktur von $X_1 \times Y_1$ können wir mit der Bijektion $\imath \times \jmath \colon X \times Y \to X_1 \times Y_1$ auf $X \times Y$ transportieren. Somit ist $X \times Y$ ein Raum mit Funktionen, der isomorph zu $X_1 \times Y_1$ ist und damit insbesondere ein quasiaffiner k-Raum ist. Der Nachweis der universellen Eigenschaft des Produktes $X \times Y$ lässt sich auf natürliche Weise auf die universelle Eigenschaft von $X_1 \times Y_1$ zurückführen. □

Lemma 1.5.3. *Es seien X und Y k-Räume mit einem Produkt Z und es seien $A \subseteq X$ sowie $B \subseteq Y$ offene (abgeschlossene, lokal abgeschlossene) Unterräume. Dann ist*

$$C \quad := \quad \pi_X^{-1}(A) \ \cap \ \pi_Y^{-1}(B) \quad \subseteq \quad Z$$

ein offener (abgeschlossener, lokal abgeschlossener) Unterraum von Z. Als k-Raum ist C ein Produkt der k-Räume von A und B.

Beweis. Zunächst ist klar, dass die Menge C offen (bzw. abgeschlossen, lokal abgeschlossen) in Z ist, wenn Entsprechendes für $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ gilt. Die Projektionen $\pi_A\colon C \to A$ und $\pi_B\colon C \to B$ sind Einschränkungen von Morphismen und damit Morphismen.

Zum Nachweis der universellen Eigenschaft eines Produktes seien ein k-Raum W und Morphismen $\varphi\colon W \to A$ sowie $\psi\colon W \to B$ gegeben. Die universelle Eigenschaft des Produktes Z liefert einen Morphismus $\kappa\colon W \to Z$ mit

$$\pi_X \circ \kappa \quad = \quad \iota \circ \varphi, \qquad\qquad \pi_Y \circ \kappa \quad = \quad \jmath \circ \varphi,$$

wobei $\iota\colon A \to X$ und $\jmath\colon B \to Y$ die Inklusionsabbildungen bezeichnen. Nach konstruktion gilt $\kappa(W) \subseteq C$ und somit ist $\kappa\colon W \to C$ ein Morphismus. □

Erinnerung 1.5.4. Es sei I eine endliche Indexmenge, und es seien X_i, $i \in I$, k-Räume gegeben. Weiter seien für jedes Paar $i, j \in I$ folgende *Verklebedaten* gegeben:

- offene Mengen $X_{ij} \subseteq X_i$, wobei $X_{ii} = X_i$.
- Isomorphismen $\varphi_{ij}\colon X_{ij} \to X_{ji}$ von k-Räumen, sodass
  - $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$,
  - $\varphi_{ij}(X_{ij} \cap X_{ik}) = X_{ji} \cap X_{jk}$,
  - $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij|X_{ij}\cap X_{ik}} = \varphi_{ik|X_{ij}\cap X_{ik}}$

Die Isomorphismen bezeichnen wir als *Verklebungsabbildungen*. Wir betrachten nun die disjunkte Vereinigung

$$\Omega \quad := \quad \bigcup_{i\in I} X_i.$$

Da jedes X_i ein k-Raum ist, wird auch Ω zu einem k-Raum. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf Ω durch

$$X_{ij} \ni x \quad \sim \quad \varphi_{ij}(x) \in X_{ji}.$$

Es sei $X := \Omega/\sim$ der zugehörige Restklassenraum und es sei $\pi\colon \Omega \to X$ die zugehörige Restklassenabbildung.

Wir versehen X mit der Quotiententopologie bezüglich π. Weiter definieren wir die Strukturgarbe auf X. Für eine offene Teilmenge U von X setzen wir

$$\mathcal{O}_X(U) \quad := \quad \{f\colon U \to \mathbb{K};\ f \circ \pi \in \mathcal{O}_\Omega(\pi^{-1}(U))\}.$$

Somit ist X ein k-Raum und $\pi\colon \Omega \to X$ ein Morphismus. Weiter sind die Einschränkungen $\varphi_i := \pi_{|X_i}\colon X_i \to X$ Isomorphismen auf offene Unterräume von X.

Schreibweise 1.5.5. Es seien X, Y zwei k-Räume, U offner Unterraum von X und $V \subseteq Y$ ein offener Unterraum von Y. Weiter sei $\psi\colon U \to V$ ein Isomorphismus. Dann können wir X und Y entlang von π verkleben. Wir schreiben dafür $X \cup_\psi Y$.

Beweis von Satz 1.5.1. Wir überdecken X und Y durch offene quasiaffine k-Räume $U_1, \ldots, U_n \subseteq X$ bzw. $V_1, \ldots, V_m \subseteq Y$. Nach Lemma 1.5.2 haben wir Produkte $U_i \times V_j$. Die Idee ist, wie bei Prävarietäten, die k-Raumstruktur auf $X \times Y$ durch Verkleben dieser Produkte zu erhalten. Das Lemma 1.5.3 liefert, dass sämtliche Produkte und Inklusionen Morphismen sind. Damit sind alle Voraussetzungen für ein Verkleben gegeben. Wie bei Prävarietäten zeigt man, dass $X \times Y$ ein k-Raum ist und die universelle Eigenschaft des Produktes erfüllt. □

Definition 1.5.6. Es sei X ein k-Raum. Die *Diagonale* von X ist die Teilmenge

$$\Delta_X \quad := \quad \{(x,x);\, x \in X\} \quad \subseteq \quad X \times X.$$

Wir nennen X *separiert*, falls Δ_X abgeschlossen in $X \times X$ ist.

Bemerkung 1.5.7.

(i) Die Diagonale Δ_X eines k-Raumes X ist lokal abgeschlossen in $X \times X$.
(ii) Konstruierbare Unterräume von separierten k-Räumen sind separiert.
(iii) Produkte von separierten k-Räumen sind separiert.
(iv) Jeder quasiaffine k-Raum ist separiert.

Bemerkung 1.5.8. Die Kategorie der dc-subsets ist nach Folgerung 1.2.13 und Bemerkung 1.5.7 (ii) eine volle Unterkategorie der Kategorie der separierten k-Räume.

Definition 1.5.9. Eine *Kurve* ist eine irreduzible eindimensionale Varietät. Eine *Kurve in einem k-Raum* X ist ein Morphismus $\gamma\colon C \to X$ mit einer Kurve C und $\dim(\gamma(C)) = 1$.

Lemma 1.5.10 (Kurvenlemma)**.** *Es seien X ein k-Raum, $U \subseteq X$ ein dichter offener Unterraum und $x_0 \in X \setminus U$. Dann gibt es eine Kurve $\gamma\colon C \to X$ in X und ein $c_0 \in C$ mit*

$$\gamma(C \setminus \{c_0\}) \quad \subseteq \quad U, \qquad\qquad \gamma(c_0) \quad = \quad x_0.$$

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall, dass X ein quasiaffiner k-Raum ist. Zu X gibt es eine affine Varietät X' mit $X \sqsubseteq X'$. Der offene dichte Unterraum U von X ist ein dichter konstruierbarer Unterraum von X'. Da x_0 nicht in U liegt, gilt $x_0 \in X' \setminus U^{\mathrm{var}}$. Nach dem Kurvenlemma für Prävarietäten existiert eine Kurve $\gamma\colon C \to X'$ in X' mit $\gamma(C \setminus \{c_0\}) \subseteq U^{\mathrm{var}}$ und $\gamma(c_0) = x_0$. Wegen $\gamma(C) \subseteq U^{\mathrm{var}} \cup \{x_0\}$ ist $\gamma\colon C \to X$ eine Kurve in X mit den gewünschten Eigenschaften.

Im allgemeinen Fall betrachten wir einen offenen quasiaffinen k-Raum $X_0 \subseteq X$ mit $x_0 \in X_0$. Da U dicht in X liegt, ist $U_0 := U \cap X_0$ dicht in X_0. Nach dem quasiaffinen Fall gibt es eine Kurve $\gamma\colon C \to X_0$ in X_0 mit $\gamma(C \setminus \{c_0\}) \subseteq U_0$ und $\gamma(c_0) = x_0$. Analog wie im ersten Fall, zeigen wir, dass $\gamma\colon C \to X$ ein Kurve in X ist. □

Satz 1.5.11. *Es sei X ein k-Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) *X ist separiert.*
(ii) *Für jeden k-Raum Y und je zwei Morphismen $\varphi, \psi\colon Y \to X$ ist die Menge $\{y \in Y;\, \varphi(x) = \psi(y)\}$ abgeschlossen in Y.*
(iii) *Jeder Morphismus $C \setminus \{c_0\} \to X$ mit einer Kurve C besitzt höchstens eine Fortsetzung $C \to X$.*

Beweis. Es ist nur zu „*(iii)* ⇒ *(i)*" etwas zu zeigen. Nehmen wir an, X sei nicht separiert. Dann gibt es einen Punkt (x, x') im Abschluss $\overline{\Delta_X}$ von Δ_X in $X \times X$, welcher nicht in Δ_X liegt. Insbesondere gilt $x \neq x'$. Nach dem Kurvenlemma 1.5.10 gibt es eine Kurve $\gamma\colon C \to \overline{\Delta_X}$ und einen Punkt $c_0 \in C$ mit

$$\gamma(c_0) \quad = \quad (x, x'), \qquad\qquad \gamma(C \setminus \{c_0\}) \quad \subseteq \quad \Delta_X.$$

Die Projektionen $\pi_1, \pi_2 \colon X \times X \to X$ liefern dann Kurven $\gamma_i := \pi_i \circ \gamma \colon C \to \Delta_X$, welche auf $C \setminus \{c_0\}$ übereinstimmen. Es gilt jedoch $\gamma_1(c_0) = x \neq x' = \gamma_2(c_0)$, Widerspruch. $\square$

Folgerung 1.5.12. *Es seien X ein k-Raum, Y ein separierter k-Raum und Morphismen $\varphi, \psi \colon X \to Y$. Gilt $\varphi_{|U} = \psi_{|U}$ für eine dichte Teilmenge $U \subseteq X$, so folgt $\psi = \varphi$.*

Lemma 1.5.13. *Es seien X ein irreduzibler k-Raum, Y ein irreduzibler separierter k-Raum und $\varphi, \psi \colon X \to Y$ Morphismen mit $\varphi^*(f) = \psi^*(f)$ für alle $f \in \mathbb{K}(Y)$. Dann gilt $\psi = \varphi$.*

Beweis. Wir setzen $X_1 := X^{\mathrm{var}} \cap \varphi^{-1}(Y^{\mathrm{var}})$ und $X_2 := X^{\mathrm{var}} \cap \psi^{-1}(Y^{\mathrm{var}})$. Wegen Folgerung 1.5.12 reicht es zu zeigen, dass $\varphi_{|X_1 \cap X_2} = \psi_{|X_1 \cap X_2}$ gilt. Die Morphismen

$$\varphi_{|X_1 \cap X_2} \colon X_1 \cap X_2 \to Y^{\mathrm{var}} \qquad \text{und} \qquad \psi_{|X_1 \cap X_2} \colon X_1 \cap X_2 \to Y^{\mathrm{var}}$$

sind Morphismen von Prävarietäten mit $\varphi^*(f) = \psi^*(f)$ für alle $f \in \mathbb{K}(Y^{\mathrm{var}})$. Da Y separiert ist, liefert Bemerkung 1.5.7, dass Y^{var} eine Varietät ist. Mit Lemma 1.2.6 folgt $\varphi_{|X_1 \cap X_2} = \psi_{|X_1 \cap X_2}$. $\square$

Folgerung 1.5.14. *Es seien $\varphi \colon X \to Y$ und $\psi \colon Y \to X$ Morphismus von irreduziblen separierten k-Räumen mit $\varphi^* \circ \psi^* = \mathrm{id}_{\mathbb{K}(X)}$ und $\psi^* \circ \varphi^* = \mathrm{id}_{\mathbb{K}(Y)}$. Dann gilt $\varphi^{-1} = \psi$.*

Satz 1.5.15. *Jeder irreduzible separierte k-Raum X ist einfach.*

Beweis. Es sei dazu $\varphi \colon X \to Y$ ein surjektiver lokal invertierbarer Morphismus von k-Räumen gegeben. Für jedes $y \in Y$ existieren offene Mengen $y \in V_y$ in Y, U_y in X, sodass $\psi_y := \varphi_{|U_y} \colon U_y \to V_y$ Isomorphismen sind. Somit haben wir für jedes $y \in Y$ Isomorphismen $(\psi^*)_y^{-1} \colon \mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}(Y)$. Für alle $y, y' \in Y$ gilt $(\psi^*)_y^{-1}(f) = (\psi^*)_{y'}^{-1}(f)$, wobei $f \in \mathbb{K}(X)$. Mit Lemma 1.5.13 gilt $\psi^{-1}_{y_{|V_y \cap V_{y'}}} = \psi^{-1}_{y'_{|V_y \cap V_{y'}}}$ für alle $y, y' \in Y$. Also ist φ ein Isomorphisms und somit X einfach. $\square$

Folgerung 1.5.16. *Es sei X ein irreduzibler separierter k-Raum, dann existiert eine einfache Prävarietät Y' und eine konstruierbare Einbettung $\iota \colon X \to Y'$.*

Beweis. Folgt aus Folgerung 1.4.10 und Satz 1.5.15. $\square$

Bemerkung 1.5.17. Im Allgemeinen ist Y' aus Folgerung 1.5.16 nicht separiert. Es gibt sogar irreduzible separierte k-Räume, für die es keine konstruierbare Einbettung in eine Varietät gibt siehe Kapitel 3, Beispiel 3.6.31.

1.6. **Normale k-Räume.**

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass es zu jedem k-Raum eine *Normalisierung* gibt.

Satz 1.6.1. *Es sei X ein einfacher normaler k-Raum. Dann existiert eine Einbettung $\iota\colon X \to Y'$ mit einer einfachen normaler Prävarietät Y'.*

Beweis. Folgt sofort aus Lemma 1.2.19 und dem Beweis von Satz 1.4.8 . □

Satz 1.6.2. *Es sei X ein irreduzibler k-Raum. Dann gibt es einen normalen k-Raum $\widetilde{X}$ und einen surjektiven Morphismus $\nu\colon \widetilde{X} \to X$ mit folgender Eigenschaft:*

(Nor) *Ist $\varphi\colon Y \to X$ ein dominanter Morphismus von einem normalen k-Raum Y nach X, so gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon Y \to \widetilde{X}$ mit dem das folgende Diagramm kommutativ wird:*

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "\nu"] \\ Y \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

Definition 1.6.3. Man nennt den Morphismus $\nu\colon \widetilde{X} \to X$ aus Satz 1.6.2 eine *Normalisierung von X.*

Bemerkung 1.6.4. Es sei $\nu\colon \widetilde{X} \to X$ eine Normalisierung eines k-Raumes X. Dann ist der k-Raum $\widetilde{X}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Lemma 1.6.5. *Es sei $\nu\colon \widetilde{X'} \to X'$ eine Normalisierung der Prävarietät X' in der Kategorie der Prävarietäten. Dann ist die Abbildung $\nu\colon \widetilde{X'} \to X'$ eine Normalisierung in der Kategorie der k-Räume.*

Beweis. Es sei $\varphi\colon Y \to X'$ ein dominanter Morphismus von einem normalen k-Raum Y nach X'. Zunächst betrachten wir den Fall, dass Y quasiaffin ist. Mit Lemma 1.2.19 können wir annehmen, dass $Y \sqsubseteq Y'$ gilt, mit einer affinen normalen Varietät Y'. Die Aussage folgt dann sofort mit Satz 1.2.8.

Ist Y ein beliebiger k-Raum, so wählen wir eine Überdeckung $Y_1, \dots, Y_n$ durch offene quasiaffine k-Räume. Zu jedem dominanten Morphismus $\varphi_{|Y_i}\colon Y_i \to X$ existiert nach obigem Fall ein Morphismus $\widetilde{\varphi}_i\colon Y_i \to \widetilde{X}$, der die universelle Eigenschaft **(Nor)** erfüllt. Da die Morphismen $\widetilde{\varphi}_i$ eindeutig sind, können wir sie zu einem eindeutig bestimmten Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon Y \to \widetilde{X}$ zusammensetzen, der die universelle Eigenschaft **(Nor)** erfüllt. □

Lemma 1.6.6. *Es seien X ein k-Raum und $\nu\colon \widetilde{X} \to X$ eine Normalisierung von X. Dann ist für jeden konstruierbaren Unterraum $Y \sqsubseteq X$, die Einschränkung $\nu_{|\nu^{-1}(Y)}\colon \nu^{-1}(Y) \to Y$ eine Normalisierung.*

Beweis. Es sei $\varphi\colon Z \to Y$ ein dominanter Morphismus mit einem normaler k-Raum Z. Dann ist φ ein dominanter Morphismus von Z nach X. Somit gibt es einen Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon Z \to \widetilde{X}$ mit $\widetilde{\varphi} \circ \nu = \varphi$. Es ist noch zu zeigen, dass $\widetilde{\varphi}(Z) \subseteq \nu^{-1}(Y)$ gilt. Dies folgt sofort aus $\widetilde{\varphi}(Z) = \nu^{-1}(\varphi(Z))$ und $\varphi(Z) \subseteq Y$. □

Beweis von Satz 1.6.2 . Falls X quasiaffin ist, folgt die Behauptung sofort aus Lemma 1.6.5 und Lemma 1.6.6. Ist X ein beliebiger k-Raum, wählen wir eine Überdeckung von X durch offene quasiaffine k-Räume $X_1, \ldots, X_n$. Diese besitzen Normalisierungen $\nu_i \colon \widetilde{X}_i \to X_i$. Mit $X_{ij} := X_i \cap X_j$ und $\widetilde{X}_{ij} := \nu^{-1}(X_{ij})$ erhalten wir kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X}_i \arrow[d, "\nu_i"'] & \widetilde{X}_{ij} \arrow[l] \arrow[r, "\varphi_{ij}", "\varphi_{ji}"'] \arrow[d, "\nu_i"'] & \widetilde{X}_{ji} \arrow[r] \arrow[d, "\nu_j"] & \widetilde{X}_j \arrow[d, "\nu_j"] \\
X_i & X_{ij} \arrow[l] \arrow[r, equal] & X_{ji} \arrow[r] & X_j
\end{tikzcd}$$

Dabei sind die Einschränkungen nach Lemma 1.6.6 Normalisierungen. Dies liefert die Existenz der Morphismen φ_{ij} und φ_{ji}. Weiter ergibt sich mit der Eindeutigkeit der Liftung, dass φ_{ij} und φ_{ji} zueinander invers sind. Es folgt weiter, wie im Fall der Prävarietäten, dass die Mengen $\widetilde{X}_i$ mit den Morphismen $\varphi \colon \widetilde{X}_{ij} \to \widetilde{X}_{ji}$ Verklebedaten sind.

Verkleben liefert dann einen normalen k-Raum $\widetilde{X}$ und die Morphismen ν_i lassen sich zu einem Morphismus zusammensetzen. Die universelle Eigenschaft **(Nor)** führt man, wie im Fall der Prävarietäten, auf den quasiaffinen Fall zurück. $\square$

1.7. **Lokal 1-volle k-Räume.**

Für einen k-Raum X und ein $f \in \mathcal{O}_X(X)$ gilt im Allgemeinen $\mathcal{O}_X(X_f) \neq \mathcal{O}_X(X)_f$ siehe Bemerkung 1.2.18. Wir werden in diesem Abschnitt die *lokal 1-vollen k-Räume* einführen und zeigen, dass für jeden lokal 1-vollen k-Raum X und jedes $f \in \mathcal{O}_X(X)$ stets $\mathcal{O}_X(X_f) = \mathcal{O}_X(X)_f$ gilt. Wir zeigen in Lemma 1.7.16, dass jeder lokal 1-volle k-Raum X eine quasiaffine offene Überdeckung $X_1, \dots, X_m$ besitzt, wobei $\mathcal{O}_X(X_i)$ endlich erzeugt ist.

Definition 1.7.1. Es seien X ein k-Raum und Y ein konstruierbarer Unterraum von X. Wir sagen, dass Y *klein (in X)* ist, falls $\dim(Y) \leq \dim(X) - 2$ ist.

Bemerkung 1.7.2. Es sei X ein irreduzibler k-Raum.

(i) Sind $Z \subseteq Y$ konstruierbare Unterräume von X mit Y klein in X und Z klein in Y, dann ist Z klein in X.
(ii) Ist Y ein konstruierbarer Unterraum von X mit $X \setminus Y$ klein, dann ist Y schon dicht in X.

Lemma 1.7.3. *Es seien X ein irreduzibler k-Raum, $Z \subseteq Y$ konstruierbare Unterräume von X mit $X \setminus Y$ klein in X und $Y \setminus Z$ klein in Y. Dann ist $X \setminus Z$ klein in X.*

Beweis. Es gilt, dass Z dicht in Y und Y dicht in X ist. Somit ist auch Z dicht in X. Nach Satz 1.3.10 ist $\dim(X) = \dim(Y) = \dim(Z)$. Es gilt

$$X \setminus Z \quad = \quad Y \setminus Z \,\cup\, (X \setminus Y) \setminus Z.$$

Weiter gilt $\dim((X \setminus Y) \setminus Z) \leq \dim(X \setminus Y)$. Es seien $C_1, \dots, C_r$ die irreduziblen Komponenten der Teilmenge $Y \setminus Z$ und $D_1, \dots, D_s$ die irreduziblen Komponenten der Teilmenge $(X \setminus Y) \setminus Z$. Weiter seien $\overline{C}_i$ bzw. $\overline{D}_j$ die jeweiligen Abschlüsse von C_i bzw. D_j in $X \setminus Z$. Dann sind $\overline{C}_1, \dots \overline{C}_r, \overline{D}_1, \dots \overline{D}_s$ die irreduziblen Komponenten von $X \setminus Z$. Mit Satz 1.3.10 gilt $\dim(C_j) = \dim(\overline{C}_j)$, und $\dim(D_j) = \dim(\overline{D}_j)$. Somit erhalten wir mit Satz 1.3.13:

$$\begin{aligned}
\dim(X \setminus Z) &= \max\left(\dim(Y \setminus Z), \dim((X \setminus Y) \setminus Z)\right) \\
&\leq \max\left(\dim(Y \setminus Z), \dim(X \setminus Y)\right) \\
&\leq \dim(X) - 2.
\end{aligned}$$

□

Lemma 1.7.4. *Es seien X ein irreduzibler k-Raum und X' eine normale Prävarietät mit $X \sqsubseteq X'$ und $X' \setminus X$ klein. Dann gilt $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{X'}(X')$.*

Beweis. Da $X' \setminus X$ klein ist, gilt $D' \cap X \neq \emptyset$ für jeden Primdivisor $D' \subseteq X'$. Somit folgt die Behauptung aus Lemma 1.2.20. □

Lemma 1.7.5. *Es seien X ein irreduzibler k-Raum, $X_1, \dots, X_m$ eine offene Überdeckung von X und Y ein konstruierbarer Unterraum von X. Weiter seien $X \setminus Y$ klein und $Y_i := X_i \cap Y$. Dann ist $Y_1, \dots, Y_m$ eine offene Überdeckung von Y mit $X_i \setminus Y_i$ klein.*

Beweis. Aus $X \setminus Y$ klein folgt, dass Y dicht in X ist. Also gilt $Y_i \neq \emptyset$. Somit ist $Y_1, \ldots, Y_m$ eine offene Überdeckung von Y. Nach Bemerkung 1.3.9 ist $\dim(X) = \dim(X_i)$. Somit erhalten wir mit Folgerung 1.3.14:

$$\dim(X_i \setminus Y_i) \quad \leq \quad \dim(X \setminus Y) \quad \leq \quad \dim(X_i) - 2.$$

□

Lemma 1.7.6. *Es seien X ein irreduzibler k-Raum, Y ein konstruierbarer Unterraum von X mit $X \setminus Y$ klein und $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Dann ist $X_f \setminus Y_f$ klein.*

Beweis. Nach Bemerkung 1.3.9 ist $\dim(X_f) = \dim(X)$. Folgerung 1.3.14 liefert $\dim(X_f \setminus Y_f) \leq \dim(X \setminus Y) \leq \dim(X_f) - 2$. Also ist $X_f \setminus Y_f$ klein. □

Definition 1.7.7. Es sei X ein k-Raum.

(i) Der k-Raum X heißt *1-voll*, falls eine Einbettung $\iota\colon X \to X'$ existiert mit einer normalen Prävarietät X' und $X' \setminus \iota(X)$ klein.

(ii) Der k-Raum X heißt *lokal 1-voll*, falls er eine endliche offene Überdeckung durch quasiaffine 1-volle k-Räume erlaubt.

Bemerkung 1.7.8. Jeder lokal 1-volle k-Raum ist normal.

Beispiel 1.7.9. Der k-Raum $X := \mathbb{K}^3 \setminus (\{0\} \times \mathbb{K}^* \times \{0\} \cup \mathbb{K}^* \times \{0\} \times \{0\}) \sqsubseteq \mathbb{K}^3$ ist ein 1-voller k-Raum.

Lemma 1.7.10. *Es sei X ein 1-voller k-Raum. Dann ist X ein lokal 1-voller k-Raum.*

Beweis. Wir können annehmen, dass $X \sqsubseteq X'$ gilt, wobei $X' \setminus X$ klein und eine normale Prävarietät X' ist. Es sei $X_1', \ldots, X_m'$ eine affine offene Überdeckung von X'. Mit Lemma 1.7.5 ist $X_i := X_i' \cap X$ ein quasiaffiner k-Raum mit $X_i' \setminus X_i$ klein. Somit ist X_i ein 1-voller quasiaffiner k-Raum. □

Bemerkung 1.7.11. Es sei X ein lokal 1-voller k-Raum mit $\dim(X) = 2$. Dann ist X schon eine Präverietät.

Begründung. Wir können annehmen, dass X ein quasiaffiner 1-voller k-Raum ist. Weiter können wir annehmen, dass $X \subseteq X'$ und $X' \setminus X$ klein gilt mit einer normalen Prävarietät X'. Somit gilt $\dim(X' \setminus X) = 2 - 2 = 0$. Nach Satz 1.3.15 ist $X' \setminus X$ endlich. Insbesondere ist $X' \setminus X$ abgeschlossen in X'. Also ist X offen in X'. □

Lemma 1.7.12. *Es sei X ein lokal 1-voller k-Raum und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Dann ist U ebenfalls ein lokal 1-voller k-Raum.*

Beweis. Wir können annehmen, dass X ein quasiaffiner 1-voller k-Raum ist. Weiter können wir annehmen, dass $X \subseteq X'$ und $X' \setminus X$ klein gilt mit einer normalen Prävarietät X'. Nach Lemma 1.7.4 ist $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{X'}(X')$. Zu U existieren Funktionen $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}_X(X)$ mit

$$U \quad = \quad \bigcup_{i=1}^{m} X_{f_i}.$$

Für jedes i ist X_{f_i} ein quasiaffiner k-Raum. Nach Lemma 1.7.6 ist $X'_{f_i} \setminus X_{f_i}$ klein und somit ist X_{f_i} 1-voll. □

Folgerung 1.7.13. *Es seien X ein 1-voller k-Raum und Y ein konstruierbarer Unterraum von X mit $X \setminus Y$ klein. Dann ist Y ein 1-voller k-Raum.*

Beweis. Wir können annehmen, dass $X \subseteq X'$ und $X' \setminus X$ klein gilt mit einer normalen Prävarietät X'. Dann folgt die Behauptung aus Lemma 1.7.3. □

Folgerung 1.7.14. *Es seien X ein lokal 1-voller k-Raum und Y ein konstruierbarer Unterraum von X mit $X \setminus Y$ klein. Dann ist Y ein lokal 1-voller k-Raum.*

Beweis. Es sei $X_1, \ldots, X_r$ eine offene quasiaffine 1-volle Überdeckung von X. Wir setzen $Y_i := X_i \cap Y$. Nach Lemma 1.7.5 ist $Y_1, \ldots, Y_m$ eine quasiaffine offene Überdeckung von Y mit $X_i \setminus Y_i$ klein. Somit ist nach Folgerung 1.7.13 jedes Y_i ein quasiaffiner 1-voller k-Raum □

Lemma 1.7.15. *Es sei X ein lokal 1-voller k-Raum. Dann existiert eine quasiaffine offene Überdeckung $X_1, \ldots, X_m$ von X, sodass es Einbettungen $\jmath_i \colon X_i \to X_i'$ gibt mit normalen affinen Varietäten X_i' und $X_i' \setminus \jmath_i(X_i)$ klein.*

Beweis. Wir können annehmen, dass X ein quasiaffiner 1-voller k-Raum ist. Weiter können wir annehmen, dass $X \subseteq X'$ und $X' \setminus X$ klein gilt mit einer normalen Prävarietät X'. Es sei weiter $X_1', \ldots, X_m'$ eine affine offene Überdeckung von X'. Wir setzen $X_i := X_i' \cap X$. Nach Lemma 1.7.5 ist $X_1, \ldots, X_m$ eine quasiaffine offene Überdeckung von X mit $X_i' \setminus X_i$ klein. □

Folgerung 1.7.16. *Es sei X ein lokal 1-voller k-Raum. Dann existiert eine quasiaffine offene Überdeckung $X_1, \ldots, X_m$ von X mit endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Algebra $\mathcal{O}_X(X_i)$.*

Beweis. Folgt aus Lemma 1.7.15 und Lemma 1.7.4. □

Lemma 1.7.17. *Es seien X ein irreduzibler k-Raum und $X_1, \ldots, X_m$ eine offene quasiaffine Überdeckung von X mit $\mathcal{O}_{X_i}(X_{i_{f_i}}) = \mathcal{O}_{X_i}(X_i)_{f_i}$ in $\mathbb{K}(X)$ für alle $f_i \in \mathcal{O}_{X_i}(X_i)$. Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{O}_X(X)$ in $\mathbb{K}(X)$:*

$$\mathcal{O}_X(X_f) \quad = \quad \mathcal{O}_X(X)_f.$$

Beweis. Für jedes $f \in \mathcal{O}_X(X)$ gilt $f \in \mathcal{O}_{X_i}(X_i)$. Somit gilt in $\mathbb{K}(X)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(X_f) \quad = \quad \mathcal{O}_X\left(\bigcup X_{i_f}\right) \quad = \quad \bigcap \mathcal{O}_X(X_{i_f}) \quad &= \quad \bigcap \mathcal{O}_X(X_i)_f \\ &= \quad \left(\bigcap \mathcal{O}_X(X_i)\right)_f \\ &= \quad \mathcal{O}_X(X)_f. \end{aligned}$$

□

Folgerung 1.7.18. *Es sei X ein lokal 1-voller k-Raum. Dann gilt für jede Funktion $f \in \mathcal{O}_X(X)$ in $\mathbb{K}(X)$:*

$$\mathcal{O}_X(X_f) \quad = \quad \mathcal{O}_X(X)_f.$$

Beweis. Nach Lemma 1.7.17 können wir annehmen, dass X ein quasiaffiner 1-voller k-Raum ist. Weiter können wir annehmen, dass $X \subseteq X'$ und $X' \setminus X$ klein gilt mit einer normalen Prävarietät X'. Nach Lemma 1.7.4 gilt $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{X'}(X')$. Es sei

$f \in \mathcal{O}_X(X)$ gegeben. Nach Lemma 1.7.6 ist $X'_f \setminus X_f$ klein. Lemma 1.7.4 liefert, dass $\mathcal{O}_X(X_f) = \mathcal{O}_{X'}(X'_f)$ gilt. Somit erhalten wir in $\mathbb{K}(X)$:

$$\mathcal{O}_X(X_f) \quad = \quad \mathcal{O}_{X'}(X'_f) \quad = \quad \mathcal{O}_{X'}(X')_f \quad = \quad \mathcal{O}_X(X)_f.$$

$\square$

Beispiel 1.7.19. Der k-Raum $X := (\mathbb{K}^*)^2 \cup \{(0,0)\} \sqsubseteq \mathbb{K}^2$ ist mit Bemerkung 1.2.18 und Folgerung 1.7.18 kein lokal 1-voller k-Raum.

1.8. **Divisoren.**

Es seien X ein normaler k-Raum und Y ein konstruierbarer Unterraum von X mit $X \setminus Y$ klein. Dann gilt im Allgemeinen $\mathcal{O}_X(X) \neq \mathcal{O}_Y(Y)$. Dazu betrachten wir den k-Raum $X := (\mathbb{K}^*)^2 \cup \{(0,0)\}$ und die offene Teilmenge $Y := (\mathbb{K}^*)^2$. Dann gilt $\dim(X \setminus Y) = 0 = \dim(X) - 2$. Es gilt jedoch siehe Beispiele 1.1.9:

$$\mathcal{O}_X(X) \quad = \quad \mathbb{K}[T_1, T_2] \quad \neq \quad \mathbb{K}[T_1, T_2]_{T_1 T_2} \quad = \quad \mathcal{O}_Y(Y).$$

Für einen lokal 1-vollen k-Raum X und eine konstruierbare Teilmenge Y von X mit $X \setminus Y$ klein gilt jedoch stets $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_Y(Y)$. Um dies zu zeigen, werden wir *Divisoren* für lokal 1-volle k-Räume einführen.

Bemerkung 1.8.1. Es sei X ein irreduzibler k-Raum. Für jedes $f \in \mathbb{K}(X)^*$ gibt es eine maximale offene Menge $U \subseteq X$, sodass $f \in \mathcal{O}_X(U)$ gilt. Wir nennen diese Menge *Definitonsbereich von* f (Bezeichnung $\mathrm{Def}_X(f)$ bzw. $\mathrm{Def}(f)$).

Begründung. Wir dürfen annehmen, dass X ein quasiaffiner k-Raum ist. Außerdem dürfen wir annehmen, dass $X \sqsubseteq X'$ gilt, wobei X' eine irreduzible affine Varietät ist. Nach Folgerung 1.3.18 gilt $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(X')$. Somit gibt es zu jedem $f \in \mathbb{K}(X)$ eine maximale offene Menge $\mathrm{Def}_{X'}(f) \subseteq X'$. Wir setzen $\mathrm{Def}_X(f) := \mathrm{Def}_{X'}(f) \cap X$. Es ist noch zu zeigen, dass $\mathrm{Def}_X(f)$ maximal ist. Dazu sei eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $f \in \mathcal{O}_X(U)$ gegeben. Nach Satz 1.2.8 gibt es eine offene Menge $U \subseteq U' \subseteq X'$ mit $f \in \mathcal{O}_{X'}(U')$. Also ist $U' \subseteq \mathrm{Def}_{X'}(f)$ und somit $U \subseteq \mathrm{Def}_X(f)$. □

Lemma 1.8.2. *Es seien X ein irreduzibler k-Raum und Y eine dichte konstruierbare Teilmenge von X. Dann gilt $\mathrm{Def}_Y(f) = \mathrm{Def}_X(f) \cap Y$ für jedes $f \in \mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(Y)$.*

Beweis. Mit Folgerung 1.3.18 erhalten wir, dass $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(Y)$ gilt. Wir können annehmen, dass X quasiaffin ist. Zunächst behandeln wir den Fall, dass X eine irreduzible affine Varietät ist. Es sei $f \in \mathbb{K}(X)$ gegeben. Es ist nur zur Inklusion „$\subseteq$" etwas zu zeigen. Mit Satz 1.2.8 existiert eine offene Menge $\mathrm{Def}_Y(f) \subseteq U \subseteq X$ mit $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Somit gilt $\mathrm{Def}_Y(f) \subseteq U \subseteq \mathrm{Def}_X(f)$.

Es sei nun X ein quasiaffiner k-Raum. Dann können wir annehmen, dass $X \sqsubseteq X'$ gilt, mit einer irreduzible affine Varietät X'. Der Unterraum Y ist eine dichte konstruierbare Teilmenge von X. Also ist Y dicht und konstruierbar in X'. Nach Folgerung 1.3.18 gilt $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(X') = \mathbb{K}(Y)$. Es sei $f \in \mathbb{K}(X)$ gegeben. Die obige Überlegung liefert

$$\mathrm{Def}_Y(f) \quad = \quad \mathrm{Def}_{X'}(f) \cap Y \quad = \quad \mathrm{Def}_{X'}(f) \cap X \cap Y \quad = \quad \mathrm{Def}_X(f) \cap Y.$$

□

Definition 1.8.3. Es seien X ein irreduzibler k-Raum und $Y \subseteq X$ eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge. Der zugehörige *lokale Ring* ist der Unterring

$$\mathcal{O}_{X,Y} \quad := \quad \{f \in \mathbb{K}(X);\ \mathrm{Def}_X(f) \cap Y \neq \emptyset\} \ \subseteq \ \mathbb{K}(X)$$

mit zughörigem maximalem Ideal $\mathfrak{m}_{X,D} := \{f \in \mathcal{O}_{X,Y}; f_{|Y} = 0\}$.

Bemerkung 1.8.4. Es seien X ein irreduzibler k-Raum und $Y \subseteq X$ eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge. Ist $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge mit $U \cap Y \neq \emptyset$, so hat man einen kanonischen Ringisomorphismus $\mathcal{O}_{U,Y \cap U} \to \mathcal{O}_{X,Y}$, $f \mapsto f$.

Bemerkung 1.8.5. Es seien X ein irreduzibler k-Raum und $x \in X$. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus $\mathcal{O}_{X,\{x\}} \to \mathcal{O}_{X,x}$, $f \mapsto f_x$.

Folgerung 1.8.6. *Es seien X ein irreduzibler k-Raum, Y eine dichte konstruierbare Teilmenge von Y und $D \subseteq X$ ein irreduzible abgeschlossene Teilmenge, sodass $D \cap Y$ dicht in D ist. Dann gilt $\mathcal{O}_{X,D} = \mathcal{O}_{Y,D\cap Y}$.*

Beweis. Da $D \cap Y$ dicht in D liegt, ist $D \cap Y$ eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge von Y. Nach Folgerung 1.3.18 gilt $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(Y)$. Die Inklusion „$\supseteq$" folgt aus Lemma 1.8.2.

Zur Inklusion „$\subseteq$": Es sei $f \in \mathcal{O}_{X,D}$ gegeben. Zu zeigen ist, dass $D \cap \mathrm{Def}_Y(f) \neq \emptyset$ gilt. Aus $f \in \mathcal{O}_{X,D}$ folgt, dass $\mathrm{Def}_X(f) \cap D \neq \emptyset$ gilt. Somit ist $\mathrm{Def}_X(f) \cap D$ eine nichtleere offene Menge in D. Also ist $D \cap Y \cap \mathrm{Def}_X(f) \neq \emptyset$. Mit Lemma 1.8.2 gilt:

$$\emptyset \quad \neq \quad D \ \cap \ (Y \ \cap \ \mathrm{Def}_X(f)) \quad = \quad D \ \cap \ \mathrm{Def}_Y(f).$$

□

Definition 1.8.7. Es sei X ein irreduzibler normaler k-Raum. Ein *Primdivisor* ist eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge D von X mit $\dim(D) = \dim(X) - 1$.

Bemerkung 1.8.8. Es seien X ein irreduzibler k-Raum und $Y \subseteq X$ ein konstruierbarer Unterraum mit $X \setminus Y$ klein. Dann ist für jeden Primdivisor $D \subseteq X$ die Menge $D \cap Y$ eine dichte Teilmenge von D. Somit haben wir auf natürliche Weise eine Bijektion

$$\begin{aligned} \{\text{Primdivisoren von } Y\} &\to \{\text{Primdivisoren von } X\} \\ E &\mapsto \overline{E}^X \\ D \ \cap \ Y &\leftarrow\!\shortmid D \end{aligned}$$

Begründung. Es sei D ein Primdivisor von X. Da $X \setminus Y$ klein ist, gilt $Y \cap D \neq \emptyset$. Es sei Z der Abschluss von $Y \cap D$ in D. Nehmen wir an, es gelte $D \setminus Z \neq \emptyset$. Dann gilt

$$\dim(D \setminus Z) \quad \leq \quad \dim(D \setminus (Y \cap D)) \quad = \quad \dim((X \setminus Y) \cap D) \quad \leq \quad \dim(X \setminus Y).$$

Bemerkung 1.3.9 liefert folgenden Widerspruch:

$$\dim(X) - 1 \quad = \quad \dim(D \setminus Z) \quad \leq \quad \dim(X \setminus Y) \quad < \quad \dim(X) - 1.$$

□

Folgerung 1.8.9. *Es sei X ein irreduzibler k-Raum und $Y \subseteq X$ ein konstruierbarer Unterraum mit $X \setminus Y$ klein. Dann gilt für jeden Primdivisor $D \subseteq X$*

$$\mathcal{O}_{X,D} \quad = \quad \mathcal{O}_{Y,Y\cap D} \qquad \textit{und} \qquad \mathfrak{m}_{X,D} \quad = \quad \mathfrak{m}_{Y,Y\cap D}.$$

Beweis. Es sei D ein Primdivisior von X. Nach Bemerkung 1.8.8 ist $Y \cap D$ ein Primdivisor in Y. Weiter ist $Y \cap D$ dicht in D. Somit folgt die Behauptung aus Folgerung 1.8.6. □

Satz 1.8.10. *Es seien X ein lokal 1-voller k-Raum und $D \subseteq X$ ein Primdivisor. Dann ist $\mathcal{O}_{X,D}$ ein lokaler Ring und das zugehörige maximale Ideal $\mathfrak{m}_{X,D}$ ist ein Hauptideal.*

Beweis. Wegen Bemerkung 1.8.4 können wir annehmen, dass X ein 1-voller Raum ist. Weiter können wir annehmen, $X \sqsubseteq X'$ und $X' \setminus X$ klein gilt, wobei X' eine Prävarietät ist. Somit folgt die Behauptung aus Folgerung 1.8.9. $\square$

Bemerkung 1.8.11. Es seien X ein lokal 1-voller k-Raum und D ein Primdivisor von X.

(i) Nach Satz 1.8.10 definiert D eine diskrete Bewertung
$$\nu_D \colon \mathbb{K}(X) \;\to\; \mathbb{Z} \,\cup\, \{\infty\}.$$

(ii) Für jedes $f \in \mathbb{K}(X)^*$ gilt:
$$\begin{aligned} \nu_D(f) \geq 0 \;&\Leftrightarrow\; f \in \mathcal{O}_{X,D} \\ &\Leftrightarrow\; \mathrm{Def}_X(f) \cap D \neq \emptyset \end{aligned}$$
und
$$\begin{aligned} \nu_D(f) = 0 \;&\Leftrightarrow\; f, f^{-1} \in \mathcal{O}_{X,D} \\ &\Leftrightarrow\; \mathrm{Def}_X(f) \cap \mathrm{Def}_X(f^{-1}) \cap D \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Definition 1.8.12. Es sei X ein lokal 1-voller k-Raum.

(i) Ein *Weildivisor auf* X ist eine formale ganzzahlige Linearkombination von Primdivisioren:
$$\sum_{D \subseteq X, D \text{ Primdivisor}} a_D D, \qquad a_D \in \mathbb{Z},\ a_D = 0 \text{ für fast alle Primdivisoren } D.$$

(ii) Die *Weildivisorengruppe von* X ist die Menge $\mathrm{WDiv}(X)$ aller Weildivisioren auf X zusammen mit der Addition
$$\left(\sum_D a_D D\right) + \left(\sum_D b_D D\right) \quad := \quad \sum_D (a_D + b_D) D.$$

(iii) Für zwei Weildivisoren $\sum a_D D$ und $\sum b_D D$ auf X schreiben wir $\sum a_D D \leq \sum b_D D$, falls $a_D \leq b_D$ für alle Primdivisoren $D \subseteq X$ gilt.

Definition 1.8.13. Es seien X ein lokal 1-voller k-Raum und $f \in \mathbb{K}(X)^*$. Mit den Bezeichnungen 1.8.11 definieren wir den *Divisor von* f als
$$\mathrm{div}(f) \quad := \sum_{D \subseteq X,\ D \text{ prim}} \nu_D(f) \cdot D \;\in\; \mathrm{WDiv}(X).$$
Einen Divisor der Form $\mathrm{div}(f)$ mit $f \in \mathbb{K}(X)^*$ nennen wir *Hauptdivisor auf X*. Wir setzen weiter $\mathrm{HDiv}(X) := \{\mathrm{div}(f);\ f \in \mathbb{K}(X)^*\}$.

Bemerkung 1.8.14. Es seien X ein irreduzibler k-Raum und $Y \subseteq X$ ein konstruierbarer Unterraum mit $X \setminus Y$ klein. Dann liefert die Bijektion aus Bemerkung 1.8.8 einen Isomorphismus der Gruppen $\mathrm{WDiv}(Y)$ und $\mathrm{WDiv}(X)$.

Satz 1.8.15. *Es seien X ein lokal 1-voller k-Raum und $f \in \mathbb{K}(X)^*$. Dann gilt*
$$\mathrm{div}(f) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathcal{O}_X(X).$$

Beweis. Wir können annehmen, dass X ein 1-voller k-Raum ist. Weiter können wir annehmen, dass $X \sqsubseteq X'$ und $X' \setminus X$ klein gilt mit einer normalen Prävarietät X'. Mit Lemma 1.7.4 gilt $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{X'}(X')$. Nach Folgerung 1.3.18 gilt $\mathbb{K}(X') = \mathbb{K}(X)$. Mit Folgerung 1.8.9 erhalten wir $\mathcal{O}_{X,D' \cap X} = \mathcal{O}_{X',D'}$. für jeden Primdivisor $D' \subseteq X'$. Somit folgt die Behauptung aus Bemerkung 1.8.8 und Bemerkung 1.8.11 (ii). $\square$

Folgerung 1.8.16. *Es seien X ein lokal 1-voller k-Raum und $f \in \mathbb{K}(X)^*$. Dann gilt*
$$\operatorname{div}(f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathcal{O}_X(X)^*.$$

Satz 1.8.17. *Es seien X ein lokal 1-voller k-Raum und Y eine konstruierbare Teilmenge von X mit $X \setminus Y$ klein. Dann gilt $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_Y(Y)$.*

Beweis. Nach Folgerung 1.7.14 ist Y ein lokal 1-voller k-Raum. Somit erhalten wir
$$\begin{aligned} f \in \mathcal{O}_X(X) \quad &\overset{1.8.15}{\Leftrightarrow} \quad \nu_D(f) \geq 0 \text{ für alle Primdivisoren } D \subseteq X \\ &\overset{1.8.11\ (ii)}{\Leftrightarrow} \quad f \in \mathcal{O}_{X,D} \text{ für alle Primdivisoren } D \subseteq X \\ &\overset{1.8.8,\ 1.8.9}{\Leftrightarrow} \quad f \in \mathcal{O}_{Y,E} \text{ für alle Primdivisoren } E \subseteq Y \\ &\overset{1.8.11\ (ii)}{\Leftrightarrow} \quad \nu_E(f) \geq 0 \text{ für alle Primdivisoren } E \subseteq Y \\ &\overset{1.8.15}{\Leftrightarrow} \quad f \in \mathcal{O}_Y(Y). \end{aligned}$$
□

Definition 1.8.18. Es sei X ein lokal 1-voller k-Raum.

(i) Ein *Cartierdivisor* ist ein Weildivisor, der lokal durch einen Hauptdivisor gegeben ist.
(ii) Der k-Raum X heißt $\mathbb{Q}$-*faktoriell*, falls jeder Weildivisor durch Multiplikation mit einer natürlichen Zahl ein Cartierdivisor wird.

Lemma 1.8.19. *Es seien X', Y' normale Prävarietäten $X \sqsubseteq X'$ und $Y \sqsubseteq Y'$ konstruierbare Unterräume mit $\dim(X' \setminus X) \leq 2$ sowie $\dim(Y' \setminus Y) \leq 2$ und Y' $\mathbb{Q}$-faktoriell. Weiter sei $\pi\colon X \to Y$ ein surjektiver Morphismus und $\varphi\colon X \to Z$ ein Morphismus welcher konstant auf den Fasern von π ist, wobei Z separiert. Es seien $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ offene Teilmengen, sodass Folgendes gilt:*

(i) *Die Abbildung $\pi_{|U}\colon U \to V$ ist ein Isomorphismus.*
(ii) *Die Mengen $Y_0 := Y \setminus V$ und $\pi^{-1}(Y_0)$ sind klein.*
(iii) *Für jeden Primdivisor E auf X mit $E \subseteq X \setminus U$ gilt $\pi^{-1}(Y_0) \subseteq E$.*

Dann existiert ein Morphismus $\psi\colon Y \to Z$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Da Z separiert ist, folgt mit Folgerung 1.5.16, dass es eine Prävarietät Z' gibt mit $Z \sqsubseteq Z'$. Da φ konstant ist auf den Fasern von π, existiert eine mengentheoretische Abbildung $\psi\colon Y \to Z$ mit $\psi \circ \pi = \varphi$. Da $\pi_{|U}$ ein Isomorphismus ist, ist $\psi_{|V}$ ein Morphismus. Es bleibt zu zeigen, dass ψ in jedem Punkt $y_0 \in Y_0$ ein Morphismus ist. Wir wählen eine affine Umgebung $W_0' \subseteq Z'$ mit $\psi(y_0) = z_0 \in W_0'$. Weiter setzen wir $W_0 := W_0' \cap Z$, $U_0 := \varphi^{-1}(W_0)$ und $V_0 := \psi^{-1}(W_0)$. Somit haben wir eine offene Menge
$$V_0 \cap V \quad = \quad \pi(U_0 \cap U) \quad \subseteq \quad Y$$

auf der ψ ein Isomorphismus ist. Insbesondere ist V_0 dicht in Y. Es gibt $g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{O}(V_0 \cap V)$, sodass gilt:

$$\psi_{|V_0 \cap V}(y) \quad = \quad (g_1(y), \ldots, g_r(y)).$$

Nehmen wir an, dass g_i in y_0 definiert ist. Dann existiert eine offene Umgebung $V' \subseteq Y'$ von y_0 mit $V \cap V_0 \subseteq V'$ und ein Morphismus $\psi' \colon V' \to W_0'$, der $\psi_{|V_0 \cap V}$ fortsetzt. Wir erhalten folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} U_0 \cap U \arrow[d, "\pi"'] & \subseteq & \pi^{-1}(V') \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & W_0' \\ V_0 \cap V & \subseteq & V' \arrow[ur, "\psi'"'] & \end{tikzcd}$$

Die Morphismen φ und $\psi' \circ \pi$ stimmen auf der offenen dichten Teilmenge $U \cap U_0$ überein. Desweiter ist π surjektiv. Somit erhalten wir mit Folgerung 1.5.12, dass $\psi' = \psi_{|V}$ gilt. Folglich ist ψ ein regulärer Morphismus auf der offenen Mengen $V' \subseteq Y'$ mit $y_0 \in V'$.

Also reicht es zu zeigen, dass g_i in y_0 definiert ist. Wir können annehmen, dass g_i eine rationale Funktion auf Y' ist. Wir zeigen, dass der Divisor $\mathrm{div}(g_i)$ positiv auf y_0 ist. Dazu zeigen wir, dass für jeden Primdivisor D von Y welcher y_0 enthält gilt:

$$D \cap (V \cap V_0) \quad \neq \quad \emptyset.$$

Es sei D ein Primdivisor auf Y mit $y_0 \in D$. Da $Y_0 = Y \setminus V$ klein ist, gilt $D \cap V \neq \emptyset$. Es sind zwei Fälle zu betrachten.

1. Fall: Die Menge $\pi^{-1}(D)$ enthält einen Primdivisor $E \subseteq X$ mit $E \subseteq X \setminus U$. Nach Voraussetzung gilt $\pi^{-1}(Y_0) \subseteq E$. Somit erhalten wir $U_0 \cap E \neq \emptyset$. Also ist $\pi(E) \cap V_0 \neq \emptyset$. Insbesondere ist $D \cap V_0 \neq \emptyset$. Da $\emptyset \neq D \cap V$ offen in D ist und V_0 dicht in Y ist, erhalten wir, dass $D \cap (V \cap Y_0) \neq \emptyset$ gilt.

2. Fall: Die Menge $\pi^{-1}(D)$ enthält keinen Primdivisor $E \subseteq X$ mit $E \subseteq X \setminus U$. Da Y' ein $\mathbb{Q}$-faktorieller k-Raum ist existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass nD ein Cartier-Divisor ist. Deshalb gilt:

$$\pi^{-1}(D) \quad = \quad \pi^*(nD).$$

Somit ist $\pi^{-1}(D)$ rein 1-codimensional. Also ist $\pi^{-1}(D) = \overline{\pi^{-1}(D) \cap U}^X$. Da $\pi^{-1}(D)$ die Faser $\pi^{-1}(y_0)$ trifft, erhalten wir

$$\pi^{-1}(D) \cap U \cap U_0 \neq \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad D \cap V \cap V_0 \neq \emptyset.$$

□

1.9. **Kategorische Quotienten.**

Wir wollen die Aussage [8, Lemma II.6.2] verallgemeinern, siehe Lemma 1.9.17: Es seien X, Y lokal 1-volle k-Räume und $\pi\colon X \to Y$ ein surjektiver separabler Morphismus der die *Kurvenüberdeckungseigenschaft* erfüllt. Dann ist $\pi\colon X \to Y$ ein kategorischer Quotient für die Äquivalenzrelation R_π. Der Begriff der *Kurvenüberdeckungseigenschaft* ist in [1] für Varietäten eingeführt worden; wir verallgemeinern ihn hier auf k-Räume. In Lemma 1.9.11 wird folgende Aussage bewiesen: Es sei $\pi\colon X' \to Y'$ ein surjektiver Morphismus von k-Räumen. Dann trägt Y' die Quotiententopologie bezüglich π genau dann, wenn π die Kurvenüberdeckungseigenschaft erfüllt. Diese Aussage ist eine Verallgemeinerung von [1, Lemma 1.3].

Lemma 1.9.12 und Lemma 1.9.13 sind für Varietäten bekannt siehe [13, Chapter 4]. Die Aussagen gelten auch für Prävarietäten und werden vollständigkeitshalber nochmals bewiesen.

Definition 1.9.1. Es seien X ein k-Raum und $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation.

(i) Eine Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ von k-Räumen heißt (R)-*invariant*, falls φ konstant auf jeder Äquivalenzklasse ist.
(ii) Für jede R-invarianten offenen Unterraum $U \subseteq X$ von X bezeichnen wir die Menge der R-invarianten regulären Funktionen auf U mit $\mathcal{O}_X(U)^R$.

Definition 1.9.2. Ein Morphismus $\pi\colon X \to Y$ von k-Räumen heißt *kategorischer Quotient für die Äquivalenzrelation* R, falls gilt:

(i) Der Morphismus π ist R-invariant.
(ii) Zu jedem R-invarianten Morphismus $\varphi\colon X \to Z$ von k-Räumen gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon Y \to Z$ mit $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$.

Bemerkung 1.9.3. Es seien X ein k-Raum, $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation und $\pi\colon X \to Y$ der kategorischer Quotient. Dann ist π surjektiv und Y bis auf Isomorphie eindeutig.

Bemerkung 1.9.4. Es sei $\pi\colon X \to Y$ ein Morphismus von k-Räumen. Dann definiert π eine Äquivalenzrelation R_π auf X:

$$(x, x') \in R_\pi \quad :\Leftrightarrow \quad \pi(x) = \pi(x').$$

Erinnerung 1.9.5. Es sei $\pi\colon X \to Y$ stetige Abbildung von topologischen Räumen und $\mathcal{O}_X$ sei eine Garbe auf X. Die *Bildgarbe von $\mathcal{O}_X$ unter π* ist definiert durch: Für jedes offene $V \subseteq Y$ setzen wir $(\pi_*\mathcal{O}_X)(V) := \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(V))$.

Lemma 1.9.6. *Es sei $\pi\colon X' \to Y'$ ein surjektiver separabler offener Morphismus von irreduziblen Varietäten, wobei Y' normal ist. Dann gilt $\mathcal{O}_{Y'} = (\pi_*\mathcal{O}_{X'})^{R_\pi}$.*

Beweis. Siehe [8, Lemma II.6.2]. □

Definition 1.9.7. Es sei X ein k-Raum. Unter einer *algebraischen Kurve durch* $x \in X$ verstehen wir, eine abgeschlossene Teilmenge X' in X mit $\dim(X') = 1$ und $x \in X'$.

Bemerkung 1.9.8. Es sei X ein irreduzibler k-Raum. Dann gilt:

(i) Jede Kurve $\gamma\colon C \to X$ in X induziert eine algebraische Kurve in X.

(ii) Nach Satz 1.3.15 ist jede algebraische Kurve in X eine Prävarietät.

Definition 1.9.9. Der Morphismus $\pi\colon X \to Y$ von k-Räumen erfüllt die *Kurvenüberdeckungseigenschaft*, falls für jede irreduzible algebraische Kurve $Y' \subseteq Y$ und jedes $y \in Y'$ es ein irreduzible algebraische Kurve $X' \subseteq X$ existiert, sodass $y \in \pi(X')$ und $\pi(X')$ dicht in Y' ist.

Satz 1.9.10. *Es seien X', Y' Varietäten, wobei Y' normal ist, und $\pi\colon X' \to Y'$ ein surjektiver separabler Morphismus der die Kurvenüberdeckungseigenschaft erfüllt. Weiter sei $\varphi\colon X' \to Z'$ ein Morphismus von Varietäten, der konstant auf den Fasern von π ist. Dann existiert ein Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon Y' \to Z'$ mit $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$.*

Beweis. Folgt aus Lemma 1.9.6 und [1, Lemma 1.3]. □

Lemma 1.9.11. *Es sei $\pi\colon X \to Y$ ein surjektiver Morphismus von k-Räumen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Abbildung π erfüllt die Kurvenüberdeckungseigenschaft.*
(ii) *Der k-Raum Y trägt die Quotiententopologie bezüglich π.*

Beweis. Zur Implikation „(i) $\Rightarrow$ (ii)": Es sei $U \subseteq Y$ mit $\pi^{-1}(U)$ offen in X. Anngenommen $A := Y \setminus U$ ist nicht abgeschlossen in Y. Wir wählen ein $y \in \overline{A} \cap U$. Da π surjektiv ist, gilt $A = \pi(X \setminus \pi^{-1}(U))$ und somit ist A konstruierbar in $\overline{A}$. Es sei U_0 der offene Kern von A bezüglich $\overline{A}$. Da $\overline{A} \cap U_0$ eine offene nichtleere Teilmenge von $\overline{A}$ ist, gilt $y \notin U_0$. Nach Lemma 1.5.10 existiert eine irreduzible Kurve C_Y durch y mit $C_Y \cap U_0 \neq \emptyset$. Durch Verkleinern von C_Y können wir annehmen, dass $A \cap C_Y$ offen in C_Y ist und $y \in C_Y$ gilt. Nach Voraussetzung existiert eine Kurve C_X, sodass C_X die Faser von $\pi^{-1}(y)$ trifft und $\pi(C_X)$ dicht in C_Y liegt. Somit gilt $x \in \overline{\pi^{-1}(A)} \setminus \pi^{-1}(A)$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $\pi^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.

Zur Implikation „(ii) $\Rightarrow$ (i)": Es sei C_Y eine irreduzible Kurve durch den Punkt $y \in Y$. Da π surjektiv ist, gilt $\pi^{-1}(y) \neq \emptyset$. Die Menge $C_Y \setminus \{y\}$ ist nicht abgeschlossen und somit ist nach Voraussetzung $\pi^{-1}(C_Y) \setminus \pi^{-1}(y)$ ebenfalls nicht abgeschlossen. Also existiert ein Punkt $x \in \pi^{-1}(y)$ mit $x \in \overline{\pi^{-1}(C_Y \setminus \{y\})}$. Wie oben existiert somit eine Kurve C_X durch den Punkt x in $\pi^{-1}(C_Y)$. Das Bild $\pi(C_X)$ ist dicht in C_Y. Somit schneidet C_X die Faser von y in nur endlich vielen Punkten. □

Lemma 1.9.12. *Es sei $\varphi\colon X' \to Y'$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen Prävarietäten mit $r := \dim(X') - \dim(Y')$ und Y' normal. Dann existiert eine nichtleere offene Menge $V' \subseteq Y'$ die folgende Eigentschaften erfüllt:*

(i) *Es gilt $V' \subseteq \pi(X')$.*
(ii) *Es sei A' eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge von Y' mit $A' \cap V' \neq \emptyset$. Dann gilt für jede irreduzible Komponente B' von $\varphi^{-1}(A')$ mit $\varphi^{-1}(V') \cap B' \neq \emptyset$:*
$$\dim(B') \quad = \quad \dim(A') \ + \ r.$$

Beweis. Wir können annehmen, dass X' und Y' affin sind. Somit folgt der Beweis aus [13, Theorem 4.3]. □

Lemma 1.9.13. *Es sei $\varphi\colon X' \to Y'$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen Prävarietäten mit $r := \dim(X') - \dim(Y')$. Weiter gilt für jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge A' von Y' gelten, dass die irreduziblen Komponenten von $\varphi^{-1}(A')$ die Dimension $r + \dim(A')$ haben. Dann ist φ eine offene Abbildung.*

Beweis. Es seien $x \in X'$ und U' eine offene Umgebung von x. Wir zeigen, dass $y := \varphi(x)$ im Inneren von $V' := \varphi(U)$ liegt. Angenommen y liegt im Abschluss von $Y' \setminus V'$ in Y'. Da V' konstruierbar in Y' ist, gilt $Y' \setminus V'$ konstruierbar in Y'. Somit existiert eine offene Menge V_0' in Y' und eine irreduzible abgeschlossene Menge C_0' in Y' mit $V_0' \cap C_0' \neq \emptyset$ und $y \in C_0'$. Nach Voraussetzung haben alle irreduziblen Komponenten von $D' := \varphi^{-1}(C_0')$ die gleiche Dimension. Somit ist das Bild jeder irreduziblen Komponente von D' dicht in C_0'. Also schneidet $U_0' := \varphi^{-1}(V_0')$ jede irreduzible Komponente von D'. Folglich ist $U_0' \cap D'$ dicht in D'. Weiter gilt

$$U_0' \cap D' \quad = \quad \varphi^{-1}(V_0' \cap C_0') \quad \subseteq \quad X' \setminus U'.$$

Daraus folgt, dass $x \in C_0' \subseteq X' \setminus U'$ gilt, Widerspruch. □

Lemma 1.9.14. *Es sei $\varphi\colon X' \to Y'$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen Prävarietäten, wobei Y' normal ist. Dann existieren nichtleere offene Mengen $U' \subseteq X'$ und $V' \subseteq Y'$, sodass $\varphi_{|U'}\colon U' \to V'$ offen und surjektiv ist.*

Beweis. Folgt aus Lemma 1.9.12 und Lemma 1.9.13. □

Folgerung 1.9.15. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen k-Räumen, wobei Y normal ist. Dann existieren nichtleere offene Mengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$, sodass $U \subseteq X^{\mathrm{var}}$, $V \subseteq Y^{\mathrm{var}}$ gilt und $\varphi_{|U}\colon U \to V$ offen und surjektiv ist.*

Beweis. Wir können annehmen, dass Y quasiaffin ist. Weiter sei X_0 eine quasiaffine offene Teilmenge von X mit $\varphi^{-1}(Y) \cap X_0 \neq \emptyset$. Dann ist $U := \varphi^{-1}(Y) \cap X_0$ ein quasiaffiner k-Raum. Mit Lemma 1.3.2 ist U^{var} offen und dicht in U. Analog ist Y^{var} offen und dicht in Y. Nach Bemerkung 1.5.7 sind U^{var} und Y^{var} Varietäten. Somit ist $U_0 := \varphi^{-1}(Y^{\mathrm{var}}) \cap U^{\mathrm{var}}$ eine offene dichte Teilmenge von U und $\varphi\colon U_0 \to Y^{\mathrm{var}}$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen Varietäten. Außerdem ist Y^{var} normal. Somit folgt die Behauptung aus Lemma 1.9.14. □

Folgerung 1.9.16. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen k-Räumen. Dann existieren nichtleere offene Mengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$, sodass $\varphi_{|U}\colon U \to V$ offen und surjektiv ist.*

Beweis. Folgt aus Lemma 1.9.15. □

Lemma 1.9.17. *Es seien X ein lokal 1-voller k-Raum und $f \in \mathbb{K}(X)$ mit $x \notin \mathrm{Def}_X(f)$. Dann existiert ein $y \in X$ mit $y \in \mathrm{Def}_X(\frac{1}{f})$ und $\frac{1}{f}(y) = 0$.*

Beweis. Mit Lemma 1.7.15 können wir annehmen, dass $X \sqsubseteq X'$ und $X' \setminus X$ klein gilt, wobei X' eine affine Varietät ist. Nach Lemma 1.7.4 gilt $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{X'}(X')$ bzw. $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(X')$. Mit Lemma 1.8.2 gilt $x \notin \mathrm{Def}_{X'}(f)$. Wir wissen, dass ein $y \in X'$ existiert mit $y \in \mathrm{Def}_{X'}(\frac{1}{f})$ und $\frac{1}{f}(y) = 0$. Insbesondere ist die Nullstellenmenge $V_{X'}(\frac{1}{f})$ nicht leer. Somit ist $\dim(V_{X'}(\frac{1}{f})) = \dim(X') - 1$. Da $X' \setminus X$ klein ist, gilt $V_{X'}(\frac{1}{f}) \cap X \neq \emptyset$. □

Lemma 1.9.18. *Es sei $\pi\colon X \to Y$ ein separabeler surjektiver Morphismus von lokal 1-vollen k-Räumen. Dann gilt $\mathcal{O}_Y = (\pi_* \mathcal{O}_X)^{R_\pi}$.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ die folgenden Abbildung ein Isomorphismus ist:

$$\pi^*\colon \mathcal{O}_Y(V) \ \to \ \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(V))^{R_\pi}$$

Wir wählen eine offene quasiaffine 1-volle Überdeckung $Y_1, \ldots, Y_l$ von Y. Nach Lemma 1.7.12 ist $X_i := \pi^{-1}(Y_i)$ ein lokal 1-voller k-Raum. Es reicht zu zeigen, dass für alle $f \in \mathcal{O}_Y(Y_i)$ mit $f \neq 0$ die folgenden Abbildung ein Isomorphismus ist:

$$\pi^*\colon \mathcal{O}_Y(Y_{i_f}) \ \to \ \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(Y_{i_f}))^{R_\pi}.$$

Für jedes $f \in \mathcal{O}_Y(Y_i)$ gilt $\pi^{-1}(Y_{i_f}) = X_{i_{\pi^*(f)}}$. Nehmen wir an $\pi^*\colon \mathcal{O}_Y(Y_i) \to \mathcal{O}_X(X_i)^{R_\pi}$ ist ein Isomorphismus. Dann gilt mit Folgerung 1.7.18

$$\begin{aligned}
\pi^*(\mathcal{O}_Y(Y_{i_f})) \quad = \quad \pi^*(\mathcal{O}_Y(Y_i)_f) &= \pi^*(\mathcal{O}_Y(Y_i))_{\pi^*(f)} \\
&= (\mathcal{O}_X(X_i)^{R_\pi})_{\pi^*(f)} \\
&= \mathcal{O}_X(X_{i_{\pi^*(f)}})^{R_\pi}.
\end{aligned}$$

Also reicht es zu zeigen, dass $\pi^*\colon \mathcal{O}_Y(Y_i) \to \mathcal{O}_X(X_i)^{R_\pi}$ ein Isomorphismus ist. Aus der Surjektivität von π folgt, dass π^* injektiv ist. Bleibt noch zu zeigen, dass π^* surjektiv ist. Es sei dazu ein $g \in \mathcal{O}_X(X_i)^{R_\pi}$ gegeben. Dann ist $h\colon Y_i \to \mathbb{K}$, $h(y) \mapsto g(\pi^{-1}(\{y\}))$ eine wohldefinierte Abbildung. Mit Folgerung 1.9.15 und Lemma 1.9.6 gilt $h \in \mathbb{K}(Y)$. Insbesondere gilt $\pi^*(h) = g$. Es ist zu zeigen, dass $\mathrm{Def}_{Y_i}(h) = Y_i$ gilt.

Angenommen es existiert ein $x \in X_i$ mit $\pi(x) \notin \mathrm{Def}_{Y_i}(h)$. Nach Lemma 1.9.17 existiert ein $x' \in X_i$ mit $\frac{1}{g}(x') = \frac{1}{h}(\pi(x')) = 0$. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass $g \in \mathcal{O}_X(X_i)^{R_\pi}$ gilt. □

Satz 1.9.19. *Es seien X, Y lokal 1-volle k-Räume und $\pi\colon X \to Y$ ein surjektiver separabler Morphismus der die Kurvenüberdeckungseigenschaft erfüllt. Weiter sei $\varphi\colon X \to Z$ ein Morphismus von k-Räumen, der konstant auf den Fasern von π ist. Dann existiert genau ein Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon Y \to Z$ mit $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$.*

Beweis. Nach Lemma 1.9.11 ist $\widetilde{\varphi}\colon Y \to Z$ stetig und nach Lemma 1.9.18 ist die Abbildung $\widetilde{\varphi}\colon Y \to Z$ ein Morphismus. □

Satz 1.9.20. *Es seien X, Y lokal 1-volle k-Räume und $\pi\colon X \to Y$ ein surjektiver separabler Morphismus der die Kurvenüberdeckungseigenschaft erfüllt. Dann ist $\pi\colon X \to Y$ ein kategorischer Quotient für die Äquivalenzrelation R_π.*

Beweis. Folgt aus Satz 1.9.19. □

2. Konvexgeometrie

2.1. **Konstruierbare Kegel.**

Wir möchten in diesem Kapitel einige Begriffe der Konvexgeometrie verallgemeinern. Für die Grundlagen der Konvexgeometrie, die hier vorausgesetzt werden, sei auf die Bücher [11], [10] und [20] verwiesen.

In diesem Abschnitt werden wir *k-Kegel* betrachten, welche eine Verallgemeinerung von Kegeln sind. Viele Begriffe und Eigenschaften, die wir von Kegeln kennen, lassen sich auch für k-Kegel definieren und formulieren. Es gibt auch Eigenschaften, in denen sich k-Kegel und Kegel wesentlich von einander unterscheiden. In Bemerkung 2.1.27 sieht man zum Beispiel, dass der Schnitt zweier k-Kegel im Allgemeinen kein k-Kegel ist.

Zuerst werden wir an einige Begriffe der Konvexgeometrie erinnern. Es seien U und V endlichdimensionale $\mathbb{Q}$-Vektorräume mit einer nicht ausgearteten Bilinearform

$$U \times V \ \to \ \mathbb{Q}, \qquad (u,v) \ \mapsto < u, v > .$$

Wir fassen U als Dualraum zu V auf und setzen für $v \in V$ und $u \in U$:

$$u(v) \quad := \quad v(u) \quad := \quad < u, v > .$$

Da V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist, können wir V mit der euklidischen Topologie versehen. Unter dem *relativen Inneren* einer Menge $A \subseteq V$ verstehen wir das topologische Innere von A bezüglich der Teilraumtopolgie. Das relative Innere einer Teilmenge $A \subseteq V$ bezeichnen wir mit $\mathring{A}$.

Unter einem *Kegel* in V verstehen wir einen konvexen polyedrischen Kegel σ' in V, das heißt, es existieren $v_1, \ldots, v_n \in V$ mit

$$\sigma' \quad = \quad \mathrm{cone}(v_1, \ldots v_n) \quad := \quad \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i;\ \alpha_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \right\}.$$

Den Dualkegel eines Kegels σ' in V bezeichnen wir mit

$$\check{\sigma}' \quad := \quad \{u \in U;\ u_{|\sigma'} \geq 0\}.$$

Eine Teilmenge $\tau' \subseteq \sigma'$ eines Kegels σ' heißt *Seite* (Bezeichnung $\tau' \preccurlyeq \sigma'$), falls es ein $u \in \check{\sigma}'$ gibt, sodass gilt:

$$\tau' \quad = \quad u^{\perp} \cap \sigma' \quad = \quad \{v \in V;\ u(v) = 0\} \cap \sigma'.$$

Jede Seite eines Kegels ist wieder ein Kegel. Für jeden Kegel σ' in V gilt:

$$\mathring{\sigma}' \quad = \quad \sigma' \setminus \left(\bigcup_{\tau' \prec \sigma'} \tau' \right) \qquad \text{und} \qquad \sigma' \quad = \quad \bigcup_{\tau' \preccurlyeq \sigma'} \mathring{\tau}'.$$

Die minimale Seite eines Kegels σ' bezeichnen wir mit σ'_0. Der Kegel σ'_0 ist ein (linearer) Unterraum und es gilt $\sigma'_0 = \mathring{\sigma}'_0$. Für jede Seite τ' von σ' gilt $\sigma'_0 = \tau'_0$. Der Unterraum σ'_0 ist der größte Unterraum von V, der in σ' enthalten ist. Es sei τ' eine Seite von σ' und ρ' eine Seite von τ'. Dann ist ρ' auch eine Seite von σ'. Sind $\tau', \rho' \preccurlyeq \sigma'$ Seiten des Kegels σ' mit $\mathring{\tau}' \cap \mathring{\rho}' \neq \emptyset$. Dann gilt $\rho' = \tau'$.

Wir nennen einen Kegel σ' *spitz*, falls $\sigma'_0 = \{0\}$ gilt. Ein Kegel ist genau dann spitz, wenn $\{0\}$ eine Seite von σ' ist.

Die *Dimension* $\dim(\sigma')$ eines Kegels σ' in V ist die Dimension der linearen Hülle $\mathrm{lin}(\sigma') \subseteq V$.

Es sei $A \subseteq V$ eine Teilmenge in V. Dann ist die *konvexe Hülle von A in V* definiert als

$$\mathrm{hull}(A) \quad := \quad \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i;\ n \in \mathbb{N}, v_i \in A,\ \alpha_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0},\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Falls A endlich ist, nennen wir $\mathrm{hull}(A)$ ein *Polytop* in V. Die Dimension $\dim(P)$ eines Polytopes P in V ist die Dimension der affinen Hülle von P. Eine Teilmenge $Q \subseteq P$ heißt *Seite*[1] *von* P, falls $u \in U$ und $v \in V$ existieren mit $v + u_{|P} \leq 0$ und $Q = (v + u^{\perp}) \cap P$.

Es sei σ' ein spitzer Kegel in V. Wir wählen ein $u \in \overset{\vee}{\sigma}'$ mit $\{0\} = u^{\perp} \cap \sigma'$ und ein $v \in \mathring{\sigma}'$. Dann ist $P_{\sigma'} := (v + u^{\perp}) \cap \sigma'$ ein Polytop in dem affinen Raum $v + u^{\perp}$. Wir haben folgende inklusionserhaltende Bijektion:

$$\mathcal{H}\colon \left\{ \begin{array}{ll} \tau'; & \tau' \text{ Kegel in } V,\ \tau' \subseteq \sigma', \\ & \dim(\tau') = n \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{ll} Q; & Q \text{ Polytop in } v + u^{\perp} Q \subseteq P_{\sigma'}, \\ & \dim(Q) = n - 1 \end{array} \right\}$$
$$\tau' \mapsto (v + u^{\perp}) \cap \tau'$$

Für zwei Kegel $\tau', \rho' \subseteq \sigma'$ gilt: Der Kegel ρ' ist genau dann eine Seite von τ', wenn $\mathcal{H}(\rho')$ eine Seite von $\mathcal{H}(\tau')$ ist.

Vereinbarung 2.1.1. Anstatt 3 dimensionale spitze Kegel in $\mathbb{Q}^3$ zu zeichnen, werden wir 2 dimensionale Polytope zeichnen siehe Abbildung 2.

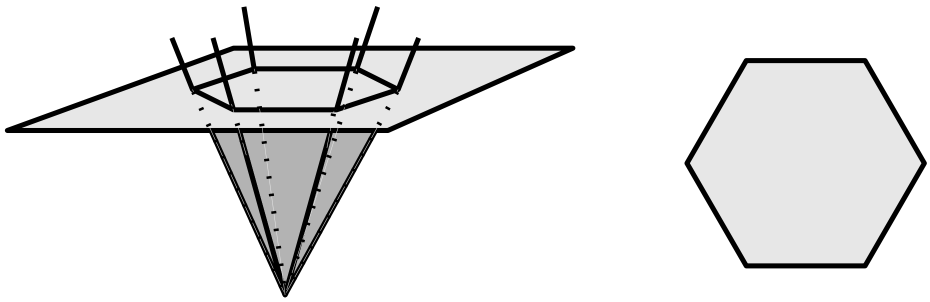

Abbildung 2

Definition 2.1.2. Ein *konstruierbarer Kegel (k-Kegel)* in V ist eine Teilmenge $\sigma \subseteq V$, sodass der (topologische) Abschluss σ' von σ in V ein Kegel in V ist und

$$\sigma \quad = \quad \mathring{\sigma}' \ \cup\ \mathring{\sigma}'_0 \ \cup\ \mathring{\sigma}'_1\ \cup \ldots \cup\ \mathring{\sigma}'_k$$

mit gewissen Seite $\sigma'_i \preccurlyeq \sigma'$ gilt.

Bemerkung 2.1.3. Es seien σ ein k-Kegel in V und σ' der zugehörige Abschluss. Dann ist $\mathring{\sigma} = \mathring{\sigma}'$.

Bemerkung 2.1.4. Es seien σ, τ k-Kegel in V. Weiter seien σ' und τ' die Abschlüsse von σ bzw. τ. Gilt $\tau \subseteq \sigma$, dann ist $\tau' \subseteq \sigma'$.

[1] Dem Autor ist der Begriff eines Polyeders bekannt.

Beispiel 2.1.5. Wir betrachten den Kegel $\sigma' := \operatorname{cone}(e_1, e_2, e_3)$ in $\mathbb{Q}^3$, wobei e_1, e_2 und e_3 die kanonischen Basisvektoren in $\mathbb{Q}^3$ bezeichnen. Dann ist die Menge

$$\sigma_1 \quad := \quad \{0\} \;\cup\; \mathring{\operatorname{cone}}(e_1, e_2) \;\cup\; \mathring{\operatorname{cone}}(e_1, e_3)$$

kein k-Kegel, da $\mathring{\sigma}' \not\subseteq \sigma_1$ gilt.

Bemerkung 2.1.6. Wir betrachten den Kegel $\sigma' := \operatorname{cone}(e_1, e_2, e_3)$ in $\mathbb{Q}^3$ und definieren den k-Kegel

$$\sigma \quad := \quad \{0\} \;\cup\; \mathring{\operatorname{cone}}(e_1, e_2, e_3) \;\cup\; \mathring{\operatorname{cone}}(e_2) \;\cup\; \mathring{\operatorname{cone}}(e_3) \;\cup\; \mathring{\operatorname{cone}}(e_1, e_2) \;\subseteq\; \mathbb{Q}^3$$

Dieser lässt sich wie in Abbildung 3 skizzieren. Man sieht, dass $\mathring{\operatorname{cone}}(e_1, e_3)$, $\mathring{\operatorname{cone}}(e_2, e_3)$ und $\mathring{\operatorname{cone}}(e_1)$ nicht zu σ gehören.

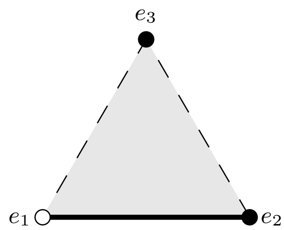

Abbildung 3

Beispiele 2.1.7. Mit Bemerkung 2.1.6 können wir weitere Beispiele betrachten. Die Abbildung 4 zeigt drei verschiedene k-Kegel.

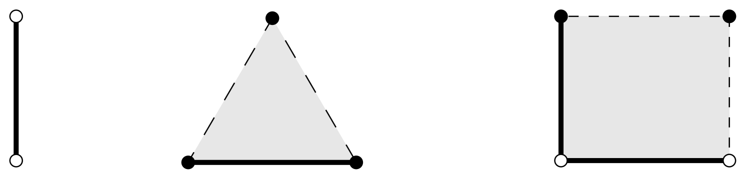

Abbildung 4

Bemerkung 2.1.8. Es seien σ ein k-Kegel in V und σ' der zugehörige Abschluss. Für jede Seite τ' von σ' mit $\mathring{\tau}' \cap \sigma \neq \emptyset$ gilt $\mathring{\tau}' \subseteq \sigma$.

Definition 2.1.9. Es seien σ ein k-Kegel in V und σ' der zugehörige Abschluss. Eine Teilmenge $\tau \subseteq \sigma$ heißt *Seite von* σ (Bezeichnung $\tau \preccurlyeq \sigma$), falls eine Seite τ' von σ' existiert, sodass gilt:

$$\mathring{\tau}' \subseteq \tau \qquad \text{und} \qquad \tau \;=\; \tau' \cap \sigma.$$

Bemerkung 2.1.10. Es sei σ ein k-Kegel in V und σ' der Abschluss von σ. Dann gilt:

(i) Gilt $\sigma = \sigma'$, dann entsprechen die Seiten des k-Kegels σ den Seiten des Kegels σ'.
(ii) Ist $\sigma = \sigma'$ ein Kegel, so ist jede Seite $\tau \preccurlyeq \sigma$ ein Kegel.
(iii) Die Seite $\sigma_0 := \sigma'_0$ ist die minimale Seite von σ.

Schreibweise 2.1.11. Es sei σ ein k-Kegel in V und τ eine Seite von σ. Falls $\tau \neq \sigma$ gilt, schreiben wir $\tau \prec \sigma$.

Folgerung 2.1.12. *Es sei σ ein k-Kegel in V. Dann ist σ_0 der größte Unterraum von V, der in σ enthalten ist.*

Beweis. Folgt aus Bemerkung 2.1.10. $\square$

Definition 2.1.13. Es sei σ ein k-Kegel in V. Der k-Kegel σ heißt *spitz*, falls $\sigma_0 = \{0\}$ gilt.

Bemerkung 2.1.14. Es sei σ ein k-Kegel in V. Dann ist σ genau dann spitz, wenn der zugehörige Abschluss σ' spitz ist.

Beispiel 2.1.15. Es seien σ ein k-Kegel in V und τ' eine Seite des Abschlusses σ' von σ mit $\tau' \cap \sigma \neq \emptyset$. Dann ist $\tau' \cap \sigma$ im Allgemeinen keine Seite von σ. Dazu betrachten wir σ aus Bemerkung 2.1.6. In diesem Fall ist $\tau' := \operatorname{cone}\{e_2, e_3\}$ eine Seite von σ', aber $\tau' \cap \sigma = \operatorname{cone}(e_2) \cup \operatorname{cone}(e_3)$ keine Seite von σ. Die Seiten von σ sind:

$$\sigma,\ \{0\},\ \operatorname{cone}(e_2),\ \operatorname{cone}(e_3),\ \overset{\circ}{\operatorname{cone}}(e_1, e_2) \cup \operatorname{cone}(e_2).$$

Bemerkung 2.1.16. Es sei σ ein k-Kegel in V, σ' der zugehörige Abschluss von σ und $\tau \preccurlyeq \sigma$ eine Seite. Nach Definition existiert eine Seite $\tau' \preccurlyeq \sigma'$ von σ', sodass $\tau = \tau' \cap \sigma$ und $\mathring{\tau}' \subseteq \tau$ gilt. Der Kegel τ' ist der Abschluss von τ.

Lemma 2.1.17. *Es seien σ ein k-Kegel in V, σ' der zugehörige Abschluss und $\tau \subseteq \sigma$ eine Teilmenge. Dann sind äquivalent:*

(i) *τ ist Seite von σ.*
(ii) *τ ist ein k-Kegel und es existiert ein $u \in \check{\sigma}'$ mit $\tau = u^\perp \cap \sigma$.*

Insbesondere ist jede Seite τ von σ ein k-Kegel.

