Theorien zum Mathematikunterricht

3

David Kollosche

1. Mathematik und Theorien?

Wer als Außenstehender *Theorie* und *Mathematik* vereint im Titel dieses Kapitels liest, mag sich zunächst wundern und fragen, ob die Mathematik als vermeintlich objektive, exakte und ewige Sprache der Natur nicht das genaue Gegenteil einer womöglich verkopften, hinterfragbaren und vielleicht schon widerlegten Theorie sei. Hinter diesem Spannungsfeld verbergen sich jedoch Vorstellungen zum Mathematik- und Theoriebegriff, die in der Wissenschaft als problematisch und überholt gelten. Versteht man unter Theorie nämlich den Versuch, zu einem Ausschnitt unserer Lebenswelt eine wohlbegründete, widerspruchsfreie und nachprüfbare Erzählung bereitzustellen, und gesteht man sich ein, dass wir als Menschen überhaupt keine Möglichkeit haben, den Grenzen unserer sinnlichen und instrumentalen Wahrnehmung zu entfliehen und festzustellen, ob eine solche Erzählung tatsächlich der Realität entspricht (Maturana & Varela, 2009), so wird klar, dass selbst die Mathematik nicht mehr sein kann als eine Theorie, die womöglich früher oder später ins Wanken gerät oder bereits ins Wanken geraten ist. Auch die Mathematikdidaktik, jene Wissenschaft, die forschungs-, entwicklungs- und unterrichtsleitende Theorien über das Lernen und Lehren von Mathematik erarbeitet, unterliegt einer generellen Unsicherheit ihrer erkenntnisleitenden Erzählungen. Wenn eine Erzählung eine andere ersetzt, kann dies zu Verfeinerungen, Umdeutungen, gar zu tiefgreifenden Veränderungen unserer Perspektiven auf Mathematik und Unterricht führen. Zur Illustration sollen im Folgenden nach einer Diskussion zweier idealtypischer Theorien zur Frage *Was ist Mathematik?* drei Bereiche der Mathematikdidaktik, die theoretische Veränderungen in dieser noch jungen Wissenschaft aufzeigen, ausgeleuchtet werden. Den Anfang machen Theorien zur Frage, wodurch das Lernen und Lehren von Mathematik beeinflusst ist, wie dieser Prozess also am besten zu beschreiben und zu gestalten sei. Darauf folgt eine Diskussion unterschiedlicher Theorien zur Frage, wie zu sinnvollen inhaltlichen Konzepten für den Mathematikunterricht zu gelangen sei. Den Abschluss bildet eine Diskussion zu unterschiedlichen Perspektiven auf die Frage, wozu Mathematikunterricht überhaupt gut sei.

http://dx.doi.org/10.15496/publikation-45541

2. Mathematik zwischen Dogma und Selbstzweifel

Während bereits vor der griechischen Antike im Nahen Osten und zu anderen Zeiten auch auf anderen Erdteilen durchaus komplexe Berechnungen beherrscht und mathematische Probleme bearbeitet wurden, wird der Anfang der Mathematik als Wissenschaft gemeinhin im antiken Griechenland verortet, weil mit dem Beweisen erst dort eine für Wissenschaften übliche Methode der Überprüfung von Wissensbeständen in der Mathematik Einzug hielt (Wußing, 2008). Der Naturphilosoph Anaximander, ein Schüler von Thales von Milet, hatte im 6. Jahrhundert v. Chr. gefordert, dass jede wissenschaftliche Aussage zu begründen sei, und Parmenides hatte ein Jahrhundert später die klare Unterscheidung zwischen wahren und falschen Aussagen sowie die Forderung nach Widerspruchsfreiheit und Entscheidbarkeit formuliert (Kollosche, 2014). Diese Entwicklungen mündeten in der Ausarbeitung von Grundlagen der Logik durch Aristoteles im 4. Jahrhundert v. Chr. und bildeten die philosophische Grundlage, auf der Euklid seine *Elemente* verfasste. Dieses Werk fasste das mathematische Wissen seiner Zeit zusammen, das in der deduktiven Form von Definitionen, Axiomen und Sätzen dargestellt werden konnte, es wurde bis ins 20. Jahrhundert hinein als Grundlage des Mathematikunterrichts genutzt und war nach der Bibel das meistverbreitete Buch in der vormodernen westlichen Welt. Dahinter stand die Idee des sogenannten Platonismus, dass die Mathematik einer immateriellen Ebene der Welt zeitlos innewohne, unserer verwobenen Realität sozusagen als Strickmuster zugrunde liege.

