

---

Quantenphysikalische Methoden zur  
Datenübertragung mit  
Elektronen-Materiewellen

---

**Dissertation**

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Eberhard Karls Universität Tübingen  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

VORGELEGT VON

Robin Röpke  
aus Bad Urach

Tübingen

2020

Gedruckt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen  
Fakultät der Eberhard Karls Universität Tübingen.

Tag der mündlichen Qualifikation:	22.03.2021
Stellvertretender Dekan:	Prof. Dr. József Fortágh
1. Berichterstatter:	Dr. Alexander Stibor
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Claus Zimmermann

---

## Zusammenfassung

Sichere Datenübertragung ist essentiell in unserer heutigen Zeit. Informationsaustausch bestimmt unser wirtschaftliches und auch unser persönliches Leben. Noch werden unsere Daten mit mathematischen Verschlüsselungsmethoden geschützt. Mit der stetigen Weiterentwicklung der Quantencomputer ist es jedoch nur noch eine Frage der Zeit bis jede Verschlüsselung dekodiert werden kann. Abhilfe schafft die Quantenkryptografie, in der die Verschlüsselung nicht auf Algorithmen sondern auf quantenmechanischen Grundgesetzen basiert. In den letzten Jahren hat sich die Quanten-Kommunikation durch einzelne bzw. verschränkte Photonen, stetig weiterentwickelt. In dieser Arbeit werden die Grundlagen geschaffen, dieses Gebiet auf Elektronen zu erweitern. Ein Ziel dieser Arbeit ist, einen supraleitenden Feldemitter zu entwickeln. Dazu wurde in Tübingen die Technik etabliert, reproduzierbar Spitzen aus dem Supraleiter Niob herstellen zu können. Die Emission solcher Spitzen wurde bei Raumtemperatur auf ihre Kohärenz untersucht und es wurde eine Halterung gebaut, mit der die Spitzen unterhalb der Sprungtemperatur gekühlt werden können. Im Rahmen eines Aufenthaltes am Lawrence Berkeley National Lab, USA, wurde ein Setup realisiert, womit die Emission einer supraleitenden Spitze untersucht werden kann. Dabei liegt das Augenmerk auf der Energiebreite und der Teilchenstatistik der Emission. Durch Korrelationsmessungen soll festgestellt werden, ob die supraleitende Spitze verschränkte Elektronenpaare emittiert. Das andere Ziel der Arbeit ist, eine neuartige, sichere Quantenmethode zur Datenübertragung zu entwickeln, durch Modulation einer Materiewelle in einem Biprisma-Interferometer. Der Sender ist dabei ein Wienfilter, der den Kontrast des Interferograms moduliert. Die Phasenlage oder die Position des Streifenmusters ändert sich dabei nicht. Der Empfänger ist ein Delay-Line-Detektor, der dynamisch den Kontrast misst. Für dieses Ziel wurde die Elektronik eines bestehenden Experiments erneuert und eine computergesteuerte Sendeeinheit gebaut. Eine Nachricht wurde erfolgreich übertragen und der Aufbau hinsichtlich Geschwindigkeit und Stabilität untersucht. Um die Sicherheit des Übertragungsschemas zu erhöhen, wurde eine Methode entwickelt mit Ähnlichkeiten zum BB84-Protokoll für Photonen. Der Sicherheitsaspekt beruht hierbei auf dem Welle-Teilchen-Dualismus, der Symmetrie der Wienkurve und der Dekohärenz. Abschließend wird die Sicherheit bei verschiedenen Abhörangriffen diskutiert und auch experimentell gezeigt, wie ein Angriff mit einem klassischen Instrument die Übertragung aufgrund von Dekohärenz verhindert.



---

## Abstract

Secure data transmission is essential in the present time. The exchange of information determines not only our economical but also our personal lives. The secure data transfer is based on mathematical encryption but with the continuous development in quantum computing it is a question of time until every encryption can be decoded. Quantum cryptography can remedy this situation where security is based on fundamental quantum principles. In the last few years, quantum communication based on single and entangled photon transfer has improved significantly. The present work establishes fundamental research to extend these methods to electron matterwaves. One goal in this thesis was to develop a superconducting nanotip field emitter. Thereby, a technique was established in Tübingen to reproducibly prepare nanotips from the superconducting material niobium. The coherent emission of the field emitter at room temperature was studied and a tip holder for cooling the tip to the transition temperature was build. As part of a research trip to the Lawrence Berkeley National Lab, USA, a setup to investigate the superconducting properties of a niobium tip was established. The focus was set on the energy width and the emission statistics. The idea is to determine with electron correlation measurements if a superconducting tip emits entangled electrons, in the form of Cooper-Pairs. The other goal in this thesis was to develop a new secure quantum method for data transmission by modulating a matterwave in a biprism interferometer. Thereby, the message was binary encoded and transmitted by a Wien filter. It represents the sender and modulates the contrast of the interferogram without changing the phase or position of the fringes. The receiver is a delay-line-detector for a dynamical contrast analysis. To realize such an instrument, the electrical components of an existing setup were modified and a computer controlled interface was created. It includes the sending and receiving electronics and software. With the established setup it was possible to successfully send a message and the method was examined for transmission speed and stability. To improve the security of the technique, a transmission protocol, similar to the BB84-method for photons was developed. The security aspect is based on the wave-particle-duality, the symmetry of the Wien-curve and decoherence. Furthermore, the security aspect connected to various eavesdropper attacks is discussed in detail. It is also experimentally demonstrated how a tapping approach with a classical instrument would ultimately lead to decoherence and stop the communication.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>5</b>
2.1	Materiewellen . . . . .	5
2.2	Biprisma-Interferometrie . . . . .	6
2.2.1	Biprisma-Interferometrie mit großer Aufspaltung . . . . .	8
2.3	Kohärenz . . . . .	10
2.3.1	Longitudinale Kohärenz . . . . .	10
2.3.2	Transversale Kohärenz . . . . .	11
2.3.3	Reale Quelle . . . . .	11
2.4	Dekohärenz . . . . .	13
2.5	Wienfilter . . . . .	19
2.6	Supraleitung . . . . .	24
2.6.1	Supraleitung allgemein . . . . .	25
2.6.2	Supraleitende Elektronenquelle . . . . .	28
2.6.3	Verschränkte Elektronen . . . . .	31
2.7	Korrelationsfunktion zweiter Ordnung . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Experimenteller Aufbau</b>	<b>38</b>
3.1	Elektroneninterferometer . . . . .	38
3.1.1	Vakuumkammer . . . . .	40
3.1.2	Elektronenquelle . . . . .	41
3.1.3	Biprisma . . . . .	46
3.1.4	Elektrostatische Ablenker . . . . .	47
3.1.5	Elektrostatische Quadrupollinse . . . . .	49
3.1.6	Wienfilter . . . . .	50
3.1.7	Bilddrehspule . . . . .	52
3.1.8	Detektor . . . . .	53

3.2	Elektronik . . . . .	56
3.2.1	Spannungsversorgung . . . . .	56
3.2.2	Hochspannungsmodule . . . . .	58
3.2.3	Stromquellen . . . . .	59
3.2.4	Spannungsquelle für Biprisma . . . . .	60
3.2.5	Ansteuerbare Wienfilterbox . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Simulationen zum Strahlengang</b>	<b>62</b>
4.1	Transfermatrizen . . . . .	62
4.1.1	Driftstrecke . . . . .	63
4.1.2	Ablenker . . . . .	63
4.1.3	Biprisma . . . . .	64
4.1.4	Quadrupollinse . . . . .	65
4.2	COMSOL Multiphysics . . . . .	66
4.2.1	Ablenker . . . . .	66
4.2.2	Quadrupol . . . . .	68
4.2.3	Wienfilter . . . . .	70
4.3	Simulation zur Korrelationsfunktion 2. Ordnung . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Feldemitter aus Niob</b>	<b>75</b>
5.1	Ätzprozess . . . . .	75
5.2	Spitzenpräparation . . . . .	79
5.3	Kohärente Emission . . . . .	80
5.4	Supraleitende Emission . . . . .	82
5.4.1	Halterung . . . . .	82
5.4.2	Temperaturmessung . . . . .	84
5.4.3	Messaufbau . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Datenübertragung</b>	<b>93</b>
6.1	Übertragungsarten . . . . .	93
6.1.1	Amplitudenmodulation . . . . .	94
6.1.2	Frequenzmodulation . . . . .	95
6.1.3	Phasenmodulation . . . . .	96
6.1.4	Kontrastmodulation . . . . .	98
6.2	Datenübertragung durch Kontrastmodulation . . . . .	100
6.2.1	Ansteuerung des Wienfilters . . . . .	100
6.2.2	Auslesen der Daten . . . . .	102

---

6.2.3	Übertragungsgeschwindigkeit . . . . .	104
6.2.4	Langzeitstabilität . . . . .	106
6.2.5	Datenübertragung . . . . .	107
6.3	Sicherheitsaspekte . . . . .	110
6.3.1	Sicherheit gegen passive Angriffe . . . . .	110
6.3.2	Sicherheit gegen aktive Angriffe . . . . .	112
6.3.3	Kritische Betrachtung des Sicherheitsbegriffs . . . . .	117
<b>7</b>	<b>Diskussion und Ausblick</b>	<b>119</b>
<b>A</b>	<b>Publikationsliste</b>	<b>137</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Unsere Gesellschaft hat sich rasend schnell in eine Informationsgesellschaft entwickelt. Informationen bestimmen unser tägliches Leben, unsere Wirtschaft, unser soziales Leben und alle Bereiche sind davon abhängig, dass Daten sicher übertragen werden. Während in den Anfängen immer im Vordergrund stand, die Übertragungstrecke und die Übertragungsqualität zu steigern, wird heutzutage der Fokus darauf gelegt, die Übertragungssicherheit zu verbessern. Seit der Entdeckung der elektromagnetischen Wellen durch Heinrich Hertz [1], welcher damit die Theorie von James Clerk Maxwell [2] bestätigen konnte, entwickelte sich die Übertragungstechnik stetig weiter. So entwickelten Ferdinand Braun und Guglielmo Marconi die drahtlose Telegrafie immer weiter, wofür sie 1909 mit dem Nobelpreis in Physik ausgezeichnet wurden. Bereits 1906 gelang es Reginald Fessenden durch Amplitudenmodulation eines Funksignales die erste Sprach- und Musiknachricht zu senden, was den Beginn des Radiozeitalters einleitete. Durch John Renshaw Carson wurde 1922 ein weiterer Meilenstein in der Theorie der Datenübertragung gelegt [3], indem er mathematisch die Frequenzmodulation beschrieb und Überlegungen zur Bandbreite machte. Erst 1939 wurde die Frequenzmodulation von Edwin Howard Armstrong technisch umgesetzt. Damit war eine stabile Bild und Tonübertragung möglich. Die Technik der drahtlosen Übertragung wurde immer weiter entwickelt und in kurzer Zeit war eine globale, drahtlose Kommunikation möglich. Durch die Entwicklung des Masers durch Schawlow und Townes [4] und des Lasers [5] wurde eine neue Epoche in der Datenübertragung eingeleitet. Die Grundlagen zur glasfasergestützten Datenübertragung wurden bereits 1967 von Manfred Börner [6] gelegt und patentiert. Unsere heutige Datenübertragung funktioniert nach diesem dargelegten Prinzip. Damit lassen sich große Datenmengen über Kontinente hinweg übermitteln. Schon seit Beginn der Nachrichtenübertragung war es Ziel, dass bestimmte Nachrichten nicht für Jeder-

---

mann lesbar waren. Für klassische Nachrichtenübertragungsmethoden, in denen zum Beispiel elektromagnetische Wellen moduliert werden, wird folgender Ansatz verwendet. Viele moderne Verschlüsselungsmechanismen nutzen als Grundlage, dass sich zwar zwei große Primzahlen schnell finden und multiplizieren lassen, es aber keinen effektiven Algorithmus gibt, um große Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegen zu können. Selbst mit überwältigender Computerkapazität würde es mehrere Jahre dauern eine Nachricht zu entschlüsseln. Jedoch konnte Shor 1999 [7] zeigen, dass ein Quantencomputer diese Aufgabe in endlicher Zeit lösen kann. Im Jahr 2019 konnte von Arute et. al. bereits gezeigt werden [8], dass es spezielle Probleme gibt, die ein Quantencomputer sehr viel schneller lösen kann, als es ein klassischer Computer kann. Damit wird der Datenverkehr durch die stetige Weiterentwicklung von Quantencomputer und der Entwicklung zukünftiger, leistungsstarker Quantencomputer potentiell angreifbar. Die Arbeitsweise eines solchen Computers basiert nicht wie bei einem klassischen Computer auf dem Umschalten von binären Zuständen, den Bits "0" und "1", sondern auf der Grundlage der Quantenmechanik. Es sind dabei nicht nur zwei Zustände, "0" und "1", möglich, sondern auch Überlagerungen der Zustände. Um also eine quantensichere Datenübertragung zu gewährleisten, darf der Sicherheitsaspekt nicht mehr klassisch gesehen werden, sondern ebenfalls quantenmechanisch, wie es Gisin et al [9] untersuchten. Für Photonen gibt es zwei Möglichkeiten, dies zu tun. Zum einen über verschränkte Photonen, wie es Ekert 1991 theoretisch zeigt [10] und Jennewein 2000 praktisch gezeigt hat [11], oder über Einzelphotonen-Übertragung, wie es Bennett und Brassard beschreiben [12]. Durch den Welle-Teilchen-Dualismus der Quantenmechanik, wie er von Louis de Broglie 1924 postuliert wurde [13], wurden sehr viele quantenmechanischen Effekte nicht nur mit Photonen, sondern auch mit massereichen Teilchen gezeigt, wie zum Beispiel die Interferenz mit Elektronen [14], [15] und [16], mit Neutronen [17] oder mit schweren Molekülen wie Fullerene oder Proteine [18]. Die Quantenoptik der letzten Jahrzehnte hat gezeigt, dass beinahe jedes bekannte klassische Wellenphänomen ein Gegenstück mit Materiewellen hat. Jedoch wurde eine Materiewelle bisher noch nie als Trägerwelle für eine Datenübertragung benutzt wurde. Auch ein Gegenstück zur parametrischen Fluoreszenz, und somit die Erzeugung verschränkter Elektronenpaare, war bisher nicht möglich.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit den zwei oben genannten Punkten. Zum einen soll eine supraleitende Feldemitterkathode untersucht werden und die theoretischen Vorhersagen zur Emission von Cooper-Paaren gezeigt werden. Damit wäre es möglich, wie bei der parametrischen Fluoreszenz, verschränkte Elektronen zu erzeugen. Zum

anderen soll durch ein Grundlagenexperiment gezeigt werden, dass Elektronen-Materiewellen in einem Biprismainterferometer moduliert werden können, um ein Signal zu übertragen.

In einem ersten Schritt werden in Kapitel 2 dieser Dissertation die theoretischen Grundlagen der Biprisma-Interferometrie geschildert. Die Begriffe der Kohärenz und Dekohärenz werden behandelt und die Grundlagen der Supraleitung werden besprochen. Im Zuge dessen wird auf die aktuelle Literatur zur supraleitenden Feldemission eingegangen und diese näher betrachtet und eine Messmethode über eine Korrelationsanalyse zweiter Ordnung vorgestellt, um den Grad der Verschränktheit der Elektronen messen zu können.

Im dritten Kapitel wird das Elektroneninterferometer für die Modulation der Materiewelle mit allen Komponenten eingegangen. Die dafür von mir neu entwickelte und gebaute Elektronik wird näher erklärt und beschrieben.

Im vierten Kapitel werden durch Simulationen mittels Transfermatrizen und COMSOL Multiphysics elektronenoptische Komponenten untersucht, als Grundlage zur Beschreibung von Strahlengängen. Mit dieser Methode kann die Strahlaufspaltung zur Materiewellenmodulation berechnet werden. Des Weiteren wird der Wienfilter in Comsol näher untersucht und anhand von Simulationen in Matlab wird eine mögliche Auswertemethode vorgestellt, um verschränkte Elektronen zu erkennen.

In Kapitel 5 wird eine Technik zur Feldemitterherstellung aus Niob vorgestellt und der Spitzenpräparationsprozess näher erläutert. Die Niobemitter werden auf ihre Kohärenzfähigkeit bei Raumtemperatur untersucht. Dazu wird die Spitze in ein Biprisma-Interferometer eingebracht und ein Interferogramm gemessen. Um die supraleitenden Eigenschaften solcher Emitter zu untersuchen, wurde ein Halter konstruiert und getestet mit dem der Emitter in den supraleitenden Zustand gebracht werden kann. In Kooperation und im Rahmen eines halbjährigen Auslandsaufenthalts im Lawrence Berkeley National Lab (LBNL), Berkeley, USA, wird ein Experiment zur Untersuchung einer supraleitenden Emission aus einer Niobspitze aufgebaut. Damit soll der Grundstein zu neuen Quantenexperimenten mit verschränkten Elektronen gelegt werden. Dazu wurde ein Detektor mit hoher Zeit- und Ortsauflösung eingerichtet und getestet, mit dem Ziel verschränkte Elektronenpaare messen zu können. Ein Kryostat in Refrigeratorbauweise wird benutzt, um den Emitter zu kühlen. Außerdem wurde ein Elektronenspektrometer zur Energiebreitenmessung der supraleitenden Emission in den Vakuumaufbau integriert und in Betrieb genommen. Es wird auf Schwierigkeiten mit dem Aufbau eingegangen und

---

Lösungsansätze gegeben.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird in Kapitel 6 eine neue Methode präsentiert, wie ein Biprisma-Interferometer zur Datenübertragung genutzt werden kann. Es wird auf unterschiedliche Modulationsarten eingegangen. Die quantenmechanische Modulation durch einen Wienfilter wird im Folgenden genauer erklärt. Es wird der Detektions- bzw. Empfangsprozess beschrieben und die Übertragungsmethode wird hinsichtlich Geschwindigkeit und Langzeitstabilität untersucht. Mit den gewonnenen Parametern wird eine Nachricht übertragen. Die Sicherheit der Quantenmodulation mittels Wienfilter wird anschließend diskutiert und ein neues sicheres Übertragungsschema wird vorgestellt. Der Sicherheitsaspekt wird kritisch beleuchtet.

# Kapitel 2

## Theorie

Im Folgenden soll auf die theoretischen Grundlagen und Aspekte des in dieser Arbeit vorbereiteten und aufgebauten Quanteninformationsexperiments eingegangen werden. Ein Augenmerk liegt auf der Datenübertragung einer Materiewelle durch Kontrastmodulation mit einem Wienfilter. Da der Kontrast des Elektroneninterferenzmusters ein Resultat der Welleneigenschaft des Elektrons ist, wird dazu der Begriff der Materiewelle eingeführt und die Grundlagen der Biprisma-Interferometrie näher beleuchtet. Hierbei wird als wichtige Größe der Kontrast eingeführt. Als technische Grundlage wird ein Interferometeraufbau mit großer Strahlaufspaltung betrachtet und die Aspekte einer kohärenten Elektronenemission. Im Hinblick auf die Übertragungssicherheit wird anschließend kurz auf verschiedene Dekohärenztheorien eingegangen, bevor dann das Wienfilter als Bauteil näher beschrieben und erläutert wird und seine Funktionsweise erklärt wird. Dabei wird Wert auf die Modulationsmöglichkeit des Kontrastes gelegt und die dazu gehörige Wienkurven. Der nächste Teil befasst sich mit Supraleitung im Allgemeinen, mit supraleitenden Feldemittern und der Möglichkeit mit solchen Emittoren verschränkte Elektronen zu generieren, welche für die zukünftige Datenübertragungs- und Quanteninformationsexperimente eine fundamentale Rolle spielen. Um diese verschränkten Elektronen messen zu können, wird eine Datenanalysemethode mittels einer Korrelationsfunktion zweiter Ordnung vorgestellt.

### 2.1 Materiewellen

Um die Interferenzerscheinung von Elektronen in einem Interferometer verstehen zu können, ist es wichtig den Begriff der Materiewelle einzuführen. Man spricht hierbei auch oft von dem Welle-Teilchen-Dualismus. DeBroglie [13] definiert dabei

---

für Teilchen mit einem Impuls  $p$  die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}, \quad (2.1)$$

wobei  $h$  für das Plancksche Wirkungsquantum steht. Für ein Elektron mit einer Ruhemasse  $m_e$  und einer Ladung  $q = q_e = e$  berechnet sich die Geschwindigkeit mit

$$v_{el} = \sqrt{\frac{2q_e U_b}{m_e}}, \quad (2.2)$$

wobei  $U_b$  die Beschleunigungsspannung angibt, die das Elektron durchläuft. Damit ergibt sich für ein Elektron eine deBroglie-Wellenlänge von

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{m_e \cdot v_{el}} = \frac{h}{\sqrt{2q_e m_e U_b}}. \quad (2.3)$$

Dieser Zusammenhang gilt nur dann, wenn die Elektronen noch nicht relativistisch betrachtet werden müssen. Da in diesem Experiment Beschleunigungsspannungen bis maximal 2000 V benutzt werden, ist diese Betrachtung zulässig. Man sieht, mit zunehmender Beschleunigungsspannung nimmt also die Wellenlänge des Elektrons ab. Ein Elektron im freien Raum lässt sich also durch eine Ebene Welle beschreiben

$$\psi(r, t) = \Psi_0 e^{-i(kr - \omega t)} \quad (2.4)$$

wobei  $k = 2\pi/\lambda_{dB}$  die Wellenzahl und  $\omega$  die Frequenz beschreibt.

## 2.2 Biprisma-Interferometrie

Nachdem im vorherigen Abschnitt auf das Elektron als Materiewelle eingegangen wurde, soll hier nun auf die Grundlagen eines Biprisma-Elektroneninterferometers eingegangen werden. In den letzten Jahrzehnten wurde die Biprisma-Interferometrie ständig weiterentwickelt und fand vielerlei Anwendung in der Grundlagenforschung, wie Hasselbach zusammenfasst [19]. Analog zum lichtoptischen Biprisma teilt das elektronenoptische Biprisma die Elektronenwelle in zwei Partialwellen und bringt sie zur Überlagerung. In dem Überlagerungsbereich lassen sich dann Interferenzstreifen beobachten. Das erste Mal wurden Biprisma-Elektroneninterferenzen von Möllensstedt und Düker im Jahr 1956 [15] beobachtet und beschrieben. Das elektrostatische Biprisma ist ein dünner Quarzglasfaden, welcher mit Metall bedampft wurde, um eine Spannung anlegen zu können. Der Faden sitzt zwischen zwei geerdeten Backen. Der im Experiment verwendete Faden wird in Abschnitt 3.1.3 genauer beschrieben.

Mit Hilfe eines solchen Biprismas lässt sich ein kohärenter Elektronenstrahl in zwei kohärente Teilstrahlen aufspalten. Wir erhalten damit

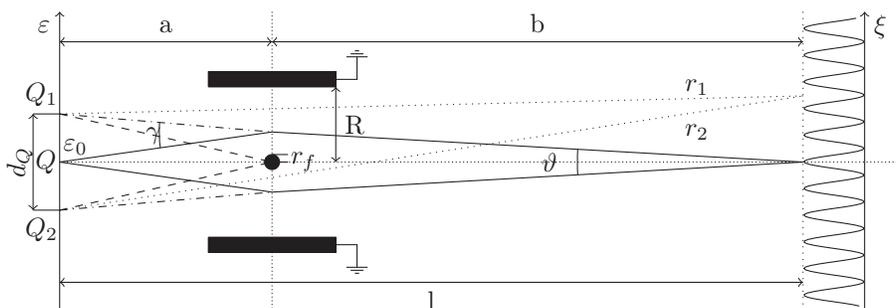
$$\psi_1(r_1, t) = \Psi_0 e^{-i(kr_1 - \omega t)} \quad \text{und} \quad \psi_2(r_2, t) = \Psi_0 e^{-i(kr_2 - \omega t)}. \quad (2.5)$$

Durch die positive Spannung, die am Faden anliegt, werden die Teilwellen um den Umlenkwinkel  $\gamma$  umgelenkt und interferieren in der Interferenzebene  $\xi$ . Wir nehmen hierbei an, dass die Amplituden der Teilwellen jeweils gleich groß sind. Somit ergibt sich der Intensitätsverlauf als

$$\begin{aligned} I(\xi) &= |\psi_1 + \psi_2|^2 \\ &= |\Psi_0|^2 \cdot (2 + e^{ik\Delta r} + e^{-ik\Delta r}). \end{aligned}$$

wobei hier  $\Psi_0$  die Amplitude ist und  $\Delta r = |r_1| - |r_2|$  die Weglängendifferenz der beiden Teilwellen darstellt.

Wir nutzen aus, dass die Strecken  $a$  und  $b$  sehr viel größer sind als die Strecke



**Abbildung 2.1:** Prinzip eines elektrostatischen Biprismafadens. Eine kohärente Elektronenwelle aus der realen Quelle  $Q$  am Ort  $\varepsilon_0$  wird in zwei kohärente Partialwellen aufgespalten und durch den positiv angespannten Faden mit dem Umlenkwinkel  $\gamma$  zusammengelenkt. Dadurch entstehen die virtuellen Quellen  $Q_1$  und  $Q_2$  im Abstand  $d_Q$  in der Quellebene  $\varepsilon$ . Die Partialwellen interferieren unter dem Überlagerungswinkel  $\vartheta$  in der Interferenzebene  $\xi$ .