Beweis. Zur Implikation „(i)⇒(ii) ": Da $\tau \preccurlyeq \sigma$ gilt, existiert eine Seite τ' von σ' mit $\mathring{\tau}' \subseteq \tau$ und $\tau = \tau' \cap \sigma$. Zu τ' gibt es ein $u \in \check{\sigma}'$ mit $\tau' = u^\perp \cap \sigma'$. Somit gilt

$$\tau \quad = \quad \tau' \cap \sigma \quad = \quad u^\perp \cap \sigma \cap \sigma' \quad = \quad u^\perp \cap \sigma.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass τ ein k-Kegel ist. Nach Bemerkung 2.1.16 ist der Abschluss von τ gleich τ'. Somit reicht es zu zeigen, dass gilt:

$$\tau \quad = \quad \bigcup_{\rho' \preccurlyeq \tau',\ \mathring{\rho}' \subseteq \tau} \mathring{\rho}'.$$

Es ist nur zur Inklusion „$\subseteq$" etwas zu zeigen. Offensichtlich gilt $\mathring{\tau}'_0 \subseteq \tau$. Es sei $v \in \tau \subseteq \tau'$ gegeben. Da τ' ein Kegel ist, existiert eine Seite ρ' von τ' mit $v \in \mathring{\rho}'$. Da σ', τ' und ρ' Kegel in V sind und $\tau' \preccurlyeq \sigma'$ sowie $\rho' \preccurlyeq \tau'$ ist, gilt $\rho' \preccurlyeq \sigma'$. Mit $\mathring{\rho}' \cap \sigma \neq \emptyset$ und Bemerkung 2.1.8 erhalten wir $\mathring{\rho}' \subseteq \sigma$. Somit ist

$$\mathring{\rho}' \ \subseteq \ \tau' \cap \sigma \quad = \quad \tau.$$

Zur Implikation „(ii)⇒(i) ": Es gelte $\tau = u^\perp \cap \sigma$ für ein $u \in \check{\sigma}'$. Wir wissen, dass $\rho' := u^\perp \cap \sigma'$ eine Seite von σ' ist mit $\tau \subseteq \rho'$. Wir können u so wählen, dass ρ' minimal ist. Es gilt $\tau = \rho' \cap \sigma$. Bleibt zu zeigen, dass $\mathring{\rho}' \subseteq \tau$ gilt. Der Abschluss τ' von τ ist nach Voraussetzung ein Kegel. Insbesondere gilt $\mathring{\tau}' \subseteq \tau$. Aus $\mathring{\tau}' \subseteq \tau \subseteq \sigma'$

folgt, dass $\tau' \subseteq \sigma'$ gilt. Da wir ρ' minimal gewählt haben, erhalten wir $\mathring{\tau}' \cap \mathring{\rho}' \neq \emptyset$. Insbesondere gilt $\sigma \cap \mathring{\rho}' \neq \emptyset$. Mit Bemerkung 2.1.8 erhalten wir $\mathring{\rho}' \subseteq \sigma$ und damit

$$\mathring{\rho}' \subseteq \rho' \cap \sigma = \tau.$$

□

Lemma 2.1.18. *Es seien σ ein k-Kegel in V, τ eine Seite von σ und ρ eine Seite von τ. Dann ist ρ eine Seite von σ.*

Beweis. Es sei σ' der Abschluss von σ. Weiter seien $\tau' \preccurlyeq \sigma'$ und $\rho' \preccurlyeq \tau'$ mit $\mathring{\tau}' \subseteq \tau$ und $\tau = \tau' \cap \sigma$ sowie $\mathring{\rho}' \subseteq \rho$ und $\rho = \rho' \cap \tau$ gegeben. Somit gilt

$$\rho = \rho' \cap \tau = \tau' \cap \rho' \cap \sigma = \rho' \cap \sigma.$$

Da σ', τ' und ρ' Kegel sind, ist ρ' eine Seite von σ'. Nach Voraussetzung gilt $\mathring{\rho}' \subseteq \rho$ und $\rho = \rho' \cap \sigma$, wobei $\rho' \preccurlyeq \sigma'$. Somit ist ρ eine Seite von σ. □

Folgerung 2.1.19. *Es sei σ ein k-Kegel in V und $\tau \preccurlyeq \sigma$ eine Seite. Dann gilt $\tau_0 = \sigma_0$.*

Folgerung 2.1.20. *Es seien σ ein k-Kegel und σ' der Abschluss von σ. Weiter sei τ' eine Seite von σ' mit $\mathring{\tau}' \cap \sigma \neq \emptyset$. Dann ist $\tau := \tau' \cap \sigma$ eine Seite von σ mit $\mathring{\tau} = \mathring{\tau}'$.*

Beweis. Folgt aus Bemerkung 2.1.8 und Lemma 2.1.17. □

Folgerung 2.1.21. *Es sei σ ein k-Kegel in V. Dann gilt:*

$$\mathring{\sigma} = \sigma \setminus \bigcup_{\tau \prec \sigma} \tau.$$

Bemerkung 2.1.22. Es seien σ, ρ k-Kegel in V und σ' bzw. ρ' die Abschlüsse von σ bzw. ρ. Falls $\mathring{\sigma} = \mathring{\rho}$ gilt, dann gilt $\sigma' = \rho'$.

Erinnerung 2.1.23. Es seien σ', τ' Kegel in V mit $\tau' \subseteq \sigma'$. Weiter sei ρ' eine Seite von σ' mit $\mathring{\tau}' \cap \rho' \neq \emptyset$. Dann gilt $\tau' \subseteq \rho'$.

Bemerkung 2.1.24. Es seien σ_1, σ_2 k-Kegel in V. Im Allgemeinen folgt aus $\mathring{\sigma}_1 = \mathring{\sigma}_2$ nicht $\sigma_1 = \sigma_2$ siehe Abbildung 5.

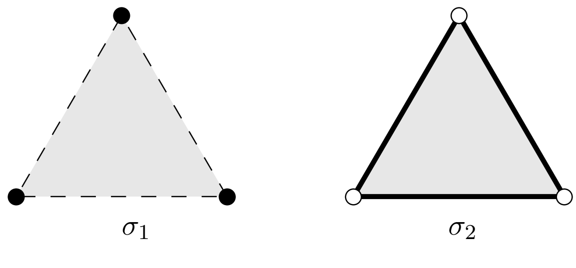

Abbildung 5

Lemma 2.1.25. *Es seien σ ein k-Kegel in V und $\tau_1, \tau_2 \preccurlyeq \sigma$ Seiten von σ mit $\mathring{\tau}_1 \cap \mathring{\tau}_2 \neq \emptyset$. Dann gilt $\tau_1 = \tau_2$.*

Beweis. Folgt aus Bemerkung 2.1.16 und Erinnerung 2.1.23. □

Folgerung 2.1.26. *Es sei σ ein k-Kegel in V. Dann gilt*

$$\sigma \quad = \quad \bigcup_{\tau \preccurlyeq \sigma} \mathring{\tau}.$$

Beweis. Folgt aus der Definition eines k-Kegels und Folgerung 2.1.20. $\square$

Bemerkung 2.1.27. Es seien σ_1, σ_2 k-Kegel in V. Dann ist im Allgemeinen $\sigma_1 \cap \sigma_2$ kein k-Kegel siehe Abbildung 6. Der Schnitt von σ_1 mit σ_2 besteht in diesem Fall aus zwei Strahlen.

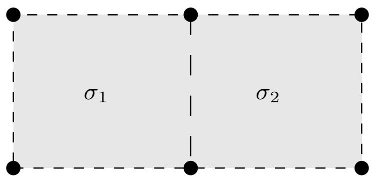

ABBILDUNG 6

Erinnerung 2.1.28. Es seien σ' ein Kegel in V und τ_1', τ_2' Seiten von σ'. Dann ist $\tau_1' \cap \tau_2'$ eine Seite von τ_1' und τ_2'.

Satz 2.1.29. *Es seien σ ein k-Kegel und $\tau_1, \tau_2 \preccurlyeq \sigma$ Seiten. Dann gilt*

$$\tau_1 \cap \tau_2 \quad = \quad \bigcup_{\rho \preccurlyeq \tau_1, \tau_2} \rho.$$

Beweis. Es seien σ', τ_1' und τ_2' die Abschlüsse von σ, τ_1 und τ_2. Wir wissen mit Bemerkung 2.1.16, dass τ_1' bzw. τ_2' Seiten von σ' sind. Es ist nur zur Inklusion „$\subseteq$" etwas zu zeigen. Es sei dazu $v \in \tau_1 \cap \tau_2$ gegeben. Mit Erinnerung 2.1.28 existiert eine Seite ρ' von $\tau_1' \cap \tau_2'$ mit $v \in \mathring{\rho}'$. Insbesondere ist ρ' eine Seite von τ_1' und τ_2'. Nach Lemma 2.1.17 sind τ_1 und τ_2 k-Kegel in V. Aus $v \in \mathring{\rho}'$ und Bemerkung 2.1.8 folgt, dass $\mathring{\rho}' \subseteq \tau_1 \cap \tau_2$ gilt. Somit ist $\rho_1 := \rho' \cap \tau_1 \preccurlyeq \tau_1$ eine Seite von τ_1 und $\rho_2 := \rho' \cap \tau_2 \preccurlyeq \tau_2$ eine Seite von τ_2. Lemma 2.1.18 liefert, dass $\rho_1 \preccurlyeq \sigma$ und $\rho_2 \preccurlyeq \sigma$ gilt. Nach Bemerkung 2.1.3 ist $\mathring{\rho}_1 = \mathring{\rho}_2$. Mit Lemma 2.1.25 erhalten wir $\rho_1 = \rho_2$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Lemma 2.1.30. *Es seien σ, τ k-Kegel in V mit $\tau \subseteq \sigma$. Weiter sei $\rho \preccurlyeq \sigma$ mit $\mathring{\tau} \cap \rho \neq \emptyset$. Dann gilt $\tau \subseteq \rho$.*

Beweis. Es seien σ', τ' und ρ' die Abschlüsse von σ,τ bzw. ρ. Nach Bemerkung 2.1.4 gilt $\tau' \subseteq \sigma'$. Da ρ eine Seite von σ ist, folgt mit Bemerkung 2.1.16, dass $\rho = \rho' \cap \sigma$ gilt. Mit Erinnerung 2.1.23 erhalten wir, dass $\tau' \subseteq \rho'$ gilt. Somit gilt

$$\tau \quad = \quad \tau \cap \tau' \quad \subseteq \quad \rho' \cap \sigma \quad = \quad \rho.$$

$\square$

Folgerung 2.1.31. *Es seien σ, τ k-Kegel in V mit $\tau \subseteq \sigma$. Dann existiert genau eine Seite ρ von σ mit $\tau \subseteq \rho$ und $\mathring{\tau} \subseteq \mathring{\rho}$.*

Beweis. Nach Lemma 2.1.30 existiert eine Seite $\rho \preccurlyeq \sigma$ mit $\tau \subseteq \rho$. Wir wählen $\rho \preccurlyeq \sigma$ minimal, das heißt die minimale Seite ρ von σ mit $\tau \subseteq \rho$. Dann gilt $\mathring{\tau} \subseteq \mathring{\rho}$.

Angenommen, es gelte $\mathring{\tau} \nsubseteq \mathring{\rho}$. Dann existiert eine echte Seite δ von ρ mit $\mathring{\tau} \cap \delta \neq \emptyset$. Mit Lemma 2.1.30 erhalten wir $\tau \subseteq \delta \subset \rho$. Nach Lemma 2.1.18 ist δ eine Seite von σ, ein Widerspruch zur Minimalität von ρ. Die Eindeutigkeit von ρ folgt aus Lemma 2.1.25. □

Folgerung 2.1.32. *Es seien σ, τ k-Kegel in V mit $\tau \subseteq \sigma$. Weiter sei ρ eine Seite von σ mit $\mathring{\tau} \cap \mathring{\rho} \neq \emptyset$. Dann gilt $\mathring{\tau} \subseteq \mathring{\rho}$ und $\tau \subseteq \rho$.*

Beweis. Nach Folgerung 2.1.31 existiert eine Seite $\delta \preccurlyeq \sigma$ mit $\mathring{\tau} \subseteq \mathring{\delta}$ und $\rho \subseteq \delta$. Da $\mathring{\tau} \cap \mathring{\rho} \neq \emptyset$ gilt, ist $\mathring{\rho} \cap \mathring{\delta} \neq \emptyset$. Mit Lemma 2.1.25 erhalten wir $\rho = \delta$. □

Schreibweise 2.1.33. Für jeden k-Kegel σ in V bezeichnen wir die lineare Hülle von σ in V mit $\mathrm{lin}(\sigma) \subseteq V$. Es gilt $\mathrm{lin}(\mathring{\sigma}) = \mathrm{lin}(\sigma)$.

Definition 2.1.34. Die *Dimension* $\dim(\sigma)$ *eines k-Kegels* σ in V ist die Dimension des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathrm{lin}(\sigma)$.

Bemerkung 2.1.35. Es sei σ ein k-Kegel in V und σ' der Abschluss von σ. Dann gilt $\dim(\sigma) = \dim(\sigma')$.

Definition 2.1.36. Es sei σ ein k-Kegel in V mit $n := \dim(\sigma)$. Wir setzen

$$\sigma^{(i)} \quad := \quad \{\tau; , \tau \preccurlyeq \sigma,\ \dim(\tau) = i\}.$$

Beispiel 2.1.37. Es sei σ ein k-Kegel in V mit $\dim(\sigma) = n$. Dann gibt es im Allgemeinen nicht zu jedem $1 \leq i < n$ eine Seite $\tau \preccurlyeq \sigma$ mit $\dim(\tau) = i$ siehe Abbildung 5.

Bemerkung 2.1.38. Es sei σ ein k-Kegel in V mit $\dim(\sigma) = 1$. Dann ist σ schon ein Kegel in V.

Definition 2.1.39. Es sei σ ein k-Kegel in V und σ' der Abschluss von σ. Der k-Kegel σ heißt *1-voll*, falls $\sigma^{(1)} = \sigma'^{(1)}$ gilt.

Lemma 2.1.40. *Es sei σ ein 1-voller k-Kegel in V und τ eine Seite von σ. Dann ist τ 1-voll.*

Beweis. Es sei σ' der Abschluss von σ und τ' eine Seite von σ' mit $\tau = \tau' \cap \sigma$ und $\mathring{\tau}' \subseteq \tau$. Zu zeigen ist, dass $\tau^{(1)} = \tau'^{(1)}$ gilt. Offensichtlich gilt $\tau^{(1)} \subseteq \tau'^{(1)}$. Es sei also $\rho' \in \tau'^{(1)}$ gegeben. Da $\tau'^{(1)} \subseteq \sigma'^{(1)} = \sigma^{(1)}$ gilt, erhalten wir $\rho' \subseteq \tau' \cap \sigma = \tau$. Somit ist $\rho' = \rho' \cap \tau$ eine Seite von τ. □

Lemma 2.1.41. *Es seien σ ein 1-voller k-Kegel in V und σ' der Abschluss von σ. Weiter sei $\tau' \in \sigma'^{(2)}$ mit $\mathring{\tau}' \cap \sigma \neq \emptyset$. Dann gilt $\tau' \preccurlyeq \sigma$.*

Beweis. Die Menge $\tau := \tau' \cap \sigma$ ist eine Seite von σ mit $\mathring{\tau} = \mathring{\tau}'$. Da σ 1-voll ist, ist τ nach Lemma 2.1.40 1-voll und somit ein Kegel. Also gilt $\tau = \tau'$. □

2.2. **Konstruierbare Fächer.**

Wir führen den Begriff des *k-Fächers* ein, welcher den Begriff des Fächers verallgemeinert. Des Weiteren werden wir einige Eigenschaften der k-Fächer beweisen, welche in ähnlicher Form für Fächer gelten. Außerdem werden wir *Seitenfächer* und *offene k-Teilfächer* betrachten, wobei Letzteres eine Verallgemeinerung des offenen Teilfächers ist.

Erinnerung 2.2.1. Ein *Fächer* in V ist eine nichtleere Kollektion Σ' von Kegeln in V, sodass Folgendes gilt:

(i) Für jeden Kegel $\sigma' \in \Sigma'$ und jede Seite $\tau' \preccurlyeq \sigma'$ gilt $\tau' \in \Sigma'$.
(ii) Für je zwei Kegel $\sigma'_1, \sigma'_2 \in \Sigma'$ gilt $\sigma'_1 \cap \sigma'_2 \preccurlyeq \sigma'_1, \sigma'_2$.

Definition 2.2.2. Ein *konstruierbarer Fächer (k-Fächer)* in V ist eine nichtleere Kollektion Σ von k-Kegeln in V, sodass Folgendes gilt:

(i) Für jeden k-Kegel $\sigma \in \Sigma$ und jede Seite $\tau \preccurlyeq \sigma$ gilt $\tau \in \Sigma$.
(ii) Für je zwei k-Kegel $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ gilt $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \cup \tau_k$ mit $\tau_k \preccurlyeq \sigma_1, \sigma_2$.

Bemerkung 2.2.3. Beim Skizzieren von k-Fächern kann es passieren, dass die Zeichnungen nicht eindeutig sind. Wie man im Abbildung 7 sieht, gibt es mehrer k-Kegel die zu dem gegebenen Schaubild passen. Um das Schaubild eindeutig zu machen werden wir eine ,,Liste" der maximalen k-Kegel am Bildrand angeben siehe Abbildung 8.

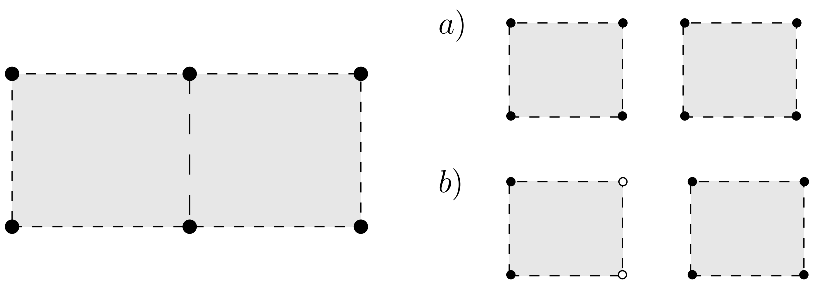

ABBILDUNG 7

Beispiele 2.2.4. Mit Bemerkung 2.1.6 können wir weitere Beispiele von k-Fächern betrachten.

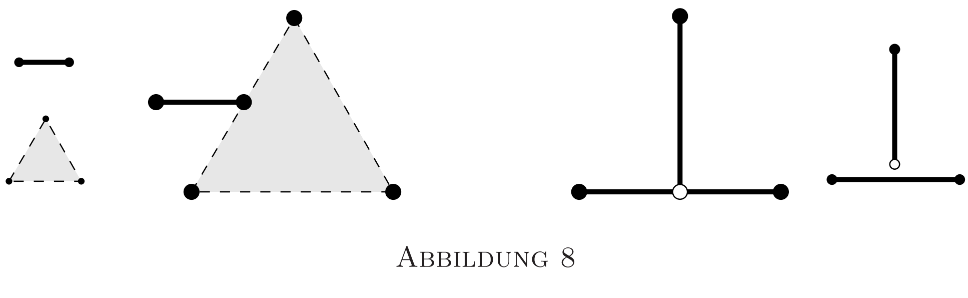

ABBILDUNG 8

Definition 2.2.5. Es sei σ ein k-Kegel in V. Dann ist die Menge $\mathcal{F}_\sigma := \{\tau;\ \tau \preccurlyeq \sigma\}$ nach Lemma 2.1.29 ein k-Fächer in V. Wir nennen $\mathcal{F}_\sigma$ den *Seitenfächer von σ*.

Bemerkung 2.2.6. Ist σ ein Kegel in V, dann folgt mit Bemerkung 2.1.10, dass $\mathcal{F}_\sigma$ ein Fächer ist.

Definition 2.2.7. Ein k-Fächer Σ in V heißt *spitz*, falls alle $\sigma \in \Sigma$ spitz sind.

Folgerung 2.2.8. *Es sei Σ ein k-Fächer in V. Dann existiert ein k-Kegel σ in Σ, sodass $\sigma_0 = \sigma = \tau_0$ für alle $\tau \in \Sigma$ gilt. Das heißt, dass σ der minimale k-Kegel in Σ ist.*

Beweis. Folgt aus Bemerkung 2.1.10 und der Definition eines k-Fächers. □

Bemerkung 2.2.9. Es sei Σ ein k-Fächer in V und δ_0 der minimaler k-Kegel in Σ. Mit Folgerung 2.2.8 ist Σ genau dann spitz, wenn $\delta_0 = \{0\}$ gilt.

Lemma 2.2.10. *Es seien Σ ein k-Fächer in V und $\sigma, \rho \in \Sigma$ k-Kegel mit $\mathring{\sigma} \cap \mathring{\rho} \neq \emptyset$. Dann gilt $\sigma = \rho$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $\sigma \cap \rho = \cup \tau_k$, mit $\tau_k \preccurlyeq \rho, \sigma$. Aus $\mathring{\sigma} \cap \mathring{\rho} \neq \emptyset$ folgt, dass es ein i mit $\mathring{\rho} \cap \mathring{\sigma} \cap \mathring{\tau}_i \neq \emptyset$ gibt. Mit Lemma 2.1.25 folgt, dass $\rho = \tau_i \subseteq \sigma$ und $\sigma = \tau_i \subseteq \rho$ gilt. □

Lemma 2.2.11. *Es seien Σ ein k-Fächer in V und $\rho, \sigma \in \Sigma$ k-Kegel mit $\mathring{\rho} \cap \sigma \neq \emptyset$. Dann gilt $\rho \preccurlyeq \sigma$.*

Beweis. Nach Definition gilt $\sigma \cap \rho = \cup \tau_k$, wobei $\tau_k \preccurlyeq \sigma, \rho$. Mit Folgerung 2.1.26 und Lemma 2.2.10 gilt $\rho = \tau_i \preccurlyeq \sigma$. □

Definition 2.2.12. Es sei Σ ein k-Fächer in V. Der *Träger von* Σ ist definiert als

$$|\Sigma| \quad := \quad \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma \quad \subseteq \quad V.$$

Bemerkung 2.2.13. Es sei σ ein k-Kegel in V. Dann gilt $|\mathcal{F}_\sigma| = \sigma$.

Definition 2.2.14. Es seien Σ, Δ k-Fächer in V. Falls $\Delta \subseteq \Sigma$ gilt, nennen wir Δ einen *offenen k-Teilfächer von* Σ und wir schreiben dafür $\Delta \preccurlyeq \Sigma$.

Bemerkung 2.2.15. Es seien Σ ein k-Fächer und $\sigma \in \Sigma$. Dann gilt $\mathcal{F}_\sigma \preccurlyeq \Sigma$.

Bemerkung 2.2.16. Es seien Σ, Δ zwei k-Fächer in V mit $\Delta \preccurlyeq \Sigma$. Ist Σ spitz, so ist Δ ebenfalls spitz.

Folgerung 2.2.17. *Es seien Δ, Σ k-Fächer in V mit $\Delta \preccurlyeq \Sigma$. Weiter sei $\sigma \in \Sigma$ mit $\mathring{\sigma} \cap |\Delta| \neq \emptyset$. Dann gilt $\sigma \in \Delta$.*

Beweis. Aus $\mathring{\sigma} \cap |\Delta| \neq \emptyset$ folgt, dass es ein $\rho \in \Delta$ mit $\mathring{\rho} \cap \mathring{\sigma} \neq \emptyset$ gibt. Wegen $\Delta \preccurlyeq \Sigma$ gilt $\rho \in \Sigma$. Mit Lemma 2.2.10 folgt $\sigma = \rho \in \Delta$. □

Definition 2.2.18. Es sei Σ ein k-Fächer in V. Das *relative Innere von* Σ ist definiert als $\mathring{\Sigma} := \{\mathring{\sigma};\ \sigma \in\ \Sigma\}$. Für jede Teilmenge $A \subseteq \mathring{\Sigma}$ setzen wir

$$|A| \quad := \quad \bigcup_{\sigma \in \Sigma,\ \mathring{\sigma} \in A} \mathring{\sigma} \quad \subseteq \quad V.$$

Bemerkung 2.2.19. Es sei Σ ein k-Fächer in V. Mit Folgerung 2.1.26 gilt $|\Sigma| = |\mathring{\Sigma}|$.

Folgerung 2.2.20. *Es seien Σ ein k-Fächer, $A \subseteq \mathring{\Sigma}$ und $\tau \in \Sigma$ mit $\mathring{\tau} \cap |A| \neq \emptyset$. Dann gilt $\mathring{\tau} \in A$.*

Beweis. Folgt aus Lemma 2.2.10. □

Lemma 2.2.21. *Es seien Σ ein k-Fächer in V und $A \subseteq \mathring{\Sigma}$ eine Teilmenge des relativen Inneren von Σ mit $\delta_0 \in A$, wobei δ_0 den minimalen k-Kegel von Σ bezeichnet. Weiter sei $\sigma \in \Sigma$ ein k-Kegel mit $\mathring{\sigma} \in A$. Dann setzen wir*

$$\sigma_A \quad := \quad \sigma \ \cap \ |A|.$$

Die Menge σ_A ist ein k-Kegel in V mit $\mathring{\sigma} = \mathring{\sigma}_A$. Weiter sind für jede Teilmenge $\tau_A \subseteq \sigma_A$ folgende Aussagen äquivalent:

(i) *τ_A ist eine Seite von σ_A.*
(ii) *Es existiert eine Seite $\tau \preccurlyeq \sigma$ von σ mit $\mathring{\tau} \in A$, sodass $\tau_A = \tau \cap |A|$ gilt.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass σ_A ein k-Kegel in V ist. Es sei σ' der Abschluss von σ. Wir wollen zeigen, dass Folgendes gilt:

$$\bigcup_{\rho' \preccurlyeq \sigma',\ \mathring{\rho}' \subseteq \sigma \cap |A| = \sigma_A} \mathring{\rho}' \quad = \quad \bigcup_{\rho' \preccurlyeq \sigma',\ \mathring{\rho}' \subseteq \sigma} \mathring{\rho}' \ \cap \ \sigma_A \quad = \quad \sigma \cap |A| \quad = \quad \sigma_A.$$

Es ist nur zur ersten Gleichung etwas zu zeigen. Die Inklusion „$\subseteq$" ist offensichtlich. Zur Inklusion „$\supseteq$": Dazu sei ρ' eine Seite von σ' mit $\mathring{\rho}' \cap (\sigma \cap |A|) \neq \emptyset$ gegeben. Nach Bemerkung 2.1.8 gilt $\mathring{\rho}' \subseteq \sigma$. Mit Folgerung 2.1.20 ist $\rho := \rho' \cap \sigma$ eine Seiten von σ mit $\mathring{\rho} = \mathring{\rho}'$. Insbesondere gilt $\rho \in \Sigma$. Nach Folgerung 2.2.20 ist $\mathring{\rho} \in A$.

Mit Bemerkung 2.1.10 bzw. Folgerung 2.2.8 und $\delta_0 \in A$ folgt, dass $\sigma_0' = \sigma_0 = \delta_0 \subseteq \sigma_A$ gilt. Außerdem gilt nach Voraussetzung $\mathring{\sigma}' \subseteq \sigma_A$. Somit ist der Abschluss von σ_A in V gleich dem Abschluss von σ. Somit ist σ_A ein k-Kegel in V mit $\mathring{\sigma} = \mathring{\sigma}_A$.

Zur Implikation „(i)$\Rightarrow$(ii)": Da τ_A nach Voraussetzung eine Seite von σ_A ist, existiert eine Seite τ' von σ' mit $\mathring{\tau}' \subseteq \tau_A$, sodass $\tau_A = \tau' \cap \sigma_A$ gilt. Nach Konstruktion von σ_A gilt $\mathring{\tau}_A \in A$. Wir setzen $\tau := \tau' \cap \sigma$. Es gilt

$$\tau_A \quad = \quad \tau' \ \cap \ \sigma_A \quad = \quad \tau' \ \cap \ \sigma \ \cap \ |A| \quad = \quad \tau \cap |A|.$$

Mit der obigen Gleichung erhalten wir $\mathring{\tau}' \subseteq \tau$. Somit ist τ eine Seite von σ. Weiter ist $\mathring{\tau} = \mathring{\tau}' = \mathring{\tau}_A \in A$. Es gilt also $\tau_A = \tau \cap |A|$ mit $\tau \preccurlyeq \sigma$ und $\mathring{\tau} \in A$.

Zur Implikation „(ii)$\Rightarrow$(i)": Es sei eine Seite τ von σ mit $\mathring{\tau} \in A$ und $\tau_A = \tau \cap |A|$ gegeben. Zu τ existiert eine Seite τ' von σ', sodass $\mathring{\tau}' \subseteq \tau$ und $\tau = \tau' \cap \sigma$ gilt. Weiter folgt mit Bemerkung 2.1.3, dass $\mathring{\tau}' = \mathring{\tau} \subseteq \tau_A$ gilt. Folgender Gleichung liefert, dass τ_A eine Seite von σ_A ist:

$$\tau_A \quad = \quad \tau \ \cap \ |A| \quad = \quad \tau' \ \cap \ \sigma \ \cap \ |A| \quad = \quad \tau' \ \cap \ \sigma_A.$$

□

Satz 2.2.22. *Es seien Σ ein k-Fächer in V und $A \subseteq \mathring{\Sigma}$ eine Teilmenge des relativen Inneren von Σ mit $\delta_0 \in A$, wobei δ_0 den minimalen k-Kegel von Σ bezeichnet. Dann haben wir einen k-Fächer in V:*

$$\Sigma_A \quad := \quad \{\sigma_A;\ \sigma_A := \sigma \cap |A|,\ \sigma \in \Sigma,\ \mathring{\sigma} \in A\}.$$

Beweis. Nach Lemma 2.2.21 ist jedes σ_A ein k-Kegel. Lemma 2.2.21 liefert außerdem $\tau \in \Sigma_A$ für jede Seite $\tau \preccurlyeq \sigma_A$. Es ist noch zu zeigen, dass $\sigma_A \cap \rho_A = \cup \tau_{k_A}$ mit $\tau_{k_A} \preccurlyeq \rho_A, \sigma_A$ für $\sigma_A, \rho_A \in \Sigma_A$.

Es seien dazu $\sigma_A, \rho_A \in \Sigma_A$ gegeben. Dann gibt es $\sigma, \rho \in \Sigma$ mit $\mathring{\sigma}, \mathring{\rho} \in A$, sodass gilt:

$$\sigma_A \quad = \quad \sigma \cap |A| \qquad \text{und} \qquad \rho_A \quad = \quad \rho \cap |A|.$$

Da Σ ein k-Fächer ist, existieren $\tau_k \preccurlyeq \sigma, \rho$, sodass $\sigma \cap \rho = \cup \tau_k$ gilt. Für jedes τ_k mit $\mathring{\tau}_k \in A$ setzen wir $\tau_{k_A} := \tau_k \cap |A|$. Nach Lemma 2.2.21 ist jedes τ_{k_A} eine Seite von σ_A und ρ_A. Somit gilt mit Folgerung 2.2.20:

$$\begin{aligned} \sigma_A \cap \rho_A \quad &= \quad \sigma \cap \rho \cap |A| \quad = \quad \left(\bigcup \tau_k\right) \cap |A| \quad = \quad \bigcup_{\mathring{\tau}_k \in A} (\tau_k \cap |A|) \\ &= \quad \bigcup \tau_{k_A}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.2.23. Mit Folgerung 2.1.26 erhalten wir $|\Sigma_A| = |A|$ bzw. $\mathring{\Sigma}_A = A$.

Definition 2.2.24. Es seien Σ, Δ k-Fächer in V und δ_0 der minimale k-Kegel von Σ. Der k-Fächer Δ heißt *konstruierbarer Teilfächer (k-Teilfächer) von* Σ (Bezeichnung $\Delta \sqsubseteq \Sigma$), falls eine Menge $A \subseteq \mathring{\Sigma}$ mit $\delta_0 \in A$ existiert, sodass $\Delta = \Sigma_A$ gilt.

Bemerkung 2.2.25. Es seien Σ, Δ k-Fächer in V mit $\Delta \sqsubseteq \Sigma$. Dann gilt $\mathring{\Delta} \subseteq \mathring{\Sigma}$.

Bemerkung 2.2.26. Es seien Σ ein k-Fächer in V und Σ' ein Fächer in V mit $\Sigma \sqsubseteq \Sigma'$. Dann gilt mit Lemma 2.2.21:

(i) Es seien $\tau \in \Sigma$ und τ' der Abschluss von τ. Dann ist $\tau' \in \Sigma'$.
(ii) Ist Σ ein Fächer, so gilt $\Sigma \preccurlyeq \Sigma'$.

Beispiel 2.2.27. Mit Bemerkung 2.1.6 können wir folgendes Beispiel betrachten:

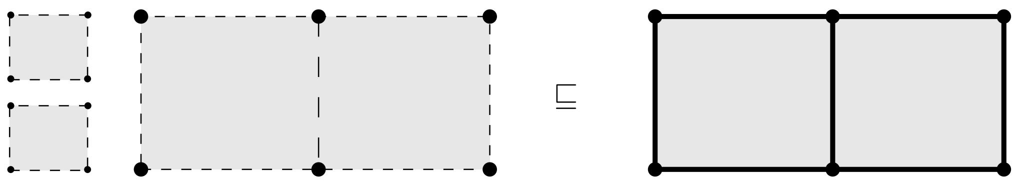

Abbildung 9

Bemerkung 2.2.28. Es seien Σ, Δ zwei k-Fächer in V mit $\Delta \sqsubseteq \Sigma$. Ist Σ spitz, so ist Δ ebenfalls spitz.

Lemma 2.2.29. *Es seien Σ und Δ k-Fächer in V, wobei $\Delta \preccurlyeq \Sigma$ ein offener k-Teilfächer ist. Dann gilt*

$$\Delta \quad = \quad \Sigma_{\mathring{\Delta}} \quad \sqsubseteq \quad \Sigma.$$

Beweis. Zur Inklusion „$\subseteq$": Es sei $\tau \in \Delta$ gegeben. Dann ist $\mathring{\tau} \in \mathring{\Delta}$ und $\tau \in \Sigma$. Mit Bemerkung 2.2.19 erhalten wir

$$\tau \quad = \quad \tau \cap |\Delta| \quad = \quad \tau \cap |\mathring{\Delta}| \;\in\; \Sigma_{\mathring{\Delta}}.$$

Zur Inklusion „$\supseteq$": Es sei $\tau \in \Sigma_{\mathring{\Delta}}$ gegeben. Dann existiert ein $\rho \in \Sigma$ mit $\mathring{\rho} \in \mathring{\Delta}$ und $\tau = \rho \cap |\mathring{\Delta}|$. Nach Bemerkung 2.2.19 existiert zu ρ ein $\rho_1 \in \Delta$ mit $\mathring{\rho} \cap \mathring{\rho}_1 \neq \emptyset$. Da nach Voraussetzung $\Delta \preccurlyeq \Sigma$ ist, folgt mit Folgerung 2.2.17, dass $\rho = \rho_1$ gilt. Somit erhalten wir

$$\tau \quad = \quad \rho \ \cap \ |\mathring{\Delta}| \quad = \quad \rho_1 \ \cap \ |\Delta| \quad = \quad \rho_1 \ \in \ \Delta.$$

□

Lemma 2.2.30. *Es seien Σ_1, Σ_2 und Σ_3 k-Fächer in V mit $\Sigma_1 \sqsubseteq \Sigma_2$ und $\Sigma_2 \sqsubseteq \Sigma_3$. Dann gilt $\Sigma_1 \sqsubseteq \Sigma_3$.*

Beweis. Mit Bemerkung 2.2.25 erhalten wir $\mathring{\Sigma}_1 \subseteq \mathring{\Sigma}_2 \subseteq \mathring{\Sigma}_3$ sowie $\Sigma_1 = (\Sigma_2)_{\mathring{\Sigma}_1}$ und $\Sigma_2 = (\Sigma_3)_{\mathring{\Sigma}_2}$. Zu zeigen ist:

$$\Sigma_1 \quad = \quad (\Sigma_3)_{\mathring{\Sigma}_1}.$$

Zur Inklusion „$\subseteq$": Es sei $\tau_1 \in \Sigma_1$ gegeben. Aus $\Sigma_1 \sqsubseteq \Sigma_2$ folgt, dass es ein $\tau_2 \in \Sigma_2$ mit $\tau_1 = \tau_2 \cap |\mathring{\Sigma}_1|$ und $\mathring{\tau}_1 = \mathring{\tau}_2 \in \mathring{\Sigma}_1$ gibt. Ebenso folgt aus $\Sigma_2 \sqsubseteq \Sigma_3$, dass es ein $\tau_3 \in \Sigma_3$ mit $\tau_2 = \tau_3 \cap |\mathring{\Sigma}_2|$ und $\mathring{\tau}_2 = \mathring{\tau}_3 \in \mathring{\Sigma}_2$ gibt. Somit gilt

$$\tau_1 \quad = \quad \tau_2 \ \cap \ |\mathring{\Sigma}_1| \quad = \quad \tau_3 \ \cap \ |\mathring{\Sigma}_2| \cap |\mathring{\Sigma}_1| \quad = \quad \tau_3 \ \cap \ |\mathring{\Sigma}_1| \quad \in \quad (\Sigma_3)_{\mathring{\Sigma}_1}.$$

Zur Inklusion „$\supseteq$": Es sei $\tau \in (\Sigma_3)_{\mathring{\Sigma}_1}$ gegeben. Dann gibt es ein $\tau_3 \in \Sigma_3$ mit

$$\tau \quad = \quad \tau_3 \cap |\mathring{\Sigma}_1| \qquad \text{und} \qquad \mathring{\tau}_3 \in \mathring{\Sigma}_1.$$

Da $\mathring{\Sigma}_1 \subseteq \mathring{\Sigma}_2$ gilt, erhalten wir mit Satz 2.2.22, dass $\tau_2 := \tau_3 \cap |\mathring{\Sigma}_2| \in \Sigma_2$ gilt. Weiter liefert Satz 2.2.22:

$$\tau \quad = \quad \tau_3 \ \cap \ |\mathring{\Sigma}_1| \quad = \quad \tau_3 \ \cap \ |\mathring{\Sigma}_1| \ \cap \ |\mathring{\Sigma}_2| \quad = \quad \tau_2 \ \cap \ |\mathring{\Sigma}_1| \quad \in \quad \Sigma_1.$$

□

Lemma 2.2.31. *Es seien Σ ein k-Fächer in V und Σ' ein Fächer in V mit $\Sigma \sqsubseteq \Sigma'$. Weiter seien $\tau, \rho \in \Sigma$ gegeben und τ', ρ' seien die Abschlüsse von τ bzw. ρ. Dann gilt:*

$$\tau \preccurlyeq \rho \qquad \Leftrightarrow \qquad \tau' \preccurlyeq \rho'.$$

Beweis. Nach Bemerkung 2.2.26 gilt $\tau', \rho' \in \Sigma'$. Die Implikation „$\Rightarrow$" folgt sofort aus Bemerkung 2.1.16. Zur Implikation „$\Leftarrow$": Es sei τ' eine Seite von ρ'. Wegen $\Sigma \sqsubseteq \Sigma'$ gilt

$$\tau \quad = \quad \tau' \cap |\Sigma| \quad \subseteq \quad \rho' \cap |\Sigma| \quad = \quad \rho.$$

Insbesondere ist $\mathring{\tau} \subseteq \rho$. Mit Lemma 2.2.11 erhalten wir $\tau \preccurlyeq \rho$. □

Definition 2.2.32. Wir nennen einen k-Fächer Σ in V *1-voll*, falls alle k-Kegel $\sigma \in \Sigma$ 1-voll sind.

2.3. **Quasiaffine k-Fächer.**

Dieser Abschnitt widmet sich unter anderem dem Begriff des *quasiaffinen k-Fächers*, welcher eine Verallgemeinerung des quasiaffinen Fächers ist. Dafür benötigen wir den Begriff des *k-Teilfächers*, welcher mit Hilfe von Satz 2.2.22 eingeführt wurde. Wir werden in diesem Abschnitt auch *k-Fächersysteme* betrachten, eine Verallgemeinerung des Begriffs *Fächersystem*, welcher von A'Campo-Neuen und Hausen in [4] eingeführt wurde.

Erinnerung 2.3.1. Ein Fächer Σ' in V heißt *quasiaffiner Fächer*, falls ein Kegel σ' in V existiert, sodass $\Sigma' \preccurlyeq \mathcal{F}_{\sigma'}$ gilt.

Definition 2.3.2. Es sei Σ ein k-Fächer in V. Der k-Fächer Σ heißt *quasiaffiner k-Fächer*, falls ein Kegel σ' in V existiert mit $\Sigma \sqsubseteq \mathcal{F}_{\sigma'}$.

Bemerkung 2.3.3. Es sei Σ ein quasiaffiner k-Fächer in V. Ist Σ ein Fächer, so ist nach Bemerkung 2.2.26 die Kollektion Σ ein quasiaffiner Fächer.

Folgerung 2.3.4. *Es seien Δ, Σ k-Fächer in V mit $\Delta \sqsubseteq \Sigma$. Ist Σ quasiaffin, so ist Δ ebenfalls quasiaffin.*

Beweis. Folgt aus Lemma 2.2.30. □

Bemerkung 2.3.5. Es seien σ ein k-Kegel in V und σ' der Abschluss von σ. Für jedes $\tau \in \mathcal{F}_\sigma$ gibt es ein $\tau' \in \mathcal{F}_{\sigma'}$ mit $\tau = \tau' \cap |\mathcal{F}_\sigma|$ und $\mathring{\tau}' \in \mathring{\mathcal{F}}_\sigma$. Somit gilt

$$\mathcal{F}_\sigma \quad = \quad (\mathcal{F}_{\sigma'})_{\mathring{\mathcal{F}}_\sigma} \quad \sqsubseteq \quad \mathcal{F}_{\sigma'}.$$

Insbesondere ist für jeden k-Kegel σ in V der k-Fächer $\mathcal{F}_\sigma$ ein quasiaffiner k-Fächer in V.

Beispiele 2.3.6. Mit Bemerkung 2.1.6 können wir folgende quasiaffine k-Fächer betrachten siehe Abbildung 10.

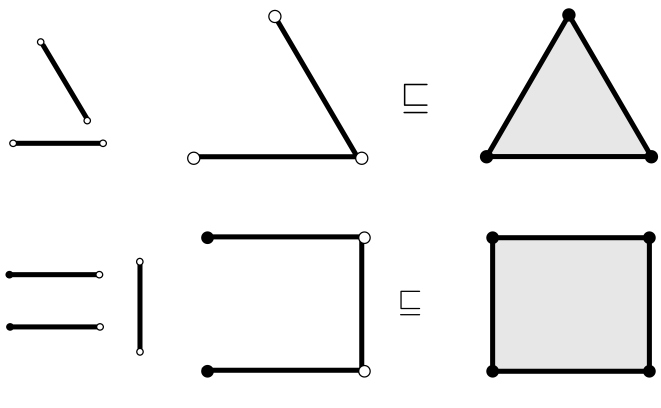

ABBILDUNG 10

Folgerung 2.3.7. *Es seien Σ, Δ k-Fächer in V mit $\Delta \sqsubseteq \Sigma$. Weiter seien $\rho \in \Delta$ und $\sigma \in \Sigma$ k-Kegel mit $\mathring{\rho} \cap \mathring{\sigma} \neq \emptyset$. Dann gilt $\mathring{\rho} = \mathring{\sigma}$.*

Beweis. Zu ρ existiert ein $\rho_1 \in \Sigma$ mit $\rho = \rho_1 \cap |\Delta|$ und $\mathring{\rho} = \mathring{\rho}_1$. Mit Lemma 2.2.10 folgt, dass $\rho_1 = \sigma$ gilt. Somit ist $\mathring{\rho} = \mathring{\rho}_1 = \mathring{\sigma}$. □

Definition 2.3.8. Es sei Σ ein k-Fächer in V und Σ' ein Fächer in V mit $\Sigma \sqsubseteq \Sigma'$. Der Fächer Σ' heißt *Minimalfächer zu* Σ, falls für jeden Fächer Δ' in V mit $\Sigma \sqsubseteq \Delta'$ die Bedingung $\Sigma' \preccurlyeq \Delta'$ erfüllt ist.

Bemerkung 2.3.9. Falls der Minimalfächer existiert, so ist dieser eindeutig. Ist Σ quasiaffin so ist der Minimalfächer Σ' ebenfalls quasiaffin.

Lemma 2.3.10. *Es seien Σ ein quasiaffiner k-Fächer in V. Für jedes $\tau \in \Sigma$ sei τ' der Abschluss von τ. Dann ist die folgende Kollektion von Kegeln der Minimalfächer von Σ:*

$$\Sigma' \quad := \quad \bigcup_{\tau \in \Sigma} \mathcal{F}_{\tau'}$$

Beweis. Es sei σ' ein Kegel in V mit $\Sigma \sqsubseteq \mathcal{F}_{\sigma'}$. Weiter seien $\tau \in \Sigma$ und der zugehörige Abschluss τ' von τ gegeben. Dann existiert ein $\tau_1' \in \mathcal{F}_{\sigma'}$ mit $\mathring{\tau}_1' \in \mathring{\Sigma}$ und $\tau = \tau_1' \cap |\Sigma|$. Nach Lemma 2.2.21 gilt $\mathring{\tau} = \mathring{\tau}_1'$. Somit ist $\tau' = \tau_1' \preccurlyeq \sigma'$. Also ist Σ' ein Fächer in V. Aus $\tau = \tau' \cap |\Sigma|$ folgt, dass $\Sigma \sqsubseteq \Sigma'$ gilt.

Bleibt zu zeigen, dass Σ' der Minimalfächer zu Σ ist. Es sei dazu ein Fächer Δ' in V mit $\Sigma \sqsubseteq \Delta'$ gegeben. Zu zeigen ist, dass $\Sigma' \preccurlyeq \Delta'$ gilt. Dafür reicht es zu zeigen, dass für jedes $\tau \in \Sigma$ auch $\tau' \in \Delta'$ gilt. Es sei $\tau = \tau' \cap |\mathring{\Sigma}| \in \Sigma$ gegeben. Da $\Sigma \sqsubseteq \Delta'$ gilt, existiert ein $\rho' \in \Delta'$ mit $\mathring{\rho}' \in \mathring{\Sigma}$ und $\tau = \rho' \cap |\Sigma|$. Mit Lemma 2.2.21 gilt $\mathring{\tau}' = \mathring{\tau} = \mathring{\rho}'$. Da ρ' und τ' Kegel in V sind, folgt $\tau' = \rho' \in \Delta'$. □

Bemerkung 2.3.11. Es seien Σ ein spitzer quasiaffiner k-Fächer in V und Σ' der Minimalfächer zu Σ. Mit Bemerkung 2.1.14 und Lemma 2.3.10 ist Σ' ebenfalls spitz.

Lemma 2.3.12. *Es seien Δ, Σ zwei quasiaffine k-Fächer in V mit $\Delta \preccurlyeq \Sigma$ und Δ' der Minimalfächer zu Δ. Dann gilt $\mathring{\Delta} = \mathring{\Delta}' \cap \mathring{\Sigma}$.*

Beweis. Nach Lemma 2.3.10 existiert zu Σ der Minimalfächer Σ'. Mit Lemma 2.2.30 gilt $\Delta \sqsubseteq \Sigma \sqsubseteq \Sigma'$ und damit $\Delta' \preccurlyeq \Sigma'$. Es ist nur zur Inklusion „$\supseteq$" etwas zu zeigen. Dazu seien $\tau' \in \Delta'$ und $\rho \in \Sigma$ mit $\mathring{\tau}' = \mathring{\rho}$ gegeben. Zu zeigen ist, dass $\mathring{\rho} \in \mathring{\Delta}$ gilt. Für den Abschluss ρ' von ρ gilt:

$$\rho' \quad = \quad \tau' \;\in\; \Delta' \preccurlyeq \Sigma'.$$

Nach Lemma 2.3.10 existiert zu τ' ein $\delta \in \Delta$ mit $\tau' \preccurlyeq \delta'$, wobei δ' der Abschluss von δ ist. Nach Voraussetzung gilt $\delta \in \Sigma$. Bemerkung 2.2.26 liefert $\delta' \in \Sigma'$. Aus $\Sigma \sqsubseteq \Sigma'$ folgt

$$\rho \quad = \quad \rho' \cap |\Sigma| \quad = \quad \tau' \cap |\Sigma| \quad \subseteq \quad \delta' \cap |\Sigma| \quad = \quad \delta.$$

Lemma 2.2.10 liefert $\rho \preccurlyeq \delta$. Also gilt $\rho \in \Delta$ und $\mathring{\rho} \in \mathring{\Delta}$. □

Lemma 2.3.13. *Es seien Σ, Δ k-Fächer in V mit $\Delta \sqsubseteq \Sigma$. Weiter seien Σ' und Δ' die Minimalfächer zu Σ bzw. Δ. Dann gilt $\Delta' \preccurlyeq \Sigma'$.*

Beweis. Es gilt $\Sigma \sqsubseteq \Sigma'$ und $\Delta \sqsubseteq \Delta'$. Mit Lemma 2.2.30 erhalten wir $\Delta \sqsubseteq \Sigma'$. Da Δ' der Minimalfächer zu Δ ist, gilt $\Delta' \preccurlyeq \Sigma'$. □

Folgerung 2.3.14. *Es seien Σ, Δ k-Fächer in V mit $\Delta \preccurlyeq \Sigma$. Weiter seien Σ' und Δ' die Minimalfächer zu Σ bzw. Δ. Dann gilt $\Delta' \preccurlyeq \Sigma'$.*

Beweis. Folgt aus Lemma 2.2.29 und Lemma 2.3.13. □

Erinnerung 2.3.15. Es sei Σ' ein quasiaffiner Fächer in V, sodass $|\Sigma'|$ ein Kegel in V ist. Dann gilt $\Sigma' = \mathcal{F}_{|\Sigma'|}$.

Lemma 2.3.16. *Es seien Σ ein quasiaffiner k-Fächer in V und Σ' der zugehörige Minimalfächer. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Der Träger $|\Sigma|$ von Σ ist ein k-Kegel in V.*
(ii) *Der Träger $|\Sigma'|$ von Σ' ist ein Kegel in V.*

Des Weiteren gilt: Ist der Träger $|\Sigma|$ von Σ ein k-Kegel in V, so ist $|\Sigma'|$ der Abschluss von $|\Sigma|$.

Beweis. Zur Implikation „(i)⇒(ii)": Ist $\sigma := |\Sigma|$ ein k-Kegel in V, so ist der Abschluss σ' von σ ein Kegel. Da $|\Sigma'|$ abgeschlossen ist, gilt $\sigma' \subseteq |\Sigma'|$. Noch zu zeigen ist, dass $|\Sigma'| \subseteq \sigma'$ gilt. Nach Lemma 2.3.10 reicht es zu zeigen, dass für alle $\tau \in \Sigma$ der Abschluss τ' eine Teilmenge von σ' ist. Dies folgt sofort aus Bemerkung 2.1.16. Insbesondere ist $|\Sigma'|$ der Abschluss von $\sigma = |\Sigma|$.

Zur Implikation „(ii)⇒(i)": Es sei $\sigma' := |\Sigma'|$ ein Kegel in V. Für jedes $\tau \in \Sigma$ sei τ' der Abschluss von τ. Nach Bemerkung 2.1.22 und Folgerung 2.2.19 gilt:

$$|\Sigma| = \bigcup_{\tau\in\Sigma} \mathring{\tau} = \bigcup_{\tau\in\Sigma} \mathring{\tau}'.$$

Mit Lemma 2.3.10 und Erinnerung 2.3.15 erhalten wir, dass τ' eine Seite von σ' ist. Da Σ' der Minimalkegel zu Σ ist, folgt mit Lemma 2.3.10, dass $\mathring{\sigma}' \subseteq |\Sigma|$ und $\sigma'_0 \subseteq |\Sigma|$ gilt. Somit ist $|\Sigma|$ ein k-Kegel. □

Lemma 2.3.17. *Es sei Σ ein quasiaffiner k-Fächer in V. Ist $|\Sigma|$ ein k-kegel in V, dann gilt $\Sigma = \mathcal{F}_{|\Sigma|}$.*

Beweis. Es sei Σ' der Minimalfächer zu Σ. Wir setzen $\sigma := |\Sigma|$ und $\sigma' := |\Sigma'|$. Mit Lemma 2.3.16 ist $\mathring{\sigma} = \mathring{\sigma}'$.

Zur Inklusion „$\subseteq$": Es sei $\tau \in \Sigma$ gegeben. Dann existiert ein $\tau' \in \Sigma'$ mit $\mathring{\tau}' \in \mathring{\Sigma}$ und $\tau = \tau' \cap |\Sigma|$. Nach Erinnerung 2.3.15 gilt $\tau' \preccurlyeq \sigma'$. Also ist τ eine Seite von σ.

Zur Inklusion „$\supseteq$": Es sei $\tau \preccurlyeq \sigma$ gegeben. Dann existiert ein $\tau' \preccurlyeq \sigma'$ mit $\tau = \tau' \cap \sigma$ und $\mathring{\tau}' \subseteq \tau$. Nach Erinnerung 2.3.15 ist $\tau' \in \Sigma'$. Da $\mathring{\tau}' \in \mathring{\Sigma}'$ und $\mathring{\tau}' \subseteq |\Sigma|$ gilt, ist $\mathring{\tau} \in \mathring{\Sigma}$. Aus $\Sigma \sqsubseteq \Sigma'$ folgt $\tau \in \Sigma$. □

Folgerung 2.3.18. *Es sei Σ ein spitzer quasiaffiner k-Fächer in V. Ist $|\Sigma|$ ein k-Kegel, so ist $|\Sigma|$ schon spitz.*

Beweis. Nach Lemma 2.3.17 ist $\mathcal{F}_{|\Sigma|} = \Sigma$. Somit ist $|\Sigma| \in \mathcal{F}_{|\Sigma|}$ spitz. □

Beispiel 2.3.19. Es seien $\sigma, \tau \subseteq V$ k-Kegel. Dann ist im Allgemeinen $\sigma \cap \tau$ kein k-Kegel siehe Abbildung 7.

Erinnerung 2.3.20. Es seien σ', τ' Kegel in V und $\rho' \preccurlyeq \sigma'$ sowie $\delta' \preccurlyeq \tau'$ Seiten von σ' bzw. τ'. Dann ist $\rho' \cap \delta'$ eine Seite von $\sigma' \cap \tau'$ und $\sigma'_0 \cap \tau'_0$ die minimale Seite von $\sigma' \cap \tau'$. Gilt $\mathring{\sigma}' \cap \mathring{\tau}' \neq \emptyset$, so ist $\mathring{\sigma}' \cap \mathring{\tau}' = (\sigma' \mathring{\cap} \tau')$.

Lemma 2.3.21. *Es seien $\sigma, \tau \subseteq V$ k-Kegel und σ' sowie τ' die Abschlüsse von σ bzw. τ. Dann existiert ein quasiaffiner k-Fächer $\Sigma_{\sigma\cap\tau}$ in V mit $\Sigma_{\sigma\cap\tau} \sqsubseteq \mathcal{F}_{\tau'\cap\sigma'}$ und $\sigma \cap \tau = |\Sigma_{\sigma\cap\tau}|$.*

Beweis. Es seien σ' und τ' die Abschlüsse von σ bzw τ. Nach Definition gilt $\sigma \;=\; \sigma'_0 \cup \mathring{\sigma}' \cup \mathring{\sigma}'_1 \cup \ldots \cup \mathring{\sigma}'_k$ und $\tau \;=\; \tau'_0 \cup \mathring{\tau}' \cup \mathring{\tau}'_1 \cup \ldots \cup \mathring{\tau}'_l$ mit gewissen Seiten $\sigma'_i \preccurlyeq \sigma'$ bzw. $\tau'_j \preccurlyeq \tau'$. Somit gilt

$$\sigma \cap \tau \;=\; \bigcup_{\mathring{\sigma}'_i \cap \mathring{\tau}'_j \neq \emptyset} \mathring{\sigma}'_i \cap \mathring{\tau}'_j.$$

Nach Erinnerung 2.3.20 ist $\sigma'_i \cap \tau'_j$ eine Seite von $\sigma' \cap \tau'$ und $\sigma'_0 \cap \tau'_0$ die minimale Seite von $\sigma' \cap \tau'$. Weiter erhalten wir mit Erinnerung 2.3.20

$$A_{\sigma\cap\tau} \;:=\; \left\{\mathring{\sigma}'_i \cap \mathring{\tau}'_j ; \mathring{\sigma}'_i \cap \mathring{\tau}'_j \neq \emptyset\right\} \;\subseteq\; \mathring{(F_{\sigma'\cap\tau'})}.$$

Wir setzen $\Sigma_{\sigma\cap\tau} := (\mathcal{F}_{\sigma'\cap\tau'})_{A_{\sigma\cap\tau}} \sqsubseteq \mathcal{F}_{\sigma'\cap\tau'}$. Nach Satz 2.2.22 ist $\Sigma_{\sigma\cap\tau}$ ein quasiaffiner k-Fächer. Mit Bemerkung 2.2.23 erhalten wir $|\Sigma_{\sigma\cap\tau}| = |A_{\sigma\cap\tau}| = \sigma \cap \tau$. $\square$

Beispiel 2.3.22. Es seien Σ ein k-Fächer und Σ' ein Fächer in V mit $\mathring{\Sigma} = \mathring{\Sigma}'$. Dann gilt $\Sigma \sqsubseteq \Sigma'$ im Allgemeinen nicht siehe Abbildung 11.

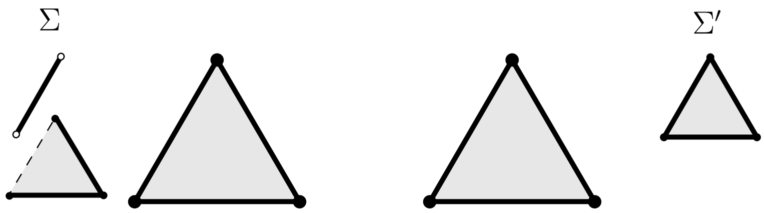

Abbildung 11

Beispiel 2.3.23. Es sei Σ ein k-Fächer. Im Allgemeinen existiert kein Fächer Σ' mit $\Sigma \sqsubseteq \Sigma'$ siehe Abbildung 8.

Wir verallgemeinern den Begriff des „Fächersystems" welcher in [4] wie folgt eingeführt worden ist:

Definition 2.3.24. Ein *Fächersystem in V* ist eine endliche Familie $\mathcal{S}' := (\Sigma'_{ij})_{i,j\in I}$ von Fächern in V, sodass $\Sigma'_{ij} = \Sigma'_{ji}$ und $\Sigma'_{ij} \cap \Sigma'_{jk} \preccurlyeq \Sigma'_{ik}$ gilt für jedes $i,j,k \in I$.

Definition 2.3.25. Ein *konstruierbares Fächersystem (k-Fächersystem)* in V ist eine endliche Familie $\mathcal{S} := (\Sigma_{ij})_{i,j\in I}$ von k-Fächern in V, sodass für jedes $i,j,k \in I$ gilt:

$$\Sigma_{ij} \;=\; \Sigma_{ji} \qquad \text{und} \qquad \Sigma_{ij} \cap \Sigma_{jk} \preccurlyeq \Sigma_{ik}.$$

Bemerkung 2.3.26. Es sei $\mathcal{S} := (\Sigma_{ij})_{i,j\in I}$ ein k-Fächersystem. Dann gilt für jedes $i,j,k \in I$:

(i) $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ij} \cap \Sigma_{ji} \preccurlyeq \Sigma_{ii}$ und $\Sigma_{ji} = \Sigma_{ji} \cap \Sigma_{ij} \preccurlyeq \Sigma_{jj}$

(ii) $\mathring{\Sigma}_{ij} = \mathring{\Sigma}_{ji}$ und $\mathring{\Sigma}_{ij} \cap \mathring{\Sigma}_{jk} \subseteq \mathring{\Sigma}_{ik}$

Beispiel 2.3.27. Wir betrachten den Kegel $\sigma' := \mathrm{cone}(e_1, e_2)$ in $\mathbb{Q}^2$ und den k-Kegel

$$\sigma \;:=\; \{0\} \;\cup\; \mathrm{cone}\mathring{(e_1, e_2)},$$

wobei e_1 und e_2 die kanonischen Basisvektoren in $\mathbb{Q}^2$ bezeichnen. Wir setzen weiter $\Sigma_{11} := \Sigma_{22} := \mathcal{F}_\sigma$ und $\Sigma_{12} := \Sigma_{21} := \{0\}$. Dann ist Σ_{12} ein offener Teilfächer von Σ_{11}. Somit ist $\mathcal{S} := (\Sigma_{ij})_{i,j\in\{1,2\}}$ ein k-Fächersytem in $\mathbb{Q}^2$.

Definition 2.3.28. Es sei $\mathcal{S} = (\Sigma_{ij})_{i,j}$ ein k-Fächersystem. $\mathcal{S}$ heißt *attraktiv*, falls für alle $i \in I$ ein k-Kegel σ_i in V existiert mit $\Sigma_{ii} = \mathcal{F}_{\sigma_i}$.

Bemerkung 2.3.29. Es seien Σ ein k-Fächer in V und $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ die maximalen k-Kegel von Σ bezüglich der mengentheoretischen Inklusion. Wir setzen $I := \{1, \ldots, m\}$. Dann ist $\mathcal{S} := (\Sigma_{ij})_{i,j \in I}$ ein attraktives k-Fächersystem mit $\Sigma_{ii} := \mathcal{F}_{\sigma_i}$ und $\Sigma_{ij} := \Sigma_{\sigma_i \cap \sigma_j}$.

Definition 2.3.30. Wir nennen ein k-Gitterfächersystem $\mathcal{S} = (\Sigma_{ij})_{i,j}$ *spitz*, falls alle Σ_{ij} spitz sind.

Konstruktion 2.3.31. Es seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ k-Kegel in V. Wir setzen $\Sigma_{ii} := \mathcal{F}_{\sigma_i}$ für $i \in I := \{1, \ldots, m\}$. Dann gibt es mindestens eine Möglichkeiten, aus den k-Kegeln $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ ein k-Fächersystem $\mathcal{S} := (\Sigma_{ij})_{i,j \in I}$ in V zu konstruieren. Wir setzen $\Sigma_{ij} := \{\tau; \tau \in \Sigma_{ii}, \Sigma_{jj}\}$, für $i, j \in I$. Das heißt, wir haben die k-Kegel in V *maximal verklebt.*

Falls alle σ_i spitz sind, gibt es eine weitere Möglichkeit aus den k-Kegeln $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ ein k-Fächersystem in V zu konstruieren. Wir setzen $\Sigma_{ij} := \{0\}$, für $i, j \in I$ mit $i \neq j$. Das heißt wir haben die k-Kegel in V *minimal verklebt.*

Definition 2.3.32. Es seien $\mathcal{S} := (\Sigma_{ij})_{i,j \in I}$ und $\mathcal{R} := (\Delta_{sl})_{s,l \in L}$ k-Fächersysteme in V. Dann heißt $\mathcal{R}$ *konstruierbares Teilfächersystem (k-Teilfächersystem) von* $\mathcal{S}$ (Bezeichnung $\mathcal{R} \sqsubseteq \mathcal{S}$), falls eine injektive Abbildung $\iota\colon L \to I$ existiert, sodass für alle $s, l \in L$ gilt:

(i) Es ist $\Delta_{ss} \sqsubseteq \Sigma_{\iota(s)\iota(s)}$.

(ii) Für jedes $\tau \in \Sigma_{\iota(s)\iota(l)}$ mit $\mathring{\tau} \in \mathring{\Delta}_{ss}$ gilt $\tau \cap |\mathring{\Delta}_{ss}| \in \Delta_{sl}$.

Bemerkung 2.3.33. Es seien $\mathcal{S} := (\Sigma_{ij})_{i,j \in I}$ und $\mathcal{R} := (\Delta_{sl})_{s,l \in L}$ k-Fächersysteme in V mit $\mathcal{R} \sqsubseteq \mathcal{S}$. Dann gilt $\Delta_{sl} \sqsubseteq \Sigma_{\iota(s)\iota(l)}$ für alle $s, l \in L$.

Konstruktion 2.3.34. Es sei $\mathcal{S} := (\Sigma_{ij})_{i,j \in I}$ ein attraktives k-Fächersystem in V. Dann existiert für jedes $i \in I$ ein k-Kegel σ_i in V mit $\Sigma_{ii} = \mathcal{F}_{\sigma_i}$. Es seien σ_i' die Abschlüsse von σ_i. Wir setzen $\Sigma_{ii}' := \mathcal{F}_{\sigma_i'}$ und

$$\Sigma_{ij}' \quad := \bigcup_{\tau' \preccurlyeq \sigma_i', \sigma_j', \ \ \mathring{\tau}' \in \mathring{\Sigma}_{ij}} \mathcal{F}_{\tau'}.$$

Die Kollektionen Σ_{ij}' sind Fächer mit $\Sigma_{ij}' = \Sigma_{ji}'$ und $\Sigma_{ij}' \preccurlyeq \Sigma_{ii}', \Sigma_{jj}'$. Falls $\mathcal{S}' := (\Sigma_{ij}')_{i,j \in I}$ ein Fächersystem in V ist, so gilt $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{S}'$. Wir nennen dann $\mathcal{S}'$ den *Abschluss von* $\mathcal{S}$.

Begründung. Es ist nur zu zeigen, dass für jedes $\tau' \in \Sigma_{ij}'$ mit $\mathring{\tau}' \in \mathring{\Sigma}_{ii}$ gilt:

$$\tau' \ \cap \ |\Sigma_{ii}| \ \in \ \Sigma_{ij}.$$

Es sei $\tau' \in \Sigma_{ij}'$ mit $\mathring{\tau}' \in \mathring{\Sigma}_{ii}$ gegeben. Da $\Sigma_{ii} \sqsubseteq \Sigma_{ii}'$ gilt, ist $\tau = \tau' \cap |\Sigma_{ii}| \in \Sigma_{ii}$. Aus $\tau' \in \Sigma_{ij}'$ folgt, dass es ein $\rho' \in \Sigma_{ii}'$ gibt mit $\mathring{\rho}' \in \mathring{\Sigma}_{ij}$ und $\tau' \preccurlyeq \rho'$. Da $\Sigma_{ij}' \preccurlyeq \Sigma_{ii}'$ und $\mathring{\Sigma}_{ij} \subseteq \mathring{\Sigma}_{ii}$ gilt erhalten wir $\rho := \rho' \cap |\Sigma_{ii}| \in \Sigma_{ii}$. Insbesondere ist $\mathring{\rho} = \mathring{\rho}' \in \mathring{\Sigma}_{ij}$. Mit Lemma 2.2.17 folgt somit $\rho \in \Sigma_{ij}$. Aus $\tau \subseteq \rho$ folgt mit Lemma 2.2.11, dass $\tau \preccurlyeq \rho \in \Sigma_{ij}$ gilt. $\square$

Bemerkung 2.3.35. Ist $\mathcal{S} := (\Sigma_{ij})_{i,j\in I}$ ein attraktives k-Fächersystem in V mit $I = \{1,2\}$, so besitzt $\mathcal{S}$ einen Abschluss.

Definition 2.3.36. Es seien $\mathcal{S} := (\Sigma_{ij})_{i,j\in I}$ und $\mathcal{R} := (\Delta_{sl})_{s,l\in L}$ k-Fächersysteme in V. Dann heißt $\mathcal{R}$ *offenes konstruierbares Teilfächersystem (offenes k-Teilfächersystem) von* $\mathcal{S}$ (Bezeichnung $\mathcal{R}\preccurlyeq\mathcal{S}$), falls eine injektive Abbildung $\iota\colon L \to I$ existiert, sodass für alle $s, l \in L$ gilt:

(i) Es ist $\Delta_{ss}\preccurlyeq\Sigma_{\iota(s)\iota(s)}$.
(ii) Es gilt $\Sigma_{\iota(s)\iota(l)} \cap \Delta_{ss} = \Delta_{sl}$.

Definition 2.3.37. Ein k-Fächersystem $\mathcal{S} = (\Sigma_{ij})_{i,j\in I}$ in V heißt *separiert*, falls $|\Sigma_{ij}| = |\Sigma_{ii}| \cap |\Sigma_{jj}|$ gilt für alle $i, j \in I$.

Konstruktion 2.3.38. Es sei $\Sigma := \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ ein k-Fächer in V. Dann setzen wir $I = \{1, \dots, m\}$ und $\Sigma_{ij} := \Sigma_{\sigma_i\cap\sigma_j}$. Dann ist $\mathcal{S}_\Sigma := (\Sigma_{ij})_{i,j\in I}$ ein separiertes k-Fächersystem in V.

2.4. **Vergitterung.**

Wir werden in Abschnitt 2.4 die Vergitterung von k-Kegeln, k-Fächern bzw. k-Fächersysteme betrachten. Das heißt, wir werden die Kategorie der *k-Gittekegel*, die Kategorie der *k-Gitterfächer* sowie die Kategorie der *k-Gitterfächersysteme* einführen. Wir beweisen, dass die Kategorie der k-Gitterkegel eine volle Unterkategorie der k-Gitterfächer ist und die Kategorie der k-Gitterfächer eine volle Unterkategorie der k-Gitterfächersysteme siehe Folgerung 2.4.19 und Folgerung 2.4.31. Des Weiteren werden wir feststellen, dass Bilder von k-Kegel im Allgemeinen keine k-Kegel sind siehe Bemerkung 2.4.6. Deshalb werden wir das *konstruierbare Bild* eines k-Kegels definieren.

Erinnerung 2.4.1. Ein *Gitter* ist eine freie endlich erzeugte abelsche Gruppe. Ein Morphismus zwischen Gittern N und M ist ein Homomorphismus $F\colon N \to M$ abelscher Gruppen. Für ein Gitter N bezeichnen wir mit $N_{\mathbb{Q}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ den zu N gehörigen $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Es sei $F\colon N \to M$ ein Morphismus von Gittern. Dann liefert F einen Morphismus $F_{\mathbb{Q}}\colon N_{\mathbb{Q}} \to M_{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen.

Vereinbarung 2.4.2. Für einen Gittermorphismus $F\colon N \to M$ werden wir die induzierte Abbildung der rationalen Vektorräume ebenfalls mit F bezeichnen, wenn aus dem Kontext klar hervor geht, um welche Abbildung es sich handelt.

Definition 2.4.3 (Kategorie der k-Gitterkegel)**.**

(i) Ein *k-Gitterkegel* ist ein Paar (N, σ), wobei N ein Gitter und σ ein k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$ ist.
(ii) Ein Morhpismus von k-Gitterkegeln (N, σ) und (M, τ) ist eine lineare Abbildung $F\colon N \to M$ mit $F(\sigma) \subseteq \tau$.

Lemma 2.4.4. *Es sei $F\colon (N, \sigma) \to (M, \tau)$ ein Morphismus von k-Gitterkegeln. Weiter seien σ' und τ' die Abschlüsse von σ bzw. τ. Dann gilt $F(\sigma') \subseteq \tau'$.*

Beweis. Es sei $\overline{F(\sigma)} \subseteq M_{\mathbb{Q}}$ der Abschluss von $F(\sigma)$ in $M_{\mathbb{Q}}$. Dann gilt $\overline{F(\sigma)} \subseteq \tau'$. Da F stetig ist, gilt $\sigma' \subseteq F^{-1}(\overline{F(\sigma)})$ und somit ist $F(\sigma') \subseteq \tau'$. □

Erinnerung 2.4.5. Es seien (N, σ') ein Gitterkegel und $F\colon N \to M$ ein Morphismus von Gittern. Dann ist $F(\sigma')$ ein Kegel in $M_{\mathbb{Q}}$ und es gilt

$$\overset{\circ}{F(\sigma')} \quad = \quad F(\overset{\circ}{\sigma}{}').$$

Bemerkung 2.4.6. Es seien (N, σ) ein k-Gitterkegel und $F\colon N \to M$ ein Gittermorphismus. Dann ist $F(\sigma)$ im Allgemeinen kein k-Kegel in $M_{\mathbb{Q}}$. Dazu betrachten wir den k-Kegel

$$\sigma \quad := \quad \overset{\circ}{\mathrm{cone}(e_1, e_2, e_3, e_4)} \;\cup\; \overset{\circ}{\mathrm{cone}(e_3, e_4)} \;\cup\; \{0\}$$

in $\mathbb{Q}^4 = \mathbb{Z}^4_{\mathbb{Q}}$, wobei e_i die Standardbasisvektoren von $\mathbb{Q}^4$ bezeichnen. Weiter seien e'_1, e'_2, e'_3 die Standardbasisvektoren in $\mathbb{Q}^3 = \mathbb{Z}^3_{\mathbb{Q}}$ und $F\colon \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^3$ ein Gittermorphismus mit $F(e_i) := e'_i$ für $i = 1, 2, 3$ und $F(e_4) = e'_2 + e'_3$. Es ist $\sigma' := \mathrm{cone}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ der Abschluss von σ und $\tau' := \mathrm{cone}(e'_1, e'_2, e'_3) = F(\sigma')$. Weiter ist $F(\sigma')$ der Abschluss von $F(\sigma)$. Für das Bild von σ und F erhalten wir

$$F(\sigma) \quad = \quad \overset{\circ}{\tau}{}' \;\cup\; F(\overset{\circ}{\mathrm{cone}(e_3, e_4)}) \;\cup\; \{0\}.$$

Es gilt $\rho' := \mathrm{cone}(e_3', e_2' + e_3') = F(\mathrm{cone}(e_3, e_4))$. Aber ρ' ist keine Seite von τ'. Also ist $F(\sigma)$ kein k-Kegel in $\mathbb{Q}^3$.

Konstruktion 2.4.7. Es seien (N, σ) ein k-Gitterkegel, σ' der Abschluss von σ und $F\colon N \to M$ ein Morphismus von Gittern. Wir definieren das *konstruierbare Bild (k-Bild) von σ unter F* als

$$F^{\mathrm{c}}(\sigma) \quad := \quad \bigcup_{\tau' \preccurlyeq F(\sigma'),\ \mathring{\tau}' \cap F(\sigma) \neq \emptyset} \mathring{\tau}'.$$

Die Menge $F^{\mathrm{c}}(\sigma)$ ist ein k-Kegel mit zugehörigem Abschluss $F(\sigma')$ und es gilt:

$$\mathring{\overline{F^{\mathrm{c}}(\sigma)}} \quad = \quad F(\mathring{\sigma}).$$

Begründung. Da $\mathring{\sigma} = \mathring{\sigma}'$ gilt, erhalten wir $F(\mathring{\sigma}) \subseteq F^{\mathrm{c}}(\sigma)$. Nach Bemerkung 2.1.12 ist die minimale Seite $F(\sigma')_0$ von $F(\sigma')$ der größte Unterraum von $M_{\mathbb{Q}}$, der in $F(\sigma')$ enthalten ist. Also ist $F(\sigma_0) \subseteq F(\sigma')_0$. Insbesondere gilt $F(\sigma')_0 \subseteq F^{\mathrm{c}}(\sigma)$. Somit ist $F^{\mathrm{c}}(\sigma)$ ein k-Kegel in $M_{\mathbb{Q}}$ mit zugehörigem Abschluss $F(\sigma')$. Mit Erinnerung 2.4.5 erhalten wir, dass $\mathring{\overline{F^{\mathrm{c}}(\sigma)}} = F(\mathring{\sigma})$ gilt. $\square$

Bemerkung 2.4.8. Es seien (N, σ') ein Gitterkegel und $F\colon N \to M$ ein Morphismus von Gittern. Dann gilt $F^{\mathrm{c}}(\sigma') = F(\sigma')$.

Beispiel 2.4.9. Es seien σ und $F\colon \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^3$ wie in Bemerkung 2.4.6 gegeben. Dann gilt

$$F^{\mathrm{c}}(\sigma) \quad = \quad \mathring{\overline{\mathrm{cone}(e_1', e_2', e_3')}} \ \cup\ \mathring{\overline{\mathrm{cone}(e_2', e_3')}} \ \cup\ \{0\}.$$

Lemma 2.4.10. *Es seien (N, σ) ein k-Gitterkegel und $F\colon N \to M$ ein Gittermorphismus. Dann gilt $F(\sigma) \subseteq F^{\mathrm{c}}(\sigma)$.*

Beweis. Es sei σ' der Abschluss von σ. Nach Erinnerung 2.4.5 ist $F(\tau')$ ein Kegel, für alle $\tau' \preccurlyeq \sigma'$. Mit Folgerung 2.1.31 existiert zu jedem $\tau' \preccurlyeq \sigma'$ ein $\rho' \preccurlyeq F(\sigma')$, sodass gilt:

$$F(\mathring{\tau}') \quad = \quad \mathring{\overline{F(\tau')}} \quad \subseteq \quad \mathring{\rho}'.$$

Es sei jetzt $\tau' \preccurlyeq \sigma'$ mit $\mathring{\tau}' \subseteq \sigma$. Dann existiert ein $\rho' \preccurlyeq F(\sigma')$ mit $F(\mathring{\tau}') \subseteq \mathring{\rho}'$. Da $F(\mathring{\tau}') \subseteq F(\sigma)$ gilt, ist $\mathring{\rho}' \subseteq F^{\mathrm{c}}(\sigma)$. Also gilt $F(\sigma) \subseteq F^{\mathrm{c}}(\sigma)$. $\square$

Lemma 2.4.11. *Es seien (N, σ), (M, τ) k-Gitterkegel und $F\colon N \to M$ eine lineare Abbildung. Dann gilt*

$$F(\sigma) \subseteq \tau \qquad \Leftrightarrow \qquad F^{\mathrm{c}}(\sigma) \subseteq \tau.$$

Beweis. Wegen Lemma 2.4.10 ist nur zur Implikation „$\Rightarrow$" etwas zu zeigen. Also gelte $F(\sigma) \subseteq \tau$. Es seien σ' und τ' die Abschlüsse von σ bzw. τ. Weiter sei $\rho' \preccurlyeq F(\sigma')$ mit $\mathring{\rho}' \cap F(\sigma) \neq \emptyset$ gegeben. Es ist zu zeigen, dass $\mathring{\rho}' \subseteq \tau$ gilt. Mit Folgerung 2.1.26 existiert eine Seite δ' von τ' mit

$$\mathring{\delta}' \ \cap\ \big(\mathring{\rho}' \ \cap\ F(\sigma)\big) \quad \neq \quad \emptyset.$$

Nach Lemma 2.4.4 ist $F(\sigma') \subseteq \tau'$. Somit erhalten wir mit Folgerung 2.1.32, dass $\mathring{\rho}' \subseteq \mathring{\delta}'$ gilt. Daraus folgt

$$\emptyset \quad \neq \quad \mathring{\rho}' \ \cap\ F(\sigma) \quad \subseteq \quad \mathring{\delta}' \ \cap\ F(\sigma) \quad \subseteq \quad \mathring{\delta}' \ \cap\ \tau.$$

Mit Bemerkung 2.1.8 erhalten wir $\mathring{\rho}' \subseteq \mathring{\delta}' \subseteq \tau$ und somit die Behauptung. □

Folgerung 2.4.12. *Es seien (N,σ), (N,τ) k-Gitterkegel und $F\colon N \to M$ ein Morphismus von Gittern mit $F(\tau) \subseteq F(\sigma)$. Dann ist $F^{\mathrm{c}}(\tau) \subseteq F^{\mathrm{c}}(\sigma)$.*

Beweis. Mit Lemma 2.4.10 erhalten wir $F(\tau) \subseteq F^{\mathrm{c}}(\sigma)$. Nach Konstruktion 2.4.7 ist $F^{\mathrm{c}}(\sigma)$ ein k-Kegel. Somit folgt mit Lemma 2.4.11, dass $F^{\mathrm{c}}(\tau) \subseteq F^{\mathrm{c}}(\sigma)$ gilt. □

Definition 2.4.13 (Kategorie der K-Gitterfächer)**.**

(i) Ein *konstruierbarer Gitterfächer (k-Gitterfächer)* ist ein paar (N,Σ), wobei N Gitter und Σ ein k-Fächer in $N_{\mathbb{Q}}$ ist.
(ii) Ein Morhpismus von k-Gitterfächern (N,Σ) und (M,Δ) ist eine lineare Abbildung $F\colon N \to M$, sodass für jedes $\sigma \in \Sigma$ ein $\tau \in \Delta$ existiert mit $F(\sigma) \subseteq \tau$.

Definition 2.4.14.

(i) Wir nennen einen k-Gitterkegel (N,σ) *spitz*, falls σ spitz ist.
(ii) Wir nennen einen k-Gitterfächer (N,Σ) *spitz*, falls alle $\sigma \in \Sigma$ spitz sind.

Bemerkung 2.4.15. Es sei (N,σ) ein k-Gitterkegel, dann ist $(N,\mathcal{F}_\sigma)$ nach Bemerkung 2.2.6 ein k-Gitterfächer.

Lemma 2.4.16. *Es seien $F\colon (N,\Sigma) \to (M,\Delta)$ ein Morphismus und $\sigma_0 \in \Sigma$ bzw. $\delta_0 \in \Delta$ die minimalen k-Kegel von Σ bzw. Δ. Dann gilt $F(\sigma_0) \subseteq \delta_0$.*

Beweis. Zu σ_0 existiert ein $\rho \in \Delta$ mit $F(\sigma_0) \subseteq \rho$. Nach Lemma 2.2.8 gilt $\delta_0 \preccurlyeq \rho$. Nach Bemerkung 2.1.12 ist der Unterraum δ_0 der größte Unterraum von $M_{\mathbb{Q}}$ der in ρ enthalten ist. Somit gilt $F(\sigma_0) \subseteq \delta_0$. □

Lemma 2.4.17. *Es seien (N,σ), (M,τ) k-Gitterkegel und $F\colon N \to M$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent*

(i) *F ist ein Morphismus von k-Gitterkegeln (N,σ) und (M,τ).*
(ii) *F ist ein Morhismus von k-Gitterfächern $(N,\mathcal{F}_\sigma)$ und $(M,\mathcal{F}_\tau)$.*

Beweis. Es ist nur zur Implikation „(ii)⇒(i)" etwas zu zeigen. Diese folgt aus der Tatsache, dass $\sigma \in \mathcal{F}_\sigma$ und $\tau \in \mathcal{F}_\tau$ gilt. □

Folgerung 2.4.18. *Es sei $F\colon (N,\sigma) \to (M,\rho)$ ein Isomorphismus von k-Gitterkegeln. Falls $\tau \preccurlyeq \sigma$ gilt, ist $F(\tau) \preccurlyeq F(\sigma)$.*

Beweis. Lemma 2.4.17 liefert, dass $F\colon (N,\mathcal{F}_\sigma) \to (M,\mathcal{F}_\rho)$ ein Isomorphismus von k-Gitterfächern ist. Somit folgt die Behauptung mit Lemma 2.3.17. □

Folgerung 2.4.19. *Wir haben einen injektiven volltreuen kovarianten Funktor*

$$\mathcal{G}\colon \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kategorie der} \\ \textit{k-Gitterkegel} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kategorie der quasiaffinen} \\ \textit{k-Gitterfächer} \end{array} \right\}$$
$$(N,\sigma) \mapsto (N,\mathcal{F}_\sigma)$$
$$F \mapsto F$$

Beweis. Folgt aus Bemerkung 2.2.6 und Lemma 2.4.17. □

Bemerkung 2.4.20. Es seien (N, σ), (M, τ) zwei k-Gitterkegel und $F\colon N \to M$ ein Gittermorphismus mit $F(\mathring{\sigma}) \subseteq \mathring{\tau}$. Dann gilt im Allgemeinen $F(\sigma) \nsubseteq \tau$. Siehe Abbildung 5 mit $F = \mathrm{id}$.