Die wissenschaftliche Methodik, erst die begriffliche Bedeutung seiner Gegenstände einzugrenzen, dann darzulegen, welche Eigenschaften dieser Gegenstände schlichtweg angenommen werden, und fortan alles weitere Wissen in Form von Sätzen aus diesen Definitionen und Axiomen in sicheren Schlussfolgerungen abzuleiten, prägt nicht nur die Mathematik bis heute, sondern galt vielen Wissenschaften lange Zeit als sicherste Form der Erkenntnis. So schreibt etwa der Universalphilosoph René Descartes, dem wir das kartesische Koordinatensystem und die Anfänge der analytischen Geometrie verdanken, im 17. Jahrhundert, dass »allein Arithmetik und Geometrie jedes Fehlers der Falschheit oder Ungewißheit bar« seien und »dass die, welche den rechten Weg zur Wahrheit suchen, sich mit keinem Gegenstand beschäftigen dürfen, von dem sie nicht eine den arithmetischen und geometrischen Beweisen gleichwertige Gewißheit zu erlangen imstande sind« (Descartes, 1628/1959, S. 8 f.). Im Taumel des Glaubens an die Allmacht des logischen Denkens geht Gottfried Wilhelm Leibniz (1686/1996) so weit zu hoffen, dass sich eine Formelsprache formulieren ließe, aus der sich alle Wahrheiten der Welt ableiten, ja förmlich berechnen ließen. Spinoza (1677/1999) versucht, eine Ethik vorzulegen, deren Grundsätze logisch hergeleitet werden, und der junge Wittgenstein (1922) bemüht sich noch im 20. Jahrhundert, die ganze Philosophie als eine Logik der Sprache aufzubauen. Im Zuge der Grundlagenkrise der Mathematik (Wußing, 2008) wurde der Glaube in die mathematisch-logische Methode jedoch jäh erschüttert, was auf Grund der Vorbildfunktion der Mathematik schwerwiegende Folgen für die Wissenschaft weit über die Mathematik hinaus hatte. Schon am Anfang des 19. Jahrhunderts hatten Bolyai, Lobatschewski und Gauß unabhängig voneinander Ideen zu sogenannten nicht-euklidischen Geometrien vorgelegt, die zwar in sich logisch stimmig sind, in denen aber beispielsweise die Winkelsumme im Dreieck größer oder kleiner als 180° sein konnte oder zu einer gegebenen Geraden und durch einen gegebenen Punkt außerhalb der Gerade nicht genau eine Parallele, sondern keine oder mehrere Parallelen existieren. Entsprechende Geometrien sind heute beispielsweise in der Mikroelektronik sowie in der Luft- und Raumfahrt unverzichtbar geworden, erschütterten seinerzeit aber nachhaltig den Glauben daran, dass die zwei Jahrtausende alte und als ewig gesichert gewähnte Geometrie des Euklid tatsächlich eine Beschreibung der Welt *wie sie ist* sein könne. Stattdessen entstand die Idee, dass jede Geometrie, ob nun die euklidische oder eine nicht-euklidische, lediglich eine Theorie der Beschaffenheit unseres Raumes sei, welche je nach Anwendungssituation ihre Stärken und Schwächen zeige. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts bemerkte David Hilbert, dass die Geometrie Euklids außerdem zahlreiche logische Lücken aufwies. Zwar versuchte Hilbert, diese durch eine neue Grundlegung der Geometrie zu schließen, doch die Erkenntnis, dass die Wissenschaft solch eklatante Lücken zwei Jahrtausende lang übersehen und die Mathematik dennoch als absolut sicher angesehen hatte, ließ Zweifel aufkommen, inwiefern denn anderen logisch aufgebauten Theorien noch vorbehaltslos vertraut werden könne. Hilbert forderte in dem später nach ihm benannten Hilbertprogramm schließlich, dass die Mathematik mit den Mitteln der Logik selbst beweisen müsse, dass ihre Theorien widerspruchsfrei und alle formulierbaren Aussagen beweis- oder widerlegbar seien, doch Kurt Gödel bewies 1931 das Gegenteil: Er konnte zeigen, dass jede mathematische Theorie, welche wenigstens, sozusagen als Minimalforderung, eine Beschreibung der natürlichen Zahlen zulässt, notwendigerweise Widersprüche oder unentscheidbare Aussagen enthält. Die Hoffnung der Mathematiker und Mathematikerinnen, den Glauben an die Unfehlbarkeit ihrer Methodik wiederherzustellen, war endgültig gescheitert, womit schließlich auch die logisch-deduktive Methode, als deren großes Vorbild die Mathematik jahrhundertelang gewürdigt wurde, ihre privilegierte Stellung im Wissenschaftsbetrieb abgeben musste.