$d_Q$ . Dadurch lassen sich mit der Kleinwinkelnäherung der Überlagerungswinkel  $\vartheta$  bestimmen als

$$\vartheta = \frac{d_Q}{l} = \frac{d_Q}{a+b} = \frac{2a}{a+b} \gamma \quad \text{mit} \quad \gamma = \gamma_0 \frac{U_f}{U_b} \quad (2.6)$$

Hierbei beschreibt  $U_f$  die Spannung, die am Biprismafaden anliegt und  $U_b$  die Beschleunigungsspannung der Elektronen.  $\gamma_0$  wird definiert als  $\gamma_0 = \frac{\pi R}{\ln \frac{R}{r}}$  [20], [15]. Mit  $r$  wird der Fadenradius bezeichnet und mit  $R$  der Abstand Faden-Erdplatte. Unter der Voraussetzung dass die beiden virtuellen Quellen einen kleinen Abstand

---

im Verhältnis zur Länge des Interferometers haben ( $d_Q, \xi, \xi_0, \varepsilon_0 \ll l$ ) und die reelle Quelle und das Interferenzmuster nahe an der Optischen Achse sind, lassen sich die beiden Wege  $r_1$  und  $r_2$  geometrisch bestimmen als

$$r_1 = (a + b) \cdot \sqrt{1 + \frac{(d_Q + \xi - \xi_0)^2}{(a + b)^2}}$$

$$r_2 = (a + b) \cdot \sqrt{1 + \frac{(\xi - \xi_0)^2}{(a + b)^2}}.$$

Daraus ergibt sich

$$\Delta r = |r_1| - |r_2| = \vartheta \left( \xi - \frac{a}{b} \varepsilon_0 \right) \quad (2.7)$$

Eingesetzt bekommen erhalten wir dann

$$I(\xi) = 2|\Psi_0|^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( e^{i\vartheta k(\xi - \frac{a}{b} \varepsilon_0)} + e^{-i\vartheta k(\xi - \frac{a}{b} \varepsilon_0)} \right) \right]$$

$$= I_0 \left( 1 + \cos \left( \left( \xi - \frac{a}{b} \varepsilon_0 \right) \right) \right) \quad (2.8)$$

wobei wir die maximale Intensität erhalten, wenn  $\xi - \frac{a}{b} \varepsilon_0 = n \cdot 2\pi$  mit ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) ist. Daraus lässt sich der Abstand zwischen zwei Maxima berechnen als

$$s = \frac{2\pi}{\vartheta \cdot k} = \frac{\lambda_{dB}}{\vartheta} \quad \text{mit } k = \frac{2\pi}{\lambda_{dB}}. \quad (2.9)$$

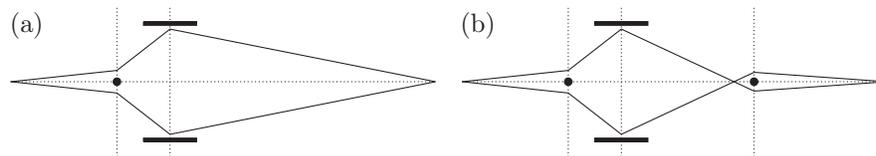
Man sieht also, dass der Streifenabstand  $s$  nur vom Überlagerungswinkel und der deBroglie-Wellenlänge abhängt. Dies ist wichtig, wenn man eine Überlagerung mit großer Strahlaufspaltung betrachten möchte. Da der Überlagerungswinkel sehr groß werden kann, werden dann entsprechend die Streifenabstände dementsprechend klein.

### 2.2.1 Biprisma-Interferometrie mit großer Aufspaltung

Wie man im späteren Abschnitt des Wienfilters (Abschnitt 2.5) sehen wird, ist die Aufspaltung eine maßgebliche Größe. Sie beeinflusst indirekt die Übertragungsgeschwindigkeit bei einer Modulation. Deshalb soll hier kurz auf die Problematik und die Technik bei weit aufgetrennten Teilbündeln eingegangen werden. Bereits 1961 beschrieben Möllenstedt und Bayh ein System mit drei Biprismafäden für eine Strahlaufspaltung von ca.  $60 \mu\text{m}$  [21] zur Messung des magnetischen Aharonov-Bohm-Effekts [22]. Hasselbach und Nicklaus untersuchten 1993 ebenfalls mit einer Drei-Faden-Aufspaltung den Sagnac-Effekt mit Elektronen [23]. Auch zur Messung des elektrischen Aharonov-Bohm-Effekts mit leichten Ionen wurden verschiedene

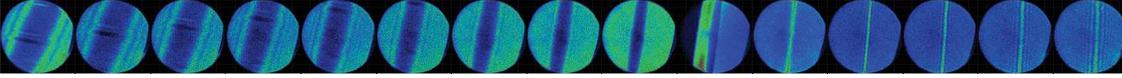
Aufspaltungsmethoden überlegt und simuliert, wie in der Veröffentlichung von Schütz [24] gezeigt. Auch wenn es unterschiedliche Wege gibt den Elektronenstrahl weit aufzuspalten, das Prinzip der Strahlaufspaltung ist im Grunde immer gleich. Mit einem Biprismafaden werden die Elektronenwellen weit aufgespalten, indem eine negative Spannung an den Faden angelegt wird. Mit einem fokussierenden Element werden dann die Teilbündel wieder zur Überlagerung gebracht. Dieses fokussierende Element kann entweder eine Einzellinse, eine Quadrupollinse oder ein zweiter Biprismafaden sein. Diese zwei Elemente reichen für eine große Strahlaufspaltung aus, wie in Abbildung 2.2 (a) dargestellt. Das Problem das sich hierbei ergibt ist, wie bereits oben beschrieben, ein großer Überlagerungswinkel und dementsprechend sehr kleine Streifenabstände (Gleichung 2.9). Mit einer Zwei-Element-Aufspaltung lassen sich Aufspaltungen von maximal 20-30  $\mu\text{m}$  praktikabel realisieren. In Abbildung 2.3 ist dargestellt, wie sich das Bild bei einer Überlagerung ändert. Für größere Aufspaltungen muss ein drittes Element eingebaut werden, ein weiterer Biprismafaden, um den Überlagerungswinkel anzupassen. Dieser Aufbau ist in Abbildung 2.2 (b) dargestellt. Problem hierbei ist die schwierige Justage der drei Elemente auf eine Achse.

Mit einer Drei-Element-Konfiguration lassen sich die Streifenabstände und die



**Abbildung 2.2:** Große Strahlaufspaltung schematisch dargestellt. Dargestellt ist in (a) die Zwei-Element-Konfiguration, bestehend aus Biprisma zur Aufspaltung und eine Quadrupollinse als fokussierendes Element, wie sie zum Beispiel von Sonntag [25] verwendet wurde. In (b) ist die Strahlaufspaltung mit drei Elementen dargestellt. Zusätzlich zu (a) ist ein weiterer Biprismafaden eingebaut. Der hintere Biprismafaden verkleinert den Überlagerungswinkel um die Streifenbreite einzustellen, wie von Möllenstedt gezeigt [21].

Aufspaltung separat einstellen, wie Möllenstedt [21] gezeigt hat. Mit diesem Aufbau wurden bereits Aufspaltungen von bis zu 300  $\mu\text{m}$  realisiert, was 1985 Schmid in seiner Dissertation zeigt [26].



**Abbildung 2.3:** Aufspaltung nach Schema (a) aus Abb. 2.2. Die Biprismaspannung bleibt konstant negativ, nur die Spannung an der Quadrupollinse wird erhöht. Der Fadenschatten wird kleiner, bis zum Überlagerungspunkt. Danach sind im Überlagerungsbereich Interferenzstreifen sichtbar.

## 2.3 Kohärenz

Bereits im Abschnitt 2.2 wurde erwähnt, dass das Biprisma eine Elektronenwelle kohärent aufspaltet. In diesem Abschnitt wird genauer auf den Begriff der Kohärenz eingegangen und die Auswirkungen auf die Interferometrie beschrieben. Außerdem wird der Begriff des Kontrasts einer realen Quelle definiert. Als Kohärenz beschreibt man im Allgemeinen eine feste Phasenbeziehung zwischen zwei Wellen bzw. zwischen zwei Quellen. Zudem haben beide Wellen die gleiche Wellenlänge. Bei Überlagerung von kohärenten Wellen bildet sich ein zeitlich und örtlich stabiles Interferenzmuster aus. Es wird hierbei unterschieden zwischen zeitlicher bzw. longitudinaler Kohärenz und der Winkelkohärenz bzw. transversalen Kohärenz. Der Kontrast der Interferenz ist der Indikator für die Kohärenz. Bei einem Kontrast von 1 hat man volle Kohärenz, dies ist aber in der Realität nicht möglich, wie im Folgenden dargestellt wird.

### 2.3.1 Longitudinale Kohärenz

Jedes Elektron besitzt eine gewisse Energieunschärfe durch die endliche Energiebreite der Emission und hat daher eine gewisse Unschärfe in der Wellenlänge  $\Delta\lambda$ . Durch die gaußförmige Energieverteilung der Emission kann man ein Elektron als ein gaußsches Wellenpaket betrachten. Die longitudinale bzw. die zeitliche Kohärenz beschreibt die Ausdehnung des Wellenpakets entlang der Ausbreitungsrichtung. Die Länge der Ausdehnung wird als Kohärenzlänge  $l_c$  bezeichnet. Die Kohärenzlänge gibt den maximalen Wegunterschied zwischen zwei Partialwellen an, damit gerade noch Interferenz stattfinden kann und somit sichtbar ist und wird durch die endliche Energiebreite der Quelle bestimmt. Damit ist die Kohärenzlänge angegeben als

$$l_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{2E}{\Delta E} \cdot \lambda \quad (2.10)$$

Man sieht, dass die Kohärenzlänge umso größer wird, je kleiner die Energiebreite der Elektronen bzw. der Emission ist. Die endliche Kohärenzlänge sorgt dafür, dass

die Anzahl von Interferenzstreifen begrenzt ist und der Kontrast der Interferenz am Rand abnimmt.

### 2.3.2 Transversale Kohärenz

Die transversale bzw. die Winkelkohärenz wird beeinflusst durch die endliche Größe der Quelle. Da jeder Punkt auf der Quelle ein vollständiges Interferenzmuster erzeugt, sorgt eine endliche, ausgedehnte Quelle dafür, dass sich viele Interferenzmuster in der Interferenzebene überlagern, welche alle einen leichten Phasenschub zueinander haben. Bei einer zu großen Ausdehnung der Quelle ist kein Kontrast mehr erkennbar. Es muss deshalb gelten:

$$\varepsilon_0 \sin \Theta \ll \frac{\lambda}{2} \quad (2.11)$$

wobei  $\varepsilon_0$  die Quellgröße ist,  $\Theta$  der Öffnungswinkel der Emission und  $\lambda$  die Wellenlänge. Je kleiner also die Ausdehnung der Quelle, desto größer ist die Winkelkohärenz. Da bei einem Biprisma-Interferometer nicht der komplette Öffnungswinkel zum Interferenzmuster beiträgt, sondern nur der Bereich um das beleuchtete Biprisma, spielt hier nicht der Öffnungswinkel eine Rolle, sondern der Kohärenzwinkel. Er ist um ein Vielfaches kleiner als der Öffnungswinkel.

### 2.3.3 Reale Quelle

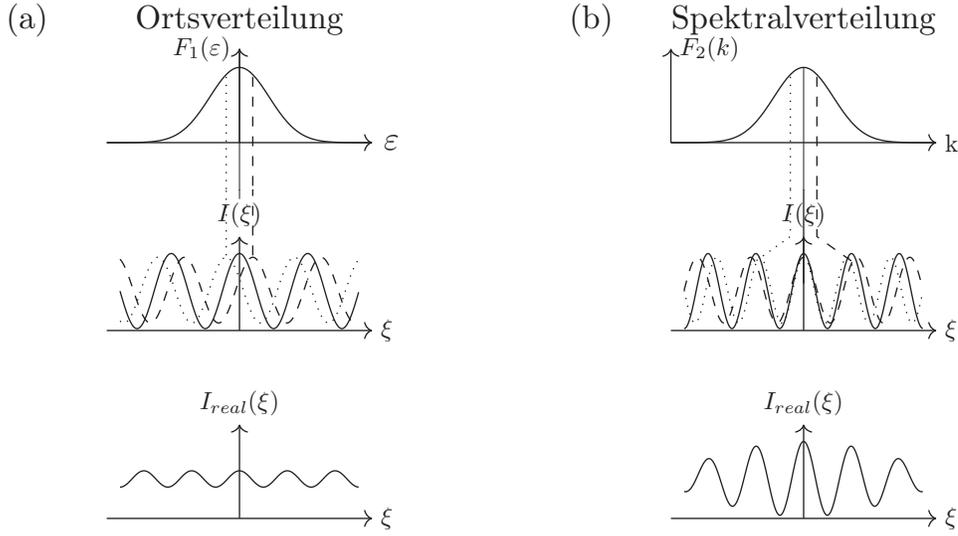
Eine reale Quelle ist keine perfekte Emissionsquelle, so dass verschiedene Einflüsse die Interferenz stören können. Diese Einflüsse sollen nun betrachtet werden und die messbare Größe des Kontrasts wird in diesem Abschnitt eingeführt. Jede monochromatische Quelle hat eine endliche Energiebreite und eine endliche Quellausdehnung. Die Beschreibung folgt hierbei den Ausführungen von Wohland [27] und Maier [20]. Dazu betrachten wir die gaußförmigen Modelfunktionen  $F_1(\varepsilon)$  und  $F_2(k)$ , welche die Orts - bzw. Spektralverteilung beschreiben. Beide Funktionen seien hierbei normiert.

$$F_1(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2(\Delta\varepsilon)^2}} \quad \text{und} \quad F_2(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta k} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2(\Delta k)^2}}. \quad (2.12)$$

Der Intensitätsverlauf wie er in Gleichung 2.8 beschrieben, wird modifiziert durch die Verteilungsfunktionen. Die Gesamtmodifikation lässt sich dann schreiben als

$$F(\varepsilon, k) = F_1(\varepsilon) \cdot F_2(k), \quad (2.13)$$

unter der Annahme, dass jeder Emissionspunkt der Quelle derselben Spektralverteilung unterliegt. Man erhält dann die Intensität aus Gleichung 2.8 modifiziert



**Abbildung 2.4:** Transversale und longitudinale Kohärenz und der Einfluss auf die Interferenz. (a) Eine endliche Ortsverteilung minimiert den Kontrast insgesamt. (b) Eine endliche Energiebreite sorgt für verminderten Kontrast am Rand des Interferenzmusters. Es sind nur endlich viele Interferenzstreifen sichtbar.

mit

$$I_{real}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(\xi) F_1(\varepsilon) F_2(k) d\varepsilon dk \quad (2.14)$$

Der Intensitätsverlauf in der Interferenzebene ist die Fouriertransformation der Quellebene. Da die Intensität in der Interferenzebene bestimmt wird, die Verteilungsfunktionen aber in der Quell bzw. in der Spektralebene liegen, müssen die Verteilungsfunktionen transformiert werden. Mit der Fouriertransformation ergeben sich die Gleichungen zu

$$G_1(\vartheta, k_0, \Delta\varepsilon) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{a}{b}\vartheta k_0 \Delta\varepsilon)^2} \quad \text{und} \quad G_2(\vartheta_0, \xi, \Delta k) = e^{-\frac{1}{2}(\vartheta_0 \xi \Delta k)^2} \quad (2.15)$$

Damit modifiziert sich Gleichung 2.8 zu

$$I(\xi) = I_0 \left[ 1 + G_1(\vartheta, k_0, \Delta\varepsilon) G_2(\vartheta_0, \xi, \Delta k) \cos\left(2\pi \frac{\xi}{s}\right) \right] \quad (2.16)$$

Der Kontrast ist definiert als

$$K := \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (2.17)$$

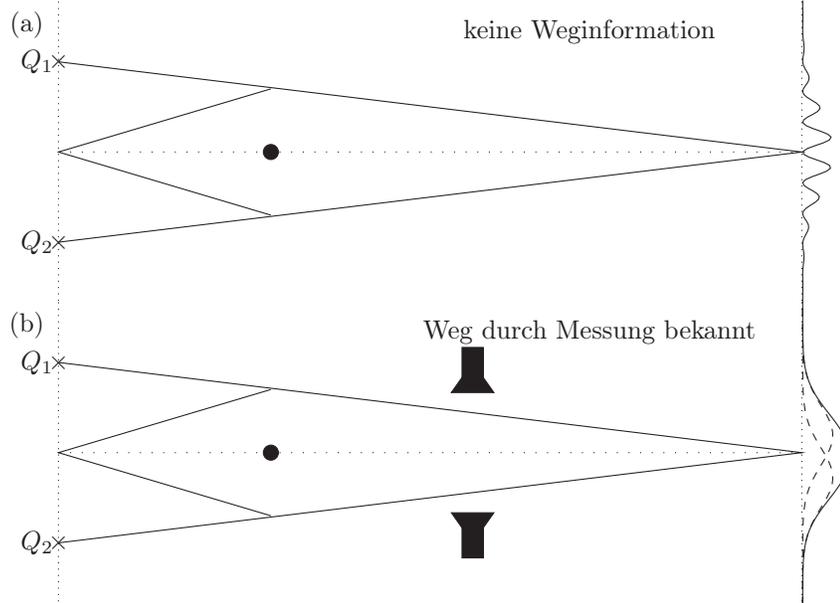
und damit gilt mit Gleichung 2.16

$$K = \frac{(1 + G_1 G_2) - (1 - G_1 G_2)}{(1 + G_1 G_2) + (1 - G_1 G_2)} = G_1 G_2. \quad (2.18)$$

Man sieht also, dass die Effekte der Orts - und Spektralverteilung den Kontrast bestimmen. Für die Interferometrie ist es also unabdingbar, sowohl sehr monochromatisch zu sein, als auch eine kleine Emitterfläche zu haben. Mit kalten Feldemissionskathoden ohne Energiefilter und Begrenzungsaperturen lassen sich Kontraste von bis zu 80 %, also  $K = 0.8$  erreichen.

## 2.4 Dekohärenz

Im Abschnitt 2.3 wurde die Kohärenz näher beleuchtet und im Zuge dessen auch die Auswirkungen auf den Kontrast. Wird durch Eingriff von außen die Kohärenz zerstört und der Kontrast verschwindet, spricht man von Dekohärenz. Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass der Eingriff von außen geschieht, also eine Wechselwirkung der Materiewelle mit der Umgebung stattfindet. Für eine Methode der Datenübertragung mit Materiewellen spielt die Kohärenz und dementsprechend die Dekohärenz eine entscheidende Rolle für die Sicherheit der Methode wie später im Abschnitt 6.3 genauer beschrieben wird. Werden Materiewellen zur Datenübertragung benutzt, die auf dem Kontrast eines Elektroneninterferenzbildes beruht, bedeutet dies aufgrund der Dekohärenz ein hohes Maß an Sicherheit, da jede direkte Wechselwirkung der Umgebung mit der Elektronenwelle das Interferenzmuster und somit auch das Signal zerstört. Seit den Anfängen der Quantenmechanik ist die Diskussion über den Einfluss des Messprozesses auf das Systems allgegenwärtig. Das berühmte Gedankenexperiment von Schrödinger, "Schrödingers Katze", veranschaulichte das Problem, ob makroskopische Objekte in einem quantenmechanischen Überlagerungszustand sein können. Heisenberg [28], Schrödinger [29] [30], Zeh [31] und Zurek [32] beschäftigten sich mit dem Einfluss einer Messung auf den quantenmechanischen Zustand. Erst die Theorie der Dekohärenz konnte auf die Frage eine zufriedenstellende Antwort geben. Von Anglin und Zurek wurde ein Experiment vorgeschlagen, um diese Wechselwirkung zwischen einer aufgespaltenen Elektronenwelle und der Umwelt und diesbezüglich die Dekohärenzstärke zu messen [33]. Auf dieser Grundlage wurde ein Experiment von Sonntag und Hasselbach aufgebaut und durchgeführt [25], jedoch konnte das Experiment die Theorie nicht bestätigen. Die folgenden Ausführungen knüpfen an die Veröffentlichung von Kerker [34] an. In einem Biprisma-Interferometer wird der Elektronenstrahl kohärent aufgespalten in zwei kohärente Teilbündel und anschließend überlagert. Man erzeugt zwei Wellenfunktionen, welche man in der Interferenzebene interferieren lässt. Man kann sagen, dass man kohärente Zustände  $|l\rangle$  und  $|r\rangle$  erzeugt, welche dann in der



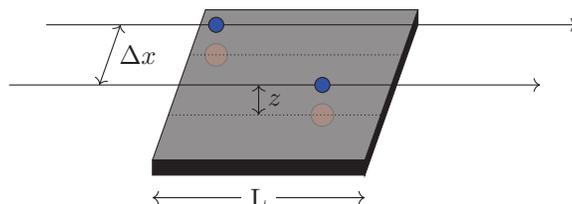
**Abbildung 2.5:** Dargestellt ist ein Biprisma-Interferometer. (a) Durch die Überlagerung der beiden Zustände  $|l\rangle$  und  $|r\rangle$  wird in der Interferenzebene die Auftreffwahrscheinlichkeit am Detektor gemessen. (b) Durch die Messung welchen Weg das Elektron gewählt hat, bricht der Überlagerungszustand zusammen. Am Detektor misst man dann die Verteilungsfunktion der beiden einzelnen Spalte.

Interferenzebene durch Superposition sich als ein Überlagerungszustand darstellen lassen

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|l\rangle + |r\rangle). \quad (2.19)$$

Man weiß also nicht, welchen Weg das Elektron gewählt hat, ob es sich in dem Zustand  $|l\rangle$  oder  $|r\rangle$  befindet. Durch eine Messung wird der Zustand des Gesamtsystems festgelegt, man misst also ob das Elektron den linken oder rechten Weg gewählt hat und in der Detektorebene ist keine Interferenz mehr sichtbar, sondern nur noch die Intensitätsverteilung der beiden Teilstrahlen. Der Überlagerungszustand wurde durch die Messung zerstört. Durch eine Wechselwirkung mit der Umgebung wird dieser Überlagerungszustand ebenfalls zerstört, die Umgebung führt sozusagen einen Messprozess durch und legt dadurch den Endzustand fest, auch wenn das Ergebnis der Messung für den Experimentator nicht auslesbar und verwertbar ist. Es findet keine Interferenz mehr statt, und man spricht in diesem Fall von Dekohärenz. Die Wechselwirkung können zum Beispiel sein: Stöße mit Gasmolekülen [35] oder der Wand des experimentellen Aufbaus, Wechselwirkung mit Licht [36] oder eben auch elektromagnetische Wechselwirkungen [25], wie sie bei Elektronen häufig vorkommen,

da die Coulomb-Wechselwirkung eine starke und langreichweitige Wechselwirkung ist. Dies erklärt auch, warum makroskopische Objekte in keinem beobachtbaren Quantenzustand sind, da sie in ständiger Wechselwirkung mit der Umgebung stehen, sie mit der Umgebung verschränkt sind.

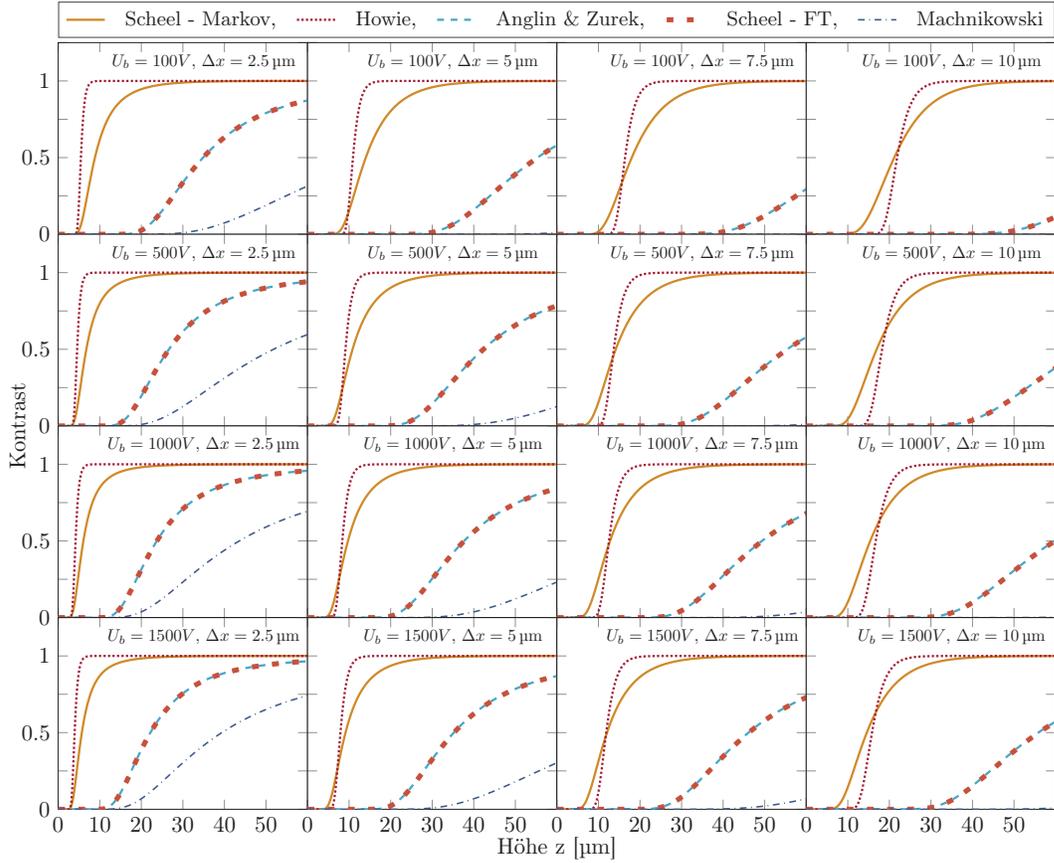


**Abbildung 2.6:** Experiment, wie es vorgeschlagen wurde von Anglin und Zurek [33]. Ein lateral aufgespaltenen Elektronenstrahl fliegt im Abstand  $z$  über die Dekohärenzoberfläche. Die Teilstrahlen haben einen Abstand  $\Delta x$ . Durch Variation der Aufspaltung, der Temperatur, der Elektronenenergie und der Leitfähigkeit der Platte lassen sich an diesem Modell-System unterschiedliche Dekohärenztheorien testen.

1996 wurde von Anglin und Zurek [33][40] ein Experiment vorgeschlagen, welches untersuchen soll, wie die Coulomb-Wechselwirkung von Elektronen mit einer metallischen bzw. Halbleiteroberfläche wechselwirkt und somit die Kohärenz beeinflusst. Die Stärke der Dekohärenz ist von der Aufspaltung der beiden Teilstrahlen und der Flughöhe über der Dekohärenzplatte abhängig. Fliegt ein Elektron über eine leitende Oberfläche, wird durch Influenz eine Spiegelladung induziert, welche dem Elektron folgt. In Folge dessen erfährt die Spiegelladung einen ohmschen Widerstand, welcher Material und Temperaturabhängig ist, da die Spiegelladung an thermischen Phononen streut. Die Stärke der Spiegelladung hängt außerdem von der Überflughöhe  $z$  des Elektrons ab. Um die Stärke der Dekohärenz trafen zum einen Anglin und Zurek 1996 [33],[40] und Machnikowski 2006 [37] eine Aussage. Anglin und Zurek setzten hierbei auf einen klassischen Ansatz. Sie geben eine Abschätzung der Dekohärenzstärke mithilfe der Verlustleistung an. Durch berechnen der Relaxationszeit und der Dekohärenzzeit bekommt man eine Dekohärenzrate von

$$\Gamma[c] = \frac{\pi e^2 k_B T \rho L (\Delta x)^2}{4h^2 v_{el} z^3} \quad \text{mit dem relativen Kontrast } V = e^{-\Gamma[c]}, \quad (2.20)$$

wobei  $\Delta x$  die laterale Aufspaltung des Elektronenstrahls über der Dekohärenzplatte entspricht,  $\rho$  der spezifische Widerstand des Materials,  $L$  die Länge der Dekohärenzoberfläche und  $z$  die Überflughöhe des Strahlelektrons. Machnikowski verfolgt einen komplett quantenmechanischen Zugang [37]. Diese Beschreibung soll quantitativ die



**Abbildung 2.7:** Dekohärenzstärke bei Raumtemperatur über Silizium. Aufgetragen sind die Theorien von Anglin und Zurek [33], Machnikowski [37], Howie [38] und Scheel [39]. Variiert wird die Elektronenenergie  $E_{el}$  und Strahlaufspaltung  $\Delta x$ .