Lemma 2.4.21. *Es sei $F\colon (N, \Sigma) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus von k-Gitterfächern. Weiter seien $\tau \in \Sigma$ und $\rho \in \Delta$ mit $F(\mathring{\tau}) \cap \mathring{\rho} \neq \emptyset$. Dann gilt $F(\mathring{\tau}) \subseteq \mathring{\rho}$ und $F(\tau) \subseteq \rho$.*

Beweis. Zu τ existiert ein $\rho_1 \in \Delta$ mit $F(\tau) \subseteq \rho_1$. Mit Lemma 2.4.11 gilt $F^{\mathrm{c}}(\tau) \subseteq \rho_1$. Konstruktion 2.4.7 liefert

$$\emptyset \quad \neq \quad \overset{\circ}{F^{\mathrm{c}}(\tau)} \ \cap \ \mathring{\rho} \quad = \quad F(\mathring{\tau}) \ \cap \ \mathring{\rho}.$$

Mit Lemma 2.2.11 folgt $\rho \preccurlyeq \rho_1$. Nach Lemma 2.1.30 erhalten wir weiter, dass $\overset{\circ}{F^{\mathrm{c}}(\tau)} \subseteq \rho$ und $F^{\mathrm{c}}(\tau) \subseteq \rho$ gilt. Lemma 2.4.11 liefert dann die Behauptung. □

Folgerung 2.4.22. *Es sei $F\colon (N, \Sigma) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus von k-Gitterfächern. Dann gibt es zu jedem $\tau \in \Sigma$ genau ein $\rho \in \Delta$ mit $F(\mathring{\tau}) \subseteq \mathring{\rho}$ und $F(\tau) \subseteq \rho$.*

Beweis. Es sei $\tau \in \Sigma$ gegeben. Wir wissen, dass $|\mathring{\Delta}| = |\Delta|$ gilt. Somit liefert Lemma 2.4.21, dass es ein $\rho \in \Delta$ gibt mit $F(\mathring{\tau}) \subseteq \mathring{\rho}$ und $F(\tau) \subseteq \rho$. Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma 2.2.10. □

Folgerung 2.4.23. *Es seien $F\colon (N, \Sigma) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus von quasiaffinen k-Gitterfächern und Σ' sowie Δ' die Minimalfächer zu Σ bzw. Δ. Dann ist $F\colon (N, \Sigma') \to (M, \Delta')$ ein Morphismus von Gitterfächern.*

Beweis. Folgt aus Lemma 2.3.10 und Lemma 2.4.4 □

Definition 2.4.24. Es sei $\mathcal{S} := (\Sigma_{ij})_{i,j \in I}$ ein k-Fächersystem in V. Dann definiert $\mathcal{S}$ auf $\mathfrak{F}(\mathcal{S}) := \{(\sigma, i),\ i \in I,\ \sigma \in \Sigma_{ii}\}$ folgende Äquivalenzrelation:

$$(\sigma, i) \ \sim \ (\sigma, j) \quad :\Leftrightarrow \quad \sigma \in \Sigma_{ij}.$$

Die Äquivalenzklasse von (σ, i) bezeichnen wir mit $[\sigma, i]$ und die Menge der Äquivalenzklassen bezeichenen wir mit $\Omega(\mathcal{S})$.

Bemerkung 2.4.25. Für die Äquivalenzrelation gilt:

(i) Ist $\mathcal{S}$ spitz, so gilt $(\{0\}, i) \sim (\{0\}, j)$, für alle $i, j \in I$.
(ii) Ist $(\sigma, i) \sim (\tau, j)$ so gilt $\sigma = \tau$.
(iii) Aus $(\tau, i) \sim (\tau, j)$ folgt $(\rho, i) \sim (\rho, j)$ für jede Seite $\rho \preccurlyeq \tau$.

Definition 2.4.26. Es sei $\mathcal{S}$ ein k-Fächersystem in V. Die Äquivalentzklasse $[\tau, j]$ heißt *Seite von* $[\sigma, i]$ (Bezeichnung $[\tau, j] \preccurlyeq [\sigma, i]$), falls $\tau \preccurlyeq \sigma$ und $[\tau, j] = [\tau, i]$ gilt.

Definition 2.4.27 (Kategorie der k-Gitterfächersysteme)**.**

(i) Ein *konstruierbares Gitterfächersystem (k-Gitterfächersystem* ist ein paar $(N, \mathcal{S})$, wobei N ein Gitter und $\mathcal{S}$ ein k-Fächersystem in $N_{\mathbb{Q}}$ ist.
(ii) Ein Morphismus von k-Gitterfächersystemen $(N, \mathcal{S})$ und $(M, \mathcal{R})$ ist ein Paar $(F, \mathfrak{f})$, wobei $F\colon N \to M$ eine lineare Abbildung ist und $\mathfrak{f}\colon \Omega(\mathcal{S}) \to \Omega(\mathcal{R})$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:
   (a) Falls $\mathfrak{f}([\tau, i]) = [\rho, s]$ gilt, dann gilt $F(\mathring{\tau}) \subseteq \mathring{\rho}$ und $F(\tau) \subseteq \rho$.
   (b) Falls $[\tau, i] \preccurlyeq [\sigma, j]$ gilt, dann gilt $\mathfrak{f}([\tau, i]) \preccurlyeq \mathfrak{f}([\sigma, j])$.

Definition 2.4.28. Wir nennen ein k-Gitterfächersystem $(N, (\Sigma_{ij})_{i,j\in I})$ *spitz*, falls alle Σ_{ij} spitz sind.

Konstruktion 2.4.29. Es seien Σ ein k-Fächer in V und $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ die k-Kegel von Σ. Wir setzen $\Sigma_{ii} := \mathcal{F}_{\sigma_i}$ und $\Sigma_{ij} := \Sigma_{\sigma_i\cap\sigma_j}$. Dann ist $\mathcal{S}_\Sigma := (\Sigma_{ij})_{i,j\in I}$ mit $I := \{1, \ldots, n\}$ ein attraktives k-Fächersystem in V. Da k-Kegel in einem Fächer durch ihr Inneres eindeutig bestimmt sind siehe Lemma 2.2.10, haben wir eine wohldefinierte bijektive Zuordnung:

$$\iota\colon \Sigma \;\to\; \Omega(\mathcal{S}_\Sigma), \qquad \tau \;\mapsto\; [\tau, i] \;\text{ falls } \tau\preccurlyeq\sigma_i.$$

Wir setzen $\Omega(\Sigma) := \Omega(\mathcal{S}_\Sigma)$. Es seien (N, Σ) und (M, Δ) zwei k-Gitterfächer. Dann liefert ι und Lemma 2.4.22 eine natürliche wohldefinierte Zuordnung: $\mathfrak{f}_F\colon \Omega(\Sigma) \to \Omega(\Delta)$. Somit haben wir eine Bijektion:

$$\mathrm{Mor}((N, \Sigma), (M, \Delta)) \;\to\; \mathrm{Mor}((N, \mathcal{S}_\Sigma), (M, \mathcal{S}_\Delta)), \qquad F \;\mapsto\; (F, \mathfrak{f}_F)$$

Bemerkung 2.4.30. Man kann in Konstruktion 2.4.29 die k-Kegel auch maximal bezüglich Inklusion wählen (Bezeichnung $\mathcal{S}_\Sigma^{\max}$). Dann haben wir einen natürlichen Isomorphismus $(\mathrm{id}, \mathfrak{f}_{\mathrm{id}})\colon (N, \mathcal{S}_\Sigma) \to (N, \mathcal{S}_\Sigma^{\max})$.

Folgerung 2.4.31. *Wir haben einen injektiven volltreuen kovarianten Funktor*

$$\mathcal{G}\colon \left\{\begin{array}{c}\textit{Kategorie der}\\ \textit{k-Gitterfächer}\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{c}\textit{Kategorie der attraktiven}\\ \textit{k-Gitterfächersysteme}\end{array}\right\}$$
$$(N, \Sigma) \mapsto (N, \mathcal{S}_\Sigma)$$
$$F \mapsto (F, \mathfrak{f}_F)$$

Satz 2.4.32. *Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein k-Gitterfächersystem. Dann existiert ein attrakives k-Gitterfächersystem $(N, \mathcal{R})$ und ein Isomorphismus $(\mathrm{id}, \mathfrak{f})\colon (N, \mathcal{S}) \to (N, \mathcal{R})$.*

Beweis. Es sei $\mathcal{S} = (\Sigma_{ij})_{i,j\in I}$. Für jedes $i \in I$ seien $\sigma_{i_1}, \ldots \sigma_{i_r}$ die k-Kegel von Σ_{ii}. Wir setzen $\Delta_{i_l i_l} := \mathcal{F}_{\sigma_{i_l}}$ und $\Delta_{i_l, j_s} := \{\rho;\ \rho \in \Sigma_{ij},\ \rho\preccurlyeq\sigma_{i_l}, \sigma_{j_s}\}$. Offensichtlich ist $\mathcal{R} := (\Delta_{i_l j_s})_{i_l, j_s\in I_1}$ ein k-Fächersystem in $N_\mathbb{Q}$, wobei $I_1 := \{i_s,\ i \in I\}$. Weiter definieren wir

$$\mathfrak{f}\colon \Omega(\mathcal{S}) \;\to\; \Omega(\mathcal{R}), \qquad [\tau, i] \;\mapsto\; [\tau, i_l], \quad \text{wobei } \tau\preccurlyeq\sigma_{i_l}.$$

Die Abbildung $\mathfrak{f}$ ist wohldefiniert und erfüllt die Eigenschaften 2.4.27 (a) sowie 2.4.27 (b). Die Umkehrabbildung zu $\mathfrak{f}$ ist gegeben durch

$$\mathfrak{g}\colon \Omega(\mathcal{R}) \;\to\; \Omega(\mathcal{S}), \qquad [\tau, i_l] \;\mapsto\; [\tau, i].$$

Die Abbildung $\mathfrak{g}$ ist ebenfalls wohldefiniert und erfüllt die Eigenschaften 2.4.27 (a) sowie 2.4.27 (b). Somit ist $(\mathrm{id}, \mathfrak{f})\colon (N, \mathcal{S}) \to (N, \mathcal{R})$ ein Isomorphismus . $\square$

Bemerkung 2.4.33. Im Beweis von Satz 2.4.32 kann man anstatt aller k-Kegel von Σ_{ii} auch nur die maximalen k-Kegel bezüglich Inklusion betrachten.

Bemerkung 2.4.34. Es seien $\mathcal{S} := (\Sigma_{ij})_{i,j\in I}$ und $\mathcal{R} := (\Delta_{sl})_{s,l\in L}$ k-Fächersysteme in V mit $\mathcal{R}\preccurlyeq\mathcal{S}$ durch ι gegeben. Dann gilt $\Delta_{sl}\preccurlyeq\Sigma_{\iota(s),\iota(l)}$ und folgende Zuordnung ist wohldefiniert und injektiv:

$$\Omega(\mathcal{R}) \;\to\; \Omega(\mathcal{S}), \qquad [\tau, s] \mapsto [\tau, \iota(s)]$$

2.5. **Der Stern eines k-Kegels in einem k-Fächer.**

Wir führen in diesem Abschnitt den Begriff des *Stern eines k-Kegels in einem k-Fächer* ein, welcher für Fächer ein Standardbegriff ist.

Erinnerung 2.5.1. Ein Untergitter $L \subseteq N$ heißt *primitiv*, falls eine der äquivalenten Aussagen gilt:

(i) Es gibt ein Untergitter L_1, sodass $N = L \oplus L_1$ gilt.
(ii) Der Quotient N/L ist frei.
(iii) Der Quotient N/L ist torsionsfrei.
(iv) Es gibt einen Unterraum $V \subseteq N_{\mathbb{Q}}$ mit $L = V \cap N$.

Ist $F \colon N \to M$ ein Gittermorphismus und $L \subseteq M$ ein primitives Untergitter, dann ist $F^{-1}(L)$ ein primitives Untergitter von N. Es seien L ein Untergitter von N und $V \subseteq N_{\mathbb{Q}}$ ein Unterraum mit $L = V \cap N$. Dann ist $L_{\mathbb{Q}} = V$.

Definition 2.5.2. Es seien Σ ein k-Fächer in V und $\rho \in \Sigma$. Wir nennen folgende Kollektion den *Stern von ρ in Σ*:

$$\mathrm{Stern}_{\Sigma}(\rho) \quad := \quad \mathrm{Stern}(\rho) \quad := \quad \{\tau;\ \tau \in \Sigma,\ \rho \preccurlyeq \tau\}$$

Schreibweise 2.5.3. Es seien σ ein k-Kegel in V und τ eine Seite von σ. Wir setzen $\mathrm{Stern}_{\sigma}(\tau) := \mathrm{Stern}_{\mathcal{F}_{\sigma}}(\tau)$.

Erinnerung 2.5.4. Es seien (N, σ') ein Gitterkegel und $\rho' \preccurlyeq \sigma'$. Wir betrachten das primitive Untergitter $L := \mathrm{lin}(\rho') \cap N$ und den Morphismus $P \colon N \to N/L$. Dann ist $P(\sigma')$ ein spitzer Kegel in $N_{\mathbb{Q}}/L_{\mathbb{Q}}$. Weiter ist die folgende Zuordnungen bijektiv und in beide Richtungen inklusionserhaltend:

$$\mathrm{Stern}_{\sigma'}(\rho') \;\to\; \mathcal{F}_{P(\sigma')}, \qquad \tau' \;\mapsto\; P(\tau').$$

Weiter gilt $\mathrm{codim}_N(\tau') = \mathrm{codim}_{N/L}(P(\tau'))$ für alle $\tau' \in \mathrm{Stern}_{\sigma'}(\rho')$.

Bemerkung 2.5.5. Es seien (N, σ) ein k-Gitterkegel und $\rho \preccurlyeq \sigma$. Wir betrachten das primitive Untergitter $L := \mathrm{lin}(\rho) \cap N$ und den Morphismus $P \colon N \to N/L$. Dann haben wir im Allgemeinen keine bijektive Zuordnung:

$$\mathrm{Stern}(\rho) \;\to\; \mathcal{F}_{P(\sigma)}, \qquad \tau \;\mapsto\; P(\tau).$$

Dazu betrachten wir den Kegel $\sigma' := \mathrm{cone}(e_1, e_2, e_3)$ in $\mathbb{Q}^3 = N_{\mathbb{Q}}$, wobei e_1, e_2 und e_3 die kanonischen Basisvektoren in $\mathbb{Q}^3$ bezeichnen und $N = \mathbb{Z}^3$ gilt. Wir setzen $\rho_1' := \mathrm{cone}(e_1) \preccurlyeq \sigma'$ und $L := \mathrm{lin}(\rho_1') \cap \mathbb{Q}^3 \cong \mathbb{Z}$. Dann ist $N/L \cong \mathbb{Z}^2$. Weiter betrachten wir den k-Kegel

$$\sigma \quad := \quad \{0\} \,\cup\, \overset{\circ}{\mathrm{cone}}(e_1, e_2, e_3) \,\cup\, \mathrm{cone}(e_1) \,\cup\, \mathrm{cone}(e_2) \,\cup\, \mathrm{cone}(e_3).$$

Folgerung 2.1.20 liefert, dass die Mengen $\{0\}$, $\rho_i := \mathrm{cone}(e_i)$ und σ die Seiten des k-Kegels σ sind. Es gilt $\rho_1' = \rho_1$ und $\mathrm{Stern}_{\sigma}(\rho_1) = \{\rho_1, \sigma\}$. Das Bild von σ unter P ist

$$P(\sigma) \quad = \quad \mathrm{cone}((1,0),(0,1)) \quad = \quad P^{\mathrm{c}}(\sigma) \quad \subseteq \quad \mathbb{Z}^2_{\mathbb{Q}}.$$

Die Anzahl der k-Kegel in $\mathrm{Stern}_{\sigma}(\rho_1)$ ist zwei, die Anzahl der Seiten vom k-Kegel $P(\sigma)$ jedoch vier.

Bemerkung 2.5.6. Es seien Σ und Δ k-Fächer in V mit $\Delta \preccurlyeq \Sigma$. Dann gilt $\mathrm{Stern}_{\Delta}(\tau) \subseteq \mathrm{Stern}_{\Sigma}(\tau)$ für jedes $\tau \in \Delta$.

Schreibweise 2.5.7. Es seien N ein Gitter und τ ein k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$. Wir schreiben $N_\tau := N/(\mathrm{lin}(\tau) \cap N)$.

Konstruktion 2.5.8. Es seien (N, σ) ein k-Gitterkegel, $\rho \preccurlyeq \sigma$ und σ' der Abschluss von σ. Wir betrachen den Morphismus $P\colon N \to N_\rho$ und setzen für jedes $\tau \in \mathrm{Stern}_\sigma(\rho)$:

$$P^{\mathrm{s}}(\tau) \quad := \quad \bigcup_{\delta \in \mathrm{Stern}_\tau(\rho)} P(\mathring{\delta}).$$

Die Menge $P^{\mathrm{s}}(\sigma)$ ist ein spitzer k-Kegel in $(N_\rho)_{\mathbb{Q}}$ mit Abschluss $P(\sigma')$. Weiter haben wir eine bijektive und in beide Richtungen inklusionserhaltend Zuordnung:

$$\iota\colon \mathrm{Stern}_\sigma(\rho) \quad \to \quad \mathcal{F}_{P^{\mathrm{s}}(\sigma)}, \qquad \tau \quad \mapsto \quad P^{\mathrm{s}}(\tau).$$

Weiter gilt $\mathrm{codim}_N(\tau) = \mathrm{codim}_{N_\rho}(P^{\mathrm{s}}(\tau))$ für alle $\tau \in \mathrm{Stern}_\sigma(\rho)$.

Begründung. Es sei ρ' der Abschluss von ρ. Dann gilt $\rho' \preccurlyeq \sigma'$ und $\mathrm{lin}(\rho') = \mathrm{lin}(\rho)$. Es gilt weiter $\mathcal{F}_\sigma \sqsubseteq \mathcal{F}_{\sigma'}$, Wir zeigen zuerst, dass $P^{\mathrm{s}}(\sigma)$ ein k-Kegel in $(N_\rho)_{\mathbb{Q}}$ mit Abschluss $P(\sigma')$ ist. Nach Erinnerung 2.4.5 ist $P(\sigma')$ ein Kegel und es gilt:

$$P(\mathring{\overline{\sigma'}}) \quad = \quad P(\mathring{\sigma}') \quad = \quad P(\mathring{\sigma}).$$

Es gilt $\sigma \in \mathrm{Stern}(\rho)$. Somit ist $P(\mathring{\overline{\sigma'}}) \subseteq P^{\mathrm{s}}(\sigma)$. Nach Bemerkung 2.1.16 gilt für jedes $\tau \in \mathrm{Stern}_\sigma(\rho)$ und den Abschluss τ' von τ, dass $\tau' \in \mathrm{Stern}_{\sigma'}(\rho')$ ist. Erinnerung 2.5.4 liefert, dass $P(\tau') \preccurlyeq P(\sigma')$ gilt. Somit ist $P^{\mathrm{s}}(\sigma)$ eine Vereinigung von gewissen Seiteninneren von $P(\sigma')$. Nach Erinnerung 2.5.4 ist $P(\sigma')$ ein spitzer Kegel. Nach Bemerkung 2.1.14 ist $P^{\mathrm{s}}(\sigma)$ spitz. Also ist $P^{\mathrm{s}}(\sigma)$ ein spitzer k-Kegel in $(N_\rho)_{\mathbb{Q}}$ mit Abschluss $P(\sigma')$.

Zur Wohldefiniertheit von ι: Es sei dazu ein $\tau \in \mathrm{Stern}_\sigma(\rho)$ gegeben. Dann existiert ein $\tau' \preccurlyeq \sigma'$ mit $\mathring{\tau}' \subseteq \tau$ und $\tau = \tau' \cap \sigma$. Nach Bemerkung 2.1.16 gilt $\rho' \preccurlyeq \tau' \preccurlyeq \sigma'$. Somit ist $P(\tau') \preccurlyeq P(\sigma')$. Es ist zu zeigen, dass $P(\mathring{\overline{\tau'}}) \subseteq P^{\mathrm{s}}(\tau)$ und $P^{\mathrm{s}}(\tau) = P(\tau') \cap P^{\mathrm{s}}(\sigma)$ gilt. Aus $\mathring{\tau}' = \mathring{\tau}$ folgt

$$P(\mathring{\overline{\tau'}}) \quad = \quad P(\mathring{\tau}') \quad \subseteq \quad P^{\mathrm{s}}(\tau).$$

Mit Bemerkung 2.5.6 folgt, dass $\mathrm{Stern}_\tau(\rho) \subseteq \mathrm{Stern}_\sigma(\rho)$ gilt. Somit ist $P^{\mathrm{s}}(\tau) \subseteq P(\tau') \cap P^{\mathrm{s}}(\sigma)$. Wir zeigen jetzt, dass $P(\tau') \cap P^{\mathrm{s}}(\sigma) \subseteq P^{\mathrm{s}}(\tau')$ gilt. Dazu sei ein $\delta \in \mathrm{Stern}_\sigma(\rho)$ mit $P(\mathring{\delta}) \cap P(\tau') \neq \emptyset$ gegeben. Dann gilt $\rho' \preccurlyeq \delta' \preccurlyeq \sigma'$, wobei δ' der Abschluss von δ ist. Also gilt $P(\delta') \preccurlyeq P(\sigma')$. Somit folgt aus $P(\mathring{\delta}') \cap P(\tau') \neq \emptyset$, dass $P(\delta') \preccurlyeq P(\tau')$ und damit $\rho' \preccurlyeq \delta' \preccurlyeq \tau'$ gilt. Lemma 2.2.31 liefert, dass $\rho \preccurlyeq \delta \preccurlyeq \tau$ gilt. Somit gilt insbesondere $\delta \in \mathrm{Stern}_\tau(\rho)$ bzw. $P(\mathring{\delta}) \subseteq P^{\mathrm{s}}(\tau)$. Also ist

$$P^{\mathrm{s}}(\tau) = P(\tau') \cap P^{\mathrm{s}}(\sigma) \preccurlyeq P^{\mathrm{s}}(\sigma).$$

Zur Injektivität von ι: Es seien $\tau, \delta \in \mathrm{Stern}_\sigma(\rho)$ mit $P^{\mathrm{s}}(\delta) = P^{\mathrm{s}}(\tau)$ gegeben. Dann ist $P(\delta') = P(\tau')$, wobei δ' der Abschluss von δ und τ' der Abschluss von τ. Es gilt weiter, dass $\rho' \preccurlyeq \tau' \preccurlyeq \sigma'$ und $\rho' \preccurlyeq \delta' \preccurlyeq \sigma'$ ist. Mit Erinnerung 2.5.4 folgt $\delta' = \tau'$ und damit $\mathring{\tau} = \mathring{\tau}' = \mathring{\delta}' = \mathring{\delta}$. Nach Lemma 2.1.25 ist $\delta = \tau$.

Zur Surjektivität von ι: Es sei $\tau \preccurlyeq P^{\mathrm{s}}(\sigma)$ gegeben. Dann existiert ein $\tau' \preccurlyeq P(\sigma')$ mit $\mathring{\tau}' \subseteq \tau$ und $\tau = \tau' \cap P^{\mathrm{s}}(\sigma)$. Nach Erinnerung 2.5.4 existiert weiter ein $\rho' \preccurlyeq \delta' \preccurlyeq \sigma'$

mit $P(\delta') = \tau'$. Somit gibt es ein $\delta_1 \in \mathrm{Stern}_\sigma(\rho)$ mit $P(\mathring{\delta}') \cap P(\mathring{\delta}_1) \neq \emptyset$. Für den Abschluss δ_1' von δ_1 folgt damit $\rho' \preccurlyeq \delta_1' \preccurlyeq \sigma'$ und $P(\delta_1') = P(\delta') = \tau'$. Somit ist

$$P^{\mathrm{s}}(\delta) \quad = \quad P(\delta_1') \,\cap\, P^{\mathrm{s}}(\sigma) \quad = \quad \tau' \,\cap\, P^{\mathrm{s}}(\sigma) \quad = \quad \tau.$$

Für jedes $\tau \in \mathrm{Stern}_\sigma(\rho)$ ist $P(\tau')$ der Abschluss von $P^{\mathrm{s}}(\tau)$, wobei τ' der Abschluss von τ ist. Nach Bemerkung 2.1.35 gilt $\dim(\tau') = \dim(\tau)$ und $\dim(P(\tau')) = \dim(P^{\mathrm{s}}(\tau))$ für alle $\tau \in \mathrm{Stern}_\sigma(\rho)$. Mit Erinnerung 2.5.4 erhalten wir $\mathrm{codim}_N(\tau) = \mathrm{codim}_{N_\rho}(P^{\mathrm{s}}(\tau))$ für alle $\tau \in \mathrm{Stern}_\sigma(\rho)$. □

Folgerung 2.5.9. *Es seien (N, σ) ein k-Gitterkegel und σ_0 die minimale Seite von σ. Wir betrachten den Morphismus $P\colon N \to N_{\sigma_0}$. Dann gilt $P(\sigma) = P^{\mathrm{s}}(\sigma)$. Insbesondere ist $P\colon (N, \sigma) \to (N_{\sigma_0}, P^{\mathrm{s}}(\sigma))$ ein Morphismus von k-Gitterkegeln und $P^{\mathrm{s}}(\sigma)$ spitz.*

Beweis. Da σ_0 die minimale Seite von σ ist, gilt $\mathrm{Stern}_\sigma(\sigma_0) = \mathcal{F}_\sigma$. Somit ist $P^{\mathrm{s}}(\tau) = P(\tau)$ für alle $\tau \in \mathcal{F}_\sigma$. Also folgt die Behauptung mit Konstruktion 2.5.8. □

Bemerkung 2.5.10. Es seien (N, σ) ein k-Gitterkegel und $\rho \preccurlyeq \sigma$. Wir betrachten den Morphismus $P\colon N \to N_\rho$. Dann gilt im Allgemeinen $P^{\mathrm{s}}(\sigma) \neq P(\sigma)$. Dazu betrachten wir den k-Kegel σ und die Seite ρ_1 aus Bemerkung 2.5.5. Dann ist

$$P^{\mathrm{s}}(\sigma) \quad = \quad \{0\} \,\cup\, \mathrm{cone}((1, \mathring{0}), (0, 1)) \quad \neq \quad \mathrm{cone}((1, 0), (0, 1)) \quad = \quad P(\sigma).$$

Bemerkung 2.5.11. Es seien (N, σ') ein Gitterkegel und $\rho' \preccurlyeq \sigma'$. Wir betrachten den Morphismus $P\colon N \to N_{\rho'}$. Dann ist $P^{\mathrm{s}}(\sigma') = P(\sigma')$.

Bemerkung 2.5.12. Es seien σ ein k-Kegel und $v_1, v_2 \in \sigma$. Dann gilt im Allgemeinen $v_1 + v_2 \notin \sigma$.

Erinnerung 2.5.13. Es seien σ' ein Kegel in V und $w \in \sigma'$. Dann ist $w + v \in \mathring{\sigma}'$ für alle $v \in \mathring{\sigma}'$.

Lemma 2.5.14. *Es seien σ ein k-Kegel in V und $w \in \sigma$. Dann ist $w + v \in \mathring{\sigma}$ für alle $v \in \mathring{\sigma}$.*

Beweis. Es sei σ' der Abschluss von σ. Dann gilt $\mathring{\sigma}' = \mathring{\sigma}$. Somit folgt die Behauptung aus Erinnerung 2.5.13. □

Erinnerung 2.5.15. Es seien σ' ein Kegel in V und $v \in \mathrm{lin}(\sigma')$. Dann existiert ein $w \in \mathring{\sigma}'$ mit $v + w \in \mathring{\sigma}'$.

Lemma 2.5.16. *Es seien σ ein k-Kegel in V und $v \in \mathrm{lin}(\sigma)$. Dann existiert ein $w \in \mathring{\sigma}$ mit $v + w \in \mathring{\sigma}$.*

Beweis. Es sei σ' der Abschluss von σ. Dann gilt $\mathrm{lin}(\sigma) = \mathrm{lin}(\sigma')$ und $\mathring{\sigma} = \mathring{\sigma}'$. Somit folgt die Behauptung aus Erinnerung 2.5.15. □

Satz 2.5.17. *Es seien (N, Σ) eine k-Gitterfächer und $\rho \in \Sigma$ ein k-Kegel. Wir betrachten den Morphismus $P\colon N \to N_\rho$. Dann ist die Kollektion*

$$\Sigma_\rho \quad := \quad \{P^{\mathrm{s}}(\sigma);\ \sigma \in \mathrm{Stern}_\Sigma(\rho)\}$$

ein spitzer k-Fächer in $(N_\rho)_{\mathbb{Q}}$. Weiter haben wir eine bijektive Zuordnung:

$$\mathrm{Stern}_\Sigma(\rho) \;\to\; \Sigma_\rho, \qquad \sigma \;\mapsto\; P^{\mathrm{s}}(\sigma).$$

Weiter gilt $\mathrm{codim}_N(\tau) = \mathrm{codim}_{N_\rho}(P^{\mathrm{s}}(\tau))$ *für alle* $\tau \in \mathrm{Stern}_\Sigma(\rho)$.

Beweis. Nach Bemerkung 2.5.6 gilt $\mathrm{Stern}_\sigma(\rho) \subseteq \mathrm{Stern}_\Sigma(\rho)$ für jedes $\sigma \in \mathrm{Stern}_\Sigma(\rho)$ Somit gilt nach Konstruktion 2.5.8, dass die Menge $P^{\mathrm{s}}(\sigma)$ ein spitzer k-Kegel in $(N_\rho)_{\mathbb{Q}}$ ist. Mit 2.5.8 reicht es zu zeigen, dass Σ_ρ ein k-Fächer in $(N_\rho)_{\mathbb{Q}}$ ist. Nach Konstruktion 2.5.8 gibt es zu jedem $\delta \preccurlyeq P^{\mathrm{s}}(\sigma)$ ein $\tau \in \mathrm{Stern}_\sigma(\rho)$ mit $P^{\mathrm{s}}(\tau) = \delta$. Also bleibt noch zu zeigen, dass für $P^{\mathrm{s}}(\sigma_1), P^{\mathrm{s}}(\sigma_2) \in \Sigma_\rho$ die Gleichheit $P^{\mathrm{s}}(\sigma_1) \cap P^{\mathrm{s}}(\sigma_2) = \cup\delta_k$ mit $\delta_k \preccurlyeq P^{\mathrm{s}}(\sigma_1), P^{\mathrm{s}}(\sigma_2)$ gilt. Es seien $P^{\mathrm{s}}(\sigma_1), P^{\mathrm{s}}(\sigma_2) \in \Sigma_\rho$ gegeben. Da Σ ein k-Fächer ist, gilt $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \cup\tau_k$ mit $\tau_k \preccurlyeq \sigma_1, \sigma_2$. Nach Konstruktion 2.5.8 gilt $P^{\mathrm{s}}(\tau_k) \preccurlyeq P^{\mathrm{s}}(\sigma_1), P^{\mathrm{s}}(\sigma_2)$, für jedes τ_k mit $\tau_k \in \mathrm{Stern}_\Sigma(\rho)$. Wir zeigen, dass Folgendes gilt:

$$P^{\mathrm{s}}(\sigma_1) \;\cap\; P^{\mathrm{s}}(\sigma_2) \quad = \quad \bigcup_{\tau_k \in \mathrm{Stern}_\Sigma(\rho)} P^{\mathrm{s}}(\tau_k).$$

Es ist nur zur Inklusion „$\subseteq$" etwas zu zeigen. Es sei $v \in P^{\mathrm{s}}(\sigma_1) \cap P^{\mathrm{s}}(\sigma_2)$ gegeben. Dann existieren $\delta_1 \in \mathrm{Stern}_{\sigma_1}(\rho)$ und $\delta_2 \in \mathrm{Stern}_{\sigma_2}(\rho)$ mit $v \in P(\mathring{\delta}_1) \cap P(\mathring{\delta}_2)$. Es reicht zu zeigen, dass gilt:

$$P(\mathring{\delta}_1) \cap P(\mathring{\delta}_2) \quad = \quad P(\mathring{\delta}_1 \cap \mathring{\delta}_2).$$

denn: Aus $v \in P(\mathring{\delta}_1) \cap P(\mathring{\delta}_2) = P(\mathring{\delta}_1 \cap \mathring{\delta}_2)$ folgt, dass $\mathring{\delta}_1 \cap \mathring{\delta}_2 \neq \emptyset$ gilt. Nach Lemma 2.2.10 gilt $\delta_1 = \delta_2 \in \mathrm{Stern}_{\sigma_1}(\rho), \mathrm{Stern}_{\sigma_2}(\rho)$. Insbesondere ist $\delta_1 = \tau_{k_0}$ für ein k_0. Somit gilt $v \in P^{\mathrm{s}}(\tau_{k_0})$ mit $\tau_{k_0} \in \mathrm{Stern}_\Sigma(\rho)$.

Es ist klar, dass $P(\mathring{\delta}_1 \cap \mathring{\delta}_2) \subseteq P(\mathring{\delta}_1) \cap P(\mathring{\delta}_2)$ gilt. Es seien $v_1 \in \mathring{\delta}_1$ und $v_2 \in \mathring{\delta}_2$ mit $P(v_1) = P(v_2) = v$. Das heißt, es gilt $v_1 - v_2 \in \mathrm{lin}(\rho)$. Nach Lemma 2.5.16 existiert ein $w_1 \in \mathring{\rho}$ mit $v_1 - v_2 + w_1 = w_2 \in \mathring{\rho}$. Mit Lemma 2.5.14 erhalten wir

$$\mathring{\delta}_1 \;\ni\; v_1 + w_1 \quad = \quad v_2 + w_2 \;\in\; \mathring{\delta}_2.$$

Somit gilt $v \in P(\mathring{\delta}_1 \cap \mathring{\delta}_2)$ und damit $P(\mathring{\delta}_1) \cap P(\mathring{\delta}_2) = P(\mathring{\delta}_1 \cap \mathring{\delta}_2)$. □

Folgerung 2.5.18. *Es sei (N, Σ) ein k-Gitterfächer und $\delta_0 \in \Sigma$ der minimale k-Kegel von Σ. Wir betrachten den Morphismus $P\colon N \to N_{\sigma_0}$. Dann ist die Kollektion $\Sigma_{\delta_0} := \{P(\sigma); \sigma \in \mathrm{Stern}_\Sigma(\delta_0)\}$ ein spitzer k-Fächer in $(N_\rho)_{\mathbb{Q}}$. Insbesondere ist $P\colon (N, \Sigma) \to (N_{\delta_0}, \Sigma_{\delta_0})$ ein Morphismus von k-Gitterfächern. Weiter haben wir eine bijektive Zuordnung:*

$$\mathrm{Stern}_\Sigma(\rho) \;\to\; \Sigma_{\delta_0}, \qquad \sigma \;\mapsto\; P(\sigma).$$

Beweis. Da δ_0 die minimale Seite von σ ist, gilt $\mathrm{Stern}_\Sigma(\rho) = \Sigma$. Nach Folgerung 2.5.9 gilt $P(\sigma) = P^{\mathrm{s}}(\sigma)$ für alle $\sigma \in \mathrm{Stern}_\Sigma(\delta_0)$. Somit folgt die Behauptung aus Satz 2.5.17. □

Definition 2.5.19. Es seien $\mathcal{S}$ ein k-Fächersystem in V und $[\tau, i] \in \Omega(\mathcal{S})$. Wir setzen

$$\mathrm{Stern}_{\mathcal{S}}([\tau, i]) \quad := \quad \{[\sigma, j];\; [\sigma, j] \in \Omega(\mathcal{S}),\; [\tau, i] \preccurlyeq [\sigma, j]\}\,.$$

2.6. **Konstruierbare Hüllen.**

Offentsichtlich ist die konvexe Hülle zweier k-Kegel kein k-Kegel. Deshalb werden wir in diesem Abschnitt die *k-Hülle* zweier k-Kegel einführen, welche ein quasiaffiner k-Fächer ist.

Bemerkung 2.6.1. Es sei $A \subseteq V$ eine Teilmenge in V. Dann ist die Menge $\mathrm{hull}(A)$ die ,,kleinste" konvexe Menge die A enthält, das heißt: Ist $B \subseteq V$ eine konvexe Menge mit $A \subseteq B$, dann ist $\mathrm{hull}(A) \subseteq B$.

Erinnerung 2.6.2. Es seien σ' und τ' zwei Kegel in V. Dann gilt

(i) Die konvexe Menge $\mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau')$ ist ein Kegel in V.
(ii) Es gilt $\mathrm{hull}(\sigma') = \sigma'$. Also ist σ' konvex.

Konstruktion 2.6.3. Es seien $\sigma, \tau \subseteq V$ k-Kegel in V sowie σ' und τ' die Abschlüsse von σ bzw. τ. Wir setzen $\Sigma'_{\sigma,\tau} := \mathcal{F}_{\mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau')}$ und betrachten die Menge

$$A_{\sigma,\tau} \quad := \quad \{\mathring{\rho}';\ \rho' \in \Sigma'_{\sigma,\tau},\ \mathring{\rho}' \cap (\sigma \cup \tau) \neq \emptyset\} \quad \subseteq \quad \mathring{\Sigma}'_{\sigma,\tau}.$$

Die *konstruierbare Hülle (k-Hülle) von* σ *und* τ in V ist definiert als

$$\text{k-hull}(\sigma, \tau) \quad := \quad (\Sigma'_{\sigma,\tau})_{A_{\sigma,\tau}} \quad \sqsubseteq \quad \Sigma'_{\sigma,\tau}.$$

Die Kollektion $\text{k-hull}(\sigma, \tau)$ ist nach Satz 2.2.22 ein quasiaffiner k-Fächer in V.

Beispiele 2.6.4. Mit Bemerkung 2.1.6 können wir folgende Beispiele betrachten:

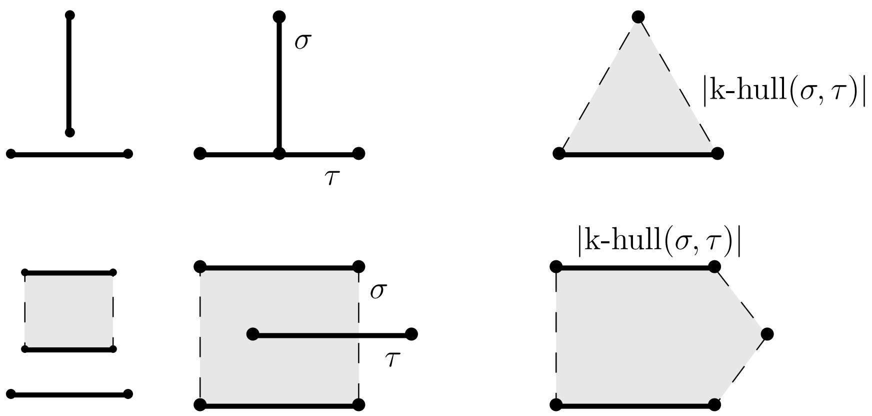

Abbildung 12

Bemerkung 2.6.5. Es seien $\sigma, \tau \subseteq V$ k-Kegel in V und σ' sowie τ' die Abschlüsse von σ bzw. τ. Mit Lemma 2.2.23 erhalten wir

$$|\text{k-hull}(\sigma, \tau)| \quad = \quad \bigcup_{\rho' \preccurlyeq \mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau'),\ \mathring{\rho}' \cap (\sigma \cup \tau) \neq \emptyset} \mathring{\rho}'.$$

Bemerkung 2.6.6. Es seien $\sigma, \tau \subseteq V$ k-Kegel in V und σ' sowie τ' die Abschlüsse von σ bzw. τ. Für $\rho' := \mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau')$ gilt $\rho'^{(1)} \subseteq \sigma'^{(1)} \cup \tau'^{(1)}$. Also gilt: Sind σ und τ 1-voll so ist $\text{k-hull}(\sigma, \tau)$ 1-voll.

Lemma 2.6.7. *Es seien* $\sigma, \tau \subseteq V$ *k-Kegel in* V. *Dann gilt* $\sigma \cup \tau \subseteq |\text{k-hull}(\sigma, \tau)|$.

Beweis. Es sei σ' und τ' die Abschlüsse von σ bzw. τ. Weiter sei $\rho' \preccurlyeq \sigma'$ mit $\mathring{\rho}' \subseteq \sigma$ gegeben. Dann gilt $\tau' \cup \sigma' \subseteq \mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau')$. Nach Folgerung 2.1.31 existiert eine Seite $\delta' \preccurlyeq \mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau')$ mit $\mathring{\rho}' \subseteq \mathring{\delta}'$. Insbesondere gilt $\mathring{\delta}' \cap \sigma \neq \emptyset$. Mit Bemerkung 2.6.5 erhalten wir $\mathring{\delta}' \subseteq |\text{k-hull}(\sigma, \tau)|$. Somit gilt $\mathring{\rho}' \subseteq |\text{k-hull}(\sigma, \tau)|$. Analog zeigt man, dass $\tau \subseteq |\text{k-hull}(\sigma, \tau)|$ gilt. □

Lemma 2.6.8. *Es seien $\sigma, \tau, \rho \subseteq V$ k-Kegel in V mit $\sigma \subseteq \rho$ und $\tau \subseteq \rho$. Dann gilt $|\text{k-hull}(\sigma, \tau)| \subseteq \rho$.*

Beweis. Es seien σ', τ' und ρ' die Abschlüsse von σ, τ bzw. ρ. Aus $\sigma, \tau \subseteq \rho$ folgt mit Bemerkung 2.1.4, dass $\sigma', \tau' \subseteq \rho'$ gilt. Somit ist $\mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau') \subseteq \rho'$. Nach Bemerkung 2.6.5 reicht es zu zeigen, dass für jedes $\delta' \preccurlyeq \mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau')$ mit $\mathring{\delta}' \cap (\sigma \cup \tau) \neq \emptyset$ die Inklusion $\mathring{\delta}' \subseteq \rho$ gilt. Es sei dazu ein $\delta' \preccurlyeq \mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau')$ mit $\mathring{\delta}' \cap (\sigma \cup \tau) \neq \emptyset$ gegeben. Da $\sigma, \tau \subseteq \rho$ gilt, ist $\mathring{\delta}' \cap \rho \neq \emptyset$. Nach Lemma 2.1.31 existiert eine Seite $\rho'_1 \preccurlyeq \rho'$ mit $\mathring{\delta}' \subseteq \mathring{\rho}'_1$. Somit gilt $\emptyset \neq \mathring{\delta}' \cap \rho \subseteq \mathring{\rho}'_1 \cap \rho$. Mit Bemerkung 2.1.8 gilt $\mathring{\delta}' \subseteq \mathring{\rho}'_1 \subseteq \rho$. □

Beispiel 2.6.9. Es seien $\sigma, \tau \subseteq V$ k-Kegel in V. Dann ist $|\text{k-hull}(\sigma, \tau)|$ im Allgemeinen kein k-Kegel siehe Abbildung 13.

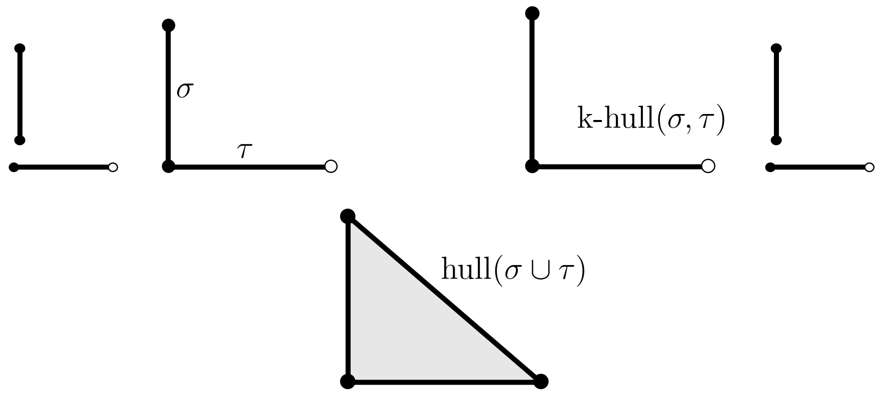

Abbildung 13

Lemma 2.6.10. *Es seien $\sigma, \tau \subseteq V$ k-Kegel in V mit $\mathring{\tau} \cap \sigma \neq \emptyset$. Dann ist $\delta := |\text{k-hull}(\sigma, \tau)|$ ein k-Kegel in V. Des Weiteren gilt $\mathring{\sigma} \subseteq \mathring{\delta}$.*

Beweis. Es seien σ' und τ' die Abschlüsse von σ bzw. τ. Wir setzen $\delta' := \mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau')$. Es ist zu zeigen, dass $\mathring{\delta}' \subseteq |\text{k-hull}(\sigma, \tau)|$ gilt. Mit Bemerkung 2.6.7 gilt $\sigma' \subseteq \delta'$. Somit reicht es nach Lemma 2.1.3 zu zeigen, dass $\mathring{\sigma}' \cap \mathring{\delta}' \neq \emptyset$ gilt.

Nach Folgerung 2.1.31 existiert eine Seite $\rho' \preccurlyeq \delta'$ mit $\sigma' \subseteq \rho'$ und $\mathring{\sigma}' \subseteq \mathring{\rho}'$. Nach Voraussetzung ist $\mathring{\tau} \cap \sigma \neq \emptyset$. Lemma 2.1.30 liefert $\tau' \subseteq \rho'$. Somit ist $\sigma' \cup \tau' \subseteq \rho'$. Mit Bemerkung 2.6.1 gilt $\delta' = \mathrm{hull}(\tau' \cup \rho') \subseteq \rho'$. Also ist $\rho' = \delta'$ und insbesondere $\mathring{\sigma} \cap \mathring{\delta}' \neq \emptyset$. Folglich ist $|\text{k-hull}(\sigma, \tau)|$ ein k-Kegel in V. □

Lemma 2.6.11. *Es seien σ, τ k-Kegel in V und σ' sowie τ' die Abschlüsse von σ' bzw. τ'. Ist $\rho := |\text{k-hull}(\sigma, \tau)|$ ein k-Kegel in V, so gilt für den Abschluss ρ' von ρ: $\rho' = \mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau')$.*

Beweis. Nach Definition von k-hull gilt $\rho \subseteq \mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau')$. Mit Bemerkung 2.1.4 erhalten wir $\rho' \subseteq \mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau')$. Nach Lemma 2.6.7 gilt $\sigma, \tau \subseteq \rho$ und somit $\sigma' \cup \tau' \subseteq \rho'$. Mit Bemerkung 2.6.2 folgt $\mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau') \subseteq \rho'$. □

Lemma 2.6.12. *Es seien $(N, \sigma'), (N, \tau')$ Gitterkegel und $F\colon N \to M$ ein Morphismus von Gittern. Dann gilt* $\mathrm{hull}(F(\sigma') \ \cup \ F(\tau')) = F(\mathrm{hull}(\sigma' \ \cup \ \tau'))$.

Beweis. Siehe [2, Theorem 2.1]. □

Lemma 2.6.13. *Es seien $(N, \sigma), (N, \tau)$ k-Gitterkegel, wobei* $|\text{k-hull}(\sigma, \tau)|$ *ein k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$ ist. Weiter sei $F\colon N \to M$ ein Morphismus von Gittern. Dann gilt*

$$|\text{k-hull}(F^{\mathrm{c}}(\sigma), F^{\mathrm{c}}(\tau))| \quad = \quad F^{\mathrm{c}}(|\text{k-hull}(\sigma, \tau)|).$$

Beweis. Es seien σ' und τ' die Abschlüsse von σ bzw. τ. Lemma 2.6.11 liefert, dass $\mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau')$ der Abschluss von $|\text{k-hull}(\sigma, \tau)|$ ist. Nach Konstruktion 2.4.7 sind $F^{\mathrm{c}}(\sigma)$, $F^{\mathrm{c}}(\tau)$ und $F^{\mathrm{c}}(|\text{k-hull}(\sigma, \tau)|)$ k-Kegel in $M_{\mathbb{Q}}$ und die zugehörige Abschlüsse von $F^{\mathrm{c}}(\sigma)$, $F^{\mathrm{c}}(\tau)$ bzw. $F^{\mathrm{c}}(|\text{k-hull}(\sigma, \tau)|)$ sind $F(\sigma')$, $F(\tau')$ bzw. $F(\mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau'))$.
Zur Inklusion „$\subseteq$": Nach Lemma 2.6.7 gilt:

$$\sigma, \tau \quad \subseteq \quad \sigma \cup \tau \quad \subseteq \quad |\text{k-hull}(\sigma, \tau)|.$$

Mit Lemma 2.4.12 erhalten wir $F^{\mathrm{c}}(\sigma)$, $F^{\mathrm{c}}(\tau) \subseteq F^{\mathrm{c}}(|\text{k-hull}(\sigma, \tau)|)$ Nach Lemma 2.6.8 gilt $|\text{k-hull}(F^{\mathrm{c}}(\sigma), F^{\mathrm{c}}(\tau))| \quad \subseteq \quad F^{\mathrm{c}}(|\text{k-hull}(\sigma, \tau)|)$.

Zur Inklusion „$\supseteq$": Es sei $\rho' \preccurlyeq F(\mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau'))$ mit $\mathring{\rho}' \subseteq F^{\mathrm{c}}(|\text{k-hull}(\sigma, \tau)|)$ gegeben. Das heißt, es gilt:

$$\mathring{\rho}' \ \cap \ F(|\text{k-hull}(\sigma, \tau)|) \quad \neq \quad \emptyset.$$

Es ist zu zeigen, dass $\mathring{\rho}' \subseteq |\text{k-hull}(F^{\mathrm{c}}(\sigma), F^{\mathrm{c}}(\tau))|$ gilt. Lemma 2.6.12 liefert

$$\rho' \quad \preccurlyeq \quad F(\mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau')) \quad = \quad \mathrm{hull}(F(\sigma') \cup F(\tau')).$$

Somit reicht es, mit Bemerkung 2.6.5 zu zeigen, dass $\mathring{\rho}' \cap (F^{\mathrm{c}}(\sigma) \cup F^{\mathrm{c}}(\tau)) \neq \emptyset$ gilt. Mit Bemerkung 2.6.5 gilt:

$$|\text{k-hull}(\sigma, \tau)| \quad = \quad \bigcup_{\delta' \preccurlyeq \mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau'),\ \mathring{\delta}' \cap (\sigma \cup \tau) \neq \emptyset} \mathring{\delta}'.$$

Somit existiert ein $\delta' \preccurlyeq \mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau')$ mit $\mathring{\delta}' \cap (\sigma \cup \tau) \neq \emptyset$ und $F(\mathring{\delta}') \ \cap \ \mathring{\rho}' \neq \emptyset$. Weiter ist $F(\delta') \subseteq F(\mathrm{hull}(\sigma' \cup \tau'))$. Nach Erinnerung 2.4.5 gilt $F(\mathring{\delta}') = F(\delta')^{\circ}$. Folgerung 2.1.31 liefert $F(\mathring{\delta}') \subseteq \mathring{\rho}'$. Aus $\mathring{\delta}' \cap (\sigma \cup \tau) \neq \emptyset$ folgt $\emptyset \neq F(\mathring{\delta}' \cap (\sigma \cup \tau)) \subseteq F(\mathring{\delta}') \cap (F(\sigma) \cup F(\tau))$. Somit gilt:

$$\emptyset \quad \neq \quad F(\mathring{\delta}') \cap (F(\sigma) \cup F(\tau)) \quad \subseteq \quad \mathring{\rho}' \ \cap \ (F^{\mathrm{c}}(\sigma) \cup F^{\mathrm{c}}(\tau)).$$

□

Lemma 2.6.14. *Es seien (N, τ_1), (N, τ_2) zwei k-Gitterkegel und $\rho_2 \preccurlyeq \tau_2$ mit $\mathring{\rho}_2 \cap \tau_1 \neq \emptyset$. Weiter seien (M, Δ) ein k-Gitterfächer und $F\colon N \to M$ ein Gittermorphismus mit $F(\tau_1) \subseteq \delta_1$ und $F(\tau_2) \subseteq \delta_2$, wobei $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$. Dann gilt* $F^{\mathrm{c}}(|\text{k-hull}(\tau_1, \rho_2)|) \subseteq \delta_1$.

Beweis. Nach Lemma 2.6.10 ist $|\text{k-hull}(\tau_1, \rho_2)|$ ein k-Kegel ist. Es gilt

$$\emptyset \quad \neq \quad \tau_1 \cap \mathring{\rho}_2 \quad \subseteq \quad \tau_1 \cap \mathring{\rho}_2 \cap \tau_2.$$

Lemma 2.4.10 liefert $F(\rho_2) \subseteq F^{\mathrm{c}}(\rho_2)$. Somit liefert Konstruktion 2.4.7, dass

$$\emptyset \quad \neq \quad F^{\mathrm{c}}(\mathring{\rho}_2) \;\cap\; \delta_1 \;\cap\; \delta_2 \quad = \quad F^{\mathrm{c}}\mathring{(\rho_2)} \;\cap\; \delta_1 \;\cap\; \delta_2$$

gilt. Nach Lemma 2.4.11 erhalten wir $F^{\mathrm{c}}(\rho_2) \subseteq \delta_2$. Weiter ist $\Sigma_{\delta_1 \cap \delta_2} \preccurlyeq \mathcal{F}_{\delta_1}, \mathcal{F}_{\delta_2}$. Somit existiert eine Seite $\delta_3 \preccurlyeq \delta_1, \delta_2$ mit $F(\mathring{\rho}_2) \cap \mathring{\delta}_3 \neq \emptyset$. Da $F^{\mathrm{c}}(\rho_2)$ ein k-Kegel ist, folgt aus Lemma 2.1.30, dass $F^{\mathrm{c}}(\rho_2) \subseteq \delta_3$ und damit insbesondere $F^{\mathrm{c}}(\rho_2) \subseteq \delta_1$ gilt. Mit Lemma 2.6.7 und Lemma 2.6.13 gilt:

$$F^{\mathrm{c}}(|\text{k-hull}(\tau_1, \rho_2)|) \quad = \quad |\text{k-hull}(F^{\mathrm{c}}(\tau_1), F^{\mathrm{c}}(\rho_2))| \quad \subseteq \quad \delta_1.$$

□

2.7. **Kategorische Quotienten in der Kategorie der k-Gitterfächer.**

Wir zeigen, dass zu jedem *System von k-Kegeln* und jedem primitiven Untergitter der *konstruierbare Quotientenfächer (k-Quotientenfächer)* existiert. Der Algorithmus **k-Quot** liefert im Beweis von Satz 2.7.23 den k-Quotientenfächer in der Kategorie der k-Gitterfächer. Der Algorithmus **Quot** welcher in [2] vorgestellt wurde, liefert den Quotientenfächer in der Kategorie der Gitterfächer siehe [2, Theorem 2.3].

Definition 2.7.1 (Kategorie der Systeme von k-Kegeln)**.**

(i) Ein *System von k-Kegeln* ist ein Paar $(N, \mathfrak{S})$, wobei N ein Gitter und $\mathfrak{S}$ eine nichtleere endlichen Kollektion von k-Kegeln in $N_{\mathbb{Q}}$ ist, sodass alle k-Kegel aus $\mathfrak{S}$ maximal bezüglich Inklusion sind.
(ii) Ein Morphismus von Systemen von k-Kegeln $(N, \mathfrak{S})$ nach $(M, \mathfrak{R})$ ist ein Morphismus von Gittern $F\colon N \to M$, sodass für jedes $\sigma \in \mathfrak{S}$ ein $\rho \in \mathfrak{R}$ existiert mit $F_{\mathbb{Q}}(\sigma) \subseteq \rho$.

Definition 2.7.2. Es sei $(N, \mathcal{S} = (\Sigma_{ij})_{i,j\in I})$ ein spites attraktives k-Fächersystem, das heißt zu jedem $i \in I$ existiert ein σ_i mit $\Sigma_{ii} = \mathcal{F}_{\sigma_i}$. Wir nennen $\mathcal{S}$ *maximal Verklebt*, falls $\Sigma_{ij} = \{\tau;\ \tau \in \Sigma_{ii}, \Sigma_{jj}\}$ gilt.

Bemerkung 2.7.3.

(i) Für jeden k-Gitterfächer (N, Σ) ist die Menge der maximalen k-Kegel $\Sigma^{\max}$, bezüglich Inklusion, ein System von k-Kegeln.
(ii) Es seien $(N, \mathfrak{S})$ ein System von k-Kegel und $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{S}$ eine nichtleere Teilkollektion. Dann ist $(N, \mathfrak{R})$ ein System von k-Kegeln.
(iii) Jedes System von k-Kegeln $(N, \mathfrak{S})$ definiert durch maximales Verkleben ein k-Gitterfächersystem $(N, \mathcal{S}_{\mathfrak{S}})$.
(iv) Jedes attraktive k-Gitterfächersystem $(N, \mathcal{S} = (\Sigma_{ij})_{i,j\in I})$ definiert auf natürliche Weise ein System von k-Kegeln $(N, \mathfrak{S}_{\mathcal{S}})$. Sind alle $|\Sigma_{ii}|$ maximal bezüglich Inklusion und $\mathcal{S}$ maximal verklebt, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus $(\mathrm{id}, \mathfrak{f}_{\mathrm{id}})\colon (N, \mathcal{S}) \to (N, \mathcal{S}_{\mathfrak{S}_{\mathcal{S}}})$.

Definition 2.7.4. Es seien $(N, \mathfrak{S})$ ein System von k-Kegeln und (M, Δ) ein k-Gitterfächer. Ein *Morphismus von* $(N, \mathfrak{S})$ *nach* (M, Δ) ist eine Gittermorphismus $F\colon N \to M$, sodass für jedes $\sigma \in \mathfrak{S}$ ein $\tau \in \Delta$ existiert mit $F(\sigma) \subseteq \tau$.

Bemerkung 2.7.5. Es seien $F\colon N \to M$ ein Gittermorphismus, $(N, \mathfrak{S})$ ein System von k-Kegeln und (M, Δ) ein k-Gitterfächer. Dann ist $F\colon (N, \mathfrak{S}) \to (M, \Delta)$ genau dann ein Morphismus, wenn $F\colon (N, \mathfrak{S}) \to (M, \Delta^{\max})$ ein Morphismus ist.

Bemerkung 2.7.6. Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein k-Gitterfächersystem und $(N, \mathfrak{S})$ das zu $(N, \mathfrak{S})$ gehörige System von k-Kegeln. Es sei (M, Δ) ein k-Gitterfächer und $F\colon N \to M$ ein Gittermorphismus. Dann ist $F\colon (N, \mathcal{S}) \to (M, \mathcal{S}_{\Delta})$ genau dann ein Morphismus, wenn $F\colon (N, \mathfrak{S}) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus ist.

Begründung. Die Implikation „$\Rightarrow$" ist offensichtlich.

Zur Implikation „$\Leftarrow$": Nach Definition existiert zu jedem $\tau \in \mathfrak{S}$ ein $\sigma \in \Delta$ mit $F(\tau) \subseteq \sigma$. Nach Lemma 2.4.11 gilt $F^{\mathrm{c}}(\tau) \subseteq \sigma$. Nach Folgerung 2.1.31 existiert genau ein $\rho \preccurlyeq \sigma$ mit $F^{\mathrm{c}}(\tau) \subseteq \rho$ und $\overset{\circ}{F^{\mathrm{c}}}(\tau) \subseteq \rho$. Insbesondere gilt $F(\mathring{\tau}) \subseteq \mathring{\rho}$ und $F(\tau) \subseteq \rho$. Dies induziert eine natürliche Zuordnung $\mathfrak{f}\colon \Omega(\mathcal{S}) \to \Omega(\mathcal{S}_{\Delta})$. Insbesondere ist Bedingung 2.4.27 (ii) (a) erfüllt. Es seien $[\delta, i], [\tau, j] \in \Omega(\mathcal{S})$ mit $[\delta, i] \preccurlyeq [\tau, j]$ gegeben. Nach

Definition von $\mathfrak{f}$, gibt es $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$ mit $F(\mathring{\delta}) \subseteq \mathring{\sigma}_1$ und $F(\delta) \subseteq \sigma_1$ sowie $F(\mathring{\tau}) \subseteq \sigma_2$ und $F(\tau) \subseteq \sigma_2$. Aus $[\delta, i] \preccurlyeq [\tau, j]$ folgt $\mathring{\delta} \subseteq \tau$. Also gilt $\mathring{\sigma}_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$. Lemma 2.2.11 liefert $\sigma_1 \preccurlyeq \sigma_2$. Da Δ ein k-Fächer ist, gilt $[\sigma_1, s] \preccurlyeq [\sigma_2, l]$. Somit ist Bedingung 2.4.27 (ii) (b) ebenfalls erfüllt und wir erhalten einen Morphismus $(\mathrm{id}, \mathfrak{f})\colon (N, \mathcal{S}) \to (N, \mathcal{S}_\Delta)$. $\square$

Definition 2.7.7. Es sei $(N, \mathfrak{S})$ ein System von k-Kegeln. Falls $L \subseteq \widehat{L} \subseteq N$ primitive Teilgitter sind, dann nennen wir einen spitzen k-Fächer $\widetilde{\Sigma}$ in $\widetilde{N} := N/\widehat{L}$ einen *konstruierbaren Quotientenfächer (k-Quotientenfächer) von $\mathfrak{S}$ bezüglich L in der Kategorie der k-Fächer*, falls Folgendes gilt:

(i) Die Projektionsabbildung $P\colon (N, \mathfrak{S}) \to (\widetilde{N}, \widetilde{\Sigma})$ ist ein Morphismus.
(ii) Für jeden Morphismus $F\colon (N, \mathfrak{S}) \to (M, \Delta)$ von $(N, \mathfrak{S})$ zu einem spitzen k-Gitterfächer (M, Δ) mit $F(L) = 0$ existiert ein Morphismus $\widetilde{F}\colon (\widetilde{N}, \widetilde{\Sigma}) \to (M, \Delta)$ von k-Gitterfächern, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
(N, \mathfrak{S}) \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "P"'] & & (M, \Delta) \\
& (\widetilde{N}, \widetilde{\Sigma}) \arrow[ur, "\widetilde{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 2.7.8. Der k-Quotientenfächer ist durch den Morphismus P eindeutig bestimmt.

Bemerkung 2.7.9. Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein k-Gitterfächersystem und $(N, \mathfrak{S})$ das zu $(N, \mathfrak{S})$ gehörige System von k-Kegeln. Nach Bemerkung 2.7.6 besitzt $(N, \mathcal{S})$ genau dann einen k-Quotientenfächer, wenn $(N, \mathfrak{S})$ eines besitzt.

Folgender Algorithmus wurde in [2] vorgestellt:

Algorithmus Quot

Eingabe: Ein System von Kegeln $(N, \mathfrak{S}')$.

Initialisierung: Wir setzen $\mathfrak{S}'_1 := \mathfrak{S}'$. Es sei $\mathfrak{S}'_i$ das System von Kegeln im i-ten Schleifendurchlauf.

Schleife: Solange es Kegel $\tau'_1, \tau'_2 \in \mathfrak{S}'_i$ gibt mit $\tau'_1 \cap \tau'_2 \npreceq \tau'_1$ oder $\tau'_1 \cap \tau'_2 \npreceq \tau'_2$.

Es sei ρ'_2 die minimale Seite von τ'_2 mit $\tau'_1 \cap \tau'_2 \subseteq \rho'_2$. Falls $\rho'_2 \not\subseteq \tau'_1$ gilt, setze $\widetilde{\tau}'_1 := \mathrm{hull}(\tau'_1 \cup \rho'_2)$ und

$$\mathfrak{S}'_{i+1} \quad := \quad (\mathfrak{S}_i \setminus \{\sigma' \subseteq \widetilde{\tau}'_1;\ \sigma' \in \mathfrak{S}_i\}) \ \cup\ \{\widetilde{\tau}'_1\}.$$

Ansonsten wähle minimale Seite ρ'_1 von τ'_1 mit $\tau'_1 \cap \tau'_2 \subseteq \rho'_1$. Setze $\widetilde{\tau}'_2 := \mathrm{hull}(\tau'_2 \cup \rho'_1)$ und

$$\mathfrak{S}'_{i+1} \quad := \quad (\mathfrak{S}_i \setminus \{\sigma' \subseteq \widetilde{\tau}'_2;\ \sigma' \in \mathfrak{S}_i\}) \ \cup\ \{\widetilde{\tau}'_2\}.$$

Ausgabe: Ein System von Kegeln $(N_1, \mathfrak{S}'_m)$, sodass $\Sigma_{\mathfrak{S}'_m}$ ein Fächer in $N_{\mathbb{Q}}$ ist.

Satz 2.7.10. *Der Algorithmus* **Quot** *ist wohldefiniert und terminiert. Es seien $(N, \mathfrak{S}')$ ein System von Kegeln und $L \subseteq N$ ein primitives Teilgitter. Dann liefert der Algorithmus* **Quot** *den Quotientenfächer zu $(N, \mathfrak{S}')$ bezüglich L in der Kategorie der Fächer.*

Beweis. Siehe [2, Theorem 2.3]. $\square$

Algorithmus subroutine k-Quot

Eingabe: Es sei S eine Familie von k-Kegel in V.

Initialisierung: Wir setzen $S_1 := S$. Es sei S_i die Familie von k-Kegeln im i-ten Schleifendurchlauf.

Schleife: Solange es k-Kegel $\tau_1, \tau_2 \in S_i$ und ein $\rho \in \Sigma_{\tau_1 \cap \tau_2}$ gibt mit:

$$\rho \not\preccurlyeq \tau_1 \quad \text{und} \quad \mathring{\rho} = \mathring{\rho}_1 = \mathring{\rho}_2 \qquad \text{mit } \rho_1 \preccurlyeq \tau_1,\ \rho_2 \preccurlyeq \tau_2$$

oder

$$\rho \not\preccurlyeq \tau_2 \quad \text{und} \quad \mathring{\rho} = \mathring{\rho}_1 = \mathring{\rho}_2 \qquad \text{mit } \rho_1 \preccurlyeq \tau_1,\ \rho_2 \preccurlyeq \tau_2$$

Falls $\rho \not\preccurlyeq \tau_1$ und $\mathring{\rho} = \mathring{\rho}_1 = \mathring{\rho}_2$ mit $\rho_1 \preccurlyeq \tau_1,\ \rho_2 \preccurlyeq \tau_2$ gilt. Dann setze $\widetilde{\tau}_2 := |\text{k-hull}(\tau_2, \rho_1)|$ und

$$S_{i+1} \quad := \quad (S_i \setminus \tau_2) \ \cup \ \widetilde{\tau}_2.$$

Ansonsten gilt $\rho \not\preccurlyeq \tau_2$ und $\mathring{\rho} = \mathring{\rho}_1 = \mathring{\rho}_2$ mit $\rho_1 \preccurlyeq \tau_1,\ \rho_2 \preccurlyeq \tau_2$. Dann setze $\widetilde{\tau}_1 := |\text{k-hull}(\tau_1, \rho_2)|$ und

$$S_{i+1} \quad := \quad (S_i \setminus \tau_1) \ \cup \ \widetilde{\tau}_1.$$

Ausgabe: S_m eine Familie von k-Kegeln mit

$$\left\{\mathring{\delta};\ \delta \preccurlyeq \sigma,\ \sigma \in S\right\} \quad = \quad \left\{\mathring{\delta};\ \delta \preccurlyeq \sigma,\ \sigma \in S_m\right\}.$$

Beispiel 2.7.11. Wir betrachten eine Familie $S_1 := (\tau_1, \tau_2)$ in $N_{\mathbb{Q}}$ mit $\tau_1' = \tau_2'$, wobei τ_1' der Abschluss von τ_1 und τ_2' der Abschluss von τ_2 ist. Dann besteht $S_m :=$ **subroutinek − Quot**(S_1) aus genau zwei k-Kegeln τ_{1_m} und τ_{2_m}, welche τ_1' als Abschluss haben. Vergleiche dazu Abbildung 14.

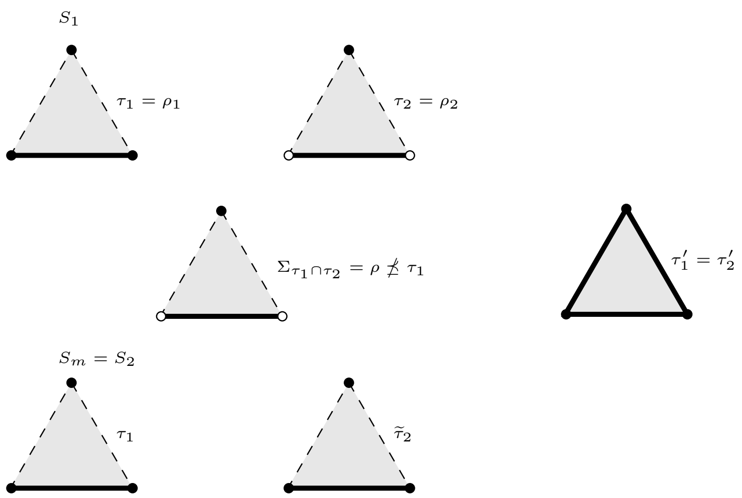

Abbildung 14

Satz 2.7.12. *Der Algorithmus* **subroutine k-Quot** *ist wohldefiniert und terminiert.*

Beweis. Für alle k-Kegel σ, τ, ρ und δ bezeichnen wir die jeweiligen Abschlüsse mit σ', τ', ρ' bzw. δ'. Zuerst müssen wir zeigen, dass alle konstruierbaren Hüllen k-Kegel in V sind.

Es seien k-Kegel $\tau_1, \tau_2 \in S_i$ mit $\Sigma_{\tau_1 \cap \tau_2} \not\preccurlyeq \mathcal{F}_{\tau_1}, \mathcal{F}_{\tau_2}$ und $\rho \in \Sigma_{\tau_1 \cap \tau_2}$ mit $\rho \not\preccurlyeq \tau_1$ und $\mathring{\rho} = \mathring{\rho}_1 = \mathring{\rho}_2$ oder $\rho \not\preccurlyeq \tau_2$ und $\mathring{\rho} = \mathring{\rho}_1 = \mathring{\rho}_2$ gegeben, wobei $\rho_1 \preccurlyeq \tau_1$ sowie $\rho_2 \preccurlyeq \tau_2$.

Falls $\rho \not\preccurlyeq \tau_1$ gilt, so ist $\mathring{\rho}_1 \cap \tau_2 \neq \emptyset$. Lemma 2.6.10 liefert, dass $\widetilde{\tau}_2 := |\text{k-hull}(\tau_2, \rho_1)|$ ein k-Kegel in V ist. Aus $\mathring{\rho} = \mathring{\rho}_1 = \mathring{\rho}_2$ folgt mit Bemerkung 2.1.22, dass $\rho' = \rho_1' = \rho_2'$ gilt. Also ist $\rho_1' \preccurlyeq \tau_2'$. Mit Lemma 2.6.11 erhalten wir

$$\widetilde{\tau}_2' \quad = \quad \text{hull}(\tau_2' \cup \rho') \quad = \quad \tau_2'.$$

Falls $\rho \not\preccurlyeq \tau_2$ gilt, können wir analog zeigen, dass $\widetilde{\tau}_1$ ein k-Kegel in V ist und $\widetilde{\tau}_1' = \tau_1'$ gilt.

Wir zeigen als nächstes, dass der Algorithmus terminiert. Für jeden k-Kegel σ bezeichnen wir die Anzahl der Seiteninneren mit $\#\sigma$. Wir zeigen, dass Folgendes gilt:

$$\sum_{\tau \in S_i} \#\tau \quad < \quad \sum_{\tau \in S_{i+1}} \#\tau.$$

Es seien dazu $\tau_1, \tau_2 \in S_i$ und $\rho \in \Sigma_{\tau_1 \cap \tau_2}$ gegeben, wobei $\mathring{\rho} = \mathring{\rho}_1 = \mathring{\rho}_2$ und $\rho \not\preccurlyeq \tau_1$ oder $\rho \not\preccurlyeq \tau_2$. Wir betrachten zuerst den Fall $\rho \not\preccurlyeq \tau_1$ und zeigen, dass $\#\tau_2 < \#\widetilde{\tau}_2$ gilt. Dafür zeigen wir zuerst, dass es für jedes $\delta \in \tau_2$ ein $\delta_2 \preccurlyeq \widetilde{\tau}_2$ mit $\mathring{\delta} = \mathring{\delta}_2$ gibt. Es sei dazu ein $\delta \preccurlyeq \tau_2$ gegeben. Mit Bemerkung 2.1.16 gilt $\delta' \preccurlyeq \tau_2' = \widetilde{\tau}_2'$. Wir setzen $\delta_2 := \delta' \cap \widetilde{\tau}_2$. Da δ eine Seite von τ_2 ist, gilt $\mathring{\delta}' \subseteq \delta$. Lemma 2.6.7 liefert

$$\mathring{\delta}' \quad \subseteq \quad \delta \quad \subseteq \quad \tau_2 \quad \subseteq \quad \widetilde{\tau}_2.$$

Folglich ist δ_2 eine Seite von $\widetilde{\tau}_2$. Insbesondere ist $\mathring{\delta} = \mathring{\delta}' = \mathring{\delta}_2$. Somit gilt $\#\tau_2 \leq \#\widetilde{\tau}_2$. Es ist noch zu zeigen, dass $\#\tau_2 \neq \#\widetilde{\tau}_2$ gilt. Aus $\mathring{\rho} = \mathring{\rho}_1 = \mathring{\rho}_2$ folgt $\rho' = \rho_1' = \rho_2'$. Da $\rho_1 \preccurlyeq \tau_1$ und $\rho_2 \preccurlyeq \tau_2$ Seiten sind, erhalten wir $\rho_1 = \rho' \cap \tau_1$ und $\rho_2 = \rho' \cap \tau_2$. Nach Lemma 2.3.21 ist $\rho = \rho' \cap \tau_1 \cap \tau_2$. Da ρ keine Seite von τ_1 ist und $\mathring{\rho} = \mathring{\rho}_1$ gilt, erhalten wir

$$\rho \quad = \quad \rho' \ \cap \ \tau_1 \ \cap \ \tau_2 \quad \subsetneq \quad \rho' \ \cap \ \tau_1 \quad = \quad \rho_1.$$

Mit $\rho' = \rho_1' \preccurlyeq \tau_2' = \widetilde{\tau}_2'$ und Bemerkung 2.1.8 folgt, dass es eine Seite $\delta' \preccurlyeq \rho_1' \preccurlyeq \tau_2'$ gibt mit $\mathring{\delta}' \cap \tau_2 = \emptyset$ und $\mathring{\delta}' \subseteq \rho_1$. Also ist $\delta_2 := \delta' \cap \widetilde{\tau}_2 \preccurlyeq \widetilde{\tau}_2$ mit $\mathring{\delta}_2 \cap \tau_2 = \emptyset$. Somit ist $\#\tau_2 < \#\widetilde{\tau}_2$.

Im Fall $\rho \not\preccurlyeq \rho_2$ erhalten wir analog $\#\tau_1 < \#\widetilde{\tau}_1$. Somit ist

$$\sum_{\tau \in S_i} \#\tau \quad < \quad \sum_{\tau \in S_{i+1}} \#\tau.$$

Da $\tau_1' = \widetilde{\tau}_1'$ bzw. $\tau_2' = \widetilde{\tau}_2'$ gilt, erhalten wir für jedes i

$$\sum_{\tau \in S_i} \#\tau \quad \leq \quad \sum_{\tau \in S} \#\tau'.$$

Somit bricht der Algorithmus nach endlich vielen Schritten ab. Es bleibt noch zu zeigen, dass gilt:

$$\left\{\mathring{\delta};\ \delta \preccurlyeq \sigma,\ \sigma \in S\right\} \quad = \quad \left\{\mathring{\delta};\ \delta \preccurlyeq \sigma,\ \sigma \in S_m\right\}.$$

Wir zeigen, dass gilt:

$$\left\{\mathring{\delta};\ \delta \preccurlyeq \sigma,\ \sigma \in S_i\right\} \quad = \quad \left\{\mathring{\delta};\ \delta \preccurlyeq \sigma,\ \sigma \in S_{i+1}\right\}.$$

Es seien $\tau_1, \tau_2 \in S_i$ mit $\Sigma_{\tau_1 \cap \tau_2} \not\preccurlyeq \mathcal{F}_{\tau_1}, \mathcal{F}_{\tau_2}$ und $\rho \in \Sigma_{\tau_1 \cap \tau_2}$ mit $\rho \not\preccurlyeq \tau_1$ und $\mathring{\rho} = \mathring{\rho}_1 = \mathring{\rho}_2$ gegeben. Es reicht zu zeigen, dass Folgendes gilt:

$$\left\{\mathring{\delta};\ \delta \preccurlyeq \widetilde{\tau}_2\right\} \quad = \quad \left\{\mathring{\delta};\ \delta \preccurlyeq \tau_2\right\} \ \cup \ \left\{\mathring{\delta};\ \delta \preccurlyeq \rho_1\right\}.$$

Zur Inklusion „ $\subseteq$ ": Es sei $\delta \preccurlyeq \widetilde{\tau}_2$ gegeben. Mit $\widetilde{\tau}_2' = \mathrm{hull}(\tau_2' \cup \rho_1')$ und Bemerkung 2.6.5 erhalten wir

$$\mathring{\delta} \cap \tau_2 \quad \neq \quad \emptyset \qquad \text{oder} \qquad \mathring{\delta}' \cap \rho_1 \quad \neq \quad \emptyset.$$

Falls $\mathring{\delta} \cap \tau_2 \neq \emptyset$ gilt, existiert ein $\delta_2 \preccurlyeq \tau_2$ mit $\mathring{\delta}_2 \cap \mathring{\delta} \neq \emptyset$. Es gilt $\delta_2', \delta' \preccurlyeq \tau_2' = \widetilde{\tau}_2'$. Somit folgt aus Lemma 2.1.25, dass $\mathring{\delta} = \mathring{\delta}_2$ gilt.

Falls $\mathring{\delta}' \cap \rho_1 \neq \emptyset$ gilt, existiert ein $\delta_1 \preccurlyeq \rho_1$ mit $\mathring{\delta}_1 \cap \mathring{\delta} \neq \emptyset$. Es gilt $\delta', \delta_1', \rho_1' \preccurlyeq \widetilde{\tau}_2'$. Somit folgt aus Lemma 2.1.25, dass $\mathring{\delta} = \mathring{\delta}_1$ gilt.

Zur Inklusion „$\supseteq$": Es sei $\delta_2 \preccurlyeq \tau_2$ gegeben. Dann gilt $\tau_2 \subseteq \widetilde{\tau}_2$ und $\delta_2' \preccurlyeq \tau_2' = \widetilde{\tau}_2'$. Somit ist $\mathring{\delta}_2 = \mathring{\delta}$, wobei $\delta := \delta_2' \cap \widetilde{\tau}_2 \preccurlyeq \widetilde{\tau}_2$.

Es sei jetzt $\delta_1 \preccurlyeq \rho_1$ gegeben. Dann gilt $\rho_1 \subseteq \widetilde{\tau}_2$ und $\delta_1' \preccurlyeq \rho_1' \preccurlyeq \tau_2' = \widetilde{\tau}_2'$. Somit ist $\mathring{\delta}_1 = \mathring{\delta}$, wobei $\delta := \delta_1' \cap \widetilde{\tau}_2 \preccurlyeq \widetilde{\tau}_2$. □

Bemerkung 2.7.13. Es sei N ein k-Gitter und S eine endliche Familie von k-Kegeln in $N_{\mathbb{Q}}$. Dann ist folgende Menge ein System von k-Kegeln

$$\mathfrak{S}_S \quad := \quad \{\sigma;\ \sigma \in S,\ \sigma \text{ maximal bezüglich Inklusion}\}$$

Algorithmus k-Quot:

Eingabe: Ein System von k-Kegeln $(N, \mathfrak{S})$.

Initialisierung: Setze $\mathfrak{S}_1 := \mathfrak{S}$. Es sei $\mathfrak{S}_i$ das System von k-Kegeln im i-ten Schleifendurchlauf.

Schleife: Solange es k-Kegel $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{S}_i$ gibt mit $\Sigma_{\tau_1 \cap \tau_2} \not\preccurlyeq \mathcal{F}_{\tau_1}, \mathcal{F}_{\tau_2}$. Setze

$$S_i \quad := \quad \textbf{subroutine k-Quot}(\mathfrak{S}_i)$$

und

$$\widetilde{\mathfrak{S}}_i \quad := \quad \{\tau;\ \tau \in S_i,\ \tau \text{ maximal bezüglich Inklusion}\}.$$

Falls es $\tau_1, \tau_2 \in \widetilde{\mathfrak{S}}_i$ gibt mit $\Sigma_{\tau_1 \cap \tau_2} \not\preccurlyeq \mathcal{F}_{\tau_1}, \mathcal{F}_{\tau_2}$: Wähle ein $\rho \in \Sigma_{\tau_1 \cap \tau_2}$ mit $\rho \not\preccurlyeq \tau_1$ oder $\rho \not\preccurlyeq \tau_2$

> Falls $\rho \not\preccurlyeq \tau_1$ gilt, wähle ein $\rho_1 \preccurlyeq \tau_1$ mit $\mathring{\rho} \subseteq \mathring{\rho}_1$. Setze $\sigma_i := |\text{k-hull}(\tau_2, \rho_1)|$ und
>
> $$\mathfrak{S}_{i+1} \quad := \quad \widetilde{\mathfrak{S}}_i \setminus \left\{\tau \in \widetilde{\mathfrak{S}}_i;\ \tau \subseteq \sigma_i\right\} \ \cup \ \{\sigma_i\}.$$
>
> Ansonsten wähle ein $\rho_2 \preccurlyeq \tau_2$ mit $\mathring{\rho} \subseteq \mathring{\rho}_2$. Setze $\sigma_i := |\text{k-hull}(\tau_1, \rho_2)|$ und
>
> $$\mathfrak{S}_{i+1} \quad := \quad \widetilde{\mathfrak{S}}_i \setminus \left\{\tau \in \widetilde{\mathfrak{S}}_i;\ \tau \subseteq \sigma_i\right\} \ \cup \ \{\sigma_i\}.$$

Ansonsten setze $\mathfrak{S}_{i+1} := \widetilde{\mathfrak{S}}_i$.

Ausgabe: Ein System von k-Kegeln $\mathfrak{S}_m$, sodass $\Sigma_{\mathfrak{S}_m}$ ein k-Fächer in $N_{\mathbb{Q}}$ ist.

Satz 2.7.14. *Der Algorithmus* **k-Quot** *ist wohldefiniert und terminiert.*

Beweis. Für alle k-Kegel σ, τ, ρ und δ bezeichnen wir die jeweiligen Abschlüsse mit σ', τ', ρ' bzw. δ'. Zuerst müssen wir zeigen, dass alle konstruierbaren Hüllen k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$ sind.

Es seien $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{S}_i$ gegeben mit $\Sigma_{\tau_1 \cap \tau_2} \not\preccurlyeq \mathcal{F}_{\tau_1}, \mathcal{F}_{\tau_2}$. Weiter sei $\rho \in \Sigma_{\tau_1 \cap \tau_2}$ mit $\rho \not\preccurlyeq \tau_1$ oder $\rho \not\preccurlyeq \tau_2$ gegeben.

Falls $\rho \not\preccurlyeq \tau_1$ gilt, existiert nach Folgerung 2.1.31 ein $\rho_1 \preccurlyeq \tau_1$ mit $\mathring{\rho} \subseteq \mathring{\rho}_1$. Insbesondere ist $\tau_2 \cap \mathring{\rho}_1 \neq \emptyset$. Nach Lemma 2.6.10 ist $\sigma_i = |\text{k-hull}(\tau_2, \rho_1)|$ ein k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$.

Falls $\rho \not\preccurlyeq \tau_2$ gilt, erhalten wir analog ein $\rho_2 \preccurlyeq \tau_2$ mit $\mathring{\rho} \subseteq \mathring{\rho}_2$. Lemma 2.6.10 liefert wieder, dass σ_i ein k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$ ist.

Mit Bemerkung 2.7.13 ist jedes $\widetilde{\mathfrak{S}}_i$ bzw. $\mathfrak{S}_i$ ein System von k-Kegeln. Bleibt noch zu zeigen, dass der Algorithmus terminiert. Für ein System von k-Kegeln $(N, \mathfrak{S})$ bezeichnen wir mit $\#\mathfrak{S}$ die Mächtigkeit der Menge

$$R_{\mathfrak{S}} \quad := \quad \left\{ \mathring{\delta};\ \delta \preccurlyeq \sigma,\ \sigma \in \mathfrak{S} \right\}.$$

Die Folge $(\#\mathfrak{S}_i)_i$ ist nach unten beschränkt. Falls $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}_{i+1}$ ist, endet der Algorithmus. Wir zeigen: Falls $\mathfrak{S}_i \neq \mathfrak{S}_{i+1}$ gilt, so ist $\#\mathfrak{S}_{i+1} < \#\mathfrak{S}_i$. Es gelte also $\mathfrak{S}_i \neq \mathfrak{S}_{i+1}$. Weiter sei S_i die i-te Familie von k-Kegeln die der Algorithmus **subroutine k-Quot** liefert. Es gilt

$$\left\{ \mathring{\delta};\ \delta \in S_i \right\} \quad = \quad \left\{ \mathring{\delta};\ \delta \in \mathfrak{S}_i \right\}$$

und damit $\#\widetilde{\mathfrak{S}}_i \leq \#\mathfrak{S}_i$. Also reicht es zu zeigen, dass $\#\mathfrak{S}_{i+1} < \#\widetilde{\mathfrak{S}}_i$ gilt. Es seien $\tau_1, \tau_2 \in \widetilde{\mathfrak{S}}_i$ und $\rho_1 \preccurlyeq \tau_1$, sodass τ_2 durch $\sigma := |\text{k-hull}(\tau_2 \cup \rho_1)|$ ersetzt wird. Dann gilt $\tau_2 \cap \mathring{\rho}_1 \neq \emptyset$. Wir zeigen, dass folgende Zuordnung wohldefiniert und sujektiv ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \colon R_{\widetilde{\mathfrak{S}}_i} \quad &\to \quad R_{\mathfrak{S}_{i+1}} \\ \mathring{\rho} \quad &\mapsto \quad \begin{cases} \mathring{\rho} & : \text{ falls } \rho \preccurlyeq \tau \in \mathfrak{S}_{i+1} \\ \mathring{\delta} & : \text{ falls } \mathring{\rho} \subseteq \mathring{\delta},\ \ \delta \preccurlyeq \sigma \end{cases} \end{aligned}$$

Wohldefiniertheit: Es ist nur etwas zu zeigen, falls $\rho \preccurlyeq \tau$ mit $\tau \notin \mathfrak{S}_{i+1}$ gilt. Also sei $\rho \preccurlyeq \tau$ mit $\tau \notin \mathfrak{S}_{i+1}$ gegeben. Nach Definition von $\mathfrak{S}_{i+1}$ ist $\tau \subseteq \sigma$. Lemma 2.6.7 liefert $\rho \subseteq \sigma$. Nach Folgerung 2.1.31 existiert genau eine Seite $\delta \preccurlyeq \sigma$ mit $\mathring{\rho} \subseteq \mathring{\delta}$.