Welche Theorie über die Mathematik trat nun aber an die Stelle des Platonismus und des Glaubens an die Omnipotenz der Logik? Da die Grundlagenkrise gezeigt hatte, dass sich die Wahrheit mathematischer Theorien nicht beweisen lässt und dass beispielsweise in der Geometrie mehrere sich gegenseitig widersprechende Theorien gleichberechtigt nebeneinanderstehen, ist die platonische Vorstellung, dass die Mathematik der Welt sozusagen als Programmiersprache einbeschrieben sei und ihre eine und wahre Natur zu beschreiben in der Lage sei, nicht mehr zu halten. In der Tat wird nun fraglich, ob die Welt überhaupt diese eine und wahre Natur hat oder wie in der Geometrie aus verschiedenen Perspektiven ganz unterschiedlich wahrnehm- und beschreibbar ist, also unterschiedliche Theorien zulässt. Was den Glauben an die Allmacht der Logik betrifft, so wird durch die Grundlagenkrise der Mathematik auch die Fehlbarkeit dieser Theorie des Wissenschaftstreibens deutlich. In der Mitte des 20. Jahrhunderts gesellte sich zu dieser Abwendung von Seiten der Frankfurter Schule der Philosophie eine deutliche Kritik an der Anwendung mathematisch-logischer Methoden in anderen Wissenschaften, da dadurch die Komplexität unserer Welt nur in den Grenzen eines antagonistischen Wahr-Falsch-Denkens und des Formalisierbaren wahrgenommen und Sinn auf Berechenbarkeit degradiert werde (Horkheimer & Adorno, 1947). Die Mathematik wird nun von vielen als eine Wissenschaft angesehen, die so gut wie möglich versucht, ein logisch geordnetes Theoriegebäude bereitzustellen. Dazu abstrahiert sie so weit wie nötig von unserer Erfahrungswelt, grenzt ihre Begriffe so weit wie möglich ein, legt ihre Vorannahmen sehr vorsichtig fest und arbeitet ansonsten nur mit Aussagen, die auf möglichst zuverlässig geprüftem Wege aus bereits Bekanntem hergeleitet wurden. Betont wird dabei, dass all diese Tätigkeiten menschlich-soziale sind, Mathematik also als gemeinschaftliches Projekt, bei dem sich alle Beteiligten immer wieder aufs Neue über ihre Annahmen, ihren Zuständigkeitsbereich und ihre Methodik verständigen, *konstruiert* wird (Davis & Hersh, 1985; Heintz, 2000). An Stelle eines Glaubens an die universelle Anwendbarkeit der Mathematik treten damit auch kritische Fragen dahingehend, wo eine Anwendung von Mathematik überhaupt gerechtfertigt und sinnvoll erscheint. Dieser Blick auf mathematische Tätigkeiten – im Gegensatz zur Fokussierung auf fertige mathematische Produkte – hat auch das Denken über den Mathematikunterricht verändert, nämlich weg vom Aufnehmen mathematischen Wissens hin zur Entfaltung allgemeiner mathematischer Fähigkeiten (Freudenthal, 1973). Wie Ullmann (2008) jedoch feststellt, sind platonische Vorstellungen zur Mathematik mitsamt ihren Problemen in Wissenschaft, Schule und Öffentlichkeit durchaus noch verbreitet. Die obige Diskussion hat also noch nicht alle relevanten gesellschaftlichen Bereiche erreicht, was man durchaus als taktische Entwicklung begreifen kann angesichts dessen, dass manches Privileg auf dem Gedanken beruht, dass die Mathematik eben doch im platonischen Sinne »gesichert, wahr, rational, objektiv und universell gültig« sei (ebd., S. 11).