Welche-Weg-Dekohärenz darstellen. Dazu gibt Machnikowski den relativen Kontrast als  $V = e^{-L/\lambda}$  an, wobei

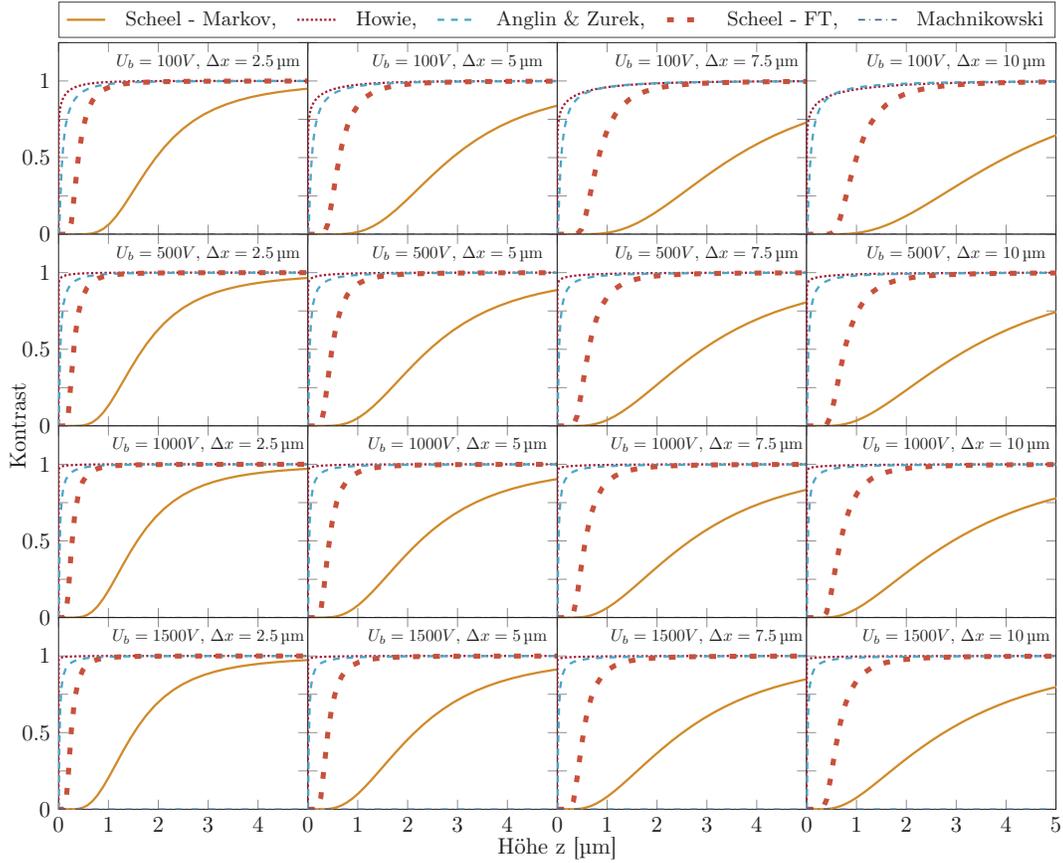
$$\frac{1}{\lambda} = \frac{k_B T}{2\pi^2 \hbar v} \gamma \left( \frac{\Delta x}{z} \right) \mu \left( \frac{m_{eff} e^2}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_i \hbar^2 k_F} \right) \quad (2.21)$$

wobei hier  $m_{eff}$  die effektive Elektronenmasse darstellt und  $k_F$  den Fermi Wellenvektor. Außerdem ist die "geometrische" Funktion angegeben als

$$\gamma(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} \ln \left( 1 + \frac{\xi^2}{4} \frac{u^2}{1+u^2} \right) du \quad (2.22)$$

und die "Materialfunktion" als

$$\mu(\zeta) = \frac{\zeta^2}{4} \int_0^1 \frac{1}{u^3} \left( 1 + \frac{\zeta}{4\pi u^2} \left( 1 + \frac{1-u^2}{2u} \ln \left( \frac{1+u}{1-u} \right) \right) \right)^{-2} du \quad (2.23)$$



**Abbildung 2.8:** Dekohärenzstärke bei Raumtemperatur über Gold. Aufgetragen sind die Theorien von Anglin und Zurek [33], Machnikowski [37], Howie[38] und Scheel [39]. Variiert wird die Elektronenenergie  $E_{el}$  und die Strahlaufspaltung  $\Delta x$

Diese Annahmen konnten durch die Experimente von Sonntag 2007 [25] nicht zufriedenstellend bestätigt werden. Qualitativ entsprachen beide Theorien zwar dem experimentellen Verlauf, jedoch geben beide Theorien die Dekohärenzstärke falsch an, so dass durch numerische Fitfaktoren die Kurven angepasst werden müssen. Im Zuge dessen wurde von Scheel eine neue Dekohärenztheorie erdacht [39], welche die Daten von Sonntag gut widerspiegelt. Sie gibt die experimentellen Daten sowohl quantitativ als auch qualitativ gut wieder. Der theoretische Ansatz nutzt die dielektrischen Eigenschaften der Dekohärenzplatte aus. Als Ergebnis gibt Scheel

und Buhmann als Dekohärenzfunktion an:

$$\begin{aligned}
\Gamma[c] &= \frac{e^2 v^2 \mu_0}{\hbar \pi} \int_0^\infty d\omega \operatorname{Im} \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} [1 - \cos k_{\parallel} \cdot (\rho_1 - \rho_2)] \\
&\quad \times [2\tilde{n}_{th}(\omega) + 1] \frac{i}{2k_z} e^{2ik_z z} \left[ \frac{r_p c^2}{\omega^2} \left( -k_z^2 \frac{k_x^2}{k_{\parallel}^2} \right) + r_s \frac{k_y^2}{k_{\parallel}^2} \right] \\
&\quad \times \left[ \frac{1 - \cos(k_{\parallel} \cdot v + \omega)t}{(k_{\parallel} \cdot v + \omega)^2} + \frac{1 - \cos(k_{\parallel} \cdot v - \omega)t}{(k_{\parallel} \cdot v - \omega)^2} \right] \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Dieses Integral ist nicht analytisch lösbar. Interessant sind deshalb zwei Näherungen der allgemeinen Lösung, zum einen die Markov-Näherung, bei der die Wechselwirkungszeit der Elektronen mit der Oberfläche lang gegenüber anderen Zeitskalen im System ist, wie z.B. die Relaxationszeit. Man erhält dann

$$\begin{aligned}
\Gamma[c] &= t \frac{e^2}{\epsilon_0 \hbar} \iint \frac{k_{\parallel} dk_{\parallel} d\varphi}{(2\pi)^2} [1 - \cos(k_{\parallel} \Delta x \sin(\varphi))] [2\tilde{n}_{th}(k_{\parallel} v |\cos \varphi|)] \frac{e^{-2k_{\parallel} z \gamma(\varphi)}}{2k_{\parallel} \gamma(\varphi)} \\
&\quad \times \operatorname{Im} \left\{ r_p(k_{\parallel}, k_{\parallel} v |\cos \varphi|) - \frac{v^2}{c^2} [r_p(k_{\parallel}, k_{\parallel} v |\cos \varphi|) \cos^2 \varphi - r_s(k_{\parallel}, k_{\parallel} v |\cos \varphi|) \sin^2 \varphi] \right\} \quad (2.25)
\end{aligned}$$

wobei  $t$  die Wechselwirkungszeit der Platte mit dem Elektron beschreibt,  $\tilde{n}_{th}(\omega)$  gibt die mittlere thermische Photonenzahl an, welche sich nach der Bose-Einstein-Verteilung ergibt mit  $\tilde{n}_{th}(\omega) = [e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1]^{-1}$ .  $r_{s,p}(k_{\parallel}, \omega)$  sind die Fresnelschen Reflexionskoeffizienten für s- und p-Wellen. Dieser Ausdruck lässt sich zwar immer noch nicht vollständig analytisch lösen, lässt sich aber numerisch berechnen. Die andere Näherung wird von Scheel und Buhmann als "Finite Temperature Approximation" bezeichnet, also die Näherung bei endlicher, bestimmter Temperatur. Durch diese Annahme lassen sich Näherungen anwenden, so dass das Integral analytisch lösbar wird und man folgende Formel bekommt

$$\Gamma[c] = t \frac{e^2 k_B T r'_p(0)}{2\pi \epsilon_0 \hbar^2} \left[ \frac{1}{2z} - \frac{1}{\sqrt{(2z)^2 + \Delta x^2}} \right]. \quad (2.26)$$

Hierbei ist  $r'_p(0) = 2\epsilon_0/\sigma$ , wobei  $\sigma$  die Leitfähigkeit des Materials beschreibt. Wie bei Anglin und Zurek auch, wird der relative Kontrast angegeben als  $V = e^{-\Gamma[c]}$ . Howie [38] untersucht im Gegensatz dazu Dekohärenzeffekte in Transmissions-elektronenmikroskopen. Seine Annahme beruht auf Anregungen im Material, bei unterschiedlichen Frequenzbereichen. Howie gibt als Dekohärenzstärke

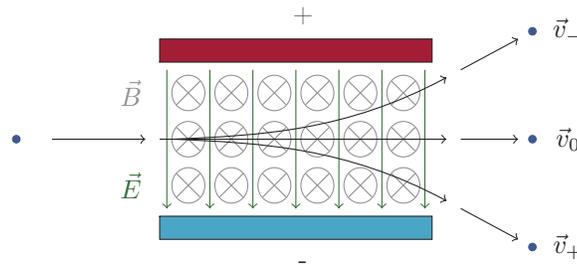
$$P\left(\frac{z}{\alpha \Delta x}\right) = \left[ \frac{e^2 L \omega_m^2}{4\pi^2 \hbar \sigma v^2} \right] \int_{\alpha/\Delta x}^\infty \frac{\exp(-2zq_x)}{q_x} dq_x = \left[ \frac{e^2 L \omega_m^2}{4\pi^2 \hbar \sigma v^2} \right] E_1\left(\frac{2\alpha z}{\Delta x}\right) \quad (2.27)$$

Gemein haben diese vier Ansätze, dass die Dekohärenzstärke jeweils von der Strahlaufspaltung  $\Delta x$ , als auch der Temperatur  $T$  und der Wechselwirkungszeit, also in diesem Fall von der Elektronenenergie  $E_{el}$  abhängt. Die theoretischen Ansätze sind für unterschiedliche Strahlaufspaltungen und Elektronenenergien jeweils für Silizium in Abbildung 2.7 und für Gold in 2.8 dargestellt. Durch Variation der Parameter lassen sich diese Ansätze testen und ausschließen, wie es von Kerker [34] dargestellt ist. Für ein Datenübertragungsexperiment ist die Abschätzung der Dekohärenzstärke entscheidend, da damit ein natürlicher Sicherheitsfaktor der Übertragung durch die Physik gegeben ist, wie es in Abschnitt 6.3 diskutiert wird. Nähert sich etwas dem Elektronenstrahl, wird die Kohärenz und somit die Nachricht vernichtet.

## 2.5 Wienfilter

In diesem Abschnitt soll die grundsätzliche Funktionsweise eines Wienfilters beschrieben werden und im Zuge dessen auf die Einsatzmöglichkeiten in der Interferometrie und als Modulationselement einer Materiewelle.

Das Wiensche Geschwindigkeitsfilter, kurz Wienfilter, besteht aus einem gekreuzten



**Abbildung 2.9:** Wienfilter als Geschwindigkeitsfilter. Im abgeglichenen Zustand lässt er nur eine Geschwindigkeitsklasse ohne Ablenkung passieren.

elektrischen Feld  $\vec{E}$  und magnetischen Feld  $\vec{B}$ , wie er in Abbildung 2.9 dargestellt ist. Er wurde als Energieanalysator von Börsch 1962 [41] auf der Grundlage von Wien [42] entwickelt und eingesetzt. Die Feldlinien stehen hierbei senkrecht zueinander und senkrecht zur optischen Achse bzw. zur Ausbreitungsrichtung der Elektronen. Das elektrische Feld wird durch einen Plattenkondensator erzeugt, wobei die gegenüberliegenden Platten auf gegensätzlicher Spannung liegen, so dass auf der optischen Achse das Potential null ist. Zwei gegenüberliegende Spulen mit Eisenkern erzeugen das Magnetfeld. Fliegt ein Elektron in das Wienfilter, wirken zum einen die

---

elektrostatische Kraft  $F_E$  und zum anderen die Lorentz-Kraft  $F_L$  auf das Elektron,

$$F_E = -e \cdot \vec{E} \quad \text{und} \quad F_L = -e(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.28)$$

Die beiden Felder werden so eingestellt, dass ihre Wirkung gerade gegensätzlich ist. Es gibt nun Kombinationen von Spannung am Wienkondensator (WK) und Strom an den Wienspulen (WS), sodass die Wien-Bedingung

$$F_E = F_L \quad \text{bzw.} \quad e\vec{E} + e(\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (2.29)$$

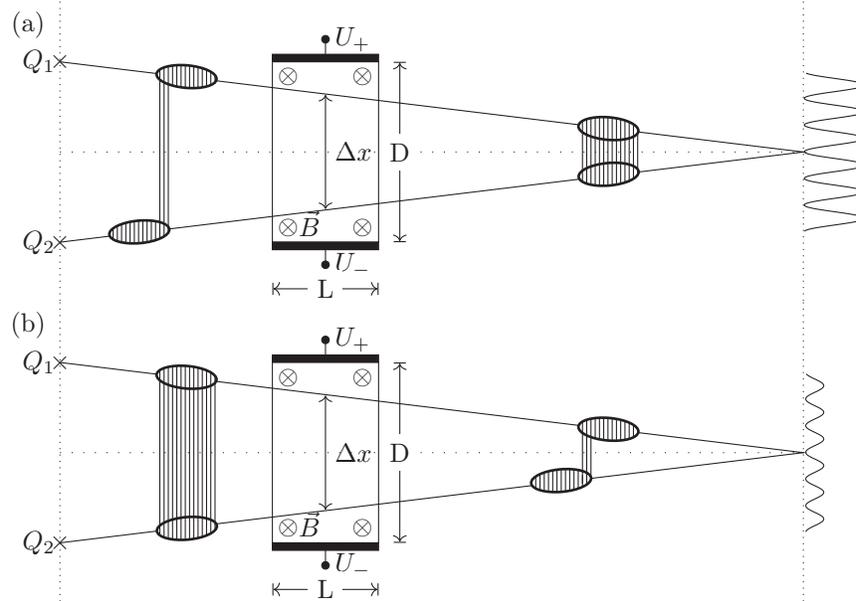
gilt. Man spricht in diesem Fall davon, dass das Wienfilter "abgeglichen" ist. In diesem Modus ist das Wienfilter schon sehr lange als Geschwindigkeitsfilter bekannt. Da die Lorentz-Kraft geschwindigkeitsabhängig ist, gilt die Wien-Bedingung nur für eine Geschwindigkeitsklasse. Teilchen anderer Geschwindigkeiten werden abgelenkt und können z.B. mit einer kleinen Apertur herausgefiltert werden. Durch Optimierung der Elektronenoptik um das Wienfilter herum, hat bereits Börsch 1964 gezeigt, dass sich damit Energieauflösungen im Bereich 17 meV erreichen lassen [43].

In der Interferometrie findet der Wienfilter jedoch anderen Einsatz. Die Strahlerzeugungssysteme in der Interferometrie sind bereits von hoher Monochromasie. Die Energiebreite von kalten Feldelektronenemittern liegt im Bereich von 300 meV. Dadurch kann jedes Elektron durch die Energieunschärfe als ein Wellenpaket endlicher Länge, nämlich der Kohärenzlänge  $l_c$ , beschrieben werden. Bereits 1981 wurde das Wienfilter von Möllenstedt und Wohland eingesetzt um die Kohärenzlänge eines Wellenpakets zu messen [27]. Er dient im Zuge dessen als kontrastmaximierendes Element. Wodurch geht der Kontrast verloren? Jedes elektrostatische Bauteil verursacht eine Verschiebung der Wellenpakete, wie Nicklaus und Hasselbach [44] beschreiben. Dies liegt daran, dass die lateral aufgespaltenen Partialwellen zwar dasselbe elektrische Feld durchfliegen, aber durch die örtliche Differenz  $\Delta x$  ein unterschiedliches Potential erfahren

$$\Delta U_a = 2U_a \frac{\Delta x}{D} \quad (2.30)$$

Wobei  $U_a$  der Betrag der Spannung an den Ablenkplatten bezeichnet und  $D$  den Plattenabstand. Dies führt im Bauteil zu unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten und damit zu einer Verschiebung der Wellenpakete zueinander, wie in Abbildung 2.11 zu sehen. Die Verschiebung der Wellenpakete lässt sich angeben als

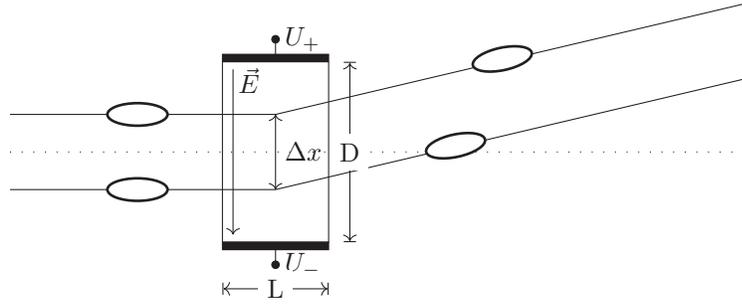
$$\Delta y = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{D} \frac{\Delta x}{U_b} U_a \quad (2.31)$$



**Abbildung 2.10:** Wienfilter als kontrastmaximierendes Element. Dargestellt sind zwei Situationen in denen der Wienfilter im abgeglichene Modus betrieben wird. Es findet keine Ablenkung der einzelnen Partialwellen statt. Jedoch findet eine Verschiebung der Wellenpakete zueinander statt. (a) Der Kontrast wird maximiert. Durch elektronenoptische Elemente werden die Wellenpakete zueinander verschoben, so dass der Kontrast minimal wird. Der Wienfilter gleicht diese Verschiebung aus. (b) Kontrastminimierung durch den Wienfilter. Man kann durch Einstellen des abgeglichene Zustands den Kontrast auch auf einen minimalen Wert einstellen.

wobei  $L$  die Länge der Ablenkplatten beschreibt und  $U_b$  die Beschleunigungsspannung der Elektronen. Allerdings haben beim Verlassen der Bauteile die Teilwellen wieder dieselbe Energie. Da der Elektronenstrahl divergent ist, hat man in jedem Bauteil eine andere Aufspaltung  $\Delta x$ , d.h. selbst wenn man zwei elektrostatische Ablenker direkt hintereinander platziert und den Strahl nur versetzt, indem beide Elemente gerade die entgegengesetzte Ablenkung vollführen, bleibt eine kleine Restverschiebung  $\Delta y$  übrig. Diese Verschiebung gilt für alle elektrostatischen Bauteile, wie Linsen, Ablenker oder Filter.

Auf dem Weg durch das Interferometer sammeln also die Wellenpakete einen Betrag an Verschiebungen auf. Ist die Verschiebung  $\Delta y$  in der Interferenzebene größer als die Kohärenzlänge  $l_c$ , ist keine Interferenz beobachtbar, der Kontrast ist also null. Das Wienfilter, bestehend ebenfalls aus einem elektrostatischen Ablenkelement, gleicht dann die Verschiebung so aus, dass der Überlapp der Partialwellen wieder maximal ist, und somit auch der Kontrast maximal wird, wie in Abbildung 2.10 zu



**Abbildung 2.11:** Ein elektrostatischer Ablenker verschiebt die lateral aufgetrennten Teilwellen beim Durchflug zueinander. Da auf unterschiedlichen Wegen unterschiedlichen Potentiale durchflogen werden entsteht so eine Laufzeitdifferenz. Da beide Teilwellen dasselbe elektrische Feld erfahren, ist die Ablenkung dieselbe. Die Verschiebung entsteht nur durch das unterschiedliche Potential im Abstand  $\Delta x$ .

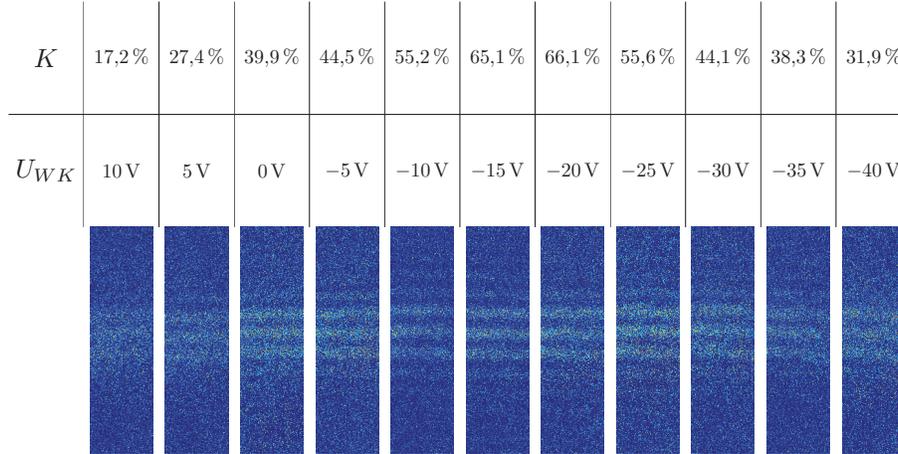
sehen. Damit die Teilchen keine Ablenkung durch den Wienkondensator erfahren, wird die Ablenkung durch einen magnetischen Ablenker kompensiert. Mit diesem Sachverhalt lässt sich dann die Kohärenzlänge und somit auch die Energiebreite einer Elektronenquelle ausmessen wie in [45] dargelegt. Die Kohärenzlänge  $l_c$ , wie sie in Gleichung 2.10 angegeben ist, lässt sich mit Gleichung 2.1 und 2.3 so umschreiben, dass die Kohärenzlänge nur noch von experimentellen Größen abhängt. Wir erhalten damit

$$l_c = \frac{2h}{\sqrt{2m_e q_e}} \frac{\sqrt{U_b}}{\Delta U}, \quad (2.32)$$

wobei hier  $\Delta U$  die Energiebreite der Elektronenemission beschreibt und der einzige unbekannte Faktor in der Gleichung ist. Man verschiebt nun also mit dem Wienfilter die Elektronenwellenpakete so, dass man keinen Kontrast in der Interferenzebene sieht. Anschließend verschiebt man die Wellenpakete so zueinander, dass der Kontrast langsam wieder hergestellt wird, bis er sein Maximum erreicht und anschließend wieder auf null abfällt. Der Kontrastverlauf lässt sich durch eine Gaussfunktion beschreiben. Die Breite<sup>1</sup> der Glockenkurve ist ein Maß der Kohärenzlänge  $l_c$  und lässt sich daraus direkt berechnen.

Betrachtet man also die Punkte auf der Kontrastkurve von minimalem Kontrast zu minimalem Kontrast, so entspricht die Verschiebung durch das Wienfilter eben

<sup>1</sup>In der Literatur herrscht keine Einigkeit, ob die Breite bei 10 %, bei  $1/e$  oder als die Halbwertsbreite angesetzt wird. Dementsprechend kann die Kohärenzlänge unterschiedliche Werte annehmen. Im Folgenden wird die Breite auf 10 % des Maximalwerts gesetzt.



**Abbildung 2.12:** Kontrastverlauf bei unterschiedlich abgeglichenem Wienfilter. Aufgetragen ist die Spannung am Wienkondensator  $U_{WK}$ . Der Strom der Wienspule ist entsprechend eingestellt. Der maximale Kontrast ist bei  $-20\text{ V}$  erreicht. Bei optimalem Abgleich sieht man, dass sich die Phasenlage der Streifen nicht ändert.

genau  $l_c$  und es gilt

$$\Delta y = l_c$$

$$\frac{L}{D} \frac{\Delta x}{U_b} \Delta U_{WF} = \frac{2h}{\sqrt{2m_e q_e}} \frac{\sqrt{U_b}}{\Delta U}, \quad (2.33)$$

wobei  $\Delta U_{WF}$  die breite der Wienkurve angibt. In Abbildung 2.12 sind einzelne Punkte dieser Wienkurve dargestellt. Die Phasenlage des Interferenzmusters bleibt stabil, nur der Kontrast ändert sich. Man sieht, dass wenn die Energiebreite der Emission sehr klein wird, die Kohärenzlänge sehr groß und damit die Wienkurve sehr breit wird, wenn die Aufspaltung  $\Delta x$  gleich bleibt. Auf der anderen Seite kann die Breite der Wienkurve durch die Aufspaltung variieren, indem man die Aufspaltung  $\Delta x$  variiert. In der Gleichung sind nun zwei unbekannte Größen enthalten. Zum einen die Aufspaltung im Wienfilter  $\Delta x$  und zum anderen die Energiebreite  $\Delta U$ . Kennt man also die Energiebreite der Emission lässt sich die Aufspaltung im Wienfilter direkt messen oder eben umgekehrt, kennt man die Aufspaltung im Wienfilter lässt sich die Energiebreite der Emission bestimmen. Die Breite der Wienkurve variiert, bei konstanter Energiebreite, mit der Aufspaltung der Wellenpakete im Wienfilter. In Abschnitt 6 wird gezeigt, wie sich dieser Sachverhalt nutzen lässt, um den Elektronenstrahl zu modulieren, indem man zwischen maximalem und minimalem Kontrast hin und her schaltet. Bemerkenswert ist, wie in Abbildung 2.12 zu sehen, dass sich die Phasenlage und die Position der Maxima nicht ändert.

---

Auch die mittlere Intensität bleibt dieselbe, nur der Kontrast wird moduliert. Damit ist es möglich eine binär kodierte Nachricht zu übertragen.