Surjektivität: Es ist lediglich zu zeigen, dass für alle $\delta \preccurlyeq \sigma$ ein Urbild existiert. Es sei dazu eine Seite δ von σ gegeben. Mit Bemerkung 2.6.5 erhalten wir $\rho_1 \cap \mathring{\delta} \neq \emptyset$ oder $\tau_2 \cap \mathring{\delta} \neq \emptyset$

Aus $\rho_1 \cap \mathring{\delta} \neq \emptyset$ folgt, dass es eine Seite $\delta_1 \preccurlyeq \rho_1$ gibt mit $\mathring{\delta}_1 \cap \mathring{\delta} \neq \emptyset$. Mit Lemma 2.6.7 gilt $\delta_1 \subseteq \rho_1 \subseteq \sigma$. Folgerung 2.1.32 liefert $\mathring{\delta}_1 \subseteq \mathring{\delta}$. Nach Lemma 2.1.18 gilt $\delta_1 \preccurlyeq \tau_1$.

Aus $\tau_2 \cap \mathring{\delta} \neq \emptyset$ folgt, dass es eine Seite $\delta_2 \preccurlyeq \tau_2$ mit $\mathring{\delta}_2 \cap \mathring{\delta} \neq \emptyset$ gibt. Mit Lemma 2.6.7 gilt $\delta_2 \subseteq \sigma$. Somit liefert Folgerung 2.1.32, dass $\mathring{\delta}_2 \subseteq \mathring{\delta}$ gilt.

Für die Aussage $\#\mathfrak{S}_{i+1} < \#\mathfrak{S}_i$, reicht es zu zeigen, dass ein $\mathring{\delta} \in R_{\mathfrak{S}_{i+1}}$ mit zwei Urbildern bezüglich $\mathcal{G}$ existiert. Wir wissen, dass $\emptyset \neq \tau_2 \cap \mathring{\rho}_1 \subseteq \sigma$ gilt. Somit existiert ein $\delta \preccurlyeq \sigma$ mit $\mathring{\delta} \cap \tau_2 \cap \mathring{\rho}_1 \neq \emptyset$. Da $\rho_1 \subseteq \sigma$ gilt, folgt mit Folgerung 2.1.32 $\mathring{\rho}_1 \subseteq \mathring{\delta}$. Aus

$\mathring{\delta}\cap\tau_2\cap\mathring{\rho}_1 \neq \emptyset$ folgt weiter, dass ein $\delta_2 \preccurlyeq \tau_2$ existiert mit $\mathring{\delta}\cap\mathring{\delta}_2 \neq \emptyset$. Mit Folgerung 2.1.32 erhalten wir $\mathring{\delta}_2 \subseteq \mathring{\delta}$. Es muss gezeigt werden, dass $\mathring{\delta}_2 \neq \mathring{\rho}_1$ gilt.

Angenommen es gelte $\mathring{\delta}_2 = \mathring{\rho}_1$. Dann gilt $\delta_2' = \rho_1'$. Nach Erinnerung 2.3.20 gilt $\rho_1' \in \mathcal{F}_{\tau_1'\cap\tau_2'}$. Lemma 2.3.21 liefert $\Sigma_{\tau_1\cap\tau_2} \sqsubseteq \mathcal{F}_{\tau_1'\cap\tau_2'}$. Es sei $\rho \in \Sigma_{\tau_1\cap\tau_2}$ mit $\rho \subseteq \mathring{\rho}_1$. Da $\mathring{\rho} \subseteq \mathring{\rho}_1$ gilt, folgt mit Lemma 2.3.7 $\mathring{\rho} = \mathring{\rho}_1 = \mathring{\delta}_2$. Nach **subroutine k-Quot** gilt für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \widetilde{\mathfrak{S}}_i$: Es gibt kein $\gamma \in \Sigma_{\tau_1\cap\tau_2}$ mit $\gamma \not\preccurlyeq \gamma_1$ und $\mathring{\gamma} = \mathring{\gamma}_1 = \mathring{\gamma}_2$ oder $\gamma \not\preccurlyeq \gamma_2$ und $\mathring{\gamma} = \mathring{\gamma}_1 = \mathring{\gamma}_2$, wobei $\gamma_1 \preccurlyeq \tau_1$ sowie $\gamma_2 \preccurlyeq \tau_2$. Somit hätten wir einen Widerspruch. $\square$

Bemerkung 2.7.15. Mit Bemerkung 2.6.6 ist für jedes 1-volle System von k-Kegeln $(N, \mathfrak{S})$ der k-Fächer $\Delta :=$ **k-Algo($\mathfrak{S}$)** 1-voll.

Beispiele 2.7.16. Wir betrachten folgende Beispiele:

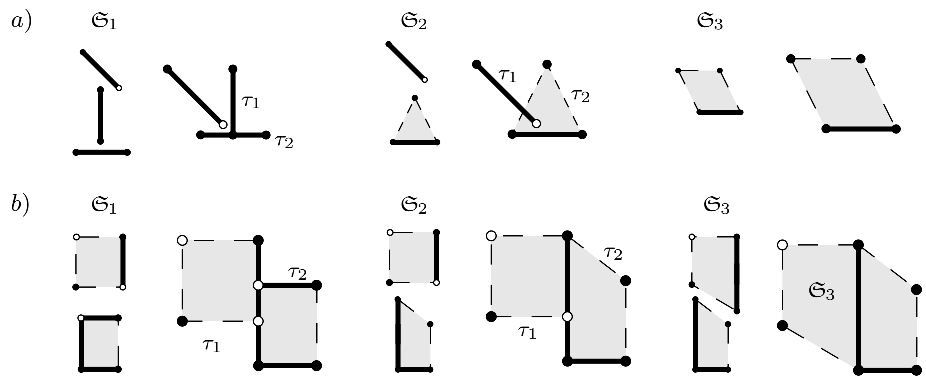

Abbildung 15

Bemerkung 2.7.17. Die Algorithmen **subroutine k-Quot** und **k-Quot** sind im Schleifendurchlauf fast identisch. Der Algorithmus **subroutine k-Quot** bearbeitet Familien von k-Kegeln und der Algorithmus **k-Quot** bearbeitet Systeme von k-Kegeln. Diese Aufteilung garantiert, dass der Algorithmus **k-Quot** terminiert.

Beispiel 2.7.18. Im Allgemeinen liefern **k-Quot** und **Quot** unterschiedliche k-Fächer. In Abbildung 16 (a) sind die Schritte des Algorithmus **k-Quot** und in Abbildung 16 (b) die Schritte vom Algorithmus **Quot** dargestellt.

Bemerkung 2.7.19. Es seien $(N, \mathfrak{S})$ und $(M, \mathfrak{R})$ Systeme von k-Kegeln.

(i) Dann ist $\Sigma_{\mathfrak{S}} := \{\tau;\ \tau \preccurlyeq \sigma,\ \sigma \in \mathfrak{S}\}$ genau dann ein k-Fächer, wenn für alle $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{S}$ gilt:
$$\Sigma_{\tau_1\cap\tau_2} \preccurlyeq \mathcal{F}_{\tau_1}, \mathcal{F}_{\tau_2}.$$
(ii) Sind $\Sigma_{\mathfrak{S}}$ und $\Delta_{\mathfrak{R}}$ k-Fächer zu $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{R}$ in $N_{\mathbb{Q}}$ bzw. $M_{\mathbb{Q}}$ und $F\colon (N, \mathfrak{S}) \to (M, \mathfrak{R})$ ein Morphismus, dann ist $F\colon (N, \Sigma_{\mathfrak{S}}) \to (M, \Delta_{\mathfrak{R}})$ ein Morphismus.
(iii) Ist $\Delta_{\mathfrak{R}}$ ein k-Fächer in $M_{\mathbb{Q}}$ und $F\colon (N, \mathfrak{S}) \to (M, \mathfrak{R})$ ein Morphismus, dann ist $F\colon (N, \mathfrak{S}) \to (M, \Delta_{\mathfrak{R}})$ ein Morphismus.

Definition 2.7.20. Es seien N ein Gitter, S eine endliche Familie von k-Kegeln in $N_{\mathbb{Q}}$ und (M, Δ) ein k-Gitterfächer. Ein *Morphismus von* (N, S) *nach* (M, Δ) ist eine Gittermorphismus $F\colon N \to M$, sodass für jedes $\sigma \in S$ ein $\tau \in \Delta$ existiert mit $F(\sigma) \subseteq \tau$.

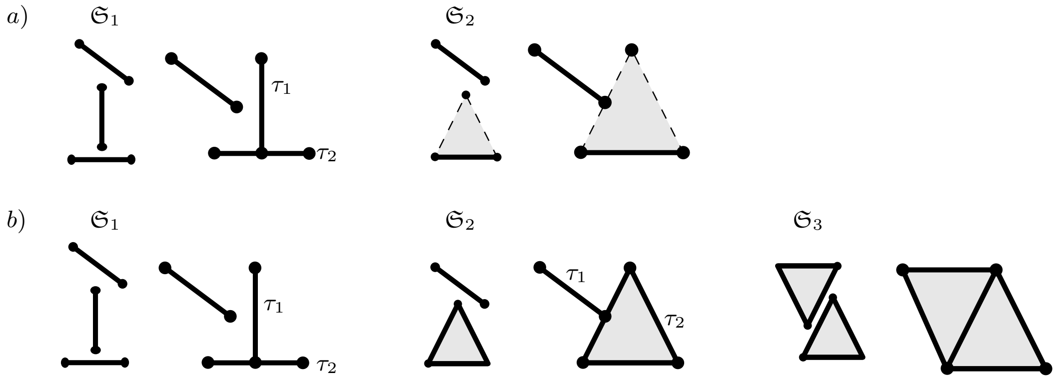

Abbildung 16

Lemma 2.7.21. *Es seien N ein Gitter, S eine endliche Familie von k-Kegeln in $N_{\mathbb{Q}}$, (M, Δ) ein k-Gitterfächer und $F\colon (N, S) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus. Weiter sei $\widetilde{S} :=$* **subroutine k-Quot**(S). *Dann ist $F\colon (N, \widetilde{S}) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus.*

Beweis. Es seien S_i die endlichen Familien von k-Kegeln die im i-ten Schleifendurchlauf des Algorithmus **subroutine k-Quot** enstehen, wobei $S_0 = S$. Es reicht zu zeigen, falls $F\colon (N, S_i) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus ist, dann ist $F\colon (N, S_{i+1}) \to (M, \Delta)$ ebenfalls ein Morphismus. Also sei $F\colon (N, S_i) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus. Weiter seien $\tau_1, \tau_2 \in S_i$ und $\rho_2 \preccurlyeq \tau_2$ gegeben, wobei τ_1 durch den k-Kegel $\widetilde{\tau}_1 := |\text{k-hull}(\tau_1, \rho_2)|$ ersetzt wird, das heißt $S_{i+1} \;=\; (S_i \setminus \tau_1) \cup \widetilde{\tau}_1$. Da $F\colon (N, S_i) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus ist, existieren $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ mit $F(\tau_1) \subseteq \delta_1$ und $F(\tau_2) \subseteq \delta_2$. Des Weitern gilt $\emptyset \neq \tau_1 \cap \mathring{\rho}_2$. Mit Lemma 2.4.11 erhalten wir $F(\widetilde{\tau}_1) \subseteq \delta_1$. Somit ist $F\colon (N, S_{i+1}) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus. □

Bemerkung 2.7.22. Es sei N ein Gitter, S eine endliche Familie von k-Kegeln in $N_{\mathbb{Q}}$ und (M, Δ) ein k-Gitterfächer. Ist $F\colon (N, S) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus, so ist $F\colon (N, \mathfrak{S}) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus von Systemen von k-Kegeln, wobei $\mathfrak{S}$ das zu S gehörige System von k-Kegeln bezeichnet.

Satz 2.7.23. *Es sei $(N, \mathfrak{S})$ ein System von k-Kegeln und $L \subseteq N$ ein primitives Teilgitter. Dann liefert der Algorithmus* **k-Quot** *den k-Quotientenfächer zu $(N, \mathfrak{S})$ bezüglich L in der Kategorie der k-Fächer.*

Beweis. Für alle k-Kegel σ, τ, ρ und δ bezeichnen wir die jeweiligen Abschlüsse mit σ', τ', ρ' bzw. δ'.

Wir setzen $N_1 := N/L$, $P_1\colon N \to N_1$ und

$$\mathfrak{S}_1 \quad := \quad \{P_1^{\mathrm{c}}(\sigma);\ \sigma \in \mathfrak{S},\ F^{\mathrm{c}}(\sigma) \text{ maximal bezüglich Inklusion}\}\,.$$

Das Paar $(N_1, \mathfrak{S}_1)$ ist ein System von k-Kegeln und $P_1\colon (N, \mathfrak{S}) \to (N_1, \mathfrak{S}_1)$ ein Morphismus von System von k-Kegeln. Der Algorithmus **k-Quot** liefert ein System von k-Kegeln $(N_1, \mathfrak{S}_m)$, sodass $\Sigma_1 := \Sigma_{\mathfrak{S}_m}$ ein k-Fächer in $N_{1_{\mathbb{Q}}}$ ist. Es seien $\mathfrak{S}_i$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{S}}_i$ die Systeme von k-Kegeln im i-ten Schleifendurchlauf des Algorithmus **k-Quot**. Nach der Konstruktion der $\mathfrak{S}_i$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{S}}_i$ und Bemerkung 2.7.19 (ii) ist

$$P_1\colon (N, \mathfrak{S}) \;\to\; (N_1, \Sigma_1)$$

ein Morphismus. Es sei $\sigma_0 \in \Sigma_1$ der minimale k-Kegel. Wir setzen $L_1 := \sigma_0 \cap N_1$, $N_2 := N_1/L_1$ und $P_2 \colon N_1 \to N_2$. Nach Folgerung 2.5.18 ist $\widetilde{\Sigma} := \Sigma_{L_1}$ ein spitzer k-Fächer in $N_{1_{\mathbb{Q}}}/\sigma_0$ und die Abbildung $P_2 \colon (N_1, \Sigma_1) \to (N_2, \widetilde{\Sigma})$ ein Morphismus von k-Gitterfächern. Wir betrachten den Morphismus $P \colon (N, \mathfrak{S}) \to (N_2, \widetilde{\Sigma})$ mit $P := P_2 \circ P_1$ und das primitive Untergitter $\widehat{L} := P_1^{-1}(L_1)$ von N. Es gilt $L \subseteq \widehat{L} \subseteq N$. Wir zeigen nur, dass $P \colon (N, \mathfrak{S}) \to (N_2, \widetilde{\Sigma})$ die Eigenschaft (ii) aus Definition 2.7.7 erfüllt. Es sei dazu ein Morphismus $F \colon (N, \Sigma) \to (M, \Delta)$ von k-Gitterfächern mit Δ spitz und $F(L) = 0$ gegeben. Wir wollen zuerst zeigen, dass

$$P_1 \colon (N, \mathfrak{S}) \ \to \ (N_1, \Sigma_1)$$

die Eigenschaft (ii) aus Definition 2.7.7 erfüllt. Wir wissen, dass ein Morphismus $\widetilde{F}_1 \colon N_1 \to M$ mit $F = \widetilde{F}_1 \circ P_1$ existiert. Nach Konstruktion von $\mathfrak{S}_i$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{S}}_i$ liefert die Abbildung $P_1 \colon N \to N_1$ für jedes i einen Morphismus von Systemen von k-Kegeln $\mathfrak{S}$ nach $\mathfrak{S}_i$. Zu zeigen ist, dass $P_1 \colon (N, \mathfrak{S}) \to (N, \mathfrak{S}_i)$ die Eigenschaft (ii) aus Definition 2.7.7 erfüllt. Es ist klar, dass $F_1 \colon (N_1, \mathfrak{S}_1) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus ist. Wir müssen zeigen: Falls $\widetilde{F}_1 \colon (N_1, \mathfrak{S}_i) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus ist, dann ist $\widetilde{F}_1 \colon (N_1, \mathfrak{S}_{i+1}) \to (M, \Delta)$ ebenfalls ein Morphismus. Also sei $\widetilde{F}_1 \colon (N_1, \mathfrak{S}_i) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus und $S_i :=$ **subroutine k-Quot**$(\mathfrak{S}_i)$. Dann ist $\widetilde{\mathfrak{S}}_i = \mathfrak{S}_{S_i}$. Nach Lemma 2.7.21 ist $\widetilde{F}_1 \colon (N_1, S_i) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus. Somit liefert Bemerkung 2.7.22, dass $\widetilde{F}_1 \colon (N_1, \widetilde{\mathfrak{S}}_i) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus ist. Es seien $\tau_1, \tau_2 \in \widetilde{\mathfrak{S}}_i$ und $\rho_2 \preccurlyeq \tau_2$ gegeben, wobei τ_1 durch den k-Kegel $\sigma := |\text{k-hull}(\tau_1, \rho_2)|$ ersetzt wird, das heißt

$$\mathfrak{S}_{i+1} \quad = \quad \widetilde{\mathfrak{S}}_i \setminus \left\{ \tau \in \widetilde{\mathfrak{S}}_i;\ \tau \subseteq \sigma \right\} \ \cup \ \{\sigma\}.$$

Da $\widetilde{F}_1 \colon (N_1, \widetilde{\mathfrak{S}}_i) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus ist, existieren $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ mit $F(\tau_1) \subseteq \delta_1$ und $F(\tau_2) \subseteq \delta_2$. Des Weiteren gilt $\emptyset \neq \tau_1 \cap \mathring{\rho}_2$. Nach Lemma 2.6.14 gilt $F^{\mathrm{c}}(\sigma) \subseteq \delta_1$. Mit Lemma 2.4.11 erhalten wir $F(\sigma) \subseteq \delta_1$. Also ist $\widetilde{F}_1 \colon (N_1, \mathfrak{S}_{i+1}) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus.

Mit Bemerkung 2.7.19 (ii) erhalten wir weiter, dass $\widetilde{F}_1 \colon (N, \Sigma_1) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus von k-Gitterfächern mit $F = \widetilde{F}_1 \circ P_1$ ist.

Da Δ spitz ist, erhalten wir mit Lemma 2.4.16, dass $\widetilde{F}_1(\sigma_0) = 0$ gilt. Also existiert ein Morpismus $\widetilde{F}_2 \colon N_2 \to M$ mit $\widetilde{F}_1 = \widetilde{F}_2 \circ P_2$ und wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P_1"'] \arrow[dd, bend right, "P"'] & M \\
N_1 \arrow[ur, "\widetilde{F}_1"'] \arrow[d, "P_2"'] & \\
N_2 \arrow[uur, bend right, "\widetilde{F}_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $\widetilde{F}_2 \colon (N_2, \widetilde{\Sigma}) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus von k-Gitterkegeln. Außerdem gilt

$$F \quad = \quad \widetilde{F}_1 \ \circ \ P_1 \quad = \quad \widetilde{F}_2 \ \circ \ P_2 \ \circ \ P_1 \quad = \quad \widetilde{F}_2 \ \circ \ P.$$

$\square$

3. Torische konstruierbare Räume

3.1. T-Räume.

Wir werden den Begriff der T-Varietät verallgemeinern und einige wichtige Grundlagen beweisen. Für die Grundlagen der torischen Geometrie, die hier vorausgesetzt werden, sei auf die Bücher [10], [11] und [20] verwiesen.

Erinnerung 3.1.1. Ein *(algebraischer) Torus* ist eine algebraische Gruppe, die isomorph zu einem $(\mathbb{K}^*)^n$ ist. Ein Morphismus von Tori T und T' ist ein Morphismus $\varphi\colon T \to T'$ algebraischer Gruppen. Ein Charakter χ auf T ist ein Morphismus $\chi\colon T \to \mathbb{K}^*$ von Tori. Mit $\mathbb{X}(T)$ bezeichnen wir die Charaktergruppe von T. Jeder Morphismus $F\colon N \to M$ von Gittern liefert einen Morphismus der zugehörigen Gruppenalgebren $\psi_F\colon \mathbb{K}[N] \to \mathbb{K}[M]$, $\psi_F(\chi^u) \mapsto \chi^{F(u)}$.

Erinnerung 3.1.2. Die folgenden Funktoren sind kontravariant und wesentlich invers zueinander:

$$\begin{aligned} \{\text{Kategorie der Tori}\} &\to \{\text{Kategorie der Gitter}\} \\ T &\mapsto \mathbb{X}(T) \\ \varphi &\mapsto \varphi^*. \\ \{\text{Kategorie der Tori}\} &\leftarrow \{\text{Kategorie der Gitter}\} \\ \operatorname{Spec}(\mathbb{K}[N]) &\leftarrow\!\shortmid N \\ \operatorname{Spec}(\psi_F) &\leftarrow\!\shortmid F. \end{aligned}$$

Definition 3.1.3 (Kategorie der T-Räume)**.**

(i) Ein T-*Raum* ist ein irreduzibler k-Raum X mit einer Wirkung eines Torus T, die durch einen Morphismus $T \times X \to X$, $(t, x) \mapsto t \cdot x$ von k-Räumen gegeben ist.
(ii) Ein Morphismus von T_i-Räumen X_i ist ein Paar $(\varphi, \widetilde{\varphi})$, wobei $\varphi\colon X_1 \to X_2$ ein Morphismus von k-Räumen ist und $\widetilde{\varphi}\colon T_1 \to T_2$ ein Morphismus von Tori, sodass $\varphi(tx) = \widetilde{\varphi}(t)\varphi(x)$ gilt.

Bemerkung 3.1.4. Es sei X ein T-Raum und $Y \subseteq X$ ein T-invarianter irreduzibler konstruierbarer Unterraum. Dann ist Y ein T-Raum.

Beispiele 3.1.5. Wir betrachten folgende Beispiele:

(i) Der k-Raum $X := (\mathbb{K}^*)^2 \cup \{(0,0)\}$ ist ein quasiaffiner $(\mathbb{K}^*)^2$-Raum.
(ii) Wir betrachten die $(\mathbb{K}^*)^3$-Räume $V_1 := (\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^*) \setminus (\mathbb{K}^* \times \{0\} \times \mathbb{K}^*)$ und $V_2 := \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^*$. Weiter betrachten wir den Isomorphismus
$$\psi\colon (\mathbb{K}^*)^3 \to (\mathbb{K}^*)^3, \qquad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_2/x_3, x_1)$$
und setzen $Y := V_1 \cup_\psi V_2$. Dann ist Y ein $(\mathbb{K}^*)^3$-Raum.

Bemerkung 3.1.6. Für jedes $t \in T$ haben wir einen Isomorphismus $\mathcal{T}_t\colon X \to X$, $x \mapsto t \cdot x$.

Bemerkung 3.1.7. Es sei X ein T-Raum. Für jedes $x \in X^{\mathrm{var}}$ und jedes $t \in T$ gilt $t \cdot x \in X^{\mathrm{var}}$. Somit ist X^{var} eine T-Prävarietät.

Vereinbarung 3.1.8. Es seien X ein T-Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge von X. Mit $\overline{Y}$ bzw. $\overline{Y}^X$ bezeichnen wir den Abschluss von Y in X.

Lemma 3.1.9. *Es sei X ein T-Raum und $Y \subseteq X$ eine T-invariante Teilmenge. Dann ist der Abschluss $\overline{Y}$ von Y in X ebenfalls T-invariant.*

Beweis. Nach Bemerkung 3.1.6 gilt für jedes $t \in T$:

$$t \cdot \overline{Y} \quad = \quad \mathcal{T}_t(\overline{Y}) \quad = \quad \overline{\mathcal{T}_t(Y)} \quad = \quad \overline{t \cdot Y} \quad = \quad \overline{Y}.$$

□

Definition 3.1.10. Es sei X ein T-Raum. Die Menge der Bahnen von X bezeichnen wir mit $\mathrm{Orb}(X) := \{Tx;\ x \in X\}$.

Lemma 3.1.11. *Es seien X ein T-Raum und $Tx \in \mathrm{Orb}(X)$ eine Bahn. Dann ist Tx irreduzibel und lokal abgeschlossen.*

Beweis. Für den Morphismus $\pi_x \colon T \to X$, $t \mapsto tx$ gilt $\pi_x(T) = Tx$. Somit ist Tx irreduzibel, da T irreduzibel ist. Außerdem folgt, dass Tx konstruierbar in X ist. Insbesondere ist Tx konstruierbar und dicht in $\overline{Tx}$. Folglich gibt es eine Teilmenge $U \subseteq Tx$, die offen und dicht in $\overline{Tx}$ ist. Nach Bemerkung 3.1.6 ist $t \cdot U$ offen in $\overline{Tx}$. Somit ist Tx offen in $\overline{Tx}$, da folgende Gleichung gilt:

$$Tx \quad = \quad \bigcup_{t \in T} t \cdot U.$$

□

Folgerung 3.1.12. *Es seien X ein T-Raum und $A, B \in \mathrm{Orb}(X)$ Bahnen von X mit $\overline{A} = \overline{B}$. Dann gilt $A = B$.*

Satz 3.1.13. *Es sei X' eine T-Prävarietät. Dann besitzt X' einen offenen affinen T-invarianten Unterraum Y'.*

Beweis. Mit Bemerkung 3.1.6 ist die Menge X'^{nor} T-invariant. Somit folgt die Behauptung aus [4, Proposition 1.3]. □

Folgerung 3.1.14. *Es sei X ein T-Raum. Dann existiert eine offene affine T-invariante Teilmenge $U \subseteq X$.*

Beweis. Folgt aus Bemerkung 3.1.7 und Satz 3.1.13. □

Definition 3.1.15. Es sei X ein T-Raum. Ein $f \in \mathcal{O}_X(X)$ heißt *semi-invariant* zu $\chi \in \mathbb{X}(T)$, falls stets $f(tx) = \chi(t)f(x)$ gilt. Der zu $\chi \in \mathbb{X}(T)$ gehörige *Eigenraum* ist der $\mathbb{K}$-Untervektorraum

$$\mathcal{O}_X(X)_\chi \quad := \quad \{f \in \mathcal{O}_X(X);\ f \text{ semi-invariant zu } \chi\} \ \subseteq \ \mathcal{O}_X(X).$$

Erinnerung 3.1.16. Es seien A eine Algebra und N ein Monoid. Eine *N-Graduierung von A* ist eine Zerlegung

$$A \quad = \quad \bigoplus_{u \in N} A_u$$

mit $\mathbb{K}$-Untervektorräumen $A_u \subseteq A$, sodass $A_u A_{u'} \subseteq A_{u+u'}$ für je zwei Elemente $u, u' \in A$ gilt. Ein Morphismus von einer N-graduierten Algebra A in eine M-graduierte Algebra B ist ein Paar (α, F), bestehend aus Homomorphismen $\alpha\colon A \to B$ und $F\colon N \to M$, sodass $\alpha(A_u) \subseteq B_{F(u)}$ für jedes $u \in N$ gilt.

Erinnerung 3.1.17. Wir haben zueinander wesentlich inverse kontravariante Funktoren

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Kategorie der affinen} \\ \text{Varietäten mit Toruswirkung} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \text{Kategorie der gitter-} \\ \text{graduierten affinen Algebren} \end{array} \right\}$$

$$X' \mapsto \mathcal{O}_X(X') = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{X}(T)} \mathcal{O}_{X'}(X')_\chi$$

$$(\varphi, \widetilde{\varphi}) \mapsto (\varphi^*, \widetilde{\varphi}^*).$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Kategorie der affinen} \\ \text{Varietäten mit Toruswirkung} \end{array} \right\} \leftarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Kategorie der gitter-} \\ \text{graduierten affinen Algebren} \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{Spec}(A) \hookleftarrow A$$

$$(\mathrm{Spec}(\alpha), \mathrm{Spec}(\psi_F)) \hookleftarrow (\alpha, F).$$

Satz 3.1.18. *Es sei X ein T-Raum. Dann hat man eine Graduierung*

$$\mathcal{O}_X(X) \quad = \quad \bigoplus_{\chi \in \mathbb{X}(T)} \mathcal{O}_X(X)_\chi.$$

Beweis. Nach Folgerung 3.1.14 existiert eine affine T-Varietät $U \subseteq X$. Die Algebra $\mathcal{O}_U(U)$ besitzt nach Erinnerung 3.1.17 solch eine Graduierung. Somit hat jedes $f \in \mathcal{O}_X(X) \subseteq \mathcal{O}_U(U)$ eine Darstellung

$$f \quad = \quad \sum f_\chi$$

mit $f_\chi \in \mathcal{O}_U(U)_\chi$. Zu zeigen ist, dass $f_\chi \in \mathcal{O}_X(X)_\chi$ gilt. Wir betrachten den T-invarianten $\mathbb{K}$-Vektorraum

$$V \quad := \quad < T \cdot f > \subseteq \; \mathcal{O}_X(X) \; \subseteq \; \mathcal{O}_U(U).$$

Der Unterraum V ist endlich erzeugt, da U eine affine T-Varietät ist. Also gibt es eine Darstellung

$$f \quad = \quad \sum f_\eta,$$

wobei $f_\eta \in \mathcal{O}_X(X)$ semi-invariant ist. Da beide Darstellungen eindeutig sind, gilt $f_\chi \in \mathcal{O}_X(X)$. □

Lemma 3.1.19. *Es seien X ein T_X-Raum, Y ein T_Y-Raum und $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon X \to Y$ ein Morphismus. Dann ist die Abbildung $(\varphi^*, \widetilde{\varphi}^*)\colon \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_Y(Y)$ ein Morphismus von graduierten $\mathbb{K}$-Algebren.*

Beweis. Wir wissen schon, dass $\varphi^*\colon \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ ein Morphismus von $\mathbb{K}$-Algebren ist und $\widetilde{\varphi}^*\colon \mathbb{X}(T_Y) \to \mathbb{X}(T_X)$ ein Morphismus von Monoiden ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\varphi^*(\mathcal{O}_Y(Y)_\chi) \subseteq \mathcal{O}_X(X)_{\widetilde{\varphi}^*(\chi)}$ gilt für alle $\chi \in \mathbb{X}(T_Y)$. Es sei dazu $f \in \mathcal{O}_Y(Y)_\chi$. Dann gilt für alle $t \in T_X$ und $x \in X$:

$$\begin{aligned} \varphi^*(f)(tx) \quad = \quad f(\varphi(tx)) \quad = \quad f(\widetilde{\varphi}(t)\varphi(x)) \quad &= \quad \chi(\widetilde{\varphi}(t))f(\varphi(x)) \\ &= \quad \widetilde{\varphi}^*(\chi)(t)\varphi^*(f)(x). \end{aligned}$$

□

Satz 3.1.20. *Es seien X ein T_X-Raum und Y' eine affine $T_{Y'}$-Varietät. Dann hat man eine Bijektion*

$$\iota\colon \operatorname{Mor}(X,Y') \ \to \ \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_{Y'}(Y'),\mathcal{O}_X(X)), \qquad (\varphi,\widetilde{\varphi}) \ \mapsto \ (\varphi^*,\widetilde{\varphi}^*).$$

Beweis. Es ist nur zur Surjektivität von ι etwas zu zeigen. Es sei dazu ein Morphismus $(\alpha,\widetilde{\alpha})\colon \mathcal{O}_{Y'}(Y') \to \mathcal{O}_X(X)$ von graduierten $\mathbb{K}$-Algebren gegeben. Lemma 1.2.1 liefert einen Morhpismus $\varphi\colon X \to Y$ mit $\varphi^* = \alpha$. Außerdem erhalten wir mit Erinnerung 3.1.2 einen Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon T_X \to T_{Y'}$ mit $\widetilde{\varphi}^* = \widetilde{\alpha}$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\varphi(tx) = \widetilde{\varphi}(t)\varphi(x)$ gilt. Nach Folgerung 3.1.14 existiert eine offene affine T-invariante Teilmenge $U \subseteq X$. Nach Erinnerung 3.1.17 gilt $\varphi(tx) = \varphi^*(t)\varphi(x)$ für alle $x \in U$ und $t \in T$. Da Y' separiert ist, folgt mit Folgerung 1.5.12, dass $\varphi(tx) = \varphi^*(t)\varphi(x)$ gilt für alle $x \in X$ und $t \in T$. □

Definition 3.1.21. Es seien X und Y zwei T-Räume. Ein Morphismus $\varphi\colon X \to Y$ heißt *äquivariant*, falls $\varphi(tx) = t \cdot \varphi(x)$ gilt.

Bemerkung 3.1.22. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ ein äquivarianter Morphismus von T-Räumen. Ist φ eine Einbettung, so ist $\varphi^{-1}\colon \varphi(X) \to Y$ ebenfalls äquivariant.

Satz 3.1.23. *Es sei X ein normaler quasiaffiner T-Raum. Dann existiert eine äquivariante konstruierbare Einbettung $\iota\colon X \to X'$, wobei X' eine affine T-Varietät ist.*

Beweis. Nach Lemma 1.2.22 gibt es $f_1,\ldots,f_n \in \mathcal{O}_X(X)$, sodass $X = \cup X_{f_i}$ und $\mathcal{O}_X(X_{fi}) = \mathcal{O}_X(X)_{f_i}$ endlich erzeugt sind. Es seien $g_{1_i},\ldots,g_{l_i} \in \mathcal{O}(X)$, sodass $g_{1_i}/f^{s_{1_i}},\ldots,g_{l_i}/f^{s_{l_i}}$ die $\mathbb{K}$-Algebra $\mathcal{O}_X(X)_{f_i}$ erzeugen. Für jedes f_i und g_{i_j} haben wir nach Lemma 3.1.18 eine Zerlegung

$$f_i \quad = \sum_{\chi\in\mathbb{X}(T)} f_{i_\chi}, \qquad\qquad g_{i_j} \quad = \sum_{\chi\in\mathbb{X}(T)} g_{i_{j_\chi}}.$$

Es sei $A \subseteq \mathcal{O}_X(X)$ die von f_{i_χ} und $g_{i_{j_\chi}}$ erzeugte Unteralgebra. Dann ist A affin und besitzt eine Graduierung durch $\mathbb{X}(T)$. Somit ist $\operatorname{Spec}(A)$ eine affine T-Varietät. Aus $A \subseteq \mathcal{O}_X(X)$ folgt mit Satz 3.1.20, dass es einen äquivarianten Morphismus $\iota\colon X \to \operatorname{Spec}(A)$ gibt. Noch zu zeigen ist, dass ι eine Einbettung ist. Es gilt $A_{f_i} = \mathcal{O}_X(X)_{f_i}$. Somit folgt mit Lemma 1.2.16, dass $\iota_{|X_{f_i}}\colon X_{f_i} \to \operatorname{Spec}(A_{f_i})$ eine Einbettung ist. □

Satz 3.1.24. *Es seien X' eine $T_{X'}$-Prävarietät, Y' eine $T_{Y'}$-Varietät, $X \sqsubseteq X'$ eine dichte $T_{X'}$-invariante konstruierbare Teilmenge und $(\varphi,\widetilde{\varphi})\colon X \to Y'$ ein Morphismus. Dann gibt es eine offene $T_{X'}$-invariante Menge $U' \subseteq X'$ und einen Morphismus $(\varphi',\widetilde{\varphi})\colon U' \to Y'$ mit $X \subseteq U'$ sowie $(\varphi',\widetilde{\varphi})_{|X} = (\varphi,\widetilde{\varphi})$.*

Beweis. Nach Satz 1.2.8 existiert eine offene Menge $X \subseteq U' \subseteq X'$ und ein Morphismus $\varphi'\colon U' \to Y'$ mit $\varphi'_{|X} = \varphi$. Wir wählen U' maximal mit dieser Eigenschaft. Dann ist U' $T_{X'}$-invariant.
Denn angenommen, U' ist nicht $T_{X'}$-invariant. Dann setzen wir $U'' := T_{X'}U'$ und

$$\varphi''\colon\ U'' \ \to \ Y', \qquad x \mapsto \begin{cases} \varphi'(x) & : \ \text{für } x \in U' \\ \widetilde{\varphi}(t)\varphi'(x') & : \ \text{für } x = tx'. \end{cases}$$

Dies liefert sofort einen Widerspruch zur Maximalität von U'. Mit Folgerung 1.5.12 gilt $\varphi'(tx) = \widetilde{\varphi}(t)\varphi'(x)$. □

3.2. **Torische k-Räume.**

In diesem Abschnitt werden wir die *torischen k-Räume* einführen, die eine Verallgemeinerung der torischen Prävarietäten sind. Satz 3.2.21 liefert ein Kriterium für die Separiertheit torischer k-Räume in Abhängigkeit der *1-Parametergruppen*, welches für Prävarietäten bereits bekannt ist. Wir werden ab Vereinbarung 3.2.24 nur noch normale torische k-Räume betrachten bzw. voraussetzen, dass torische k-Räume normal sind. Des Weiteren stellen wir fest, dass jeder quasiaffine k-Raum einen *affinen torischen Abschluss* besitzt. Das heißt, es gibt zu jedem quasaffinen torischen k-Raum (X, T, x_0) eine affine Varietät (X', T, x_0) mit $X \sqsubseteq X'$ und $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{X'}(X')$.

Definition 3.2.1 (Kategorie der torischen k-Räume)**.**

(i) Ein *torischer konstruierbarer Raum (torischer k-Raum)* ist ein irreduzibler k-Raum X mit einem Basispunkt $x_0 \in X$, einer Toruswirkung $\mu_X \colon T \times X \to X$ und einer endlichen offenen quasiaffinen T-invarianten Überdeckung $X_1, \ldots, X_n$, sodass $\mu_{x_0} \colon T \to X,\ t \mapsto tx_0$ eine offene Einbettung ist. Wir schreiben auch kurz (X, T, x_0).

(ii) Ein Morphismus torischer k-Räume (X, T_X, x_0) und (Y, T_Y, y_0) ist ein Paar $(\varphi, \widetilde{\varphi})$, wobei $\varphi \colon X \to Y$ ein Morphismus von k-Räumen und $\widetilde{\varphi} \colon T_X \to T_Y$ ein Morphismus von Tori ist, sodass $\varphi(x_0) = y_0$ und $\varphi(tx) = \widetilde{\varphi}(t)\varphi(x)$ gilt.

Bemerkung 3.2.2. Die Kategorie der torischen k-Räume ist eine volle Unterkategorie der T-Räume.

Beispiele 3.2.3. Wir betrachen folgende Beispiele:

(i) Der $(\mathbb{K}^*)^2$-Raum $X := (\mathbb{K}^*)^2 \cup \{(0,0)\}$ ist mit $T := (\mathbb{K}^*)^2$ und $x_0 := (1,1)$ ein quasiaffiner torischer k-Raum.

(ii) Der $(\mathbb{K}^*)^3$-Raum $Y = V_1 \cup_\psi V_2$ aus Beispiel 3.1.5 (ii) ist mit $T := (\mathbb{K}^*)^3$ und $x_0 := (1,1,1)$ ein torischer k-Raum.

Lemma 3.2.4. *Es seien (X, T, x_0) ein torischer k-Raum und $Y \sqsubseteq X$ ein T-invarianter dichter konstruierbarer Unterraum. Dann ist (Y, T, x_0) ein torischer Unterraum von (X, T, x_0), das heißt Y ist ein konstruierbarer Unterraum von X und (Y, T, x_0) ein torischer k-Raum (Bezeichnung $Y \sqsubseteq_T X$).*

Beweis. Es sei $X_1, \ldots, X_n$ eine offene quasiaffine T-invariante Überdeckung von X. Dann ist $X_1 \cap Y, \ldots, X_n \cap Y$ eine offene quasiaffine T-invariante Überdeckung von Y. Da Y ein T-invarianter und dichter Unterraum von X ist, liegt Tx_0 offen in Y. Somit ist (Y, T, x_0) ein torischer k-Raum. □

Folgerung 3.2.5. *Es sei (X, T, x_0) ein torischer k-Raum. Dann ist $(X^{\mathrm{var}}, T, x_0)$ eine torische Prävarietät.*

Beweis. Folgt sofort aus Bemerkung 3.1.7 und Lemma 3.2.4. □

Bemerkung 3.2.6. Es seien (X, T, x_0) ein torischer k-Raum und $Y \subseteq X$ ein konstruierbarer T-invarianter Unterraum von X mit $Tx_0 \subseteq Y$. Dann ist (Y, T, x_0) ein konstruierbarer torischer Unterraum von (X, T, x_0).

Definition 3.2.7. Ein torischer Morphismus $(\varphi, \widetilde{\varphi}) \colon (X, T_X, x_0) \to (Y, T_Y, y_0)$ von torischen k-Räumen heißt *torische Einbettung*, falls $\varphi(X) \sqsubseteq_{T_Y} Y$ ein torischer Unterraum von Y und $(\varphi, \widetilde{\varphi})$ ein torischer Isomorphismus auf $\varphi(X)$ ist.

Satz 3.2.8. *Es sei (X, T, x_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum. Dann existiert eine torische dominante Einbettung $(\varphi, \widetilde{\varphi}) \colon (X, T, x_0) \to (X', T, x_0)$, wobei (X', T, x_0) eine affine torische Varietät ist.*

Beweis. Nach Satz 3.1.23 existiert eine affine T-Varietät X' und eine äquivariante Einbettung $\varphi \colon X \to X'$. Nach Lemma 3.1.9 ist der Abschluss $\overline{\varphi(X)}$ in X' eine affine T-Varietät. Mit Satz 1.3.3 und $T\varphi(x_0) \subseteq \varphi(X)^{\mathrm{var}}$ erhalten wir, dass $T\varphi(x_0)$ offen in $\overline{\varphi(X)}$ ist. Somit ist $(\overline{\varphi(X)}, T, \varphi(x_0))$ eine torische Varietät und $(\varphi, \mathrm{id}) \colon (X, T, x_0) \to (\overline{\varphi(X)}, T, \varphi(x_0))$ eine torische Einbettung. □

Erinnerung 3.2.9. Es sei (X', T, x_0) eine affine torische Varietät. Dann ist die Menge der Bahnen $\mathrm{Orb}(X')$ endlich.

Folgerung 3.2.10. *Es sei (X, T, x_0) ein torischer k-Raum. Dann ist die Menge der Bahnen* $\mathrm{Orb}(X)$ *endlich.*

Beweis. Wir können annehmen, dass X quasiaffin ist. Nach Satz 3.2.8 gilt $X \sqsubseteq_T X'$, wobei (X', T, x_0) eine affine torische Varietät ist. Da $\mathrm{Orb}(X) \subseteq \mathrm{Orb}(X')$ gilt, ist $\mathrm{Orb}(X)$ nach Erinnerung 3.2.9 endlich. □

Definition 3.2.11. Ein torischer k-Raum (X, T, x_0) heißt *attraktiv*, falls X genau eine abgeschlossene Bahn hat.

Lemma 3.2.12. *Es sei (X, T, x_0) ein torischer k-Raum. Für jede Bahn $B \in \mathrm{Orb}(X)$ von X haben wir einen offenen quasiaffinen attraktiven torischen Unterraum*

$$X_B \quad := \bigcup_{A \in \mathrm{Orb}(X),\ B \subseteq \overline{A}} A \quad \subseteq \quad X.$$

Beweis. Offensichtlich ist der Unterraum X_B ein T-invarianter Unterraum von X. Nach Lemma 3.1.11 ist jedes $A \in \mathrm{Orb}(X)$ lokal abgeschlossen in X. Mit Folgerung 3.2.10 ist X_B eine konstruierbare Teilmenge von X. Da Tx_0 dicht in X liegt, gilt $Tx_0 \subseteq X_B$. Somit ist (X_B, T, x_0) nach Bemerkung 3.2.6 ein konstruierbarer torischer Unterraum von (X, T, x_0). Insbesondere ist $X \setminus X_B$ ein T-invarianter Unterraum von X. Mit Folgerung 3.2.10 existieren Bahnen $B_1, \ldots, B_r \in \mathrm{Orb}(X)$, sodass gilt:

$$X \setminus X_B \quad = \quad \bigcup_{i=1}^{r} B_i.$$

Für jede Bahn B_i gilt $\overline{B_i} \subseteq X \setminus X_B$. Somit ist $X \setminus X_B$ abgeschlossen in X und damit X_B offen in X. Für die Abgeschlossenheit von B in X_B reicht es zu zeigen, dass

$$C \quad := \bigcap_{A \in \mathrm{Orb}(X_B)} \overline{A}^{X_B} \quad = \quad B$$

gilt. Jede Bahn $A \in \mathrm{Orb}(X_B)$ erfüllt $B \subseteq \overline{A}^{X_B}$. Somit gilt $B \subseteq C$. Die Menge C ist T-invariant. Für jede Bahn $A \in \mathrm{Orb}(X_B)$ mit $A \subseteq C$ gilt $A \subseteq \overline{B}^{X_B}$. Somit ist

$\overline{A}^{X_B} = \overline{B}^{X_B}$. Mit Lemma 3.1.12 gilt $A = B$. Außerdem gilt für jedes $A \in \mathrm{Orb}(X_B)$ mit $A = \overline{A}^{X_B}$:

$$B \quad \subseteq \quad \overline{A}^{X_B} \quad = \quad A.$$

Somit ist B die einzige Bahn in X_B, die abgeschlossen in X_B ist.

Es sei $U \subseteq X$ ein nichtleerer offener quasiaffiner torischer k-Raum mit $X_B \cap U \neq \emptyset$. Da $X \setminus U$ abgeschlossen ist, gilt $X_B \subseteq U$. Somit ist X_B ein offener quasiaffiner attraktiver torischer Unterraum. □

Folgerung 3.2.13. *Es sei (X, T, x_0) ein torischer k-Raum. Dann existiert eine endliche offene quasiaffine attraktive Überdeckung $X_1, \ldots, X_n$ von X.*

Beweis. Folgt aus Lemma 3.2.12 und Folgerung 3.2.10. □

Lemma 3.2.14. *Es seien (X, T_X, x_0), (Y, T_Y, y_0) torische k-Räume, $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon X \to Y$ ein torischer Morphismus und $A \in \mathrm{Orb}(X)$, $B \in \mathrm{Orb}(Y)$ Bahnen. Dann gilt*

$$\varphi(X_A) \ \subseteq\ Y_B \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi(A) \ \subseteq\ Y_B$$

Beweis. Es ist nur zur Implikation „$\Leftarrow$" etwas zu zeigen. Dafür gelte $\varphi(A) \subseteq Y_B$. Nach Lemma 3.2.12 ist $B \subseteq \overline{T_Y \cdot \varphi(A)}$. Es sei eine Bahn $A' \in \mathrm{Orb}(X)$ mit $A \subseteq \overline{A'}$ gegeben. Dann gilt $\varphi(A) \subseteq \overline{\varphi(A')}$. Somit ist B im Abschluss von $T_Y \cdot \varphi(A')$ enthalten. Folglich gilt $\varphi(A) \subseteq Y_B$ und damit $f(X_A) \subseteq Y_B$. □

Erinnerung 3.2.15. Es sei T ein Torus. Eine *Einparametergruppe (1-PG) in T* ist ein Morphismus $\lambda\colon \mathbb{K}^* \to T$ von Tori. Die Menge der 1-PG von T bezeichnen wir mit $\Lambda(T)$. Es sei N ein Gitter. Das duale Gitter $N^* := \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$ von N ist wieder ein Gitter. Zu jedem Gittermorphismus $F\colon N \to M$ ist die Abbildung $F^*\colon M^* \to N^*$, $f \mapsto f \circ F$ ein Gittermorphismus. Es sei $\widetilde{\varphi}\colon T \to T'$ ein Morphismus von Tori. Dann ist $\widetilde{\varphi}_*\colon \Lambda(T) \to \Lambda(T')$, $\lambda \mapsto \widetilde{\varphi} \circ \lambda$. ein Morphimus von Gittern. Das duale Gitter von $\Lambda(T)$ ist $\mathbb{X}(T)$.

Erinnerung 3.2.16. Wir haben zueinander wesentlich inverse kovariante Funktoren:

$$\begin{aligned}
\{\text{Kategorie der Tori}\} &\to \{\text{Kategorie der Gitter}\}\\
T &\mapsto \Lambda(T)\\
\varphi &\mapsto \varphi_*.\\
\{\text{Kategorie der Tori}\} &\leftarrow \{\text{Kategorie der Gitter}\}\\
\mathrm{Spec}(\mathbb{K}[N^*]) &\leftarrow\!\shortmid N\\
\mathrm{Spec}(\psi_{F^*}) &\leftarrow\!\shortmid F.
\end{aligned}$$

Definition 3.2.17. Es sei (X, T, x_0) ein torischer k-Raum und $\lambda \in \Lambda(T)$ eine 1-PG. Wir nennen λ *konvergent in X*, falls $\lambda_{x_0}\colon \mathbb{K}^* \to X$, $t \mapsto \lambda(t)x_0$ eine Fortsetzung zu einem Morphismus $\lambda'_{x_0}\colon \mathbb{K} \to X$ besitzt. Wir schreiben $\lim_{t\to 0}(\lambda(t)x_0) := \lambda'_{x_0}(0)$.

Lemma 3.2.18. *Es sei $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon (X, T_X, x_0) \to (Y, T_Y, y_0)$ ein Morphismus von torischen k-Räumen und $\lambda \in \Lambda(T_X)$ eine konvergente 1-PG in X. Dann ist $\widetilde{\varphi}(\lambda)$ eine konvergente 1-PG in Y.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Gleichung:

$$\begin{aligned}(\widetilde{\varphi}_*(\lambda))(t)y_0 \;=\; \widetilde{\varphi}(\lambda(t))y_0 \;=\; \widetilde{\varphi}(\lambda(t))\varphi(x_0) &= \varphi(\lambda(t)x_0)\\ &= (\varphi\circ\lambda_{x_0})(t).\end{aligned}$$

□

Erinnerung 3.2.19. Es sei (X', T, x_0) eine affine torische Varietät. Zu jedem $x \in X'$ gibt es ein $t \in T$ und ein $\lambda \in \Lambda(T)$, sodass $x = t \cdot \lim_{t'\to 0}(\lambda(t')x_0)$ gilt.

Lemma 3.2.20. *Es sei (X, T, x_0) ein torischer k-Raum. Zu jedem $x \in X$ existiert ein $t \in T$ und ein $\lambda \in \Lambda(T)$, sodass $x = t \cdot \lim_{t'\to 0}(\lambda(t')x_0)$ gilt.*

Beweis. Da die Aussage lokaler Natur ist, können wir annehmen, dass X quasiaffin ist. Nach Erinnerung 3.2.8 gibt es eine affine torische Varietät (X', T, x_0) mit $X \sqsubseteq_T X'$. Die Behauptung folgt mit Erinnerung 3.2.19. □

Satz 3.2.21. *Es sei (X, T, x_0) ein torischer k-Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Für jede 1-PG $\lambda \in \Lambda(T)$ hat der Morphismus $\lambda_{x_0}\colon \mathbb{K}^* \to X$, $t \mapsto \lambda(t)x_0$ höchstens eine Fortsetzung.*
(ii) *Der k-Raum X ist separiert.*

Beweis. Zur Implikation „(i)⇒(ii)": Die Gruppenwirkung $\mu_X\colon T \times X \to X$ liefert eine Gruppenwirkung auf $X \times X$:

$$\mu_{X\times X}\colon T\times X\times X \;\to\; X\times X \qquad (t,x_1,x_2) \;\mapsto (tx_1,tx_2).$$

Die Diagonale $\Delta_X := \{(x,x);\ x\in X\}$ ist ein T-invarianter Unterraum von $X\times X$. Mit Lemma 3.1.9 ist $\overline{\Delta_X}$ eine T-invarianter Unterraum von $X\times X$. Wir wollen zeigen, dass $(\overline{\Delta_X}, T, (x_0,x_0))$ ein torischer k-Raum ist. Die Diagonalabbildung

$$\Delta\colon X\to\Delta_X, \qquad x\mapsto(x,x)$$

ist ein Morphismus. Folglich ist $\overline{\Delta_X}$ irreduzibel. Weiter liegt $T(x_0,x_0) = \Delta_X \cap Tx_0 \times Tx_0$ offen in Δ_X. Nach Bemerkung 1.5.7 (i) ist Δ_X lokal abgeschlossen in $X\times X$ und somit ist $T(x_0,x_0)$ offen in $\overline{\Delta_X}$. Es sei $X_1,\dots,X_n$ eine endliche offene quasiaffine T-invariante Überdeckung von X. Dann ist $\Delta_i = (X_i \times X_i)\cap\overline{\Delta_X}$ ein offener quasiaffiner T-invarianter Unterraum von $\overline{\Delta_X}$. Also ist $\Delta_1,\dots,\Delta_n$ eine offene quasiaffine T-invariante Überdeckung von $\overline{\Delta_X}$. Somit ist $(\overline{\Delta_X}, T, (x_0,x_0))$ ein torischer k-Raum. Angenommen, es gelte $\Delta_X \neq \overline{\Delta_X}$. Dann existiert ein $x = (x_1,x_2) \in \overline{\Delta_X}\setminus\Delta_X$. Nach Lemma 3.2.20 gibt es ein $\lambda\in\Lambda(T)$ und ein $t\in T$, sodass gilt:

$$(x_{,1}, x_2) \;=\; t\cdot\lim_{t'\to 0}(\lambda(t')(x_0,x_0)) \;=\; (t\cdot\lim_{t'\to 0}(\lambda(t')x_0), t\cdot\lim_{t'\to 0}(\lambda(t')x_0)).$$

Da $x\notin\Delta_X$ gilt, gibt es keine eindeutige Fortsetzung von $\lambda_{x_0}\colon\mathbb{K}^*\to X$. Somit haben wir einen Widerspruch.

Die Implikation „(ii)⇒(i)" folgt sofort aus Satz 1.5.11. □

Erinnerung 3.2.22. Es seien (X', T, x_0) eine affine torische Varietät und $\nu\colon \widetilde{X}' \to X'$ die Normalisierung von X'. Dann ist (X', T, x_0) eine affine torische Varietät und $(\nu, \mathrm{id})\colon (\widetilde{X}', T, \widetilde{x}_0) \to (X', T, x_0)$ ein torischer Morphismus.

Satz 3.2.23. *Es sei (X, T, x_0) ein normaler quasiaffiner torischer k-Raum. Dann existiert eine torische Einbettung $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon (X, T, x_0) \to (X', T, x_0)$, wobei (X', T, x_0) eine normale affine torische Varietät ist.*

Beweis. Nach Lemma 3.2.8 können wir annehmen, dass $X \sqsubseteq_T X'$ gilt, wobei (X', T, x_0) eine affine torische Varietät ist. Es sei $\nu\colon \widetilde{X}' \to X'$ die Normalisierung von X'. Nach Erinnerung 3.2.22 ist $(\widetilde{X}', T, \widetilde{x}_0)$ eine affine torische Varietät. Wir wissen, dass

$$\nu_{|\nu^{-1}(X'^{\mathrm{norm}})}\colon \nu^{-1}(X'^{\mathrm{norm}}) \;\to\; X'^{\mathrm{norm}}$$

eine offene Einbettung ist. Somit ist nach Erinnerung 3.2.22 der Morphismus $X \to \nu^{-1}(X) \to \widetilde{X}'$ eine äquivariante Einbettung von k-Räumen. □

Vereinbarung 3.2.24. Ab jetzt seien alle torischen k-Räume normal.

Lemma 3.2.25. *Es seien (X', T, x_0) eine torische Prävarietät und $X \sqsubseteq_T X'$ ein torischer Unterraum. Dann existiert eine offene torische Varietät $U' \subseteq X'$ mit $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{U'}(U')$.*

Beweis. Das Komplement $X' \backslash X \subseteq X'$ von X ist T-invariant, da X ein T-invarianter Unterraum von X ist. Es seien $B_1, \ldots, B_r \subseteq X' \setminus X$ die Bahnen von $X' \setminus X$ mit $\dim(B_i) = \dim(X') - 1$ und $B_i' \cap X = \emptyset$, wobei B_i' den Abschluss von B_i in X' bezeichnet. Wir setzen

$$U' \quad := \quad X' \setminus \bigcup_{i=1}^{r} B_i'.$$

Dann ist $X \subseteq U' \subseteq X'$ eine torische Prävarietät. Weiter gilt für jeden Primdivisor $Y' \subseteq X'$:

$$Y' \cap U' \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad Y' \cap X \neq \emptyset.$$

Somit folgt die Behauptung mit Lemma 1.2.20. □

Erinnerung 3.2.26. Es sei (X', T, x_0) eine torische Varietät. Dann ist $\mathcal{O}_{X'}(X')$ endlich erzeugt.

Folgerung 3.2.27. *Es sei (X, T, x_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum. Dann ist $\mathcal{O}_X(X)$ endlich erzeugt.*

Beweis. Nach Lemma 3.2.23 können wir annehmen, dass $X \sqsubseteq_T X'$ gilt. Mit Lemma 3.2.25 existiert eine offene torische Pr"varietät $U' \subseteq X'$ mit $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{U'}(U')$. Nach Bemerkung 1.5.7 (ii) ist U' eine Varietät. Erinnerung 3.2.26 liefert dann, dass $\mathcal{O}_{U'}(U') = \mathcal{O}_X(X)$ endlich erzeugt ist. □

Satz 3.2.28. *Es sei (X, T, x_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum. Dann hat man eine torische konstruierbare Einbettung*

$$(\iota, \widetilde{\iota})\colon (X, T, x_0) \;\to\; (\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X)), \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_T(T)), \iota(x_0)).$$

Beweis. Nach Lemma 3.2.27 ist $\mathcal{O}_X(X)$ endlich erzeugt. Mit Satz 3.1.18 gilt

$$\mathcal{O}_X(X) \quad = \quad \bigoplus_{\chi \in \mathbb{X}(T)} \mathcal{O}_X(X)_\chi.$$

Nach Erinnerung 3.1.17 ist $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$ eine affine $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_T(T))$-Varietät. Der Satz 3.1.20 liefert einen Morphismus $(\iota, \widetilde{\iota})\colon X \to (\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$ mit $\iota(x) = \mathfrak{m}_x$ und $\widetilde{\iota}\colon T \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_T(T))$. Es ist $\widetilde{\iota}\colon T \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_T(T))$ ein Isomorphismus. Nach

Lemma 1.2.16 ist ι eine Einbettung. Insbesondere ist $\widetilde{\iota}(T)\iota(x_0) \subseteq \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$ offen. Somit ist $(\iota, \widetilde{\iota})\colon (X, T, x_0) \to (\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X)), \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_T(T)), \iota(x_0))$ eine torische Einbettung. $\square$

Definition 3.2.29. Es sei (X, T, x_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum. Wir nennen $(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X)), \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_T(T)), x_0)$ den *affinen torischen Abschluss von* (X, T, x_0).

Lemma 3.2.30. *Es seien $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon (X, T_X, x_0) \to (Y, T_Y, y_0)$ ein Morphismus von quasiaffinen torischen k-Räumen $X \sqsubseteq_{T_X} X'$ und $Y \sqsubseteq_{T_Y} Y'$, wobei (X', T_X, x_0) und (Y', T_Y, y_0) die affinen torischen Abschlüsse von (X, T_X, x_0) bzw. (Y, T_Y, y_0) bezeichnen. Dann existiert ein torischer Morphismus $(\varphi', \widetilde{\varphi})\colon (X', T_X, x_0) \to (Y', T_Y, y_0)$ mit $\varphi'_{|X} = \varphi$. Des Weiteren gilt: Ist $(\varphi, \widetilde{\varphi})$ ein Isomorphismus, so ist $(\varphi', \widetilde{\varphi})$ ebenfalls ein Isomorphismus.*

Beweis. Wir haben einen Morphismus $\varphi^*\colon \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$. Nach Satz 3.2.28 gilt $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{X'}(X')$ und $\mathcal{O}_Y(Y) = \mathcal{O}_{Y'}(Y')$. Somit existiert ein Morphismus $\varphi'\colon X' \to Y'$ mit $\varphi'^* = \varphi^*$. Satz 1.2.1 liefert $\varphi'_{|X} = \varphi$. Mit Folgerung 1.5.12 erhalten wir, dass $\varphi(tx) = \widetilde{\varphi}(t)\varphi(x)$ gilt für alle $x \in X'$ und $t \in T_X$. Somit ist $(\varphi', \widetilde{\varphi})\colon (X', T_X, x_0) \to (Y', T_Y, y_0)$ ein Morphismus mit $\varphi'_{|X} = \varphi$.

Falls $(\varphi, \widetilde{\varphi})$ ein Isomorphismus ist, erhalten wir analog, dass $(\varphi', \widetilde{\varphi})$ ein Isomorphismus ist. $\square$

3.3. **Quasiaffine k-Gitterfächer und quasiaffine torische k-Räume.**

Wir geben in diesem Abschnitt Funktoren zwischen der Kategorie der quasiaffinen spitzen k-Fächer und der Kategorie der quasiaffinen torischen k-Räume an, welche wesentlich invers zueinander sind siehe Satz 3.3.27. Des Weiten zeigen wir, dass die Bahnen den k-Kegeln entsprechen siehe Folgerung 3.3.19.

Den zu $\Lambda(T)$ gehörigen $\mathbb{Q}$-Vektorraum bezeichnen wir mit $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T) := \Lambda(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Für jede affine torische Varietät (X', T, x_0) ist

$$\sigma_{X'} \quad := \quad \left\{ \sum \alpha_i \lambda_i;\ \alpha_i \in \mathbb{Q},\ \lambda_i \in \Lambda(T) \text{ konvergent in } X' \right\}$$

ein spitzer Kegel in $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$. Somit ist $(\Lambda(T), \sigma_{X'})$ ein spitzer Gitterkegel. Für jeden spitzen Gitterkegel (N, σ') ist $X_{\sigma'} := \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[\overset{\vee}{\sigma}{}' \cap N^*])$ mit $T_N := \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[N^*])$ und $x_0 :=< \chi^u - 1,\ u \in \overset{\vee}{\sigma}{}' \cap N^* >$ eine affine torische Varietät.

Erinnerung 3.3.1. Die folgenden Funktoren sind kovariant und wesentlich invers zueinander:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Kategorie der affinen} \\ \text{torischen Varietäten} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Kategorie der} \\ \text{spitzen Gitterkegel} \end{array} \right\}$$
$$(X', T, x_0) \mapsto (\Lambda(T), \sigma_{X'})$$
$$(\varphi, \widetilde{\varphi}) \mapsto \widetilde{\varphi}_*.$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Kategorie der affinen} \\ \text{torischen Varietäten} \end{array} \right\} \leftarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Kategorie der} \\ \text{spitzen Gitterkegel} \end{array} \right\}$$
$$(X_{\sigma'}, T_N, x_0) \hookleftarrow (N, \sigma')$$
$$(\mathrm{Spec}(\psi_{F^*}), \mathrm{Spec}(\psi_{F^*})) \hookleftarrow F.$$

Es seien (N, σ') ein spitzer Gitterkegel und $\tau' \preccurlyeq \sigma'$. Dann ist $X_{\tau'}$ eine offene torische Varietät von $X_{\sigma'}$. Ist (N, Σ') ein spitzer Gitterfächer, dann können wir die affinen torischen Varietäten $X_{\sigma'}$ mit $\sigma' \in \Sigma'$ zu einer torischen Varietät $(X_{\Sigma'}, T_N, x_0)$ verkleben. Für eine torische Varietät (X', T, x_0) und eine offene affine torische Überdeckung $X'_1, \ldots, X'_n$ von X' ist folgende Kollektion von Kegeln ein Fächer in $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$:

$$\Sigma_{X'} \quad := \quad \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_{\sigma_{X'_i}}.$$

Erinnerung 3.3.2. Wir haben zueinander inverse kovariante Funktoren

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Kategorie der} \\ \text{torischen Varietäten} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Kategorie der} \\ \text{spitzen Gitterfächer} \end{array} \right\}$$
$$(X', T, x_0) \mapsto (\Lambda(T), \Sigma_{X'})$$
$$(\varphi, \widetilde{\varphi}) \mapsto \widetilde{\varphi}_*.$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Kategorie der} \\ \text{torischen Varietäten} \end{array} \right\} \leftarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Kategorie der} \\ \text{spitzen Gitterfächer} \end{array} \right\}$$
$$(X_{\Sigma'}, T_N, x_0) \hookleftarrow (N, \Sigma')$$
$$(\mathrm{Spec}(\psi_{F^*}), \mathrm{Spec}(\psi_{F^*})) \hookleftarrow F.$$

Erinnerung 3.3.3. Die folgenden Funktoren sind kovariant und wesentlich invers zueinander:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Kategorie der quasiaffinen}\\ \text{torischen Varietäten}\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{c}\text{Kategorie der spitzen}\\ \text{quasiaffinen Gitterfächer}\end{array}\right\}$$

$$(X', T, x_0) \mapsto (\Lambda(T), \Sigma_{X'}).$$

$$(\varphi, \widetilde{\varphi}) \mapsto \widetilde{\varphi}_*.$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Kategorie der quasiaffinen}\\ \text{torischen Varietäten}\end{array}\right\} \leftarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Kategorie der spitzen}\\ \text{quasiaffinen Gitterfächer}\end{array}\right\}$$

$$(X_{\Sigma'}, T_N, x_0) \leftarrow\!\shortmid (N, \Sigma')$$

$$(\mathrm{Spec}(\psi_{F^*}), \mathrm{Spec}(\psi_{F^*})) \leftarrow\!\shortmid F.$$

Erinnerung 3.3.4. Es sei (X', T, x_0) eine torische Varietät. Dann gilt für $\lambda, \lambda' \in \Lambda(T)$:

$$\lim_{t\to 0}(\lambda(t)x_0) \quad = \quad \lim_{t\to 0}(\lambda'(t)x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda, \lambda' \in \mathring{\tau}' \text{ mit einem Kegel } \tau' \in \Sigma_{X'}.$$

Für jeden Kegel τ' von $\Sigma_{X'}$ nennen wir $x_{\mathring{\tau}'} := x_{\tau'} := \lim_{t\to 0}(\lambda(t)x_0)$ den *Fußpunkt zu* τ', wobei $\lambda \in \mathring{\tau}' \cap \Lambda(T)$.

Definition 3.3.5. Es sei (X, T, x_0) ein torischer k-Raum. Für jede Bahn $Tx \in \mathrm{Orb}(X)$ setzen wir

$$S(x, T) \quad := \quad \{\chi \in \mathbb{X}(T);\ \text{es existiert ein } f \in \mathcal{O}_X(X)_\chi \text{ mit } f(x) \neq 0\}.$$

Die Menge $S(x, T)$ ist ein Monoid. Wir nennen $S(x, T)$ das *Bahnmonoid zur Bahn* Tx. Weiter bezeichne $\omega(x, T)$ die konvexe Hülle von $S(x, T)$ in $\mathbb{X}(T)_{\mathbb{Q}}$.

Erinnerung 3.3.6. Es sei (X', T, x_0) eine torische Varietät. Dann ist $\omega(x, T)$ ein Kegel in $\mathbb{X}(T)_{\mathbb{Q}}$ und $\omega(x, T)^*$ ein Kegel von $\Sigma_{X'}$.

Erinnerung 3.3.7. Es sei (X', T, x_0) eine torische Varietät. Dann haben wir zueinander inverse Bijektionen:

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_{X'} & \to & \mathrm{Orb}(X'), \\ \tau' & \mapsto & Tx_{\tau'}; \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{Orb}(X') & \to & \Sigma_{X'}, \\ Tx & \mapsto & w(x, T)^*. \end{array}$$

Diese liefern wiederum zueinander inverse Bijektionen:

$$\begin{array}{rcl} \mathring{\Sigma}_{X'} & \to & \mathrm{Orb}(X'), \\ \mathring{\tau}' & \mapsto & Tx_{\mathring{\tau}'}; \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{Orb}(X') & \to & \mathring{\Sigma}_{X'}, \\ Tx & \mapsto & \omega(\mathring{x, T})^*. \end{array}$$

Insbesondere gilt $\{0\} \mapsto Tx_0$. Für jeden Kegel $\tau' \in \Sigma_{X'}$ gilt weiter $\dim(Tx_{\tau'}) = \dim(X') - \dim(\tau)$

Konstruktion 3.3.8. Es sei (N, Σ) ein spitzer quasiaffiner k-Gitterfächer. Wir wollen einen quasiaffinen torischen k-Raum (X_Σ, T_N, x_0) zu (N, Σ) konstruieren. Nach Lemma 2.3.10 existiert zu Σ der Minimalfächer Σ'. Nach Bemerkung 2.3.11 ist Σ' ebenfalls spitz. Erinnerung 3.3.3 liefert, dass $(X_{\Sigma'}, T_N, x_0)$ eine quasiaffine torische Varietät ist. Wir setzen

$$X_\Sigma \quad := \quad \bigcup_{\tau' \in \Sigma', \mathring{\tau}' \in \mathring{\Sigma}} Tx_{\tau'} \quad = \quad \bigcup_{\tau \in \Sigma} Tx_{\mathring{\tau}} \quad \subseteq \quad X_{\Sigma'}.$$

Dann ist X_Σ mit T_N und $x_0 \in X_{\Sigma'}$ ein quasiaffiner torischer k-Raum.

Begründung. Nach Lemma 3.1.11 ist jedes $Tx_{\tau'}$ lokal abgeschlossen in $X_{\Sigma'}$. Somit ist X_Σ eine T-invariante konstruierbare Teilmenge von $X_{\Sigma'}$. Da $X_{\Sigma'}$ eine quasiaffine Varietät ist, ist X_Σ ein quasiaffiner k-Raum. Nach Erinnerung 3.3.7 gilt $Tx_0 \subseteq X_\Sigma$. Mit Bemerkung 3.2.6 ist (X_Σ, T_N, x_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum. □

Lemma 3.3.9. *Es seien (N, Σ) ein quasiaffiner spitzer k-Gitterfächer und $\lambda \in \Lambda(T)$. Dann konvergiert $\lambda(t)x_0$ in X_Σ genau dann, wenn $\lambda \in \mathring{\tau}$ mit $\tau \in \Sigma$ gilt. Insbesondere erhalten wir für $\lambda, \lambda' \in \Lambda(T) \cap |\Sigma|$:*

$$\lim_{t\to 0}(\lambda(t)x_0) \quad = \quad \lim_{t\to 0}(\lambda'(t)x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda, \lambda' \in \mathring{\tau} \text{ mit einem k-Kegel } \tau \in \Sigma.$$

Beweis. Folgt aus der Konstruktion 3.3.8 und Erinnerung 3.3.4. □

Folgerung 3.3.10. *Es seien (N, Σ) ein spitzer quasiaffiner k-Gitterfächer und Σ' der Minimalfächer zu Σ. Dann gilt für $\tau' \in \Sigma'$*

$$Tx_{\tau'} \quad \subseteq \quad X_\Sigma \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathring{\tau}' \in \mathring{\Sigma} \qquad \Leftrightarrow \qquad \tau' \ \cap \ |\Sigma| \ \in \ \Sigma$$

Beweis. Die erste Äquivalenz folgt aus Erinnerung 3.3.7 und Lemma 3.3.9. Die zweite Äquivalenz folgt aus Satz 2.2.22. □

Definition 3.3.11. Es sei (N, Σ) ein spitzer quasiaffiner k-Gitterfächer und $\tau \in \Sigma$ ein k-Kegel. Nach Lemma 3.3.9 definiert jedes $\tau \in \Sigma$ einen Punkt $x_{\mathring{\tau}} := x_\tau := \lim_{t\to 0}(\lambda(t)x_0)$ mit $\lambda \in \mathring{\tau}$. Wir nennen x_τ den *Fußpunkt zu τ*.

Lemma 3.3.12. *Es seien (N, Σ) ein spitzer quasiaffiner k-Fächer. Dann haben wir eine bijektive Zuordnung $\Sigma \to \mathrm{Orb}(X_\Sigma)$, $\tau \mapsto Tx_\tau$.*

Beweis. Die Zuordnung ist nach Lemma 3.3.9 wohldefiniert. Nach Erinnerung 3.3.7 und Folgerung 3.3.10 ist sie surjektiv. Konstruktion 3.3.8 und Erinnerung 3.3.7 liefern, dass die Zuordnung injektiv ist. □

Konstruktion 3.3.13. Es sei (X, T, x_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum. Wir wollen zu (X, T, x_0) einen quasiaffinen spitzen k-Gitterfächer $(\Lambda(T), \Sigma_X)$ konstruieren. Dazu setzen wir

$$A_X \quad := \quad \{\omega(x, T)^{\circ *};\ x \in X\} \qquad \text{und} \qquad \Sigma_X \quad := \quad \{\omega(x, T)^* \cap |A_X|;\ x \in X\}\,.$$

Es ist zu zeigen, dass Σ_X ein quasiaffiner k-Fächer in $\Lambda_\mathbb{Q}(T)$ ist. Wir setzen $\widetilde{X}' := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$ und $\widetilde{T} := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_T(T))$. Nach Satz 3.2.28 haben wir eine torische Einbettung $(\jmath, \widetilde{\jmath})\colon (X, T, x_0) \to (\widetilde{X}', \widetilde{T}, \widetilde{x}_0)$. Somit haben wir auch einen kanonischen Isomorphismus $\kappa\colon \Lambda(\widetilde{T}) \to \Lambda(T)$. Nach Erinnerung 3.3.3 ist die Kollektion $\Sigma_{\widetilde{X}} = \{\omega(\widetilde{x}, \widetilde{T})^*;\ \widetilde{x} \in \widetilde{X}'\}$ ein spitzer quasiaffiner Fächer in $\Lambda_\mathbb{Q}(\widetilde{T})$. Also ist

$$\Sigma' \quad := \quad \{\kappa(\tau'); \tau' \in \Sigma_{\widetilde{X}'}\}$$

ein spitzer quasiaffiner Fächer in $\Lambda_\mathbb{Q}(T)$. Für jedes $x \in X$ gilt $\kappa^*(S(x, T)) = S(\iota(x), \widetilde{T})$. Damit erhalten wir $\omega(x, T)^* = \kappa(\omega(\iota(x), \widetilde{T}))^* \in \Sigma'$ für alle $x \in X$. Somit gilt $A_X \subseteq \mathring{\Sigma}'$ und $\Sigma_X = \Sigma'_{A_X}$. Also ist $(\Lambda(T), \Sigma_X)$ ein spitzer quasiaffiner k-Gitterfächer. Es gilt

$$\Sigma_X \quad = \quad \{\omega(x, T)^* \cap |\Sigma_X|;\ x \in X\}\,.$$

Lemma 3.3.14. *Es sei (X, T, x_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum. Dann haben wir bijektive Zuordnungen:*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Orb}(X) & \to & \Sigma_X, \\ Tx & \mapsto & \omega(x,T)^* \cap |\Sigma_X|; \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \operatorname{Orb}(X) & \to & \mathring{\Sigma}_X, \\ Tx & \mapsto & \omega(\mathring{x},T)^*. \end{array}$$

Beweis. Nach Konstruktion 3.3.13 sind die Zuordnungen wohldefiniert. Weiter liefern Erinnerung 3.3.7 und Konstruktion 3.3.13, dass die Zuordnungen injektiv und surjektiv sind. □

Erinnerung 3.3.15. Es seien (N, Σ') und (N, Δ') spitze Gitterfächer mit $\Sigma' \preccurlyeq \Delta'$. Dann hat man eine offene Einbettung $(\kappa', \mathrm{id})\colon (X_{\Sigma'}, T_N, x_0) \to (X_{\Delta'}, T_N, x_0)$. Das Bild von $X_{\Sigma'}$ ist von der Gestalt

$$\kappa(X_{\Sigma'}) \quad = \quad \bigcup_{\sigma' \in \Sigma' \preccurlyeq \Delta'} T_N x_{\sigma'} \quad \subseteq \quad X_{\Delta'}.$$

Konstruktion 3.3.16. Es seien (X, T, x_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum und $(\widetilde{X}', \widetilde{T}, \widetilde{x}_0)$ der affine torische Abschluss von (X, T, x_0). Weiter sei $(\iota, \widetilde{\iota})\colon (X, T, x_0) \to (\widetilde{X}', \widetilde{T}, \widetilde{x}_0)$ die zugehörige torische Einbettung. Wir konstruieren folgenden torischen Isomorphismus:

$$(\jmath, \widetilde{\jmath})\colon (X_{\Sigma_X}, T_{\Lambda(T)}, x_0) \;\to\; (\iota(X), \widetilde{T}, \widetilde{x}_0) \;\sqsubseteq\; (\widetilde{X}', \widetilde{T}, \widetilde{x}_0).$$

Weiter sei $\widetilde{\Sigma}'$ der quasiaffine Fächer zu $\widetilde{X}'$ in $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$ aus Konstruktion 3.3.13. Es gilt $\Sigma_X \sqsubseteq \widetilde{\Sigma}'$ in $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$. Weiter sei Σ' der Minimalfächer von Σ_X in $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$. Somit gilt $\Sigma' \preccurlyeq \widetilde{\Sigma}'$. Nach Erinnerung 3.3.15 und Erinnerung 3.3.2 existiert eine kanonische offene Einbettung $(\kappa, \widetilde{\kappa})\colon (X_{\Sigma'}, T_{\Lambda(T)}, x_0) \to (\widetilde{X}', T, x_0)$ mit

$$\kappa(X_{\Sigma'}) \quad = \quad \bigcup_{\sigma' \in \Sigma'} T_N x_{\sigma'} \quad \subseteq \quad \widetilde{X}'.$$

Lemma 2.2.10 liefert, dass die Seiteninneren von Σ_X den Seiten von Σ_X entsprechen. Mit Lemma 3.3.12 und Lemma 3.3.14 folgt, dass $\kappa(X_\Sigma) = \iota(X)$ gilt. Dann liefern $\jmath := \kappa_{|X_\Sigma}$ und $\widetilde{\jmath} := \widetilde{\kappa}$ den gewünschten Isomorphismus.

Folgerung 3.3.17. *Es sei (X, T, x_0) ein torischer k-Raum. Dann gilt:*

$$(X, T, x_0) \;\cong\; (X_{\Sigma_X}, T_{\Lambda(T)}, x_0).$$

Beweis. Folgt aus Konstruktion 3.3.16. □

Konstruktion 3.3.18. Es seien (N, Σ) ein quasiaffiner spitzer k-Gitterfächer und Σ' der Minimalfächer von Σ. Wir konstruieren folgenden Isomorphismus von k-Gitterfächern:

$$\jmath\colon (N, \Sigma) \;\to\; (\Lambda(T_N), \Sigma_{X_\Sigma}).$$

Mit Erinnerung 3.3.2 erhalten wir einen Isomorphismus von Gitterfächern $\jmath\colon (N, \Sigma') \to (\Lambda(T_N), \Sigma_{X_{\Sigma'}})$. Es gilt $\jmath(\tau') = \omega(x_{\tau'}, T_N)^*$ für $\tau' \in \Sigma'$, also insbesondere $\jmath(\mathring{\tau}') = \omega(\mathring{x}_{\tau'}, T_N)^*$ für $\tau' \in \Sigma'$. Lemma 3.3.12 und Lemma 3.3.14 liefern, dass $\jmath(\mathring{\tau}) = \omega(\mathring{x}_\tau, T_N)^*$ gilt für $\tau \in \Sigma$. Somit folgt $\jmath(|\Sigma|) = |\Sigma_{X_\Sigma}|$. Es sei $\widetilde{\Sigma}'$ der Minimalfächer zu Σ_{X_Σ}. Nach Lemma 2.3.10 gilt $\jmath(\tau') \in \widetilde{\Sigma}'$ für alle $\tau' \in \Sigma'$ mit $\mathring{\tau}' \in \mathring{\Sigma}$. Für jedes $\tau \in \Sigma$ gilt $\tau = \tau' \cap |\Sigma|$ mit $\tau' \in \Sigma'$ und $\mathring{\tau}' \in \mathring{\Sigma}'$. Da $\jmath$ ein Isomorphismus ist, gilt:

$$\jmath(\tau) \quad = \quad \jmath(\tau') \cap \jmath(|\Sigma|) \ \in \ \Sigma_{X_\Sigma}.$$

Analog erhalten wir, dass für jeden k-Kegel $\rho \in \Sigma_{X_\Sigma}$ stets $\jmath^{-1}(\rho) \in \Sigma$ gilt. Also ist $\jmath\colon (N, \Sigma) \to (\Lambda(T_N), \Sigma_{X_\Sigma})$ ein Isomorphismus von k-Gitterfächern.

Folgerung 3.3.19. *Es sei (X, T, x_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum. Dann haben wir folgende Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_X & \to & \mathrm{Orb}(X), \\ \tau & \mapsto & Tx_\tau; \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{Orb}(X) & \to & \Sigma_X, \\ Tx & \mapsto & w(x,T)^* \cap |\Sigma_X|. \end{array}$$

Diese lieferen wiederum zueinander inverse Bijektionen:

$$\begin{array}{rcl} \mathring{\Sigma}_X & \to & \mathrm{Orb}(X), \\ \mathring{\tau} & \mapsto & Tx_{\mathring{\tau}}; \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{Orb}(X) & \to & \mathring{\Sigma}_X \\ Tx & \mapsto & \omega(x,T)^{\circ *}. \end{array}$$

Insbesondere gilt $\{0\} \mapsto Tx_0$. *Für jeden Kegel* $\tau \in \Sigma_X$ *gilt weiter* $\dim(Tx_\tau) = \dim(X) - \dim(\tau)$.

Beweis. Lemma 3.3.12 und Lemma 3.3.14 liefern, dass die Zuordnungen zueinander invers sind. Es sei $(\widetilde{X}', \widetilde{T}, \widetilde{x}_0)$ der affine torische Abschluss von (X, T, x_0). Dann gilt $\dim(X) = \dim(\widetilde{X}')$. Für jeden k-Kegel $\tau \in \Sigma_X$ sei τ' der Abschluss von τ. Dann gilt $\tau' \in \Sigma'$, wobei Σ' der Fächer von $\widetilde{X}'$ in $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$ ist. Weiter gilt $\dim(Tx_{\tau'}) = \dim(Tx_\tau)$. Bemerkung 2.1.35 liefert $\dim(\tau) = \dim(\tau')$. Somit folgt die Behauptung aus Erinnerung 3.3.7. □

Erinnerung 3.3.20. Es seien (X, T, x_0) ein torischer k-Raum. Für jedes $x \in X$ nennen wir die Untergruppe $T_x := \{t \in T;\ tx = x\}$ von T die *Isotropiegruppe von* x.

Vereinbarung 3.3.21. Für einen quasaffinen k-Gitterfächer (N, Δ) schreiben wir anstatt (X_Δ, T_N, x_0) auch (Y_Δ, T_N, y_0) um die Lesbarkeit zu erhöhen. Für die jeweiligen Fußpunkte $\sigma \in \Delta$ schreiben wir anstatt x_σ auch y_σ. Falls (Y, T, y_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum ist, schreiben wir anstatt Σ_Y auch Δ_Y.

Lemma 3.3.22. *Es sei* $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon (X, T_X, x_0) \to (Y, T_Y, y_0)$ *ein Morphismus von quasiaffinen torischen k-Räumen. Dann existiert zu jedem* $\tau \in \Sigma_X$ *ein* $\rho \in \Delta_Y$ *mit* $\varphi(x_\tau) = y_\rho$.