3. Theorien zum Lehren und Lernen von Mathematik

Die ersten Wissenschaftler, die an Pädagogischen Hochschulen und Universitäten in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts als Mathematikdidaktiker und -didaktikerinnen angestellt wurden, waren Lehrer und Lehrerinnen sowie promovierte Mathematikerinnen und Mathematiker. Es verwundert daher nicht, dass die Anfänge der Mathematikdidaktik stark durch mathematische und pädagogisch-didaktische Theorien geprägt sind. Außerdem wurden Anregungen aus der Psychologie aufgegriffen, insbesondere aus der stark an der Mathematik orientierten Entwicklungs- und Lernpsychologie (Kilpatrick, 1992). In Wittmanns *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (1974/1981), dem frühsten Einführungswerk in die Mathematikdidaktik, finden sich ausschließlich Ausführungen zu pädagogisch-didaktischen und psychologischen Fragestellungen, beispielsweise auf 23 der 193 Seiten zur Lern- und Entwicklungstheorie Piagets. Doch die Wissenschaften, auf die die ersten Mathematikdidaktiker und -didaktikerinnen ihre Arbeit stützen, stellten nicht nur den Rahmen dafür zur Verfügung, welche Fragen innerhalb der Mathematikdidaktik überhaupt gestellt wurden, sie beeinflussten auch, wie sie beantwortet wurden. So handelt es sich bei der ersten empirischen Studie innerhalb der Mathematikdidaktik um eine Untersuchung mit dem Ziel des Aufstellens einer Theorie der Stufen, auf der sich das geometrische Denken im Lernenden entwickelt (van Hiele, 1957). Diesem Denken liegt die Annahme zugrunde, dass die Entwicklung des mathematischen Denkens im Lernenden (im platonischen Sinne) vorherbestimmte Stufen durchlaufe, sodass der Entwicklungsstand einer Schülerin oder eines Schülers an diesen Stufen messbar und Defizite entsprechend diagnostizierbar seien. Lernen wurde verstanden als individuelle Anpassung von Vorstellungen, wenn diese im Einsatz Konflikte hervorrufen. Wie in der Pädagogik üblich, wurden bildungstheoretische und didaktische Theorien aus der Philosophie hergeleitet, während Untersuchungen an Schülerinnen und Schülern, wie in der Psychologie üblich, in Laborsituationen mit einzelnen Lernenden vorgenommen wurden und oft noch heute vorgenommen werden.

Während sich der Blick der Mathematikdidaktiker und -didaktikerinnen auf verschiedene Bezugswissenschaften ausweitete, wurde man sich zunehmen den Beschränkungen der Pädagogik und Psychologie bewusst und begann allmählich, alternative Theorien für den Mathematikunterricht zu erschließen und anzupassen. Seit den 80er Jahren des 20. Jahrhunderts sind hier vor allem Anleihen aus der Soziologie zu nennen, welche so umfangreich sind, dass Lerman (2000) gar von einem *Social Turn*, also einem Paradigmenwechsel, innerhalb der Mathematikdidaktik spricht. Längst ist die Mathematikdidaktik nicht nur diejenige Fachdidaktik mit den vermutlich reichhaltigsten theoretischen Bezügen zu anderen Fachdisziplinen (Kilpatrick, 1992), sie widmet sich auch explizit der Frage, wie unterschiedliche Theorien überhaupt zum Zwecke der Untersuchung des Mathematikunterrichts genutzt und zusammengeführt werden können (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014).

Ein illustratives Beispiel für den Paradigmenwechsel von psychologischen zu soziologischen Theorien mit Bezug zum elementaren Mathematikunterricht liefert folgendes auf Piaget (1964) zurückgehendes Experiment: Vor einem Kind werden zwei Reihen von Objekten (bspw. Holzwürfeln) ausgelegt, wobei die eine Reihe weniger Objekte als die andere Reihe beinhaltet, dafür aber breiter als die andere Reihe ausgelegt ist. Auf die Frage, in welcher Reihe mehr Objekte lägen, antworten Kinder mit etwa 4½ Jahren nun regelmäßig, dass dies die breiter ausgelegte Reihe sei. Piaget, der mit solchen Laborexperimenten herausfinden wollte, was Kinder auf welcher Entwicklungsstufe beherrschen, folgerte daraus, dass die Begriffe *mehr* und *weniger* für Kinder dieses Alters noch nicht verständlich seien. Das Experiment wird mit dieser Schlussfolgerung auch in Wittmanns *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (1974/1981) wiedergegeben. Die Erfahrung zeigt jedoch, dass entsprechend ausgelegte Reihen von Gummibärchen in Kombination mit der Frage, welche Reihe das Kind nehmen und essen möchte, durchaus dazu führen, dass das Kind die Reihe wählt, in der der Anzahl nach mehr Gummibärchen liegen. Valerie Walkerdine (1988) fand durch die Beobachtung von alltäglichen Unterhaltungen zwischen Kindern und Eltern heraus, dass die Begriffe *mehr* und *weniger* zuerst gar nicht kardinal verstanden werden. *Mehr Kartoffelbrei auf dem Teller* heißt zunächst, dass der Ausdehnung nach mehr Kartoffelbrei zu sehen ist als anderswo. Diese Vorstellung, die übrigens nicht auf das Zählenkönnen angewiesen ist und früh erlernt werden kann, führt recht treffend zu dem Urteil, dass in der breiter ausgelegten Reihe mehr zu sehen sei. Erst wenn *mehr* und *weniger* im Sinne von Anzahlen verstanden werden, liegt in der breiter ausgelegten Reihe nicht *mehr*. Es handelt sich also strenggenommen um zwei unterschiedliche mehr-Begriffe, nämlich einen wahrnehmungs- und ausdehnungsorientierten und einen anzahlorientierten. Während Piagets Frage, wo denn nun *mehr* liege, auf das letztere Verständnis abzielt, ruft das Kind das erstere Verständnis auf und liefert eine für Piaget verblüffende Antwort – ein Missverständnis, das Piaget zu falschen wissenschaftlichen Interpretationen führt.