## 2.6 Supraleitung

Eine Elektronenemission ist charakterisiert durch mehrere Faktoren; dem Emissionsstrom, der Energiebreite, dem Richtstrahlwert und der Emissionsfläche. Die ideale Elektronenquelle hat einen sehr hohen Emissionsstrom, eine sehr geringe Energiebreite, einen hohen Richtstrahlwert und eine verschwindend kleine Emissionsfläche. Reale Elektronenemitter sind immer ein Kompromiss aus allen vier genannten Punkten. Einzelne Punkte lassen sich jeweils korrigieren. Die Energiebreite lässt sich durch Energiefilter und Monochromatoren auf wenige meV senken, jedoch auf Kosten des am Detektor ankommenden Emissionsstroms [46]. Ebenfalls lässt sich die Emissionsfläche durch schmale Aperturen minimieren, jedoch beeinflusst dies ebenfalls die Zählrate am Detektor stark negativ. Als gängige Elektronenquellen werden deshalb kalte Feldemitter eingesetzt. Sie besitzen einen hohen Richtstrahlwert, eine kleine Emissionsfläche und durch den Emissionsprozess bedingt eine schmale Energiebreite von etwa 0,3 eV [47]. In Abschnitt 2.3 gezeigt, dass eine schmale Energiebreite und eine kleine Emissionsfläche relevant für die Kohärenz der Emission sind. Der dadurch hohe Kohärenzgrad einer solchen Emission lässt diese Quelle sowohl in der Elektroneninterferometrie als auch in der Elektronenmikroskopie Verwendung finden. Ziel ist es nun eine Elektronenquelle zu entwickeln, die einer perfekten Emissionsquelle sehr nahe kommt. Ein Kandidat hierfür ist eine supraleitende Feldelektronenquelle. Eine supraleitende Elektronenquelle ist aber nicht nur wegen ihrer Emissionseigenschaft ein interessantes Forschungsobjekt, wie sie von Oshima untersucht wurde [48], sie ist auch interessant für Quanteninformationsexperimente, wie Yuasa [49] zeigt. Im Folgenden werden wir sehen, dass eine supraleitende Spitze eine ideale Elektronenquelle darstellt und eine weitere interessante Eigenschaft mit sich bringt. Da die Theorie nahelegt, dass die Elektronen nicht nur paarweise sondern verschränkt die Spitze verlassen [49], eröffnet dies eine ganz neue Möglichkeit für Quantenexperimente, die zuvor nur mit Photonen möglich waren. Experimente mit paarweisen Photonenstrahlquellen, die auf der parametrischen Fluoreszenz beruhen [50] [51] [52], können dann auch mit Materiewellen durchgeführt werden. Dies eröffnet neue Möglichkeiten wie Quanteninformationsexperimente mit verschränkten Elektronen. Die Möglichkeit eines sicheren Quantenschlüsselaustauschs mit verschränkten Photonen [53] [54] [11], lässt

sich dann auch auf Elektronen-Materiewellen erweitern. Für das bessere Verständnis der Eigenschaften eines supraleitenden Feldemitters wird im Folgenden zuerst auf die allgemeinen Eigenschaften eines Supraleiters eingegangen. Im Anschluss werden dann die Experimente von Oshima et al. zu supraleitenden Emittern [48] [55] und die Theorie von Yuasa et al. [49] dargelegt.

### 2.6.1 Supraleitung allgemein

Als im Jahre 1911 Heike Kamerlingh-Onnes das erste Mal die Supraleitung gemessen hat [56], wurde durch diese Entdeckung ein ganz neues Feld in der Physik aufgestoßen, welches bis heute nichts an seiner Faszination und Spannung verloren hat [57]. Für diese Entdeckung wurde er bereits 1913 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet. Eigenschaften eines Supraleiters sind nicht nur das Verschwinden des elektrischen Widerstands, weshalb zum Beispiel in MRT-Geräten supraleitende Magnetspulen eingesetzt werden, sie zeichnen sich auch durch das ideale diamagnetische Verhalten, oder das Bündeln des Magnetfelds in gequantelten Flussschläuchen aus. Diese Phänomene lassen sich nur erklären, wenn man die Elektronen als einen makroskopischen kohärenten Quantenzustand mit wohldefinierter Phase ansieht. Dieser makroskopische Quantenzustand entsteht durch Elektronen-Paare, welche in einen Zustand kondensieren. Dies wird in der BCS<sup>2</sup>-Theorie ausgeführt und liefert eine zufriedenstellende mikroskopische Erklärung für die Supraleitung in Metallen. Da im Folgenden die Cooper-Paarbildung und damit verbunden das Verschwinden des elektrischen Widerstands unterhalb einer kritischen Temperatur  $T_c$  für die Arbeit ein wichtiges Thema sind, soll hier jetzt auf die BCS-Theorie und die daraus resultierenden Quanteneigenschaften des Supraleiters näher eingegangen werden. Die Ausführungen lehnen sich an das Buch von Buckel und Kleiner [59] an und sollen nur einen Überblick zum besseren Verständnis der Arbeit liefern. Cooper-Paare sind Elektronen, welche paarweise über Phononen attraktiv wechselwirken. Für eine anschauliche Erklärung betrachtet man nur zwei Elektronen in einem Festkörper. Die zwei Elektronen polarisieren das Kristallgitter, indem die positiv geladenen Atomrümpfe von den negativ geladenen Elektronen angezogen werden. Die Elektronen werden durch die Anhäufung der positiven Ladung angezogen, es besteht also eine attraktive Wechselwirkung durch das Kristallgitter. Dieses Beispiel ist zwar anschaulich, aber falsch, da die anderen Elektronen ausgeblendet werden

---

<sup>2</sup>BCS - Aufgrund der Arbeiten von John Bardeen, Leon Neil Cooper und John Robert Schrieffer. 1972 durch den Nobelpreis in Physik geehrt [58]

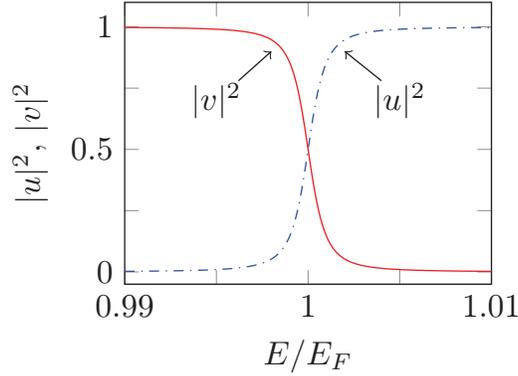
---

und alles als statisch angesehen wird. Da die Elektronen im Festkörper mit hoher Geschwindigkeit unterwegs sind ist die Polarisierung ein dynamischer Prozess, der davon abhängt, wie schnell die Atomrümpfe dem Elektron folgen können. Man sieht aber, dass zumindest auf kurzen Zeitskalen über die Elektron-Phonon-Wechselwirkung eine attraktive Elektron-Elektron-Wechselwirkung stattfindet. Als Elektronen-Paar würde man anschaulich zwei Elektronen verstehen, welche den gleichen Impuls haben, also der Korrelation  $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$  bzw.  $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$  folgen. Doch auch Elektronen mit der Korrelation  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$  bzw.  $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$  sind ein Paar. Cooper konnte zeigen, dass solch ein Paar mit  $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$  einen verschwindenden Gesamtimpuls hat, dies zu einer geringeren Gesamtenergie im System führt [60]. Deshalb werden solche Paare als Cooper-Paare bezeichnet. Die Elektronen des Cooper-Paars besitzen gegensätzlichen Spin, also  $\{\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow\}$ , haben also einen Gesamtspin von null, weshalb das Quasiteilchen bosonische Eigenschaften hat. Cooper-Paare können deshalb alle im selben Grundzustand sein. Die Ortswellenfunktion eines Cooper-Paars ist symmetrisch, während die Spinwellenfunktion eines Paares antisymmetrisch ist. Dieser Sachverhalt soll nun ganz grob mithilfe der BCS-Theorie umrissen werden. Bei  $T = 0$  besetzen freie, ungepaarte Elektronen die niedrigstmöglichen Energiezustände. Dabei ist die Energie gegeben durch

$$\epsilon_k = \frac{\hbar}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2), \quad (2.34)$$

wobei die  $\vec{k}$ -Werte diskret sind. Im einfachsten Fall besetzen die Elektronen im  $\vec{k}$ -Raum alle Zustände innerhalb der Fermi-Kugel. Für die anziehende Wechselwirkung nahe der Fermi-Energie,  $E_f \pm \hbar\omega_c$ , setzt man ein negatives Potential  $-V$ , welches außerhalb des Intervalls verschwindet. Dabei ist  $\omega_c$  die Debye-Frequenz und  $\hbar\omega_c$  beschreibt die Phononen-Energie. Um die Oberfläche der Fermi-Kugel sind die Paar-Zustände in einer Superposition, sie sind gleichzeitig besetzt und unbesetzt, mit den Wahrscheinlichkeitsamplituden  $u_k$  und  $v_k$ . Dabei gilt  $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$ . Die Wellenfunktion für den supraleitenden Grundzustand ist somit eine Superposition aus den Paar-Zustands-Wellenfunktionen. Dieser Ansatz der Wellenfunktion wird in die Schrödinger-Gleichung eingesetzt und man minimiert die Energie in Abhängigkeit von  $u$  und  $v$ , so erhält man den energetisch besten Zustand der mit der angenommenen Wellenfunktion möglich ist. Man erhält dann für  $|u_k|^2$  und  $|v_k|^2$ :

$$|v_k|^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\epsilon_k - E_F}{\sqrt{|\Delta|^2 + (\epsilon_k - E_F)^2}} \right], \text{ und } |u_k|^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\epsilon_k - E_F}{\sqrt{\Delta_0^2 + (\epsilon_k - E_F)^2}} \right] \quad (2.35)$$



**Abbildung 2.13:** Aufgetragen sind die Funktionen  $|u|^2$  und  $|v|^2$ , berechnet nach Gleichung 2.35. Es wird die Besetzungswahrscheinlichkeit angegeben, ob ein Paarzustand besetzt ( $|v_k|^2$ ) oder unbesetzt ( $|u_k|^2$ ). Für die Darstellung ist  $E_F = 1$  eV und  $\Delta_0 = 1$  meV [59].

wobei  $\epsilon_k$  die Energie der Elektronen ohne Wechselwirkung  $V$  beschreibt,  $E_F$  steht für die Fermi-Energie.  $\Delta = -V \sum_k u_k v_k$  beschreibt die Wechselwirkung der Teilchen, welche nur im Intervall  $\pm \hbar \omega_c$  ungleich null ist. Da  $\Delta$  in der Regel komplex ist, lässt es sich schreiben als  $\Delta = \Delta_0 e^{i\varphi}$ . Damit ist  $|\Delta|^2 = \Delta_0^2$ . Die beiden Funktionen sind in Abbildung 2.13 dargestellt. Man sieht, dass  $|u_k|^2 = 1 - |v_k|^2$  ist. Dabei gibt die Funktion  $|v_k|^2$  die Wahrscheinlichkeit an, ob ein Elektronen-Paar im Zustand  $\vec{k}$  zu finden ist. Für  $\epsilon_f \ll E_F$  ist diese Wahrscheinlichkeit nahe eins. Im Gegensatz dazu ist für  $\epsilon_f \gg E_F$  die Wahrscheinlichkeit nahe eins, dass der Zustand unbesetzt ist. Im Intervall  $E_F \pm \Delta_0$  ist die Besetzung nicht mehr trivial, die Wahrscheinlichkeiten weichen stark von eins bzw. null ab. Bei einzelnen Elektronen wäre das nicht beobachtbar. Da  $\Delta$  vom Produkt  $u_k \cdot v_k$  abhängt, sieht man, dass alle Cooper-Paare kollektiv miteinander verbunden sind. Die Größe  $\Delta_0$  wird auch als "Gap-Parameter" bezeichnet. Es lässt sich zeigen, dass für Quasiteilchen - in diesem Fall einzelne, ungepaarte Elektronen inklusive Wechselwirkung- im Intervall  $\pm \Delta_0$  eine Lücke existiert, in der es keine anregbaren Zustände gibt. Für freie Elektronen existieren nahe der Fermi-Energie bereits besetzbare Zustände. Wie bereits in Gleichung 2.34 beschrieben, folgt die Energie der freien Teilchen der Energie-Impuls-Beziehung. Für ungepaarte Elektronen folgt die Energie der Beziehung

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - E_F)^2 + \Delta_0^2} \quad (2.36)$$

und man sieht, dass man jedoch mindestens die Energie  $\Delta_0$  benötigt, um den Zustand  $\vec{k}$  zu besetzen. Der Zustand, der durch die BCS-Theorie beschrieben wur-

---

de, beschreibt eine makroskopische Wellenfunktion. Bisher wurde von  $T = 0$  K ausgegangen, jedoch für endliche Temperaturen  $T > 0$  K spielen thermische Fluktuationen eine Rolle. Dies hat zur Folge, dass Cooper-Paare aufbrechen können. Es entstehen die oben erwähnten Quasiteilchen, welche jetzt fermionische Eigenschaften haben. Die Wahrscheinlichkeit ein solches Teilchen vorzufinden folgt also der Fermi-Verteilung. Solch ein entstandenes Quasiteilchen im Zustand  $\vec{k}$  blockiert den Zustand für das Kondensat der Cooper-Paare. Die Anzahl der Cooper-Paare geht also mit steigender Temperatur zurück und somit auch deren Bindungsenergie.

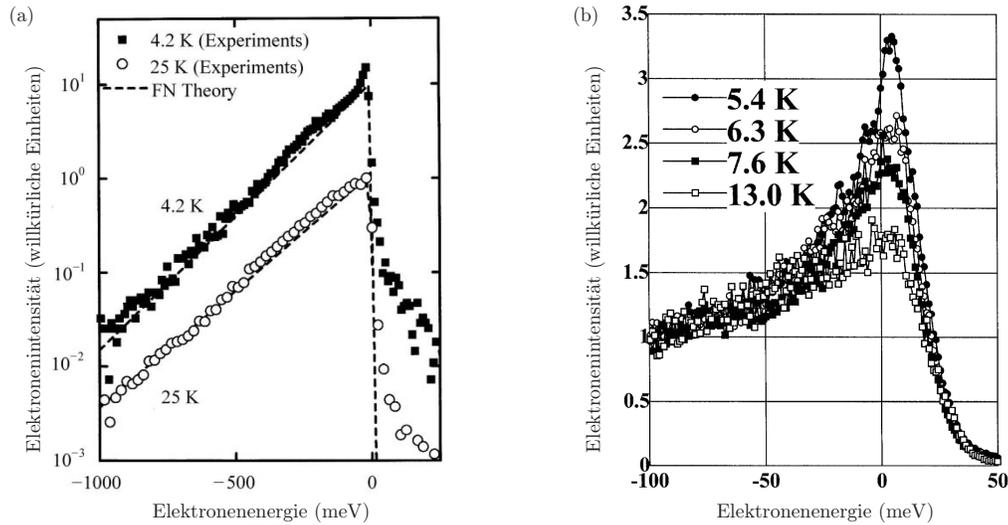
## 2.6.2 Supraleitende Elektronenquelle

Eine supraleitende Feldelektronenquelle hat das Potential die perfekte Elektronenquelle zu sein. Die Idee beruht darauf, dass der Grundzustand in einem Supraleiter ein makroskopischer Quantenzustand ist. Die Kohärenzlänge im Supraleiter kann mehrere 10 nm betragen, wie Oshima beschreibt [48] [61]. Das bedeutet, dass zwei Elektronen, die innerhalb der Kohärenzlänge aus dem Supraleiter tunneln, in Phase sind, also miteinander interferieren können. Dies bildet die Grundlage aller supraleitenden Quanteninterferenzeinheiten [62] (SQUIDs<sup>3</sup>). Außerdem sind die Elektronen monoenergetisch, da ihre Energie durch die Grundzustandsenergie des Supraleiters vorgegeben wird. Bereits 1960 wurde beschrieben wie monochromatische Elektronen von einem Supraleiter in einen Normalleiter tunneln [63]. Während bei normalen Wolfram-Feldemittern die Energiebreite bei 200 bis 300 meV liegt, wird bei einem Supraleiter eine Energiebreite von  $\leq 0,1$  meV erwartet [64]. Deshalb sollten laut Vorhersage Feldelektronen aus einem Supraleiter sehr monochromatisch und kohärent sein. Dies macht supraleitende Feldemitter zu einem Kandidaten für eine sehr kohärente Elektronenquelle mit hoher Intensität. Bereits 1952 untersuchten Gomer und Hulm [65] die Emissionseigenschaften von Tantal im normal- und supraleitenden Zustand. Im Jahre 1961 folgen Klein und Leder [66] mit der Untersuchung der Emission von Niob. Die zu untersuchende Fragestellung war auch hier, einen Unterschied der Emission zu sehen in Abhängigkeit von normalleitenden und supraleitenden Zustand. Es wurde erwartet, dass durch die Besetzung des Grundzustands im supraleitenden Zustand sich sowohl der Emissionsstrom als auch die Energiebreite der Emission sich ändert. Beide Gruppen kamen zu dem Ergebnis, dass sich der Emissionsstrom nicht ändert, entgegen der Vorhersage.

Erst 1999 haben Oshima und Nagaoka [55],[48] ihre Arbeiten und somit die

---

<sup>3</sup>SQUID steht für superconducting quantum interference device

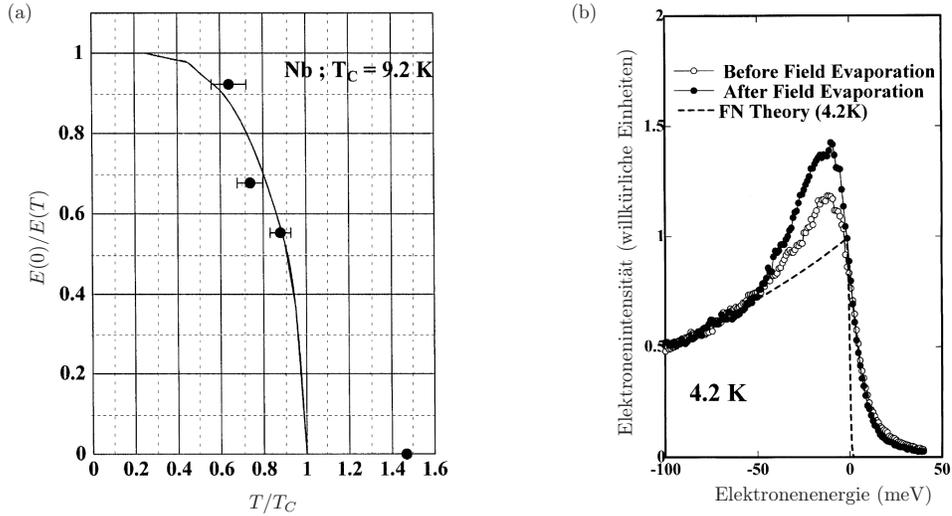


**Abbildung 2.14:** (a) Zu sehen ist das Energiespektrum von Feldelektronen aus einer Niobspitze im normal und supraleitenden Zustand. Deutlich zu erkennen ist, dass die Intensität insgesamt im supraleitenden Bereich zunimmt und eine deutliche extra Erhöhung nahe an der Fermi-Energie  $E_F$  auftritt. (b) Untersuchung des Maximums an der Fermi-Kante in Abhängigkeit der Temperatur. Der Peak wird ausgeprägter je kälter die Spitze gekühlt wird und somit mehr Elektronen im Grundzustand sind. Die Messkurven sind aus der Arbeit von Oshima entnommen [48].

Grundlage für die weiteren Ideen veröffentlicht. Ziel war auch hier die Untersuchung von Feldelektronen aus einer supraleitenden Spitze, ebenfalls aus Niob. Im Gegensatz zu den vorherigen Arbeiten konnte Oshima und Nagaoka eine Änderung der Intensität und Energiebreite beim Übergang in den supraleitenden Zustand messen. Dazu wird ein Nanoemitter aus polykristalliner Niobdraht durch ein Ätzverfahren auf einen Spitzenradius auf  $\approx 100$  nm geätzt. Niob eignet sich für diese Art von Experimenten sehr gut, da es von den reinen Metallen die höchste Sprungtemperatur hat ( $T_c = 9,2$  K) und Metalle sich gut bearbeiten lassen. Die Niobspitze wird mit einem LHe-Kryostat<sup>4</sup> auf 4,2 K gekühlt. Im Vergleich zu den früheren Arbeiten legte die Arbeitsgruppe um Oshima große Anstrengungen in die Verbesserung des Vakuums ( $P \approx 1 \cdot 10^{-13}$  mbar) und eine verbesserte Energieauflösung der Elektronenspektrometer ( $\Delta E = 1$  meV) [67].

Die Gruppe um Oshima beschreibt bei einem Feldelektronenspektrum in Abhängigkeit der Temperatur eine Änderung der Energiebreite und der Emission. Wie in Abbildung 2.14 (a) deutlich zu sehen erscheint nahe der Fermi-Energie  $E_F$  im

<sup>4</sup>LHe steht für Liquid Helium, also verflüssigtes Helium



**Abbildung 2.15:** (a) Aufgetragen ist die Peakhöhe aus Abbildung 2.14(b) gegen die Temperatur. Der Kurvenverlauf wird durch die BCS-Theorie wiedergegeben. Messkurve entnommen aus der Arbeit von Oshima [48]. (b) Intensitätsunterschied bei gesäubertem und nicht gesäubertem Feldemitter. Durch die Ablagerung von Fremdatomen wird die Emissionseigenschaft verändert. Messkurven sind aus der Arbeit von Nagaoka entnommen [55]

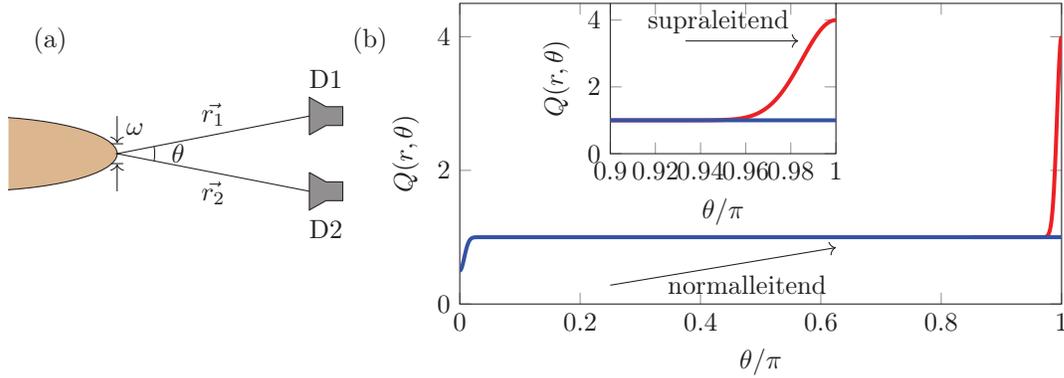
supraleitenden Zustand ein scharfes Maximum. Außerdem ist deutlich zu erkennen, dass die Intensität der Emission insgesamt im supraleitenden Bereich zunimmt. Der scharfe Peak wird in Abbildung 2.14 (b) näher betrachtet. Man sieht, dass das Maximum umso ausgeprägter wird, je kälter die Niobspitze gekühlt wird. Je kälter die Niobspitze ist, desto mehr Elektronen befinden sich im Grundzustand. Die Emission wird also monochromatischer. Durch dieses ausgeprägte Maximum wird die Energiebreite deutlich reduziert. Oshima kommt auf eine Energiebreite von  $\Delta E_{1/2} \approx 25 \text{ meV}$ , was sehr viel breiter ist als die erwartete Energiebreite von weniger als  $0,1 \text{ meV}$ . Allerdings sieht man deutlich in Abbildung 2.15 (b), dass es einen großen Unterschied macht, ob die Spitze zuvor von durch Feldevaporation gereinigt wurde oder nicht. Fremdatome an der Oberfläche der Niobspitze verändern die Emission im supraleitenden Bereich nicht unerheblich. Die Gruppe um Oshima vermutet, dass dies der Grund war, weshalb die Pioniere wie Gomer und Hulm oder Klein und Leder nur deshalb keine Änderung in der Emission sahen, da sich zu viele Fremdatome auf der kalten Spitze abgesetzt haben und somit der kohärente Zustand des Supraleiters nicht mehr ins Vakuum hinausgereicht hat. Deshalb ist es von größter Wichtigkeit diese Art von Experimenten in einer ausgesprochen

guten Vakuumumgebung durchzuführen und die Spitze vor jeder Messung durch Feldevaporation oder anderen Reinigungsmethoden zu säubern.

Als Verbreiterungsmechanismen diskutieren Oshima et. al mehrere Möglichkeiten: Ein bekannter Effekt ist die Coulomb-Wechselwirkung bei Elektronen [68], auch bekannt als Boersch-Effekt [69]. Dieser Effekt tritt bei hohen Emissionsströmen auf. Durch die Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen vor dem Emitter tritt eine Energieverbreiterung auf. Da die hier eingestellten Emissionsströme sehr gering sind, schätzt die Gruppe um Oshima diesen Effekt als vernachlässigbar klein ein. Der inelastische Tunneleffekt, bei welchem eine Energieverbreiterung durch Vibrationszustände und Phononen der Kristallstruktur eine Energieverbreiterung verursachen, wird ebenfalls ausgeschlossen, da der Wirkungsquerschnitt für solche Anregungen sehr gering ist. Die zwei Hauptursachen die diskutiert werden sind zum einen eine Lebensdauererbreiterung wie sie in von Gadzuk [64] beschrieben wird. Sie kommen von Störstellen und Defekten im Material und liegen in der Größenordnung von wenigen meV. Da die Verbreiterung, die gemessen wurde in der gleichen Größenordnung liegt, nehmen Oshima et. al diesen Effekt als den wahrscheinlichsten an. Die Verbreiterung des Energiespektrums kann auch von einer Einzelelektronenemission herrühren. Zum einen sind nicht alle Elektronen im Grundzustand und zum anderen ist nicht klar, ob die Cooper-Paare bei der Emission aufbrechen. Diese Frage ist noch nicht geklärt. Emittiert eine supraleitende Elektronenquelle paarweise Elektronen - Cooper-Paare oder nicht. Supraleitende Spitzen wurden auch bereits in Rastertunnel-Elektronenmikroskop verwendet. Mit ihnen konnte der Josephson-Strom in atomaren Tunnelkontakten gemessen werden [70].