Beweis. Folgt aus Lemma 3.2.18 und Lemma 3.3.9. □

Erinnerung 3.3.23. Es sei $(\varphi', \widetilde{\varphi})\colon (X', T_X, x_0) \to (Y', T_Y, y_0)$ ein torischer Morphismus von Varietäten. Dann gilt für $\rho' \in \Delta_{Y'}$:

$$\varphi^{-1}(y_{\rho'}) \quad = \quad \bigcup_{\tau' \in \Sigma_{X'},\, \widetilde{\varphi}_*(\mathring{\tau}') \subseteq \mathring{\rho}'} \widetilde{\varphi}^{-1}\left(T_{Y'_{y_{\rho'}}}\right) x_{\tau'}.$$

Lemma 3.3.24. *Es sei* $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon (X, T_X, x_0) \to (Y, T_Y, y_0)$ *ein Morphismus von quasiaffinen torischen k-Räumen. Dann haben wir einen Morphismus von k-Gitterfächern:*

$$\widetilde{\varphi}_*\colon (\Lambda(T_X), \Sigma_X) \ \to \ (\Lambda(T_Y), \Delta_Y), \qquad \lambda \ \mapsto \ \widetilde{\varphi} \circ \lambda.$$

Beweis. Es seien (X', T_X, x_0) und (Y', T_Y, y_0) die affinen torischen Abschlüsse von (X, T_X, x_0) bzw. (Y, T_Y, y_0). Mit Satz 3.2.28 können wir annehmen, dass $X \sqsubseteq_{T_X} X'$ und $Y \sqsubseteq_{T_Y} Y'$ gilt. Nach Lemma 3.2.30 existiert ein Morphismus

$$(\varphi', \widetilde{\varphi})\colon (X', T_X, x_0) \;\to\; (Y', T_Y, y_0)$$

mit $\varphi'_{|X} = \varphi$. Nach Erinnerung 3.3.2 ist $\widetilde{\varphi}_*$ ein Gitterfächermorphismus von $\Sigma_{X'}$ nach $\Delta_{Y'}$. Für jeden Fußpunkt $x_\tau \in X$ ist $\varphi(x_\tau)$ nach Lemma 3.3.22 ein Fußpunkt von Y. Somit existiert nach Konstruktion 3.3.13 und Erinnerung 3.3.23 zu jedem $\tau \in \Sigma_X$ ein $\rho \in \Delta_Y$ mit $\widetilde{\varphi}_*(\mathring{\tau}) \subseteq \mathring{\rho}$. Insbesondere ist $\widetilde{\varphi}_*(|\Sigma_X|) \subseteq |\Delta_Y|$. Wir zeigen nun, dass $\widetilde{\varphi}_*(\tau) \subseteq \rho$ gilt. Zu τ bzw. ρ existiert ein $\tau' \in \Sigma_{X'}$ bzw. $\rho' \in \Delta_{Y'}$, sodass gilt: $\tau = \tau' \cap |\Sigma_X|$ und $\mathring{\tau} = \mathring{\tau}'$ bzw. $\rho = \rho' \cap |\Delta_Y|$ und $\mathring{\rho} = \mathring{\rho}'$. Aus $\widetilde{\varphi}_*(\mathring{\tau}) \subseteq \mathring{\rho}$ folgt, dass $\widetilde{\varphi}_*(\tau') \subseteq \rho'$ gilt. Somit erhalten wir

$$\widetilde{\varphi}_*(\tau) \;=\; \widetilde{\varphi}_*(\tau' \cap |\Sigma_X|) \;\subseteq\; \widetilde{\varphi}_*(\tau') \cap \widetilde{\varphi}_*(|\Sigma_X|) \;\subseteq\; \rho' \cap |\Delta_Y| \;=\; \rho.$$

□

Lemma 3.3.25 (Faserformel)**.** *Es sei $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon (X, T_X, x_0) \to (Y, T_Y, y_0)$ ein Morphismus von quasiaffinen torischen k-Räumen. Dann gilt für jedes $\rho \in \Delta_Y$:*

$$\varphi^{-1}(y_\rho) \;=\; \bigcup_{\tau \in \Sigma_X, \widetilde{\varphi}_*(\mathring{\tau}) \subseteq \mathring{\rho}} \widetilde{\varphi}^{-1}\left(T_{Y_{y_\rho}}\right) x_\tau.$$

Beweis. Es ist nur zur Inklusion „$\subseteq$" etwas zu zeigen. Dazu sei $x \in \varphi^{-1}(y_\rho)$ gegeben. Dann existiert ein $\tau \in \Sigma_X$ und ein $t \in T_X$ mit $tx_\tau = x$. Nach Lemma 3.3.22 ist $\varphi(x_\tau) = y_{\rho_1}$ ein Fußpunkt mit $\widetilde{\varphi}_*(\mathring{\tau}) \subseteq \mathring{\rho}_1$. Somit gilt $\varphi(x) \in T_Y y_\rho \cap T_Y y_{\rho_1}$. Mit Folgerung 3.3.19 erhalten wir $\rho = \rho_1$. Es folgt $\widetilde{\varphi}(t)\varphi(x_\tau) = y_\rho$ und damit $\widetilde{\varphi}(t) \in T_{Y_{y_\rho}}$. □

Lemma 3.3.26. *Es sei $F\colon (N, \Sigma) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus von spitzen quasiaffinen k-Gitterfächern. Dann haben wir einen Morphismus von quasiaffinen torischen k-Räumen:*

$$(\mathrm{Spec}(\psi_{F^*}), \mathrm{Spec}(\psi_{F^*}))\colon (X_\Sigma, T_N, x_0) \;\to\; (Y_\Delta, T_{N'}, y_0)$$

Beweis. Es seien Σ' und Δ' die Minimalfächer zu Σ bzw. Δ. Nach Lemma 2.4.23 ist $F\colon (N, \Sigma') \to (M, \Delta')$ ein Morphismus von quasiaffinen Gitterfächern. Nach Erinnerung 3.3.3 ist $(\mathrm{Spec}(\psi_{F^*}), \mathrm{Spec}(\psi_{F^*}))\colon (X_{\Sigma'}, T_N, x_0) \to (Y_{\Delta'}, T_M, y_0)$ ein Morphismus von quasiaffinen torischen Varietäten. Mit Konstruktion 3.3.8 und Erinnerung 3.3.23 folgt die Behauptung. □

Satz 3.3.27. *Wir haben zueinander wesentlich inverse kovariante Funktoren*

$$\mathcal{G}\colon \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kategorie der quasiaffinen} \\ \textit{torischen k-Räume} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kategorie der spitzen} \\ \textit{quasiaffinen k-Gitterfächer} \end{array} \right\}$$
$$(X, T, x_0) \mapsto (\Lambda(T), \Sigma_X)$$
$$(\varphi, \widetilde{\varphi}) \mapsto \widetilde{\varphi}_*.$$
$$\mathcal{H}\colon \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kategorie der spitzen} \\ \textit{quasiaffinen k-Gitterfächer} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kategorie der quasiaffinen} \\ \textit{torischen k-Räume} \end{array} \right\}$$
$$(N, \Sigma) \mapsto (X_\Sigma, T_N, x_0)$$
$$F \mapsto (\mathrm{Spec}(\psi_{F^*}), \mathrm{Spec}(\psi_{F^*})).$$

Beweis. Mit Konstruktion 3.3.8 und Lemma 3.3.26 ist $\mathcal{H}$ wohldefiniert. Mit Konstruktion 3.3.13 und Lemma 3.3.24 ist $\mathcal{G}$ wohldefiniert. Es ist offensichtlich, dass $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ Funktoren sind. Bleibt zu zeigen, dass die Funktoren wesentlich invers zueinander sind.

Es sei $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon (X, T_X, x_0) \to (Y, T_Y, y_0)$ ein Morphismus von quasiaffinen torischen k-Räumen. Weiter seien (X', T_X, x_0) und (Y', T_Y, y_0) die torischen Abschlüsse von (X, T_X, x_0) und (Y, T_Y, y_0). Nach Satz 3.2.28 dürfen wir annehmen, dass $X \sqsubseteq_{T_X} X'$ und $Y \sqsubseteq_{T_Y} Y'$ gilt. Lemma 3.2.30 liefert einen Morphismus $(\varphi', \widetilde{\varphi})\colon (X', T_X, x_0) \to (Y', T_Y, y_0)$ mit $\varphi'_{|X} = \varphi$. Mit Konstruktion 3.3.16 existieren folgende Isomorphismen für (X, T_X, x_0) und (Y, T_Y, y_0):

$$
\begin{aligned}
(\iota_X, \widetilde{\iota}_X)\colon (X, T_X, x_0) &\to \mathcal{H}(\mathcal{G}((X, T_X, x_0))),\\
(\iota_Y, \widetilde{\iota}_Y)\colon (Y, T_Y, y_0) &\to \mathcal{H}(\mathcal{G}((Y, T_Y, y_0))).
\end{aligned}
$$

Erinnerung 3.3.2 liefert für (X', T_X, x_0) bzw. (Y', T_Y, y_0) die Isomorphismen:

$$
\begin{aligned}
(\iota_{X'} \widetilde{\iota}_{X'})\colon (X', T_X, x_0) &\to \mathcal{H}(\mathcal{G}((X', T_X, x_0))),\\
(\iota_{Y'}, \widetilde{\iota}_{Y'})\colon (Y', T_Y, y_0) &\to \mathcal{H}(\mathcal{G}((Y', T_Y, y_0))).
\end{aligned}
$$

Wir haben folgende Diagramme:

$$
\begin{tikzcd}
(X', T_X, x_0) \arrow[rrr, "(\iota_{X'}, \widetilde{\iota}_{X'})"] \arrow[ddd, "(\varphi', \widetilde{\varphi})"] & & & \mathcal{H}(\mathcal{G}((X', T_X, x_0))) \arrow[ddd, "\mathcal{G}(\mathcal{H}((\varphi', \widetilde{\varphi})))"'] \\
& (X, T_X, x_0) \arrow[r, "(\iota_X, \widetilde{\iota}_X)"] \arrow[d, "(\varphi, \widetilde{\varphi})"'] & \mathcal{H}(\mathcal{G}((X, T_X, x_0))) \arrow[d, "\mathcal{H}(\mathcal{G}((\varphi, \widetilde{\varphi})))"] & \\
& (Y, T_Y, y_0) \arrow[r, "(\iota_Y, \widetilde{\iota}_Y)"'] & \mathcal{H}(\mathcal{G}((Y, T_Y, y_0))) & \\
(Y', T_Y, y_0) \arrow[rrr, "(\iota_{Y'}, \widetilde{\iota}_{Y'})"'] & & & \mathcal{H}(\mathcal{G}((Y', T_Y, y_0)))
\end{tikzcd}
$$

Mit Erinnerung 3.3.2 kommutiert das äußere Diagramm. Nach Konstruktion 3.3.16 sind $(\iota_X, \widetilde{\iota}_X)$ und $(\iota_Y, \widetilde{\iota}_Y)$ Einschränkungen der Isomorphismen $(\iota_{X'} \widetilde{\iota}_{X'})$ bzw. $(\iota_{Y'}, \widetilde{\iota}_{Y'})$. Somit kommutiert das innere Diagramm.

Es sei jetzt $F\colon (N, \Sigma) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus von quasiaffinen k-Fächern gegeben. Weiter seien (N, Σ') und (M, Δ') die Minimalfächer zu Σ bzw. Δ. Nach Folgerung 2.4.23 ist $F\colon (N, \Sigma') \to (M, \Delta')$ ein Morphismus von Fächern. Mit Konstruktion 3.3.18 existieren Isomorphismen:

$$
\begin{aligned}
\jmath_\Sigma\colon (N, \Sigma) &\to \mathcal{G}(\mathcal{H}((N, \Sigma))), & \jmath_{\Sigma'}\colon (N, \Sigma') &\to \mathcal{G}(\mathcal{H}((N, \Sigma'))),\\
\jmath_\Delta\colon (M, \Delta) &\to \mathcal{G}(\mathcal{H}((M, \Delta))), & \jmath_{\Delta'}\colon (M, \Delta') &\to \mathcal{G}(\mathcal{H}((M, \Delta'))).
\end{aligned}
$$

Somit haben wir folgende Diagramme:

$$\begin{tikzcd}
(N,\Sigma') \arrow[rrr, "\jmath_{\Sigma'}"] \arrow[ddd, "F"'] & & & \mathcal{G}(\mathcal{H}((N,\Sigma'))) \arrow[ddd, "\mathcal{G}(\mathcal{H}(F))"] \\
& (N,\Sigma) \arrow[r, "\jmath_{\Sigma}"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{G}(\mathcal{H}((N,\Sigma))) \arrow[d, "\mathcal{G}(\mathcal{H}(F))"] & \\
& (M,\Delta) \arrow[r, "\jmath_{\Delta}"'] & \mathcal{G}(\mathcal{H}((M,\Delta))) & \\
(M,\Delta') \arrow[rrr, "\jmath_{\Delta'}"'] & & & \mathcal{G}(\mathcal{H}((M,\Delta')))
\end{tikzcd}$$

Mit Erinnerung 3.3.3 kommutiert das äußere Diagramm. Nach Konstruktion 3.3.18 sind die Morphismen $\jmath_{\Sigma}$ bzw. $\jmath_{\Delta}$ Einschränkungen der Morphismen $\jmath_{\Sigma'}$ bzw. $\jmath_{\Delta'}$. Somit kommutiert das innere Diagramm. $\square$

Beispiel 3.3.28. Wir betrachten den k-Raum

$$X \quad := \quad \mathbb{K}^3 \setminus (\{(0,0,0)\} \ \cup\ \mathbb{K}^* \times \{0\} \times \mathbb{K}^* \ \cup\ \{0\} \times \mathbb{K}^* \times \{0\}) .$$

Dann ist (X, T, x_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum mit $T := (\mathbb{K}^*)^3$ und $x_0 := (1,1,1)$. Es gilt $X \sqsubseteq_T X' := \mathbb{K}^3$. Wir wissen, dass $\sigma_{X'} = \operatorname{cone}(e_1, e_2, e_3)$ und $\Lambda(T) \cong \mathbb{Z}^3$ ist, wobei e_i die Standardbasisvektoren von $\mathbb{Q}^3 \cong \Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$ bezeichnen. Wir setzen $\rho_i' := \operatorname{cone}(e_i)$, $\tau_1' := \operatorname{cone}(e_1, e_2)$ und $\tau_2' := \operatorname{cone}(e_2, e_3)$. Weiter setzen wir $\tau_1 := \tau_1' \setminus \mathring{\rho}'_2$ und $\tau_2 := \tau_2' \setminus \mathring{\rho}'_2$. Der quasiaffine k-Fächer Σ_X ist gegeben durch

$$\Sigma_X \quad = \quad \{\{0\},\ \rho_1', \rho_2',\ \tau_1, \tau_2\}$$

In Abbildung 17 sieht man ein mögliches Schaubild vom Träger Σ_X.

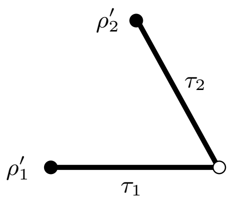

Abbildung 17

3.4. **Quasiaffine attraktive torische k-Räume und k-Gitterkegel.**

In diesem Abschnitt zeigen wir unter anderem, dass konstruierbare Teilfächer von quasiaffinen k-Fächer konstruierbare Unterräume liefern siehe Lemma 3.4.5. Weiter geben wir Funktoren zwischen der Kategorie der quasiaffinen spitzen k-Kegel und der Kategorie der quasiaffinen attraktiven torischen k-Räume an, welche wesentlich invers zueinander sind siehe Satz 3.4.9.

Erinnerung 3.4.1. Es seien (N, Σ') ein spitzer Gitterfächer und $\tau', \sigma' \in \Sigma'$. Dann gilt:

$$T_N x_{\sigma'} \subseteq \overline{T_N x_{\tau'}}^{X_{\Sigma'}} \quad \Leftrightarrow \quad \tau' \preccurlyeq \sigma'.$$

Lemma 3.4.2. *Es sei (N, Σ) ein spitzer quasiaffiner k-Fächer. Dann gilt für $\tau, \sigma \in \Sigma$:*

$$T_N x_\sigma \subseteq \overline{T_N x_\tau}^{X_\Sigma} \quad \Leftrightarrow \quad \tau \preccurlyeq \sigma.$$

Beweis. Mit Lemma 2.3.10 existiert zu Σ der Minimalfächer Σ' in $N_\mathbb{Q}$. Nach Bemerkung 2.3.11 ist Σ' spitz. Wir setzen $T := T_N$. Nach Konstruktion 3.3.8 gilt $X_\Sigma \sqsubseteq_T X_{\Sigma'}$. Weiter seien τ' und σ' die Abschlüsse von τ bzw. σ. Mit Lemma 2.3.10 gilt $\tau', \sigma' \in \Sigma'$. Nach Erinnerung 3.3.7 und Folgerung 3.3.19 gilt weiter $Tx_\sigma = Tx_{\sigma'}$ und $Tx_\tau = Tx_{\tau'}$. Mit Lemma 2.2.31 und Erinnerung 3.4.1 erhalten wir

$$Tx_\sigma \subseteq \overline{Tx_\tau}^{X_\Sigma} \quad \Leftrightarrow \quad Tx_{\sigma'} \subseteq \overline{Tx_{\tau'}}^{X_{\Sigma'}} \quad \Leftrightarrow \quad \tau' \preccurlyeq \sigma' \quad \Leftrightarrow \quad \tau \preccurlyeq \sigma.$$

□

Folgerung 3.4.3. *Es sei (X, T, x_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum. Dann gilt für $\tau \in \Sigma_X$:*

$$\mathbb{V}_\tau \quad := \quad \overline{Tx_\tau} \quad = \quad \bigcup_{\rho \in \mathrm{Stern}(\tau)} Tx_\rho.$$

Beweis. Folgt aus Lemma 3.4.2. □

Lemma 3.4.4. *Es seien (X, T, x_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum und $Y \subseteq X$ ein T-invarianter dichter konstruierbarer Unterraum von X. Dann ist (Y, T, x_0) ein torischer k-Raum und es gilt $\Sigma_Y \sqsubseteq \Sigma_X$.*

Beweis. Lemma 3.2.4 liefert, dass $Y \sqsubseteq_T X$ gilt. Es seien Σ'_Y und Σ'_X die quasiaffinen Fächer zu Σ_Y und Σ_X aus Konstruktion 3.3.13. Es gilt $\Sigma_Y \sqsubseteq \Sigma'_Y$ und $\Sigma_X \sqsubseteq \Sigma'_X$. Nach Konstruktion 3.3.13 gilt:

$$\mathring{\Sigma}_Y \quad = \quad \{\omega(\mathring{x}, T)^*; x \in Y\} \qquad \text{und} \qquad \mathring{\Sigma}_X \quad = \quad \{\omega(\mathring{x}, T)^*; x \in X\}.$$

Wegen $Y \sqsubseteq_T X$ gilt $\mathring{\Sigma}_Y \subseteq \mathring{\Sigma}_X$. Das heißt, zu jedem $\tau \in \Sigma_Y$ existiert ein $\rho \in \Sigma_X$ mit $\mathring{\tau} = \mathring{\rho}$. Es seien $\tau \in \Sigma_Y$ und $\rho \in \Sigma_X$ mit $\mathring{\rho} = \mathring{\tau}$ gegeben. Zu zeigen ist, dass $\tau = \rho \cap |\Sigma_Y|$ gilt. Es seien τ' der Abschluss von τ und ρ' der Abschluss von ρ. Aus $\mathring{\tau} = \mathring{\rho}$ folgt $\tau' = \rho'$. Mit Bemerkung 2.2.26 gilt $\tau' \in \Sigma'_Y$ und $\rho' \in \Sigma'_X$. Aus $\Sigma_Y \sqsubseteq \Sigma'_Y$ und $\Sigma_X \sqsubseteq \Sigma'_X$ folgt somit

$$\tau \quad = \quad \tau' \cap |\mathring{\Sigma}_Y| \quad \subseteq \quad \rho' \cap |\mathring{\Sigma}_X| \quad = \quad \rho.$$

Es ist noch zu zeigen ist, dass $\rho \cap |\Sigma_Y| \subseteq \tau$ gilt. Dazu zeigen wir, dass für alle $\tau_2 \in \Sigma_Y$ mit $\mathring{\tau}_2 \cap \rho \neq \emptyset$ stets $\mathring{\tau}_2 \subseteq \tau$ gilt. Es sei also ein $\tau_2 \in \Sigma_Y$ mit $\mathring{\tau}_2 \cap \rho \neq \emptyset$ gegeben. Zu τ_2

existiert ein $\rho_2 \in \Sigma_X$ mit $\mathring{\tau}_2 = \mathring{\rho}_2$. Nach Lemma 2.2.10 gilt $\rho_2 \preccurlyeq \rho$. Folgerung 3.3.19 liefert, dass $Tx_\rho = Tx_\tau$ und $Tx_{\rho_2} = Tx_{\tau_2}$ gilt. Mit Lemma 3.4.2 erhalten wir

$$Tx_\tau \quad = \quad Tx_\rho \quad \subseteq \quad \overline{Tx_{\rho_2}}^X \cap Y \quad = \quad \overline{Tx_{\tau_2}}^X \cap Y \quad = \quad \overline{Tx_{\tau_2}}^Y.$$

Lemma 3.4.2 liefert somit, dass $\tau_2 \preccurlyeq \tau$ gilt. Insbesondere gilt $\mathring{\tau}_2 \subseteq \tau$. □

Lemma 3.4.5. *Es seien* (N, Σ) *und* (N, Δ) *spitze quasiaffine k-Gitterfächer mit* $\Delta \sqsubseteq \Sigma$. *Dann existiert eine torische Einbettung* $(\kappa, \mathrm{id})\colon (Y_\Delta, T_N, y_0) \rightarrow (X_\Sigma, T_N, x_0)$ *mit*

$$\kappa(Y_\Delta) \quad = \bigcup_{\tau \in \Sigma,\ \mathring{\tau} \in \mathring{\Delta}} T_N x_\tau.$$

Beweis. Mit Lemma 2.3.4 ist Δ ein quasiaffiner k-Fächer. Mit Lemma 2.3.10 existiert zu Σ bzw. Δ ein Minimalfächer Σ' bzw. Δ'. Nach Bemerkung 2.3.11 sind Σ' und Δ' spitz. Mit Lemma 2.3.13 ist $\Delta' \preccurlyeq \Sigma'$. Nach Erinnerung 3.3.15 existiert eine offene Einbettung $(\kappa', \mathrm{id})\colon (Y_{\Delta'}, T_N, y_0) \rightarrow (X_{\Sigma'}, T_N, x_0)$ mit

$$\kappa'(Y_{\Delta'}) \quad = \bigcup_{\tau' \in \Delta'} T_N x_{\tau'}.$$

Da $\Delta \sqsubseteq \Sigma$ gilt, existiert zu jedem $\rho \in \Delta$ ein $\sigma \in \Sigma$ mit $\rho = \sigma \cap |\Delta|$ und $\mathring{\rho} = \mathring{\sigma}$. Somit liefert Konstruktion 3.3.8:

$$\kappa'(Y_\Delta) \quad = \bigcup_{\tau \in \Sigma,\ \mathring{\tau} \in \mathring{\Delta}} T_N x_\tau.$$

Also ist $\kappa'(X_\Delta)$ eine konstruierbare Menge in X_Σ. Mit $\kappa := \kappa'_{|Y_\Delta}$ folgt die Behauptung. □

Lemma 3.4.6. *Es seien* (X, T, x_0) *ein quasiaffiner torischer k-Raum und* $U \subseteq X$ *eine* T*-invariante nichtleere offene Teilmenge von* X. *Dann ist* (U, T, x_0) *ein torischer k-Raum und es gilt* $\Sigma_U \preccurlyeq \Sigma_X$.

Beweis. Lemma 3.2.4 liefert $U \sqsubseteq_T X$. Nach Lemma 3.4.4 gilt $\Sigma_U \sqsubseteq \Sigma_X$. Somit existiert zu jedem $\tau \in \Sigma_U$ ein $\sigma \in \Sigma_X$ mit $\mathring{\tau} = \mathring{\sigma}$ und $\tau \subseteq \sigma$. Noch zu zeigen ist, dass $\tau = \sigma$ gilt. Aus $\mathring{\tau} = \mathring{\sigma}$ folgt mit Folgerung 3.3.19, dass $Tx_\sigma = Tx_\tau \subseteq U$ gilt. Angenommen es gibt ein $\rho \preccurlyeq \sigma$ mit $\mathring{\rho} \nsubseteq \tau$. Folgerung 3.3.19 liefert $Tx_\rho \subseteq X \setminus U$ und damit gilt $\overline{Tx_\rho} \subseteq X \setminus U$. Mit Lemma 3.4.2 erhalten wir folgenden Widerspruch:

$$Tx_\tau \quad = \quad Tx_\sigma \quad \subseteq \quad \overline{Tx_\rho} \quad \subseteq \quad X \setminus U.$$

□

Lemma 3.4.7. *Es seien* (N, Σ) *und* (N, Δ) *spitze quasiaffine k-Gitterfächer mit* $\Delta \preccurlyeq \Sigma$. *Dann existiert eine offene torische Einbettung:*

$$(\kappa, \mathrm{id})\colon (Y_\Delta, T_N, y_0) \rightarrow (X_\Sigma, T_N, x_0) \qquad \textit{mit} \qquad \kappa(Y_\Delta) \quad = \bigcup_{\tau \in \Delta} T_N x_\tau.$$

Beweis. Da Σ ein quasiaffiner k-Fächer ist und $\Delta \preccurlyeq \Sigma$ gilt, ist Δ ein quasiaffiner k-Fächer. Mit Bemerkung 2.2.28 ist Δ ebenfalls spitz. Nach Lemma 2.3.10 existiert zu

Σ und Δ der Minimalfächer Σ' bzw. Δ'. Mit Folgerung 2.3.14 gilt $\Delta' \preccurlyeq \Sigma'$. Bemerkung 2.3.11 liefert, dass Σ' und Δ' spitze quasiaffine k-Fächer sind. Nach Konstruktion von X_Σ bzw. Y_Δ gilt $X_\Sigma \sqsubseteq_{T_N} X_{\Sigma'}$ bzw. $Y_\Delta \sqsubseteq_{T_N} Y_{\Delta'}$. Mit Erinnerung 3.3.15 existiert eine offene Einbettung $(\kappa', \mathrm{id})\colon (Y_{\Delta'}, T_N, y_0) \to (X_{\Sigma'}, T_N, x_0)$ mit

$$\kappa'(Y_{\Delta'}) \quad = \quad \bigcup_{\tau' \in \Delta'} T_N x_{\tau'} \quad = \quad \bigcup_{\mathring{\tau}' \in \mathring{\Delta}'} T_N x_{\mathring{\tau}'}.$$

Nach Lemma 2.3.12 gilt $\mathring{\Delta} = \mathring{\Delta}' \cap \mathring{\Sigma}$. Konstruktion 3.3.8 und Folgerung 3.3.19 liefern somit

$$\kappa'(X_{\Delta'}) \ \cap \ X_\Sigma \quad = \quad \left(\bigcup_{\mathring{\tau}' \in \mathring{\Delta}'} T_N x_{\mathring{\tau}'} \right) \cap \left(\bigcup_{\mathring{\rho} \in \mathring{\Sigma}} T_N x_{\mathring{\rho}} \right) \quad = \quad \bigcup_{\tau' \in \Delta',\ \mathring{\tau}' \in \mathring{\Delta}} T_N x_{\tau'}.$$

Konstruktion 3.3.8 liefert weiter

$$\kappa'(X_\Delta) \quad = \quad \bigcup_{\tau' \in \Delta',\ \mathring{\tau}' \in \mathring{\Delta}} T_N x_{\tau'} \quad = \quad \kappa'(X_{\Delta'}) \ \cap \ X_\Sigma.$$

Also ist $\kappa'(X_\Delta)$ eine offene Menge in X_Σ. Mit $\kappa := \kappa'_{|X_\Delta}$ folgt die Behauptung. □

Satz 3.4.8. *Es sei (X, T, x_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Der torische k-Raum (X, T, x_0) ist attraktiv.*
(ii) *Der Träger $|\Sigma_X|$ von Σ_X ist ein spitzer Kegel in $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$.*

Beweis. Zur Implikation „⇒": Mit Lemma 3.4.2 erhalten wir, dass Σ_X nur einen maximalen k-Kegel besitzt. Somit existiert ein $\sigma \in \Sigma_X$ mit $\tau \preccurlyeq \sigma$ für alle $\tau \in \Sigma_X$. Also ist $|\Sigma| = \sigma$ ein k-Kegel in $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$. Mit Folgerung 2.3.18 ist $|\Sigma|$ spitz.

Zur Implikation „⇐": Mit Lemma 2.3.17 erhalten wir, dass $\mathcal{F}_{|\Sigma|} = \Sigma$ gilt. Also hat Σ nur einen maximalen k-Kegel. Somit hat X nach Lemma 3.4.2 nur eine abgeschlossene Bahn. □

Satz 3.4.9. *Wir haben zueinander wesentlich inverse kovariante Funktoren*

$$\mathcal{G}\colon \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kategorie der quasiaffinen} \\ \textit{attraktiven k-Räume} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kategorie der} \\ \textit{spitzen k-Gitterkegel} \end{array} \right\}$$
$$(X, T, x_0) \mapsto (\Lambda(T), \sigma_X := |\Sigma_X|)$$
$$(\varphi, \widetilde{\varphi}) \mapsto \widetilde{\varphi}_*.$$
$$\mathcal{H}\colon \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kategorie der} \\ \textit{spitzen k-Gitterkegel} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kategorie der quasiaffinen} \\ \textit{attraktiven k-Räume} \end{array} \right\}$$
$$(N, \sigma) \mapsto (X_\sigma := X_{\mathcal{F}_\sigma}, T_N, x_0)$$
$$F \mapsto (\mathrm{Spec}(\psi_{F^*}), \mathrm{Spec}(\psi_{F^*})).$$

Für jeden Kegel $\tau \preccurlyeq \sigma_X$ gilt $\dim(Tx_\tau) = \dim(X) - \dim(\tau)$.

Beweis. Die Kategorie der quasiaffinen attraktiven k-Räume ist eine volle Unterkategorie der Kategorie der quasiaffinen torischen k-Räume. Nach Folgerung 2.4.19 ist die Kategorie der k-Gitterkegel ein volle Unterkategorie der quasiaffinen k-Gitterfächer. Somit folgt die Behauptung aus Satz 3.3.27 und Satz 3.4.8. □

Folgerung 3.4.10. *Es sei (N,σ) ein spitzer k-Gitterfächer. Dann gilt für jedes $\tau \preccurlyeq \sigma$:*

$$\dim(T_N x_\tau) \quad = \quad \dim(X_\sigma) - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \tau \in \sigma^{(1)}.$$

Bemerkung 3.4.11. Es sei (X,T,x_0) ein quasiaffiner attraktiver k-Raum. Dann liefert Lemma 2.3.17, dass $\Sigma_X = \mathcal{F}_{\sigma_X}$ gilt.

Beispiel 3.4.12. Wir betrachten den k-Raum

$$X \quad := \quad \mathbb{K}^3 \setminus ((\mathbb{K}^* \times \{0\} \times \{0\}) \ \cup\ (\{0\} \times \mathbb{K}^* \times \{0\}) \ \cup\ (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{K}^*))$$

Dann ist (X,T,x_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum, wobei $T := (\mathbb{K}^*)^3$ und $x_0 := (1,1,1)$. Da $(0,0,0) \in X$ die einzige abgeschlossene Bahn ist, ist X attraktiv. Weiter gilt $X \sqsubseteq_T X' := \mathbb{K}^3$. Wir wissen, dass $\Lambda(T) \cong \mathbb{Z}^3$ und $\sigma_{X'} = \mathrm{cone}(e_1,e_2,e_3)$ gilt, wobei e_i die Standardbasisvektoren von $\mathbb{Q}^3 \cong \Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$ bezeichnen. Wir setzen $\rho'_i := \mathrm{cone}(e_i)$. Dann ist der k-Kegel σ_X gegeben durch

$$\sigma_X \quad = \quad \{0\} \ \cup\ \mathring{\sigma}_{X'} \ \cup\ \mathring{\rho}'_1 \ \cup\ \mathring{\rho}'_2 \ \cup\ \mathring{\rho}'_3.$$

In Abbildung 18 sieht man ein mögliches Schaubild von σ_X.

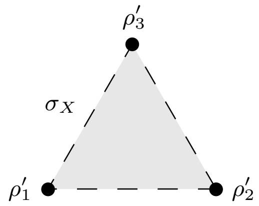

ABBILDUNG 18

Folgerung 3.4.13. *Es sei (X,T,x_0) ein attraktiver k-Raum. Dann haben wir eine Bijektion*

$$\begin{array}{rlcrl} \mathrm{Orb}(X) \to & \{\textit{Seiten von } \sigma_X\}, & \qquad & \{\textit{Seiten von } \sigma_X\} \to & \mathrm{Orb}(X) \\ Tx \mapsto & w(x,T)^* \cap \sigma_X; & & \tau \mapsto & Tx_\tau. \end{array}$$

Insbesondere gilt $\{0\} \mapsto Tx_0$ und Tx_{σ_X} ist die einzige abgeschlossene Bahn von X.

Beweis. Folgt aus Folgerung 3.3.19 und Bemerkung 3.4.11. □

Folgerung 3.4.14. *Es seien (N,σ) ein k-Gitterkegel und σ' der Abschluss von σ. Dann gilt für die Seiten ρ' von σ':*

$$T_N x_{\rho'} \ \subseteq\ X_\sigma \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathring{\rho}' \ \subseteq\ \sigma.$$

Beweis. Folgt aus Bemerkung 2.1.16 und Folgerung 3.4.13. □

Folgerung 3.4.15. *Es seien (N,σ) ein spitzer k-Gitterkegel und $\tau \preccurlyeq \sigma$. Dann existiert eine offene Einbettung $(\kappa, \mathrm{id})\colon (X_\tau, T_N, x_0) \to (X_\sigma, T_N, x_0)$ mit*

$$\kappa(X_\tau) \quad = \quad \bigcup_{\rho \preccurlyeq \tau} T_N x_\rho.$$

Beweis. Es gilt $\mathcal{F}_\tau \preccurlyeq \mathcal{F}_\sigma$. Somit folgt die Behauptung aus Lemma 3.4.7 und Bemerkung 3.4.11. □

Folgerung 3.4.16. *Es sei (N, σ) ein spitzer k-Gitterkegel. Dann gilt*

$$X_\sigma \quad = \quad \bigcup_{\tau \preccurlyeq \sigma} X_\tau.$$

Beweis. Folgt aus Folgerung 3.4.15. □

Erinnerung 3.4.17. Es sei (X', T, x_0) eine affine torische Varietät und $\tau' \preccurlyeq \sigma' := \sigma_{X'}$. Weiter betrachten wir den Morphismus $P\colon N \to N_{\tau'}$, wobei $N := \Lambda(T)$. Wir setzen $p := \operatorname{Spec}(\psi_{P^*})\colon T \to T/T_{x_{\tau'}}$. Dann ist folgende Abbildung ein Isomorphismus: $\iota\colon X_{P(\sigma')} \to \mathbb{V}_{\tau'}$, $p(t)x_{P(\rho')} \mapsto tx_{\rho'} = tx_{\mathring{\rho}'}$.

Lemma 3.4.18. *Es sei (X, T, x_0) ein quasiaffiner attraktiver torischer k-Raum und $\tau \preccurlyeq \sigma := \sigma_X$. Weiter betrachten wir den Morphismus $P\colon N \to N_\tau$, wobei $N := \Lambda(T)$. Wir setzen $p := \operatorname{Spec}(\psi_{P^*})\colon T \to T/T_{x_\tau}$. Dann ist folgende Abbildung ein Isomorphismus:*

$$\iota\colon X_{P^{\mathrm{s}}(\sigma)} \;\to\; \mathbb{V}_\tau, \qquad p(t)x_{P^{\mathrm{s}}(\rho)} \;\mapsto\; tx_\rho = tx_{\mathring{\rho}}.$$

Beweis. Es sei (X', T, x_0) der torische Abschluss von (X, T, x_0). Nach Lemma 3.2.28 können wir annehmen, dass $X \sqsubseteq_T X'$ gilt. Es sei τ' der Abschluss von τ. Mit Folgerung 3.3.19 und Folgerung 3.4.3 ist $\mathbb{V}_\tau$ eine konstruierbare dichte Teilmenge von $\mathbb{V}_{\tau'}$. Nach Lemma 3.4.4 gilt $\mathcal{F}_\sigma \sqsubseteq \mathcal{F}_{\sigma_{X'}}$. Daraus folgt $\tau' \preccurlyeq \sigma' := \sigma_{X'}$ und $\operatorname{lin}(\tau') = \operatorname{lin}(\tau)$. Nach Konstruktion 2.5.8 ist $P^{\mathrm{s}}(\sigma)$ ein k-Kegel und $P(\sigma')$ der Abschluss von $P^{\mathrm{s}}(\sigma)$. Mit Lemma 3.4.5 gilt: $(X_{P^{\mathrm{s}}(\sigma)}, T_{N_\tau}, x_{P^{\mathrm{s}}(\tau)}) \sqsubseteq (X_{P(\sigma')}, T_{N_{\tau'}}, x_{P(\tau')})$. Konstruktion 2.5.8 liefert Bijektionen

$$\begin{aligned} \jmath\colon \operatorname{Stern}_\sigma(\tau) &\;\to\; \mathcal{F}_{P^{\mathrm{s}}(\sigma)}, &\qquad \rho &\;\mapsto\; P^{\mathrm{s}}(\rho) \\ \text{und}\qquad \jmath'\colon \operatorname{Stern}_{\sigma'}(\tau') &\;\to\; \mathcal{F}_{P^{\mathrm{s}}(\sigma')}, &\qquad \rho' &\;\mapsto\; P(\rho'). \end{aligned}$$

Somit sind alle Fußpunkte von $X_{P^{\mathrm{s}}(\sigma)}$ von der Gestalt $x_{P^{\mathrm{s}}(\rho)}$ mit $\rho \in \operatorname{Stern}_\sigma(\tau)$. Die Fußpunkte von $X_{P(\sigma')}$ haben die Gestalt $x_{P(\rho')}$ mit $\rho' \in \operatorname{Stern}_{\sigma'}(\tau')$. Erinnerung 3.4.17 liefert einen Isomorphismus $\iota'\colon X_{P(\sigma')} \to \mathbb{V}_{\tau'}$, $p(t)x_{P(\rho')} \mapsto tx_{\rho'}$. Es sei $\rho \in \operatorname{Stern}_\sigma(\tau)$ und ρ' der Abschluss von ρ. Dann gilt $\rho' \in \operatorname{Stern}_{\sigma'}(\tau')$ und $\mathring{\rho}' = \mathring{\rho}$. Nach Konstruktion 2.5.8 gilt $\mathring{P^{\mathrm{s}}}(\rho) = P(\mathring{\rho}') = \mathring{P}(\rho')$. Somit erhalten wir mit Folgerung 3.3.19

$$\iota'(p(t)x_{P^{\mathrm{s}}(\rho)}) \quad = \quad tx_{\mathring{\rho}} \quad = \quad tx_{\mathring{\rho}'} \quad = \quad \iota'(p(t)x_{P(\rho')}).$$

Also ist $\iota'_{|X_{P^{\mathrm{s}}(\sigma)}} = \iota$. Offensichtlich gilt $\iota'(X_{P^{\mathrm{s}}(\sigma)}) \subseteq \mathbb{V}_\tau$. Es sei ein $tx_\rho \in \mathbb{V}_\tau$ mit $\rho \in \operatorname{Stern}_\sigma(\tau)$ und $t \in T$ gegeben. Weiter sei ρ' der Abschluss von ρ. Es gilt $x_{\rho'} = x_\rho \in \mathbb{V}_{\tau'}$ und $\rho' \in \operatorname{Stern}_{\sigma'}(\tau')$. Daraus folgt

$$\iota'(p(t)x_{P(\rho')}) \quad = \quad \iota'(p(t)x_{P^{\mathrm{s}}(\rho)}) \quad = \quad tx_\rho.$$

□

Lemma 3.4.19. *Es sei (N, σ) ein spitzer k-Gitterfächer. Ist σ 1-voll so ist, X_σ ebenfalls 1-voll.*

Beweis. Es sei σ' der Abschluss von σ. Nach Lemma 3.4.5 können wir annehmen, dass $X_\sigma \sqsubseteq_{T_N} X_{\sigma'}$ gilt. Nach Voraussetzung gilt $\sigma^{(1)} = \sigma'^{(1)}$. Da $X_{\sigma'} \setminus X_\sigma$ ebenfalls T_N-invariant ist, folgt die Behauptung aus Folgerung 3.3.19 und Folgerung 3.4.10. □

3.5. Separierte torische k-Räume und k-Gitterfächer.

Wir geben Funktoren zwischen der Kategorie der spitzen k-Fächer und der Kategorie der separierten torischen k-Räume an, welche wesentlich invers zueinander sind siehe Satz 3.5.15. Unter anderem zeigen wir, dass jeder nichtleere offene torische Unterraum eines separierten torischen k-Raumes einen *offenen k-Teilfächer* liefert siehe Lemma 3.5.22.

Konstruktion 3.5.1. Es sei (N, Σ) ein spitzer k-Gitterfächer. Wir wollen einen separierten torischer k-Raum (X_Σ, T_N, x_0) zu (N, Σ) konstruieren. Es sei ein Paar $\sigma_i, \sigma_j \in \Sigma$ gegeben. Dann gilt nach Definition $\sigma_i \cap \sigma_j = \cup \tau_l$ mit $\tau_l \preccurlyeq \sigma_i, \sigma_j$. Nach Lemma 3.4.7 existieren für jedes τ_l offene Einbettungen

$$\begin{aligned}(\kappa_{i_l}, \mathrm{id})\colon \quad (X_{\tau_l}, T_N, x_{(0,i)}) &\to (X_{\sigma_i}, T_N, x_{(0,i)})\\ (\kappa_{j_l}, \mathrm{id})\colon \quad (X_{\tau_l}, T_N, x_{(0,j)}) &\to (X_{\sigma_j}, T_N, x_{(0,j)}).\end{aligned}$$

Wir setzen

$$X_{ij} \quad := \quad \bigcup \kappa_{i_l}(X_{\tau_l}) \quad \subseteq \quad X_{\sigma_i} \qquad \text{und} \qquad X_{ji} \quad := \quad \bigcup \kappa_{j_l}(X_{\tau_l}) \quad \subseteq \quad X_{\sigma_j}.$$

Die offenen Teilmengen X_{ij} und X_{ji} von X_{σ_i} bzw. X_{σ_j} sind quasiaffine torische k-Räume. Da alle $\kappa_{i_l}^{-1}$ auf $T_N x_{(0,i)}$ die Identität sind, existiert mit Folgerung 1.5.12 ein Isomorphismus $(\varphi_{ij}, \mathrm{id})\colon (X_{ij}, T_N, x_{(0,i)}) \to (X_{ji}, T_N, x_{(0,j)})$. Da jedes φ_{ij} auf $T_N x_{(0,i)}$ von torischen k-Räumen. die Identität ist, liefert Folgerung 1.5.12, Folgerung 3.3.19 und Lemma 3.4.7, dass die Bedingungen für Erinnerung 1.5.4 erfüllt sind. Somit ist

$$X_\Sigma \quad := \quad \left(\bigcup X_{\sigma_i}\right) / \sim_{\varphi_{ij}}$$

ein k-Raum. Weiter haben wir eine Wirkung $\mu_{X_\Sigma}\colon T \times X_\Sigma \to X_\Sigma$, $(t, [x]) \mapsto [tx]$. Die Wirkung ist wohldefiniert, da alle φ_{ij} auf $Tx_{(0,i)}$ die Identität sind. Für jedes $\sigma \in \Sigma$ erhalten wir eine kanonische offene T_N-äquivariante Einbettung $X_\sigma \to X_\Sigma$. Somit ist μ_{X_Σ} ein Morphismus. Jedes $X_{\sigma_i}/\sim$ ist ein quasiaffiner torischer k-Raum und es gilt $\varphi_{ij}(x_{(0,i)}) = x_{(0,j)}$. Somit ist (X_Σ, T_N, x_0) ein torischer k-Raum mit $x_0 := [x_{(0,i)}]$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass X_Σ separiert ist. Dazu reicht es nach Satz 3.2.21 zu zeigen, dass für jedes $\lambda \in \Lambda(T)$ der Morphismus $\lambda_{x_0}\colon \mathbb{K}^* \to X_\sigma$ höchstens eine Fortsetzung besitzt. Es seien $\nu_1, \nu_2\colon \mathbb{K} \to X_\Sigma$ zwei Fortsetzungen von λ_{x_0} mit $\lambda \in \Lambda(T)$. Weiter seien $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ mit $\nu_1(0) \in X_{\sigma_1}$ und $\nu_2(0) \in X_{\sigma_2}$. Nach Folgerung 3.3.9 gilt $\lambda \in \sigma_1 \cap \sigma_2$. Somit ist $\lambda \in \tau$ mit $\tau \preccurlyeq \sigma_1, \sigma_2$ und es gilt $\nu_1(0) = \nu_1(0) \in X_\tau$. Damit erhalten wir $\nu_1(0) = \nu_1(0) \in X_{\sigma_1} \cap X_{\sigma_2} \subseteq X_\Sigma$.

Bemerkung 3.5.2. Es sei (N, Σ) ein spitzer quasiaffiner k-Fächer. Weiter sei das Trippel (X_Σ, T_N, x_0) der quasiaffine k-Raum aus Konstruktion 3.3.8 und (Y_Σ, T_N, y_0) der torische separierte k-Raum aus Konstruktion 3.5.1. Dann liefert Folgerung 1.5.12, Konstruktion 3.5.1 und Lemma 3.4.7, dass $(X_\Sigma, T_N, x_0) \cong (Y_\Sigma, T_N, y_0)$ gilt.

Folgerung 3.5.3. *Es seien (N, Σ) ein spitzer k-Gitterfächer und $\lambda \in \Lambda(T)$. Dann konvergiert $\lambda(t)x_0$ in X_Σ genau dann, wenn $\lambda \in \mathring{\tau}$ mit $\tau \in \Sigma$ gilt. Insbesondere gilt für $\lambda, \lambda' \in \Lambda(T) \cap |\Sigma|$:*

$$\lim_{t \to 0}(\lambda(t)x_0) \quad = \quad \lim_{t\to 0}(\lambda'(t)x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda, \lambda' \in \mathring{\tau} \text{ mit einem k-Kegel } \tau \in \Sigma.$$

Beweis. Folgt direkt aus Satz 3.2.21, Lemma 3.3.9 und Konstruktion 3.5.1. $\square$

Definition 3.5.4. Es sei (N, Σ) ein spitzer k-Gitterfächer. Nach Folgerung 3.5.3 definiert jedes $\tau \in \Sigma$ einen Punkt $x_{\overset{\circ}{\tau}} := x_\tau := \lim_{t\to 0}(\lambda(t)x_0)$. Wir nennen x_τ den *Fußpunkt zu* τ.

Lemma 3.5.5. *Es sei (N, Σ) ein spitzer k-Fächer. Dann haben wir eine bijektive Zuordnung:* $\Sigma \to \mathrm{Orb}(X_\Sigma)$, $\tau \mapsto Tx_\tau$.

Beweis. Die Zuordnung ist nach Folgerung 3.5.3 und Satz 3.2.21 wohldefiniert. Nach Folgerung 3.3.19 und Konstruktion 3.5.1 haben wir lokale Bijektionen. Somit ist aber die Zuordnung bijektiv. □

Konstruktion 3.5.6. Es sei (X, T, x_0) ein separierter torischer k-Raum. Dann ist folgende Kollektion von spitzen k-Kegeln ein spitzer k-Fächer in $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$:

$$\Sigma_X \quad := \quad \{\omega(x,T)^* \cap |\Sigma_{X_0}|;\ x \in X_0,\ X_0 \subseteq X \text{ offen, quasiaffin } T\text{-invariant}\}.$$

Wir müssen zeigen, dass $\omega(x,T)^* \cap |\Sigma_{X_1}| = \omega(x,T)^* \cap |\Sigma_{X_2}|$ für $x \in X_1 \cap X_2$ gilt, wobei $X_1, X_2 \subseteq X$ offene quasiaffine $T-$invariante Teilmengen sind. Lemma 3.4.6 liefert $\Sigma_{X_1\cap X_2} \preccurlyeq \Sigma_{X_1}, \Sigma_{X_2}$. Somit gilt mit Konstruktion 3.3.13 und Lemma 2.2.10:

$$\omega(x,T)^* \cap |\Sigma_{X_1}| \quad = \quad \omega(x,T)^* \cap |\Sigma_{X_1\cap X_2}| \quad = \quad \omega(x,T)^* \cap |\Sigma_{X_1}|.$$

Also ist Σ_X wohldefiniert. Insbesondere ist nur noch zu zeigen, dass für je zwei $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_X$

$$\sigma_1 \ \cap \ \sigma_2 \quad = \quad \bigcup \tau_k$$

mit $\tau_k \preccurlyeq \sigma_1, \sigma_2$ gilt. Es seien also $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_X$ gegeben. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\sigma_1 \in \Sigma_{X_1}$ bzw. $\sigma_2 \in \Sigma_{X_2}$ gilt, wobei $X_1, X_2 \subseteq X$ offene quasiaffine $T-$invariante Teilmengen. Nach Lemma 3.4.7 können wir weiter annehmen, dass $X_{\sigma_1} \subseteq X_1$ und $X_{\sigma_2} \subseteq X_2$ offene Teilmengen sind. Somit ist $X_{\sigma_1} \cap X_{\sigma_2}$ eine offene Teilmenge von X_{σ_1} und X_{σ_2} sind. Nach Lemma 3.4.6 ist $\Sigma_{X_{\sigma_1}\cap X_{\sigma_2}}$ ein offener k-Teilfächer von $\mathcal{F}_{\sigma_1}$ und $\mathcal{F}_{\sigma_2}$. Somit gilt $|\Sigma_{X_{\sigma_1}\cap X_{\sigma_2}}| \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$. Wir zeigen, dass Gleichheit gilt. Dazu reicht es zu zeigen, dass folgende Inklusion gilt:

$$(\sigma_1 \ \cap \ \sigma_2) \ \cap \ \Lambda(T) \quad \subseteq \quad |\Sigma_{X_{\sigma_1}\cap X_{\sigma_2}}| \ \cap \ \Lambda(T).$$

Es sei dazu $\lambda \in (\sigma_1 \cap \sigma_2) \cap \Lambda(T)$ gegeben. Mit Lemma 3.3.9 erhalten wir, dass $\lambda'_{x_0}(0) \in X_{\sigma_1}$ und $\lambda'_{x_0}(0) \in X_{\sigma_2}$ gilt. Da X separiert ist, folgt mit Satz 3.2.21, dass $\lambda'_{x_0}(0) \in X_{\sigma_1} \cap X_{\sigma_2}$ gilt. Mit Lemma 3.3.9 erhalten wir $\lambda \in |\Sigma_{X_{\sigma_1}\cap X_{\sigma_2}}|$.

Für jede offene quasiaffine T-invariante Überdeckung $X_1, \ldots, X_n$ von X gilt:

$$\Sigma_X \quad = \quad \Sigma_{X_1} \ \cup \ \ldots \ \cup \ \Sigma_{X_n}.$$

Bemerkung 3.5.7. Es sei (X, T, x_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum. Weiter sei Δ_X der Fächer aus Konstruktion 3.5.6 und Σ_X der quasiaffine k-Fächer aus Konstruktion 3.3.13. Da Konstruktion 3.5.6 unabhänging von der Wahl der quasiaffinen Überdeckung ist, gilt $\Sigma_X = \Delta_X$.

Lemma 3.5.8. *Es sei (X, T, x_0) ein separierter torischer k-Raum und $X_1, \ldots, X_n$ eine offene quasiaffine torische Überdeckung. Dann haben wir folgende bijektive Zuordnung:* $\mathrm{Orb}(X) \to \Sigma_X$, $Tx \mapsto \omega(x,T)^* \cap |\Sigma_{X_i}|$, *wobei* $x \in X_i$.

Beweis. Nach Konstruktion 3.5.6 ist die Zuordnung wohldefiniert. Folgerung 3.3.19 liefert eine lokale Bijektionen. Somit ist die Zuordnung ebenfalls bijektiv. □

Folgerung 3.5.9. *Es sei (X, T, x_0) ein separierter torischer k-Raum. Dann existiert ein kanonischer torischer Isomorphismus* $(\iota, \widetilde{\iota})\colon (X_{\Sigma_X}, T_{\Lambda(T)}, x_0) \to (X, T, x_0)$.

Beweis. Konstruktion 3.5.6 ist unabhänging von der Wahl der offenen quasiaffinen T-invarianten Überdeckung von X. Die Aussage lässt sich auf den quasiaffinen Fall zurückführen und folgt dann aus Konstruktion 3.3.16. □

Folgerung 3.5.10. *Es sei (N, Σ) ein spitzer k-Gitterfächer. Dann existiert ein kanonische Isomorphismus von k-Gitterfächern* $\jmath\colon (N, \Sigma) \to (\Lambda(T_N), \Sigma_{X_\Sigma})$.

Beweis. Die Konstruktion 3.5.6 ist unabhänging von der Wahl der offenen quasiaffinen T_N-invarianten Überdeckung von X_Σ. Die Aussage lässt sich somit auf den quasiaffinen Fall zurückführen und folgt dann aus Konstruktion 3.3.18. □

Folgerung 3.5.11. *Es sei (X, T, x_0) ein separierter torischer k-Raum. Weiter sei $X_1, \ldots, X_n$ eine offene quasiaffine torische Überdeckung von X. Dann haben wir eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_X & \to & \mathrm{Orb}(X), \\ \tau & \mapsto & Tx_\tau; \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{Orb}(X) & \to & \Sigma_X, \\ Tx & \mapsto & w(x,T)^* \cap |\Sigma_{X_i}| \quad \textit{wobei } x \in X_i. \end{array}$$

Diese lieferen wiederum zueinander inverse Bijektionen:

$$\begin{array}{rcl} \mathring{\Sigma}_X & \to & \mathrm{Orb}(X), \\ \mathring{\tau} & \mapsto & Tx_{\mathring{\tau}}; \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{Orb}(X) & \to & \mathring{\Sigma}_X \\ Tx & \mapsto & \omega(\mathring{x,T})^*. \end{array}$$

Für jeden k-Kegel $\tau \in \Sigma_X$ gilt $\dim(Tx_\tau) = \dim(X) - \dim(\tau)$.

Beweis. Lemma 3.5.5 und Lemma 3.5.8 liefern, dass die Zuordnungen zueinander invers sind. Es gilt $\dim(X) = \dim(X_i)$. Für jedes $x_\tau \in X_i$ gilt weiter $Tx_\tau \in \mathrm{Orb}(X_i)$. Nach Folgerung 3.3.19 ist $\dim(Tx_\tau) \quad = \quad \dim(X) - \dim(\tau)$. □

Konstruktion 3.5.12. Es sei $F\colon (N, \Sigma) \to (M, \Delta)$ ein Morphismus von spitzen k-Gitterfächern. Wir konstruieren zu F einen Morphismus

$$(\mathrm{Spec}(\psi_{F^*}), \mathrm{Spec}(\psi_{F^*}))\colon (X_\Sigma, T_N, x_0) \to (Y_\Delta, T_M, y_0).$$

Es sei $\sigma \in \Sigma$ gegeben. Nach Voraussetzung existiert ein $\rho \in \Delta$ mit $F(\sigma) \subseteq \rho$. Weiter existiert nach Satz 3.4.9 ein Morphismus

$$(\varphi_\sigma, \widetilde{\varphi}_\sigma) \quad := \quad (\mathrm{Spec}(\psi_{F^*}), \mathrm{Spec}(\psi_{F^*}))\colon X_\sigma \ \to \ X_\rho \ \subseteq \ X_\Delta.$$

Zuerst zeigen wir, dass φ_σ unabhänging von der Wahl von ρ ist. Es sei $\rho_1 \in \Sigma$ mit $F(\sigma) \subseteq \rho_1$ gegeben. Mit Lemma 2.4.11 gilt $F^{\mathrm{c}}(\sigma) \subseteq \rho_1 \cap \rho = \cup \tau_k$ mit $\tau_k \preccurlyeq \rho, \rho_1$. Da $F^{\mathrm{c}}(\sigma)$ ein k-Kegel ist, folgt mit Lemma 2.1.30, dass $F^{\mathrm{c}}(\sigma) \subseteq \tau_l$ gilt. Wir erhalten wieder mit Lemma 2.4.11, dass $F(\sigma) \subseteq \tau_l$ gilt. Mit Satz 3.4.9 folgt $\varphi(X_\sigma) \subseteq X_\rho \cap X_{\rho_1} \subseteq X_\Sigma$.

Es seien $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$. Es ist zu zeigen, dass $\varphi_{\sigma_1} = \varphi_{\sigma_2}$ auf $X_{\sigma_1} \cap X_{\sigma_2}$ gilt. Nach Konstruktion 3.5.1 gilt:

$$X_{\sigma_1} \ \cap \ X_{\sigma_2} \quad = \quad \bigcup X_{\tau_k}$$

mit $\tau_k \preccurlyeq \sigma_1, \sigma_2$. Dies liefert $\varphi_{\sigma_1} = \varphi_{\sigma_2}$ auf allen X_{τ_k} und somit $\varphi_{\sigma_1} = \varphi_{\sigma_2}$ auf $X_{\sigma_1} \cap X_{\sigma_2}$.

Lemma 3.5.13. *Es sei* $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon (X, T_X, x_0) \to (Y, T_Y, y_0)$ *ein Morphismus von quasiaffinen torischen k-Räumen. Dann existiert zu jedem* $\tau \in \Sigma_X$ *ein* $\rho \in \Delta_Y$ *mit* $\varphi(x_\tau) = y_\rho$.

Beweis. Folgt aus Lemma 3.2.18 und Folgerung 3.5.3. □

Konstruktion 3.5.14. Es sei $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon (X, T_X, x_0) \to (Y, T_Y, y_0)$ ein Morphismus von separierten torischen k-Räumen. Wir konstruieren zu $(\varphi, \widetilde{\varphi})$ einen Morphismus von k-Gitterfächern

$$\widetilde{\varphi}_*\colon (\Lambda(T_X), \Sigma_X) \ \to \ (\Lambda(T_Y), \Delta_Y), \qquad \lambda \mapsto \widetilde{\varphi} \circ \lambda$$

konstruieren. Es seien $X_1, \ldots, X_r \subseteq X$ und $Y_1, \ldots, Y_s \subseteq Y$ quasiaffine T_X-invariante bzw. T_Y-invariante offene Überdeckungen von X bzw. Y. Da Y_j offene T_Y-invariante Teilmengen von Y sind, ist $\varphi^{-1}(Y_j)$ offen und T_X-invariant in X. Somit sind die $X_{ij} := X_i \cap \varphi^{-1}(Y_j)$ eine quasiaffine offene T_X-invariante Überdeckung von X. Nach Lemma 3.4.6 gilt $\Sigma_{X_{ij}} \preccurlyeq \Sigma_X$ und $\Delta_{Y_i} \preccurlyeq \Delta_Y$. Mit Konstruktion 3.5.6 erhalten wir:

$$\Sigma_X \quad = \quad \bigcup_{i,j} \Sigma_{X_{ij}} \qquad \text{und} \qquad \Delta_Y \quad = \quad \bigcup_{j} \Delta_{Y_j}.$$

Weiter sind $(\varphi_{|X_{ij}}, \widetilde{\varphi})\colon (X_{ij}, T_X, x_0) \to (Y_j, T_Y, y_0)$ torische Morphismen von quasiaffinen torischen k-Räumen. Nach Lemma 3.3.27 gibt es zu jedem $\tau \in \Sigma_{X_{ij}}$ ein $\rho \in \Delta_{Y_i}$ mit $\widetilde{\varphi}_*(\tau) \subseteq \rho$. Somit ist $\widetilde{\varphi}_*\colon (\Lambda(T_X), \Sigma_X) \to (\Lambda(T_Y), \Delta_Y)$ ein Morphismus von k-Gitterfächern.

Satz 3.5.15. *Wir haben zueinander wesentlich inverse kovariante Funktoren*

$$\mathcal{G}\colon \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kategorie der separierten} \\ \textit{torischen k-Räume} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kategorie der} \\ \textit{k-Gitterfächer} \end{array} \right\}$$

$$(X, T, x_0) \mapsto (\Lambda(T), \Sigma_X)$$

$$(\varphi, \widetilde{\varphi}) \mapsto \widetilde{\varphi}_*.$$

$$\mathcal{H}\colon \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kategorie der} \\ \textit{k-Gitterfächer} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kategorie der separierten} \\ \textit{torischen k-Räume} \end{array} \right\}$$

$$(N, \Sigma) \mapsto (X_\Sigma, T_N, x_0)$$

$$F \mapsto (\operatorname{Spec}(\psi_{F^*}), \operatorname{Spec}(\psi_{F^*})).$$

Beweis. Mit Konstruktion 3.5.1 und Konstruktion 3.5.12 erhalten wir, dass die Zuordnung $\mathcal{G}$ wohldefiniert ist. Nach Konstruktion 3.5.6 und Konstruktion 3.5.14 ist die Zuordnung $\mathcal{H}$ wohldefiniert. Dass $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ Funktoren sind, ist offensichtlich. Mit Satz 3.3.27 erhalten wir, dass die Funktoren lokal wesentlich invers zueinander sind. Wie im Fall der torischen Varietäten erhalten wir, dass die Funktoren $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ wesentlich inverse zueinander sind. □

Beispiel 3.5.16. Wir betrachten die quasiaffinen attraktiven torischen k-Räume $V_1 := (\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^*) \setminus (\mathbb{K}^* \times \{0\} \times \mathbb{K}^*)$ und $V_2 := \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^*$ mit der Standardwirkung von $T := (\mathbb{K}^*)^3$ und dem Basispunkt $y_0 := (1, 1, 1)$. Weiter betrachten wir den Isomorphismus $\psi\colon (\mathbb{K}^*)^3 \to (\mathbb{K}^*)^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_2/x_3, x_1)$ und setzen $Y := V_1 \cup_\psi V_2$. Dann ist (Y, T, y_0) ein torischer k-Raum. Der k-Raum Y ist sogar separiert.

Begründung: Wir berechnen für $V_1 \subseteq Y$ und $V_2 \subseteq Y$ die zugehörigen k-Kegel σ_{V_1} und σ_{V_2} in $\mathbb{Q}^3 \cong \Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$. Dazu berechnen wir zuerst die k-Kegel zu den torischen k-Räumen (V_1, T, y_0) und (V_2, T, y_0). Wir bezeichnen die zugehörigen k-Kegel mit $\widetilde{\sigma}_{V_1}$ bzw. $\widetilde{\sigma}_{V_2}$. Es gilt $V_1 \sqsubseteq V_1' := \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}$. Somit erhalten wir

$$\sigma_{V_1'} \quad = \quad \widetilde{\sigma}_{V_2} \quad = \quad \operatorname{cone}(e_1, e_2) \qquad \text{und} \qquad \widetilde{\sigma}_{V_1} \quad = \quad \{0\} \,\cup\, \mathring{\sigma}_{V_1'} \,\cup\, \overset{\circ}{\operatorname{cone}}(e_1).$$

Der Isomorphismus ψ liefert einen $\mathbb{Q}$-Vektorraumisomorphismus $F_\psi \colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$, $(v_1, v_2, v_3) \mapsto (v_2, v_2 - v_3, v_1)$. Es gilt $F_\psi(\sigma_{V_1'}) = \operatorname{cone}(e_3, e_1 + e_2) =: \sigma'$. Dies liefert

$$F_\psi(\widetilde{\sigma}_{V_1}) \quad = \quad \{0\} \,\cup\, \mathring{\sigma}' \,\cup\, \overset{\circ}{\operatorname{cone}}(e_3) \quad = \quad \sigma_{V_1}.$$

Weiter gilt $\sigma_{V_2} = \widetilde{\sigma}_{V_2}$ und $\sigma_{V_1} \cap \sigma_{V_2} = \{0\}$. Somit ist $\Sigma := \mathcal{F}_{\sigma_{V_1}} \cup \mathcal{F}_{\sigma_{V_2}}$ ein k-Fächer in V. Mit Konstruktion 3.5.1 erhalten wir, dass (X_Σ, T, x_0) isomorph zu (Y, T, y_0) ist. Nach Satz 3.5.15 ist X_Σ separiert. Somit ist auch Y separiert. In Abbildung 19 sieht man ein mögliches Schaubild des Trägers Σ.

Abbildung 19

Folgerung 3.5.17 (Faserformel)**.** *Es sei* $(\varphi, \widetilde{\varphi}) \colon (X, T_X, x_0) \to (Y, T_Y, y_0)$ *ein Morphismus von separierten torischen k-Räumen. Dann gilt für jedes* $\rho \in \Delta_Y$*:*

$$\varphi^{-1}(y_\rho) \quad = \quad \bigcup_{\tau \in \Sigma_X,\, \widetilde{\varphi}_*(\mathring{\tau}) \subseteq \mathring{\rho}} \widetilde{\varphi}^{-1}\left(T_{Y_{y_\rho}}\right) x_\tau.$$

Beweis. Zur Inklusion „$\subseteq$": Es sei ein $x \in \varphi^{-1}(y_\rho)$ gegeben. Nach Folgerung 3.5.11 gilt $x = t x_\sigma$ mit $t \in T_X$ und $\sigma \in \Sigma_X$. Weiter gilt

$$\varphi(x) \quad = \quad y_\rho \quad = \quad \widetilde{\varphi}(t)\varphi(x_\sigma).$$

Nach Lemma 3.5.13 wissen wir, dass $\varphi(x_\sigma) = \rho_1$ ein Fußpunkt ist mit $\widetilde{\varphi}_*(\mathring{\sigma}) \subseteq \mathring{\rho}_1$ und $\rho_1 \in \Delta_Y$. Somit gilt $\varphi(x) \in T_Y y_\rho \cap T_Y y_{\rho_1}$. Mit Folgerung 3.5.11 erhalten wir $\rho = \rho_1$. Insbesondere gilt $t \in T_{Y_{y_\rho}}$.

Die Inklusion „$\supseteq$" folgt aus Lemma 3.5.13. □

Lemma 3.5.18. *Es sei* (N, Σ) *ein k-Fächer. Dann gilt für* $\tau, \sigma \in \Sigma$*:*

$$T_N x_\sigma \quad \subseteq \quad \overline{T_N x_\tau} \qquad \Leftrightarrow \qquad \tau \preccurlyeq \sigma.$$

Beweis. Zur Implikation „$\Rightarrow$": Wir betrachten die offenen Teilmengen X_σ in X_Σ. Es gilt $T_N x_\sigma \in X_\sigma$. Da $X_\Sigma \setminus X_\sigma$ abgeschlossen ist, gilt $T_N x_\tau \in X_\sigma$. Mit Lemma 3.4.2 erhalten wir $\tau \preccurlyeq \sigma$.

Zur Implikation „$\Leftarrow$": Wir betrachten die offenen Teilmengen X_σ in X_Σ. Aus $\tau \preccurlyeq \sigma$ folgt, dass $T_N x_\tau \subseteq X_\sigma$ gilt. Mit Lemma 3.4.2 erhalten wir

$$T_N x_\sigma \quad \subseteq \quad \overline{T_N x_\tau}^{X_\sigma} \quad \subseteq \quad \overline{T_N x_\tau}^{X_\Sigma}.$$

□

Folgerung 3.5.19. *Es sei (X, T, x_0) ein separierter torischer k-Raum und $\tau \in \Sigma_X$: Dann gilt für $B := Tx_\tau \in \mathrm{Orb}(X)$:*

$$X_B \quad = \quad \bigcup_{\rho \preccurlyeq \tau} Tx_\rho.$$

Beweis. Folgt aus Lemma 3.2.12 und Lemma 3.5.18. □

Folgerung 3.5.20. *Es sei (X, T, x_0) ein separierter torischer k-Raum. Für $\tau \in \Sigma_X$ gilt:*

$$\mathbb{V}_\tau \quad := \quad \overline{Tx_\tau} \quad = \quad \bigcup_{\rho \in \mathrm{Stern}(\tau)} Tx_\rho.$$

Beweis. Folgt aus Lemma 3.5.18. □

Lemma 3.5.21. *Es sei (X, T, x_0) ein separierter torischer k-Raum und $Y \sqsubseteq X$ eine dichte T-invariante konstruierbare Teilmenge. Dann ist (Y, T, x_0) ein torischer k-Raum und es gilt $\Sigma_Y \sqsubseteq \Sigma_X$.*

Beweis. Lemma 3.2.4 liefert, dass $Y \sqsubseteq_T X$ gilt. Es sei $X_1, \ldots, X_n$ eine quasiaffine offene T-invariante Überdeckung von X. Wir setzen $Y_i := X_i \cap Y \neq \emptyset$. Dann ist $Y_1, \ldots, Y_n$ eine offene quasiaffine T-invariante Überdeckung von Y mit $Y_i \sqsubseteq_T X_i$. Nach Lemma 3.4.4 gilt $\Sigma_{Y_i} \sqsubseteq \Sigma_{X_i}$. Weiter liefert Konstruktion 3.5.6

$$\Sigma_X \quad = \quad \bigcup \Sigma_{X_i} \qquad \text{und} \qquad \Sigma_Y \quad = \quad \bigcup \Sigma_{Y_i}$$

und damit insbesondere $\Sigma_{X_i} \preccurlyeq \Sigma_X$. Nach Lemma 2.2.29 gilt $\Sigma_{X_i} \sqsubseteq \Sigma_X$. Somit liefert Lemma 2.2.30, dass $\Sigma_{Y_i} \sqsubseteq \Sigma_X$ gilt. Es sei jetzt ein $\tau \in \Sigma_Y$ gegeben. Dann gilt $\tau \in \Sigma_{Y_i}$. Somit gibt es ein $\rho \in \Sigma_X$ mit $\tau = \rho \cap |\Sigma_{Y_i}|$ und $\mathring{\tau} = \mathring{\rho}$. Daraus folgt $\tau \subseteq \rho \cap |\Sigma_Y|$. Es ist noch zu zeigen ist, dass $\rho \cap |\Sigma_Y| \subseteq \tau$ gilt. Dazu sei ein $\tau_2 \in \Sigma_Y$ mit $\mathring{\tau}_2 \cap \rho \neq \emptyset$ gegeben. Es gilt $\tau_2 \in \Sigma_{Y_j} \sqsubseteq \Sigma_X$. Somit existiert zu τ_2 ein $\rho_2 \in \Sigma_X$ mit $\mathring{\tau}_2 = \mathring{\rho}_2$. Nach Lemma 2.2.10 gilt $\rho_2 \preccurlyeq \rho$. Folgerung 3.5.11 liefert $Tx_\rho = Tx_\tau$ und $Tx_{\rho_2} = Tx_{\tau_2}$. Mit Lemma 3.5.18 erhalten wir

$$Tx_\tau \quad = \quad Tx_\rho \quad \subseteq \quad \overline{Tx_{\rho_2}}^X \cap Y \quad = \quad \overline{Tx_{\tau_2}}^X \cap Y \quad = \quad \overline{Tx_{\tau_2}}^Y.$$

Lemma 3.4.2 liefert $\tau_2 \preccurlyeq \tau$. Insbesondere gilt $\mathring{\tau}_2 \subseteq \tau$. □

Lemma 3.5.22. *Es sei (X, T, x_0) ein separierter torischer k-Raum und $U \subseteq X$ eine nichtleere offene T-invariante Teilmenge von X. Dann ist (U, T, x_0) ein torischer k-Raum und es gilt $\Sigma_U \preccurlyeq \Sigma_X$.*

Beweis. Lemma 3.2.4 liefert, dass $U \sqsubseteq_T X$ gilt. Nach Lemma 3.5.21 gilt $\Sigma_U \sqsubseteq \Sigma_X$. Somit existiert zu jedem $\tau \in \Sigma_U$ ein $\sigma \in \Sigma_X$ mit $\mathring{\tau} = \mathring{\sigma}$ und $\tau \subseteq \sigma$. Noch zu zeigen, dass $\tau = \sigma$ gilt. Aus $\mathring{\tau} = \mathring{\sigma}$ folgt mit Folgerung 3.5.11, dass $Tx_\sigma = Tx_\tau \subseteq U$ gilt. Angenommen es gibt ein $\rho \preccurlyeq \sigma$ mit $\mathring{\rho} \not\subseteq \tau$. Folgerung 3.5.11 liefert $Tx_\rho \subseteq X \setminus U$. Also insbesondere $\overline{Tx_\rho} \subseteq X \setminus U$. Mit Lemma 3.5.18 erhalten wir folgenden Widerspruch:

$$Tx_\tau \quad = \quad Tx_\sigma \quad \subseteq \quad \overline{Tx_\rho} \quad \subseteq \quad X \setminus U$$

□

Lemma 3.5.23. *Es seien* (N, Σ) *und* (N, Δ) *spitze k-Gitterfächer mit* $\Delta \sqsubseteq \Sigma$. *Dann existiert eine torische Einbettung* $(\kappa, \mathrm{id})\colon (Y_\Delta, T_N, x_0) \to (X_\Sigma, T_N, x_0)$ *mit*

$$\kappa(Y_\Delta) \quad = \quad \bigcup_{\tau \in \Sigma,\ \mathring{\tau} \in \mathring{\Delta}} T_N x_\tau.$$

Beweis. Zu jedem $\rho \in \Delta$ existiert ein $\sigma \in \Sigma$ mit $\rho = \sigma \cap |\Delta|$ und $\mathring{\rho} = \mathring{\sigma}$. Insbesondere ist dann $\mathcal{F}_\rho \sqsubseteq \mathcal{F}_\sigma$. Somit existiert nach Lemma 3.4.5 eine Einbettung $(\kappa_\rho, \mathrm{id})\colon (Y_\rho, T_N, x_0) \to (X_\sigma, T_N, x_0)$ mit

$$\kappa_\rho(Y_\rho) \quad = \quad \bigcup_{\tau \preccurlyeq \sigma,\ \mathring{\tau} \in \mathring{\mathcal{F}}_\rho} T_N x_\tau.$$

Da κ_ρ auf $T_N x_0$ die Identität ist und X_Σ separiert ist, folgt mit Folgerung 1.5.12, dass ein Morphismus $(\kappa, \mathrm{id})\colon (Y_\Delta, T_N, x_0) \to (X_\Sigma, T_N, x_0)$ existiert. Da Y_Δ ebenfalls separiert ist erhalten wir mit Folgerung 1.5.12, dass $\kappa\colon Y_\Delta \to \kappa(Y_\Delta)$ ein Isomorphismus ist. Mit Folgerung 3.5.11 folgt

$$\kappa(Y_\Delta) \quad = \quad \bigcup_{\tau \in \Sigma,\ \mathring{\tau} \in \mathring{\Delta}} T_N x_\tau.$$

□

Lemma 3.5.24. *Es seien* (N, Σ) *und* (N, Δ) *spitze k-Gitterfächer mit* $\Delta \preccurlyeq \Sigma$. *Dann existiert eine offene torische Einbettung* $(\kappa, \mathrm{id})\colon (Y_\Delta, T_N, y_0) \to (X_\Sigma, T_N, x_0)$ *mit*

$$\kappa(Y_\Delta) \quad = \quad \bigcup_{\tau \in \Delta} T x_\tau.$$

Beweis. Für jedes $\tau \in \Delta$ gilt $\tau \in \Sigma$. Somit haben wir nach Konstruktion 3.5.1 für jedes $\tau \in \Delta$ lokale Isomorphismen $(\kappa_\tau, \mathrm{id})\colon (Y_\tau, T_N, y_0) \to (X_\tau, T_N, x_0)$, wobei Y_τ offen in Y_Δ und X_τ offen in X_Σ ist. Da Y_Δ und X_Σ separiert sind und κ_τ auf $T_N x_0$ die Identität ist, erhalten wir mit Folgerung 1.5.12 eine offene Einbettung $(\kappa, \mathrm{id})\colon (Y_\Delta, T_N, y_0) \to (X_\Sigma, T_N, x_0)$. Mit Folgerung 3.5.11 und nach Konstruktion von κ erhalten wir

$$\kappa(Y_\Delta) \quad = \quad \bigcup_{\tau \in \Delta} T x_\tau.$$

□

Erinnerung 3.5.25. Es sei N ein Gitter und $T := T_N = \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[N^*])$. Ist L ein primitives Untergitter von N und $(v_1, \ldots, v_m)$ eine Basis von L, dann ist $H_L := \{\prod \lambda_{v_i}(k);\ k \in \mathbb{K}^*\}$ ein Untertorus von T. Ist H ein Untertorus von T, dann ist $L_H := \{v \in N;\ \lambda_v(\mathbb{K}^*) \subseteq H\}$ ein Untergitter von N. Wir haben zueinander inverse inklusionserhaltende Zuordnungen:

$$\{\ L;\ L \text{ primitives Untergitter von } N\ \} \to \{\ H;\ H \text{ Untertorus von } T\ \}$$
$$L \mapsto H_L.$$
$$\{\ L;\ L \text{ primitives Untergitter von } N\ \} \leftarrow \{\ H;\ H \text{ Untertorus von } T\ \}$$
$$L_H \leftarrow\!\shortmid H.$$

Für das Dualgitter N^* von N haben wir ebenfalls zueinander inverse inklusionserhaltende Zuordnungen:

$$\left\{ \ L^*;\ L^* \text{ primitives Untergitter von } N^* \ \right\} \to \left\{ \ H;\ H \text{ Untertorus von } T \ \right\}$$
$$L^* \mapsto H_{L^*} := \bigcap_{u \in L^*} \operatorname{kern}(\chi^u).$$
$$\left\{ \ L^*;\ L^* \text{ primitives Untergitter von } N^* \ \right\} \leftarrow \left\{ \ H;\ H \text{ Untertorus von } T \ \right\}$$
$$L_H^* := \{u \in N^*;\ \chi^u_{|H} = 1\} \hookleftarrow H.$$

Außerdem gilt $L_H^{\perp} = L_H^*$ und $(L_H^*)^{\perp} = L_H$.

Erinnerung 3.5.26. Es sei (X', T, x_0) eine torische Varietät. Für jedes $\tau' \in \Sigma_{X'}$ gilt $T_{x_{\tau'}} = H_{\operatorname{lin}(\tau') \cap \Lambda(T)}$. Weiter gilt $\dim(T_{x_{\tau'}}) = dim(\tau')$ für jedes $\tau' \in \Sigma_{X'}$.

Lemma 3.5.27. *Es sei (X, T, x_0) ein torischer separierter k-Raum. Für jedes $\tau \in \Sigma_X$ gilt $T_{x_\tau} = H_{\operatorname{lin}(\tau) \cap \Lambda(T)}$. Weiter gilt $\dim(T_{x_\tau}) = \dim(\tau)$ für jedes $\tau \in \Sigma_X$.*

Beweis. Es genügt den Fall zu betrachten, dass (X, T, x_0) ein attraktiver quasiaffiner k-Raum ist. Dazu sei (X', T, x_0) der affine Abschluss von (X, T, x_0). Nach Satz 3.2.28 können wir annehmen, dass $X \sqsubseteq_T X'$ gilt. Mit Lemma 3.5.21 gilt $\Sigma_X \sqsubseteq \Sigma_{X'}$. Die Kollektion $\Sigma_{X'}$ ist ein Fächer. Für jedes $\tau \in \Sigma_X$ sei τ' der Abschluss von τ. Mit Bemerkung 2.2.26 erhalten wir $\tau' \in \Sigma_{X'}$. Weiter gilt $\operatorname{lin}(\tau) = \operatorname{lin}(\tau')$ und $\mathring{\tau} = \mathring{\tau}'$. Folgerung 3.5.11 liefert $x_{\tau'} = x_\tau$. Somit folgt mit Erinnerung 3.5.26, dass $T_{x_\tau} = H_{\operatorname{lin}(\tau) \cap \Lambda(T)}$ gilt. Insbesondere folgt mit Bemerkung 2.1.35:

$$\dim(T_{x_\tau}) \quad = \quad \dim(T_{x_{\tau'}}) \quad = \quad \dim(\tau') \quad = \quad \dim(\tau).$$

□

Folgerung 3.5.28. *Es sei (X, T, x_0) ein torischer separierter k-Raum. Weiter sei $\tau, \sigma \in \Sigma_X$ mit $\tau \subseteq \sigma$ gegeben. Dann gilt $T_{x_\tau} \subseteq T_{x_\sigma}$.*

Beweis. Folgt aus Erinnerung 3.5.25 und Lemma 3.5.27. □

Lemma 3.5.29. *Es seien (N, Σ) ein k-Fächersystem, $\rho, \tau \in \Sigma$ mit $\rho \preccurlyeq \tau$ und $\lambda \in \mathring{\tau}$. Dann gilt $\lim_{s \to 0}(t'\lambda(s)x_\rho) = t'x_\tau$ in X_Σ für alle $t' \in T_N$.*

Beweis. Wir können annehmen, dass X ein quasiaffiner attraktiver torischer k-Raum ist und setzen $\sigma := \sigma_X$. Weiter betrachten wir den Morphismus $P\colon N \to N_\tau$ und setzen $p := \operatorname{Spec}(\psi_{P^*})\colon T \to T/T_{x_\tau}$ bzw. $\lambda_p(s) := p(\lambda(s))x_{P^{\mathrm{s}}(\rho)}$. Aus $\rho \preccurlyeq \tau$ folgt $Tx_\tau \in \mathbb{V}_\rho$. Weiter gilt $P(\lambda) \in P^{\overset{\circ}{\mathrm{s}}}(\tau)$. Lemma 3.4.18 liefert ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{K}^* \arrow[dl, "\lambda_p(s)x_{P^{\mathrm{s}}(\rho)}"'] \arrow[dr, "\lambda(s)x_\rho"] & \\
X_{P^{\mathrm{s}}(\sigma)} \arrow[rr, "\cong", "p(t)x_{P^{\mathrm{s}}(\delta)} \mapsto tx_\delta"'] & & \mathbb{V}_\rho
\end{tikzcd}$$

Nach Folgerung 3.5.3 gilt $\lim_{s \to 0}(\lambda_p(s)x_{P^{\mathrm{s}}(\rho)}) = x_{P^{\mathrm{s}}(\tau)}$. Somit liefert das Diagramm die Behauptung. □

Folgerung 3.5.30. *Es sei (N, Σ) ein spitzer k-Gitterfächer. Ist Σ 1-voll, so ist X_Σ lokal 1-voll.*

Beweis. Nach Definition ist jeder k-Kegel $\sigma \in \Sigma$ 1-voll. Somit folgt die Behauptung aus Konstruktion 3.5.1 und Lemma 3.4.19. $\square$

3.6. **Torische k-Räume und k-Gitterfächersysteme.**

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die Kategorie der torischen k-Räume und die Kategorie der k-Gitterfächersysteme äquivalent zueinander sind siehe Satz 3.6.19. Für torische Prävarietäten und Gitterfächersysteme wurde dies in [4] gezeigt. Satz 3.6.30 charakterisiert bestimmte torische k-Räume, die in eine Varietät einbettbar sind.

Konstruktion 3.6.1. Es sei $(N, \mathcal{S}) = (N, (\Sigma_{ij})_{i,j\in I})$ ein attraktives spitzes k-Gitterfächersystem. Wir wollen zu $(N, \mathcal{S})$ einen torischen k-Raum $(X_{\mathcal{S}}, T_N, x_0)$ konstruieren. Dazu setzen wir für $i, j \in I$:

$$X_i \quad := \quad X_{\Sigma_{ii}} \qquad \text{und} \qquad X_{ij} \quad := \quad X_{\Sigma_{ij}}.$$

Nach Satz 3.5.15 sind $(X_i, T_N, x_{(0,i)})$ und $(X_{ij}, T_N, x_{(0,i)})$ separierte torische k-Räume. Mit Lemma 3.5.24 existieren offene Einbettungen

$$(\kappa_{ij}, \mathrm{id})\colon (X_{ij}, T_N, x_{(0,i)}) \;\to\; (X_i, T_N, x_{(0,i)}).$$

Da $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}$ gilt, existieren Isomorphismen

$$(\varphi_{ij}, \mathrm{id})\colon (X_{ij}, T_N, x_{(0,i)}) \;\to\; (X_{ji}, T_N, x_{(0,j)}).$$

Da $(\Sigma_{ij})_{i,j\in I}$ ein k-Fächersystem ist, erhalten wir $\Sigma_{ij} \cap \Sigma_{ik} = \Sigma_{kj} \cap \Sigma_{ki}$. Mit der obigen Gleichung, Folgerung 3.5.17 und $\varphi_{ij} = \mathrm{id}$ auf $T_N x_{(0,i)}$ erhalten wir mit Folgerung 1.5.12, dass die Bedingungen für Erinnerung 1.5.4 erfüllt sind. Somit ist

$$X_{\mathcal{S}} \quad := \quad \left(\bigcup X_i\right) / \sim$$

ein k-Raum. Weiter haben wir eine Wirkung $\mu_{X_{\mathcal{S}}}\colon T \times X_{\mathcal{S}} \;\to\; X_{\mathcal{S}},\ (t, [x]) \mapsto [tx]$. Die Wirkung ist wohldefiniert, da alle φ_{ij} auf $Tx_{(0,i)}$ die Identität sind. Für jedes Σ_{ii} erhalten wir eine kanonische offene T_N-äquivariante Einbettung $X_{\Sigma_{ii}} = X_i \to X_{\mathcal{S}}$. Somit ist $\mu_{X_{\mathcal{S}}}$ ein wohldefinierter Morphismus. Jedes $X_i/\sim$ ist ein torischer attraktiver quasiaffiner k-Raum und es gilt $\varphi_{ij}(x_{(0,i)}) = x_{(0,j)}$. Somit ist $(X_{\mathcal{S}}, T_N, x_0)$ ein torischer k-Raum mit $x_0 := [x_{(0,i)}]$.