Walkerdine (1988) argumentiert nun, dass diese falsche Interpretation nicht ein beiläufiger Betriebsunfall in Piagets Forschung sei, sondern dass seine Prämisse, dass sich die Entwicklung des Kindes entlang einheitlicher Stufen bewege, zu falschen Schlussfolgerungen verleite. Abgesehen davon lade ein solcher Blick auf Lernen und Entwicklung dazu ein, Kinder nach Stufen zu klassifizieren und als defizitär zu brandmarken, wenn sie die Fähigkeiten der jeweiligen Stufe noch nicht zeigen können. Walkerdines Studien, die bezeichnenderweise nicht in Form von Laborexperimenten durchgeführt wurden, sondern durch soziologisch inspirierte Beobachtungen alltäglicher Kommunikationssituationen zwischen Eltern und Kindern, zeigen, dass die intellektuelle Entwicklung Heranwachsender nicht rein psychologisch vorhergesagt werden kann, sondern sozialen Einflussfaktoren unterliegt, so dass eine von gängigen Stufenmodellen abweichende Entwicklung eher die Norm als den Ausnahmefall darstellt. Entsprechend ist es zu begrüßen, wenn aktuelle Theorien des Lernens und Lehrens von Mathematik verstärkt die Rolle des sozialen Miteinanders beim Lernen von Mathematik in den Blick nehmen (z. B. Ruf & Gallin, 1998).

4. Das Für und Wider der Stoffdidaktik

Theorien beeinflussen jedoch nicht nur, wie unterrichtsrelevante Prozesse wahrgenommen, beschrieben und verstanden werden; sie beeinflussen vielmehr auch, was überhaupt als Forschung anerkannt wird. Ein herausgehobenes Arbeitsfeld der mathematikdidaktischen Forschung war seit ihrer Etablierung die sogenannte Stoffdidaktik, worunter eine Auseinandersetzung mit Lehr- und Lerninhalten des Mathematikunterrichts auf vornehmlich fachmathematischer Basis unter Anwendung von lernpsychologischen und allgemeindidaktischen Theorien mit dem Ziel einer didaktisch begründeten Auswahl, Herleitung und Strukturierung der Inhalte zu verstehen ist. Die Stoffdidaktik soll Lehrerinnen und Lehrern also Orientierungswissen liefern zur Frage, wie ein bestimmter Inhalt sinnvoll zu unterrichten sei. Entsprechende Beiträge wurden in zahlreichen Zeitschriften und Büchern veröffentlicht (z. B. Kirsch, 1987).

Die Stoffdidaktik hat jedoch ein Problem: Sie möchte sinnvolle Lehrgänge auf theoretischer Basis erarbeiten; eine unterrichtspraktische Gegenperspektive fließt höchstens aus dem wissenschaftlich nicht reflektierten Erfahrungsschatz beteiligter Lehrerinnen und Lehrer ein. Zudem wird auch ihr theoretisches Vorgehen nie methodologisch erörtert, sondern besteht aus einer breiten Sammlung unterschiedlicher Methoden, deren Nutzen und Grenzen unklar sind. Während in der Mathematikdidaktik nach und nach immer weitere empirische Methoden für die Untersuchung des Lehrens und Lernens von Mathematik erschlossen werden, fällt die Stoffdidaktik zunehmend in Ungnade bis hin zu einer Situation, in der stoffdidaktische Arbeiten in mathematikdidaktischen Forschungszeitschriften nicht mehr veröffentlicht werden. Anhänger der Stoffdidaktik halten diese Entwicklung für bedrohlich: Die Mathematikerinnen und Mathematiker beschäftigen sich nicht mit den Inhalten der Schulmathematik – wer solle diese also durchdenken, wenn nicht die Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker? Jahnke (2010) schreibt »Vom mählichen Verschwinden des Fachs aus der Mathematikdidaktik« und andere Kollegen sehen sich gezwungen, einer Forschungszeitschrift eine Sonderausgabe zum Thema *Mathematik in der Mathematikdidaktik* abzutrotzen (Lambert & Wittmann, 2015).