### 2.6.3 Verschränkte Elektronen

Eine Frage die die Gruppe um Oshima offen lässt ist, werden die Elektronen bei einer supraleitenden Feldemission als einzelne Elektronen oder paarweise als Cooper-Paare emittiert. Mit diesem Sachverhalt beschäftigt sich 2009 Yuasa [49] genauer. Die Gruppe um Yuasa kommt zu dem Schluss, dass unter gewissen Umständen die Elektronen nicht nur paarweise emittiert werden, sondern sogar verschränkt sind. Einzelne Elektronen oder Cooper-Paare folgen unterschiedlichen Teilchenstatistiken. Während Elektronen Fermionen sind, haben Cooper-Paare bosonisches Verhalten. Die Idee der Gruppe beruht darauf, dass man, wenn man nun Koinzidenz-Messungen durchführt, man in der Korrelationsfunktion unterschiedliches Verhalten sieht in Abhängigkeit der Temperatur. Für einzelne Elektronen erwartet man bei sehr

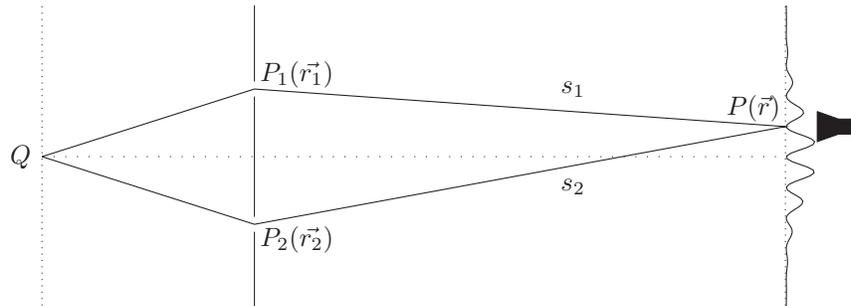


**Abbildung 2.16:** (a) Vorgeschlagenes Experiment. Eine supraleitende Spitze mit Emissionsfläche  $\omega$  emittiert Elektronen. Im Abstand  $r_1, r_2$  werden die Auftreffzeiten detektiert. Der Detektionswinkel  $\theta$  wird dabei variiert. (b) Korrelationsfunktion  $Q(r, \theta)$ , in Abhängigkeit des Koinzidenzwinkels  $\theta$ . Man erkennt im supraleitenden Zustand (rote Kurve), dass bei  $180^\circ$  die Korrelationsfunktion ansteigt. Die Höhe des Peaks ist ein Maß für die Verschränktheit der Elektronen.

kurzen Zeitabständen Bunching-Effekte, während man für Cooper-Paare Anti-Bunching erwarten würde. Hat man nun ein Experiment mit einem supraleitenden Feldemitter, wie es von Oshima und Nagaoka [48] [55] beschrieben wurde, stellt man zwei Detektoren in einem gewissen Abstand zur Spitze auf und misst die Ankunftszeiten der ankommenden Teilchen, vergleichbar mit der Arbeit von Kiesel 2002 [71]. Aufgrund der Emission der Cooper-Paare, welche mit  $\vec{k}$  und  $-\vec{k}$  emittiert werden, erwartet man bei einem Detektorwinkel von  $180^\circ$  im supraleitenden Zustand der Spitze einen Bunching-Peak, die Korrelationsfunktion ist also größer als 1 und im normalleitenden Zustand erwartet man bei einem Detektorwinkel von  $0^\circ$  einen Antibunching-Peak, die Korrelationsfunktion ist also kleiner als 1. Für diese Methode muss der Detektor nur eine sehr gute Zeitauflösung besitzen, jedoch ist es nicht notwendig, dass der Detektor den Spin-Zustand der Elektronen misst. Man kann auf den Grad der Verschränktheit der Elektronen schließen, indem man sich die Höhe des Korrelationspeaks betrachtet. Die Höhe des Peaks ist abhängig von der Supraleiterparameter wie "Gap-Parameter"  $\Delta_0$ , der Fermi-Energie  $E_f$  und der daraus resultierenden Fermi-Wellenlänge  $\lambda_f$ . Die genauen Berechnungen werden hier nicht angegeben, da sie für das Experiment wenig Mehrwert bringen, können aber in [49] nachgelesen werden. Stimmen jedoch die Voraussetzungen und Berechnungen, können Experimente mit Elektronen gemacht werden, für die für Photonen bereits 1970 durch Burnham [50], Klyshko [51] und Kwiat [52] durchgeführt wurden. Durch

die beschriebene Methode kann man die experimentelle Schwierigkeit umgehen, den Spin der Elektronen direkt zu messen. Natürlich ist dies unumgänglich um die Vorhersage allumfassend zu bestätigen. Experimentell ist es sehr viel einfacher die zeitliche Teilchenstatistik einer Elektronenquelle zu bestimmen, wie von Schütz [72] gezeigt wurde, als den Elektronenspin direkt zu messen. Bei Messungen erwartet man jedoch nicht, dass der Koinzidenz-Peak bei  $\pi$  liegt, da die Elektronen durch die angelegte Spannung in Richtung Detektor beschleunigt werden. Zwar verlassen die Teilchen mit  $k$  und  $-k$  den Emitter, werden dann jedoch senkrecht dazu in Richtung Detektor beschleunigt. Die beiden Teilchen treffen also immer in einem gewissen Abstand zueinander auf, was in der Korrelationsfunktion erkennbar ist.

## 2.7 Korrelationsfunktion zweiter Ordnung



**Abbildung 2.17:** Youngsches Doppelspaltexperiment. Die zwei Spalte werden durch eine Quelle  $Q$  beleuchtet. An den Spalten entstehen zwei Partialwellen  $P_1(\vec{r}_1)$  und  $P_2(\vec{r}_2)$  welche nach den Wegen  $s_1, s_2$  in der Interferenzebene überlagert werden. Ein Detektor am Punkt  $P(\vec{r})$  misst das Signal.

Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, spielt für die Messmethode der verschränkten Elektronen die zeitliche und räumliche Korrelation eine entscheidende Rolle. Anhand der Korrelationsfunktion lassen sich Rückschlüsse auf die Teilchenstatistik bzw. auf fermionisches oder bosonisches Verhalten der Teilchen schließen. In unserer Arbeitsgruppe wurde von A. Rembold in [73], [74] und [75] dazu bereits viel Vorarbeit geleistet. Die folgenden Ausführungen lehnen sich daran an. Die folgende Beschreibung soll anhand der Lichtoptik am Beispiel eines Doppelspaltversuchs näher erläutert werden, bevor dann der Übergang zur Elektronenoptik vollzogen wird.

---

Die  $g^{(1)}$ -Funktion ist definiert als

$$g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\langle E^*(\vec{r}_1, t)E(\vec{r}_2, t + \tau) \rangle_t}{\sqrt{\langle |E(\vec{r}_1, t)|^2 \rangle_t \langle |E(\vec{r}_2, t + \tau)|^2 \rangle_t}}. \quad (2.37)$$

Die  $g^{(1)}$ -Funktion gibt ein Maß über das Phasenrauschen des Feldes  $E(\vec{r}, t)$  an und somit auch ein Maß über die Kohärenz des Feldes. Hierbei beschreibt

$$\langle f(\vec{r}, t) \rangle_t := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\vec{r}, t) dt \quad (2.38)$$

die Mittelung über die Zeit an. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass die  $g^{(1)}$ -Funktion direkt mit dem Kontrast  $K$  verknüpft ist. Dies soll anhand eines Doppelspaltexperiments nach Young [76], wie er in Abbildung 2.17 dargestellt ist, gezeigt werden. Da der Übergang zum elektrostatischen Biprisma nachher analog verläuft, ist es sinnvoll, diesen experimentellen Aufbau zu betrachten. Bei einem Doppelspaltexperiment werden die Spalte von einer Quelle  $Q$  beleuchtet. Die zwei Elementarwellen aus  $P_1(\vec{r}_1)$  und  $P_2(\vec{r}_2)$  werden in der Interferenzebene überlagert. Die Intensität wird dann am Punkt  $P(\vec{r})$  von einem Detektor gemessen. Hat man eine Lichtquelle mit einer Frequenzbandbreite  $\Delta\omega$ , kann man Interferenz nur messen, wenn für den Gangunterschied der Wege  $s_1$  und  $s_2$  gilt

$$\Delta s = |s_1 - s_2| \leq \frac{c}{\Delta\omega}, \quad (2.39)$$

wobei hier  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist. Der Ausdruck  $l_c = \frac{c}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta k}$  wird als Kohärenzlänge bezeichnet. Ebenso wird die Kohärenzzeit  $\tau_c = \frac{l_c}{c} = \frac{1}{\Delta\omega}$  definiert. Man kann Interferenzen beobachten, wenn gilt  $\tau_c \Delta\omega \simeq 1$ . Addiert man nun am Punkt  $P(\vec{r})$  die Felder zu einem Zeitpunkt  $t$ , welche aus  $P_1(\vec{r}_1)$  und  $P_2(\vec{r}_2)$  stammen, so bekommt man für  $t_1 = t - \frac{s_1}{c}$  und  $t_2 = t - \frac{s_2}{c}$  die Felderteilung

$$E(\vec{r}, t) = E_1\left(\vec{r}, t - \frac{s_1}{c}\right) + E_2\left(\vec{r}, t - \frac{s_2}{c}\right) = E_1(\vec{r}, t) + E_2(\vec{r}, t + \tau) \quad (2.40)$$

wobei  $\tau = t_1 - t_2 = \frac{s_1 - s_2}{c}$  die Korrelationszeit ist. Ein Detektor nimmt das Signal über eine Zeit  $T$  auf, das Detektorsignal ist also das zeitliche Mittel des Feldes, was der Intensität entspricht. Wir schreiben hierfür

$$I(\vec{r}) = \langle I(\vec{r}, t) \rangle_t = \langle |E(\vec{r}, t)|^2 \rangle_t \quad (2.41)$$

Damit erhält man die Intensitätsverteilung

$$I(\vec{r}) = I(\vec{r}_1) + I(\vec{r}_2) + \Re(\langle E^*(\vec{r}_1, t)E(\vec{r}_2, t + \tau) \rangle_t) \quad (2.42)$$

wobei  $\Re(\cdot)$  den Realteil beschreibt. Man erhält also die Intensität der Spalte  $P_1(\vec{r}_1)$  und  $P_2(\vec{r}_2)$  welche durch einen Interferenzterm modifiziert wird. Mit der Definition der  $g^{(1)}$ -Funktion lässt sich die Gleichung umschreiben zu

$$I(\vec{r}) = I(\vec{r}_1) + I(\vec{r}_2) + 2\sqrt{I(\vec{r}_1)I(\vec{r}_2)}\Re(g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)). \quad (2.43)$$

Da die  $g^{(1)}$ -Funktion im Allgemeinen komplex ist, lässt sie sich schreiben als

$$g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = |g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)|e^{i\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)}. \quad (2.44)$$

Wenn die Korrelationszeit  $\tau \leq \tau_c$  und die Längenunterschiede  $(s_1 - s_2) < l_c$  ist, dann lässt sich die komplexe Phase  $\Psi$  als Näherung angeben als  $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \tau\omega_0 = k_0(s_1 - s_2)$ . Dabei gibt  $\omega_0$  die Zentralfrequenz des Lichtfeldes an und entsprechend  $k_0$  die dazugehörige Wellenzahl mit  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ . Der Interferenzterm hängt jedoch nur von der Wegdifferenz von  $s_1$  und  $s_2$  ab. Deshalb lässt sich die örtliche Intensität schreiben als

$$I(\vec{r}) = I(\vec{r}_1) + I(\vec{r}_2) + 2\sqrt{I(\vec{r}_1)I(\vec{r}_2)}|g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)|\cos(k_0(s_2 - s_1)). \quad (2.45)$$

Man kann daran zwei Punkte sehen. Zum einen sieht man, dass  $|g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)| > 0$  ist, sobald man Interferenz beobachten kann.

$$\begin{aligned} |g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)| = 1 & \quad \text{kohärent} \\ 0 < |g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)| < 1 & \quad \text{partiell kohärent} \\ |g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)| = 0 & \quad \text{inkohärent} \end{aligned}$$

Desweiteren sieht man, setzt man Gleichung 2.45 in Gleichung 2.17 ein, erhält man

$$K = \frac{2\sqrt{I(\vec{r}_1)I(\vec{r}_2)}|g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)|}{I(\vec{r}_1) + I(\vec{r}_2)}. \quad (2.46)$$

Unter der - gerechtfertigten - Annahme, dass  $I(\vec{r}_1) = I(\vec{r}_2)$  sieht man, dass gilt

$$K = |g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)| \quad (2.47)$$

Die  $g^{(1)}$ -Funktion und somit der Kontrast sind also direkt ein Maß der Kohärenz. Während die  $g^{(1)}$ -Funktion ein Maß über die Phasenfluktuation des Feldes Auskunft gibt und somit auch Rückschlüsse auf die Kohärenz der Quelle gibt, beschreibt die  $g^{(2)}$ -Funktion die Fluktuation in der Intensität an einer fixen Detektorposition. Die Funktion ist definiert als

$$g^{(2)}(\tau) := \frac{\langle E^*(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau)E(t) \rangle_t}{\langle |E(t)|^2 \rangle_t \langle |E(t+\tau)|^2 \rangle_t} = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle_t}{\langle I(t) \rangle_t \langle I(t+\tau) \rangle_t}, \quad (2.48)$$

dabei beschreibt  $E(t)$  das Feld und  $I(t)$  die Intensität der Quelle. Aus der Intensitätsfluktuation lassen sich Aussagen über das Emissionsverhalten der Quelle ableiten. Dazu wird ein Einzel-Teilchen-Detektor benötigt um eine Einzel-Teilchen-Statistik aufzunehmen. Für einzelne Photonen wird die Gleichung umgeschrieben zu

$$g^{(2)}(\tau) := \frac{\langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}^\dagger(t+\tau) \hat{a}(t+\tau) \hat{a}(t) \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle \langle \hat{a}^\dagger(t+\tau) \hat{a}(t+\tau) \rangle} \quad (2.49)$$

wobei  $\hat{a}^\dagger$  der Photonen-Erzeuger und  $\hat{a}$  der Photonen-Vernichtungsoperator und  $\langle \cdot \rangle$  entspricht dem Erwartungswert des Zustands  $|\Psi\rangle$ . Die  $g^{(2)}$ -Funktion gibt die bedingte Wahrscheinlichkeit, ein Photon zur Zeit  $t + \tau$  zu messen, nachdem ein Photon zum Zeitpunkt  $t$  gemessen wurde. Für die Korrelationszeit  $\tau = 0$  hängt die Verteilung der Photonen mit der mittleren Photonenzahl  $\langle \hat{n} \rangle$  und zur Varianz  $(\Delta n)^2 = (\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2)$  zusammen. Damit ergibt sich die Gleichung zu

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2} = 1 + \frac{\langle (\Delta n)^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle}. \quad (2.50)$$

An dieser Gleichung kann man drei Regime der  $g^{(2)}$ -Funktion ausmachen, nämlich

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle > \langle \hat{n} \rangle \mapsto g^{(2)} > 1 \quad \text{Super-Poisson Statistik}$$

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle \hat{n} \rangle \mapsto g^{(2)} = 1 \quad \text{Poisson Statistik}$$

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle < \langle \hat{n} \rangle \mapsto g^{(2)} < 1 \quad \text{Sub-Poisson Statistik}$$

Man kann also anhand der  $g^{(2)}$ -Funktion bei kurzen Korrelationszeiten Rückschlüsse auf die Teilchenstatistik der Strahlquelle schließen. In dieser Herleitung wurde Bezug auf den lichteoptischen Doppelspalt genommen, jedoch ist die Theorie und Berechnung ebenso anwendbar auf das elektronenoptische Analogon, nämlich das elektrostatische Biprisma. Anhand der  $g^{(1)}$  Funktion, bzw. über den Kontrast, lassen sich Aussagen über die Kohärenz der Quelle treffen und anhand der  $g^{(2)}$ -Funktion lassen sich Aussagen über die Emissionsstatistik treffen. Für  $\tau > \tau_c$  emittiert eine Feldelektronenquelle die Elektronen poissonverteilt, wie in [72] gezeigt wurde. Für  $\tau < \tau_c$  allerdings konnte Kiesel 2002 [71] die Antikorrelation für freie Elektronen zeigen, sie verhalten sich also nach einer Sub-Poisson Statistik. Man spricht in diesem Zusammenhang von Anti-Bunching. Da Elektronen Fermionen sind, ist die Zwei-Teilchenwellenfunktion antisymmetrisch. Deshalb können zwei Elektronen nach dem Pauli-Prinzip nicht gleichzeitig den selben Zustand besetzen. Bosonen hingegen besitzen eine symmetrische Zwei-Teilchenwellenfunktion, sie können den selben Zustand besetzen. Für eine thermische Lichtquelle kann das sogenannte Photon-Bunching beobachtet werden. Dieser Effekt wurde das erste Mal von Hanbury-Brown und Twiss gezeigt [77]. Im Abschnitt 4 werden Simulationen präsentiert, um die

Methode zur Messung der supraleitenden Eigenschaft einer Feldemitterkathode mithilfe der Korrelationsanalyse zu messen.

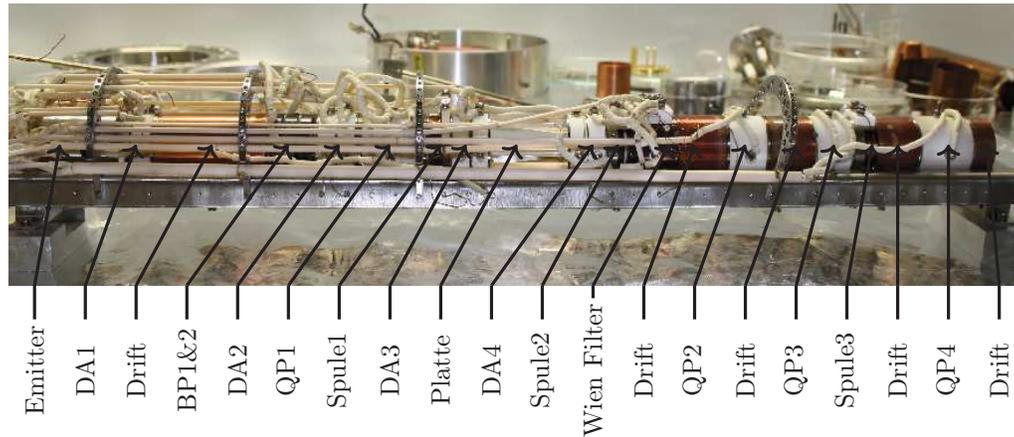
# Kapitel 3

## Experimenteller Aufbau

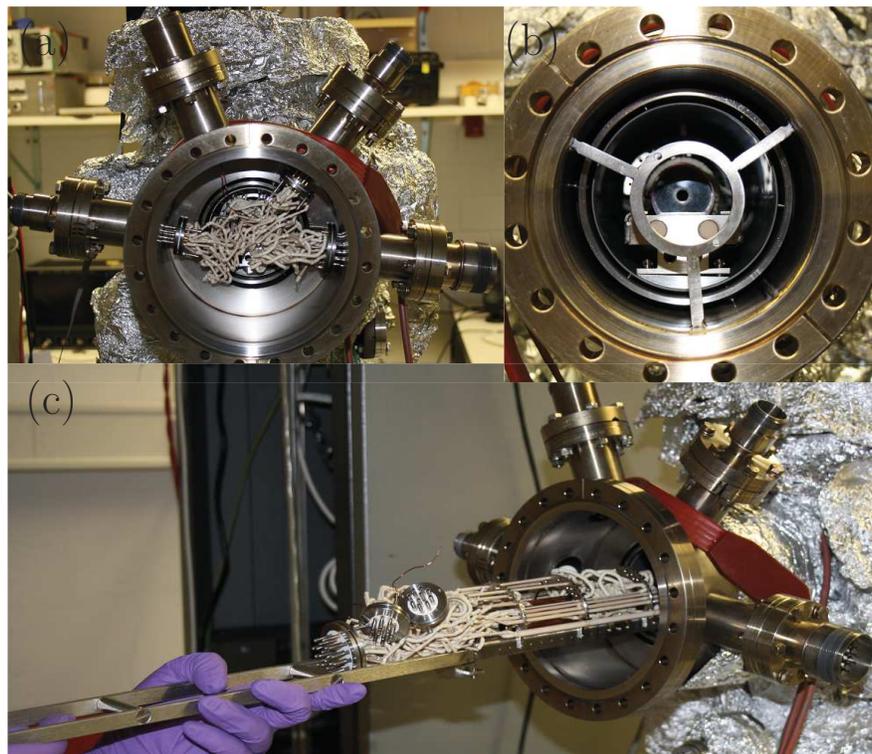
Im folgenden Abschnitt soll der hier verwendete experimentelle Aufbau näher erläutert werden und auf die einzelnen Komponenten und ihre Funktionsweise näher eingegangen werden. Der Aufbau wurde von P. Sonnentag übernommen, welcher damit Dekohärenzexperimente durchgeführt hat. Das Experiment wird von Sonnentag in [78] und [25] näher beschrieben. Für die hier vorliegende Arbeit wurde das Setup mit einer neuen Strahlquelle und einem neuen Detektor modifiziert. Außerdem wurden die elektronischen Komponenten zur Strom- und Spannungsversorgung neu entworfen und gebaut. Das Elektroneninterferometer wird hierbei genutzt um kohärente Elektronenwellen zu erzeugen, aufzuspalten und mithilfe eines Wienfilters zu modulieren. Die genaue Technik wird in Abschnitt 6 beschrieben. Aus diesem Grund werden hier zuerst die einzelnen Komponenten des Aufbaus erklärt und im Anschluss die für das Experiment nötige Elektronik erläutert.

### 3.1 Elektroneninterferometer

Das Elektroneninterferometer an sich folgt einem klassischen Aufbau, wie er von Hasselbach entwickelt wurde und sich über die Jahre sehr bewährt hat [79]. Die elektronenoptischen Bauteile sind auf einer optischen Bank montiert - bestehend aus zwei geraden Glaskeramikstäben - um eine definierte optische Achse zu bekommen, wie in Abbildung 3.1 dargestellt.



**Abbildung 3.1:** Foto des hier verwendeten Elektroneninterferometers. Alle Bauteile sind auf zwei Keramikstäben montiert, welche in einem Edelstahlrahmen befestigt sind. Zu sehen sind der Feldemitter, die Doppelablenker (DA), die Driftstrecken (Drift), die Spulen und die Quadrupollinsen (QP).



**Abbildung 3.2:** (a) Blick auf das Interferometer in Richtung des Detektors. Zu sehen sind die 4 Hochspannungsstecker für die Bauteile mit den durch Keramikperlen isolierten Kabeln. (b) Blick auf das Interferometer aus Richtung des Detektors. Zu sehen ist der Edelstahlrahmen als Halterung für die Glaskeramikstäbe. Der Rahmen steht auf dem hinteren Anschlag. (c) Mit einer Gabel wird das Interferometer als Ganzes aus dem Rezipienten gehoben.

---

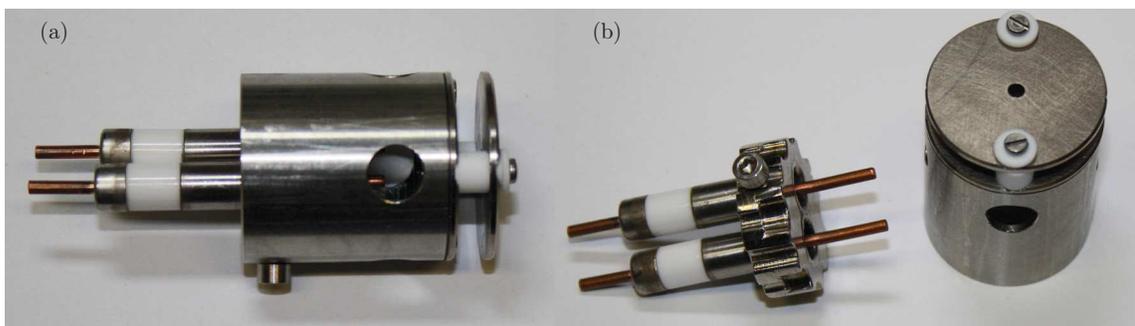
Die optische Bank ist in etwa 70 cm lang. Die Glaskeramikstäbe sind in Abbildung 3.2 (b) zu sehen. Diese Art die Bauteile zu halten hat eine sehr gute mechanische Stabilität zur Folge. Das im Laborbetrieb übliche Maß an Schall und Stoßwellen im akustischen Bereich stören das Experiment nicht. Erst große Erschütterungen (wie z.B. das Klopfen auf die Vakuumkammer) sind auf dem Messsignal zu sehen. Zum einfachen Ein- und Ausbau sind die Stäbe in einem Edelstahlrahmen montiert und können mit einer Gabel im Ganzen aus dem Vakuumrezipienten herausgehoben werden, wie in Abbildung 3.2 (c) dargestellt. Das Interferometer steht auf zwei Anschlägen in der Vakuumkammer, um eine definierte Position im Abschirmrohr zu bekommen. Der hintere Anschlag in Richtung Detektor ist in Abbildung 3.2 (b) zu sehen. Der Edelstahlrahmen dient nicht nur der Lagerung und dem Transport, sondern unter anderem auch als elektrisches Bezugspotential (Ground). Da das Interferometer direkt im Abschirmrohr steht, ist der Rahmen auf demselben Potential wie der Rezipient und somit geerdet. Ein definiertes Bezugspotential ist in der Elektroneninterferometrie äußerst wichtig. Alle elektronenoptischen Bauteile, die geerdet werden müssen, werden deshalb elektrisch mit dem Rahmen verbunden. So lassen sich Aufladungen z.B. der Blenden vermeiden. Die Komponenten des Interferometers sind mit Titanspangen an die Keramikstäbe geklemmt und somit elektrisch isoliert. Die elektrischen Zuleitungen führen von den Steckern (dargestellt in Abbildung 3.2 (a)) durch Keramikröhren zu den Bauteilen. Die Drähte sind zwar Kapton/Lack-Isoliert, da allerdings negative und positive Spannungen bis 1000 V verwendet werden, kann zwischen zwei Drähten eine Potentialdifferenz von 2000 V entstehen. Es ist deshalb darauf zu achten, dass die Drähte zueinander einen gewissen Abstand halten. Wo eine Isolierung und Abstandshaltung durch Keramikröhrchen nicht möglich ist, werden die Zuleitungen durch Keramikperlen auf Abstand gehalten. Die einzelnen elektronenoptischen Bauteile werden in den folgenden Abschnitten näher beschrieben.