Lemma 3.6.2. *Es sei $(N, \mathcal{S}) = (N, (\Sigma_{ij})_{i,j\in I})$ ein attraktives spitzes k-Gitterfächersystem. Für zwei Fußpunkte $x_{(\sigma,i)} \in X_i = X_{\Sigma_{ii}}$ und $x_{(\tau,j)} \in X_j = X_{\Sigma_{jj}}$ gilt: Die Punkte $x_{(\sigma,i)}$ und $x_{(\tau,j)}$ werden genau dann in $X_{\mathcal{S}}$ identifiziert, wenn $[\sigma, i] = [\tau, j]$ gilt. Insbesondere ist $x_0 = [\{0\}, i]$.*

Beweis. Die Fußpunkte $x_{(\sigma,i)}$ und $x_{(\tau,j)}$ werden genau dann in $X_{\mathcal{S}}$ identifiziert, wenn $x_{(\sigma,i)} \in X_{ij}$, $x_{(\tau,j)} \in X_{ji}$ und $\sigma = \tau$ gilt. Es gilt genau dann $x_{(\sigma,i)} \in X_{ij}$, $x_{(\tau,j)} \in X_{ji}$ und $\sigma = \tau$, wenn $[\sigma, i] = [\tau, j]$ gilt. □

Definition 3.6.3. Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein attraktives spitzes k-Gitterfächersystem. Nach Lemma 3.6.2 definiert jedes $[\sigma, i] \in \Omega(\mathcal{S})$ einen Punkt $x_{[\sigma,i]}$ in $X_{\mathcal{S}}$. Wir nennen $x_{[\sigma,i]}$ den *Fußpunkt zu* $[\sigma, i]$.

Folgerung 3.6.4. *Es seien $(N, \mathcal{S})$ ein spitzes attraktives k-Gitterfächersystem und $\lambda \in \Lambda(T)$. Dann konvergiert $\lambda(t)x_0$ in $X_{\mathcal{S}}$ genau dann, wenn $\lambda \in \mathring{\tau}$ gilt mit $[\tau, i] \in \Omega(\mathcal{S})$.*

Beweis. Folgt aus Konstruktion 3.6.1 und Folgerung 3.5.3. □

Lemma 3.6.5. *Es sei $(N, \mathcal{S}) = (N, (\Sigma_{ij})_{i,j \in I})$ ein spitzes attraktives k-Gitterfächersystem. Dann gilt für $\lambda, \lambda' \in \Lambda(T) \cap \bigcup |\Sigma_{ii}|$: Es gibt genau dann Fortsetzungen $\widetilde{\lambda}_{x_{[0,i]}}$ und $\widetilde{\lambda}'_{x_{[0,j]}}$ von $\lambda_{x_{[0,i]}}$ bzw. $\lambda'_{x_{[0,j]}}$ mit $\widetilde{\lambda}_{x_{[0,i]}}(0) = \widetilde{\lambda}'_{x_{[0,j]}}(0)$, wenn $\lambda, \lambda' \in \mathring{\tau}$ mit $[\tau, i] = [\tau, j] \in \Omega(\mathcal{S})$ gilt.*

Beweis. Zur Implikation „$\Rightarrow$": Mit Konstruktion 3.6.1 gilt $\widetilde{\lambda}_{x_{[0,i]}}(0) = \widetilde{\lambda}'_{x_{[0,j]}}(0) \in X_{\Sigma_{ii}} \cap X_{\Sigma_{jj}} = X_{\Sigma_{ij}}$. Somit existiert mit Folgerung 3.5.3 ein $\tau \in \Sigma_{ij}$ mit $\lambda, \lambda' \in \mathring{\tau}$. Wegen $\tau \in \Sigma_{ij}$ gilt $[\tau, i] = [\tau, j]$.

Zur Implikation „$\Leftarrow$": Aus $\lambda, \lambda' \in \mathring{\tau}$, wobei $[\tau, i] = [\tau, j] \in \Omega(\mathcal{S})$, folgt $\tau \in \Sigma_{ij}$. Somit erhalten wir die Behauptung aus Folgerung 3.5.3 und Konstruktion 3.6.1. □

Folgerung 3.6.6. *Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein attraktives spitzes k-Gitterfächersystem. Dann haben wir eine Bijektion*

$$\Omega(\mathcal{S}) \ \to \ \{\textit{Bahnen von } X_{\mathcal{S}}\}, \qquad [\sigma, i] \ \mapsto \ Tx_{[\sigma,i]}.$$

Insbesondere gilt $[\{0\}, i] \mapsto Tx_{[0,i]}$. Es gilt $\dim(Tx_{[\tau,i]}) = \dim(X_{\mathcal{S}}) - \dim(\tau)$ für jedes $[\tau, i] \in \Omega(\mathcal{S})$.

Beweis. Folgt aus Folgerung 3.5.11 und Lemma 3.6.2. □

Lemma 3.6.7. *Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein attraktives spitzes k-Gitterfächersystem. Dann gilt für $[\sigma, i], [\tau, j] \in \Omega(\mathcal{S})$:*

$$Tx_{[\sigma,i]} \ \subseteq \ \overline{Tx_{[\tau,j]}} \qquad \Leftrightarrow \qquad [\tau, j] \preccurlyeq [\sigma, i].$$

Beweis. Zur Implikation „$\Rightarrow$": Wir betrachten die quasiaffine offene Teilmenge $X_i := X_{\Sigma_{ii}} \subseteq X_{\mathcal{S}}$ von $X_{\mathcal{S}}$. Dann ist $Tx_{[\sigma,i]} \subseteq X_i$. Da $X_{\mathcal{S}} \setminus X_i$ abgeschlossen und T_N-invariant ist, gilt $x_{[\tau,j]} \in X_i$. Nach Konstruktion 3.6.1 gilt $x_{[\tau,j]} \in X_{ij}$ und somit ist $[\tau, i] = [\tau, j]$. Mit Lemma 3.5.18 erhalten wir $[\tau, j] \preccurlyeq [\sigma, i]$.

Zur Implikation „$\Leftarrow$": Aus $[\tau, j] \preccurlyeq [\sigma, i]$ erhalten wir $[\tau, i] = [\tau, j]$ und $\tau \preccurlyeq \sigma$. Nach Lemma 3.5.18 gilt $Tx_{(\sigma,i)} \subseteq \overline{Tx_{(\tau,i)}}^{X_i} \subseteq X_i = X_{\Sigma_{ii}}$. Somit gilt $Tx_{[\sigma,i]} \subseteq \overline{Tx_{[\tau,j]}}$. □

Folgerung 3.6.8. *Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein attraktives spitzes k-Gitterfächersystem. Dann gilt für $[\tau, i] \in \Omega(\mathcal{S})$:*

$$\mathbb{V}_{[\tau,i]} \quad := \quad \overline{Tx_{[\tau,i]}} \quad = \quad \bigcup_{[\rho,j] \in \mathrm{Stern}_{\mathcal{S}}([\tau,i])} Tx_{[\rho,j]} \quad \subseteq \quad X_{\mathcal{S}}.$$

Beweis. Folgt aus Lemma 3.6.7. □

Definition 3.6.9. Es seien $(N, \mathcal{S})$ ein attraktives spitzes k-Gitterfächersystem und $[\sigma, i] \in \Omega(\mathcal{S})$. Mit $X_{[\sigma,i]}$ bezeichnen wir die torische quasiaffine offene Teilmenge von $X_{\mathcal{S}}$, in der $Tx_{[\sigma,i]}$ die einzige abgeschlossene Bahn ist siehe Lemma 3.2.12.

Folgerung 3.6.10. *Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein attraktives spitzes k-Gitterfächersystem. Dann gilt für $[\sigma, i] \in \Omega(\mathcal{S})$:*

$$X_{[\sigma,i]} \quad = \quad \bigcup_{[\tau,j] \preccurlyeq [\sigma,i]} Tx_{[\tau,j]} \quad = \quad \bigcup_{[\tau,j] \preccurlyeq [\sigma,i]} X_{[\tau,j]}.$$

Beweis. Folgt aus Lemma 3.2.12 und Lemma 3.6.7. □

Folgerung 3.6.11. *Es seien $(N,\mathcal{S})$ ein attraktives spitzes k-Gitterfächersystem und $[\sigma,i] \in \Omega(\mathcal{S})$. Dann ist $(X_{[\sigma,i]}, T_N, x_0)$ torisch isomorph zu (X_σ, T_N, x_0), wobei (X_σ, T_N, x_0) der zu (N,σ) gehörige quasiaffine attraktive k-Raum ist.*

Beweis. Folgt im Wesentlichen aus Folgerung 3.4.16 bzw. Folgerung 3.4.15. □

Konstruktion 3.6.12. Es sei (X,T,x_0) ein torischer k-Raum. Wir konstruieren zu (X,T,x_0) ein attraktives spitzes k-Gitterfächersystem $(\Lambda(T), \mathcal{S}_X)$. Es sei $X_1,\dots,X_r$ die attraktive offene quasiaffine torische Überdeckung von X aus Lemma 3.2.12. Die offenen Teilmengen $X_i \cap X_j$ sind separierte torische k-Räume. Wir setzen

$$\Sigma_{ij} \quad := \quad \Sigma_{X_i \cap X_j}.$$

Es gilt $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}$. Nach Satz 3.5.15 sind alle Σ_{ij} spitze k-Fächer in $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$. Mit Satz 3.4.9 sind $|\Sigma_{ii}|$ spitze k-Kegel in $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$. Folgerung 3.4.13 liefert $\Sigma_{ii} = \mathcal{F}_{|\Sigma_i|}$. Mit Lemma 3.4.6 erhalten wir $\Sigma_{ij} \preccurlyeq \Sigma_{ii}, \Sigma_{jj}$. Weiter gilt:

$$X_i \ \cap \ X_j \ \cap \ X_k \quad \subseteq \quad X_i \cap X_k.$$

Somit liefert Folgerung 3.5.11, dass $\Sigma_{ij} \cap \Sigma_{jk} \preccurlyeq \Sigma_{ik}$ gilt.

Lemma 3.6.13. *Es sei (X,T,x_0) ein torischer k-Raum. Dann existiert ein Isomorphismus $(\iota, \widetilde{\iota})\colon (X,T,x_0) \to (X_{\mathcal{S}_X}, T_{N_T}, x_0)$.*

Beweis. Es sei $X_1,\dots,X_r$ die attraktive offene quasiaffine torische Überdeckung von X aus Lemma 3.2.12. Nach Konstruktion 3.6.12 ist $\mathcal{S}_X = (\Sigma_{ij})_{i,j\in I}$ ein attraktives spitzes k-Gitterfächersystem und es gilt $\Sigma_{ij} = \Sigma_{X_i \cap X_j}$. Nach Konstruktion 3.6.1 ist $X_{\Sigma_{ii}}$ eine attraktive Überdeckung von $X_{\mathcal{S}_X}$. Mit Satz 3.3.27 und Satz 3.4.9 sind alle Verklebedaten auf natürliche Weise isomorph. Somit existiert ein Isomorphismus $(\iota, \widetilde{\iota})\colon (X,T,x_0) \ \to \ (X_{\mathcal{S}_X}, T_{N_T}, x_0)$. □

Konstruktion 3.6.14. Es sei $(F,\mathfrak{f})\colon (N,\mathcal{S}) \to (M,\mathcal{R})$ ein Morphismus von k-Gitterfächersystemen. Wir konstruieren zu $(F,\mathfrak{f})$ einen Morphismus von torischen k-Räumen

$$(\varphi_{(F,\mathfrak{f})}, \widetilde{\varphi}_{(F,\mathfrak{f})})\colon (X_{\mathcal{S}}, T_N, x_0) \ \to \ (Y_{\mathcal{R}}, T_M, y_0).$$

Es sei $\mathcal{S}$ von der Gestalt $\mathcal{S} = (\Sigma_{ij})_{i,j\in I}$. Weiter seien $i \in I$ und $\sigma \in \Sigma_{ii}$ fest gewählt. Wir setzen $[\rho,s] := \mathfrak{f}([\sigma,i])$. Also gilt $F(\sigma) \subseteq \rho$ und somit definiert F mit Folgerung 3.6.11 einen Morphismus $(\varphi_{[\sigma,i]}, \widetilde{\varphi}_{[\sigma,i]})\colon X_{[\sigma,i]} \ \to \ Y_{[\rho,s]}$ von quasiaffinen torischen k-Räumen. Nach Definition der Äquivalenzklasse „[,]" ist der Morphismus $(\varphi_{[\sigma,i]}, \widetilde{\varphi}_{[\sigma,i]})$ unabhängig von der Wahl von $[\rho,s]$. Mit Bemerkung 2.4.27 (ii)(b) und Folgerung 3.6.10 erhalten wir, dass für jedes $[\tau,j] \in \Omega(\mathcal{S})$ gilt:

$$(\varphi_{[\sigma,i]})_{|X_{[\sigma,i]} \cap X_{[\tau,j]}} \quad = \quad (\varphi_{[\tau,j]})_{|X_{[\sigma,i]} \cap X_{[\tau,j]}}.$$

Somit können wir die Morphismen $(\varphi_{[\sigma,i]}, \widetilde{\varphi}_{[\sigma,i]})$ zu einem Morphismus $(\varphi_{(F,\mathfrak{f})}, \widetilde{\varphi}_{(F,\mathfrak{f})})$ zusammenkleben.

Lemma 3.6.15. *Es sei $(F,\mathfrak{f})\colon (N,\mathcal{S}) \to (M,\mathcal{R})$ ein Morphismus von attraktiven spitzen k-Gitterfächersystemen. Dann gilt $\varphi_{(F,\mathfrak{f})}(x_{[\sigma,i]}) = y_{\mathfrak{f}([\sigma,i])}$ für jedes $[\sigma,i] \in \Omega(\mathcal{S})$.*

Beweis. Wir betrachten den Morhpismus $(\varphi_{[\sigma,i]}, \widetilde{\varphi}_{[\sigma,i]})\colon X_{[\sigma,i]} \ \to \ Y_{[\rho,s]}$aus Konstruktion 3.6.14, wobei $[\rho,s] := \mathfrak{f}([\sigma,i])$. Wegen $F(\mathring{\sigma}) \subseteq \mathring{\rho}$ erhalten wir, mit Lemma 3.3.25, dass $\varphi_{[\sigma,i]}(x_{(\sigma,i)}) = y_{(\rho,s)}$ gilt. Somit ist $\varphi_{(F,\mathfrak{f})}(x_{[\sigma,i]}) = y_{\mathfrak{f}([\sigma,i])}$. □

Lemma 3.6.16 (Faserformel)**.** *Es sei* $(F,\mathfrak{f})\colon (N,\mathcal{S}) \to (M,\mathcal{R})$ *ein Morphismus von attraktiven spitzen k-Gitterfächersystemen. Dann gilt für jeden Fußpunkt* $y_{[\rho,n]} \in Y_{\mathcal{R}}$*:*

$$\varphi^{-1}_{(F,\mathfrak{f})}(y_{[\rho,s]}) \quad = \quad \bigcup_{[\sigma,i]\in\mathfrak{f}^{-1}([\rho,s])} \widetilde{\varphi}^{-1}_{(F,\mathfrak{f})}(T_{y_{[\rho,s]}})x_{[\sigma,i]}.$$

Beweis. Zur Inklusion „$\subseteq$": Es sei dazu $x \in \varphi^{-1}_{(F,\mathfrak{f})}(y_{[\rho,s]})$ gegeben. Mit Folgerung 3.6.6 ist $x = tx_{[\sigma,i]}$ für ein $t \in T_N$ und $[\sigma,i] \in \Omega(\mathcal{S})$. Somit erhalten wir

$$\varphi_{(F,\mathfrak{f})}(x) \quad = \quad y_{[\rho,s]} \quad = \quad \widetilde{\varphi}_{(F,\mathfrak{f})}(t)\cdot\varphi_{(F,\mathfrak{f})}(x_{[\sigma,i]}).$$

Nach Lemma 3.6.15 wissen wir, dass $\varphi_{(F,\mathfrak{f})}(x_{[\sigma,i]})$ ein Fußpunkt ist. Wir erhalten $\varphi_{(F,\mathfrak{f})}(x_{[\sigma,i]}) = y_{[\rho,s]}$ und $\widetilde{\varphi}_{(F,\mathfrak{f})}(t)y_{[\rho,s]}y_{[\rho,s]}$. Die Inklusion „$\supseteq$" folgt sofort aus Lemma 3.6.15. $\square$

Folgerung 3.6.17. *Es seien* $(N,\mathcal{S})$ *und* $(M,\mathcal{R})$ *attraktive spitze k-Gitterfächersysteme. Weiter sei* $(\varphi,\widetilde{\varphi})\colon X_{\mathcal{S}} \to Y_{\mathcal{R}}$ *ein Morphismus von torischen k-Räumen. Dann ist für jedes* $[\sigma,i] \in \Omega(\mathcal{S})$ *das Bild* $\varphi(x_{[\sigma,i]})$ *ein Fußpunkt in* $Y_{\mathcal{R}}$*.*

Beweis. Nach Lemma 3.2.14 und Folgerung 3.6.6 gilt $\varphi(X_{[\sigma,i]}) \subseteq Y_{[\tau,l]}$ für ein $[\tau,l] \in \Omega(\mathcal{R})$. Somit folgt die Behauptung aus Folgerung 3.6.11 und Lemma 3.3.22. $\square$

Konstruktion 3.6.18. Es seien $(N,\mathcal{S})$ und $(M,\mathcal{R})$ attraktive spitze k-Gitterfächersysteme. Weiter sei $(\varphi,\widetilde{\varphi})\colon X_{\mathcal{S}} \to Y_{\mathcal{R}}$ ein Morphismus von torischen k-Räumen. Wir wollen zu $(\varphi,\widetilde{\varphi})$ einen Morphismus $(F,\mathfrak{f})\colon (N,\mathcal{S}) \to (M,\mathcal{R})$ von k-Gitterfächern konstruieren, sodass $(\varphi_{(F,\mathfrak{f})},\widetilde{\varphi}_{(F,\mathfrak{f})}) = (\varphi,\widetilde{\varphi})$ gilt . Nach Folgerung 3.6.17 existiert zu jedem $[\sigma,i] \in \Omega(\mathcal{S})$ ein $[\rho,s] \in \Omega(\mathcal{R})$ mit $\varphi(x_{[\sigma,i]}) = y_{[\rho,s]}$. Wir setzen $\mathfrak{f}([\sigma,i]) := [\rho,s]$. Mit Lemma 3.2.14 erhalten wir, dass $\varphi(X_{[\sigma,i]}) \subseteq Y_{[\rho,s]}$ gilt. Also ist

$$(\varphi_{X_{[\sigma,i]}},\widetilde{\varphi})\colon (X_{[\sigma,i]},T_N,x_0) \;\to\; (Y_{[\rho,s]},T_M,y_0)$$

ein Morphismus von quasiaffinen torischen k-Räumen. Somit gilt $F(\sigma) \subseteq \rho$. Mit Folgerung 3.5.17 und $\varphi(x_{[\sigma,i]}) = y_{[\rho,s]}$ erhalten wir $F(\mathring{\sigma}) \subseteq \mathring{\rho}$. Folgerung 3.6.10 liefert, dass $\mathfrak{f}([\tau,j])\preccurlyeq\mathfrak{f}([\sigma,i])$ gilt für jedes $[\tau,j]\preccurlyeq[\sigma,i]$. Somit ist $(F,\mathfrak{f})$ ein Morphismus von k-Gitterfächern. Mit Lemma 3.6.15 erhalten wir $(\varphi_{(F,\mathfrak{f})},\widetilde{\varphi}_{(F,\mathfrak{f})}) = (\varphi,\widetilde{\varphi})$.

Satz 3.6.19. *Der folgende Funktor ist volltreu und wesentlich surjektiv.*

$$\mathcal{G}\colon \left\{\begin{array}{c}\textit{Kategorie der spitzen}\\ \textit{attraktiven k-Gitterfächersysteme}\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{c}\textit{Kategorie der}\\ \textit{torischen k-Räume}\end{array}\right\}$$
$$(N,\mathcal{S}) \mapsto (X_{\mathcal{S}},T_N,x_0)$$
$$(F,\mathfrak{f}) \mapsto (\varphi_{(F,\mathfrak{f})},\widetilde{\varphi}_{(F,\mathfrak{f})}).$$

Beweis. Mit Konstruktion 3.6.1 und Konstruktion 3.6.14 ist die Zuordnung $\mathcal{G}$ wohldefiniert. Offensichtlich ist $\mathcal{G}$ ein Funktor ist. Konstruktion 3.6.18 liefert, dass $\mathcal{G}$ volltreu ist. Nach Lemma 3.6.13 ist der Funktor $\mathcal{G}$ wesentlich surjektiv. $\square$

Folgerung 3.6.20. *Es sei* $(N,\mathcal{S})$ *ein spitzes attraktives k-Gitterfächersystem. Ist* $\mathcal{S}$ *1-voll, so ist* $X_{\mathcal{S}}$ *lokal 1-voll.*

Beweis. Es sei $\mathcal{S} = (\Sigma_{ij})_{i,j\in I}$. Nach Definition ist Σ_{ii} 1-voll. Somit folgt die Behauptung aus Konstruktion 3.6.1 und Folgerung 3.5.30. $\square$

Lemma 3.6.21. *Es seien $(N, \mathcal{R} := (\Delta_{sl})_{s,l \in L})$ und $(N, \mathcal{S} := (\Sigma_{ij})_{i,j \in I})$ attraktive spitze k-Gitterfächersysteme mit $\mathcal{R} \sqsubseteq \mathcal{S}$. Dann existiert eine torische Einbettung $(\kappa, \mathrm{id})\colon (Y_{\mathcal{R}}, T_N, x_0) \to (X_{\mathcal{S}}, T_N, x_0)$ mit*

$$\kappa(Y_{\mathcal{R}}) \quad = \quad \bigcup_{\substack{[\tau, i] \in \Omega(\mathcal{S}) \\ \textit{mit } \mathring{\tau} = \mathring{\rho} \textit{ für } [\rho, s] \in \Omega(\mathcal{R})}} T_N x_{[\tau,i]}.$$

Beweis. Nach Definition existiert eine injektive Abbildung $\iota\colon L \to I$, sodass für alle $s, l \in L$ folgende Aussagen gelten:

(i) Es gilt $\Delta_{ss} \sqsubseteq \Sigma_{\iota(s)\iota(s)}$.

(ii) Für jedes $\tau \in \Sigma_{\iota(s)\iota(l)}$ mit $\mathring{\tau} \in \mathring{\Delta}_{ss}$ gilt $\tau \cap |\mathring{\Delta}_{ss}| \in \Delta_{sl}$.

Wir können annehmen, dass $L \subseteq I$ gilt. Nach Bemerkung 2.3.33 gilt $\Delta_{sl} \sqsubseteq \Sigma_{sl}$ für alle $s, l \in L$. Lemma 3.5.23 liefert eine torische Einbettungen $(\kappa_{sl}, \mathrm{id})\colon (Y_{\Delta_{sl}}, T, y_0) \to (X_{\Sigma_{sl}}, T, x_0)$. Für $s, l \in L \subseteq I$ setzen wir $Y_{sl} := Y_{\Delta_{sl}}$ und für $i, j \in I$ setzen wir $X_{ij} := X_{\Sigma_{ij}}$. Nach Lemma 3.5.24 können wir annehmen, dass X_{ij} eine offene Teilmenge von X_{ii} und Y_{sl} eine offene Teilmenge von Y_{ss} ist. Für alle $s, l \in L$ existieren Isomorphismen $(\varphi_{sl}, \mathrm{id})\colon (Y_{sl}, T, y_0) \to (Y_{ls}, T, y_0)$. bzw. für alle $i, j \in I$ existieren Isomorphismen $(\varphi'_{ij}, \mathrm{id})\colon (X_{ij}, T, x_0) \to (X_{ji}, T, x_0)$. Nach Konstruktion 3.6.1 gilt

$$X_{\mathcal{S}} \quad = \quad \Big(\bigcup X_{ii}\Big) / \sim_{\varphi'_{ij}} \qquad \text{und} \qquad Y_{\mathcal{R}} \quad = \quad \Big(\bigcup Y_{ss}\Big) / \sim_{\varphi_{sl}} .$$

Wir haben somit folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
X_{ss} & \supseteq & X_{sl} \arrow[r, "\varphi'_{sl}"] & X_{ls} & \subseteq & X_{ll} \\
Y_{ss} \arrow[u, "\kappa_{ss}"] & \supseteq & Y_{sl} \arrow[u, "\kappa_{sl}"] \arrow[r, "\varphi_{sl}"'] & Y_{ls} \arrow[u, "\kappa_{ls}"'] & \subseteq & Y_{ll} \arrow[u, "\kappa_{ll}"']
\end{tikzcd}$$

Da alle X_{sl} bzw. Y_{sl} separiert sind und $\kappa_{sl}, \varphi_{sl}$ bzw. φ'_{sl} auf Tx_0 die Identität sind, erhalten wir mit Folgerung 1.5.12, dass das innere Diagramm kommutiert. Es ist noch zu zeigen, dass gilt :

$$\kappa_{ss}(Y_{ss}) \ \cap \ X_{sl} \quad = \quad \kappa_{sl}(Y_{sl}).$$

Da X_{ss} separiert ist und κ_{sl} und κ_{ss} auf T die Identität sind, gilt $\kappa_{ss}(Y_{sl}) = \kappa_{sl}(Y_{sl})$. Es reicht zu zeigen, dass für jedes $\rho \in \Delta_{ss}$ mit $\kappa(y_\rho) \in X_{sl}$ stets $\kappa(y_\rho) \in \kappa_{ss}(Y_{sl})$ gilt. Dazu sei ein $\rho \in \Delta_{ss}$ mit $\kappa(y_\rho) \in X_{sl}$ gegeben. Aus $\kappa(y_\rho) \in X_{sl}$ folgt mit Lemma 3.5.23 und Folgerung 3.5.11, dass $\mathring{\rho} \in \mathring{\Sigma}_{sl}$ gilt. Also existiert ein k-Kegel $\tau \in \Sigma_{sl}$ mit $\mathring{\tau} = \mathring{\rho} \in \mathring{\Delta}_{ss}$. Nach Voraussetzung ist $\tau \cap |\Delta_{ss}| \in \Delta_{sl}$. Somit folgt mit Lemma 3.5.23 und Folgerung 3.5.11, dass $\kappa(y_\rho) \in \kappa_{ss}(Y_{sl})$ gilt. Also sind die Verklebedaten verträglich und wir erhalten somit eine torische Einbettung $(\kappa, \mathrm{id})\colon (Y_{\mathcal{R}}, T_N, x_0) \to (X_{\mathcal{S}}, T_N, x_0)$. Mit Lemma 3.5.23, Lemma 3.6.5 und Folgerung 3.6.6 erhalten wir

$$\kappa(Y_{\mathcal{R}}) \quad = \quad \bigcup_{\substack{[\tau, i] \in \Omega(\mathcal{S}) \\ \text{mit } \mathring{\tau} = \mathring{\rho} \text{ für } [\rho, s] \in \Omega(\mathcal{R})}} T_N x_{[\tau,i]}.$$

□

Folgerung 3.6.22. *Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein spitzes attraktives k-Fächersystem, sodass der Abschluss $(N, \mathcal{S}')$ aus Konstruktion 2.3.34 existiert. Dann existiert eine torische Einbettung $(\kappa, \mathrm{id})\colon (X_{\mathcal{S}}, T_N, x_0) \;\to\; (X_{\mathcal{S}'}, T_N, x_0)$.*

Beweis. Aus Konstruktion 2.3.34 folgt, dass $\mathcal{S}'$ ein attraktives spitzes k-Fächersystem ist. Nach Konstruktion 2.3.34 gilt $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{S}'$. Somit folgt die Behauptung aus Lemma 3.6.21. □

Lemma 3.6.23. *Es seien $(N, \mathcal{R} := (\Delta_{sl})_{s,l\in L})$ und $(N, \mathcal{S} := (\Sigma_{ij})_{i,j\in I})$ attraktive spitze k-Gitterfächersysteme mit $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$. Dann existiert eine offene torische Einbettung $(\kappa, \mathrm{id})\colon (Y_{\mathcal{R}}, T_N, x_0) \to (X_{\mathcal{S}}, T_N, x_0)$ mit*

$$\kappa(Y_{\mathcal{R}}) \quad = \quad \bigcup_{[\tau,s]\in\Omega(\mathcal{R})} T_N x_{[\tau,s]}.$$

Beweis. Nach Definition existiert eine injektive Abbildung $\iota\colon L \to I$, sodass für alle $s, l \in L$ folgende Aussagen gelten:

(i) Es gilt $\Delta_{ss} \preccurlyeq \Sigma_{\iota(s)\iota(s)}$.
(ii) Es ist $\Sigma_{\iota(s)\iota(l)} \cap \Delta_{ss} = \Delta_{sl}$.

Wir können annehmen, dass $L \subseteq I$ gilt. Nach Bemerkung 2.4.34 gilt $\Delta_{sl} \preccurlyeq \Sigma_{sl}$ für alle $s, l \in L$. Lemma 3.5.24 liefert eine torische Einbettung $(\kappa_{sl}, \mathrm{id})\colon (Y_{\Delta_{sl}}, T, y_0) \to (X_{\Sigma_{sl}}, T, x_0)$. Für $s, l \in L \subseteq I$ setzen wir $Y_{sl} := Y_{\Delta_{sl}}$ und für $i, j \in I$ setzen wir $X_{ij} := X_{\Sigma_{ij}}$. Nach Lemma 3.5.24 können wir annehmen, dass X_{ij} eine offene Teilmenge von X_{ii} und Y_{sl} eine offene Teilmenge von Y_{ss} ist. Für alle $s, l \in L$ existieren Isomorphismen $(\varphi_{sl}, \mathrm{id})\colon (Y_{sl}, T, y_0) \to (Y_{ls}, T, y_0)$. und für alle $i, j \in I$ existieren Isomorphismen $(\varphi'_{ij}, \mathrm{id})\colon (X_{ij}, T, x_0) \to (X_{ji}, T, x_0)$. Nach Konstruktion 3.6.1 gilt

$$X_{\mathcal{S}} \quad = \quad \Big(\bigcup X_{ii}\Big) / \sim_{\varphi'_{ij}} \qquad \text{und} \qquad Y_{\mathcal{R}} \quad = \quad \Big(\bigcup Y_{ss}\Big) / \sim_{\varphi_{sl}} .$$

Wir haben somit folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
X_{ss} & \supseteq & X_{sl} \arrow[r, "\varphi'_{sl}"] & X_{ls} & \subseteq & X_{ll} \\
Y_{ss} \arrow[u, "\kappa_{ss}"] & \supseteq & Y_{sl} \arrow[u, "\kappa_{sl}"] \arrow[r, "\varphi_{sl}"'] & Y_{ls} \arrow[u, "\kappa_{ls}"'] & \subseteq & Y_{ll} \arrow[u, "\kappa_{ll}"']
\end{tikzcd}$$

Da alle X_{sl} bzw. Y_{sl} separiert sind und $\kappa_{sl}, \varphi_{sl}$ bzw. φ'_{sl} auf Tx_0 die Identität sind, erhalten wir mit Folgerung 1.5.12, dass das innere Diagramm kommutiert. Es ist noch zu zeigen, dass gilt:

$$\kappa_{ss}(Y_{ss}) \;\cap\; X_{sl} \quad = \quad \kappa_{sl}(Y_{sl}).$$

Da X_{ss} separiert ist und κ_{sl} und κ_{ss} auf T die Identität sind, gilt $\kappa_{ss}(Y_{sl}) = \kappa_{sl}(Y_{sl})$. Es reicht zu zeigen, dass für jedes $\rho \in \Delta_{ss}$ mit $\kappa(y_\rho) \in X_{sl}$ stets $\kappa(y_\rho) \in \kappa_{ss}(Y_{sl})$ gilt. Dazu sei ein $\rho \in \Delta_{ss}$ mit $\kappa(y_\rho) \in X_{sl}$ gegeben. Aus $\kappa(y_\rho) \in X_{sl}$ folgt mit Lemma 3.5.24 und Folgerung 3.5.11, dass $\mathring{\rho} \in \mathring{\Sigma}_{sl}$ gilt. Also existiert ein k-Kegel $\tau \in \Sigma_{sl}$ mit $\mathring{\tau} = \mathring{\rho}$. Da $\Delta_{ss} \preccurlyeq \Sigma_{ss}$ gilt, erhalten wir $\tau = \rho$. Nach Voraussetzung gilt $\tau \in \Sigma_{sl} \cap \Delta_{ss} = \Delta_{sl}$. Somit folgt mit Lemma 3.5.24 und Folgerung 3.5.11, dass $\kappa(y_\rho) \in \kappa_{ss}(Y_{sl})$ gilt. Also sind die Verklebedaten verträglich und wir erhalten somit eine offene torische Einbettung $(\kappa, \mathrm{id})\colon (Y_{\mathcal{R}}, T_N, x_0) \to (X_{\mathcal{S}}, T_N, x_0)$. Mit Lemma 3.5.24, Folgerung 3.6.6, Folgerung 3.6.5 und Bemerkung 2.4.34 erhalten wir

$$\kappa(Y_{\mathcal{R}}) \quad = \quad \bigcup_{[\tau,s]\in\Omega(\mathcal{R})} T_N x_{[\tau,s]}.$$

□

Lemma 3.6.24. *Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein attraktives separiertes k-Gitterfächersystem. Dann ist $X_{\mathcal{S}}$ ein separierter k-Raum.*

Beweis. Es sei $\mathcal{S} = (\Sigma_{ij})_{i,j\in I}$. Nach Konstruktion 3.6.1 ist $X_{\mathcal{S}}$ ein k-Raum. Es ist noch zu zeigen, dass $X_{\mathcal{S}}$ ein separierter k-Raum ist. Nach Satz 3.2.21 reicht es zu zeigen, dass für jedes $\lambda \in \Lambda(T_N)$ der Morphismus $\lambda_{x_0}\colon \mathbb{K}^* \to X_{\mathcal{S}}$ höchstens eine Fortsetzung besitzt. Es seien $\nu_1, \nu_2\colon \mathbb{K} \to X_{\mathcal{S}}$ zwei Fortsetzungen von λ_{x_0} mit $\lambda \in \Lambda(T_N)$. Nach Konstruktion 3.6.1 existieren $i, j \in I$ mit $\nu_1(0) \in X_{\Sigma_{ii}}$ und $\nu_2(0) \in X_{\Sigma_{jj}}$. Lemma 3.3.9 liefert $\lambda \in |\Sigma_{ii}| \cap |\Sigma_{jj}|$. Da $\mathcal{S}$ separiert ist, gilt $\lambda \in |\Sigma_{ij}|$. Also erhalten wir mit Lemma 3.3.9 und Konstruktion 3.6.1, dass $\nu_1(0) = \nu_2(0) \in X_{\Sigma_{ij}} = X_{\Sigma_{ii}} \cap X_{\Sigma_{jj}}$ gilt. □

Folgerung 3.6.25. *Es sei (N, Σ) ein k-Gitterfächer. Dann gilt $X_\Sigma = X_{\mathcal{S}_\Sigma}$.*

Beweis. Folgt aus Konstruktion 3.5.1 und Konstruktion 3.6.1. □

Folgerung 3.6.26. *Der folgende Funktor ist volltreu und wesentlich surjektiv.*

$$\mathcal{G}\colon \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kategorie der spitzen attraktiven} \\ \textit{separierten k-Gitterfächersysteme} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \textit{Kategorie der separierten} \\ \textit{torischen k-Räume} \end{array} \right\}$$
$$(N, \mathcal{S}) \mapsto (X_{\mathcal{S}}, T_N, x_0)$$
$$(F, \mathfrak{f}) \mapsto (\varphi_{(F,\mathfrak{f})}, \widetilde{\varphi}_{(F,\mathfrak{f})}).$$

Beweis. Satz 3.6.19 und Lemma 3.6.24 liefern, dass $\mathcal{G}$ ein wohldefinierter Funktor ist. Nach Konstruktion 3.6.1 bzw. Folgerung 3.6.25 und Satz 3.5.15 ist $\mathcal{G}$ wesentlich surjektiv. Satz 3.6.19 und Satz 3.5.15 liefern, dass $\mathcal{G}$ volltreu ist. □

Folgerung 3.6.27. *Es sei (X, T, x_0) ein torischer k-Raum. Für jedes $[\tau, i] \in \Omega(\mathcal{S})$ gilt $T_{x_{[\tau,i]}} = H_{\mathrm{lin}(\tau)\cap\Lambda(T)}$ Weiter gilt* $\dim(T_{x_{[\tau,i]}}) = \mathit{dim}(\tau)$ *für jedes $[\tau, i] \in \Omega(\mathcal{S})$.*

Beweis. Folgt aus Konstruktion 3.6.1 und Lemma 3.5.27. □

Für den Satz 3.6.30 brauchen wir die nun folgende Erinnerung und Lemma 3.6.29.

Erinnerung 3.6.28. Es seien σ_1', σ_2' zwei Kegel in V mit $\sigma_1' \cap \sigma_2' \not\preccurlyeq \sigma_1'$ Dann existieren $\tau_1' \preccurlyeq \sigma_1'$ und $\tau_2' \preccurlyeq \sigma_2'$ mit $\mathring{\tau}_1' \cap \mathring{\tau}_2' \neq \emptyset$ und $\mathrm{lin}(\tau_1') \neq \mathrm{lin}(\tau_2')$.

Lemma 3.6.29. *Es seien X' eine irreduzible Prävarietät und Y' eine irreduzible Varietät. Weiter seien $X \sqsubseteq X'$ sowie $Y \sqsubseteq Y'$ und $\varphi\colon X \to Y$ ein Isomorphismus. Dann existiert eine offene Menge $U' \subseteq X'$ und ein Morphismus $\varphi'\colon U' \to Y'$ mit $X \subseteq U'$, $\varphi'_{|X} = \varphi$ und für alle $x \in U'$ gilt*

$$\dim\left(\varphi'^{-1}(\varphi'(x))\right) \quad = \quad 0.$$

Beweis. Es seien $X'_1, \dots, X'_l$ eine affine offene Überdeckung von X' und $Y'_1, \dots, Y'_r$ eine affine offene Überdeckung von Y'. Dann ist $X_1, \dots, X_l$ eine quasiaffine offene Überdeckung von X bzw. $Y_1, \dots, Y_r$ eine quasiaffine offene Überdeckung von Y, wobei $X_i := X'_i \cap X$ und $Y_j := Y'_j \cap Y$. Wir setzen

$$X_{ij} \quad := \quad X_i \cap \varphi^{-1}(Y_j) \qquad \text{und} \qquad Y_{ij} \quad := \quad \varphi(X_i) \cap Y_j.$$

Da φ ein Isomorphismus ist, ist X_{ij} offen in X und Y_{ij} offen in Y. Insbesondere haben wir Isomorphismen $\varphi_{ij} := \varphi_{|X_{ij}} \colon X_{ij} \to Y_{ji}$. Außerdem ist X_{ij} dicht und konstruierbar in X'_i und Y_{ij} dicht und konstruierbar in Y'_j. Es gilt:

$$X \quad = \quad \bigcup_{i,j} X_{ij}.$$

Nach Satz 1.2.11 existieren offene Mengen $X_{ij} \subseteq U'_{ij} \subseteq X'_i$ sowie $Y_{ij} \subseteq V'_{ij} \subseteq Y'_j$ und ein Isomorphismus $\varphi'_{ij} \colon U'_{ij} \to V'_{ij}$ mit $(\varphi'_{ij})_{|X_{ij}} = \varphi_{ij}$. Wir setzen

$$U' \quad := \quad \bigcup_{i,j} U'_{ij} \qquad \text{und} \qquad \varphi' \colon U' \to Y', \quad x \mapsto \varphi'_{ij}(x), \text{ falls } x \in U'_{ij}.$$

Die Menge U' ist eine offene Menge in X' mit $X \subseteq U'$. Da $(\varphi'_{ij})_{|X_{ij}} = \varphi_{|X_{ij}}$ gilt, erhalten wir mit Folgerung 1.5.12, dass φ' ein wohldefinierter Morphismus ist. Insbesondere ist φ' eine Fortsetzung von φ. Da $\varphi'_{|U_{ij}} = \varphi'_{ij}$ gilt und φ'_{ij} Isomorphismen sind, erhalten wir für jedes $x \in U'$:

$$\dim\left((\varphi'^{-1}(\varphi'(x))\right) \quad = \quad \dim\left(\bigcup (\varphi'^{-1}_{ij}(\varphi'_{ij}(x))\right) \quad = \quad 0.$$

□

Satz 3.6.30. *Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein spitzes attraktives separiertes k-Fächersystem, sodass der Abschluss $(N, \mathcal{S}')$ aus Konstruktion 2.3.34 existiert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Der torische k-Raum $X_{\mathcal{S}}$ ist einbettbar in eine Varietät.*
(ii) *Das Fächersystem $\mathcal{S}'$ ist separiert.*

Beweis. Die Implikation „(ii)⇒(i)" folgt aus Lemma 3.6.21 und Lemma 3.6.24.

Zur Implikation „(i)⇒(ii)": Es sei $\mathcal{S} = (\Sigma_{ij})_{i,j \in I}$. Weiter seien $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$ mit $\Sigma_{ii} = \mathcal{F}_{\sigma_i}$. Es seien σ'_i die Abschlüsse von σ_i. Nach Konstruktion 2.3.34 gilt $\mathcal{S}' = (\Sigma'_{ij})_{i,j \in I}$ mit $\Sigma'_{ii} = \mathcal{F}_{\sigma'_i}$. Mit Konstruktion 2.3.34 gilt $\Sigma'_{ij} = \Sigma'_{ii} \cap \Sigma'_{jj}$ und $\Sigma_{ij} \sqsubseteq \Sigma'_{ij}$ für alle $i, j \in I$. Weiter setzen wir $T := T_N$ und $X := X_{\mathcal{S}}$.

Annahme: Es gibt eine Varietät Y' und ein Einbettung $\varphi \colon X \to Y'$ und $\mathcal{S}'$ ist nicht separiert.

Wir können annehmen, dass $\varphi(X)$ dicht in Y' liegt. Somit ist Y' irreduzibel. Mit Lemma 3.6.21 erhalten wir, dass $X \sqsubseteq X_{\mathcal{S}'}$ gilt. Ist $\mathcal{S}'$ nicht separiert so existieren dass $i, j \in I$ mit $|\Sigma'_{ij}| \subsetneq |\Sigma'_{ii}| \cap |\Sigma'_{jj}|$. Aus $\Sigma'_{ii} = \mathcal{F}_{\sigma'_i}$ folgt, dass

$$\sigma'_i \cap \sigma'_j \quad \not\preccurlyeq \quad \sigma'_i \qquad \text{oder} \qquad \sigma'_i \cap \sigma'_j \quad \not\preccurlyeq \quad \sigma'_j$$

gilt. Wir können annehmen, dass $\sigma'_i \cap \sigma'_j \not\preccurlyeq \sigma'_i$ gilt. Nach Erinnerung 3.6.28 existieren Seiten $\tau'_1 \preccurlyeq \sigma'_i$ und $\tau'_2 \preccurlyeq \sigma'_j$ mit $\mathring{\tau}'_1 \cap \mathring{\tau}'_2 \neq \emptyset$ und $\mathrm{lin}(\tau'_1) \neq \mathrm{lin}(\tau'_2)$. Aus Lemma 3.6.2 und

$\operatorname{lin}(\tau_1') \neq \operatorname{lin}(\tau_2')$ folgt, dass $x_{[\tau_1',i]} \neq x_{[\tau_2',j]}$ gilt. Folgerung 3.6.27 liefert weiter

$$T_{\tau_1'} \quad := \quad T_{x_{[\tau_1',i]}} \quad \neq \quad T_{x_{[\tau_2',j]}} \quad =: \quad T_{\tau_2'}.$$

Wir können annehmen, dass $T_{\tau_1'} \nsubseteq T_{\tau_2'}$ gilt. Nach Lemma 3.6.29 existiert eine offene Menge $X \subseteq U' \subseteq X_{\mathcal{S}'}$ und ein Morphismus $\varphi' \colon U' \to Y'$ mit $\varphi'_{|X} = \varphi$ und für alle $x \in U'$ gilt $\dim(\varphi'^{-1}(\varphi'(x)) = 0$. Wir betrachten weiter die Mengen

$$A_1 \quad := \quad \{t \in T;\ tx_{[\tau_1',i]} \in U'\} \qquad \text{und} \qquad A_2 \quad := \quad \{t \in T;\ tx_{[\tau_2',i]} \in U'\}.$$

Es ist $X_{\mathcal{S}'} \backslash U'$ abgeschlossen in $X_{\mathcal{S}'}$. Mit $x_{[\sigma_i',i]} = x_{[\sigma_i,i]} \in X \subseteq U'$ und Folgerung 3.6.8 erhalten wir $Tx_{[\tau_1',i]} \cap U' \neq \emptyset$. Analog erhalten wir $Tx_{[\tau_2',j]} \cap U' \neq \emptyset$. Somit gilt $A_1 \neq \emptyset$ und $A_2 \neq \emptyset$. Da U' offen in X' ist, sind A_1 und A_2 offen in T. Da T irreduzibel ist, folgt

$$A \quad := \quad A_1 \ \cap\ A_2 \quad \neq \quad \emptyset.$$

Wir wählen ein $\lambda \in \mathring{\tau}_1' \cap \mathring{\tau}_2' \cap N$ und betrachten für $k = 1, 2$ und jedes $t \in A$ die Morphismen

$${}_t\psi_k \colon \mathbb{K}^* \ \to\ Y', \qquad s \ \mapsto\ \varphi'(t\lambda(s)x_{[0,k]}).$$

Nach Konstruktion von A und Folgerung 3.6.4 existieren zu ${}_t\psi_1$ bzw. ${}_t\psi_2$ Fortsetzungen ${}_t\psi_1'$ bzw. ${}_t\psi_2'$ auf $\mathbb{K}$. Da ${}_t\psi_1$ und ${}_t\psi_2$ auf $Tx_{[0,i]}$ übereinstimmen und Y' eine Varietät ist, erhalten wir für alle $t \in A$:

$$\varphi'(tx_{[\tau_1,i]}) \quad = \quad {}_t\psi_1'(0) \quad = \quad {}_t\psi_2'(0) \quad = \quad \varphi'(tx_{[\tau_2,j]}).$$

Wir wählen ein festes $t_0 \in A$. Für $t' \in T_{\tau_1'} \cap T_{\tau_2'} \neq \emptyset$ gilt $t_0t' \in A$ und damit insbesondere $B := t_0T_{\tau_1'} \cap A \neq \emptyset$. Da T irreduzibel und A offen in T ist, ist A dicht in T. Somit ist B offen und dicht in $t_0T_{\tau_1'}$. Da B dicht in $t_0T_{\tau_1'}$ und $\emptyset \neq t_0T_{\tau_1'} \setminus t_0T_{\tau_2'}$ offen in $t_0T_{\tau_1'}$ ist, folgt

$$C \quad := \quad B \ \cap\ \left(t_0T_{\tau_1'} \setminus t_0T_{\tau_2'}\right) \quad \neq \quad \emptyset.$$

Insbesondere ist C offen in $t_0T_{\tau_1'}$. Da $(X_{\mathcal{S}'}, T, x_0)$ eine torische Prävarietät ist, ist $T_{\tau_1'}$ irreduzibel. Somit erhalten wir $\dim(C) = \dim(T_{\tau_1'}) > 0$, da $\tau_1 \neq \{0\}$. Für jedes $t \in C$ gilt $t = t_0t'$ für ein $t' \in T_{x_{[\tau_1',i]}}$. Wegen $C \subseteq A$ erhalten wir für jedes $t \in C$

$$\varphi'(tx_{[\tau_2',j]}) \quad = \quad \varphi'(t_0t'x_{[\tau_1',i]}) \quad = \quad \varphi'(t_0x_{[\tau_1',i]}).$$

Somit gilt $C \subseteq \varphi'^{-1}(\varphi(t_0x_{[\tau_1',i]}))$ und $\dim(\varphi'^{-1}(\varphi(t_0x_{[\tau_1',i]}))) > 0$. Das ist ein Widerspruch zu $\dim(\varphi'^{-1}(\varphi'(x)) = 0$ für alle $x \in U'$. □

Beispiel 3.6.31. Wir betrachten den separierten k-Raum (Y, T, y_0) aus Beispiel 3.5.16. Der zugehörige k-Fächer Δ_Y von Y ist

$$\Delta_Y \quad = \quad \mathcal{F}_{\sigma_{V_1}} \cup \mathcal{F}_{\sigma_{V_2}}.$$

Wir setzen $\sigma_1' := \operatorname{cone}(e_1, e_2)$ und $\sigma_2' := \operatorname{cone}(e_3, e_1{+}e_2)$. Dann besteht der Abschluss $\mathcal{S}'$ von $\mathcal{S}_{\Delta_Y}$ nach Konstruktion 2.3.34 aus

$$\Delta_{11}' \quad := \quad \mathcal{F}_{\sigma_1'}, \qquad \Delta_{22}' \quad := \quad \mathcal{F}_{\sigma_1'} \qquad \text{und} \qquad \Delta_{12}' \quad := \quad \Delta_{21}' \quad := \quad \{\{0\}\}.$$

Da $|\Delta_{12}'| \neq |\Delta_{11}'| \cap |\Delta_{22}'|$ gilt, ist $\mathcal{S}'$ nicht separiert. Somit ist Y nach Satz 3.6.30 ein separierter k-Raum, der sich nicht in eine Varietät einbetten lässt. In Abbildung 20 sieht man ein mögliches Schaubild des Träger Δ_Y der Kegel σ_1' und σ_2'

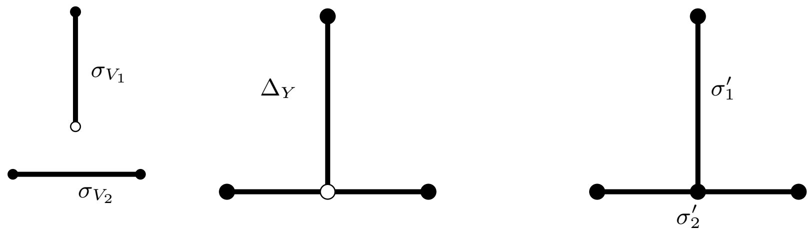

ABBILDUNG 20

Bemerkung 3.6.32. Beispiel 3.6.31 zeigt, dass die Kategorie der dc-subset eine echte Unterkategorie der separierten k-Räume ist.

3.7. **Torische H-Räume und deren torische Quotienten.**

Wir zeigen mit Hilfe des Algorithmus **k-Quot**, dass zu jedem separierten *torischen H-Raum* ein *kategorischer Quotient in der Kategorie der separierten torischen k-Räume* existiert.

Definition 3.7.1 (Kategorie der torischen H-Räume)**.**

(i) Ein *torischer H-Raum* ist ein torischer k-Raum (X, T, x_0) mit einer Wirkung eines Torus H, die durch einen Morphismus $H \times X \to X$, $(h, x) \mapsto h * x$ von k-Räumen gegeben ist, sodass die Wirkung von T mit der Wirkung von H kommutiert.

(ii) Ein Morphismus von torischen H-Räumen (X, T_X, x_0) bzw. (Y, T_Y, y_0) ist ein torischer Morphismus $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon (X, T_X, x_0) \to (Y, T_Y, y_0)$ der $H-$äquivariant ist.

(iii) Ein torischer Morphismus $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon (X, T_X, x_0) \to (Y, T_Y, y_0)$ heißt *H-invariant*, falls φ ein H-invarianter Morphismus ist.

Lemma 3.7.2. *Es sei (X, T, x_0) ein torischer H-Raum. Dann existiert ein Morphismus $\psi\colon H \to T$ von Tori, sodass $h * x = \psi(h) \cdot x$ gilt.*

Beweis. Da H und T kommutieren, permutiert die Wirkung H die T-Bahnen. Somit ist die Tx_0 Bahn H-invariant, da sie die maximale Bahn in X ist. Da $\mu_{x_0}\colon T \to T$, $t \mapsto tx_0$ eine offene Einbettung ist, existiert zu jedem $h \in H$ ein $\psi(h) \in T$ mit $h * x_0 = \psi(h)x_0$. Da μ_{x_0} eine offene Einbettung ist, ist die Abbildung $\psi\colon H \to T$, $h \mapsto \psi(h)$ ein Morphismus. □

Vereinbarung 3.7.3. Mit Lemma 3.7.2 können wir H als Untertorus von T auffassen.

Bemerkung 3.7.4. Es sei (X, T, x_0) ein torischer H-Raum. Dann ist jede Teilmenge $Y \subseteq X$ die T-invariant ist, auch H-invariant.

Folgerung 3.7.5. *Es sei (X, T, x_0) ein torischer H-Raum. Dann ist L_H ein primitives Untergitter von $\Lambda(T)$.*

Beweis. Folgt aus Erinnerung 3.5.25. □

Lemma 3.7.6. *Es sei (X, T, x_0) ein torischer k-Raum und (X', T, x_0) der affine torische Abschluss von (X, T, x_0). Der torische k-Raum (X, T, x_0) ist genau dann ein H-Raum, wenn (X', T, x_0) eine H-Varietät ist.*

Beweis. Nach Satz 3.2.28 können wir annehmen, dass $X \sqsubseteq_T X'$ gilt. Somit ist nur zur Implikation „$\Rightarrow$" etwas zu zeigen. Nach Vereinbarung 3.7.3 können wir annehmen, dass H ein Untertorus von T ist. Somit ist (X', T, x_0) eine H-Varietät. □

Erinnerung 3.7.7. Es seien (X', T, x_0) ein Gitterfächer und L ein primitives Untergitter von $\Lambda(T)$. Dann ist (X', T, x_0) eine torische H_L-Varietät.

Lemma 3.7.8. *Es seien (X, T, x_0) ein torischer k-Raum und L ein primitives Untergitter von $\Lambda(T)$. Dann ist (X, T, x_0) ein torischer H_L-Raum.*

Beweis. Es genügt den Fall zu betrachten, dass (X, T, x_0) ein quasiaffiner torischer k-Raum ist. Dazu sei (X', T, x_0) der affine torische Abschluss von (X, T, x_0). Mit Satz 3.2.28 können wir annehmen, dass $X \sqsubseteq X'$ gilt. Nach Erinnerung 3.7.7 ist (X', T, x_0) eine torische H_L-Varietät. Somit ist nach Bemerkung 3.7.4 die T-invariante Menge X auch H_L-invariant. Also ist (X, T, x_0) ein H_L-Raum. □

Erinnerung 3.7.9. Es seien (X', T_X, x_0) eine H-Varietät und $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon (X', T_X, x_0) \to (Y', T_Y, y_0)$ ein torischer Morphismus. Der Morphismus φ ist genau dann H-invariant, wenn $L_H \subseteq \mathrm{kern}(\widetilde{\varphi}_*)$ gilt.

Lemma 3.7.10. *Es sei (X, T_X, x_0) ein H-Raum. Weiter sei $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon (X, T_X, x_0) \to (Y, T_Y, y_0)$ ein torischer Morphismus. Der Morphismus φ ist genau dann H-invariant, wenn $L_H \subseteq \mathrm{kern}(\widetilde{\varphi}_*)$ gilt.*

Beweis. Mit Lemma 3.2.12 und Lemma 3.2.14 genügt es den Fall zu betrachten, dass (X, T_X, x_0) und (Y, T_Y, y_0) quasiaffine torische k-Räume sind. Es seien (X', T_X, x_0) und (Y', T_Y, y_0) die affinen torischen Abschlüsse von (X, T_X, x_0) bzw. (Y, T_Y, y_0). Mit Satz 3.2.28 können wir annehmen, dass $X \sqsubseteq_{T_X} X'$ und $Y \sqsubseteq_{T_Y} Y'$ gilt. Nach Lemma 3.7.6 ist (X', T_X, x_0) eine H-Varietät. Mit Lemma 3.2.30 existiert ein torischer Morphismus $(\varphi' \widetilde{\varphi})\colon (X', T_X, x_0) \to (Y', T_Y, y_0)$ mit $\varphi'_{|X} = \varphi$. Somit folgt die Behauptung aus Erinnerung 3.7.9. □

Die Definition 3.7.11 wurde in [2, Definition 1.2] für torische H-Varietäten eingeführt.

Definition 3.7.11. Es sei (X, T_X, x_0) ein separierter torischer H-Raum. Ein H-invarianter Morphismus $(\pi, \widetilde{\pi})\colon (X, T_X, x_0) \to (Y, T_Y, y_0)$ von separierten torischen H-Räumen heißt *torischer konstruierbaren Quotient (torischen k-Quotient)*, falls es für jeden torischen H-invarianten Morphismus $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon (X, T_X, x_0) \to (Z, T_Z, z_0)$ von separierten torischen k-Räumen einen Morphismus $(\psi, \widetilde{\psi})\colon (Y, T_Y, y_0) \to (Z, T_Z, z_0)$ gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(X, T_X, x_0) \arrow[rr, "(\varphi,\widetilde{\varphi})"] \arrow[dr, "(\pi,\widetilde{\pi})"'] & & (Z, T_Z, z_0) \\
& (Y, T_Y, y_0) \arrow[ur, "(\psi,\widetilde{\psi})"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Durch T und x_0 ist der Morphismus $(\psi, \widetilde{\psi})$ und damit insbesondere auch (Y, T_Y, y_0) eindeutig bestimmt. Wir nennen auch (Y, T_Y, y_0) den *torischen k-Quotient von (X, T_X, x_0) bezüglich H*. Wir schreiben für Y auch $X/_{\mathrm{tor}}H$.

Bemerkung 3.7.12. In [2] wurde bewiesen, dass jede torische H-Varietät gezeigt einen torische Quotient besitzt siehe [2, Theorem 1.4].

Vereinbarung 3.7.13. Da wir im Verlauf der Arbeit nur noch torischen k-Quotient betrachten, nennen wir sie torische Quotient, wenn es der Kontext zulässt.

Lemma 3.7.14. *Es sei (X, T, x_0) ein separierter torischer H-Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der torische Quotient $X/_{\mathrm{tor}}H$ von (X, T, x_0) existiert.*
(ii) *Der k-Quotientenfächer von $(\Lambda(T), \Sigma_X)$ bezüglich L_H in der Kategorie der k-Fächer existiert.*

Beweis. Nach Lemma 3.7.10 ist ein Morpismus $(\varphi, \widetilde{\varphi})\colon (X, T, x_0) \to (Z, T_Z, z_0)$ genau dann H-invariant, wenn $L_H \subseteq \mathrm{kern}(\widetilde{\psi}_*)$ gilt. Somit folgt die Behauptung aus Satz 3.5.15 und Definition 2.7.7 sowie Definition 3.7.11 □

Satz 3.7.15. *Jeder separierte torische H-Raum (X, T, x_0) besitzt einen torischen Quotienten $(\pi, \widetilde{\pi})\colon (X, T, x_0) \to (X/_{\mathrm{tor}}H, T_{X/_{\mathrm{tor}}H}, y_0)$.*

Beweis. Nach Satz 2.7.23 besitzt $(\Lambda(T), \Sigma_X)$ einen k-Quotientenfächer in der Kategorie der k-Fächer. Somit folgt die Behauptung aus Lemma 3.7.14. □

Bemerkung 3.7.16. Es sei (X, T, x_0) ein torischer H-Raum, wobei Σ_X 1-voll ist. Dann ist der torische Quotiet von (X, T, x_0) mit Bemerkung 2.7.15 ebenfalls 1-voll.

Beispiel 3.7.17. Um den kategorischen Quotienten eines torischen H-Raumes zu bestimmen, muss geht man wie im Beweis von Satz 2.7.23 vor. Wir werden dies anhand eines Beispiels tun, welches in [3] vorgestellt worden ist. Dazu betrachten wir die quasiaffine Varietät $X := \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^2 \cup (\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{C}^2$. Dann ist X mit $T := (\mathbb{C}^*)^4$ und $x_0 := (1, 1, 1, 1)$ eine quasiaffine torische Varietät. Auf X betrachten wir die $\mathbb{C}^*$-Wirkung, welche durch $tx := (tx_1, tx_2, x_3, t^{-1}x_4)$ gegeben ist. Der Fächer Σ_X hat genau zwei maximale Kegel $\sigma_1 := \mathrm{cone}(e_1, e_2)$ und $\sigma_2 := \mathrm{cone}(e_3, e_4)$. Wir betrachten zu $\mathbb{C}^*$ das zugehörige Untergitter $L_{\mathbb{C}^*}$ und den Morphismus $P\colon \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^4/L_{\mathbb{C}^*} \cong \mathbb{Z}^3$, welcher durch $P(e_1) = e_1$, $P(e_2) = e_2$, $P(e_3) = e_3$ und $P(e_4) = e_1 + e_2$ gegeben ist. Es gilt $P(\sigma_1) = \mathrm{cone}(e_1, e_2) =: \tau_1$ und $P(\sigma_2) = \mathrm{cone}(e_1 + e_2, e_3) =: \tau_2$. In Abbildung 21 sieht man ein mögliches Schaubild von τ_1 und τ_2:

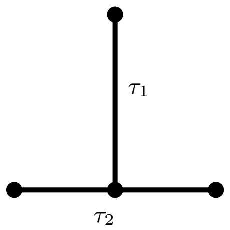

Abbildung 21

Im Beweis von Satz 2.7.23 wird der Algorithmus **k-Quot** auf das System von k-Kegeln $\mathfrak{S}_1 = \{\tau_1, \tau_2\}$ angewandt. Es ist $\tau_1 \cap \tau_2 = \mathrm{cone}(e_1 + e_2) =: \rho$. Es gilt $\rho \preccurlyeq \tau_2$, aber $\rho \not\preccurlyeq \tau_1$. Der Algorithmus **k-Quot** bildet somit $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$, setzt $\mathfrak{S}_2 := \{\sigma\}$ und stoppt. In Abbildung 22 sieht man ein mögliches Schaubild von σ:

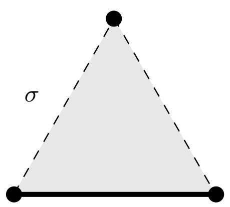

Abbildung 22

Somit gilt $\sigma = \mathrm{cone}(e_3) \cup \mathrm{cone}(e_1, e_2) \cup \mathring{\sigma}'$, wobei $\sigma' := \mathrm{cone}(e_1, e_2, e_3)$ und damit

$$Y_\sigma \;=\; \mathbb{C}^3 \setminus (\{0\} \times \mathbb{C}^* \times \{0\} \;\cup\; \mathbb{C}^* \times \{0\} \times \{0\}) \quad \sqsubseteq \quad \mathbb{C}^3 \;=\; Y_{\sigma'}.$$

Da der Algorithmus **k-Quot** stoppt und σ spitz ist, folgt mit Satz 2.7.23 bzw. Lemma 3.7.14, dass Y_σ der kategorische Quotient der torischen $\mathbb{C}^*$-Varietät (X, T, x_0) in der Kategorie der separierten k-Räume ist. Der Morphismus $\pi\colon X \to Y_\sigma$ wird wie folgt bestimmt: Der Gittermorphismus P liefert einen Morphismus $P\colon (\Lambda(T), \Sigma_X) \to (\mathbb{Z}^3, \mathcal{F}_\sigma)$. Somit ist der Morphismus π gegeben durch

$$\pi\colon X \;\to\; Y_\sigma, \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4) \;\mapsto\; (x_1x_4, x_2x_4, x_3).$$

4. Quotienten in der Kategorie der separierten k-Räume

4.1. **Universelle Separierung.**

Für eine torische H-Varietät (X', T, x_0) wollen wir Kriterien für die Existenz eines kategorischen Quotienten in der Kategorie der separierten k-Räume angeben. Satz 3.7.15 liefert den torischen Quotienten. Ein möglicher Kandidat für einen kategorischen Quotienten ist der torische Quotient zu X'. Die Frage, ob dieser Kandidat der kategorische Quotient in der Kategorie der separierten k-Räumen ist, ist äquivalent zu der Frage ob der Algorithmus **k-Quot** eine *universelle Separierug* liefert. Deshalb werden wir uns in diesem Abschnitt mit der universellen Separierung für eines k-Raums befassen.

Definition 4.1.1. Ein Morphismus $\pi\colon X \to Y$ von k-Räumen heißt *universelle Separierung für den k-Raum X*, falls Y separiert ist und für jeden Morphismus $\varphi\colon X \to Z$ von k-Räumen, wobei Z separiert ist, genau ein Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon Y \to Z$ existiert mit $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$.

Bemerkung 4.1.2. Es sei X ein k-Raum. Dann gilt:

(i) Existiert zu X eine universelle Separierung $\pi\colon X \to Y$, so ist Y bis auf Isomorphie eindeutig.
(ii) Ist X separiert, dann ist $\mathrm{id}\colon X \to X$ die universelle Separierung zu X.

Vereinbarung 4.1.3. Es seien (X_1, T, x_0') und $(X_2, T, \widetilde{x}_0)$ torische k-Räume. Um die Notation einfach zu halten, schreiben wir $x_0 := x_0'$ bzw. $x_0 := \widetilde{x}_0$, wenn es der Kontext zulässt. Es seien Z ein k-Raum und $\psi_i\colon X_i \to Z$ Morphismen. Für $\psi_1(tx_0') = \psi_2(t\widetilde{x}_0)$ schreiben wir $\psi_1(tx_0) = \psi_2(tx_0)$. Es sei $(\pi, \mathrm{id})\colon (X_1, T, x_0') \to (X_2, T, \widetilde{x}_0)$ ein Morphismus. Dann gilt $\pi(tx_0') = t\widetilde{x}_0$. Wir schreiben dafür auch $\pi_{|Tx_0} = \mathrm{id}$.

Folgerung 4.1.4. *Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein attraktives spitzes k-Gitterfächersystem mit $\mathcal{S} = (\Sigma_{ij})_{i,j\in I}$ und Z ein separierter k-Raum. Weiter seien für jedes $i \in I$ Morphismen $\varphi_i\colon X_{\Sigma_{ii}} \to Z$ gegeben. Gilt $\varphi_i(tx_0) = \varphi_j(tx_0)$ für alle $t \in T_N$, so existiert genau ein Morphismus $\varphi\colon X_{\mathcal{S}} \to Z$ mit $\varphi_{|X_{\Sigma_{ii}}} = \varphi_i$.*

Beweis. Wir setzen $X_i := X_{\Sigma_{ii}} \subseteq X_{\mathcal{S}}$. Es ist zu zeigen, dass $(\varphi_i)_{|X_i\cap X_j} = (\varphi_j)_{|X_i\cap X_j}$ gilt. Da $\varphi_i(tx_0) = \varphi_j(tx_0)$ gilt, stimmen φ_i und φ_j auf einer offenen Menge von $X_i \cap X_j$ überein. Mit Folgerung 1.5.12 erhalten wir $(\varphi_i)_{|X_i\cap X_j} = (\varphi_j)_{|X_i\cap X_j}$. □

Definition 4.1.5. Es seien N ein Gitter und σ_1, σ_2 zwei k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$. Die k-Kegel σ_1 und σ_2 bilden ein *striktes Paar*, falls $\mathrm{hull}(\sigma_1' \cup \sigma_2')$ ein spitzer Kegel ist, wobei σ_1' sowie σ_2' die jeweiligen Abschlüsse von σ_1 bzw. σ_2 sind.

Bemerkung 4.1.6. Es sei σ_1, σ_2 ein striktes Paar.

(i) Die k-Kegel σ_1 und σ_2 sind spitz.
(ii) Ist $|\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ ein k-Kegel, dann ist $|\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ spitz.

Konstruktion 4.1.7. Es sei $(N, \mathcal{S} = (\Sigma_{ij})_{i,j\in I})$ ein attraktives spitzes k-Gitterfächersystem, das heißt, zu jedem $i \in I$ existiert ein σ_i mit $\Sigma_{ii} = \mathcal{F}_{\sigma_i}$. Wir setzen $\Delta_{ii} := \Sigma_{ii}$ und $\Delta_{ij} := \{\tau;\ \tau \in \Delta_{ii}, \Delta_{jj}\}$. Dann ist $\mathcal{R} := (\Delta_{ij})_{i,j\in I}$ ein maximal verklebtes k-Fächersystem. Wir nennen $\mathcal{R}$ das *maximale k-Fächersystem zu $\mathcal{S}$*. Es sei Z ein separierter k-Raum. Für jeden Morphismus $\varphi\colon X_{\mathcal{S}} \to Z$ existiert nach Folgerung 4.1.4

genau ein Morphismus $\varphi'\colon Y_{\mathcal{R}} \to Z$ mit $\varphi'(tx_0) = \varphi(tx_0)$ für alle $t \in T$. Analog existiert für jeden Morphismus $\psi\colon Y_{\mathcal{R}} \to Z$ genau ein Morphismus $\psi'\colon X_{\mathcal{S}} \to Z$ mit $\psi(tx_0) = \psi'(tx_0)$ für alle $t \in T$.

Bemerkung 4.1.8. Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein spitzes attraktives k-Gitterfächersystem und $\mathcal{R}$ das maximale k-Fächersystem zu $\mathcal{S}$. Nach Konstruktion 4.1.7 besitzt $X_{\mathcal{S}}$ genau dann eine universelle Separierung, wenn $Y_{\mathcal{R}}$ eine universelle Separierung besitzt.

Konstruktion 4.1.9. Es seien N ein Gitter und $S = (\sigma_i)_{i\in I}$ eine Familie von spitzen k-Kegeln in $N_{\mathbb{Q}}$. Wir setzen $\Sigma_{ii} := \mathcal{F}_{\sigma_i}$ und $\Sigma_{ij} := \Sigma_{ji} := \{\tau;\ \tau \in \Sigma_{ii}, \Sigma_{jj}\}$. Dann ist $\mathcal{S}_S := (\Sigma_{ij})_{i,j\in I}$ ein attraktives spitzes k-Fächersystem. Wir schreiben $X_S := X_{\mathcal{S}_S}$. Mit Konstruktion 3.6.1 gilt:

$$X_S \quad = \quad \bigcup_{\sigma\in S} X_\sigma \;/\sim .$$

Ist $R \subseteq S$ eine Teilmenge von S, dann gilt $\mathcal{S}_R \preccurlyeq \mathcal{S}_S$. Somit liefert Lemma 3.6.23, dass der torische k-Raum X_R ein offener T_N-invariante Unterraum von X_S ist.

Begründung. Es lediglich Folgendes zu zeigen: Falls $R \subseteq S$ eine Teilmenge von S ist, dann gilt $\mathcal{S}_R \preccurlyeq \mathcal{S}_S$. Dazu sei $R = (\sigma_i)_{i\in L}$ mit $L \subseteq I$ gegeben. Dann gilt $\mathcal{F}_{\sigma_i} \preccurlyeq \mathcal{F}_{\sigma_i}$ für alle $i \in L$. Damit gilt auch $\Sigma_{ij} \cap \Sigma_{ii} = \Sigma_{ij}$ für alle $i, j \in L$. □

Bemerkung 4.1.10. Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein spitzes attraktives k-Fächersystem und $(N, \mathfrak{S})$ das zu $\mathcal{S}$ gehörige System von k-Kegeln. Weiter sei Z ein separierter k-Raum. Für jeden Morphismus $\varphi\colon X_{\mathcal{S}} \to Z$ existiert nach Folgerung 4.1.4 und Konstruktion 4.1.9 genau ein Morphismus $\varphi'\colon Y_{\mathfrak{S}} \to Z$ mit $\varphi'(tx_0) = \varphi(tx_0)$ für alle $t \in T$. Da es für jedes $i \in I$ ein $\sigma \in \mathfrak{S}$ gibt mit $|\Sigma_{ii}| \subseteq \sigma$, existiert mit Folgerung 4.1.4 und Konstruktion 3.6.1 für jeden Morphismus $\psi\colon Y_{\mathfrak{S}} \to Z$ ein Morphismus $\psi'\colon X_{\mathcal{S}} \to Z$ mit $\psi(tx_0) = \psi'(tx_0)$ für alle $t \in T$. Somit besitzt $X_{\mathcal{S}}$ genau dann eine universelle Separierung, wenn $Y_{\mathfrak{S}}$ eine universelle Separierung besitzt.

Konstruktion 4.1.11. Es seien N ein Gitter und σ_1, σ_2 ein striktes Paar in $N_{\mathbb{Q}}$, wobei $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ ein k-Kegel ist. Wir wollen auf kanonische Weise einen surjektiven Morphismus

$$(\pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}, \mathrm{id})\colon (X_{(\sigma_1,\sigma_2)}, T_N, x_0) \to (X_\sigma, T_N, x_0)$$

konstruieren. Dazu setzen wir $\mathcal{S} := \mathcal{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ und $\mathcal{R} := \mathcal{S}_{\mathcal{F}_\sigma}$. Mit Lemma 2.6.7 erhalten wir, dass $\sigma_1 \cup \sigma_2 \subseteq \sigma$ gilt. Nach Lemma 2.1.31 existiert zu jedem $\tau_1 \preccurlyeq \sigma_1$ genau ein $\rho_1 \preccurlyeq \sigma$ mit $\tau_1 \subseteq \rho_1$ und $\mathring{\tau}_1 \subseteq \mathring{\rho}_1$. Analog existiert zu jedem $\tau_2 \preccurlyeq \sigma_2$ genau ein $\rho_2 \preccurlyeq \sigma$ mit $\tau_2 \subseteq \rho_2$ und $\mathring{\tau}_2 \subseteq \mathring{\rho}_2$. Dies induziert eine natürliche Zuordnung $\mathfrak{f}\colon \Omega(\mathcal{S}) \to \Omega(\mathcal{R})$. Insbesondere ist Bedingung 2.4.27 (ii) (a) erfüllt. Es seien $[\delta, i], [\tau, j] \in \Omega(\mathcal{S})$ mit $[\delta, i] \preccurlyeq [\tau, j]$ gegeben. Nach Definition von $\mathfrak{f}$, gibt es $\rho_1, \rho_2 \preccurlyeq \sigma$ mit $\mathring{\delta} \subseteq \mathring{\rho}_1$ und $\delta \subseteq \rho_1$ sowie $\mathring{\tau} \subseteq \mathring{\rho}_2$ und $\tau \subseteq \rho_2$. Aus $[\delta, i] \preccurlyeq [\tau, j]$ folgt $\mathring{\delta} \subseteq \tau$. Also gilt $\mathring{\rho}_1 \cap \rho_2 \neq \emptyset$. Lemma 2.2.11 liefert $\rho_1 \preccurlyeq \rho_2$. Da $\mathcal{F}_\sigma$ ein k-Fächer ist, gilt $[\rho_1, s] \preccurlyeq [\rho_2, l]$. Somit ist Bedingung 2.4.27 (ii) (b) ebenfalls erfüllt und wir erhalten einen Morphismus

$$(\mathrm{id}, \mathfrak{f})\colon (N, \mathcal{S}) \to (N, \mathcal{R}).$$

Satz 3.6.19 liefert einen Morphismus $(\pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}, \mathrm{id})\colon (X_{(\sigma_1,\sigma_2)}, T_N, x_0) \to (X_\sigma, T_N, x_0)$. Nach Definition der k-Hülle gibt es zu jedem $\rho \in \mathcal{F}_\sigma$ ein $\tau_1 \preccurlyeq \sigma_1$ mit $\mathring{\tau}_1 \cap \mathring{\rho} \neq \emptyset$ oder ein $\tau_2 \preccurlyeq \sigma_2$ mit $\mathring{\tau}_2 \cap \mathring{\rho} \neq \emptyset$. Lemma 2.1.30 liefert somit, dass es zu jedem $\rho \in \mathcal{F}_\sigma$ ein

$\tau_1 \preccurlyeq \sigma_1$ gibt mit $\mathring{\tau}_1 \subseteq \mathring{\rho}$ und $\tau_1 \subseteq \rho$ oder ein $\tau_2 \preccurlyeq \sigma_2$ gibt mit $\mathring{\tau}_2 \subseteq \mathring{\rho}$ und $\tau_2 \subseteq \rho$. Somit ist $(\pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}, \mathrm{id})$ surjektiv. Mit Bemerkung 3.4.11 und Folgerung 3.6.25 erhalten wir

$$(X_\sigma, T_N, x_0) \quad \cong \quad (X_{\mathcal{F}_\sigma}, T_N, x_0) \quad \cong \quad (X_{\mathcal{R}}, T_N, x_0).$$

Somit haben wir einen surjektiven Morphismus $(\pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}, \mathrm{id})\colon (X_{(\sigma_1,\sigma_2)}, T_N, x_0) \to (X_\sigma, T_N, x_0)$. Für $(\pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}, \mathrm{id})\colon (X_{(\sigma_1,\sigma_2)}, T_N, x_0) \to (X_\sigma, T_N, x_0)$ schreiben wir

$$\pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}\colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \;\to\; X_\sigma.$$

Konstruktion 4.1.12. Es seien N ein Gitter und $S = (\sigma_i)_{i\in I}$ eine Familie von spitzen k-Kegeln in $N_{\mathbb{Q}}$. Weiter seien $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ und $\tau_1 \preccurlyeq \sigma_1$ sowie $\tau_2 \preccurlyeq \sigma_2$ gegeben. Wir setzen $R := (\tau_1, \tau_2)$. Nun wollen wir einen kanonischen Morphismus

$$(\kappa, \mathrm{id})\colon (Y_R, T_N, y_0) \;\to\; (X_S, T_N, x_0)$$

konstruieren. Es sei $\delta \preccurlyeq \tau_s$ gegeben für $s = 1, 2$. Lemma 2.1.18 liefert, dass $\delta \preccurlyeq \sigma_s$ gilt. Somit haben wir eine kanonische Zuordnung $\mathfrak{f}\colon \Omega(\mathcal{R}) \to \Omega(\mathcal{S})$, $[\delta, s] \mapsto [\delta, s]$ Nach Konstruktion von $\mathfrak{f}$ ist Bedingung 2.4.27 (ii) (a) erfüllt. Es seien $[\delta_1, 1], [\delta_2, 2] \in \Omega(\mathcal{R})$ mit $[\delta_1, 1] \preccurlyeq [\delta_2, 2]$ gegeben. Es ist zu zeigen, dass $\delta_1 \preccurlyeq \sigma_1, \sigma_2$ gilt. Aus $[\delta_1, 1] \preccurlyeq [\delta_2, 2]$ folgt $\delta_1 \preccurlyeq \tau_1, \tau_2$. Lemma 2.1.18 liefert $\delta_1 \preccurlyeq \sigma_1, \sigma_2$. Somit ist Bedingung 2.4.27 (ii) (b) erfüllt. Satz 3.6.19 liefert einen Morphismus $(\kappa, \mathrm{id})\colon (Y_R, T_N, y_0) \to (X_S, T_N, x_0)$.

Lemma 4.1.13. *Es seien N ein Gitter und $S = (\sigma_i)_{i\in I}$ eine Familie von spitzen k-Kegeln in $N_{\mathbb{Q}}$. Weiter seien $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ und $\tau_1 \preccurlyeq \sigma_1$, wobei τ_1, σ_2 ein striktes Paar und $\widetilde{\sigma} := |\text{k-hull}(\tau_1, \sigma_2)|$ ein k-Kegel ist. Wir setzen $R := (S \setminus \{\sigma_2\}) \cup \{\widetilde{\sigma}\}$. Weiter sei $\pi_{(\tau_1,\sigma_2)}\colon X_{(\tau_1,\sigma_2)} \to X_{\widetilde{\sigma}}$ die universelle Separierung von $X_{(\tau_1,\sigma_2)}$. Dann existiert zu jedem Morphismus $\varphi\colon X_S \to Z$ von k-Räumen mit separiertem Z ein Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon Y_R \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}(tx_0) = \varphi(tx_0)$ für alle $t \in T := T_N$. Insbesondere ist $\widetilde{\varphi}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es sei $\varphi\colon X_{\mathcal{S}} \to Z$ ein Morphismus von k-Räumen mit separiertem Z gegeben. Für jedes $\sigma \in \mathcal{R}$ mit $\sigma \neq \widetilde{\sigma}$ gilt $\sigma \in S$. Somit existiert nach Konstruktion 4.1.9 zu jedem $\sigma \in \mathcal{R}$ mit $\sigma \neq \widetilde{\sigma}$ ein Morphismus $\widetilde{\varphi}_\sigma\colon X_\sigma \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}_\sigma(tx_0) = \varphi(tx_0)$. Weiter existiert nach Konstruktion 4.1.12 ein Morphismus $\widetilde{\varphi}_1\colon X_{(\tau_1,\sigma_2)} \to Z$ mit $\varphi(tx_0) = \widetilde{\varphi}_1(tx_0)$. Da $\pi_{(\tau_1,\sigma_2)}\colon X_{(\tau_1,\sigma_2)} \to X_{\widetilde{\sigma}}$ die universelle Separierung ist, existiert ein Morphismus $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{\sigma}}\colon X_{\widetilde{\sigma}} \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\varphi}_{\widetilde{\sigma}} \circ \pi_{(\tau_1,\sigma_2)}$. Nach Konstruktion 4.1.11 gilt $\widetilde{\varphi}_1(tx_0) = \widetilde{\varphi}_{\widetilde{\sigma}}(tx_0)$. Es gilt $(\widetilde{\varphi}_{\rho_1})_{|Tx_0} = (\widetilde{\varphi}_{\rho_2})_{|Tx_0}$ für alle $\rho_1, \rho_2 \in R$. Mit Folgerung 4.1.4 erhalten wir einen Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon Y_R \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}(tx_0) = \varphi(tx_0)$ für alle $t \in T$. □

Lemma 4.1.14. *Es seien N ein Gitter und $S = (\sigma_i)_{i\in I}$ eine Familie von k-Kegeln in $N_{\mathbb{Q}}$. Weiter seien $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ und $\tau_1 \preccurlyeq \sigma_1$, wobei τ_1, σ_2 ein striktes Paar und $\widetilde{\sigma} := |\text{k-hull}(\tau_1, \sigma_2)|$ ein k-Kegel ist. Wir setzen $R := (S \setminus \{\sigma \in S;\ \sigma \subseteq \widetilde{\sigma}\}) \cup \{\widetilde{\sigma}\}$. Weiter sei $\pi_{(\tau_1,\sigma_2)}\colon X_{(\tau_1,\sigma_2)} \to X_{\widetilde{\sigma}}$ die universelle Separierung von $X_{(\tau_1,\sigma_2)}$. Dann existiert zu jedem Morphismus $\varphi\colon X_S \to Z$ von k-Räumen mit separiertem Z ein Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon Y_R \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}(tx_0) = \varphi(tx_0)$ für alle $t \in T := T_N$. Insbesondere ist $\widetilde{\varphi}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es sei ein Morphismus $\varphi\colon X_{\mathcal{S}} \to Z$ von k-Räumen gegeben, wobei Z separiert ist. Wir betrachten die Familie $R' := (S \setminus \{\sigma_2\}) \cup \{\widetilde{\sigma}\}$ von spitzen k-Kegeln. Nach Lemma 4.1.13 existiert ein Morphismus $\widetilde{\varphi}'\colon Y_{R'} \to Z$ mit $\varphi(tx_0) = \varphi(tx_0)$ für alle $t \in T$. Weiter gilt $R \subseteq R'$. Nach Konstruktion 4.1.9 ist Y_R eine offene Teilmenge in $Y_{R'}$ mit $Tx_0 \subseteq Y_R$. Der Morphismus $\widetilde{\varphi} := \widetilde{\varphi}'_{|Y_R} : Y_R \to Z$ liefert somit die Behauptung. $\square$

Lemma 4.1.15. *Es seien N ein Gitter, S eine Familie von spitzen k-Kegeln in $N_{\mathbb{Q}}$ und $\varphi\colon X_S \to Z$ ein Morphismus, wobei Z separiert ist. Weiter sei ein Schleifendurchlauf durch* **subroutine k-Quot** *gegeben, sodass für alle k-Kegel σ_1, σ_2, für die σ_1 durch den k-Kegel $\widetilde{\sigma} := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ ersetzt wird, Folgendes gilt:*

(i) *Die k-Kegel σ_1, σ_2 bilden ein striktes Paar.*
(ii) *Die Abbildung $\pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}\colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \to X_{\widetilde{\sigma}}$ ist die universelle Separierung von $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$.*

Dann ist $R :=$ **subroutine k-Quot(S)** *eine Familie von spitzen k-Kegeln und es existiert ein Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon X_R \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}(tx_0) = \varphi(tx_0)$ für alle $t \in T := T_N$. Insbesondere ist $\widetilde{\varphi}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es seien S_i die Familien von k-Kegeln die im i-ten Schleifendurchlauf enstehen, wobei $S_0 = S$. Zu S_{i+1} existieren k-Kegel $\sigma_1, \sigma_2 \in S_i$ und $\tau_1 \preccurlyeq \sigma_1$, sodass gilt $S_{i+1} = (S \setminus \{\sigma_2\}) \cup \{\widetilde{\sigma}\}$, wobei $\widetilde{\sigma} = |\text{k-hull}(\tau_1, \sigma_2)|$ ein k-Kegel ist. Da nach Voraussetzung τ_1, σ_2 ein striktes Paar bilden, ist jedes S_i ein Familie von spitzen k-Kegeln. Insbesondere ist also R eine Familie von spitzen k-Kegeln.