Ein Ausweg aus der Krise bietet der Vorschlag Wittmanns (1992), die Mathematikdidaktik als *Design Science* zu verstehen, deren Aufgabe darin bestehe, auf theoretischer Grundlage sinnvolle Lehrgänge im Fach Mathematik zu entwickeln, diese aber dann im Unterricht zu überprüfen und gegebenenfalls anzupassen. Diesen Weg geht die Fachdidaktische Entwicklungsforschung (Prediger & Link, 2012), welche mehrere Erprobungsläufe vorsieht und auch offen dafür ist, ihre theoretischen Grundlagen auf der Basis der Erprobung weiterzuentwickeln. Aus diesem Ansatz sind mittlerweile zahlreiche Forschungsprojekte, Erkenntnisse und Veröffentlichungen hervorgegangen.

Man kann also davon sprechen, dass Theorien dazu, wie mathematikdidaktische Forschung zu betrieben sei, oder genauer, auf welcher Grundlage eine didaktisch sinnvolle Behandlung mathematischer Inhalte konzipiert werden kann, lebendig diskutiert werden und durchaus konkurrieren. Ein grundsätzliches Problem ist durch die Zuwendung zur Fachdidaktischen Entwicklungsforschung jedoch noch nicht gelöst, nämlich die Frage, welche wissenschaftliche Berechtigung Überlegungen zum Stoff haben, die gerade nicht den Weg der empirischen Erprobung gehen. In der Tat ist nicht einzusehen, warum neue Einsichten beispielsweise hinsichtlich fachlicher Herleitungen gewisser Inhalte oder bezüglich schulpraktischer Problemaufgaben keinen Ort der Veröffentlichung haben sollten, solange ihr Nutzen nicht zeit- und ressourcenaufwändig empirisch überprüft ist. Dazu scheint es der Stoffdidaktik derzeit aber gerade an einer Theorie zu mangeln, in welcher Funktion, mit welchen Methoden, mit welchem Nutzen, welchen Grenzen und welchen Gefahren sie zum Verständnis unterrichtlicher Lehr-Lern-Prozesse beitragen könne. Die nächsten Jahre könnten also auf recht fundamentaler Ebene noch interessante Ideen zur Wissenschaftstheorie der Mathematikdidaktik hervorbringen.