### 3.1.1 Vakuumkammer

Um Experimente mit freien Elektronen durchführen zu können, muss sich der Aufbau in einem Ultrahochvakuum befinden. Zur Vakuumerzeugung wird der Rezipienten mit einem Kombi-Pumpstand, bestehend aus einer Scroll-Pumpe und einer Turbomolekularpumpe, auf einen Druck von etwa  $1 \cdot 10^{-6}$  mbar gepumpt. Anschließend wird die Kammer bei  $150^\circ\text{C}$  ca. 48 Stunden ausgebacken, mit eingeschalteter Ionenzerstäuberpumpe. Der Druck sinkt dabei auf etwa  $1 \cdot 10^{-8}$  mbar ab und das

Hauptventil wird geschlossen. Die Ionenzerstäuberpumpe senkt dann in dem geschlossenen System den Druck bei 150 °C auf etwa  $5 \cdot 10^{-9}$  mbar ab. Nach dem Abkühlen des Vakuumrezipienten wird in der Kammer mit einer Titan-Sublimationspumpe (TI-Sub) Titan verdampft. Der Titandampf bindet das Restgas durch Chemisorption. Die TI-Sub besitzt außerdem ein Kühlschild, welches mit flüssigem Stickstoff ( $LN_2$ ) gekühlt wird. Dadurch wirkt die TI-Sub auch als Kryopumpe. Der erreichbare Enddruck liegt bei  $p \leq 5 \cdot 10^{-10}$  mbar, da der verbaute Drucksensor nur dies als Minimaldruck anzeigen kann. Der absolute Druck spielt aber in diesen Druckbereichen keine große Rolle, da bereits ein Druck von  $1 \cdot 10^{-9}$  mbar ausreichend ist, um Elektroneninterferenzexperimente durchführen zu können, ohne relevante Stoßprozesse mit dem Hintergrundgas [80]. Die elektrischen Durchführungen an der Vakuumkammer müssen demnach temperaturbeständig sein, ebenfalls muss der Detektor solche Temperaturen aushalten. Zur Abschirmung gegen magnetische Wechselfelder ist in die Kammer ein MuMetall-Rohr eingebracht.

### 3.1.2 Elektronenquelle



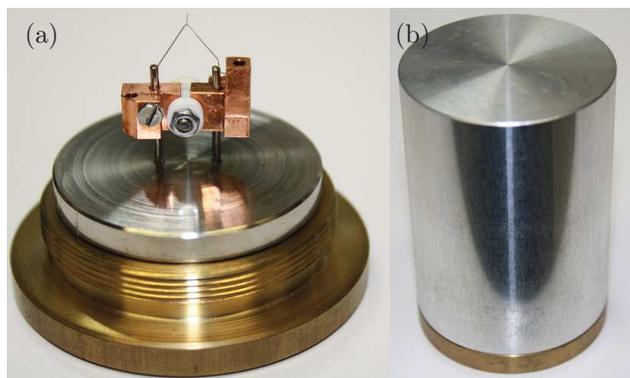
**Abbildung 3.3:** Kathodenbox zur Strahlerzeugung. (a) Kathodenbox, wie sie auf die optische Bank des Interferometers geschraubt wird. Zu sehen sind die elektrischen Anschlüsse des Emitters, die Box an sich als Extraktionsblende und die isolierte Erdblende. (b) Herausgelöster Emitteranschluss. Der Spitzenhalter wird auf den Kupferpins befestigt und in die Kathodenbox geschoben.

Um die hohe Intensität und schmale Energiebreite zu erhalten, welche man für Elektroneninterferenzexperimente benötigt, wird in diesem Aufbau ein Feldemitter als Elektronenquelle benutzt. Der Feldemitter kann eine sogenannte Ein-Atom-Spitze [81] [72] sein oder eine Niobspitze [82]. Das Strahlerzeuersystem besitzt den großen Vorteil, durch eine Anspannung der Kathodenbox selbst, die Extraktionsspannung

---

und somit die Intensität sehr gut kontrollieren zu können. Die Intensität wird durch die Potentialdifferenz Emitter-Extraktionsblende eingestellt, während die Elektronenenergie definiert ist durch den Potentialunterschied Emitter-Erdblende. Damit lassen sich Strahlintensität und Elektronenenergie unabhängig voneinander variieren. Auch langsame Elektronen ( $\leq 50$  eV) lassen sich mit diesem System realisieren ohne an Kohärenz des Strahls einzubüßen. Genaueres dazu ist in [45] nachzulesen.

### Ein-Atom-Spitze



**Abbildung 3.4:** (a) Spitzenhalter mit Ein-Atom-Spitze auf Transportvorrichtung. (b) Verschlossene Transportbox für Ein-Atom-Spitzen. Die Emitter sind vor mechanischen Einwirkungen und vor Staub geschützt.

In diesem Experiment wird ein geätzter Nanoemitter aus Wolfram verwendet, da sie in der Herstellung leicht zu verarbeiten sind und eine lange Lebensdauer haben [83]. Wie bereits geschrieben, wird für Elektroneninterferenzexperimente ein kalter<sup>1</sup> Feldemissions-Emitter verwendet. Im Vergleich zu heißen Feldemittern (Schottky-Emitter) haben sie zwar einen geringeren Emissionsstrom, aber eine schmalere Energiebreite und einen mehr gerichteten Strahl, weshalb der Richtstrahlwert höher ist als bei Schottky-Emittern, wie in [72] aufgelistet. In diesem Experiment wird eine besondere Art von Wolfram-Feldemittern verwendet, nämlich eine so genannte "Ein-Atom-Spitze", auch kurz SAT<sup>2</sup> genannt [84] [85] [81]. Die Spitzen werden in Taiwan, in der Gruppe von Professor Ing-Shouh Hwang (Academia Sinica, Taipeh), auf speziell für diesen Zweck von uns konstruierte Kupferhalter gesetzt, wie in Abbildung 3.4 zu sehen. Sie bestehen hierbei aus einem polykristallinen Wolframdraht als

---

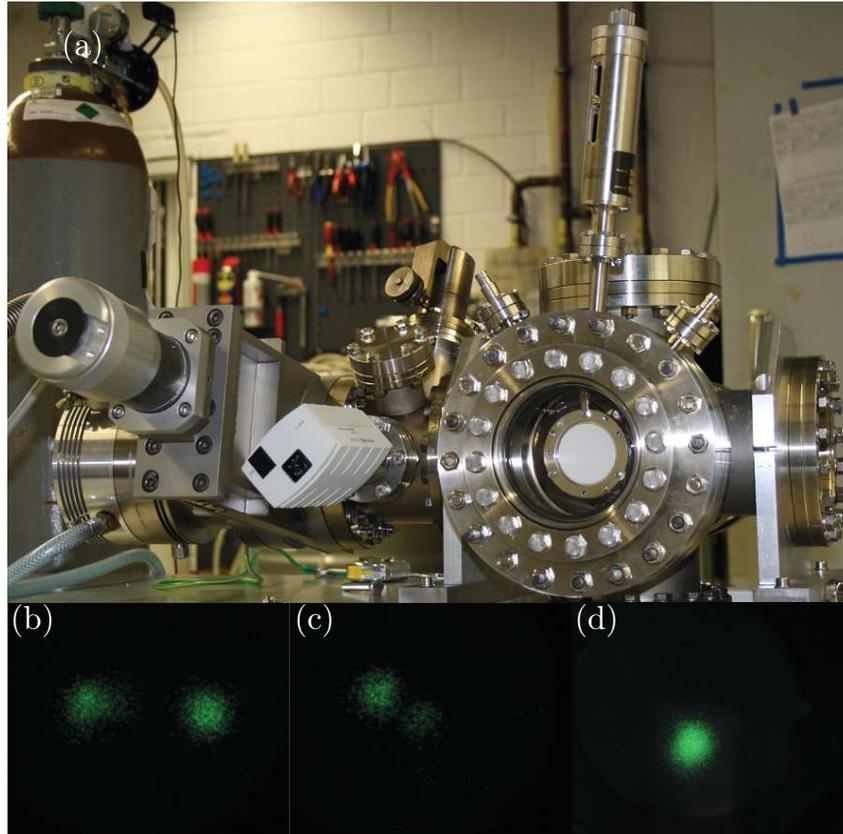
<sup>1</sup>kalt bedeutet hier ein Betrieb bei Raumtemperatur.

<sup>2</sup>SAT kommt vom englischen "Single Atom Tip"

Basis und einen Wolfram Einkristall als Spitze. Der Einkristall hat die Orientierung  $\langle 111 \rangle$ , was eine gerade Emission gewährleistet. Kalte Feldemitter haben an sich schon einen hohen Richtstrahlwert ( $1 \cdot 10^{13} - 1 \cdot 10^{14} \text{ A m}^{-2} \text{ sr}^{-1}$ ), vergleichen mit Schottky-Emittern oder Glühkathoden [72] [86]. Ein hoher Richtstrahlwert bringt viele Vorteile in Interferenzexperimenten mit sich. Die Spitze wird bereits in Taiwan elektrochemisch auf einen Spitzenradius von 5 nm - 50 nm geätzt und wird anschließend nasschemisch mit einer Monolage Iridium beschichtet. Durch geschicktes Glühen der Spitze bildet sich auf der Kristallfacette eine dreiseitige Pyramide aus Iridium mit einem Atom an der Spitze. Dadurch emittieren Ein-Atom-Spitzen durch die punktförmige Emissionsfläche sehr kohärent (siehe Abschnitt 2.3.2) [72] [81]. Die Spitzen kommen beschichtet, aber noch nicht gegläht in Tübingen an. In speziellen Transportboxen, wie sie in Abbildung 3.4 dargestellt sind, werden die Spitzen letztendlich angeliefert und im Labor präpariert. In unseren Experimenten werden auch Emitter aus Niob verwendet, auf die Eigenschaften von Feldemissionskathoden aus Niob wird jedoch in Abschnitt 5 näher eingegangen.

### Spitzenpräparation

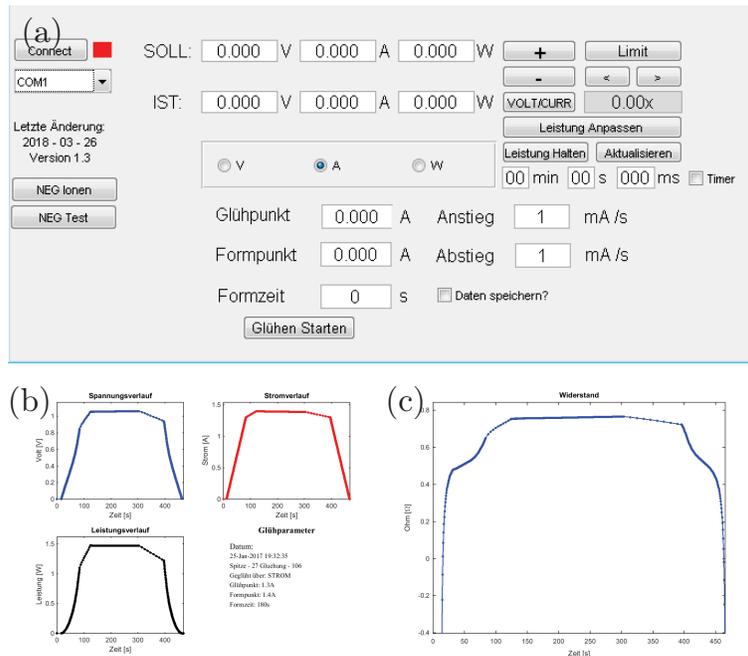
Für eine stabile und kohärente Emission muss sich nun durch einen Glühprozess die Iridium-Pyramide auf der Spitze bilden. Die Glühparameter sind jedoch von Spitze zu Spitze unterschiedlich und müssen jedes Mal individuell herausgefunden und angepasst werden. Dazu muss die Glühtemperatur bestimmt und kontrolliert und anschließend das Feldelektronen-Emissionsbild betrachtet werden. Da in dem hier verwendeten Interferometeraufbau kein optischer Zugang zur Spitze möglich ist, wird die Spitze in einer Testvakuumkammer charakterisiert und die Glühparameter für jede Spitze bestimmt. Dazu wird der Druck in der Kammer mithilfe einer Turbomolekularpumpe und einer "Non-Emitting-Getter"-Pumpe (NEG) auf einen Druck von  $\leq 5 \cdot 10^{-10}$  mbar abgesenkt. Durch ohmsches Heizen wird die Spitze langsam erwärmt um den Punkt des ersten sichtbaren Glühens zu bestimmen, was dann in etwa  $650^\circ\text{C}$  entspricht. Dies ist der Punkt bei dem der Formprozess startet. Es ist darauf zu achten, dass beim Heizen der Spitze der Druck in der Spitze nicht steigt, wenn doch, ist das Heizen sofort zu unterbrechen und die Temperatur solange zu halten, bis der Druck wieder sinkt [84]. Der Druck in der Kammer sollte hierbei nicht schlechter als  $1 \cdot 10^{-9}$  mbar sein, da höhere Drücke dazu führen, dass Fremdatome in die Iridiumschicht eingebaut werden. Es ist deshalb darauf zu achten, dass auch beim Aufheizen des Emitters der Druck nicht steigt. Ist der Glühpunkt der Spitze ermittelt, beginnt der eigentliche Glühprozess bei dem der Formpunkt



**Abbildung 3.5:** (a) Foto der Testvakuumkammer. Im Sichtfenster ist der verfahrbare MCP-Detektor zu sehen. (b)-(d) Feldelektronen-Emissionsbild einer Einatomspitze. (b) und (c) zeigen mehrere Nebenspots. (d) Klarer runder Emissionsfleck. Die fertig geformte Spitze wird dann ins Experiment eingebaut.

ermittelt wird. Es ist wichtig, dass während dem Glühen die Spitze keinen Temperaturschwankungen ausgesetzt wird und nach Beenden des Glühprozesses die Temperatur langsam abgesenkt wird. Dies hat in der Vergangenheit oftmals zum Verlust der Spitze geführt. Es besteht hierbei die Gefahr, dass das Iridium auf der Spitze verdampft, wenn diese zu warm wird. Kühlt die Spitze zu schnell ab, kann durch ungleichmäßige Temperaturverteilung die Pyramide entweder zerstört werden, oder sich an falscher Stelle bilden. Um der Problematik vorzubeugen und mehr Kontrolle in den Glühprozess zu bekommen, wurde von mir ein Ausglühprogramm mit grafischer Oberfläche in Matlab für das kontrollierte Glühen entworfen und programmiert, wie in Abbildung 3.6 zu sehen. Aus den Erfahrungen der letzten Jahre ist es sinnvoll die Glühparameter besser zu kontrollieren und für spätere Analysen zu speichern. Die Problematik beim Glühprozess in der Vergangenheit

war, dass der Glühstrom durch eine stromgeregelter Stromquelle gehalten wurde. Bei steigender Temperatur erhöht sich der Widerstand des Drahtes, was zur Folge hatte, dass die Spitze während des Glühens unkontrolliert heißer wurde. Deshalb



**Abbildung 3.6:** (a) Ausglühprogramm mit Eingabefelder. Der rechte obere Teil ist für das manuelle Glühen. Der untere Teil des Fensters ist für den automatischen Glühvorgang. (b) Abgespeicherte Parameter des Glühvorgangs. Strom-, Spannungs- und Leistungskurve. (c) Berechnete Widerstandskurve aus Strom und Spannungswerten. Negative Werte kommen durch Offset-Spannung der Spannungsquelle zustande.

wurde ein automatisiertes Verfahren entwickelt, um den Glühprozess reproduzierbarer zu gestalten. Bis zum Erreichen des Glühstroms wird eine stromgeregelter Stromquelle benutzt und dann während des Glühvorgangs die Leistung geregelt. Die Regelung arbeitet auf  $\pm 50$  mW genau. Dies hat zur Folge, dass die Temperatur während des Glühens sehr viel konstanter ist als es davor der Fall war. Die Stromrampe zum langsamen Abkühlen des Emitters kann eingestellt werden. Außerdem werden die Strom-Spannungs-Leistungs-Widerstandskurven aufgenommen und mit den Glühparametern abgespeichert. Dadurch ist ein sehr kontrolliertes und reproduzierbares Glühen der Spitzen möglich. Die Spitzen benötigen meistens eine Formtemperatur zwischen  $900^\circ\text{C}$  und  $1100^\circ\text{C}$ . Die Temperaturmessung erfolgt mit einem Präzisions-Glühfadenpyrometer mit Spezialoptik. Spitzen mit schmaler

---

Basis<sup>3</sup> emittieren meistens früher, jedoch mit einem großen Emissionswinkel ( $\leq 6^\circ$ ) [72]. Die Feldverteilung an der Spitze hat eine selbstfokussierende Wirkung auf den Elektronenstrahl. Je größer der Spitzenradius, desto fokussierter ist der Elektronenstrahl. Nach jedem Glühvorgang wird an einem MCP-Detektor mit Phosphorschirm das Emissionsbild betrachtet. Anhand der Emission kann man den Fortschritt des Glühprozesses beurteilen, wie in Abbildung 3.5 (b)-(d) dargestellt. Eine ausgeformte SAT besitzt einen klaren, einzelnen Emissionsfleck. Damit der Detektor bei der Temperaturmessung nicht stört, kann er mit einer Höhenverstellung aus dem Sichtfenster gefahren werden. Der Detektor ist in Abbildung 3.5 (a) im Sichtfenster zu sehen. Deshalb werden bevorzugt Spitzen mit einer großen Basis eingebaut, da diese einen besseren Selbstfokussierungseffekt besitzen. Die Emissionsspannung liegt - abhängig vom Basisdurchmesser - zwischen  $-250$  V und  $-1500$  V. Die eingebauten Spitzen haben einen Spitzenradius zwischen  $5$  nm und  $50$  nm. Im Experiment werden die Spitzen dann auf Raumtemperatur mit einer Gleichspannung betrieben. Der Emissionsstrom variiert nach Fowler-Nordheim zwischen  $10$  pA und  $1$   $\mu$ A.

### 3.1.3 Biprisma

Das elektronenoptische Biprisma besteht aus einem sehr dünn gezogenen Glasfaden mit einem Durchmesser von ca.  $350$  nm [72]. Die Herstellungsmethode wird in [87] genau erläutert. Um eine Spannung an das Biprisma anlegen zu können, wird der Glasfaden mit einer Legierung aus Gold/Palladium bedampft. Damit erreicht das Biprisma einen Durchmesser von ca.  $400$  nm. Diese Legierung bildet eine glattere Oberfläche als es reines Gold tun würde. Der feine Faden ist mit leitfähigem Epoxid-Kleber<sup>4</sup> auf den Biprismahalter aufgebracht, so dass die Spannung direkt an das Bauteil angelegt werden kann. Das Biprisma hat eine Länge von  $10$  mm und ist umgeben von zwei Erdbacken, welche einen Abstand von  $8$  mm zueinander haben. Aus Sicherheitsgründen werden pro Halter immer zwei Fäden eingebaut, da die Strahlteiler leicht verschmutzt oder beschädigt werden können. Ist der Faden geerdet, wird der Fadenschatten auf den Detektor geworfen. Wird der Faden leicht negativ angespannt, werden die Elektronen vom Faden weggedrückt und der Schatten am Detektor wird größer. Bei leicht positiver Spannung werden die Elektronen im Potential umgelenkt und die beiden Teilstrahlen überlappen und Interferenzstreifen sind im Überlappbereich beobachtbar. Die Formeln für die

---

<sup>3</sup>Basis beschreibt hier den Spitzenradius der Wolframspitze. Der Spitzenradius beeinflusst das Emissionsverhalten der SAT maßgeblich.

<sup>4</sup>EPO-TEK® 353ND/B4 Optical Adhesive

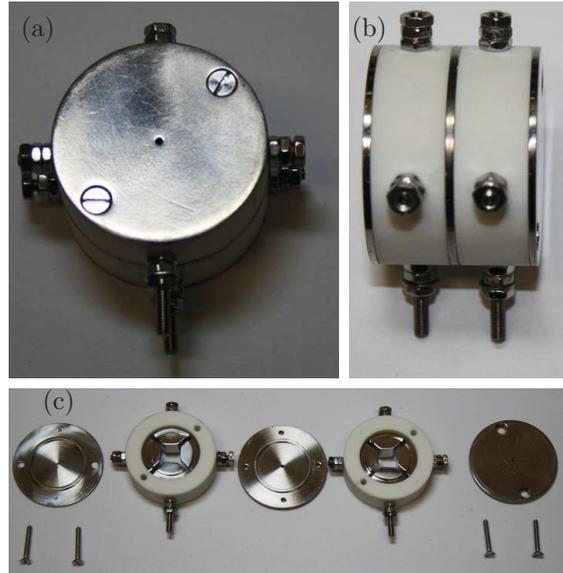


**Abbildung 3.7:** Halterung für das elektrostatische Biprisma. (a) Seitenansicht: Blende mit Erdbacken, Biprisma 1 und Biprisma 2 (v.l.n.r.). Die Teile sind zueinander isoliert. (b) Frontalansicht: Zu sehen sind die beiden Erdbacken und der Steg zwischen dem der Faden gespannt ist. (c) Ansicht der Einzelteile.

Berechnung des Umlenk winkels sind in Abschnitt 2.2 beschrieben. Das Biprisma fungiert in diesem Fall als virtueller Doppelspalt. Bei positiver Spannung ist die Aufspaltung der Teilwellen an keinem Punkt des Strahls größer als der Faden-durchmesser, also 400 nm. Mit Hilfe eines zweiten, fokussierenden Bauteils lässt sich hingegen eine große Strahlaufspaltung realisieren. Der Biprismafaden ist dann in diesem Fall negativ angespannt und separiert die Teilwellen weit voneinander, welche danach mit einem zweiten Bauteil wieder zusammengeführt werden. Das kann eine Einzellinse sein, ein zweiter Biprismafaden oder wie hier im Experiment verbaut, eine Quadrupollinse. In dieser Konfiguration lassen sich Aufspaltungen bis 40  $\mu\text{m}$  erreichen, jedoch sind Aufspaltungen bis nur 20  $\mu\text{m}$  praktisch nutzbar, da durch den sehr kleinen Streifenabstand die Integrationszeit für die Messung sehr stark ansteigt.

### 3.1.4 Elektrostatische Ablenker

In den seltensten Fällen trifft der Elektronenstrahl durch alle Aperturen aller Bau-teile direkt durch das Interferometer auf den Detektor. Der normale Fall ist, dass der Elektronenstrahl justiert werden muss. Hierzu wird die Ladung der Teilchen ausgenutzt und die Wirkung elektrischer und magnetischer Felder auf die Teilchen.



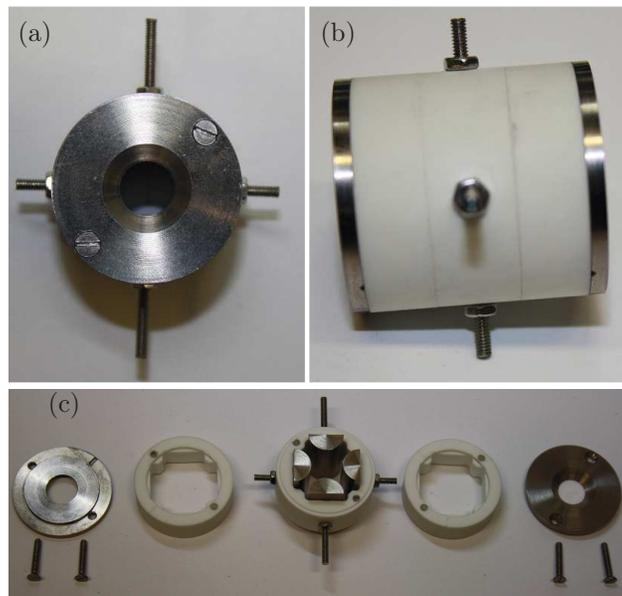
**Abbildung 3.8:** Elektrostatischer Doppelablenker. (a) Frontalansicht: Zu sehen ist die geerdete Apertur mit einem Durchmesser von 1 mm. Für Ablenker werden auch oft Aperturen mit 2 mm verwendet, da sie leichter zu justieren sind. (b) Seitenansicht: Die beiden Ablenker sind durch eine geerdete Apertur getrennt. Zu sehen sind die elektrischen Anschlüsse für jede Elektrode. (c) Explosionsansicht: Zur besseren Feldabschirmung reichen die Aperturen mit einer Nut in den Ablenker hinein. Alle Elektroden und Aperturen sind aus Titan gefertigt.

Im hier verwendeten Interferometer werden elektrostatische Ablenker verwendet. Die Ablenker sind im Grunde nichts anderes als Plattenkondensatoren. Dementsprechend sind die wichtigen geometrischen Parameter der Plattenabstand und die Plattenlänge. Die hier benutzten Ablenker haben einen Plattenabstand  $d=6$  mm und eine Plattenlänge von  $l=7$  mm. Vorne und hinten wird der Ablenker durch geerdete Blenden abgeschlossen mit einem Blendendurchmesser von 1 mm. Die Blendendurchmesser sind groß genug gewählt, um den Strahl hindurch zu bringen und klein genug, um die Felder gut genug ab zu schirmen. Die Ablenkspannungen sind immer antisymmetrisch am Ablenker angelegt: So liegt an der einen Platte die Spannung  $V$  an und an der gegenüberliegenden  $-V$ . So ist gewährleistet, dass das Nullpotential auf der optischen Achse liegt. Dies wird gemacht, damit das Teilchen keinen Potentialunterschied beim Einflug und Ausflug erfährt und der Ablenker somit keinen Linseneffekt erzeugt<sup>5</sup>. Die Ablenker sind sehr oft als ein Doppelablen-

<sup>5</sup>Eine Klassische Einzellinse besteht aus 3 Zylindern. Die äußeren sind geerdet und die Mittlere liegt auf einem Potential

kerpaar (DA) eingebaut, um den Strahl optimal vor jedem kritischen Bauteil zu justieren. Doppelablenker heißt in diesem Fall, dass zwei Ablenkelemente direkt hintereinander eingebaut sind. Fliegen die Elektronen geradlinig in das Element, so ändert ein Ablenkelement nur den Winkel des Strahls. Mit einem zweiten Ablenker lässt sich dann noch zusätzlich der Aufpunkt der Gerade variieren. Dies nennt man auch "Beamwalk". Ein Doppelablenker kann den Strahl also nicht nur im Winkel verändern, sondern kann den Strahl versetzen. An die Spannungsquellen der Ablenkelemente werden hohe Anforderungen gestellt, auf welche im Abschnitt 3.2.2 näher eingegangen wird.