Wir zeigen: Falls $\widetilde{\varphi}_i\colon Y_{S_i} \to Z$ existiert, so gibt es einen Morphismus $\widetilde{\varphi}_{i+1}\colon Y_{S_{i+1}} \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}_{i+1}(ty_0) = \widetilde{\varphi}_i(ty_0)$ für alle $t \in T_N$. Es sei ein Morphismus $\widetilde{\varphi}_i\colon Y_{S_i} \to Z$ gegeben. Nach Lemma 4.1.14 existiert ein Morphismus $\widetilde{\varphi}_{i+1}\colon Y_{S_{i+1}} \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}_{i+1}(tx_0) = \widetilde{\varphi}_i(tx_0)$ für alle $t \in T_N$. $\square$

Konstruktion 4.1.16. Es seien $(N, \mathfrak{S})$ ein spitzes System von k-Kegeln und $\widetilde{\Delta} :=$ **k-Quot($\mathfrak{S}$)** ein spitzer k-Fächer. Dann wollen wir auf kanonische Weise folgenden Morphismus konstruieren:

$$(\pi_{\mathfrak{S}}, \mathrm{id})\colon (X_{\mathfrak{S}}, T_N, x_0) \;\to\; (X_{\widetilde{\Delta}}, T_N, x_0).$$

Es seien $\mathfrak{S} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ und $\widetilde{\Delta} = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Nach Konstruktion von **k-Quot** und **subroutine k-Quot** gibt es zu jedem $i \in I$ ein $1 \le r_i \le m$ mit $\sigma_i \subseteq \delta_{r_i}$. Nach Lemma 2.1.31 existiert zu jedem $\tau_i \preccurlyeq \sigma_i$ genau ein $\rho_i \preccurlyeq \delta_{r_i}$ mit $\tau_i \subseteq \rho_{r_i}$ und $\mathring{\tau}_i \subseteq \mathring{\rho}_{r_i}$. Da $\widetilde{\Delta}$ ein k-Fächer ist, erhalten wir mit Lemma 2.1.25, zu jedem $\tau_i \preccurlyeq \sigma_i$ genau ein $\rho_i \in \widetilde{\Delta}$ mit $\tau_i \subseteq \rho_i$ und $\mathring{\tau}_i \subseteq \mathring{\rho}_i$. Dies liefert eine Zuordnung $\mathfrak{f}\colon \Omega(\mathcal{S}_{\mathfrak{S}}) \to \Omega(\mathcal{S}_{\widetilde{\Delta}})$. Insbesondere ist Bedingung 2.4.27 (ii) (a) erfüllt. Es seien $[\tau_1, i], [\tau_2, j] \in \Omega(\mathcal{S}_{\mathfrak{S}})$ mit $[\tau_1, i] \preccurlyeq [\tau_2, j]$ gegeben. Nach Definition von $\mathfrak{f}$, gibt es $\rho_1, \rho_2 \in \widetilde{\Delta}$ mit $\mathring{\tau}_1 \subseteq \mathring{\rho}_1$ und $\tau_1 \subseteq \rho_1$ sowie $\mathring{\tau}_2 \subseteq \mathring{\rho}_2$ und $\tau_2 \subseteq \rho_2$. Aus $[\tau_1, i] \preccurlyeq [\tau_2, j]$ folgt $\mathring{\tau}_1 \subseteq \tau_2$. Also gilt $\mathring{\rho}_1 \cap \rho_2 \neq \emptyset$. Lemma 2.2.11 liefert $\rho_1 \preccurlyeq \rho_2$. Da $\widetilde{\Delta}$ ein k-Fächer ist, gilt $[\rho_1, s] \preccurlyeq [\rho_2, l]$. Somit ist Bedingung 2.4.27 (ii) (b) ebenfalls erfüllt und wir erhalten einen Morphismus

$$(\mathrm{id}, \mathfrak{f})\colon (N, \mathcal{S}_{\mathfrak{S}}) \;\to\; (N, \mathcal{S}_{\widetilde{\Delta}}).$$

Satz 3.6.19 liefert einen Morphismus $(\pi_{\mathfrak{S}}, \mathrm{id})\colon (X_{\mathfrak{S}}, T_N, x_0) \to (X_{\mathcal{S}_{\widetilde{\Delta}}}, T_N, x_0)$. Mit Folgerung 3.6.25 erhalten wir

$$(X_{\widetilde{\Delta}}, T_N, x_0) \quad\cong\quad (X_{\mathcal{S}_{\widetilde{\Delta}}}, T_N, x_0).$$

Somit gibt es einen kanonischen Morphismus $(\pi_{\mathfrak{S}}, \mathrm{id})\colon (X_{\mathfrak{S}}, T_N, x_0) \to (X_{\widetilde{\Delta}}, T_N, x_0)$. Wir schreiben auch $\pi_{\mathfrak{S}}\colon X_{\mathfrak{S}} \to X_{\widetilde{\Delta}}$ anstatt $(\pi_{\mathfrak{S}}, \mathrm{id})\colon (X_{\mathfrak{S}}, T_N, x_0) \to (X_{\widetilde{\Delta}}, T_N, x_0)$.

Satz 4.1.17. *Es sei* $(N, \mathfrak{S})$ *ein spitzes System von k-Kegeln. Weiter sei ein Schleifendurchlauf durch* **k-Quot** *und* **subroutine k-Quot** *gegeben, sodass für alle k-Kegel* σ_1, σ_2*, für die* σ_1 *durch den k-Kegel* $\widetilde{\sigma} := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ *ersetzt wird, Folgendes gilt:*

(i) *Die k-Kegel* σ_1, σ_2 *bilden ein striktes Paar.*
(ii) *Die Abbildung* $\pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}\colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \to X_{\widetilde{\sigma}}$ *ist die universelle Separierung von* $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$.

Dann ist $\widetilde{\Delta} :=$ **k-Quot(**$\mathfrak{S}$**)** *ein spitzer k-Fächer in* $N_{\mathbb{Q}}$ *und* $\pi_{\mathfrak{S}}\colon X_{\mathfrak{S}} \to X_{\widetilde{\Delta}}$ *aus Konstruktion 4.1.16 ist die universelle Separierung von* $X_{\mathfrak{S}}$

Beweis. Es sei $\varphi\colon X \to Z$ ein Morphismus von k-Räumen, wobei Z separiert ist. Weiter seien $\mathfrak{S}_i$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{S}}_i$ die Systeme von k-Kegeln im i-ten Schleifendurchlauf des Algorithmus **k-Quot**, wobei $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}$ gilt. Wir zeigen nun: Gibt es ein $\widetilde{\varphi}_i\colon X_{\mathfrak{S}_i} \to Z$, so existiert ein Morphismus $\widetilde{\varphi}_{i+1}\colon X_{\mathfrak{S}_{i+1}} \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}_{i+1}(tx_0) = \widetilde{\varphi}_i(tx_0)$. Es sei $\widetilde{\varphi}_i\colon X_{\mathfrak{S}_i} \to Z$ so ein Morphismus gegeben. Weiter betrachten wir die Familie $R_{i+1} :=$ **subroutine k-Quot(**$\mathfrak{S}_i$**)**. Dann gilt

$$\widetilde{\mathfrak{S}}_{i+1} \quad = \quad \{\tau;\ \tau \in R_{i+1}, \tau \text{ maximal bezüglich Inklusion}\}.$$

Nach Lemma 4.1.15 existiert ein Morphismus $\psi_{i+1}\colon X_{R_{i+1}} \to Z$ mit $\psi_{i+1}(tx_0) = \widetilde{\varphi}_i(tx_0)$. Mit Lemma 4.1.14 erhalten wir weiter einen Morphismus $\psi'_{i+1}\colon X_{\widetilde{\mathfrak{S}}_{i+1}} \to Z$ mit $\psi'_{i+1}(tx_0) = \psi_{i+1}(tx_0) = \widetilde{\varphi}_i(tx_0)$. Nach Lemma 4.1.13 erhalten wir einen Morphismus $\widetilde{\varphi}_{i+1}\colon Y_{\mathfrak{S}_{i+1}} \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}_{i+1}(tx_0) = \psi_{i+1}(tx_0) = \widetilde{\varphi}_i(tx_0)$. Somit gibt es genau einen Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon X_{\widetilde{\Delta}} \to Z$ mit $\varphi(tx_0) = \widetilde{\varphi}(tx_0)$. Mit Konstruktion 4.1.16 gilt $\varphi_{|T_N x_0} = (\widetilde{\varphi} \circ \pi)_{|T_N x_0}$. Mit Folgerung 1.5.12 erhalten wir $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$. Da $\pi_{|T_N x_0} = \text{id}$ gilt, erhalten wir mit Folgerung 1.5.12, dass $\widetilde{\varphi}$ eindeutig bestimmt ist. $\square$

4.2. **Schwach eigentliche Morphismen.**

Wir betrachten nur noch den Fall, dass $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt. Um ein Kriterium zu bekommen, wann in einem Schritt des Algorithmus **k-Quot** eine universelle Separierung existiert, werden wir [3, Proposition 1.2] verallgemeinern: Es sei $(\pi, \widetilde{\pi})\colon (X', T_X, x_0) \to (Y', T_Y, y_0)$ ein torischer surjektiver Morphismus von Prävarietäten, wobei Y eine Varietät ist. Der Morphismus π ist genau dann schwach eigentlich, wenn $\widetilde{\pi}_*(|\mathcal{S}_{X'}|) = |\Delta_{Y'}|$ gilt. Dafür werden wir *komplexe Raumkeime* und *lokale Kurven* betrachten. Beispiel 4.2.7 zeigt, dass wir keine analoge Aussage zu [3, Proposition 1.2] beweisen können.

Es sei X' eine Prävarietät mit einer offenen affinen Überdeckung $X'_1, \dots, X'_m$. So trägt jedes X'_i eine metrische Topologie. Es sei angemerkt, dass die Metrik zwar von der Einbettung abhängig ist, die Topolgie jedoch nicht. Weil die auf den Durchschnitten $X'_i \cap X'_j$ von X'_i bzw. X'_j induzierten Topologien übereinstimmen, erhält man, dass X' eine „komplexe Topologie" trägt. Wir nennen eine Menge $U' \subseteq X'$ *komplex offen*, falls sie bezüglich der komplexen Topologie offen ist. Die Zarkiski Topologie ist gröber als die komplexe Topologie.

Es seien $G \subseteq \mathbb{C}^m$ ein Gebiet und U eine komplexe offene Teilmenge von G. Dann bezeichnen wir die Menge aller holomorphen Abbildungen von U nach $\mathbb{C}$ mit $\mathcal{O}_G^{\mathrm{an}}(U)$. Die Zuordnung $\mathcal{O}_G^{\mathrm{an}}$ ist eine Garbe auf G. Ein Raum mit Funktionen $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *komplexer Raum*, falls zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U, ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}^m$ und eine Idealgarbe $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_G^{\mathrm{an}}$ endlichen Typs existieren, sodass die Räume $(U, \mathcal{O}_U)$ und $(A, (\mathcal{O}_G^{\mathrm{an}}/\mathcal{I})_{|A})$ isomorph sind, wobei

$$A \quad := \quad \{x \in G;\ (\mathcal{O}_G^{\mathrm{an}}/\mathcal{I})_{G,x} \neq 0\}.$$

Eine *holomorphe Abbildung* $\varphi\colon X' \to Y'$ *von komplexen Räumen* ist ein Morphismus der zu Grunde liegenden Räume mit Funktionen.

Jedes $(X'_i, \mathcal{O}_{X'_i}^{\mathrm{an}})$ ist ein komplexer Raum. Dies induziert eine Garbe $\mathcal{O}_{X'}^{\mathrm{an}}$ und macht somit $(X', \mathcal{O}_{X'}^{\mathrm{an}})$ zu einem nicht notwendigerweise hausdorffschen komplexen Raum (vgl. [14]). Ist $\varphi\colon X' \to Y'$ ein Morphismus von Prävarietäten, so ist $\varphi\colon X' \to Y'$ insbesondere eine holomorphe Abbildung.

Definition 4.2.1. Es sei X' eine Prävarietät und $x \in X'$. Zwei komplexe offene Umgebungen $Y', Z' \subseteq X'$ von x heißen äquivalent in x, falls es eine komplexe offene Umgebung $U' \subseteq X'$ von x gibt, so dass $(U' \cap Y', \mathcal{O}_{U' \cap Y'}^{\mathrm{an}}) = (U' \cap Z', \mathcal{O}_{U' \cap Z'}^{\mathrm{an}})$ gilt. Der *holomorphen Raumkeim* von x in X' ist die Äquivalenzklasse $X_x'^{\mathrm{an}}$. Es seien Y'_1, Y'_2 zwei komplexe offene Umgebungen von x in X'. Zwei holomorphe Morphismen $\varphi_1\colon Y'_1 \to Z'_1$, $\varphi_2\colon Y'_2 \to Z'_2$ heißen äquivalent in x, falls $Y'_1 \sim Y'_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2$ auf einer komplexen Umgebung von x in X' gilt. Ein *Morphismus* $\varphi_x\colon X_x'^{\mathrm{an}} \to Y_y'^{\mathrm{an}}$ *von holomorphen Raumkeimen* ist die Äquivalenzklasse einer holomorphen Abbildung φ in x.

Erinnerung 4.2.2. Es seien X ein k-Raum und X' eine algebraische Kurve durch $x \in X$. Dann ist der k-Raum X' nach Satz 1.3.15 eine Prävarietät.

Definition 4.2.3. Es seien X, Y k-Räume und $\pi\colon X \to Y$ ein Morphismus.

(i) Eine *lokale Kurve in* $x \in X$ ist eine Morphismus von holomorphen Raumkeimen $\gamma_0\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to X_x'^{\mathrm{an}}$, wobei X' eine algebraische Kurve in X durch x ist.

(ii) Eine lokale Kurve $\widetilde{\gamma}\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to X_x'^{\mathrm{an}}$ in $x \in X$ ist eine *schwache-π-Liftung* der lokalen Kurve $\gamma\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to Y_y'^{\mathrm{an}}$ in $y \in Y$, falls ein Morphismus $\alpha\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}}$ von holomorphen Raumkeimen existiert, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \arrow[r, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[d, "\alpha"'] & X_x'^{\mathrm{an}} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \arrow[r, "\gamma"'] & Y_y'^{\mathrm{an}} \end{tikzcd}$$

(iii) Der Morphismus π heißt *schwach eigentlich*, falls sich jede lokale Kurve in Y schwach-π-liften lässt.

Bemerkung 4.2.4. Jede Kurve $\gamma\colon C \to X$ induziert eine lokale Kurve durch $\gamma(c)$ mit $c \in C$.

Begründung. Nach Definition ist C eine Varietät mit $\dim(C) = \dim(\gamma(C)) = 1$. Da C eine Varietät ist, gibt es zu jedem $c \in C$ eine lokale Kurve $\alpha_c\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to C_c^{\mathrm{an}}$. Es sei D' der Abschluss von $\gamma(C)$. Satz 1.3.10 liefert, dass D' eine algebraische Kurve in X durch $\gamma(x)$ ist. Nach Satz 1.3.15 ist D' eine Prävarietät. Somit haben wir einen Morphismus $\gamma\colon C \to D'$ von Prävarietäten. Insbesondere ist $\gamma_c\colon C_c^{\mathrm{an}} \to D'^{\mathrm{an}}_{\gamma(x)}$ ein Morphismus von Raumkeimen. Also ist $(\gamma_c \circ \alpha_c)\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to D'^{\mathrm{an}}_{\gamma(c)}$ eine lokale Kurve. $\square$

Definition 4.2.5. Es sei $(N, \mathcal{S}) = (N, (\Sigma_{ij})_{i,j\in I})$ ein k-Gitterfächersystem. Dann nennen wir folgende Menge den *Träger von $\mathcal{S}$*:

$$|\mathcal{S}| \quad := \quad \bigcup_{i,j\in I} |\Sigma_{ij}|.$$

Satz 4.2.6. *Es sei $(\pi, \widetilde{\pi})\colon (X', T_X, x_0) \to (Y', T_Y, y_0)$ ein torischer surjektiver Morphismus von Prävarietäten, wobei Y eine Varietät ist. Dann sind äquivalent:*

(i) *Der Morphismus π ist schwach eigentlich.*
(ii) *Es gilt $\widetilde{\pi}_*(|\mathcal{S}_{X'}|) = |\Delta_{Y'}|$.*

Beweis. Siehe [3, Proposition 1.2]. $\square$

Beispiel 4.2.7. Wir betrachten die quasiaffinen attraktiven torischen k-Räume $X_1 := \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ und $X_2 := \mathbb{C}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{C}^*)$ mit der Standardwirkung des $T := (\mathbb{C}^*)^2$ und Basispunkt $x_0 = (1,1)$. Weiter betrachten wir den Isomorphismus $\psi\colon T \to T$, $x \mapsto x$ und setzen $X := X_1 \cup_\psi X_2$. Es gilt $\sigma_{X_1} = \mathrm{cone}(e_1)$ und $\sigma_{X_2} = \mathrm{cone}(e_1, e_2) \setminus \mathring{\sigma}_{X_1}$, wobei e_1, e_2 die Standardbasisvektoren des $\mathbb{Q}^2 \cong \Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$ bezeichnen. Es gilt $\mathcal{S}_X = (\Sigma_{ij})_{i,j\in\{1,2\}}$, wobei $\Sigma_{11} = \mathcal{F}_{\sigma_{X_1}}$, $\Sigma_{22} = \mathcal{F}_{\sigma_{X_2}}$ und $\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = \{(0,0)\}$. Die Abbildung 23 zeigt ein Schaubild von $\mathcal{S}_X$. Der Gittermorphismus $\mathrm{id}\colon \lambda(T) \to \lambda(T)$, $v \mapsto v$ liefert auf natürliche weise einen torischen Morphismus $(\pi, \mathrm{id})\colon (X, T, x_0) \to (\mathbb{C}^2, T, x_0)$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2)$. Weiter gilt $|\mathcal{S}_X| = |\sigma_{\mathbb{C}^2}|$. Der Morphismus (π, id) ist nicht schwach eigentlich. Dazu betrachten wir die Kurve $\gamma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $s \mapsto (s, 0)$. Angenommen es gibt eine lokale Kurve $\widetilde{\gamma}\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to X_x'^{\mathrm{an}}$ in $x \in X$ und ein Morphismus $\alpha\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}}$ von holomorphen Raumkeimen, sodass $\pi(\widetilde{\gamma}(s)) = \gamma(\alpha(s))$ gilt für s nahe bei 0. Folglich gilt $\pi(\widetilde{\gamma}(s)) = (\alpha(s), 0)$ für s nahe bei 0. Also gilt $\pi(\widetilde{\gamma}(s)) \cap \pi(Tx_{[\sigma_1,1]}) \neq \emptyset$ für s nahe bei 0. Wir können somit eine metrisch offene Umgebung U von 0 in $\mathbb{C}$ wählen, sodass der Zariskiabschluss von $\widetilde{\gamma}(U)$ in

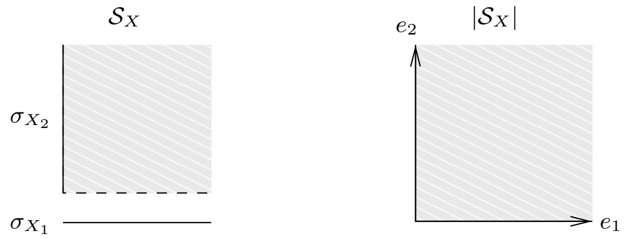

Abbildung 23

X eine Kurve ist und $\widetilde{\gamma}(U) \subseteq \mathbb{V}_{Tx_{[\sigma_{X_1},1]}}$ gilt. Es gilt $\mathbb{V}_{Tx_{[\sigma_{X_1},1]}} = Tx_{[\sigma_{X_1},1]}$ und $Tx_{[\sigma_{X_1},1]} \cap \pi^{-1}((0,0)) = \emptyset$. Somit haben wir einen Widerspruch.

Definition 4.2.8. Es seien (X, T_X, x_0) und (Y, T_Y, y_0) torische k-Räume und ein Morphismus $\pi\colon X \to Y$ von k-Räumen.

(i) Wir nennen die Kurve $\gamma\colon \mathbb{C} \to X$ eine *torische Kurve in X*, falls $[\sigma, i] \in \Omega(\mathcal{S}_X)$ und $\lambda \in \Lambda(T_X)$ existieren, sodass $\gamma(s) = \lambda(s)x_{[\sigma,i]}$ gilt für $s \in \mathbb{C}^*$.
(ii) Die torische Kurve $\widetilde{\gamma}\colon \mathbb{C} \to X$ heißt *torische schwache-π-Liftung* der torischen Kurve $\gamma\colon \mathbb{C} \to Y$, falls $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ gilt.
(iii) Der Morphismus π heißt *torisch schwach eigentlich*, falls sich jede torische Kurve in Y schwach torisch-π-liften lässt.

Bemerkung 4.2.9. Mit Bemerkung 4.2.4 induziert jede torische Kurve eine lokale Kurve.

Lemma 4.2.10. *Es sei (X, T, x_0) ein torischer k-Raum und $(N, \mathcal{S} := (\Sigma_{ij})_{i,j \in I})$ das zugehörige attraktive spitze k-Gitterfächersystem. Weiter seien $[\tau, i] \in \Omega(\mathcal{S})$ und $\lambda \in N$ gegeben. Dann sind äquivalent:*

(i) *Die Kurve $\gamma\colon \mathbb{C}^* \to X$, $s \mapsto \lambda(s)x_{[\tau,i]}$ induziert eine torische Kurve $\gamma'\colon \mathbb{C} \to X$ in X mit $\gamma'_{|\mathbb{C}^*} = \gamma$.*
(ii) *Es gilt $\lambda \in \mathring{\rho} + \operatorname{lin}(\tau)$ mit $[\rho, j] \in \operatorname{Stern}_{\mathcal{S}}([\tau, i])$.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass X ein quasiaffiner attraktiver torischer k-Raum ist und setzen $\sigma := \sigma_{X'}$. Weiter betrachten wir den Morphismus $P\colon N \to N_\tau$ und setzen $p := \operatorname{Spec}(\psi_{P^*})\colon T \to T/T_{x_\tau}$ bzw. $\gamma_p(s) := p(\lambda(s))x_{P^{\mathrm{s}}(\tau)}$. Lemma 3.4.18 liefert ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^* \arrow[dl, "\gamma_p"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ X_{P^{\mathrm{s}}(\sigma)} \arrow[rr, "\cong", "p(t)x_{P^{\mathrm{s}}(\rho)} \mapsto tx_\rho"'] & & \mathbb{V}_\tau \end{tikzcd}$$

Somit erhalten wir, dass γ genau dann eine torische Kurve in X induziert, wenn γ_p eine torische Kurve in $X_{P^{\mathrm{s}}(\sigma)}$ induziert. Damit folgt die Behauptung aus Konstruktion 2.5.8 und Folgerung 3.5.3.

Es sei jetzt X ein beliebiger k-Raum. Da $\mathcal{S}$ attraktiv ist, gibt es k-Kegel σ_i mit $\Sigma_{ii} = \mathcal{F}_{\sigma_i}$. Insbesondere ist jedes $X_{\Sigma_{ii}}$ ein quasiaffiner attraktiver torischer k-Raum.

Zur Implikation „(i) $\Rightarrow$ (ii)": Nach Voraussetzung existiert zu γ eine Fortsetzung $\gamma'\colon \mathbb{C} \to X$ mit $\gamma'_{|\mathbb{C}^*} = \gamma$. Es gilt $x := \gamma'(0) \in \mathbb{V}_{[\tau,i]}$ und folglich $x \in X_{\Sigma_{jj}}$ mit $[\tau,i] \preccurlyeq [\delta,j]$ für ein $[\delta,j] \in \Omega(\mathcal{S})$. Insbesondere gilt $\tau \in \Sigma_{ij} \preccurlyeq \Sigma_{jj}$. Nach dem obigen Fall gilt $\lambda \in \mathring{\rho} + \mathrm{lin}(\tau)$ mit $\tau \preccurlyeq \rho \in \Sigma_{jj}$. Insbesondere ist $[\rho,j] \in \mathrm{Stern}_{\mathcal{S}}([\tau,i])$.

Zur Implikation „(ii) $\Rightarrow$ (i)": Es gelte $\lambda \in \mathring{\rho} + \mathrm{lin}(\tau)$ mit $[\tau,i] \preccurlyeq [\rho,j]$. Mit $[\tau,i] \preccurlyeq [\rho,j]$ erhalten wir, dass $\tau \in \Sigma_{ij} \preccurlyeq \Sigma_{jj}$ gilt. Nach dem obigen Fall existiert eine Fortsetzung $\gamma''\colon \mathbb{C} \to X_{\Sigma_{jj}}$ von γ. Insbesondere existiert dann eine Fortsetzung $\gamma'\colon \mathbb{C} \to X$ von γ. □

Definition 4.2.11. Es sei $\mathcal{S}$ ein k-Fächersystem und $[\tau,i] \in \Omega(\mathcal{S})$. Wir nennen die folgende Menge den *Träger vom* $\mathrm{Stern}_{\mathcal{S}}([\tau,i])$:

$$|\mathrm{Stern}_{\mathcal{S}}([\tau,i])| \quad := \bigcup_{[\rho,j] \in \mathrm{Stern}_{\mathcal{S}}([\tau,i])} \mathring{\rho}.$$

Folgerung 4.2.12. *Es seien $(\pi, \mathrm{id})\colon (X,T,x_0) \to (Y,T,y_0)$ ein surjektiver Morphismus von torischen k-Räumen, wobei Y separiert ist. Dann gilt für jedes $\sigma \in \Delta_Y$:*

$$\bigcup_{[\rho,i] \in \Omega(\mathcal{S}_X),\ \mathring{\rho} \subseteq \mathring{\sigma}} |\mathrm{Stern}_{\mathcal{S}_X}([\rho,i])| + \mathrm{lin}(\rho) \quad \subseteq \quad |\mathrm{Stern}_{\Delta_Y}(\sigma)| + \mathrm{lin}(\sigma).$$

Beweis. Es sei $\lambda \in |\mathrm{Stern}_{\mathcal{S}_X}([\rho,i])| + \mathrm{lin}(\rho)$ mit $\mathring{\rho} \subseteq \mathring{\sigma}$. Nach Lemma 4.2.10 induziert $\delta\colon \mathbb{C}^* \to X$ mit $\delta(s) = \lambda(s) x_{[\rho,i]}$ eine torische Kurve $\delta'\colon \mathbb{C} \to X$. Für $s \in \mathbb{C}^*$ gilt:

$$\pi(\delta(s)) \quad = \quad \lambda(s)\pi(x_{[\rho,i]}) \quad = \quad \lambda(s)x_\sigma.$$

Insbesondere induziert die Kurve $\gamma\colon \mathbb{C}^* \to Y$ mit $\gamma(s) := \lambda(s)x_\sigma$ eine torische Kurve $\delta'\colon \mathbb{C} \to Y$. Mit Lemma 4.2.10 gilt $\lambda \in |\mathrm{Stern}_{\Delta_Y}(\sigma)| + \mathrm{lin}(\sigma)$. □

Bemerkung 4.2.13. Es sei $\gamma\colon C \to X$ eine Kurve in X. Wegen $\dim(\gamma(C)) = 1$ erhalten wir mit Satz 1.3.15, dass $\gamma(C)$ eine Prävarietät ist. Somit können wir γ auch als eine holomorphe Abbildung auffassen.

Lemma 4.2.14. *Es seien C eine normale Kurve, $c \in C$ ein Punkt und X ein k-Raum. Weiter sei $\gamma\colon C \setminus \{c\} \to X$ eine Kurve in X. Gibt es eine holomorphe Fortsetzung γ' von γ auf C, so ist γ' schon ein Morphismus von k-Räumen. Insbesondere ist $\gamma'\colon C \to X$ eine Kurve in X.*

Beweis. Es gilt $\dim(C \setminus \{c\}) = \dim(\gamma(C \setminus \{c\})) = 1$. Somit ist nach Satz 1.3.15 der Abschluss D' von $\gamma(C \setminus \{c\})$ in X eine Prävarietät. Also ist $\gamma\colon C \setminus \{c\} \to D'$ ein Morphismus von Prävarietäten. In diesem Fall ist die Behauptung bekannt. □

Lemma 4.2.15. *Es seien (X,T,x_0) ein torischer separierter k-Raum und $\gamma\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to X_x'^{\mathrm{an}}$ eine lokale Kurve in $x \in X$. Dann existiert eine lokale Kurve $\beta\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to T_t^{\mathrm{an}}$ in $t \in T$ und eine torische Kurve $\delta\colon \mathbb{C} \to X$, sodass $\gamma = \beta \cdot \delta$ gilt für die lokalen Kurven γ, β, δ.*

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $T = (\mathbb{C}^*)^n$ und $N = \mathbb{Z}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Scheibe um den Punkt 0, sodass der Zariskiabschluss $\overline{\gamma(U)}$ eine Kurve in X ist. Wir wählen eine Bahn Tx_τ mit minimaler Dimension, sodass $\gamma(U) \subseteq \mathbb{V}_\tau = \overline{Tx_\tau}$ gilt, wobei $\tau \in \Sigma_X$. Da $\gamma(U)$ zusammenhängend ist und Tx_τ minimal bezüglich Dimension gewählt ist, erhalten wir $\gamma(U) \cap Tx_\tau \neq \emptyset$. Da

Tx_τ offen in $\overline{Tx_\tau}$ ist, liegt $V := \gamma^{-1}(Tx_\tau)$ offen in $\mathbb{C}$. Weiter ist $U \setminus V$ eine echte analytische Teilmenge in U und deshalb diskret. Somit können wir annehmen, dass $U = V$ oder $U = V \cup \{0\}$ gilt. Wir haben auf V folgende Darstellung

$$\gamma(s) \quad = \quad (g_1(s), \ldots, g_n(s))x_\tau$$

mit holomorphen Funktionen $g_i \in (\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{an}})^*(V)$. Mit der Laurent-Reihenentwicklung erhalten wir

$$g_i(s) = s^{v_i}\beta_i(s)$$

mit $v_i \in \mathbb{Z}$ und $\beta_i \in (\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{an}})^*(U)$. Wir setzen $v := (v_1, \ldots, v_n)$, $\beta := (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ und $\delta\colon \mathbb{C}^* \to X$ mit $\delta(s) := \lambda_v(s)x_\tau$, wobei $\lambda_v\colon \mathbb{C}^* \to T$, $s \mapsto (s^{v_1}, \ldots, s^{v_n})$. Dann gilt $\delta(s) = \beta(s)^{-1}\gamma(s)$ für alle $s \in U \setminus \{0\}$. Insbesondere besitzt δ eine holomorphe Fortsetzung $\delta'\colon \mathbb{C} \to X$ auf $\mathbb{C}$. Nach Lemma 4.2.14 ist δ' ein Morphismus von k-Räumen. Für alle $s \in U$ gilt somit $\gamma(s) = \beta(s) \cdot \delta'(s)$. □

Satz 4.2.16. *Es seien $(\pi, \mathrm{id})\colon (X, T, x_0) \to (Y, T, y_0)$ ein surjektiver Morphismus von torischen k-Räumen, wobei Y separiert ist. Dann sind äquivalent:*

(i) *Die Abbildung π ist schwach eigentlich.*
(ii) *Die Abbildung π ist torisch schwach eigentlich.*
(iii) *Für jedes $\sigma \in \Delta_Y$ gilt:*

$$|\mathrm{Stern}_{\Delta_Y}(\sigma)| + \mathrm{lin}(\sigma) \quad = \quad \bigcup_{[\rho,i]\in\Omega(\mathcal{S}_X),\ \mathring{\rho}\subseteq\mathring{\sigma}} |\mathrm{Stern}_{\mathcal{S}_X}([\rho, i])| + \mathrm{lin}(\rho).$$

Beweis. Zur Implikation ,,(i) $\Rightarrow$ (ii)": Es sei $\gamma\colon \mathbb{C} \to Y$ eine torische Kurve in Y. Dann existieren $\lambda \in \Lambda(T)$ und $\sigma \in \Delta_Y$, sodass $\gamma(s) = \lambda(s)y_\sigma$ gilt für $s \in \mathbb{C}^*$. Nach Voraussetzung existieren eine lokale Kurve $\delta\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to X_x'^{\mathrm{an}}$ und ein Morphismus $\alpha\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}}$ von holomorphen Raumkeimen mit

$$\pi(\delta(s)) \quad = \quad \lambda(\alpha(s))y_\sigma,$$

wobei $s \in U$ und $0 \in U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Scheibe ist. Wir können ohne Einschränkung $0 \in U \subseteq \mathbb{C}$ so wählen, dass $\alpha(s) = s^k$ gilt für $s \in U$ mit $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Weiter wählen wir ein $[\rho, i] \in \Omega(\mathcal{S}_X)$, sodass die Bahn $B := Tx_{[\rho,i]}$ von minimaler Dimension ist mit $\delta(U) \subseteq \overline{B}$. Da $\delta(U)$ zusammenhängend ist und B minimal bezüglich Dimension gewählt ist, gilt $B \cap \delta(U) \neq \emptyset$. Wir setzen $V := \gamma'^{-1}(B)$. Dann ist V offen in $\mathbb{C}$ und $U \setminus V$ eine analytische Menge, also insbesondere diskret. Somit können wir durch Verkleinern von U erreichen, dass $U = V$ oder $U = V \cup \{0\}$ gilt. Für jedes $s \in V$ existiert ein $t_s \in T$ mit $\delta(s) = t_s x_{[\rho,i]}$. Somit gilt für $s \in V$:

$$\lambda(s^k)y_\sigma \quad = \quad \pi(\delta(s)) \quad = \quad t_s\pi(x_{[\rho,i]}).$$

Also ist $y_\sigma = \pi(x_{[\rho,i]})$ und $\lambda(s^k) = t_s$. Weiter gilt $\lambda(s^k) = \lambda(s)^k = (k \cdot \lambda)(s)$. Insbesondere besitzt $\lambda(s)^k x_{[\rho,i]}$ eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$. Mit Lemma 4.2.15 und Lemma 4.2.10 erhalten wir $k \cdot \lambda \in \mathring{\tau} + \mathrm{lin}(\rho)$ mit $[\tau, i] \in \mathrm{Stern}_{\mathcal{S}_X}([\rho, i])$. Da $k > 0$ ist, gilt insbesondere $\lambda \in \mathring{\tau} + \mathrm{lin}(\rho)$. Nach Lemma 4.2.10 existiert zu $\beta\colon \mathbb{C}^* \to X$ mit $\beta(s) = \lambda(s)x_{[\rho,i]}$ eine torische Kurve $\beta'\colon \mathbb{C} \to X$ mit $\beta'_{|\mathbb{C}^*} = \beta$. Somit gilt $\pi \circ \beta' = \gamma$.

Zur Implikation ,,(ii) $\Rightarrow$ (iii)": Es sei $\sigma \in \Delta_Y$ gegeben. Nach Folgerung 4.2.12 ist nur zur Inklusion ,,$\subseteq$" etwas zu zeigen. Es sei weiter ein $\lambda \in |\mathrm{Stern}_{\Delta_Y}(\sigma)| + \mathrm{lin}(\sigma)$ gegeben. Nach Lemma 4.2.10 induziert die Kurve $\gamma\colon \mathbb{C}^* \to Y$ mit $\gamma(s) := \lambda(s)y_\sigma$ eine torische Kurve $\delta'\colon \mathbb{C} \to Y$. Nach Voraussetzung existiert eine torische Kurve

$\widetilde{\gamma}\colon \mathbb{C} \to X$ mit $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma'$. Da $\widetilde{\gamma}$ eine torische Kurve ist, existieren $\lambda' \in \Lambda(T)$ und $[\rho, i] \in \Omega(\mathcal{S}_X)$ mit $\widetilde{\gamma}(s) = \lambda'(s)x_{[\rho,i]}$ für $s \in \mathbb{C}^*$. Somit gilt für $s \in \mathbb{C}^*$:

$$\pi(\widetilde{\gamma}(s)) \quad = \quad \lambda'(s)\pi(x_{[\rho,i]}) \quad = \quad \lambda(s)y_\sigma.$$

Also ist $\pi(x_{[\rho,i]}) = y_\sigma$, $\lambda' = \lambda$ und $\mathring{\rho} \subseteq \mathring{\sigma}$. Mit Lemma 4.2.10 erhalten wir, dass $\lambda \in |\mathrm{Stern}_{\mathcal{S}_x}([\rho, i])| + \mathrm{lin}(\rho)$ und $\mathring{\rho} \subseteq \mathring{\sigma}$ gilt.

Zur Implikation „(iii) $\Rightarrow$ (i)": Es sei $\gamma\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to Y_y'^{\mathrm{an}}$ eine lokale Kurve in $y \in Y$. Nach Lemma 4.2.15 existieren eine lokale Kurve $\beta\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to T_t^{\mathrm{an}}$ in $t \in T$ und eine torische Kurve $\delta\colon \mathbb{C} \to Y$, sodass $\gamma = \beta \cdot \delta$ gilt für s nahe bei 0. Zu δ existieren $\sigma \in \Delta_Y$ und $\lambda \in \Lambda(T)$ mit $\delta(s) = \lambda(s)y_\sigma$ für $s \in \mathbb{C}^*$. Mit Lemma 4.2.10 und (iii) gilt $\lambda \in |\mathrm{Stern}_{\mathcal{S}_X}([\rho, i])| + \mathrm{lin}(\rho)$ für ein $[\rho, i] \in \Omega(\mathcal{S}_X)$ mit $\mathring{\rho} \subseteq \mathring{\sigma}$. Insbesondere induziert die Kurve $\alpha\colon \mathbb{C}^* \to X$ mit $\alpha(s) := \lambda(s)x_{[\sigma,i]}$ eine torische Kurve $\alpha'\colon \mathbb{C} \to X$ mit $\alpha'_{|\mathbb{C}^*} = \alpha$. Aus $\mathring{\rho} \subseteq \mathring{\sigma}$ folgt $\pi(x_{[\rho,i]}) = y_\sigma$. Also gilt für $s \in \mathbb{C}^*$:

$$\pi(\beta(s)\alpha'(s)) \quad = \quad \beta(s)\pi(\alpha'(s)) \quad = \quad \beta(s)\lambda(s)\pi(x_{[\rho,i]}) \quad = \quad \beta(s)\lambda(s)y_\sigma.$$

Da Y separiert ist, gilt die obige Gleichheit für alle $s \in \mathbb{C}$. Somit erhalten wir $\pi(\beta(s)\alpha'(s)) = \gamma(s)$ für s nahe bei 0. □

Lemma 4.2.17. *Es sei $\pi\colon X \to Y$ ein surjektiver schwach eigentlicher Morphismus. Dann hat π die Kurvenüberdeckungseigenschaft.*

Beweis. Es sei Y' eine algebraische Kurve durch den Punkt $y \in Y$. Dann existiert eine lokale Kurve $\gamma\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to Y_y'^{\mathrm{an}}$. Da π schwach eigentlich ist, existiert ein Morphismus $\alpha\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}}$ von holomorphen Raumkeimen und eine lokale Kurve $\gamma'\colon \mathbb{C}_0^{\mathrm{an}} \to X_x'^{\mathrm{an}}$ mit $\pi \circ \gamma' = \gamma \circ \alpha$ als lokale Kurven. Es sei U eine offene Scheibe um den Punkt x in X' mit $\pi(U) \subseteq Y'$. Insbesondere ist $\pi_{|U}$ nicht konstant. Mit $\dim(Y') = 1$ erhalten wir, dass $\pi(U)$ dicht bezüglich der Zariski Topologie in Y' ist. Da Y' abgeschlossen in Y ist, gilt $\pi(\overline{U}^{X'}) \subseteq Y'$. Da X' eine Kurve und U eine offene Scheibe ist, gilt $\overline{U}^{X'} = X'$. Somit ist $\pi(X')$ dicht in Y' π erfüllt die Kurvenüberdeckungseigenschaft. □

Folgerung 4.2.18. *Es sei $\pi\colon X \to Y$ ein surjektiver schwach eigentlicher Morphismus von k-Räumen. Dann besitzt Y die Quotiententopologie bezüglich π.*

Beweis. Folgt aus Lemma 1.9.11 und Lemma 4.2.17 □

Lemma 4.2.19. *Es seien $(\pi, \mathrm{id})\colon (X, T, x_0) \to (Y, T, y_0)$ ein surjektiver schwach eigentlicher Morphismus von torischen lokal 1-vollen k-Räumen, wobei Y separiert ist und $\varphi\colon X \to Z$ ein Morphismus von k-Räumen. Ist φ konstant auf den Fasern von π, so ist die Abbildung $\widetilde{\varphi}\colon Y \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}(y) := \varphi(\pi^{-1}(y))$ ein Morphismus. Insbesondere gilt $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$.*

Beweis. Nach Folgerung 4.2.18 ist $\widetilde{\varphi}$ stetig. Wegen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $\pi\colon X \to Y$ separabel. Somit ist $\widetilde{\varphi}\colon Y \to Z$ nach Lemma 1.9.18 ein Morphismus. □

4.3. **Existenz von universellen Separierungen für gewisse torische k-Räume in Dimension drei.**

Es sei (X, T, x_0) ein torischer k-Raum. Wir werden uns in Kapitel 4.3 mit dem Fall beschäftigen, dass $\dim(X) = 3$ ist und $\mathcal{S}_X$ lokal 1-voll ist. In diesem Kapitel werden wir ausschließlich torische k-Räume betrachten, die aus zwei quasiaffinen attraktiven Karten bestehen. Wir werden zeigen, dass es immer eine universelle Separierung gibt, falls die zugehörigen k-Kegel Dimension zwei haben. Dies ist eine teilweise Verallgemeinerung von [3, Theorem 4.1]. Satz 4.3.17 gibt ein Kriterium an für die Existenz einer universellen Separierung für zwei k-Kegel an. Der Beweis von Lemma 4.3.12 ist eine Verallgemeinerung des Beweises von [9, Theorem 1].

Erinnerung 4.3.1. Es sei (X', T, x_0) eine torische Varietät. Weiter seien $\sigma', \tau' \in \Sigma_{X'}$ mit $\operatorname{lin}(\sigma') + \operatorname{lin}(\tau') = N_{T_\mathbb{Q}}$. Dann gilt $T = T_{x_{\sigma'}} \cdot T_{x_{\tau'}}$.

Lemma 4.3.2. *Es sei (X, T, x_0) ein torischer k-Raum und $[\sigma, i], [\tau, j] \in \Omega(\mathcal{S}_X)$ mit $\operatorname{lin}(\sigma) + \operatorname{lin}(\tau) = N_{T_\mathbb{Q}}$. Dann gilt $T = T_{x_{[\sigma,i]}} \cdot T_{x_{[\tau,j]}}$.*

Beweis. Es genügt, den Fall zu betrachten, dass X quasiaffin ist. Sei dazu (X', T, x_0) der torische Abschluss von (X, T, x_0). Nach Satz 3.2.28 können wir annehmen, dass $X \sqsubseteq_T X'$ gilt. Somit folgt die Behauptung aus Folgerung 3.5.11 und Erinnerung 4.3.1. $\square$

Lemma 4.3.3. *Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein k-Gitterfächersystem und $[\sigma, i], [\tau, j] \in \Omega(\mathcal{S})$ mit $\mathring{\sigma} \cap \mathring{\tau} \neq \emptyset$. Weiter sei $\varphi \colon X_\mathcal{S} \to Z$ ein Morphismus von k-Räumen, wobei Z separiert ist. Dann gilt $\varphi(tx_{[\sigma,i]}) = \varphi(tx_{[\tau,j]})$ für jedes $t \in T_N$*

Beweis. Wir wählen uns ein $\lambda \in \mathring{\sigma} \cap \mathring{\tau} \cap N$. Mit Folgerung 3.5.3 erhalten wir, dass $\lim_{s\to 0}(t\lambda(s)x_0)$ in $X_{(\sigma,i)}$ und $\lim_{s\to 0}(t\lambda(s)x_0)$ in $X_{(\tau,j)}$ liegt. Da Z separiert ist, folgt mit Satz 1.5.11 die Behauptung. $\square$

Definition 4.3.4. Ein striktes Paar σ_1, σ_2 heißt *1-voll*, falls σ_1 und σ_2 1-voll sind.

Erinnerung 4.3.5. Es seien σ_1' und σ_2' Kegel in V und $\sigma' := \operatorname{hull}(\sigma_1' \cup \sigma_2')$. Dann gilt $\sigma'^{(1)} \subseteq \sigma_1'^{(1)} \cup \sigma_2'^{(1)}$.

Bemerkung 4.3.6. Es sei σ_1, σ_2 ein 1-volles spitzes Paar. Dann ist $\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)$ 1-voll. Ist die Menge $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ ein k-Kegel in V, so ist σ 1-voll.

Bemerkung 4.3.7. Es sei σ ein k-Kegel in V mit $\dim(\sigma) = 2$. Ist σ 1-voll, so ist σ ein Kegel in V.

Ab jetzt sei N ein Gitter mit $\dim(N) = \dim(N_\mathbb{Q}) = 3$.

Lemma 4.3.8. *Es sei σ_1, σ_2 ein 1-volles striktes Paar in $N_\mathbb{Q}$ mit $\dim(\sigma_1) = \dim(\sigma_2) = 1$ und $\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) = 1$. Dann ist $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ ein k-Kegel und $\pi \colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \to Y_\sigma$ die universelle Separierung zu $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$.*

Beweis. Aus $\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) = 1$ folgt $\sigma_1 = \sigma_2$. Somit gilt $\sigma = |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)| = \sigma_1$. Insbesondere ist $X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \cong Y_\sigma$. Also ist $\pi_{(\sigma_1,\sigma_2)} = \mathrm{id}$ die universelle Separierung. $\square$

Folgerung 4.3.9. *Es sei σ_1, σ_2 ein 1-volles striktes Paar in $N_\mathbb{Q}$ mit $\dim(\sigma_1) = \dim(\sigma_2) = 1$. Dann existiert zu $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ die universelle Separierung $\pi \colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \to Y$.*

Beweis. Falls $\dim(\sigma_1 \cap \sigma_1) = 0$ gilt, folgt $\sigma_1 \cap \sigma_2 \preccurlyeq \sigma_1, \sigma_2$. Somit ist $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ eine Varietät. Also ist $\mathrm{id}\colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \to X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ die universelle Separierung. Falls $\dim(\sigma_1 \cap \sigma_1) = 1$ gilt folgt die Behauptung aus Lemma 4.3.8. $\square$

Lemma 4.3.10. *Es sei σ_1, σ_2 ein 1-volles striktes Paar mit $\dim(\sigma_1) \geq 2$, $\dim(\sigma_2) = 1$ und $\sigma_1 \cap \sigma_2 \not\preccurlyeq \sigma_1$. Dann ist $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ ein spitzer k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$ und $\pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}\colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \to Y_\sigma$ die universelle Separierung von $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$.*

Beweis. Da σ_1 und σ_2 spitz sind, erhalten wir aus $\sigma_1 \cap \sigma_2 \not\preccurlyeq \sigma_1$, dass $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$ gilt. Somit folgt $\sigma_1 = \sigma$. Wir setzen $\pi := \pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}$, $T := T_N$, $X := X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ und $Y := Y_\sigma$. Es sei $\varphi\colon X \to Z$ ein Morphismus, wobei Z separiert ist. Da π nach Konstruktion surjektiv ist, können wir $\widetilde{\varphi}\colon Y \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}(y) := \varphi(\pi^{-1}(y))$ setzen. Wir zeigen jetzt, dass $\widetilde{\varphi}$ ein wohldefinierter Morphismus ist. Nach Folgerung 3.6.20 sind X und Y lokal 1-volle k-Räume. Also reicht es nach Lemma 4.2.19 zu zeigen, dass π schwach eigentlich und $\widetilde{\varphi}$ wohldefiniert ist.

Zur Wohldefiniertheit von $\widetilde{\varphi}$: Mit Folgerung 2.1.31 existiert genau eine Seite $\tau \preccurlyeq \sigma_1$ mit $\sigma_2 \subseteq \tau$ und $\mathring{\sigma}_2 \subseteq \mathring{\tau}$. Wegen $\pi_{|Tx_0} = \mathrm{id}$ erhalten wir mit Lemma 3.6.16 und Folgerung 3.6.27 für alle $t \in T$:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(ty_\delta) &= \{tx_{[\delta,1]}\}, && \text{falls } \delta \neq \tau \\ \pi^{-1}(ty_\tau) &= \{tx_{[\tau,1]}\} \ \cup \ T_{y_\tau} tx_{[\sigma_2,2]}, && \text{sonst.} \end{aligned}$$

Es ist nur für die Faser $\pi^{-1}(ty_\tau)$ etwas zu zeigen. Mit Lemma 4.3.3 erhalten wir für jedes $t \in T$ und $t' \in T_{y_\tau}$:

$$\varphi(t'tx_{[\sigma_2,2]}) \quad = \quad \varphi(t'tx_{[\tau,1]}) \quad = \quad \varphi(tx_{[\tau,1]}).$$

Somit ist $\varphi(\pi^{-1}(ty_\tau))$ ein Punkt.

Es ist noch zu zeigen, dass π schwach eigentlich ist. Wegen $\sigma_1 = \sigma$ erhalten wir für jedes $\delta \preccurlyeq \sigma$:

$$|\mathrm{Stern}_\sigma(\delta)| \ + \ \mathrm{lin}(\delta) \quad = \quad |\mathrm{Stern}_{\mathcal{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}}([\delta, 1])| \ + \ \mathrm{lin}(\delta)$$

. Somit ist $\pi\colon X \to Y$ nach Satz 4.2.16 schwach eigentlich. $\square$

Erinnerung 4.3.11. Es sei (X', T, x_0) eine affine torische Varietät, sodass die Strahlen $\sigma_{X'}^{(1)}$ von $\sigma_{X'}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$ bilden. Dann ist X' eine $\mathbb{Q}$-faktorielle Varietät.

Lemma 4.3.12. *Es sei σ_1, σ_2 ein 1-volles striktes Paar in $N_{\mathbb{Q}}$ mit $\dim(\sigma_i) = 2$. Weiter gelte $\sigma_1 \cap \sigma_2 \not\preccurlyeq \sigma_1$ und $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2 = \emptyset$. Dann ist $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ ein spitzer k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$ und $\pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}\colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \to Y_\sigma$ ist die universelle Separierung von $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$.*

Beweis. Nach Bemerkung 4.3.7 sind σ_1 und σ_2 Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$ und somit ist $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ eine Prävarietät. Aus $\sigma_1 \cap \sigma_2 \not\preccurlyeq \sigma_1$ und $\dim(\sigma_1) = \dim(\sigma_2) = 2$ folgt, dass $\mathring{\sigma}_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ gilt. Nach Lemma 2.6.10 ist $\sigma = |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ ein k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$. Da σ_1, σ_2 ein 1-volles striktes Paar ist, ist σ ein 1-voller spitzer k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$. Wir setzen $\pi := \pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}$, $T := T_N$, $X := X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ und $Y := Y_\sigma$. Mit Folgerung 3.5.30 ist Y ein 1-voller k-Raum. Die Situation lässt sich folgendermaßen darstellen:

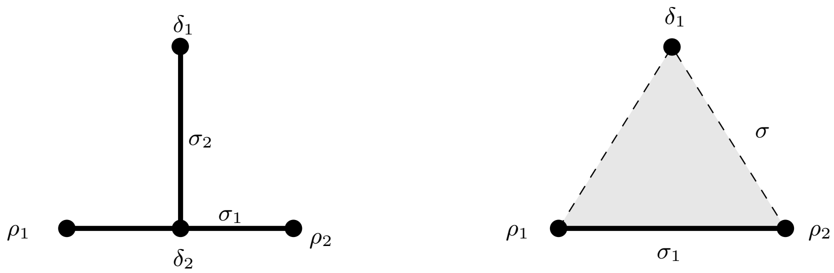

Abbildung 24

Nach Konstruktion 4.1.11 gilt $\pi(tx) = t\pi(x)$ für alle $t \in T$ und alle $x \in X$. Weiter sei $\varphi\colon X \to Z$ ein Morphismus, wobei Z separiert ist. Wir setzen $\widetilde{\varphi}\colon Y \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}(y) := \varphi(\pi^{-1}(y))$ und zeigen jetzt, dass $\widetilde{\varphi}$ ein wohldefinierter Morphismus ist.

Zur Wohldefiniertheit von $\widetilde{\varphi}$: Wir zeigen, dass für alle $\tau \preccurlyeq \sigma$ und alle $t \in T$ die Menge $\varphi(\pi^{-1}(ty_\tau))$ ein Punkt ist. Es seien $\sigma_1^{(1)} = \{\rho_1, \rho_2\}$ und $\sigma_2^{(1)} = \{\delta_1, \delta_2\}$. Für $\rho \in \sigma^{(1)}$ gilt $\rho \preccurlyeq \sigma_1$ oder $\rho \preccurlyeq \sigma_2$. Also können wir annehmen, dass $\sigma^{(1)} = \{\delta_1, \rho_1, \rho_2\}$ gilt. Aus $\mathring{\sigma}_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ folgt $\sigma_1 \preccurlyeq \sigma$ und $\dim(\sigma) = 3$ siehe Abbildung 24. Somit bestehen die Seiten von σ aus den k-Kegeln $\{0\}, \delta_1, \rho_1, \rho_2, \sigma_1$ und σ. Da $\pi_{|Tx_0} = \mathrm{id}$ gilt, erhalten wir, mit Lemma 3.6.16 und Folgerung 3.6.27 für alle $t \in T$:

$$\begin{array}{rcl} \pi^{-1}(ty_0) & = & \{tx_0\}, \\ \pi^{-1}(ty_{\delta_1}) & = & \{tx_{[\delta_1,2]}\}, \\ \pi^{-1}(ty_{\rho_i}) & = & \{tx_{[\rho_i,1]}\} \quad \text{für } i = 1, 2, \\ \pi^{-1}(ty_{\sigma_1}) & = & tT_{y_{\sigma_1}} x_{[\sigma_1,1]} \ \cup \ tT_{y_{\sigma_1}} x_{[\delta_2,2]}, \\ \pi^{-1}(ty_\sigma) & = & tT_{y_\sigma} x_{[\sigma_2,2]}. \end{array}$$

Es ist nur für die Fasern $\pi^{-1}(ty_{\sigma_1})$ und $\pi^{-1}(ty_\sigma)$ etwas zu zeigen.

Wir betrachten zunächst die Faser $\pi^{-1}(ty_{\sigma_1})$. Da $\mathring{\delta}_2 \subseteq \mathring{\sigma}_1$ gilt, erhalten wir mit Lemma 4.3.3 $\varphi(tx_{[\delta_2,2]}) = \varphi(tx_{[\sigma_1,1]})$ für alle $t \in T$. Mit Folgerung 3.6.27 erhalten wir $T_{y_{\sigma_1}} = T_{x_{[\sigma_1,1]}}$. Also gilt für alle $t' \in T_{y_{\sigma_1}}$ und alle $t \in T$:

$$\varphi(t'tx_{[\delta_2,2]}) \quad = \quad \varphi(t'tx_{[\sigma_1,1]}) \quad = \quad \varphi(tx_{[\sigma_1,1]}) \quad = \quad \varphi(tx_{[\delta_2,2]}).$$

Somit ist $\varphi(\pi^{-1}(ty_{\sigma_1}))$ ein Punkt.

Jetzt betrachten wir die Faser $\pi^{-1}(ty_\sigma)$. Aus $\dim(\sigma) = 3$ folgt $T = T_{y_\sigma}$. Somit gilt $\pi^{-1}(y_\sigma) = \pi^{-1}(ty_\sigma) = Tx_{[\sigma_2,2]}$. Wir wählen ein $\lambda \in \mathring{\sigma}_2 \cap N$. Mit Lemma 3.5.29 gilt $\lim_{s\to 0}(t\lambda(s)x_{(\delta_2,2)}) = tx_{(\sigma_2,2)}$ in X_{σ_2}. Da $x_{[\delta_2,2]}, x_{[\sigma_2,2]} \notin X_{\sigma_1}$ gilt, erhalten wir $\lim_{s\to 0}(t\lambda(s)x_{[\delta_2,2]}) = tx_{[\sigma_2,2]} \in X$. Weiter ist $\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) = 1$ und damit $\mathrm{lin}(\sigma_1) \neq \mathrm{lin}(\sigma_2)$. Wegen $\dim(\sigma_1) = \dim(\sigma_2) = 2$ erhalten wir $\mathrm{lin}(\sigma_1) + \mathrm{lin}(\sigma_2) = N_{\mathbb{Q}}$. Nach Lemma 4.3.2 gilt $T = T_{x_{[\sigma_1,1]}} \cdot T_{x_{[\sigma_2,2]}}$. Für jedes $t \in T$ existieren folglich $t_{\sigma_1} \in T_{x_{[\sigma_1,1]}}$ und $t_{\sigma_2} \in T_{x_{[\sigma_2,2]}}$ mit $t = t_{\sigma_1} t_{\sigma_2}$. Wir erhalten somit für jedes $t \in T$

folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi(tx_{[\sigma_2,2]}) \quad = \quad \varphi(t\lim_{s\to 0}\lambda(s)x_{[\delta_2,2]}) \quad &= \lim_{s\to 0}(\varphi(t\lambda(s)x_{[\delta_2,2]})) \\
&= \lim_{s\to 0}(\varphi(t_{\sigma_1}t_{\sigma_2}\lambda(s)x_{[\delta_2,2]})) \\
&= \lim_{s\to 0}(\varphi(t_{\sigma_2}\lambda(s)x_{[\sigma_1,1]})) \\
&= \lim_{s\to 0}(\varphi(t_{\sigma_2}\lambda(s)x_{[\delta_2,2]})) \\
&= \varphi(t_{\sigma_2}x_{[\sigma_2,2]}) \\
&= \varphi(x_{[\sigma_2,2]}).
\end{aligned}$$

Also ist $\varphi(\pi^{-1}(y_\sigma))$ ein Punkt. Es ist noch zu zeigen, dass $\widetilde{\varphi}$ ein Morphismus ist. Wir setzen

$$U \quad := \quad X_{[\sigma_1,1]} \cup X_{[\delta_1,2]} \qquad \text{und} \qquad W \quad := \quad \bigcup_{\tau \prec \sigma} Y_\tau.$$

Dann ist U offen in X, W offen in Y und $\pi_{|U}\colon U \to W$ ist ein Isomorphismus. Mit Folgerung 3.5.11 erhalten wir $\dim(Y \setminus W) = \dim(\{y_\sigma\}) = 0$ und $\dim(\pi^{-1}(Y \setminus W)) = \dim(Tx_{[\sigma_2,2]}) = 1$. Nach Folgerung 3.6.6 und Lemma 3.6.7 gilt

$$X \setminus U \quad = \quad \overline{Tx_{[\delta_2,2]}} \quad = \quad Tx_{[\delta_2,2]} \,\cup\, Tx_{[\sigma_2,2]}.$$

Insbesondere ist $X \setminus U$ ein Primdivisor von X mit

$$\pi^{-1}(y_\sigma) \quad = \quad Tx_{[\sigma_2,2]} \quad \subseteq \quad X \setminus U.$$

Weiter betrachten wir den Abschluss σ' von σ. Nach Lemma 3.5.23 können wir annehmen, dass $Y \sqsubseteq Y_{\sigma'}$ gilt. Nach Folgerung 3.5.11 ist $Y_{\sigma'} \setminus Y$ klein. Nach Erinnerung 4.3.11 ist $Y_{\sigma'}$ eine $\mathbb{Q}$-faktorielle Varietät. Somit sind die Voraussetzungen von Lemma 1.8.19 erfüllt. Nach Lemma 1.8.19 ist $\widetilde{\varphi}$ ein Morphismus. Da $\pi_{|T_N x_0} = \mathrm{id}$ gilt, erhalten wir mit Folgerung 1.5.12, dass $\widetilde{\varphi}$ eindeutig bestimmt ist. $\square$

Lemma 4.3.13. *Es sei* σ_1, σ_2 *ein 1-volles striktes Paar in* $N_\mathbb{Q}$ *mit* $\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) = 1$, $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2 \neq \emptyset$ *und* $\dim(\sigma_1) = \dim(\sigma_2) = 2$. *Dann ist* $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ *ein spitzer k-Kegel in* $N_\mathbb{Q}$ *und* $\pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}\colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \to Y_\sigma$ *die universelle Separierung von* $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$.

Beweis. Nach Bemerkung 4.3.7 sind σ_1 und σ_2 Kegel in $N_\mathbb{Q}$ und somit ist $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ eine Prävarietät. Weiter ist $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ nach Lemma 2.6.10 ein spitzer 1-voller k-Kegel. Wir setzen $\pi := \pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}$, $T := T_N$, $X := X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$, $\mathcal{S} := \mathcal{S}_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ und $Y := Y_\sigma$. Nach Folgerung 3.5.30 ist Y ein 1-voller k-Raum. Dies lässt sich wie folgt darstellen:

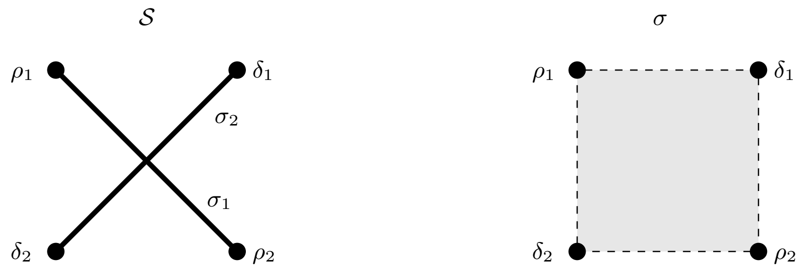

Abbildung 25

Nach Konstruktion 4.1.11 gilt $\pi(tx) = t\pi(x)$ für alle $t \in T$ und alle $x \in X$. Weiter sei $\varphi\colon X \to Z$ ein Morphismus, wobei Z separiert ist. Wir zeigen, dass es einen Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon Y \to Z$ gibt, sodass $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$ gilt. Es sei $\sigma_1^{(1)} = \{\rho_1, \rho_2\}$ und $\sigma_2^{(1)} = \{\delta_1, \delta_2\}$. Da $\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) = 1$ und $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2 \neq \emptyset$ gilt, folgt $\sigma^{(1)} = \{\rho_1, \rho_2, \delta_1, \delta_2\}$. Wir wählen ein $v \in \mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2$ und setzen $\sigma_3 := \mathrm{cone}(v, \delta_1)$ sowie $\sigma_4 := \mathrm{cone}(v, \delta_2)$. Die Situatuion lässt sich wie folgt darstellen:

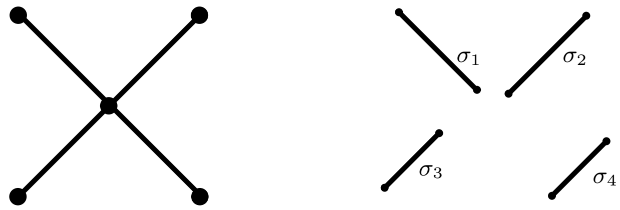

Abbildung 26

Wir setzen weiter $\tau_3 := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_3)|$ und $\tau_4 := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_4)|$. Da $\mathring{\sigma}_1 \cap \sigma_3 \neq \emptyset$ und $\mathring{\sigma}_1 \cap \sigma_4 \neq \emptyset$ gilt, sind τ_3, τ_4 k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$. Weiter setzen wir

$$\widetilde{\Delta}_{11} := \mathcal{F}_{\sigma_1}, \quad \widetilde{\Delta}_{22} := \mathcal{F}_{\sigma_2} \quad \text{und} \quad \widetilde{\Delta}_{nn} := \mathcal{F}_{\tau_n} \qquad \text{für } n = 3, 4.$$

Dann ist $\mathcal{R}_1 := (\widetilde{\Delta}_{nm})_{n,m \in M}$ ein k-Fächersystem, wobei $M := \{1, 2, 3, 4\}$ und $\widetilde{\Delta}_{nm} := \{0\}$ für $n, m \in M$ mit $n \neq m$. Damit haben wir folgendes Bild:

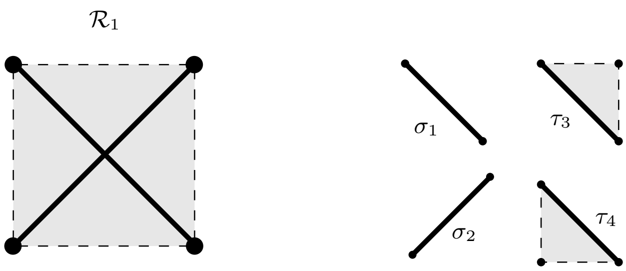

Abbildung 27

Das k-Fächersystem $\mathcal{R}_1$ ist minimal verklebt und es gilt $\tau_1, \tau_2 \subseteq \sigma$ bzw. $\mathring{\tau}_1, \mathring{\tau}_2 \subseteq \mathring{\sigma}$. Nach Bemerkung 2.6.6 ist $\mathcal{R}_1$ 1-voll. Somit ist nach Folgerung 3.6.20 der k-Raum $X_{\mathcal{R}_1}$ lokal 1-voll. Da $\tau_3, \tau_4 \subseteq \sigma$ bzw. $\mathring{\tau}_3, \mathring{\tau}_4 \subseteq \mathring{\sigma}$ gilt, gibt es zu jedem $[\tau, n] \in \Omega(\mathcal{R}_1)$ ein $\delta \preccurlyeq \sigma$ mit $\mathring{\tau} \subseteq \mathring{\delta}$ und $\tau \subseteq \delta$. Somit erhalten wir eine Zuordnung $\mathfrak{g}_1\colon \Omega(\mathcal{R}_1) \to \Omega(\mathcal{F}_\sigma)$. Insbesondere erfüllt die Zuordnung $\mathfrak{g}_1$ die Bedingung 2.4.27 (ii) (a) Da $\mathcal{F}_\sigma$ ein k-Fächer ist, gilt Bedingung 2.4.27 (ii) (b). Somit haben wir einen Morphismus $(\mathrm{id}, \mathfrak{g}_1)\colon (N, \mathcal{R}_1) \to (N, \mathcal{F}_\sigma)$. Wir setzen $\pi_1 := \varphi_{(\mathrm{id}, \mathfrak{g}_1)}\colon X_{\mathcal{R}_1} \to Y$. Da $\widetilde{\Delta}_{11} = \mathcal{F}_{\sigma_1}$ und $\widetilde{\Delta}_{22} = \mathcal{F}_{\sigma_2}$ gilt, ist der Morphismus $\pi_1\colon X_{\mathcal{R}_1} \to Y$ surjektiv. Wir haben folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & Z \\
X_{\mathcal{R}_1} \arrow[r, "\pi_1"'] & Y &
\end{tikzcd}$$

Wir wollen einen Morphismus $\widetilde{\varphi}'\colon X_{\mathcal{R}_1} \to Z$ konstruieren. Es gilt $\sigma_3, \sigma_4 \subseteq \sigma_2$ bzw. $\mathring{\sigma}_3, \mathring{\sigma}_4 \subseteq \mathring{\sigma}_2$. Somit gibt es Morphismen $(\psi_3, \mathrm{id})\colon (X_{\sigma_3}, T, x_0) \to (X, T, x_0)$ und $(\psi_4, \mathrm{id})\colon (X_{\sigma_4}, T, x_0) \to (X, T, x_0)$. Weiter gibt es ein Morphismus $\psi_1\colon (X_{\sigma_1}, T, x_0) \to (X, T, x_0)$. Folgerung 4.1.4 liefert Morphismen $\varphi_3'\colon X_{(\sigma_1,\sigma_3)} \to Z$ und $\varphi_4'\colon X_{(\sigma_1,\sigma_4)} \to Z$ mit $\varphi_3'(tx_0) = \varphi(tx_0) = \varphi_4'(tx_0)$ für alle $t \in T$. Nach Konstruktion gilt $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_3 = \emptyset$ und $\sigma_1 \cap \sigma_3 \npreceq \sigma_1$ bzw. $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_4 = \emptyset$ und $\sigma_1 \cap \sigma_4 \npreceq \sigma_1$. Lemma 4.3.12 liefert, dass $\pi_{(\sigma_1,\sigma_3)}\colon X_{(\sigma_1,\sigma_3)} \to X_{\tau_3}$ die universelle Separierung von $X_{(\sigma_1,\sigma_3)}$ und $\pi_{(\sigma_1,\sigma_4)}\colon X_{(\sigma_1,\sigma_4)} \to X_{\tau_4}$ die universelle Separierung von $X_{(\sigma_1,\sigma_4)}$ ist. Also existieren Morphismen $\widetilde{\varphi}_3\colon X_{\tau_3} = X_{\widetilde{\Delta}_{33}} \to Z$ und $\widetilde{\varphi}_4\colon X_{\tau_4} = X_{\widetilde{\Delta}_{44}} \to Z$ mit $\varphi_3' = \widetilde{\varphi}_3 \circ \pi_{(\sigma_1,\sigma_3)}$ und $\varphi_4' = \widetilde{\varphi}_4 \circ \pi_{(\sigma_1,\sigma_4)}$. Mit Konstruktion 4.1.11 gilt $(\pi_{(\sigma_1,\sigma_3)})_{|Tx_0} = \mathrm{id}$ und $(\pi_{(\sigma_1,\sigma_4)})_{|Tx_0} = \mathrm{id}$. Somit gilt $\widetilde{\varphi}_3(tx_0) = \varphi(tx_0) = \widetilde{\varphi}_4(tx_0)$ für alle $t \in T$. Nach Konstruktion von $\mathcal{R}_1$ erhalten wir Morphismen $\widetilde{\varphi}_1\colon X_{\widetilde{\Delta}_{11}} \to Z$ und $\widetilde{\varphi}_2\colon X_{\widetilde{\Delta}_{22}} \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}_1(tx_0) = \varphi(tx_0) = \widetilde{\varphi}_2(tx_0)$. Für alle $t \in T$ gilt:

$$\widetilde{\varphi}_1(tx_0) \quad = \quad \widetilde{\varphi}_2(tx_0) \quad = \quad \widetilde{\varphi}_3(tx_0) \quad = \quad \widetilde{\varphi}_4(tx_0).$$

Somit existiert nach Folgerung 4.1.4 ein Morphismus $\widetilde{\varphi}'\colon X_{\mathcal{R}_1} \to Z$. Da π_1 surjektiv ist, können wir $\widetilde{\varphi}\colon Y \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}(x) := \widetilde{\varphi}'(\pi_1^{-1}(x))$ setzen. Also haben wir folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & Z \\
X_{\mathcal{R}_1} \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[rru, bend right=60, "\widetilde{\varphi}'"'] & Y \arrow[ru, dotted, "\widetilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Es ist zu zeigen, dass $\widetilde{\varphi}$ ein Morphismus ist und $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$ gilt. Wir wissen, nach Konstruktion von π, dass $\pi_{|Tx_0}$ ein Isomorphismus ist. Ebenso ist $\pi_{1_{|Tx_0}}$ ein Isomoprhismus. Wenn wir annehmen, dass $\widetilde{\varphi}$ ein Morphismus ist, dann gilt $\widetilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$ auf einer offenen Menge U von X. Mit Folgerung 1.5.12 erhalten wir somit, dass $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$ gilt. Insbesondere liefert $\pi_{|Tx_0} = \mathrm{id}$, dass $\widetilde{\varphi}$ eindeutig bestimmt ist. Also reicht es zu zeigen, dass $\widetilde{\varphi}$ ein Morphismus ist.

Wir wissen, dass $X_{\mathcal{R}_1}$ und Y lokal 1-volle k-Räume sind und π_1 surjektiv ist. Um zu zeigen, dass $\widetilde{\varphi}$ ein Morphismus ist, reicht es nach Lemma 4.2.19 zu zeigen, dass $\widetilde{\varphi}$ wohldefiniert ist und π_1 schwach eigentlich ist.

Wir zeigen zuerst, dass $\widetilde{\varphi}$ wohldefiniert ist. Die Situation lässt sich folgendermaßen darstellen:

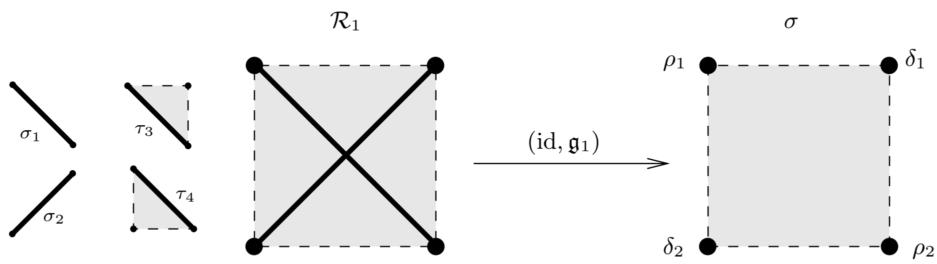

Abbildung 28

Wir wissen, dass $\sigma_1^{(1)} = \{\rho_1, \rho_2\}$, $\sigma_2^{(1)} = \{\delta_1, \delta_2\}$ und $\sigma^{(1)} = \{\rho_1, \rho_2, \delta_1, \delta_2\}$ gilt. Somit bestehen die Seiten von σ aus den k-Kegel $\{0\}, \rho_1, \rho_2, \delta_1, \delta_2$ und σ siehe Abbildung 28. Da $\pi_{1_{|Tx_0}} = \mathrm{id}$ gilt, erhalten wir für alle $t \in T$ mit Lemma 3.6.16 und Folgerung 3.6.27:

$$\begin{aligned}
\pi_1^{-1}(ty_0) &= \{tx_0\},\\
\pi_1^{-1}(ty_{\rho_s}) &= \{tx_{[\rho_s,1]}, tx_{[\rho_s,3]}, tx_{[\rho_s,4]}\} \text{ für } s = 1, 2,\\
\pi_1^{-1}(ty_{\delta_1}) &= \{tx_{[\delta_1,2]}, tx_{[\delta_1,3]}\},\\
\pi_1^{-1}(ty_{\delta_2}) &= \{tx_{[\delta_2,2]}, tx_{[\delta_2,4]}\},\\
\pi_1^{-1}(ty_{\sigma}) &= Tx_{[\sigma_1,1]} \cup Tx_{[\sigma_1,3]} \cup Tx_{[\sigma_1,4]} \cup Tx_{[\sigma_2,2]} \cup Tx_{[\tau_3,3]} \cup Tx_{[\tau_4,4]}.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.3.3 erhalten wir, dass $\widetilde{\varphi}'(\pi_1^{-1}(ty_{\rho_s}))$ und $\widetilde{\varphi}'(\pi_1^{-1}(ty_{\delta_r}))$ für $s = 1, 2$ bzw. $r = 1, 2$ Punkte sind.

Wir betrachten jetzt die Faser $\pi_1^{-1}(ty_\sigma)$. Da $\dim(\tau_3) = \dim(\tau_4) = 3$ gilt, erhalten wir mit Folgerung 3.6.27, dass $T = T_{x_{[\tau_3,3]}} = T_{x_{[\tau_4,4]}}$ gilt. Nach Konstruktion von τ_3 und τ_4 bzw. σ_3 und σ_4 gilt:

$$\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2 \neq \emptyset, \qquad \mathring{\sigma}_2 \cap \mathring{\tau}_3 \neq \emptyset \qquad \text{und} \qquad \mathring{\sigma}_2 \cap \mathring{\tau}_4 \neq \emptyset.$$

Mit Lemma 4.3.3 erhalten wir somit für alle $t \in T$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(tx_{[\sigma_2,2]}) &= \widetilde{\varphi}(tx_{[\tau_3,3]}) = \widetilde{\varphi}(x_{[\tau_3,3]}),\\
\widetilde{\varphi}(tx_{[\sigma_2,2]}) &= \widetilde{\varphi}(tx_{[\tau_4,4]}) = \widetilde{\varphi}(x_{[\tau_4,4]})\\
\text{und}\quad \widetilde{\varphi}(tx_{[\sigma_2,2]}) &= \widetilde{\varphi}(tx_{[\sigma_1,1]}).
\end{aligned}$$

Die obigen Gleichungen liefern, dass $\widetilde{\varphi}'(\pi_1^{-1}(ty_\sigma))$ ein Punkt ist. Also ist noch zu zeigen, dass π_1 schwach eigentlich ist. Nach Folgerung 4.2.12 und Satz 4.2.16 reicht es zu zeigen, dass für jede Seite $\delta \preccurlyeq \sigma$ gilt:

$$|\mathrm{Stern}_\sigma(\delta)| + \mathrm{lin}(\delta) \quad \subseteq \quad \bigcup_{[\rho,i] \in \Omega(\mathcal{R}_1),\ \mathring{\rho} \subseteq \mathring{\delta}} |\mathrm{Stern}_{\mathcal{R}_1}([\rho, i])| + \mathrm{lin}(\rho).$$

1. Fall $\delta = \sigma$: Folgt aus $\dim(\sigma) = \dim(\tau_3) = 3$.

2. Fall $\delta = \{0\}$: Es ist zu zeigen, dass $|\mathcal{R}_1| = \sigma$ gilt. Dies ist nach Konstruktion von $\mathcal{R}_1$ klar.

3. Fall $\delta = \delta_1$: Wegen $\dim(\delta) = 1$ gilt $\delta = \delta'$, wobei δ' der Abschluss von δ ist. Es gilt $\mathrm{Stern}_\sigma(\delta) = \{\sigma, \delta\}$, $\delta \preccurlyeq \tau_3$ und $\mathring{\tau}_3 \subseteq \mathring{\sigma}$. Aus $\delta \preccurlyeq \tau_3$ erhalten wir $[\delta, 3] \preccurlyeq [\tau_3, 3]$ und $\mathrm{id}(\mathring{\delta}) \subseteq \mathring{\delta}$. Es reicht zu zeigen, dass $\mathring{\sigma} + \mathrm{lin}(\delta) = \mathring{\tau}_3 + \mathrm{lin}(\delta)$ gilt. Wir betrachten den Morphismus $P \colon N \to N_\delta$. Mit Erinnerung 2.5.4 gilt $P^{\mathrm{s}}(\sigma) = P(\mathring{\sigma}) \cup P(\mathring{\delta})$ und $P^{\mathrm{s}}(\tau_3) = P(\mathring{\tau}_3) \cup P(\mathring{\delta})$. Es seien σ' sowie τ_3' die jeweiligen Abschlüsse von σ bzw. τ_3. Dann gilt mit Erinnerung 2.5.4:

$$\dim(P(\sigma')) \quad = \quad \dim(\sigma') - 1 \quad = \quad 2 \quad = \quad \dim(\tau_3') - 1 \quad = \quad \dim(P(\tau_3')).$$

Weiter ist $\mathrm{Stern}^{(2)}_{\sigma'}(\delta) = \mathrm{Stern}^{(2)}_{\tau_3'}(\delta)$. Für $\gamma' \in \mathrm{Stern}^{(2)}_{\sigma'}(\delta)$ gilt $\dim(P(\gamma')) = 1$. Somit folgt $P(\sigma') = P(\tau_3')$. Mit Konstruktion 2.5.4 erhalten wir

$$\mathring{\sigma} + \mathrm{lin}(\delta) \quad = \quad P(\mathring{\sigma}) \quad = \quad P(\mathring{\tau}_3) \quad = \quad \mathring{\tau}_3 + \mathrm{lin}(\delta).$$

4. Fall $\delta = \delta_2$: Analog zum 3. Fall.

5. Fall $\delta = \rho_1$: Es gilt $\mathrm{Stern}_\sigma(\delta) = \{\sigma, \delta\}$, $\delta \preccurlyeq \sigma_1, \tau_3, \tau_4$ und $\mathring{\sigma} = \mathring{\sigma}_1 \cup \mathring{\tau}_3 \cup \mathring{\tau}_4$. Aus $\delta \preccurlyeq \sigma_1, \tau_3, \tau_4$ erhalten wir $[\delta, 1] \preccurlyeq [\sigma_1, 1]$, $[\delta, 3] \preccurlyeq [\tau_4, 3]$ und $[\delta, 4] \preccurlyeq [\tau_4, 4]$. Aus $\mathring{\sigma} = \mathring{\sigma}_1 \cup \mathring{\tau}_3 \cup \mathring{\tau}_4$ folgt, dass gilt:

$$\begin{aligned} \mathring{\sigma} \; + \; \mathrm{lin}(\delta) &= \big(\mathring{\sigma}_1 \;\cup\; \mathring{\tau}_3 \;\cup\; \mathring{\tau}_4\big) \; + \; \mathrm{lin}(\delta) \\ &= \big(\mathring{\sigma}_1 + \mathrm{lin}(\delta)\big) \;\cup\; \big(\mathring{\tau}_3 + \mathrm{lin}(\delta)\big) \;\cup\; \big(\mathring{\tau}_4 + \mathrm{lin}(\delta)\big) \,. \end{aligned}$$

6. Fall $\delta = \rho_2$: Analog zum 5. Fall. □

Lemma 4.3.14. *Es sei* σ_1, σ_2 *1-volles striktes Paar in* $N_{\mathbb{Q}}$ *mit* $\dim(\sigma_1) = \dim(\sigma_2) = 2$ *und* $\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) = 2$. *Dann ist* $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ *ein spitzer k-Kegel in* $N_{\mathbb{Q}}$ *und* $\pi_{(\sigma_1, \sigma_2)} \colon X_{(\sigma_1, \sigma_2)} \to Y_\sigma$ *die universelle Separierung von* $X_{(\sigma_1, \sigma_2)}$.

Beweis. Da $\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) = 2$ gilt, erhalten wir $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2 \neq \emptyset$. Mit Lemma 2.6.10 folgt somit, dass σ ein 1-voller spitzer k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$ ist. Aus $\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) = 2$ folgt weiter, dass $\dim(\sigma) = 2$ gilt. Nach Bemerkung 4.3.7 sind σ, σ_1 und σ_2 Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$. Wir setzen $\pi := \pi_{(\sigma_1, \sigma_2)}$, $T := T_N$, $X := X_{(\sigma_1, \sigma_2)}$ und $Y := Y_\sigma$. Weiter sei $\varphi \colon X \to Z$ ein Morphismus von k-Räumen, wobei Z separiert ist. Da π surjektiv ist, können wir $\widetilde{\varphi} \colon Y \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}(y) := \varphi(\pi^{-1}(y))$ setzen. Wir zeigen jetzt, dass $\widetilde{\varphi}$ ein wohldefinierter Morphismus ist. Es sind zwei Fälle zu betrachten.