5. Wozu Mathematikunterricht?

Ein letztes Beispiel zur Rolle von Theorie in der Mathematikdidaktik dreht sich um die Frage, wozu es überhaupt Mathematikunterricht geben solle. In Zeiten, in denen der Mathematikunterricht an den Schulen curricular fest verankert ist und mit Hilfe der Mathematik entwickelte Produkte unseren Alltag bestimmen, mag diese Frage überflüssig erscheinen. Die Antwort auf sie ist jedoch keineswegs verzichtbar, ist sie doch orientierungsstiftend für die Auswahl von Unterrichtsinhalten, für die Art und Weise, wie Schülerinnen und Schüler diesen Inhalten begegnen sollen und schließlich auch für die Kriterien, an denen die Bewertung von Schülerleistungen vorgenommen werden.
Antwortversuche auf die Frage, wozu Mathematik unterrichtet werden solle, gibt es bereits seit einigen Jahrzehnten. Einflussreich waren in den letzten drei Jahrzehnten vor allem der Aufsatz »Mathematikunterricht und Allgemeinbildung« von Winter (1995) sowie die Habilitationsschrift zu *Allgemeinbildung und Mathematik* von Heymann (1996). Beide Autoren sehen die Aufgabe der Schule in der Allgemeinbildung der Heranwachsenden, welche diese einerseits in die bestehende Kultur einführen, ihnen aber andererseits eine selbstbestimmte Lebensführung ermöglichen soll. Für sie sollte Mathematik unter anderem unterrichtet werden, um aufs alltägliche Leben vorbereitet zu sein, um unsere Kultur zu verstehen, um die Probleme unserer Welt aus mathematischer Sicht betrachten zu können und um Mathematik als Verstärker des Denkens zu nutzen. Ihre Vorschläge wurden in einigen deutschen Bundesländern in die Lehrpläne übernommen.
Die vorgelegten Theorien, wozu Mathematik unterrichtet werden solle, sind jedoch in den letzten Jahren in die Diskussion geraten. Einerseits wird diese Kritik gespeist durch eine kritische Gegenüberstellung der Ziele mit der Unterrichtswirklichkeit: Zu oft bleibt die Mathematik für die Schülerinnen und Schüler unverstanden und unbrauchbar, zu oft werden Schülerinnen und Schüler gegenüber der Mathematik gerade nicht emanzipiert, sondern treten ihr verängstigt gegenüber, zu sehr gehen an Stelle des mathematischen Verständnisses sozialökonomische Einflussfaktoren in die bewertete Mathematikleistung ein (Kollosche, 2015, 2018). Zuweilen mögen diese scheinbaren Unzulänglichkeiten in der Unterrichtspraxis einem bisher undurchschauten bildungspolitischen System gehorchen, so dass der plumpe Vorwurf, dass sich die Bildungsideale schlichtweg noch nicht im Unterricht umgesetzt hätten, dies aber den Idealen nicht anzulasten sei, keine zufriedenstellende Erklärung liefert. Stattdessen steht die mathematischen Bildungstheorie auf ähnliche Weise wie die Stoffdidaktik vor der Aufgabe, ihre theoretisch hergeleiteten Ideen bezüglich ihrer Umsetzbarkeit in der Praxis zu erproben oder zumindest ihre Arbeitsweise kritisch zu hinterfragen und anzupassen.

Andererseits sind die vorgelegten Bildungstheorien durch den Siegeszug von Bildungsstandards und Kompetenzen in die Diskussion geraten. Während im bildungstheoretischen Diskurs weitgehender Konsens dahingehend besteht, dass Bildungsstandards und Kompetenzen aus unterschiedlichen Gründen zu wenig sind, um eine Theorie mathematischer Bildung zu konstituieren, verdrängen derartige Konzepte doch zunehmend bildungstheoretisch orientierte Antworten auf die Frage, wozu Mathematik unterrichtet werden solle, so dass Vohns (2018) bereits fragt, ob »mathematische Bildung am Ausgang ihrer Epoche« stehe. In diesem Forschungsfeld zeigt sich sehr gut, wie politisch die Frage nach der theoretischen Ausrichtung von Forschung und Entwicklung sein kann: Während konservative Kräfte mathematische Bildung im Sinne einer ordentlichen Erziehung und gründlichen Fachausbildung wiederherstellen und progressive Kräfte mathematische Bildung emanzipativ-kritisch denken möchten, genügt dem neoliberalen Zeitgeist eine Reduktion mathematischer Bildung auf wirtschaftsdienliches Wissen und Können in Form von Kompetenzen. Wie alle Theorien stellen Theorien zur Frage, wozu Mathematikunterricht gut sei, eben nicht den Versuch dar, der platonisch gedachten *einen Wahrheit* möglichst nahe zu kommen, sondern sind Ausdruck der unterschiedlichen Perspektiven verschiedener Interessensgruppen.

6. Mathematik und Theorien!

Die vier hier ausgeführten Beispiele zur Rolle von Theorie in Mathematik und Mathematikdidaktik bieten nur kleine Einblicke in große Auseinandersetzungen zu unterschiedlichen theoretischen Auseinandersetzungen, machen aber hoffentlich deutlich, dass bereits zu sehr grundlegenden und zugänglichen Fragen ganz verschiedene Antwortmodelle bereitstehen, die auch im Bereich des Mathematikunterrichts um die Deutungshoheit in wissenschaftlichen und schulpraktischen Diskursen konkurrieren. Damit sollte auch deutlich werden, dass es keinen Sinn hat, Theorien, die einem vorgesetzt werden, als letztgültige Antworten anzusehen, ganz unabhängig davon, mit welchem Autoritätsanspruch sie vertreten werden. Nur sehr wenige Theorien sind unumstritten, und wie die aufgeführten Beispiele wohl zeigen konnten, sind viele theoretische Auseinandersetzungen wichtig für unsere Art und Weise, über Mathematikunterricht nachzudenken, vor allem aber auch argumentativ zugänglich für Neulinge im Diskurs. In diesem Sinne sollte dieses Kapitel auch als Einladung verstanden werden, sich darüber zu informieren, auszutauschen, ja gar zu streiten, wie Mathematik und guter Mathematikunterricht gedacht werden können.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (Hrsg.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education. Advances in Mathematics Education*. Cham: Springer.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1985). *Erfahrung Mathematik*. Basel: Birkhäuser (Erstveröffentlichung 1981).