### 3.1.5 Elektrostatische Quadrupollinse



**Abbildung 3.9:** Elektrostatische Quadrupollinse. (a) Frontalansicht: Zu sehen ist die geerdete Aperturblende. (b) Seitenansicht: Die elektrischen Anschlüsse sind weit entfernt von der geerdeten Apertur um Überschläge zu vermeiden. (c) Explosionsansicht: Die Elektroden sind kürzer als der Abstandsring, um bei hohen Spannungen Überschläge zu vermeiden.

Es gibt viele Arten in der Elektronenoptik eine Abbildung zu realisieren. Um große Vergrößerungen ( $M \geq 1000$ ) zu erreichen sind mehrere Einzellinsen notwendig. Man unterscheidet, wie bei den Ablenkelementen, zwischen magnetischen Einzellinsen und elektrostatischen Einzellinsen. Im hier benutzten Aufbau sind Einzellinsen allerdings nicht sehr praktikabel, da sie eine Vergrößerung in alle Richtungen ermög-

---

lichen. Aufgrund des Strahlteilers wird hier aber nur eine Vergrößerung senkrecht zum Biprismafaden benötigt. Vergrößert man in alle Richtungen, verliert man sehr viel Signal, was eine längere Integrationszeit mit sich zieht und somit die Stabilität des Experiments insgesamt sehr viel größer sein muss. Dies kann man umgehen, indem man sogenannte elektrostatische Quadrupollinsen verwendet. Sie bestehen aus 4 zylindrischen Elektroden, die auf einem Kreis angeordnet sind. Die optimale geometrische Elektrodenform wären eigentlich hyperbolisch geformte Elektroden, da diese aber sehr schwer hergestellt werden können, werden die hyperbolischen Elektroden durch sphärisch geformte angenähert. Wichtig dabei ist, dass der Inkreisradius  $G_0$  der vier Elektroden im Verhältnis zum Elektrodenradius  $R$  steht. Das Verhältnis ist  $R = 1.147G_0$  [88]. Die gegenüberliegenden Elektroden besitzen jeweils dieselbe Spannung, während die nebeneinanderliegenden Elektroden die gegensätzliche Spannung haben. Eine Quadrupollinse hat somit eine fokussierende und eine defokussierende Ebene, welche senkrecht zueinander stehen. Mit solch einer Linse sind Vergrößerungen von  $M \approx 2500$  ohne großen Aufwand erreichbar, ohne jedoch den großen Signalverlust einer Einzellinse hinnehmen zu müssen. Hier im Experiment sind insgesamt vier Quadrupollinsen verbaut, wie in Abbildung 3.1 zu sehen. Die erste um den stark aufgespaltenen Strahl wieder zusammenzuführen, dann die Linsen zwei und drei um eine Vergrößerung senkrecht zum Faden zu erreichen und die Linse vier für eine Vergrößerung parallel zum Faden. Baulich sind alle Linsen gleich. Der entscheidende Faktor ist hierbei die Länge der Elektrode  $l=18$  mm, der Radius der Elektrode  $r=4,5$  mm und der Inkreisradius  $G_0 \approx 3,92$  mm des Bauteils.

### 3.1.6 Wienfilter

Der Wienfilter ist eine Kombination aus einem magnetischen und einem elektrostatischen Ablenker, welche in die entgegengesetzte Richtung ablenken. Der elektrostatische Ablenker ist aufgebaut, wie oben bereits geschrieben. Es sind zwei Kondensatorplatten mit gegensätzlicher Polung, so dass das Nullpotential entlang der optischen Achse verläuft. Der magnetische Ablenker besteht aus einem Spulenpaar mit Polschuhen, so dass im Ablenker ein homogenes Magnetfeld entsteht. Um das Magnetfeld abzuschirmen, besteht das Gehäuse des Bauteils aus Weicheisen, ebenso die Aperturen. Das Gehäuse ist geerdet. Der im Experiment verbaute Wienfilter ist in Abbildung 3.10 zu sehen. Da die Ablenkrichtung vom magnetischen und elektrostatischen Ablenker in entgegengesetzte Richtung zeigen, kann man



**Abbildung 3.10:** Wienscher Filter. Zu sehen ist die Frontalansicht ohne die Abschirm-Aperturen aus Weicheisen. Außerdem sind die gekrümmten Kondensatorplatten und das Spulenpaar gut sichtbar. Durch die Anordnung ist die Ablenkung in jeweils die Selbe Richtung. Um das Magnetfeld abzuschirmen ist das Gehäuse ebenfalls aus Weicheisen.

den Wienfilter im so genannten ausgeglichenen Modus betreiben. Man findet also für jede Ablenkspannung am Kondensator einen Spulenstrom, so dass sich die Ablenkung der beiden Ablenker gerade aufhebt. Aufgrund des magnetisierbaren Kerns der Wienspulen, weisen die Spulen eine starke Hysterese auf. Gerade beim häufigen Hin- und Herschalten der Spulenströme, um verschiedene ausgeglichene Wien-Einstellungen anzufahren, sorgt dies dafür, dass beim gleichen Strom die Ablenkung nicht immer ausgeglichen wird. Durch häufiges Umpolen stellt sich allerdings eine Sättigungsmagnetisierung ein, so dass die Hysterese immer kleiner wird. Laut Wohland [27] lässt sich für den Wienfilter eine Brennweite definieren. Die Bahn eines Elektrons weit entfernt der optischen Achse erfährt eine Krümmung. Dadurch werden achsferne Strahlen leicht beeinflusst. Berechnet man die Brennweite, erhält man

$$f_{WF} = \frac{1}{l} \left( 2 \cdot a \frac{U_b}{U_{WF}} \right) \quad (3.1)$$

Bei einer Plattenlänge von  $l = 11,75$  mm und einem Plattenabstand  $a = 8,75$  mm würde die Brennweite in unserem Fall im Bereich von mehreren Metern liegen. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn die Kondensatorplatten plan sind. Die Linsenwirkung entsteht durch die unterschiedlichen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ -Feldern in den Randbereichen des Wienfilters. Im Vergleich zu den elektrostatischen Ablenkern sind jedoch die Kondensatorplatten nicht plan, sondern sind so geformt, dass sie die Randfelder

---

der Spulen imitieren, wie in Abbildung 3.10 zu sehen. Die Brennweite des hier verwendeten Wienfilters ist also größer als die berechneten Werte. Wie man in Abbildung 2.12 sehen kann, ändert sich in diesem Aufbau weder der Streifenabstand, noch die Phasenlage oder die Intensität der Streifen. Jedoch ist dieser Sachverhalt zu berücksichtigen, wenn der Strahlengang länger wird. Eine genaue Betrachtung der Brennweite des Wienfilters und eventueller Geometrieangepassung der Kondensatorplatten ist dann unabdingbar.

### 3.1.7 Bilddrehspeule

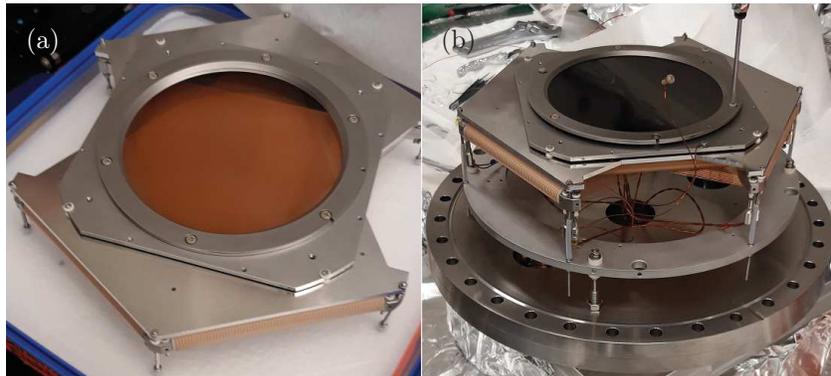


**Abbildung 3.11:** Bilddrehspeule. Front, Rück und Seitenansicht der Bilddrehspeule. Der Spulenkörper ist aus Edelstahl gefertigt. Die Spule selbst wird auf eine Keramikhülse gewickelt und auf den Spulenkörper geschoben. Zur Feldverstärkung sind manche Spulenkörper aus Weicheisen gefertigt.

Der Elektronenstrahl ist rotationssymmetrisch. Eine Drehung des Strahls wird erst notwendig, wenn, wie hier durch den Biprismafaden, eine Richtung vorgegeben wird. Dadurch wird die Drehung des Strahls ein kritischer Parameter. Da eine Quadrupollinse eine fokussierende Ebene hat, ist es wichtig den Strahl nicht nur in der Ausbreitungsrichtung durch Ablenker auszurichten, sondern auch den Fadenschatten durch Drehungen auf die richtige Ebene der Linse zu justieren um eine maximale Vergrößerung zu erzielen. Zwar sitzen alle elektronenoptische Elemente auf einer optischen Bank und sind mit großer Präzision gefertigt, aber schon kleine Abweichungen von wenigen Mikrometern machen ein Nachjustieren erforderlich. Auch das schräge Durchqueren einer Quadrupollinse kann den Effekt erzeugen, dass sich

das Bild dreht. Deshalb sind vor allen richtungskritischen Bauteilen, wie dem Überlagerungsquadrupol oder den Vergrößerungsgradrupolen, nicht nur Doppelablenker verbaut, um die optische Achse zu treffen, sondern auch Bilddrehspulen, um auf die richtige Vergrößerungsebene zu justieren. Die Spule ist auf eine Glaskeramikhülse gewickelt, welche dann auf einen geerdeten Edelstahlhalter geschoben wird. Manche Bilddrehspulen haben, um ein starkes magnetisches Feld zu erzeugen, einen Kern aus magnetisierbarem Weicheisen. Aus diesem Grund haben manche Drehspulen eine Hysterese und müssen in regelmäßigen Abständen entmagnetisiert werden. Auf die durchfliegenden Elektronen wirkt hierbei die Lorentz-Kraft  $\vec{F}_L = e(\vec{v} \times \vec{B})$ . Da das Magnetfeld  $\vec{B} \sim I$  ist, lässt sich der Drehwinkel durch den Spulenstrom einstellen.

### 3.1.8 Detektor



**Abbildung 3.12:** Delay Line Detektor DLD HEX100 mit innen liegender Anode. (a) Blick auf die Auffängeranoden. Zu sehen sind die drei Anoden, welche jeweils um  $60^\circ$  zueinander orientiert sind. (b) Zweistufiger MCP als Elektronenvervielfacher wird vor die Auffängeranoden gesetzt. Der Detektor ist auf einem CF-250 Flansch befestigt und wird direkt an der Kammer montiert.

Zur Bestimmung der supraleitenden Eigenschaften eines Niob-Feldemitters, wie sie in Abschnitt 2.6 beschrieben wurden, ist ein Detektor notwendig, welcher eine hohe räumliche, aber auch zeitliche Auflösung besitzt. Deshalb ist in diesem Experiment ein sogenannter "Delay Line Detektor" (kurz DLD) der Firma Roentdek verbaut. Das Grundprinzip der Funktionsweise wird von Jagutzki in [89] beschrieben. Er besteht im Grunde aus drei Teilen. Der erste Teil ist der Elektronenvervielfacher,

---

ein handelsüblicher zweistufiger Mikrokanalplattenverstärker (MCP<sup>6</sup>), welcher aus einem Elektron eine Elektronenlawine erzeugt (Verstärkungsfaktor ca  $1 \cdot 10^7$ ). Der zweite Teil ist die Auffängeranode. In dieser speziellen Bauart des Detektors sind drei Auffängerelektroden verbaut. Sie verlaufen meanderförmig und sind jeweils  $60^\circ$  zueinander orientiert. Der dritte Teil ist die Ausleseelektronik, welche das Signal verarbeitet und digital zum Rechner sendet.

Trifft also ein Elektron auf den Detektor wird örtlich eine Elektronenlawine aus dem Mikrokanalplattenerstärker auf die Auffängerelektrode geschickt. Zusätzlich wird durch den Stromfluss ein Trigger-Puls in der Ausleseelektronik ausgelöst. Dieser Puls gibt die relative Auftreffzeit auf den Detektor an. Die ausgelöste Elektronenlawine löst in den drei Auffängerelektroden einen Spannungspuls aus, welcher sich entlang der meandernden Elektroden ausbreitet - und zwar in beide Richtungen. Die Elektronik bestimmt dann die Zeitdifferenz der ankommenden Signale für jede Auffängerelektrode. Aus den sechs Zeitsignalen und dem Zeitsignal des Trigger-Pulses der MCP kann der Auftreffpunkt des Events örtlich mit hoher Genauigkeit bestimmt werden. Der DLD zeichnet sich durch eine hohe Zeit- (100 ps) und Ortsauflösung (50  $\mu\text{m}$ ) aus, mit der Einzelteilchenereignisse aufgenommen werden können. Laut Hersteller besitzt der Detektor eine absolute Detektionseffizienz von bis zu 81%. Ein weiterer, nicht zu vernachlässigender Vorteil des Detektors ist, dass die Daten direkt digital am Rechner als Text-Datei vorliegen und somit mit Sekundärprogrammen wie MATLAB weiterverarbeitet werden können. Mit dem Detektor können Zählraten bis zu 1 MHz aufgenommen werden. In unserem Experiment konnten Zählraten bis zu 250 kHz aufgenommen werden, was jedoch eher an der schwachen Rechnerkapazität lag und weniger am Detektor selbst. Wie bereits in Abschnitt 2.6.3 beschrieben, ist das Ziel auch Elektronen messen zu können, welche paarweise am Detektor auftreffen. Dies ist mit solch einem DLD möglich, solange die Teilchen einen gewissen räumlichen Abstand zueinander haben. Liegen die Teilchen mindestens 6 mm räumlich getrennt, ist es dem DLD und der Software möglich, gleichzeitige Events zu messen. Die Begrifflichkeit "gleichzeitig" ist hierbei vorsichtig zu behandeln. Es bedeutet, dass die Teilchen im gleichen Zeit-Bin liegen, was der kleinsten Zeitauflösung des Detektors entspricht, also etwa 100 ps. Für die zwei Experimente, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, die Datenübertragung mittels Materiewellenmodulation und die Untersuchung supraleitender Feldemitter, wurden zwei DLD's verwendet. Der Detektor wie er in Tübingen am Experiment zur Datenübertragung verwendet wurde, besitzt einen

---

<sup>6</sup>Aus dem englischen Micro Channel Plate

aktiven Durchmesser von 40 mm, der DLD, welcher in Berkeley verwendet wurde um die supraleitenden Feldemitter zu vermessen besitzt einen Aktiven Durchmesser von 100 mm. Die Ausleseelektronik und der Detektoraufbau unterscheiden sich nur minimal. Eine genauere Beschreibung der Funktionsweise des Detektors findet sich auch in [90], Abschnitt 3.1.7 wieder. Die hohe Orts- und Zeitaufösung und die Fähigkeit, einzelne Elektroneneinschläge detektieren zu können, erlauben es der Detektor Korrelationen zwischen zwei Elektronen-Events zu analysieren, wie sie in Abschnitt 2.7 beschrieben sind. Mithilfe der Korrelationsfunktionen konnte in der Arbeitsgruppe bereits Erfahrungen gesammelt werden, indem Elektroneninterferenzmustern analysiert wurden, um Störungen zu identifizieren und herausrechnen zu können [91], [92], [73] und [74].

---

## 3.2 Elektronik

Eine große Herausforderung war es, die Stabilität und Reproduzierbarkeit des Experiments deutlich zu verbessern. Als Hauptfehlerquelle hierfür wurde die Elektronik ausgemacht. Da die Elektronik von der ehemaligen Arbeitsgruppe um Professor Hasselbach übernommen wurde, ist sie teilweise 25 Jahre alt. Es war deshalb ein Hauptaugenmerk die Elektronik neu zu entwerfen und zu bauen. Ziel war hierbei, Elektroneninterferenzstreifen phasenstabil über mehrere Stunden aufnehmen zu können, ohne Drifts durch die Elektronik korrigieren zu müssen, was für das Experiment der Materiewellenmodulation und für Messungen der Dekohärenz, wie sie von N. Kerker [34] gemacht wurden, essentiell ist. Dabei wurde zuerst die Spannungsversorgung für die Elektronikmodule selbst neu gebaut. Ursprünglich wurde das Experiment ausschließlich durch 6 Autobatterien versorgt. Die Fähigkeit des Batteriebetriebs sollte auf jeden Fall beibehalten werden, damit das Experiment auch für lange Messperioden stabil funktioniert und unabhängig von Netzfluktuationen reproduzierbar Daten aufgenommen werden können. Dafür wurde die Verkabelung für die Erdung erneuert, damit durch Erdschleifen keine Störfrequenzen ins Experiment eingebracht werden. Als nächstes wurden sämtliche Spannungsversorgungen für die elektrostatischen Ablenkelemente neu geplant und gebaut, ebenso die Hochspannungsmodule für die elektrostatischen Quadrupollinsen. Die Stromquellen wurden getestet und die Module soweit modifiziert, um eine genügend große Stabilität zu gewährleisten. Um das Experiment der Datenübertragung durchführen zu können, wurde darüber hinaus ein rechnergesteuertes Modul für den Wienfilter geplant, gebaut und getestet. Ebenfalls wurde ein neues Modul für den elektrostatischen Biprismafaden im Experiment realisiert. Die dafür nötigen Arbeiten wurden in Zusammenarbeit mit meiner Kollegin N. Kerker und in Kooperation der mechanischen und elektronischen Werkstätten der Universität durchgeführt.

### 3.2.1 Spannungsversorgung

Als das Experiment übernommen wurde, war es schwierig Bilder mit Integrationszeiten von mehr als 2 Minuten aufzunehmen. Der Drift durch die Elektronik war so groß, dass der Kontrast nach kurzer Zeit vollkommen verloren ging. Nach einer ausgiebigen Fehleranalyse wurde als eine Fehlerquelle die Spannungsversorgung der Experimentiersteuerung ausgemacht. Das Experiment wurde ursprünglich aus Stabilitätsgründen von 6 Autobatterien<sup>7</sup> versorgt. So konnten netzunabhängig die Versor-

---

<sup>7</sup>Standard Bleiakkumulatoren mit 44 A h Kapazität

gungsspannungen  $\pm 12\text{ V}$ ,  $\pm 24\text{ V}$  und  $\pm 48\text{ V}$  erzeugt werden. Sonderspannungen von  $16\text{ V}$  und  $18\text{ V}$  wurden durch Spannungsregler abgeleitet. Durch den Batteriebetrieb konnte eine große Störquelle für Elektroneninterferometrie-Experimente, das  $50\text{ Hz}$ -Netzbrummen der normalen Stromversorgung, ausgeschlossen werden. Ein Defekt in einer Steuereinheit für die Quadrupollinsen machte die gesamte Steuerelektronik des Experiments sehr instabil. Durch den hohen Stromverbrauch des defekten Moduls wurden die Batterien überlastet und die Spannungsregler zerstört. Dadurch war keine stabile Spannungsversorgung der Experimentsteuerung möglich, was sich in den Lang- und Kurzzeitdrifts widerspiegelte. Das rasche Entladen der Batterien verursachte hierbei die Langzeitdrifts und die zerstörten Spannungsregler die Kurzzeitdrifts. Durch eine gründliche Analyse des Experiments wurden die Probleme und Defekte erkannt und behoben. Um solch einen Fehler zukünftig auszuschließen, wurde eine neue Versorgungseinheit für die Experimentsteuerung geplant und gebaut. Die Fähigkeit auf Batteriebetrieb umschalten zu können wurde beibehalten und dahingehend erweitert, dass auch eine Netzversorgung möglich ist. So besteht die Versorgungseinheit aus drei Teilen: Die Netzversorgung, die Batterieversorgung und der Spannungsverteiler an dem die Experimentsteuerung angeschlossen wird. Die Batteriespannungen und Netzspannungen werden zum Spannungsverteiler geführt, in welchen ein Spannungswächter integriert wurde, um zu erkennen, falls die Spannung einen Grenzwert unterschreitet, was entweder einer weit fortgeschrittenen Entladung der Batterien oder einem defekten Spannungsregler entspricht. Des Weiteren wurde in jeden Spannungsstrang im Verteiler eine  $3\text{ A}$ -Sicherung eingebaut, um einen zu hohen Stromfluss unterbinden zu können. Die Elektronik der Versorgungseinheit befindet sich in geerdeten Metallgehäusen, um das Einstrahlen von Störfrequenzen weitestgehend zu unterbinden. Ebenso sind alle Kabel geschirmt. Um eine konstante Betriebsspannung während der Messung zu gewährleisten, ist, wie bereits erwähnt, ein Akkuvächter verbaut, welcher einen Spannungsabfall auf  $11,7\text{ V}$  je Batterie anzeigt. Damit ist eine Messzeit von mindestens  $6\text{ h}$  gewährleistet, bevor die Batterien wieder aufgeladen werden müssen. Um Justagearbeiten durchführen zu können, besteht die Möglichkeit einer externen Netzspannungsversorgung, welche die benötigten Spannungen liefert, um die Elektronik betreiben zu können. Dazu wird die Netzspannung mit einem Ringtransformator mit Mittenabgriff auf  $20\text{ V}$  und  $40\text{ V}$  Wechselspannung heruntertransformiert und anschließend mit Brückengleichrichtern, Spannungsreglern und Glättungskondensatoren auf die benötigten  $\pm 12\text{ V}$  und  $\pm 24\text{ V}$  stabilisiert. Auch aus sicherheitstechnischer Sicht ist ein Betrieb der Interferometersteuerung in diesem Kleinspannungsbereich zu bevorzugen, da

die Versorgungsspannung keinen extra Berührungsschutz erfordert. Das Gehäuse wird über einen Erdungsstecker geerdet. Mit dieser neuen Versorgungsspannung sind auch Messungen mit Integrationszeiten von  $\geq 2$  Stunden problemlos möglich.

### 3.2.2 Hochspannungsmodule



**Abbildung 3.13:** Spannungsquelle für einen Einfach-Ablenker (a) Frontansicht: Zu sehen ist die Grob-Fein-Justage, der Erdungsschalter und der Schalter zum Umpolen. (b) Rückansicht: Zu sehen sind die Ausgänge als BNC-Stecker und der Spannungsversorgungsstecker (c) Innenansicht: Pro Platine sind zwei Spannungsmodule (pos. und neg.) angebracht. Im unteren Teil sieht man die 6 Reedrelais zum Erden und Umpolen der Ausgänge.

Die neu geplanten Module sollen für die elektrostatischen Ablenker Spannungen von  $\pm 500$  V und für die Quadrupollinsen Spannungen von  $\pm 1000$  V liefern. Die Spannungen müssen dabei sehr präzise einstellbar sein und eine hohe Stabilität aufweisen. Dabei wurde auch Wert darauf gelegt, dass die Module mit einer Kleinspannung von maximal  $\pm 24$  V betrieben werden können, so dass auch ein Batteriebetrieb möglich ist. Das Design der Spannungsmodule orientiert sich am bewährten Entwurf, wie er im Zuge der Dissertation von G. Schütz [93] entstanden ist. Herzstück der Spannungsversorgung sind hierbei kommerziell erhältliche Hochspannungsmodule<sup>8</sup> zur Platinenmontage. Diese Module sind sehr rauscharm, benötigen eine Versorgungsspannung von 12 V und eine Steuerspannung von 5 V. Auf einer Platine sind jeweils zwei Module verbaut: Für die negative und für die positive Spannung. Ein Modul für einen Ablenker (horizontale und vertikale Ablenkung) ist in Abbildung 3.13 dargestellt. Man benötigt also für jeden Doppelablenker 4 Platinen mit insgesamt 8 Hochspannungsmodulen und für eine Quadrupollinse

<sup>8</sup>ISEG - BPS4.0W

eine Platine mit insgesamt 2 Hochspannungsmodule. Die Steuerspannung wird mit einem Präzisionshalbleitermodul<sup>9</sup> erzeugt und sowohl als Referenz-, als auch als Steuerspannung verwendet. Die Steuerspannung kann dann über zwei 10-Gang Potentiometer (Grob- und Feineinstellung) eingestellt werden, wodurch mit der Feineinstellung Spannungen im Bereich 10 mV einstellbar sind. Dadurch ergibt sich eine große Stabilität und Genauigkeit. Die Ausgänge lassen sich mit einem Trimmer abgleichen, so dass der negative und positive Kanal nur eine minimale Spannungsdifferenz über den kompletten Spannungsbereich aufweisen. Über eine Relais-Schaltung lassen sich die Ausgänge umpolen und erden. Die Spannung wird mit BNC-Kabeln zur störungsfreien Übertragung zum Rezipienten geführt. Für die Quadrupollinsen wurde der genau gleiche Aufbau verwendet, allerdings mit anderen Hochspannungsmodulen, so dass Spannungen bis  $\pm 1000$  V möglich sind. Bei den Spannungsquellen für die Quadrupole gibt es ebenfalls eine Feineinstellung über ein 10-Gang Potentiometer mit der die Spannung im mV-Bereich eingestellt werden kann. Wie bei den Modulen für die Ablenker, werden die Spannungen der Quadrupolmodule mit geschirmten SHV-Kabeln zum Rezipienten geführt.

### 3.2.3 Stromquellen

Im Gegensatz zu den Spannungsquellen war es möglich die bereits vorhandenen Stromquellen aus dem Experiment von P. Sonntag [78] zu reparieren und zu modifizieren, so dass kein Bedarf bestand, neue Stromquellen zu entwickeln. Im ersten Schritt wurde die Versorgungsspannung der Stromquellen auf  $\pm 24$  V gesetzt, so dass sie sowohl im Batteriebetrieb, als auch im Netzbetrieb funktionieren können, ohne zwischengeschaltete Spannungsregler für Sonderspannungen. Im zweiten Schritt wurden die einzelnen Module überprüft und gegebenenfalls repariert oder ausgetauscht. Es handelt sich hierbei um bipolare  $\pm 100$  mA Stromquellen, bei denen der Strom wahlweise mit einem 10-Gang Potentiometer ( $10 \text{ k}\Omega$  eingestellt werden kann, oder mit einer externen 5 V Steuerspannung. Dabei ist der Nullpunkt beim Potentiometer auf die Mitte gesetzt, also auf  $5 \text{ k}\Omega$ . Mit dem Potentiometergetriebe lassen sich die Ströme auf  $400 \mu\text{A}$  genau einstellen. Mit den Stromquellen werden die Bilddrehspulen im Experiment betrieben.