1. Fall: Es gilt $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ oder $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$. Wir können annehmen, dass $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ gilt. Aus $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ folgt $\sigma_2 = \sigma$. Für jede Seite $\tau_1 \preccurlyeq \sigma_1$ existiert eine Seite $\tau_2 \preccurlyeq \sigma_2$ mit $\mathring{\tau}_1 \subseteq \mathring{\tau}_2$. Somit folgt mit Folgerung 3.6.27 und Lemma 4.3.3, dass $\widetilde{\varphi}$ wohldefiniert ist. Da σ_1, σ_2 Kegel sind und $\sigma_2 = \sigma$ gilt, erhalten wir mit Satz 4.2.6, dass π schwach eigentlich ist. Somit erhalten wir mit Lemma 4.2.19, dass $\widetilde{\varphi}$ ein Morphismus ist. Da $\pi_{|Tx_0} = \mathrm{id}$ gilt, erhalten wir mit Folgerung 1.5.12, dass $\widetilde{\varphi}$ eindeutig bestimmt ist.

2. Fall Es gilt $\sigma_1 \not\subseteq \sigma_2$ und $\sigma_2 \not\subseteq \sigma_1$. Weiter seien $\sigma_1^{(1)} = \{\rho_1, \rho_2\}$ und $\sigma_2^{(1)} = \{\delta_1, \delta_2\}$. Da $\sigma_1 \not\subseteq \sigma_2$ und $\sigma_2 \not\subseteq \sigma_1$ können wir annehmen, dass $\rho_1, \delta_1 \preccurlyeq \sigma$ gilt siehe Abbildung 29.

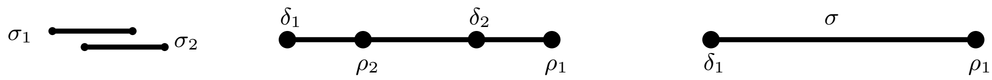

Abbildung 29

Somit gilt $\mathring{\delta}_2 \subseteq \mathring{\sigma}_1$ und $\mathring{\rho}_2 \subseteq \mathring{\sigma}_2$. Wegen $\pi_{|Tx_0} = \mathrm{id}$ erhalten wir für alle $t \in T$ mit Lemma 3.6.16 und Folgerung 3.6.27:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(ty_0) &= \{tx_0\}, \\ \pi^{-1}(ty_{\rho_1}) &= \{tx_{[\rho_1,1]}\}, \\ \pi^{-1}(ty_{\delta_1}) &= \{tx_{[\delta_1,2]}\}, \\ \pi^{-1}(ty_\sigma) &= tT_{y_\sigma}x_{[\rho_2,1]} \;\cup\; tT_{y_\sigma}x_{[\delta_2,2]} \;\cup\; tT_{y_\sigma}x_{[\sigma_1,1]} \;\cup\; tT_{y_\sigma}x_{[\sigma_2,2]}. \end{aligned}$$

Somit sind $\varphi(\pi^{-1}(ty_{\tau_1}))$ und $\varphi(\pi^{-1}(ty_{\tau_1}))$ jeweils Punkte für alle $t \in T$. Da $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2 \neq \emptyset$ gilt, folgt mit Lemma 4.3.3 $\varphi(tx_{[\sigma_1,1]}) = \varphi(tx_{[\sigma_2,2]})$ für $t \in T$. Aus $\mathrm{lin}(\sigma) =$

$\mathrm{lin}(\sigma_1) = \mathrm{lin}(\sigma_2)$ folgt $T_{x_{[\sigma_1,1]}} = T_{x_{[\sigma_2,2]}} = T_{y_\sigma}$. Mit Lemma 4.3.3 und $\mathring{\delta}_2 \subseteq \mathring{\sigma}_1$ sowie $\mathring{\rho}_2 \subseteq \mathring{\sigma}_2$ folgt für alle $t \in T$ und alle $t' \in T_{y_\sigma}$ gilt:

$$\varphi(t'tx_{[\rho_2,1]}) \quad = \quad \varphi(tx_{[\sigma_2,2]}) \quad = \quad \varphi(tx_{[\sigma_1,1]}) \quad = \quad \varphi(tx_{[\delta_2,2]}).$$

Somit ist für alle $t \in T$ die Menge $\varphi(\pi^{-1}(ty_\sigma))$ ein Punkt. Also ist $\widetilde{\varphi}\colon Y \to Z$ wohldefiniert. Da $\sigma_1, \sigma_2, \sigma$ Kegel sind und $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \sigma$ gilt, folgt mit Satz 4.2.6, dass π schwach eigentlich ist. Mit Lemma 4.2.19 folgt, dass $\widetilde{\varphi}$ ein Morphismus ist. Da $\pi_{|Tx_0} = \mathrm{id}$ gilt, erhalten wir mit Folgerung 1.5.12, dass $\widetilde{\varphi}$ eindeutig bestimmt ist. □

Satz 4.3.15. *Es sei σ_1, σ_2 ein 1-volles striktes Paar in $N_\mathbb{Q}$ mit $\dim(\sigma_1) = \dim(\sigma_2) = 2$. Dann existiert zu $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ die universelle Separierung $\pi\colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \to Y$.*

Beweis. Falls $\sigma_1 \cap \sigma_2 \preccurlyeq \sigma_1, \sigma_2$ gilt, dann ist $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ ein separierter k-Raum. Somit ist nach Bemerkung 4.1.2 (ii) $\pi := \mathrm{id}\colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \to X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ die universelle Separierung. Falls $\sigma_1 \cap \sigma_2 \not\preccurlyeq \sigma_1$ oder $\sigma_1 \cap \sigma_2 \not\preccurlyeq \sigma_2$ gilt, dann liegt einer der 3 Fälle vor die in Lemma 4.3.12, Lemma 4.3.13 und Lemma 4.3.14 beschrieben sind. Also existiert zu $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ eine universelle Separierung $\pi\colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \to Y$. □

Folgerung 4.3.16. *Es sei σ_1, σ_2 ein 1-volles striktes Paar in $N_\mathbb{Q}$ mit $\dim(\sigma_1) \leq 2$ und $\dim(\sigma_2) \leq 2$. Dann existiert zu $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ die universelle Separierung $\pi\colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \to Y$.*

Beweis. Folgt aus Lemma 4.3.8, Lemma 4.3.10 und Satz 4.3.15. □

Satz 4.3.17. *Es seien σ_1, σ_2 ein 1-volles striktes Paar in $N_\mathbb{Q}$ mit $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2 \neq \emptyset$ und $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$. Nach Lemma 2.6.10 ist σ ein spitzer 1-voller k-Kegel in $N_\mathbb{Q}$. Weiter gelte für jedes $\gamma \in \sigma^{(2)}$ eine der drei folgenden Bedingungen gelten:*

(i) *Es gibt eine Seite $\gamma_1 \in \sigma_1^{(2)}$, sodass $\gamma = \gamma_1$ gilt.*
(ii) *Es gibt eine Seite $\gamma_2 \in \sigma_2^{(2)}$, sodass $\gamma = \gamma_2$ gilt.*
(iii) *Es gibt Seiten $\gamma_1 \in \sigma_1^{(2)}$ und $\gamma_2 \in \sigma_2^{(2)}$, sodass $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ und $\mathring{\gamma}_1 \cap \mathring{\gamma}_2 \neq \emptyset$ gilt.*

Dann ist $\pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}\colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \to Y_\sigma$ die universelle Separierung von $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$.

Beweis. Mit Lemma 4.3.8, Lemma 4.3.10, Lemma 4.3.13 und Lemma 4.3.14. können wir annehmen, dass $\dim(\sigma_1) = 3$ und $\dim(\sigma_2) \geq 2$ gilt. Daraus folgt $\dim(\sigma) = 3$. Der k-Kegel σ ist 1-voll. Wir setzen $\pi := \pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}$, $T := T_N$, $X := X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ und $Y := Y_\sigma$. Nach Folgerung 3.6.20 sind X und Y lokal 1-volle k-Räume. Nach Konstruktion 4.1.11 gilt $\pi(tx) = t\pi(x)$ für alle $t \in T$ und alle $x \in X$. Weiter sei $\varphi\colon X \to Z$ ein Morphismus, wobei Z separiert ist. Wir wollen wie im Beweis von Lemma 4.3.13, k-Kegel konstruieren die $\mathring{\sigma}$ „ausfüllen", damit wir Lemma 4.2.19 anwenden können.

Mit Lemma 2.6.10 erhalten wir, dass $\mathring{\sigma}_1 \cup \mathring{\sigma}_2 \subseteq \mathring{\sigma}$ gilt. Es seien σ', σ_1' und σ_2' die jeweiligen Abschlüsse von σ, σ_1 bzw. σ_2. Wir wissen, dass $\sigma'^{(1)} = \sigma^{(1)}$, $\sigma_1'^{(1)} = \sigma_1^{(1)}$ und $\sigma_2'^{(1)} = \sigma_2^{(1)}$ gilt. Somit gilt $\sigma^{(1)} \subseteq \sigma_1^{(1)} \cup \sigma_2^{(1)}$. Es sei $\sigma'^{(2)} = \{\gamma_1', \dots, \gamma_s'\}$, sodass gilt:

$$\rho_i \quad := \quad \gamma_{i-1}' \cap \gamma_i' \neq \{0\} \qquad \text{bzw.} \qquad \rho_1 \quad := \quad \gamma_s' \cap \gamma_1' \neq \{0\}.$$

Es gilt $\sigma^{(1)} = \{\rho_1, \ldots, \rho_s\}$ und $\rho_i, \rho_{i+1} \preccurlyeq \gamma'_i$ bzw. $\rho_1, \rho_s \preccurlyeq \gamma'_s$ siehe Abbildung 30.

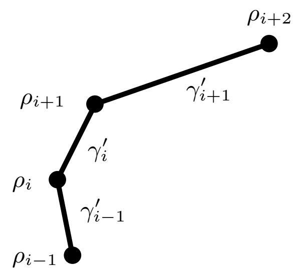

Abbildung 30

Wir wählen ein $v_0 \in \mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2$ fest. Für jedes ρ_i gilt $\rho_i \preccurlyeq \sigma_1$ oder $\rho_i \preccurlyeq \sigma_2$. Falls $\rho_i \preccurlyeq \sigma_2$ gilt, wählen wir ein $w_i \in \mathring{\sigma}_2$ mit $v_0 \in \mathring{\tau}_i$, wobei $\tau_i := \mathrm{hull}(\rho_i, w_i)$. Ansonsten wählen wir ein $w_i \in \mathring{\sigma}_1$ mit $v_0 \in \mathring{\tau}_i$, wobei $\tau_i := \mathrm{hull}(\rho_i, w_i)$.

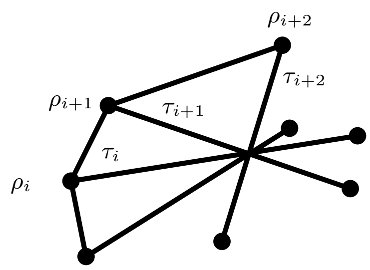

Abbildung 31

Die $\tau_1, \ldots, \tau_s$ sind Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$ und es gilt:

a) Es gilt $\dim(\tau_i) = 2$.
b) Falls ρ_i eine Seite von σ_1 ist, gilt $\tau_i \subseteq \sigma_1$ und $\mathring{\tau}_i \subseteq \mathring{\sigma}_1$.
c) Falls ρ_i eine Seite von σ_2 ist, gilt $\tau_i \subseteq \sigma_2$ und $\mathring{\tau}_i \subseteq \mathring{\sigma}_2$.
d) Es gilt $\dim(\tau_i \cap \tau_{i+1}) = 1$ bzw. $\dim(\tau_s \cap \tau_1) = 1$ und $v_0 \in \bigcap \mathring{\tau}_i \neq \emptyset$.
e) Die Kegel τ_i, τ_{i+1} bzw. τ_s, τ_1 erfüllen die Bedingung aus Lemma 4.3.13.

Wir setzen $\delta_i := |\text{k-hull}(\tau_i, \tau_{i+1})|$ bzw. $\delta_s := |\text{k-hull}(\tau_s, \tau_1)|$ für $1 \leq i \leq s$. Die Situation lässt sich wie folgt dastellen:

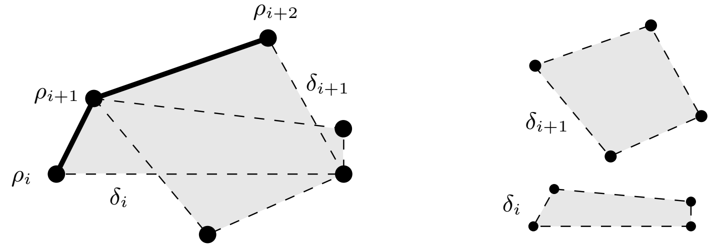

Abbildung 32

Mit b) und c) sind τ_i, τ_{i+1} bzw. τ_s, τ_s 1-volle spitze Paare. Somit sind $\delta_1, \ldots, \delta_s$ spitze k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$. Mit b) und c) erhalten wir, dass $\delta_i \subseteq \sigma$ und $\mathring{\delta}_i \subseteq \mathring{\sigma}$ gilt. Nach Konstruktion der Kegel τ_i gilt sogar

$$\mathring{\sigma} \quad = \quad \bigcup_{i=1}^{s} \mathring{\delta}_i .$$

Mit d) erhalten wir, dass $v_0 \in \bigcap \mathring{\delta}_i$ gilt. Wir setzen für jedes $1 \leq l \leq s+2$

$$\Delta_{ll} \quad := \quad \begin{cases} \mathcal{F}_{\delta_l}, & \text{für } l = 1, \ldots, s \\ \mathcal{F}_{\sigma_1}, & \text{für } l = s+1 \\ \mathcal{F}_{\sigma_2}, & \text{für } l = s+2 \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{R}_1 := (\Delta_{lr})_{l,r \in L}$ ein attraktives 1-volles k-Fächersystem in $N_{\mathbb{Q}}$, wobei $L := \{1, \ldots, s+2\}$, $\Delta_{lr} := \{0\}$ für $1 \leq l, r \leq s$ mit $l \neq r$ und

$$\Delta_{(s+1)(s+2)} \quad := \quad \Delta_{(s+2)(s+1)} \quad := \quad \{\tau;\ \tau \in \Sigma_{\sigma_1 \cap \sigma_2},\ \tau \preccurlyeq \sigma_1, \sigma_2\}.$$

Mit Lemma 2.2.10 existiert zu jedem $[\tau, r] \in \Omega(\mathcal{R}_1)$ genau ein $\delta \preccurlyeq \sigma$ mit $\mathring{\tau} \subseteq \mathring{\delta}$ und $\tau \subseteq \delta$. Somit haben wir eine kanonische Zuordnung $\mathfrak{g}_1 \colon \Omega(\mathcal{R}_1) \to \Omega(\mathcal{F}_\sigma)$. Insbesondere erfüllt die Zuordnung $\mathfrak{g}_1$ Bedingung 2.4.27 (ii) (a). Da $\mathcal{F}_\sigma$ ein k-Fächer ist, gilt Bedingung 2.4.27 (ii) (b). Wir setzen $\pi_1 := \varphi_{(\mathrm{id}, \mathfrak{g}_1)} \colon X_{\mathcal{R}_1} \to Y$. Da $\Sigma_{(2s+1)(2s+1)} = \mathcal{F}_{\sigma_1}$ und $\Sigma_{(2s+2)(2s+2)} = \mathcal{F}_{\sigma_2}$ gilt, ist der Morphismus π_1 surjektiv. Wir haben folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & Z \\ X_{\mathcal{R}_1} \arrow[r, "\pi_1"'] & Y & \end{tikzcd}$$

Wir wollen einen Morphismus $\widetilde{\varphi}' \colon X_{\mathcal{R}_1} \to Z$ konstruieren. Mit b) bzw. c) erhalten wir für jedes i einen torischen Morphismus $(\iota_i, \mathrm{id}) \colon (X_{\tau_i}, T, x_0) \to (X, T, x_0)$. Die Morphismen ι_i liefern mit Folgerung 4.1.4 Morphismen $\psi_i \colon X_{(\tau_i, \tau_{i+1})} \to Z$ bzw. $\psi_s \colon X_{(\tau_s, \tau_1)} \to Z$ mit $\psi_i(tx_0) = \varphi(tx_0)$ für alle $t \in T$. Mit e) und Lemma 4.3.13 sind die Morphismen $\pi_{(\tau_i, \tau_{i+1})} \colon X_{(\tau_i, \tau_{i+1})} \to X_{\delta_i}$ bzw. $\pi_{(\tau_s, \tau_1)} \colon X_{(\tau_s, \tau_1)} \to X_{\delta_s}$ die universellen Separierungen von $X_{(\tau_i, \tau_{i+1})}$ bzw. $X_{(\tau_s, \tau_1)}$. Somit existiert zu jedem $1 \leq i \leq s$ ein Morphismus $\varphi'_i \colon X_{\delta_i} \to Z$ mit $\psi_i = \varphi'_i \circ \pi_{(\tau_i, \tau_{i+1})}$ bzw. $\psi_s = \varphi'_s \circ \pi_{(\tau_s, \tau_1)}$. Mit Konstruktion 4.1.11 gilt $(\pi_{(\tau_i, \tau_{i+1})})_{|Tx_0} = \mathrm{id}$ bzw. $(\pi_{(\tau_i, \tau_{i+1})})_{|Tx_0} = \mathrm{id}$. Somit gilt $\varphi'_i(tx_0) = \varphi(tx_0)$ für alle $1 \leq i \leq s$. Für die offenen Mengen $X_{\Sigma_{(s+1)(s+1)}} = X_{\sigma_1}$ und $X_{\Sigma_{(s+2)(s+2)}} = X_{\sigma_2}$ von $X_{\mathcal{R}_1}$ existieren ebenfalls Morphismen $\varphi'_{s+1} \colon X_{\sigma_1} \to Z$ bzw. $\varphi'_{s+2} \colon X_{\sigma_2} \to Z$ mit $\varphi'_{s+1}(tx_0) = \varphi(tx_0) = \varphi'_{s+2}(tx_0)$. Mit Folgerung 4.1.4 existiert ein Morphismus $\widetilde{\varphi}' \colon X_{\mathcal{R}_1} \to Z$. Da π_1 surjektiv ist, können wir $\widetilde{\varphi} \colon Y \to Z$ mit $\widetilde{\varphi}(x) := \widetilde{\varphi}'(\pi_1^{-1}(x))$ setzen. Also haben wir folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & Z \\ X_{\mathcal{R}_1} \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[urr, bend right=60, "\widetilde{\varphi}'"'] & Y \arrow[ur, dotted, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Es ist zu zeigen, dass $\widetilde{\varphi}$ ein Morphismus ist und $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$ gilt. Wir wissen, nach Konstruktion von π, dass $\pi_{|Tx_0}$ ein Isomorphismus ist. Ebenso ist $\pi_{1_{|Tx_0}}$ ein Isomorphismus. Wenn wir annehmen, dass $\widetilde{\varphi}$ ein Morphismus ist, dann gilt $\widetilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$ auf einer offenen Menge U von X. Mit Folgerung 1.5.12 erhalten wir somit, dass $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$ gilt. Insbesondere liefert $\pi_{|Tx_0} = \mathrm{id}$, dass $\widetilde{\varphi}$ eindeutig bestimmt ist. Also reicht es zu zeigen, dass $\widetilde{\varphi}$ ein Morphismus ist.

Wir wissen, dass $X_{\mathcal{R}_1}$ und Y lokal 1-volle k-Räume sind und π_1 surjektiv ist. Um zu zeigen, dass $\widetilde{\varphi}$ ein Morphismus ist, reicht es nach Lemma 4.2.19 zu zeigen, dass $\widetilde{\varphi}$ wohldefiniert ist und π_1 schwach eigentlich ist.

Wir zeigen zuerst, dass $\widetilde{\varphi}$ wohldefiniert ist. Dazu wollen wir Lemma 3.6.16 verwenden. Also müssen wir alle Seiten von σ betrachten. Es gilt

$$\mathcal{F}_\sigma \quad = \quad \sigma^{(0)} \ \cup \ \sigma^{(1)} \ \cup \ \sigma^{(2)} \ \cup \ \sigma^{(3)}.$$

Wir betrachten zuerst alle Seiten aus $\sigma^{(0)}$ und $\sigma^{(1)} = \{\rho_1, \ldots, \rho_s\}$: Da $\pi_{1_{|Tx_0}} = \mathrm{id}$ gilt, erhalten wir für $\rho_1, \ldots, \rho_s$ und alle $t \in T$ mit Lemma 3.6.16 und Folgerung 3.6.27:

$$\begin{aligned}
\pi_1^{-1}(ty_0) &= \{tx_0\}, \\
\pi_1^{-1}(ty_{\rho_i}) &= \{tx_{[\rho_i,1]},\ tx_{[\rho_i,i]},\ tx_{[\rho_i,i-1]}\} \text{ falls } \rho_i \preccurlyeq \sigma_1, \\
\pi_1^{-1}(ty_{\rho_i}) &= \{tx_{[\rho_i,2]},\ tx_{[\rho_i,i]},\ tx_{[\rho_i,i-1]}\} \text{ falls } \rho_i \preccurlyeq \sigma_2.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.3.3 erhalten wir für alle $t \in T$, dass die Mengen $\widetilde{\varphi}'(\pi_1^{-1}(ty_0))$ und $\widetilde{\varphi}'(\pi_1^{-1}(ty_\rho))$ Punkte sind für $\rho \in \sigma^{(1)}$.

Zu den Seiten aus $\sigma^{(2)}$: Es sei $\gamma \in \sigma^{(2)}$. Für jedes δ_i ist $\delta_i \cap \mathring{\gamma} = \emptyset$. Somit haben wir nach Voraussetzung drei Fälle zu betrachten.

Fall (i): Es gibt ein $\gamma_1 \in \sigma_1^{(2)}$ mit $\gamma_1 = \gamma$. Mit Folgerung 3.6.27 gilt $T_{x_{[\gamma_1,s+1]}} = T_{y_\gamma}$. Für jedes $\rho \prec \sigma_2$ mit $\mathring{\rho} \cap \mathring{\gamma} \neq \emptyset$ gilt außerdem $\mathring{\rho} \subseteq \mathring{\gamma}_1$ und $\rho \subseteq \gamma_1$. Somit liefert Lemma 3.6.16 und Folgerung 3.6.27 für alle $t \in T$:

$$\pi_1^{-1}(ty_\gamma) \quad = \quad \bigcup_{[\rho,s+2]\in\Omega(\mathcal{R}_1),\ \mathring{\rho}\cap\mathring{\gamma}\neq\emptyset} T_{y_\gamma} tx_{[\rho,s+2]} \ \cup \ \{tx_{[\gamma_1,s+1]}\}.$$

Mit Lemma 4.3.3 gilt für alle $[\rho, s+2] \in \Omega(\mathcal{R}_1)$ mit $\mathring{\rho} \cap \mathring{\gamma} \neq \emptyset$ und alle $t' \in T_{y_\gamma}$

$$\widetilde{\varphi}'(t'tx_{[\rho,s+2]}) \quad = \quad \widetilde{\varphi}'(t'tx_{[\gamma_1,s+1]}) \quad = \quad \widetilde{\varphi}'(tx_{[\gamma_1,s+1]}).$$

Somit ist $\widetilde{\varphi}(\pi_1^{-1}(ty_\gamma))$ ein Punkt.

Fall (ii): Es gibt ein $\gamma_2 \in \sigma_2^{(2)}$ mit $\gamma_2 = \gamma$. Analog zu Fall (i).

Fall (iii): Es existieren $\gamma_1 \in \sigma_1^{(2)}$ und $\gamma_2 \in \sigma_2^{(2)}$ mit $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ und $\mathring{\gamma}_1 \cap \mathring{\gamma}_2 \neq \emptyset$. Dann gilt $T_{x_{[\gamma_1,s+1]}} = T_{y_\gamma} = T_{x_{[\gamma_2,s+2]}}$. Es sei $\gamma_1^{(1)} = \{\rho_1, \rho_2\}$ und $\gamma_2^{(1)} = \{\rho_3, \rho_4\}$. Wir können annehmen, dass $\rho_1, \rho_3 \preccurlyeq \gamma$ gilt. Somit haben wir folgendes Bild:

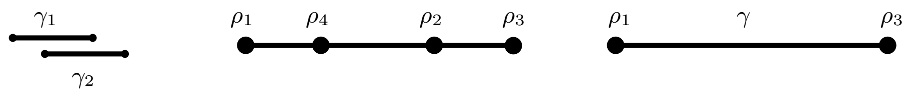

Abbildung 33

Wie im Beweis von Lemma 4.3.14 in Fall 2 erhalten wir, dass $\widetilde{\varphi}'(\pi_1^{-1}(ty_\gamma))$ ein Punkt ist.

Zu den Seiten aus $\sigma^{(3)}$: Da $\pi_{2|Tx_0} = \mathrm{id}$ gilt, erhalten wir für alle $t \in T$ mit Lemma 3.6.16 und $\dim(\sigma) = 3$:

$$\bigcup_{l=1}^{s} Tx_{[\delta_l,l]} \quad \subseteq \quad \pi_1^{-1}(ty_\sigma) \quad = \quad \pi_1^{-1}(y_\sigma).$$

Da $v_0 \in \cap \mathring{\delta}_l$ und $\cup \mathring{\delta}_l = \mathring{\sigma}$ gilt, erhalten wir mit Lemma 4.3.3, dass $\widetilde{\varphi}'(\pi_1^{-1}(ty_\sigma)) = \widetilde{\varphi}'(\pi_1^{-1}(y_\sigma))$ ein Punkt ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass π_1 ein schwach eigentlicher Morphismus ist. Nach Lemma 4.2.12 und Satz 4.2.16 reicht es zu zeigen, dass für jede Seite $\delta \preccurlyeq \sigma$ gilt:

$$|\mathrm{Stern}_\sigma(\delta)| + \mathrm{lin}(\delta) \quad \subseteq \quad \bigcup_{[\rho,l]\in\Omega(\mathcal{R}_1),\ \mathring{\rho}\subseteq\mathring{\delta}} |\mathrm{Stern}_{\mathcal{R}_1}([\rho,l])| + \mathrm{lin}(\rho).$$

1. Fall: $\delta = \sigma$. Folgt aus $\dim(\sigma) = \dim(\sigma_1) = 3$.

2. Fall: $\delta = \{0\}$. Es ist zu zeigen, dass $\sigma \subseteq |\mathcal{R}_1|$ gilt. Es gilt

$$\sigma \quad = \quad \{0\} \ \cup \ \left(\bigcup_{\rho\in\sigma^{(1)}} \mathring{\rho} \right) \ \cup \ \left(\bigcup_{\gamma\in\sigma^{(2)}} \mathring{\gamma} \right) \ \cup \ \mathring{\sigma}.$$

Für jedes $\rho \in \sigma^{(1)}$ gilt $\rho \in \sigma_1^{(1)}$ oder $\rho \in \sigma_2^{(1)}$. Für jedes $\gamma \in \sigma^{(2)}$ ist eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Es gibt eine Seite $\gamma_1 \in \sigma_1^{(2)}$, sodass $\gamma = \gamma_1$ gilt.
(ii) Es gibt eine Seite $\gamma_2 \in \gamma_2^{(2)}$, sodass $\gamma = \gamma_2$ gilt.
(iii) Es gibt Seiten $\gamma_1 \in \sigma_1^{(2)}$ und $\gamma_2 \in \sigma_2^{(2)}$, sodass $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ und $\mathring{\gamma}_1 \cap \mathring{\gamma}_2 \neq \emptyset$ gilt. Insbesondere ist $\mathring{\gamma}_1 \cup \mathring{\gamma}_2 = \mathring{\gamma}$

Nach Konstruktion der τ_i gilt $\mathring{\sigma} = \bigcup \mathring{\delta}_l$. Somit ist $\sigma \subseteq |\mathcal{R}_1|$.

3. Fall: $\delta \in \sigma^{(2)}$. Wegen $\dim(\sigma) = 3$ gilt $\mathrm{Stern}_\sigma(\delta) = \{\delta, \sigma\}$. Nach Voraussetzung existiert ein $\gamma_1 \in \sigma_1^{(2)}$ mit $\mathring{\gamma}_1 \subseteq \mathring{\delta}$ und $\gamma_1 \subseteq \delta$ oder ein $\gamma_2 \in \sigma_2^{(2)}$ mit $\mathring{\gamma}_2 \subseteq \mathring{\delta}$ und $\gamma_2 \subseteq \delta$.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass es ein $\gamma_1 \in \sigma_1^{(2)}$ gibt mit $\mathring{\gamma}_1 \subseteq \mathring{\delta}$ und $\gamma_1 \subseteq \delta$. Es gilt $\mathrm{lin}(\delta) = \mathrm{lin}(\gamma_1)$. Aus $\dim(\sigma_1) = 3$ folgt $\mathrm{Stern}_{\sigma_1}(\gamma_1) = \{\gamma_1, \sigma_1\}$. Also gilt $[\gamma_1, s+1] \preccurlyeq [\sigma_1, s+1]$. Damit reicht zu zeigen, dass : $\mathring{\sigma} + \mathrm{lin}(\delta) = \mathring{\sigma}_1 + \mathrm{lin}(\gamma_1)$ gilt. Weiter betrachten wir den Morphismus $P\colon N \to N_\delta$. Wegen $\mathrm{lin}(\gamma_1) = \mathrm{lin}(\delta)$ reicht es zu zeigen, dass $P^{\mathrm{s}}(\sigma) = P^{\mathrm{s}}(\sigma_1)$ gilt. Es gilt $P(\delta) = P(\gamma_1)$. Mit Konstruktion 2.5.8 erhalten wir $P^{\mathrm{s}}(\sigma) = P(\delta) \cup P(\mathring{\sigma})$ und $P^{\mathrm{s}}(\sigma_1) = P(\delta) \cup P(\mathring{\sigma}_1)$. Es sei σ' der Abschluss von σ und σ_1' der Abschluss von σ_1. Es gilt $\delta' \preccurlyeq \sigma'$ und $\gamma_1' \preccurlyeq \sigma_1'$, wobei δ' der Abschluss von δ und γ_1' der Abschluss von γ_1 ist. Mit Erinnerung 2.5.4 gilt $\dim(P(\sigma')) = \dim(P(\sigma_1')) = 1$. Weiter gilt $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma} \neq \emptyset$. Mit Konstruktion 2.5.8 folgt:

$$\mathring{\sigma} + \mathrm{lin}(\delta) \quad = \quad P(\mathring{\sigma}) \quad = \quad P(\mathring{\sigma}') \quad = \quad P(\mathring{\sigma}'_1) \quad = \quad P(\mathring{\sigma}_1) \quad = \quad \mathring{\sigma}_1 + \mathrm{lin}(\gamma_1).$$

Falls es ein $\gamma_2 \in \sigma_2^{(2)}$ mit $\mathring{\gamma}_2 \subseteq \mathring{\delta}$ und $\gamma_2 \subseteq \delta$ gibt, gilt $\dim(\sigma_2) = 3$, da $\mathring{\sigma}_2 \subseteq \mathring{\sigma}$. Analog zu obigen Argumentation erhalten wir weiter $\mathring{\sigma} + \mathrm{lin}(\delta) = \mathring{\sigma}_2 + \mathrm{lin}(\gamma_2)$. Somit gilt für $\delta \in \sigma^{(2)}$:

$$|\mathrm{Stern}_\sigma(\delta)| + \mathrm{lin}(\delta) \quad \subseteq \quad \bigcup_{[\rho,l]\in\Omega(\mathcal{R}_1),\ \mathring{\rho}\subseteq\mathring{\delta}} |\mathrm{Stern}_{\mathcal{R}_1}([\rho,l])| + \mathrm{lin}(\rho).$$

4. Fall: $\delta \in \sigma^{(1)}$. Wir können annehmen, dass $\delta = \rho_2$ gilt. Somit folgt $\rho_2 \preccurlyeq \gamma_1', \gamma_2'$. Wir wissen, dass $\gamma_1', \gamma_2' \in \sigma'^{(2)}$ gilt. Dies lässt sich folgendermaßen darstellen:

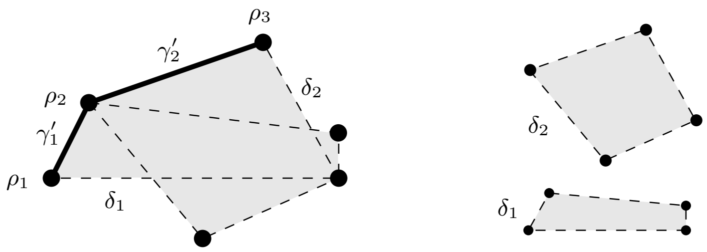

Abbildung 34

Wegen $\dim(\rho_2) = 1$ gilt $\rho_2' = \rho_2$, wobei ρ_2' der Abschluss von ρ_2 ist. Somit ist $\mathrm{Stern}_{\sigma'}(\rho_2) = \{\rho_2, \sigma', \gamma_1', \gamma_2'\}$. Mit Lemma 2.1.41 folgt

$$\mathrm{Stern}_\sigma(\rho_2) \quad = \quad \{\sigma, \rho_2\} \cup \bigcup_{\mathring{\gamma}_j'\cap\sigma\neq\emptyset,\ j=1,2} \{\gamma_j'\}$$

Somit gilt

$$|\mathrm{Stern}_\sigma(\rho_2)| \ + \ \mathrm{lin}(\rho_2) \quad = \quad \mathring{\sigma} \ + \ \mathrm{lin}(\rho_2) \ \cup \bigcup_{\mathring{\gamma}_j'\cap\sigma\neq\emptyset} \mathring{\gamma}' \ + \ \mathrm{lin}(\rho_2)$$

Es seien δ_1' und δ_2' die Abschlüsse von δ_1 bzw. δ_2. Nach Konstruktion von δ_1 und δ_2 gilt $\gamma_1' \preccurlyeq \delta_1'$ und $\gamma_2' \preccurlyeq \delta_2'$ siehe Abbildung 34. Somit gilt $\{\rho_2, \delta_1', \gamma_1'\} \subseteq \mathrm{Stern}_{\delta_1'}(\rho_2)$ und $\{\rho_2, \delta_2', \gamma_2'\} \subseteq \mathrm{Stern}_{\delta_2'}(\rho_2)$. Wir betrachten den Morphismus $P\colon N \to N_\delta$. Mit Einnerung 2.5.4 erhalten wir

$$\dim(P(\delta_1')) \quad = \quad \dim(P(\delta_2')) \quad = \quad \dim(P(\sigma')) \quad = \quad 2.$$

Weiter gilt $\mathring{\delta}_1', \mathring{\delta}_2' \subseteq \mathring{\sigma}$ und $\mathring{\delta}_1' \cap \mathring{\delta}_2' \neq \emptyset$. Mit $P(\sigma')^{(1)} = \{P(\gamma_1'), P(\gamma_2')\}$ und $\dim(P(\sigma')) = 2$ erhalten wir $P(\mathring{\sigma}') = P(\mathring{\delta}_1') \cup P(\mathring{\delta}_2')$ und damit

$$\begin{aligned}
\mathring{\sigma} \ + \ \mathrm{lin}(\rho_2) \quad = \quad P(\mathring{\sigma}) \quad = \quad P(\mathring{\sigma}') \ &= \ P(\mathring{\delta}_1') \ \cup \ P(\mathring{\delta}_2') \\
&= \ P(\mathring{\delta}_1 \cup \mathring{\delta}_2) \\
&= \ \left(\mathring{\delta}_1 \ \cup \ \mathring{\delta}_2\right) \ + \ \mathrm{lin}(\rho_2).
\end{aligned}$$

Falls $\gamma_1' \in \mathrm{Stern}_\sigma(\rho_2)$ gilt, liegt einer der folgenden drei Fälle vor:

(i) Es gibt eine Seite $\theta_1 \in \sigma_1^{(2)}$, sodass $\gamma_1' = \theta_1$ gilt.

(ii) Es gibt eine Seite $\theta_2 \in \sigma_2^{(2)}$, sodass $\gamma_1' = \theta_2$ gilt.

(iii) Es gibt Seiten $\theta_1 \in \sigma_1^{(2)}$ und $\theta_2 \in \sigma_2^{(2)}$, sodass $\gamma_1' = \theta_1 \cup \theta_2$ gilt.

Fall (i): Es sei $\theta_1 \in \sigma_1^{(2)}$ mit $\gamma_1' = \theta_1$ gegeben. Dann gilt $\mathring{\gamma}_1' + \operatorname{lin}(\rho_2) = \mathring{\theta}_1 + \operatorname{lin}(\rho_2)$.
Fall (ii) ist analog zu Fall (i).

Fall (iii): Es seien $\theta_1 \in \sigma_1^{(2)}$ und $\theta_2 \in \sigma_2^{(2)}$ Seiten gegeben, sodass $\gamma_1' = \theta_1 \cup \theta_2$ gilt. Dann gilt $\rho_2 \preccurlyeq \theta_1$ oder $\rho_2 \preccurlyeq \theta_2$. Wir können annehmen, dass $\rho_2 \preccurlyeq \theta_1$ gilt. Weiter ist $\mathring{\theta}_1 \subseteq \mathring{\gamma}_1'$ und $\dim(P(\gamma_1')) = 1 = \dim(P(\theta_1)$. Somit folgt mit $\mathring{\theta}_1 \subseteq \mathring{\gamma}_1'$, dass $\mathring{\gamma}_1' + \operatorname{lin}(\rho_2) = \mathring{\theta}_1 + \operatorname{lin}(\rho_2)$. Den Fall $\gamma_2' \in \operatorname{Stern}_\sigma(\rho_2)$ können wir analog behandeln. Somit gilt für $\rho \in \sigma^{(1)}$:

$$|\operatorname{Stern}_\sigma(\rho_2)| + \operatorname{lin}(\rho_2) \quad \supseteq \bigcup_{[\rho,l]\in\Omega(\mathcal{R}_1),\ \mathring{\rho}\subseteq\mathring{\delta}} |\operatorname{Stern}_{\mathcal{R}_1}([\rho,l])| + \operatorname{lin}(\rho).$$

Damit haben wir gezeigt, dass π_1 schwach eigentlich ist. Somit ist $\pi\colon X \to Y$ die universelle Separierung. $\square$

Beispiele 4.3.18. Die Beispiele aus Abbildung 35 erfüllen die Bedingungen aus Satz 4.3.17 und besitzen somit eine universelle Separierung $\pi\colon X \to Y$.

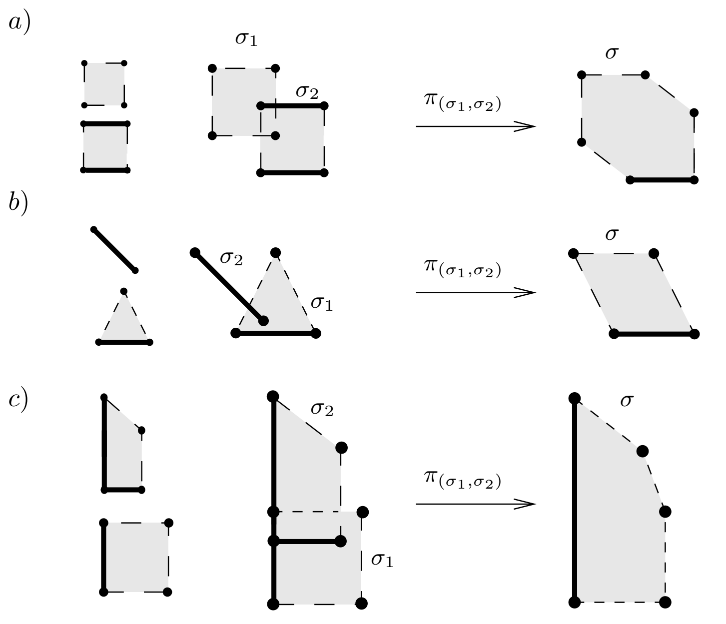

Abbildung 35

4.4. **Schwache allgemeine Lage.**

Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein attraktives spitzes 1-volles k-Fächersystem und $\Delta := \textbf{k-Quot}(\mathcal{S})$ ein spitzer k-Fächer. Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass $\pi_{\mathcal{S}} \colon X_{\mathcal{S}} \to Y_{\Delta}$ eine universelle Separierung von $X_{\mathcal{S}}$ ist, falls alle k-Kegel aus $\mathcal{S}$ mit Dimension eins *allgemeine Lage* haben. Zunächst untersuchen wir den Fall der *schwachen allgemeinen Lage*.

Definition 4.4.1. Es seien σ_1 und σ_2 1-volle k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$, sodass der Träger $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ ein k-Kegel in V ist. Wir sagen, dass σ_1 und σ_2 *schwache allgemeine Lage* haben, falls es für alle $\rho \in \sigma_1^{(1)} \cup \sigma_2^{(1)}$ kein $\gamma \in \sigma^{(2)}$ gibt mit $\mathring{\rho} \subseteq \mathring{\gamma}$.

Bemerkung 4.4.2. Es seien σ_1 und σ_2 zwei 1-volle k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$ mit schwacher allgemeiner Lage. Dann gilt

(i) Der k-Kegel $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ ist 1 voll.
(ii) Gilt $\dim(\sigma) = 3$, so gilt $\rho \in \sigma^{(1)}$ oder $\mathring{\rho} \subseteq \mathring{\sigma}$ für alle $\rho \in \sigma_1^{(1)} \cup \sigma_2^{(1)}$.

Beispiele 4.4.3. Folgende k-Kegel haben schwache allgemeine Lage

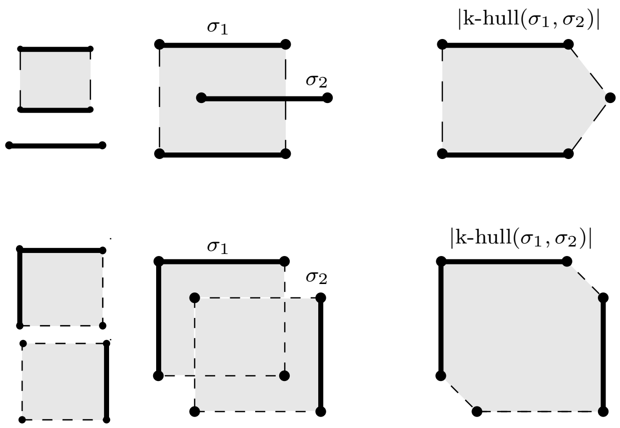

Abbildung 36

Definition 4.4.4. Es seien $\rho'_1, \ldots, \rho'_l$ Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$ mit $\dim(\rho'_i) = 1$. Wir sagen, dass $\rho'_1, \ldots, \rho'_l$ *allgemeine Lage* haben, falls für alle $1 \leq i, j, k \leq l$ mit $i \neq j$, $j \neq k$ und $i \neq k$ gilt:

$$\dim(\text{hull}(\rho_i, \rho_j, \rho_k)) \quad = \quad 3.$$

Bemerkung 4.4.5. Es seien $\rho'_1, \ldots, \rho'_l$ Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$ mit allgemeiner Lage. Weiter seien $v_i \in \mathring{\rho}'_i$, $v_j \in \mathring{\rho}_j$ und $v_k \in \mathring{\rho}_k$ mit $1 \leq i, j, k \leq l$, sodass $i \neq j$, $j \neq k$ und $i \neq k$ gilt. Dann haben v_i, v_j und v_k allgemeine Lage in $N_{\mathbb{Q}}$.

Bemerkung 4.4.6. Es seien σ_1 und σ_2 1-volle k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$, sodass $\{\rho_1, \ldots, \rho_m\} = \sigma_1^{(1)} \cup \sigma_2^{(1)}$ allgemeine Lage in $N_{\mathbb{Q}}$ haben und $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ ein k-Kegel in V ist. Dann haben σ_1 und σ_2 schwache allgemeine Lage in $N_{\mathbb{Q}}$.

Beispiel 4.4.7. Es seien σ_1 und σ_2 zwei 1-volle k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$ mit schwacher allgemeiner Lage und $\sigma_1^{(1)} \cup \sigma_2^{(1)} = \{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$. Dann haben $\rho_1, \ldots, \rho_m$ im Allgemeinen keine allgemeine Lage siehe Abbildung 37.

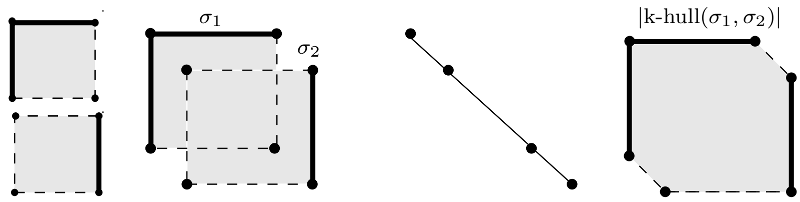

Abbildung 37

Lemma 4.4.8. *Es seien σ_1 und σ_2 zwei 1-volle k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$ mit schwacher allgemeiner Lage. Nach Voraussetzung ist $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ ein k-Kegel in V. Für jede Seite $\tau \in \sigma^{(1)} \cup \sigma^{(2)}$ mit $\mathring{\tau} \cap \sigma_1 \neq \emptyset$ gilt $\tau \preccurlyeq \sigma_1$.*

Beweis. Es sei $\tau \in \sigma^{(1)} \cup \sigma^{(2)}$ gegeben. Falls $\dim(\tau) = 1$ gilt, ist nichts zu zeigen. Es sei also $\dim(\tau) = 2$. Aus $\mathring{\tau} \cap \sigma_1 \neq \emptyset$ folgt $\mathring{\tau} \cap \mathring{\tau}_1 \neq \emptyset$ für ein $\tau_1 \preccurlyeq \sigma_1$. Zu zeigen ist, dass $\tau = \tau_1$ gilt. Da σ_1, σ_2 schwache allgemeine Lage haben, gilt $\dim(\tau_1) \geq 2$. Mit Folgerung 2.1.32 und $\tau_1 \subseteq \sigma$ gilt $\tau_1 \subseteq \tau$. Somit folgt $\dim(\tau_1) = 2$. Da σ_1, σ_2 schwache allgemeine Lage haben, gilt $\tau_1^{(1)} = \tau^{(1)}$ und somit $\tau = \tau_1$. □

Folgerung 4.4.9. *Es seien σ_1 und σ_2 zwei 1-volle k-Kegel in $N_{\mathbb{Q}}$ mit schwacher allgemeiner Lage. Nach Voraussetzung ist $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ ein k-Kegel in V. Für jede Seite $\tau \in \sigma^{(1)} \cup \sigma^{(2)}$ gilt: $\tau \preccurlyeq \sigma_1$ oder $\tau \preccurlyeq \sigma_2$.*

Beweis. Folgt aus Lemma 4.4.8 und der Konstruktion der k-Hülle. □

Lemma 4.4.10. *Es seien σ_1', σ_2' Kegel in V mit $\dim(V) = 3$, $\dim(\sigma_1') = 2$, $\dim(\sigma_2') = 3$ und $\mathring{\sigma}_1' \cap \sigma_2' \neq \emptyset$. Weiter sei $\sigma' := \text{hull}(\sigma_1' \cup \sigma_2')$. Gilt $\mathring{\sigma}_1' \cap \mathring{\sigma}_2' = \emptyset$, so ist $\mathring{\sigma}_1' \cap \mathring{\sigma}' = \emptyset$.*

Beweis. Aus $\mathring{\sigma}_1' \cap \mathring{\sigma}_2' = \emptyset$ und $\dim(\sigma_1') = 2$ folgt, dass ein $u \in \sigma_1'^{\perp}$ existiert mit $u_{|\sigma_2'} \geq 0$ oder $u_{|\sigma_2'} \leq 0$. Wir können annehmen, dass $u_{|\sigma_2'} \geq 0$ gilt. Damit gilt $u_{|\sigma'} \geq 0$. Also gilt $u \in \sigma'^{\vee}$ und $\sigma_1' \subseteq u^{\perp} \cap \sigma'$. Insbesondere ist $\mathring{\sigma}_1' \cap \mathring{\sigma}' = \emptyset$. □

Lemma 4.4.11. *Es sei σ_1, σ_2 ein striktes Paar in $N_{\mathbb{Q}}$ mit $\mathring{\sigma}_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ und $\sigma_1 \not\preceq \sigma_2$. Haben σ_1 und σ_2 schwache allgemeine Lage, dann gilt $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2 \neq \emptyset$.*

Beweis. Wir setzen $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$. Nach Voraussetzung ist der Träger $\sigma := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ ein k-Kegel in V. Es seien σ_1', σ_2' und σ' die Abschlüsse von σ_1, σ_2 bzw. σ. Dann haben wir folgende Fälle zu betrachten:

1. Fall $\dim(\sigma_1) = 1$ und $\dim(\sigma_2) = 1$: Dieser Fall tritt nicht auf.

2. Fall $\dim(\sigma_1) = 2$ und $\dim(\sigma_2) = 2$: Dann gilt $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2 \neq \emptyset$ oder $\mathring{\rho} \subseteq \mathring{\sigma}_1$ für ein $\rho \in \sigma_2^{(1)}$. Da σ_1, σ_2 schwache allgemeine Lage haben, gilt $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2 \neq \emptyset$.

3. Fall $\dim(\sigma_1) = 3$ und $\dim(\sigma_2) = 3$: Dann gilt $\mathring{\sigma}_1' \cap \sigma_2' \neq \emptyset$ und somit $\mathring{\sigma}_1' \cap \mathring{\sigma}_2' \neq \emptyset$, also insbesondere $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2 \neq \emptyset$.

4. Fall $\dim(\sigma_1) = 1$ und $\dim(\sigma_2) = 2$: Dann gilt $\sigma_2 = \sigma$ und wegen $\sigma_1 \not\preceq \sigma_2$ tritt dieser Fall nicht auf.

5. Fall $\dim(\sigma_1) = 1$ und $\dim(\sigma_2) = 3$: Da $\sigma_1 \not\preceq \sigma_2$ gilt, und σ_1, σ_2 schwache allgemeine Lage haben, gilt die Behauptung.

6. Fall $\dim(\sigma_1) = 2$ und $\dim(\sigma_2) = 1$: Da σ_1, σ_2 schwache allgemeine Lage haben, tritt dieser Fall nicht auf.

7. Fall $\dim(\sigma_1) = 2$ und $\dim(\sigma_2) = 3$: Aus $\dim(\sigma_1) = 2$ folgt, dass σ_1 ein Kegel ist. Angenommen es gilt $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2 = \emptyset$. Nach Lemma 4.4.10 gilt dann $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}' = \emptyset$. Aus $\dim(\sigma_1) = 2$ und $\sigma_1 \subseteq \sigma'$ folgt, dass es ein $\tau' \in \sigma^{(2)}$ gibt mit $\mathring{\sigma}_1 \subseteq \mathring{\tau}'$ und $\sigma_1 \subseteq \tau'$. Falls $\sigma_1 \neq \tau'$ gilt, erhalten wir sofort einen Widerspruch dazu, dass σ_1 und σ_2 schwache allgemeine Lage haben. Falls $\tau' = \sigma_1$ gilt, so gilt $\mathring{\tau}' \cap \sigma_2 \neq \emptyset$. Nach Lemma 2.1.41 gilt $\tau' \preccurlyeq \sigma$. Mit Lemma 4.4.8 erhalten wir $\sigma_1 = \tau' \preccurlyeq \sigma_2$, Widerspruch.

8. Fall $\dim(\sigma_1) = 3$ und $\dim(\sigma_2) = 1$: Klar.

9. Fall $\dim(\sigma_1) = 3$ und $\dim(\sigma_2) = 2$: Klar. □

Satz 4.4.12. *Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein attraktives spitzes 1-volles k-Fächersystem. Weiter sei ein Schleifendurchlauf durch* **k-Quot** *und* **subroutine k-Quot** *gegeben, sodass für alle k-Kegel σ_1, σ_2, für die σ_1 durch den k-Kegel $\widetilde{\sigma} := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$ ersetzt wird, Folgendes gilt: σ_1 und σ_2 haben schwache allgemeine Lage und $\Delta :=$* **k-Quot($\mathcal{S}$)** *ist ein spitzer k-Fächer. Dann ist der Morphismus $\pi\colon X_{\mathcal{S}} \to Y_{\Delta}$ die universelle Separierung.*

Beweis. Es seien σ_1, σ_2 k-Kegel, sodass σ_1 ersetzt wird durch $\widetilde{\sigma} := |\text{k-hull}(\sigma_1, \sigma_2)|$. Nach Satz 4.1.17 reicht es zu zeigen, dass gilt:

(i) Die k-Kegel σ_1, σ_2 bilden ein striktes Paar.
(ii) Die Abbildung $\pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}\colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \to X_{\widetilde{\sigma}}$ ist die universelle Separierung von $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$.

Da Δ ein spitzer k-Fächer ist, erhalten wir, dass $\widetilde{\sigma}$ ein spitzer k-Kegel ist. Also bilden σ_1, σ_2 ein striktes Paar. Also ist noch zu zeigen, dass der Morphismus $\pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}\colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \to X_{\widetilde{\sigma}}$ die universelle Separierung von $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ ist. Nach **k-Quot** und **subroutine k-Quot** gilt $\mathring{\sigma}_2 \cap \sigma_1 \neq \emptyset$ und $\sigma_2 \not\preccurlyeq \sigma_1$. Lemma 4.4.11 liefert somit $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2 \neq \emptyset$. Mit Folgerung 4.4.9 und $\mathring{\sigma}_1 \cap \mathring{\sigma}_2 \neq \emptyset$ sind die Voraussetzungen von Satz 4.3.17 erfüllt. Somit ist $\pi_{(\sigma_1,\sigma_2)}\colon X_{(\sigma_1,\sigma_2)} \to X_{\widetilde{\sigma}}$ die universelle Separierung von $X_{(\sigma_1,\sigma_2)}$. □

Satz 4.4.13. *Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein attraktives spitzes 1-volles k-Fächersystem. Weiter sei $\Delta :=$* **k-Quot($\mathcal{S}$)** *ein spitzer k-Fächer und $\rho_1, \dots, \rho_s$ seien alle k-Kegel von $\mathcal{S}$ mit $\dim(\rho_i) = 1$. Falls $\rho_1, \dots, \rho_s$ allgemeine Lage haben, so ist $\pi\colon X_{\mathcal{S}} \to Y_{\Delta}$ die universelle Separierung.*

Beweis. Nach Bemerkung 4.4.6 haben alle k-Kegel im Schleifendurchlauf durch **k-Quot** und **subroutine k-Quot** schwache allgemeine Lage. Somit folgt die Behauptung aus Satz 4.4.12. □

Definition 4.4.14. Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein 1-volles ein attraktives spitzes 1-volles k-Fächersystem. Weiter seien $\rho_1, \dots, \rho_s$ alle k-Kegel von $\mathcal{S}$ mit $\dim(\rho_i) = 1$. Wir sagen, dass $\mathcal{S}$ *spitzer allgemeine Lage* hat, falls $\rho_1, \dots, \rho_s$ allgemeine Lage haben und der Kegel $\text{hull}(\rho_1, \dots, \rho_s)$ spitz ist.

Theorem 4.4.15. *Es sei $(N, \mathcal{S})$ ein attraktives spitzes 1-volles k-Fächersystem mit spitzer allgemeiner Lage. Dann ist $\pi\colon X_{\mathcal{S}} \to Y_{\Delta}$ die universelle Separierung, wobei $\Delta :=$* **k-Quot($\mathcal{S}$)** *ist.*

Beweis. Aus $\mathrm{hull}(\rho_1, \ldots, \rho_s)$ spitz, folgt, dass Δ spitz ist. Somit folgt die Behauptung aus Satz 4.4.13. $\square$

4.5. **Existenz von kategorischen Quotienten für torische H-Varietäten.**

Im letzten Abschnitt wollen wir Kriterien für die Existenz eines kategorischen Quotienten zu einer gegebenen torischen H-Varietät (X', T, x_0) angeben. Ob ein kategorischer Quotient existiert, hängt sehr stark von der Kategorie ab. In [3, Proposition 5.1] wurde bewiesen, dass es für die torische H-Varietät aus Beispiel 3.7.17 einen kategorischen Quotienten in der Kategorie der Prävarietäten gibt, jedoch keinen in der Kategorie der Varietäten. Weiter wurde in [9, Theorem 1] gezeigt, dass die torische H-Varietät aus Beispiel 3.7.17 einen kategorischen Quotienten in der Kategorie der dc-subsets besitzt. Lemma 4.3.12 liefert, dass für diese torische H-Varietät ein kategorischer Quotient in der Kategorie der separierten k-Räume existiert siehe Beispiel 4.5.11.

Des Weiteren wird in Beispiel 4.5.8 eine H-Varietät betrachtet, welche einen kategorischen Quotienten in der Kategorie der separierten k-Räume besitzt. Dieser ist nicht in eine Varietät einbettbar, das heißt, der kategorische Quotient ist kein kategorischer Quotient in der Kategorie der dc-subsets. Eine Frage, die wir nicht beantworten können ist, ob dieses Beispiel einen kategorischen Quotienten in der Kategorie der dc-subsets besitzt.

A'Campo-Neuen und Hausen haben in [3] gezeigt, dass für jede torische H-Varietät der *Komplexität* zwei ein kategorischer Quotient in der Kategorie der Varietäten existiert. Wir werden zeigen, dass der kategorische Quotient in der Kategorie der Varietäten mit Komplexität zwei bereits ein kategorischer Quotient in der Kategorie der separierten k-Räume ist siehe Satz 4.5.17. Satz 4.5.10 gibt ein Kriterium für die Existenz eines kategorischen Quotienten in der Kategorie der separierten k-Räume an, welches unabhängig von der Komplexität ist.

H. Sumihiro hat in [17] Kriterien für gute *Präquotienten* angegeben. In Lemma 4.5.4 wird folgende Aussage bewiesen: Falls der kategorische Quotieten für eine torische H-Varietät in der Kategorie der Prävarietäten eine universelle Separierung besitzt, dann existiert der kategorische Quotient in der Kategorie der separierten k-Räume.

Wir werden einige speziellere Kriterien für Komplexität drei angeben. Beispiel 4.5.19 liefert eine torische H-Varietät, welche die Voraussetzung von Theorem 4.5.18 erfüllt, jedoch keinen kategorischen Quotienten in der Kategorie der Varietäten besitzt.

Definition 4.5.1. Es sei (X, T, x_0) ein torischer H-Raum. Wir nennen die natürliche Zahl $\dim(X) - \dim(H)$ die *Komplexität von X bezüglich H*.

Erinnerung 4.5.2. Es sei X ein torischer H-Raum. Ein Morphismus von $\pi\colon X \to Y$ heißt *kategorischer Quotient (bezüglich H)*, falls Folgendes gilt:

(i) Der Morphismus π ist H-invariant.
(ii) Für jeden H-invarianten Morphismus $\varphi\colon X \to Z$ existiert genau ein Morphismus $\widetilde{\varphi}\colon Y \to Z$, sodass $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$ gilt.

Bemerkung 4.5.3. Es sei $\pi\colon X \to Y$ ein kategorischer Quotient. Dann ist Y bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und π ist surjektiv.

Lemma 4.5.4. *Es seien (X', T, x_0) eine torische H-Varietät, $\widetilde{\pi}'\colon X' \to \widetilde{Y}'$ der kategorische Quotient für die H-Varietät X' in der Kategorie der Prävarietäten und*

$\pi' \colon \widetilde{Y}' \to Y$ die universelle Separierung. Dann ist $\pi := \pi' \circ \pi_H \colon X' \to Y$ der kategorische Quotient für die torische H-Varietät X' in der Kategorie der separierten k-Räume.

Beweis. Der Morphismus π ist H-invariant. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\pi \colon X' \to Y$ die universelle Eigenschaft erfüllt. Dazu sei ein H-invarianter Morphismus $\varphi \colon X' \to Z$ mit einem separierten k-Raum Z gegeben. Wir können annehmen, dass φ surjektiv ist. Da X irreduzibel ist, folgt Z irreduzibel. Nach Folgerung 1.5.16 existiert eine Prävarietät Z' mit $Z \sqsubseteq Z'$. Also ist $\varphi \colon X' \to Z'$ ein H-invarianter Morphismus von Prävarietäten.

Somit existiert genau ein Morphismus $\varphi' \colon \widetilde{Y}' \to Z'$ mit $\varphi = \varphi' \circ \widetilde{\pi}'$. Insbesondere gilt $\varphi'(\widetilde{Y}') \subseteq Z$. Da π' die universelle Separierung ist, gibt es genau einen Morphismus $\widetilde{\varphi} \colon Y \to Z$ mit $\varphi' = \widetilde{\varphi} \circ \pi'$. Somit liefert das folgende kommutative Diagramm die Behauptung:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, "\widetilde{\pi}'"'] \arrow[dr, "\pi"] & & Z \\
\widetilde{Y}' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[urr, bend right=60, "\varphi'"'] & Y \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"] &
\end{tikzcd}$$

□

Folgende Definition wurde in [4] eingeführt. Vergleiche dazu auch [6, Definition 1.4.1].

Definition 4.5.5. Es seien G eine affine algebraische Gruppe und X eine G-Prävarietät. Ein G-invarianter Morphismus $\pi \colon X \to Y$ von Prävarietäten heißt *guter Präquotient*, falls Folgendes gilt:

(i) Der Morphismus π ist affin, das heißt, für jede affine offene Teilmenge $V \subseteq Y$ ist $\pi^{-1}(V)$ affin.
(ii) Es gilt $(\pi_* \mathcal{O}_X)^G = \mathcal{O}_Y$.

Der Präquotient $\pi \colon X \to Y$ heißt *Quotient*, falls Y eine Varietät ist. Wir nennen einen Morphismus $\pi \colon X \to Y$ einen *geometrischen Präquotienten*, falls π ein guter Präquotient ist und die Fasern genau die G-Bahnen von X sind.

Lemma 4.5.6. *Es seien G eine affine algebraische Gruppe, X eine G-Prävarietät und $\pi \colon X \to Y$ ein guter Präquotient. Dann trägt Y die Quotiententopologie bezüglich π.*

Beweis. Die Aussage ist lokaler Natur und somit bekannt. □

Folgerung 4.5.7. *Es seien G eine affine algebraische Gruppe, X eine G-Prävarietät und $\pi \colon X \to Y$ ein guter Präquotient. Dann ist $\pi \colon X \to Y$ ein kategorischer Quotient bezüglich G in der Kategorie der k-Räume.*

Beispiel 4.5.8. Wir betrachten die quasiaffine torische Varietät

$$X' \quad := \quad \left(\mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^4\right) \ \cup \ \left((\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^2\right) \ \cup \ \left((\mathbb{C}^*)^4 \times \mathbb{C}^2\right)$$

mit dem Torus $T := (\mathbb{C}^*)^6$ und Basispunkt $x_0 := (1, \ldots, 1)$. Weiter betrachten wir folgende $(\mathbb{C}^*)^3$-Wirkung auf X':

$$(h_1, h_2, h_3) * x \quad := \quad \left(h_1^{-1}h_2^{-1}x_1, h_1^{-1}h_3x_2, h_2^{-1}x_3, h_1x_4, h_2h_3^{-1}x_5, h_3x_6\right).$$

(X', T, x_0) ist eine torische H-Varietät. Es gilt $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T) = \mathbb{Z}^6$. Der Fächer Σ_X besitzt folgende drei maximale zweidimensionale Kegel: $\sigma_1 := \mathrm{cone}(e_1', e_2')$, $\sigma_2 := \mathrm{cone}(e_3', e_4')$ und $\sigma_3 := \mathrm{cone}(e_5', e_6')$, wobei $e_1', \ldots, e_6'$ die Standardbasisvektoren des $\mathbb{Q}^6$ bezeichnen. Weiter ist die Abbildung $Q\colon \mathbb{Z}^6 \to \Lambda_{\mathbb{Q}}(T)/L_{(\mathbb{C}^*)^3} = \mathbb{Z}^3$ durch folgende Matrix gegeben:

$$A \quad := \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt $Q(\sigma_1) = \tau_1 := \mathrm{cone}(e_1, e_2)$, $Q(\sigma_2) = \tau_2 := \mathrm{cone}(e_3, e_1 + e_2)$ und $Q(\sigma_3) = \tau_3 := \mathrm{cone}(e_1 + e_3, e_1 - e_2 + e_3)$, wobei e_1, e_2 und e_3 die Standardbasisvektoren des $\mathbb{Q}^3$ bezeichnen. Damit lässt sich die Situation folgendermaßen darstellen:

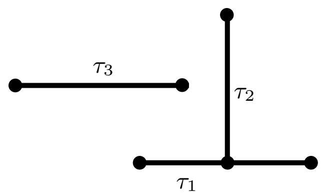

Abbildung 38

Wir betrachten die Prävarietät $\widetilde{Y}'$, welche durch die Familie $S := (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ definiert wird. Die Prävarietät $\widetilde{Y}'$ ist minimal verklebt. Nach [2, Proposition 3.2] liefert der Morphismus Q den guten Quotienten $\widetilde{\pi}_i\colon X_\sigma \to \widetilde{Y}_{\tau_i}$ für $i = 1, 2, 3$. Somit existiert ein guter Präquotient $\widetilde{\pi}\colon X' \to \widetilde{Y}'$. Wir zeigen, dass $\widetilde{Y}'$ eine universelle Separierung besitzt. Dazu wenden wir den Algorithmus **k-Quot** auf S an. Es gilt $\tau_1 \cap \tau_2 \not\preceq \tau_1$. Der Algorithmus setzt $\widetilde{\tau}_1 := |\text{k-hull}(\tau_1, \tau_2)|$ und stoppt. Wir erhalten den k-Fächer $\Delta := \mathbf{k} - \mathbf{Quot}(S) = \mathcal{F}_{\widetilde{\tau}_1} \ \cup \ \mathcal{F}_{\tau_1}$ und haben fogendes Bild:

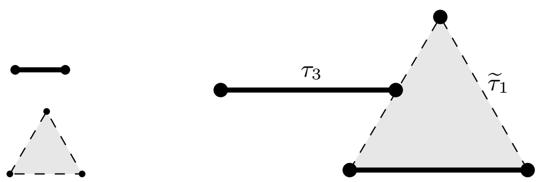

Abbildung 39

Lemma 4.3.12 liefert, dass $\pi_{(\tau_1,\tau_2)}\colon X_{(\tau_1,\tau_2)} \to Y_{\widetilde{\tau}_1}$ die universelle Separierung von $X_{(\tau_1,\tau_2)}$ ist. Somit ist $\pi_S\colon \widetilde{Y} \to Y_\Delta$ die universelle Separierung von $\widetilde{Y}$. Nach Lemma 4.5.4 ist $\pi := \pi_S \circ \widetilde{\pi}\colon X' \to Y_\Delta$ der kategorische Quotient von X' bezüglich $(\mathbb{C}^*)^3$ in der Kategorie der separierten k-Räume. Nach Bemerkung 2.3.35 existiert der Abschluss $\mathcal{S}'$ zu Δ. Dieser ist nicht separiert siehe Abildung 40.

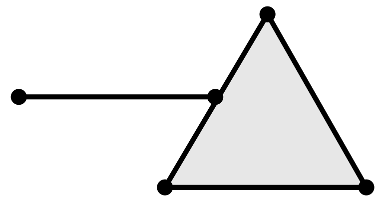

Abbildung 40

Also existiert nach Satz 3.6.30 keine Varietät Y' mit $Y_\Delta \sqsubseteq Y'$. Eine Frage, die wir nicht beantworten können ist, ob die torische H-Varietät aus (X', T, x_0) einen kategorischen Quotienten in der Kategorie der dc-subsets besitzt.

Lemma 4.5.9. *Es seien (X', T, x_0) eine torische H-Varietät und $\pi\colon X' \to Y$ ein guter Präquotient für die H-Wirkung. Dann existiert ein Untertorus $\widehat{H} \subseteq T$ mit $H \subseteq T$, sodass $(Y, T/\widehat{H}, \pi(x_0))$ eine torische Prävarietät ist. Weiter existiert ein torischer Morphismus $(\pi, \widehat{\pi})\colon (X', T, x_0) \to (Y, T/\widehat{H}, \pi(x_0))$. Falls π ein geomatrischer Präquotient ist, gilt $H = \widehat{H}$.*

Beweis. Folgt im wesentlich aus [4, Corollary 6.5]. □

Satz 4.5.10. *Es sei (X', T, x_0) eine torische H-Varietät und $\pi\colon X' \to Y'$ ein guter Präquotient für die H-Wirkung. Dann ist Y' eine torische Prävarietät $(Y', T_{Y'}, y_0)$. Weiter erfülle $\mathcal{S}_{Y'}$ in $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T_{Y'})$ die Voraussetzung aus Satz 4.1.17. Dann existiert der kategorische Quotient für X' bezüglich H in der Kategorie der separierten k-Räume.*

Beweis. Nach Satz 4.1.17 existiert zu Y' die universelle Separierung $\pi_{\mathcal{S}_{Y'}}\colon Y' \to Y_\Delta$, wobei $\Delta := \mathbf{k} - \mathbf{Quot}(\mathcal{S}_{Y'})$. Somit folgt die Behauptung aus Lemma 4.5.4. □

Beispiel 4.5.11. Wir betrachten die Varietät X mit $\mathbb{C}^*$-Wirkung aus Beispiel 3.7.17. Der Fächer Σ_X hat genau zwei maximale Kegel $\sigma_1 := \operatorname{cone}(e_1, e_2)$ und $\sigma_2 := \operatorname{cone}(e_3, e_4)$. Wir betrachten das zu $\mathbb{C}^*$ gehörige Untergitter $L_{\mathbb{C}^*}$, den Morphismus $P\colon \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^4/L_{\mathbb{C}^*} \cong \mathbb{Z}^3$ und $P(\sigma_1) = \operatorname{cone}(e_1, e_2) =: \tau_1$ sowie $P(\sigma_2) = \operatorname{cone}(e_1 + e_2, e_3) =: \tau_2$. Weiter setzen wir $S := (\tau_1, \tau_2)$. Nach [3, Proposition 5.1] ist $\pi_1\colon X \to Y_S$ der kategorische Quotient in der Kategorie der Prävarietäten. Weiter erfüllt S die Voraussetung von Lemma 4.3.12. Somit ist $\tau := |\text{k-hull}(\tau_1, \tau_2)|$ mit dem Morphismus $\pi_{(\tau_1,\tau_2)}\colon Y_S \to Y_\tau$ die universelle Separierung. Nach Lemma 4.5.4 ist der Morphismus $\pi := \pi_2 \circ \pi_1\colon X \to Y_\tau$ damit der kategorische Quotient in der Kategorie der separierten k-Räume.

Satz 4.5.12. *Es seien (X', T, x_0) eine torische H-Varietät und $\pi\colon X' \to Y'$ ein guter Präquotient für die H-Wirkung mit $\dim(Y') = 3$. Dann ist Y' eine torische Prävarietät $(Y', T_{Y'}, y_0)$. Weiter erfülle $\mathcal{S}_{Y'}$ in $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T_{Y'})$ die Voraussetzung aus Satz 4.4.12. Dann existiert der kategorische Quotient für X' bezüglich H in der Kategorie der separierten k-Räume.*

Beweis. Nach Satz 4.4.12 existiert zu Y' die universelle Separierung $\pi_{\mathcal{S}_{Y'}}\colon Y' \to Y_\Delta$, wobei $\Delta := \mathbf{k} - \mathbf{Quot}(\mathcal{S}_{Y'})$. Somit folgt die Behauptung aus Lemma 4.5.4. □

Satz 4.5.13. *Es seien (X', T, x_0) eine torische H-Varietät und $\pi\colon X' \to Y'$ ein guter Präquotient für die H-Wirkung mit $\dim(Y') = 3$. Dann ist Y' eine torische*

Prävarietät $(Y', T_{Y'}, y_0)$. Weiter erfülle $\mathcal{S}_{Y'}$ in $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T_{Y'})$ die Voraussetzung aus Theorem 4.4.15. Dann existiert der kategorische Quotient für X' bezüglich H in der Kategorie der separierten k-Räume.

Beweis. Nach Theorem 4.4.15 existiert zu Y' die universelle Separierung $\pi_{\mathcal{S}_{Y'}}: Y' \to Y_\Delta$, wobei $\Delta := \mathbf{k} - \mathbf{Quot}(\mathcal{S}_{Y'})$. Somit folgt die Behauptung aus Lemma 4.5.4. $\square$

Lemma 4.5.14. *Es seien (X', T, x_0) eine torische H-Varietät und $\pi: X' \to Y$ ein kategorischer Quotienten bezüglich H in der Kategorie der separierten k-Räume, wobei Y ein echter k-Raum ist. Weiter sei Y' eine Varietät mit $Y \sqsubseteq Y'$. Dann exisitiert kein kategorischer Quotient bezüglich H in der Kategorie der Varietäten.*

Beweis. Angenommen, es existiert ein kategorischer Quotient $\widetilde{\pi}: X' \to \widetilde{Y}$, wobei $\widetilde{Y}$ eine Varietät ist. Die Morphismen π und $\widetilde{\pi}$ sind H-invariant. Somit existieren Morphismen $\widetilde{\varphi}: \widetilde{Y} \to Y'$ und $\varphi: Y \to \widetilde{Y}$ mit $\pi = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\pi}$ und $\widetilde{\pi} = \varphi \circ \pi$. Da π und $\widetilde{\pi}$ surjektiv sind, erhalten wir $\widetilde{\varphi}(\widetilde{Y}) = Y$ und $\varphi(Y) = \widetilde{Y}$. Aus der Eindeutigkeit von φ und $\widetilde{\varphi}$ folgt $Y \cong \widetilde{Y}$, Widerspruch. $\square$

Definition 4.5.15. Es seien (X', T, x_0) eine torische H-Varietät mit Komplexität drei und $P: \Lambda(T) \to \Lambda(T)/L_H$ die Restklassenabbildung. Weiter seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ alle maximalen Kegel (bezüglich Inklusion) aus $\Sigma_{X'}$. Wir sagen, dass der Untertorus H *allgemeine Lage* hat, falls $P(\sigma_1)^{(1)} \cup \ldots \cup P(\sigma_s)^{(1)}$ allgemeine Lage haben. Wir sagen, dass der Untertorus H *spitze allgemeine Lage* hat, falls er allgemeine Lage hat und der Kegel $\operatorname{hull}(\bigcup P(\sigma_i)^{(1)})$ spitz ist.

Erinnerung 4.5.16. Es sei (X', T, x_0) eine torische H-Varietät. Wir sagen H *operiert abgeschlossen*, falls alle H-Bahnen abgeschlossen in X' sind.

Satz 4.5.17. *Es sei (X', T, x_0) eine torische H-Prävarietät mit Komplexität kleiner gleich zwei. Dann existiert ein kategorischer Quotient in der Kategorie der separierten k-Räume.*

Beweis. Wir können annehmen, dass die Komplexität gleich zwei ist. Nach [3, Theorem 4.1] existiert zu (X', T, x_0) ein Morphismus von Varietäten $\pi: X' \to Y'$, welcher ein kategorischer Quotient ist. Aus dem Beweis von [3, Theorem 4.1] folgt, dass $\pi: X' \to Y'$ schwach eigentlich und surjektiv ist. Somit erhalten wir die Behauptung aus Lemma 4.2.19. $\square$

Theorem 4.5.18. *Es sei (X', T, x_0) eine torische H-Varietät mit Komplexität drei. Weiter operiere der Untertorus H abgeschlossen auf X' und habe spitze allgemeine Lage. Dann existiert der kategorische Quotient $\pi: X' \to Y$ in der Kategorie der separierten k-Räume.*

Beweis. Nach [17, Corollary 3.3] existiert zu (X, T_X, x_0) ein geometrischer Präquotient $\widehat{\pi}: X' \to \widetilde{Y}'$. Da X Komplexität drei hat und $\widehat{\pi}$ ein geometrischer Quotient ist, gilt $\dim(\widetilde{Y}') = 3$. Nach Lemma 4.5.9 ist $(\widetilde{Y}', T/H, \widehat{\pi}(x_0))$ eine torische Prävarietät und wir haben eine torischen Morphismus $(\widehat{\pi}, \widetilde{\pi}): (X, T_X, x_0) \to (\widetilde{Y}', T/H, \widehat{\pi}(x_0))$. Da $\widehat{\pi}$ surjektiv ist, existiert zu jedem $\delta' \in \mathcal{S}_{\widetilde{Y}'}^{(1)}$ mit $\dim(\delta') = 1$ ein $\tau' \in \Sigma_{X'}$ und ein $\rho' \in P(\tau')^{(1)}$ mit $\rho' = \delta'$. Somit haben alle Kegel aus $\mathcal{S}_{\widetilde{Y}'}$ mit Dimension eins allgemeine Lage. Damit existiert nach Thorem 4.4.15 eine universelle Separierung

$\pi'\colon \widetilde{Y}' \to Y$. Lemma 4.5.4 liefert, dass $\pi := \pi' \circ \widehat{\pi}\colon X' \to Y$ der kategorische Quotient in der Kategorie der separierten k-Räume ist. □

Beispiel 4.5.19. Wir betrachten die torische Varietät $X' := \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^2 \cup (\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{C}^2$ mit dem Torus $T := (\mathbb{C}^*)^4$ und Basispunkt $x_0 := (1, \ldots, 1)$. Weiter betrachten wir folgende $\mathbb{C}^*$-Wirkung auf X':

$$h * x \quad := \quad (h^{-1}x_1, h^{-1}x_2, hx_3, hx_4).$$

(X', T, x_0) ist eine torische H-Varietät. Der offene Unterraum (X', T, x_0) ist sogar eine torische quasiaffine $\mathbb{C}^*$-Varietät. Alle $\mathbb{C}^*$-Bahnen von X' sind abgeschlossen. Es gilt $\Lambda_{\mathbb{Q}}(T) = \mathbb{Z}^4$. Der Fächer Σ_X besitzt folgende zwei maximale zweidimensionale Kegel $\sigma_1 := \mathrm{cone}(e'_1, e'_2)$ und $\sigma_2 := \mathrm{cone}(e'_3, e'_4)$, wobei $e'_1, \ldots, e'_4$ die Standardbasisvektoren des $\mathbb{Q}^4$ bezeichnen. Weiter ist die Abbildung $Q\colon \mathbb{Z}^4 \to \Lambda_{\mathbb{Q}}(T)/L_{\mathbb{C}^*} = \mathbb{Z}^3$ durch folgende Matrix gegeben:

$$A \quad := \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt $Q(\sigma_1) = \tau_1 := \mathrm{cone}(e_1, e_2)$ und $Q(\sigma_2) = \tau_2 := \mathrm{cone}(e_3, e_1 + e_2 - e_3)$. Wir haben folgendes Bild:

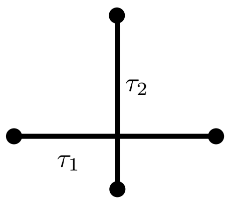

Abbildung 41

Die Kegel aus $\tau_1^{(1)} \cup \tau_2^{(1)}$ haben allgemeine Lage und somit hat $\mathbb{C}^*$ allgemeine Lage. Weiter ist $\mathrm{hull}(\tau_1^{(1)} \cup \tau_2^{(2)})$ spitz. Also hat $\mathbb{C}^*$ spitze allgemeine Lage. Somit erfüllt X' mit der $\mathbb{C}^*$-Wirkung die Voraussetungen von Theorem 4.5.18. Damit besitzt die torische $\mathbb{C}^*$-Varietät einen kategorischen Quotienten in der Kategorie der separierten k-Räume. Wir setzen $\tau := \mathrm{hull}(\tau_1, \tau_2)$ und $Y := Y_\tau$ und sind damit in der Situation von Abbildung 42.

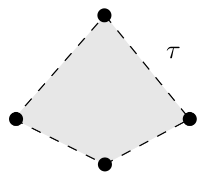

Abbildung 42

Der Morphismus $\pi\colon Y_{(\tau_1,\tau_2)} \to Y_\tau$ ist die universelle Separierung. Der natürliche Morphismus $\pi\colon X' \to Y_\tau$ ist der kategorische Quotient in der Kategorie der separierten k-Räume. Des Weiteren ist der k-Raum Y_τ ein echter quasiaffiner k-Raum (siehe Abbildung 42). Somit besitzt nach Lemma 4.5.14 die quasiaffine torische $\mathbb{C}^*$-Varietät (X', T, x_0) keinen kategorischen Quotienten in der Kategorie der Varietäten.

Literatur

[1] A. A'Campo-Neuen, Weakly proper toric quotients, Colloq. Math. (2005), vol. 102, 155-180.

[2] A. A'Campo-Neuen and J. Hausen, Quotients of toric varieties by the action of a subtorus, Tohoku Math. J. (1997), no. 1, vol. 51, 1-12.

[3] A. A'Campo-Neuen and J. Hausen, Examples and Counterexamples for Existence of Categorical Quotients, Journal of Algebra (2000), no. 1, vol. 231, 6-85.

[4] A. A'Campo-Neuen and J. Hausen, Toric Prevarieties and Subtorus Actions, Geometriae Dedicata (2001), no. 87, 35-64.

[5] I. V. Arzhantsev, D. Celik, J. Hausen, Factorial algebraic group actions and categorical quotients, arXiv:0908.0443 (2009).

[6] I. V. Arzhantsev, U. Derenthal, J. Hausen and A. Laface, Cox Rings, arXiv:1003.4229 (2010).

[7] Białynicki-Birula, Andrzej: Categorical quotients. J. Algebra 239 (2001), no. 1, 35-55.

[8] A. Borel, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, New York, 1991.

[9] D. Celik, A categorical quotient in the category of dense constructible subsets, Colloq. Math. (2009), vol. 116, 147-151.

[10] D. A. Cox, J. B. Little and H. Schenck, Toric Varieties, The January 2010 version, http://www.cs.amherst.edu/ dac/toric.html.

[11] W. Fulton, Introduction to toric varieties, Princeton University Press, Princeton, NJ (1993).

[12] Y. Hu, Combinatorics and quotients of toric varieties, Discrete Comput. Geom. 28(2) (2002), 151–174.

[13] J. E. Humphreyes, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1987.

[14] L. Kaup and B. Kaup, Holomorphic functions of several variables, De Gruyter studies in mathematics, 1983.

[15] M. M. Kapranov, B. Sturmfels, and A. V. Zelevinsky, Quotients of toric varieties, Quotients of toric varieties. Math. Ann. 290 (1991), no. 4, 643–655.

[16] D.Mumford, Geometric invariant theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Band 34, Springer-Verlag Berlin (1965)

[17] H. Sumihiro, Equivariant completion, Volume 14, Number 1 (1974), 1-28.

[18] D. A. Timashev, Classification of G-varieties of complexity 1, Izv. RAN. Ser. Mat. (1997) vol. 61, Number 2, 127-162.

[19] M. Thaddeus, Toric quotients and flips. Topology, geometry and field theory, 193–213, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994.

[20] T. Oda, Convex bodies and algebraic geometry; An introduction to the theory of toric varieties Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 15, Translated from the Japanese, Springer-Verlag Berlin (1988).

SYMBOLVERZEICHNIS

Index

Anhang A. Lebenslauf

13.08.1980	geboren in Ravensburg
1987 – 1991	Besuch der Berger - Höhe - Schule in Wangen im Allgäu, Grundschule
1991 – 1996	Besuch der Anton von Gegenbauer - Schule in Wangen im Allgäu, Hauptschule
1996 – 1997	Besuch der Prassbergschule in Wangen im Allgäu, Werkrealschule
1997 – 2000	Besuch der Kaufmännische Schule in Wangen im Allgäu
2000	3 Jährige Fachhochschulreife
2000 – 2005	Mathematikdiplomstudium mit Nebenfach Informatik an der Universität Konstanz
2002 – 2005	Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Konstanz
2004 – 2005	Diplomarbeit über ,,Konservative Erweiterungen in gewissen O-minimalen Theorien" betreut durch Prof. Dr. Alexander Prestel
November 2005	Diplom in Mathematik an der Universität Konstanz
seit Januar 2006	Wissenschaftlicher Angestellter im Arbeitsbereich Algebra an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Januar 2006	Beginn der Promotion, betreut durch Prof. Dr. Jürgen Hausen

Zu meinen akademischen Lehrern in Mathematik gehörten:

W. Baur, R.Denk, A. Deitmar, U. Friedrichsdorf, J. Hausen, L. Kaup, M. Kohlmann, F. Loose, E. Luik, F. Pedit, A. Prestel, R. Racke, J. Schmid, W. Watzlawek.

Zu meinen akademischen Lehrern in Informatik gehörten:

U. Brandes, R. Hamzaoui, D. Saupe, D. Wagner.