Descartes, R. (1959). *Regeln zur Leitung des Geistes*. Hamburg: Meiner (Erstveröffentlichung 1628).

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien: Springer.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim: Beltz.

van Hiele, P. M. (1957). *De problematiek van het inzicht* (Doktorarbeit). Universiteit Utrecht, Niederlande.

Horkheimer, M., & Adorno, T. W. (1947). *Dialektik der Aufklärung: Philosophische Fragmente*. Amsterdam: Querido.

Jahnke, T. (2010). Vom mählichen Verschwinden des Fachs aus der Mathematikdidaktik. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010: Vorträge auf der 44. Tagung für Didaktik der Mathematik* (S. 441–444). Münster: WTM.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 3–38). New York: Macmillan.

Kirsch, A. (1987). *Mathematik wirklich verstehen: Eine Einführung in ihre Grundbegriffe und Denkweisen*. Köln: Aulis/Deubner.

Kollosche, D. (2014). *Gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts: Ein soziologischer Beitrag zum kritischen Verständnis mathematischer Bildung*. Berlin: Springer.

Kollosche, D. (2015). Mathematik und Bildung aus kritischer Sicht. *mathematica didactica, 38*, 111–131.

Kollosche, D. (2018). Social functions of mathematics education: A framework for socio-political studies. *Educational Studies in Mathematics, 98*(3), 287–303.

Lambert, A., & Wittmann, E. C. (2015). Mathematik in der Mathematikdidaktik: Einführung in den Themenschwerpunkt. *mathematica didactica, 38*, 230–231.

Leibniz, G. W. (1996). Zur allgemeinen Charakteristik. In E. Cassirer & A. Buchenau (Hrsg.), *Philosophische Werke in vier Bänden* (Bd. 1, S. 16–23). Hamburg: Meiner (Erstveröffentlichung 1686).

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Hrsg.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (S. 19–44). Westport, CT: Ablex.

Maturana, H. R., & Varela, F. J. (2009). *Der Baum der Erkenntnis: Die biologischen Wurzeln menschlichen Erkennens.* Frankfurt am Main: Fischer (Erstveröffentlichung in 1984).

Piaget, J. (1964). Die Genese der Zahl beim Kind. In J. Piaget (Hrsg.), *Rechenunterricht und Zahlbegriff: Die Entwicklung des kindlichen Zahlbegriffes und ihre Bedeutung für den Rechenunterricht* (S. 50–72). Braunschweig: Westermann.

Prediger, S., & Link, M. (2012). Fachdidaktische Entwicklungsforschung: Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. In H. Bayrhuber, U. Harms, B. Muszynski, B. Ralle, M. Rothgangel, L.-H. Schön, . . . H.-G. Weigand (Hrsg.), *Formate fachdidaktischer Forschung: Empirische Projekte, historische Analysen, theoretische Grundlegungen* (S. 29–46). Münster: Waxmann.

Ruf, U., & Gallin, P. (1998). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik*. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Spinoza, Baruch de. (1999). *Ethik in geometrischer Ordnung dargestellt*. Hamburg: Meiner (Erstveröffentlichung 1677).

Ullmann, P. (2008). *Mathematik, Moderne, Ideologie: Eine kritische Studie zur Legitimität und Praxis der modernen Mathematik*. Konstanz: UVK.

Vohns, A. (2018). Mathematische Bildung am Ausgang ihrer Epoche? Eine nicht bloß rhetorisch gemeinte Frage. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, (105), 8–21.

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality*. London: Routledge.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, (61), 37–46.

Wittgenstein, L. (1922). *Logisch-philosophische Abhandlung*. London: Kegan Paul, Trench, Trubner & Co.

Wittmann, E. C. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig: Vieweg (Erstveröffentlichung 1974).

Wittmann, E. C. (1992). Mathematikdidaktik als „design science“. *Journal für Mathematik-Didaktik, 13*(1), 55–70.

Wußing, H. (2009). *6000 Jahre Mathematik*. Berlin: Springer.