---

<sup>9</sup>Spannungsreferenz 5 V - LT1021DCS8-5

---

### 3.2.4 Spannungsquelle für Biprisma

Ein sehr kritisches Bauteil ist die Versorgungsspannung der Biprisma-Strahlteiler. Eine Instabilität der Spannung macht eine Elektroneninterferenzmessung unmöglich. In der ausgiebigen Fehleranalyse wurde das fehlerhafte Modul schnell identifiziert und ein entsprechend neues Gerät entworfen und gebaut. Wie die anderen Module, ist die Betriebsspannung auf  $\pm 12\text{ V}$  gelegt, so dass ein Netz- und Batteriebetrieb möglich ist. Das Modul lässt sich umschalten zwischen  $\pm 2\text{ V}$  und  $\pm 10\text{ V}$ . Wie bei den Stromquellen auch, lässt sich die Spannung über ein 10-Gang Potentiometer einstellen, wobei die Mittenstellung die Nullspannung liefert. Somit ist die feinste einstellbare Spannung am Potentiometergetriebe  $8\text{ mV}$ . Um Störsignale zu verhindern, ist die Elektronik in einem geerdeten Metallgehäuse untergebracht und die Signalspannung wird mittels geschirmten BNC-Kabeln zum Rezipienten geführt.

### 3.2.5 Ansteuerbare Wienfilterbox



**Abbildung 3.14:** Modulationseinheit für den Wienfilter (a) Frontansicht: Bedienpanel des Microcontrollers mit USB Anschluss für die Rechnersteuerung (b) Rückansicht: Ausgänge, v.l.n.r.: Extraktionsblende 1, Extraktionsblende 2, Wienkondensator, Wien-spule, 10 V-Referenzspannung (c) Innenansicht: v.l.n.r.: Platinen für Hochspannung haben gleichen Aufbau wie für Ablenker. Platine für Wienkondensator und Spannungsquelle für Spule mit Referenzspannung.

Der Wienfilter und seine Funktion wurde bereits in Abschnitt 2.5 und 3.1.6 ausgiebig beschrieben. Deswegen benötigt man zum Ansteuern des Bauteils eigentlich nur eine Spannungsquelle wie für einen elektrostatischen Ablenker und eine Stromquelle wie für eine Bildspule. Um den Wienfilter jedoch als Sendeeinheit für die in Abschnitt 6 beschriebene Methode der Signalübertragung durch Materiewellenmodulation nutzen zu können, muss man schnell zwischen zwei ausgeglichenen

Zuständen hin und her schalten können. Um dies zu erreichen, wurde eine neue Steuerung für den Wienfilter entworfen und entwickelt, wie sie in Abbildung 3.14 zu sehen ist. Sie besteht aus Spannungsquellen für den elektrostatischen Ablenker, wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben, und einer Stromquelle für den magnetischen Ablenker, welche beide durch einen Microcontroller gesteuert werden können. Durch die verbauten 16-Bit digital/analog-Wandler sind theoretisch 65536 verschiedene Strom/Spannungswerte einstellbar. Praktisch ist die kleinste Auflösung für die Spannungsquelle auf 100 mV gesetzt und 100  $\mu$ A bei der Stromquelle. Über eine serielle Schnittstelle (USB-2.0-Mini-B-Stecker) wird die Steuerung mit dem Computer verbunden. Um keine Störquellen einzukoppeln, ist der Microcontroller galvanisch durch Optokoppler vom Eingang getrennt. Wie alle anderen Strom und Spannungsversorgungen wird die Wienfilter-Steuerung mit  $\pm 12$  V betrieben und kann deshalb sowohl im Netz- als auch im Batteriebetrieb benutzt werden. Zusätzlich wurde in die Wienfilter-Steuerung eine  $\pm 10$  V Spannungsquelle eingebaut, mit welcher auch die Biprismaspannung vom PC aus gesteuert werden kann und zwei  $\pm 3000$  V Spannungsquellen, um die Extraktionsblende ebenfalls rechnergesteuert betreiben zu können. Durch den Microcontroller lassen sich die Werte mit einer Geschwindigkeit im kHz-Bereich ändern, die effektive Geschwindigkeit ist durch die Kapazitäten und Induktivitäten der Kabel und Bauteile jedoch erheblich geringer. Vor allem die große Induktivität der Wienspule bremst die Umschaltgeschwindigkeit. Mit angeschlossenen Bauteilen lassen sich die Werte im Bereich von 100 Hz ändern. Zur Ansteuerung des Geräts wurde, ähnlich zu der Software zum Ausglühen der Spitzen, eine grafische Oberfläche in Matlab programmiert. Damit lassen sich alle Werte des Geräts kontrollieren.

# Kapitel 4

## Simulationen zum Strahlengang

Für die bessere Planung des Experiments und zum besseren Verständnis, wurden im Zuge dieser Arbeit viele verschiedene Arten von Simulationen durchgeführt. Ziel war es hierbei die Aufspaltung im Wienfilter besser abschätzen zu können und damit Aussagen über die Breite der Wienkurve machen zu können. Um den Wienfilter schnell zwischen maximalem und minimalem Kontrast umschalten zu können, spielt die Breite der Wienkurve eine entscheidende Rolle, denn sie bestimmt die Wienspannung und den Wienstrom, die zum Umschalten benötigt werden. Dabei wurden zum einen Simulationen der Elektronenoptik in dem kommerziell verfügbaren Simulationsprogramm COMSOL Multiphysics durchgeführt, außerdem in dem Programm SimIon und es wurde in MATLAB der Strahlengang mithilfe von Transfermatrizen berechnet und beschrieben. Alle drei Methoden gaben eine konsistente Lösung der Probleme ab. Mit Hilfe der hier genannten Simulationen konnte die Strahlaufspaltung, welche mit Hilfe des Wienfilters direkt gemessen wurde, bestätigt werden [34]. Im Folgenden wird auf die Transfermatrizen näher eingegangen und auf die Überprüfung der Transfermatrizen einer Quadrupollinse und eines Ablenkens mittels COMSOL Multiphysics.

### 4.1 Transfermatrizen

Eine bekannte Methode aus der geometrischen Optik ist die Berechnung von Strahlengängen über Transfermatrizen. Die Beschreibung orientiert sich an Wollnik [88]. Dabei wird von einem Vektor  $\vec{v}_0$  ausgegangen, welcher den Anfangsort  $x_0$  und dem dazugehörigen Winkel  $\tan \alpha_0$  beschreibt, also  $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \tan \alpha_0 \end{pmatrix}$ . Dabei wird der Ort als Abstand von der optischen Achse angegeben und der Winkel im Bezug zur

optischen Achse. Ein optisches Bauteil wird als  $2 \times 2$ -Matrix dargestellt und wirkt damit auf den Ort und auf den Winkel. Man erhält dann nach Durchlaufen des Bauteils einen neuen Vektor  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \tan \alpha_1 \end{pmatrix}$ . Dieselbe Methode kann man nicht nur auf die geometrische Optik anwenden, sondern auch auf die Elektronenoptik. Im Folgenden werden die für dieses Experiment wichtigen Bauteile als Transfermatrix beschrieben.

### 4.1.1 Driftstrecke

Als erstes "Bauteil" wird hier eine freie Flugstrecke beschrieben, bei der keine Kräfte auf die Elektronen wirken. Der Winkel der Flugbahn wird also nicht verändert. Demnach ergibt sich als Matrix

$$M_{Drift} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Hierbei beschreibt  $d$  die Länge der Driftstrecke. Man erhält also

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \tan \alpha_1 \end{pmatrix} = M_{drift} \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \tan \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + d \cdot \tan \alpha_0 \\ \tan \alpha_0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

### 4.1.2 Ablenker

Wie bereits zuvor beschrieben, ist ein Ablenkelement ein Plattenkondensator. Die Elektronenbahn im Plattenkondensator ist eine Parabelbahn, wie bei einem schiefen Wurf. Die Matrizen lassen sich herleiten als:

$$M_{Abl_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\tan \alpha_{Abl}}{\tan \alpha_0} \end{pmatrix}, \quad M_{Abl_1} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{Abl_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\tan \theta}{\tan \alpha_{Abl}} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

daraus folgt:

$$x_1 = \frac{U_{Abl}}{4 \cdot U_b \cdot d} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha_0} \cdot l^2 + \tan \alpha_0 l + x_0 \quad (4.4)$$

$$\alpha_{Abl} = \arctan \left( \frac{(x_1 - x_0)}{l} \right) \quad (4.5)$$

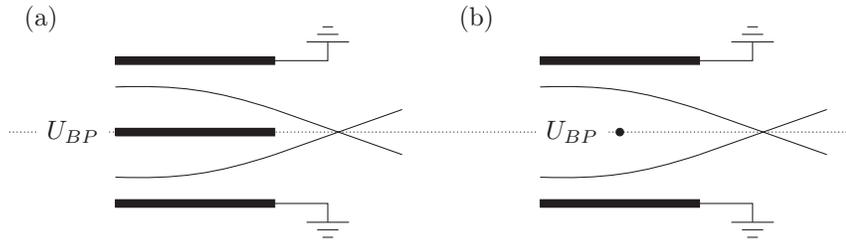
$$\theta = \arctan \left( \frac{l}{2d} \frac{U_{Abl}}{U_b} \frac{1}{\cos^2 \alpha_0} + \tan \alpha_0 \right). \quad (4.6)$$

Mit  $d$  wird der Plattenabstand und mit  $l$  die Plattenlänge bezeichnet. Die an die Ablenkplatten angelegte Spannung wird mit  $U_{Abl}$  bezeichnet und die Beschleunigungsspannung wird mit  $U_b$  angegeben. Es ist zu beachten, dass an den Ablenkplatten die Spannung  $U_{Abl}$  und  $-U_{Abl}$  angelegt wird, daher ist die effektive

Spannung am Ablenker  $2 \cdot U_{Abl}$ . Das Vorgehen ist im Prinzip folgendermaßen. Es wird zuerst Ausflugsunkt  $x_1$  am Deflektor berechnet ( $M_{Abl_0}$ ) und der Winkel  $\alpha_{Abl}$ . Anschließend wird das Elektron durch den Ablenker geschickt ( $M_{Abl_1}$ ) und danach der Ausflugswinkel  $\theta$  aus dem Ablenker bestimmt ( $M_{Abl_2}$ ). Damit ergibt sich

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \tan \alpha_1 \end{pmatrix} = M_{Abl} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \tan \alpha_0 \end{pmatrix} = M_{Abl_2} \cdot M_{Abl_1} \cdot M_{Abl_0} \begin{pmatrix} x_0 \\ \tan \alpha_0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

### 4.1.3 Biprisma



**Abbildung 4.1:** Das Biprisma kann als geteilter Ablenker mit sehr kleiner Ausdehnung angesehen werden. Die mittlere Platte (a), bzw. der Faden (b) liegt auf einer Ablenkspannung  $U_{BP}$ . Die Transfermatrix für das Biprisma ist dementsprechend dieselbe wie für einen Ablenker mit verschwindender Ausdehnung  $l$ .

Das Biprisma kann man als einen geteilten Ablenker sehen, dessen Ablenkwinkel abhängig davon ist, welchen Weg das Elektron nimmt (siehe Abbildung 4.1). Da jedoch das Biprisma im Vergleich zu einem Ablenker nur eine minimale Ausdehnung hat, fallen die Transfermatrizen für die Driftstrecke weg, und man erhält

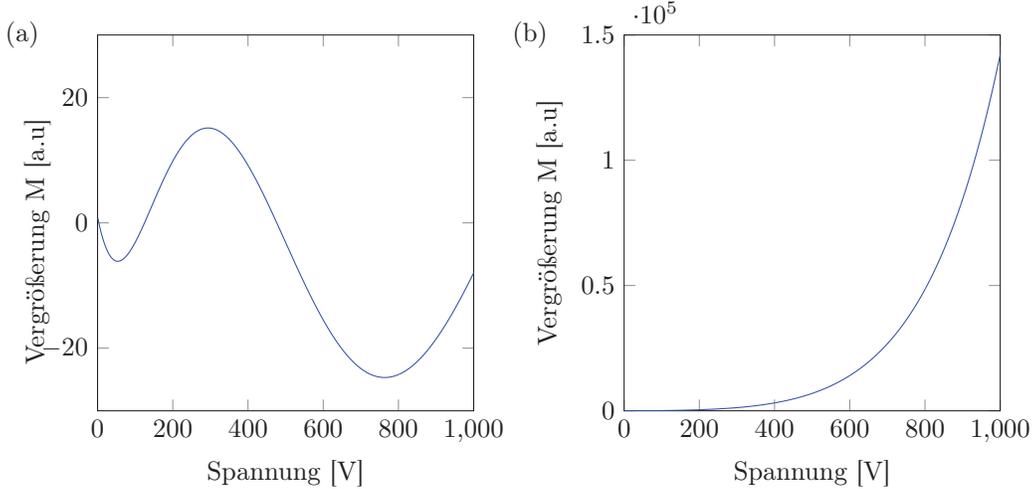
$$M_{BP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\tan(\alpha_0 \pm \gamma)}{\tan \alpha_0} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

wobei

$$\gamma = \frac{\pi}{2 \cdot \ln\left(\frac{R}{r}\right)} \cdot \frac{U_f}{U_b} \quad (4.9)$$

wie in Gleichung 2.6 definiert den Umlenkwinkel. Der Umlenkwinkel ist abhängig davon, auf welcher Seite des Biprismas das Elektron vorbeiläuft. Damit ergibt sich

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \tan \alpha_1 \end{pmatrix} = M_{BP} \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\tan(\alpha_0 \pm \gamma)}{\tan \alpha_0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \tan \alpha_0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$



**Abbildung 4.2:** Dargestellt sind die Vergrößerungen der beiden Ebenen der Quadrupollinse. (a) Fokussierende Ebene: Nach jeder Nullstelle dreht sich das Bild. Die Punkte werden auch Umklapppunkte genannt. Die Vergrößerung in der Ebene ist sehr gering. (b) Defokussierende Ebene: Mit wenigen hundert Volt lassen sich sehr große Vergrößerungen erzielen.

#### 4.1.4 Quadrupollinse

Eine Quadrupollinse hat, wie bereits in Abschnitt 3.1.5 beschrieben, eine fokussierende und eine defokussierende Ebene. Dementsprechend gibt es für die zwei Ebenen zwei verschiedene Beschreibungen.

$$M_f = \begin{pmatrix} \cosh(kl) & \frac{1}{k} \sinh(kl) \\ k \sinh(kl) & \cosh(kl) \end{pmatrix}, \quad M_d = \begin{pmatrix} \cos(kl) & \frac{1}{k} \sin(kl) \\ -k \sin(kl) & \cos(kl) \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

mit  $k = \sqrt{\frac{U_q}{g_0^2 U_b}}$ , wobei  $U_q$  die Spannung an den Elektroden ist,  $g_0$  ist der Innkreisradius im Quadrupol und  $U_b$  gibt die Beschleunigungsspannung der Elektronen an. Mit  $l$  wird die Länge der Elektroden angegeben. Es ist hierbei zu beachten, dass an den Elektroden jeweils  $U_q$  und  $-U_q$  angelegt ist. Man sieht, dass für die beiden Ebenen dann  $k_x^2 = -k_y^2 = k > 0$  ist. Für  $k = 0$ , also wenn keine Spannung an den Quadrupolelektroden anliegt, lassen sich die Matrizen nicht anwenden. Sie müssen dann durch eine Driftstrecke der Länge  $l$  ersetzt werden. Die Transfermatrizen beschreiben hierbei die Wirkung auf die Teilchenbahn, vernachlässigen aber die Länge des Bauteils in der Hinsicht, dass natürlich eine gewisse Wegstrecke durchflogen wird. In den hier gemachten Simulationen wurde die Wirkung des Quadrupols in die Mitte des Bauteils gesetzt. Die Wirkung auf den Vektor sieht dann folgendermaßen

---

aus:

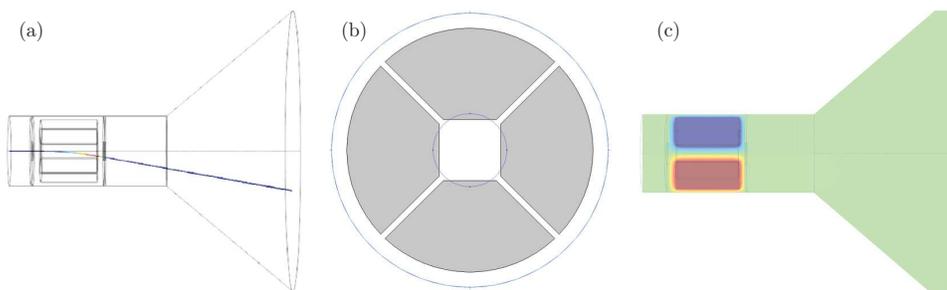
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \tan \alpha_1 \end{pmatrix} = M_{Drift}(l/2)M_{d/f}(k)M_{Drift}(l/2) \begin{pmatrix} x_0 \\ \tan \alpha_0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Der Verlauf der Vergrößerung in beiden Ebenen ist in Abbildung 4.2 dargestellt.

## 4.2 COMSOL Multiphysics

COMSOL Multiphysics ist ein kommerzielles Programm, welches mit numerischen Methoden Differentialgleichungen löst, die physikalischen Problemen zugrunde liegen. Mit der Software kann man Geometrien zeichnen, Modelle erstellen und verschiedene physikalische Sachverhalte simulieren. Um die Strahlengänge der Transfermatrizen zu überprüfen, wurde für das jeweilige Bauteil eine Feldverteilung berechnet und die Teilchenbahnen im Feld simuliert. Auf die genaue Berechnungsmethode soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Im Folgenden werden die Modelle, wie sie in COMSOL erstellt wurden, dargestellt und die Ergebnisse mit den von Transfermatrizen berechneten Werten verglichen. Die zugrundeliegenden Parameter sind in beiden Fällen dieselben. Als weiterer Punkt wurde ein Wienfilter, wie er im Experiment verbaut ist, in COMSOL moduliert, das elektrische Potential und das Magnetfeld simuliert und die Teilchenbahnen ausgewertet.

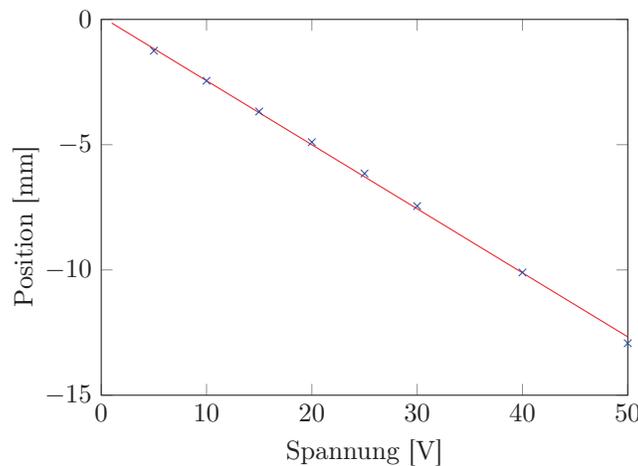
### 4.2.1 Ablenker



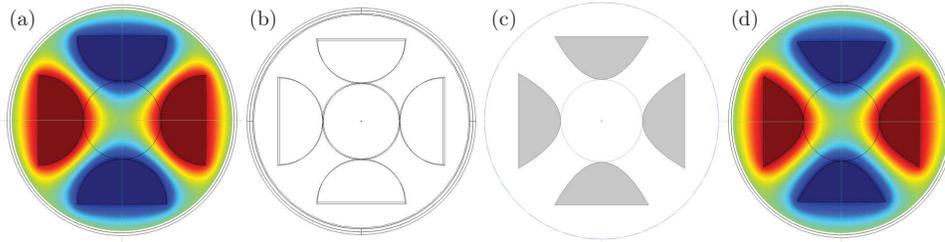
**Abbildung 4.3:** Modell aus COMSOL. (a) Berechnete Teilchentrajektorien durch den Ablenker. (b) Schnitt durch den Ablenker. Die geometrische Form entspricht dem tatsächlich verbauten Ablenker im Experiment. (c) Potentialverlauf bei einer angelegten Spannung von  $\pm 50$  V. Das Null-Potential liegt auf der optischen Achse.

Die Form wurde dem Ablenkelement, wie es in Abschnitt 3.1.4 beschrieben wurde, angelehnt. Der gezeichnete Ablenker hat eine Länge  $l = 18$  mm und einen Plattenabstand  $d = 5$  mm. Um die Randfelder in den Außenraum abzuschirmen, werden

vor und nach dem Ablenkelement geerdete Blenden mit einem Aperturdurchmesser von 6 mm gesetzt. Mit einem adaptiven Gitter wird die Geometrie vom Programm diskretisiert und anschließend die Potentialverteilung an den Elektroden berechnet. Wie im Experiment auch, liegen an den Elektroden jeweils  $U_{Abl}$  und  $-U_{Abl}$  an, so dass das Nullpotential auf der optischen Achse liegt. Der Potentialverlauf ist in Abbildung 4.3 (c) dargestellt. Die Elektronen starten am Koordinatenursprung mit einer Anfangsenergie von 1000 eV. Eine adaptive Zeitdiskretisierung garantiert eine optimal berechnete Wechselwirkung der Elektronen mit dem Feld. Die Flugbahn bei  $U_{Abl} = 50$  V ist in Abbildung 4.3 (a) zu sehen. Die Auftreffpunkte am Ende des Modells wurden ausgewertet und mit den Werten aus den Transfermatrizen eines Ablenkelements selber Geometrie verglichen. Der lineare Verlauf, wie man ihn anhand Gleichung 4.7 vermutet, kann anhand der Simulation bestätigt werden, wie in Abbildung 4.4 dargestellt.

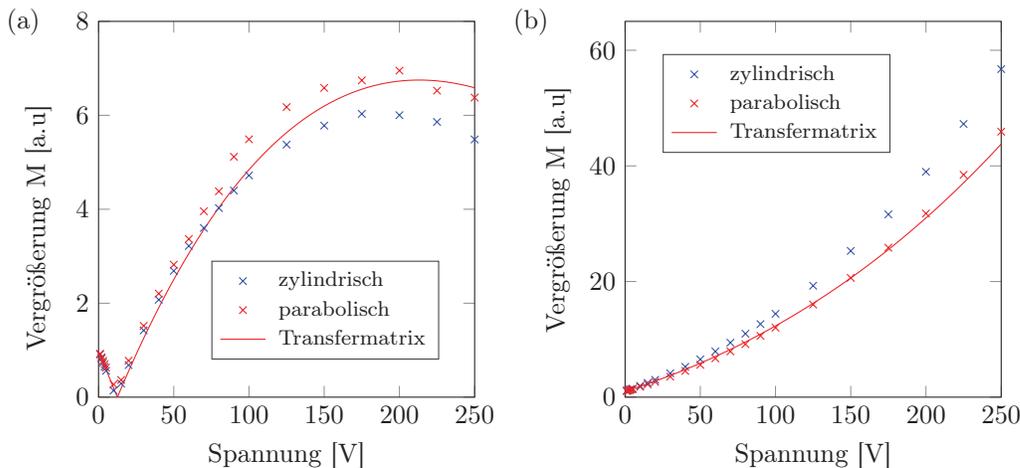


**Abbildung 4.4:** Vergleich der Ablenkwirkung berechnet mit COMSOL (blaue Punkte) und der Transfermatrix für einen Ablenker (rote Linie). Die beiden Berechnungsmethoden liefern dasselbe Ergebnis.



**Abbildung 4.5:** Potentialverlauf und Modell für einen Quadrupol. (a) und (b) zeigen den Potentialverlauf und die Geometrie eines Quadrupols mit zylindrischen Elektroden, (c) und (d) stellen die Geometrie und den Potentialverlauf eines Quadrupols mit parabolischen Elektroden dar. Der Unterschied des Potentialverlaufs auf der optischen Achse ist sehr gering, ist jedoch nicht vernachlässigbar.

## 4.2.2 Quadrupol

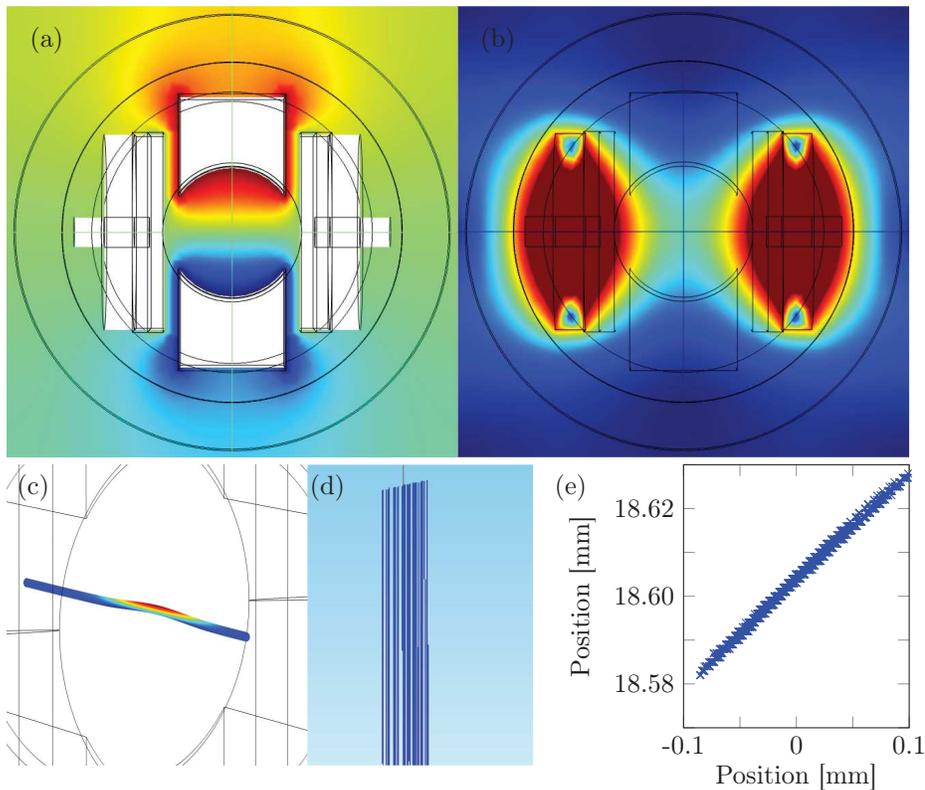


**Abbildung 4.6:** Vergleich der Vergrößerung des Quadrupols von zylindrischen Elektroden und parabolischen Elektroden. (a) Fokussierende Ebene des Quadrupols: Der Verlauf der Transfermatrix wird von keiner der Elektrodenformen exakt wiedergegeben. (b) Defokussierende Ebene: Die parabolisch geformten Elektroden geben dieselben Werte wie von der Transfermatrix berechnet.

Für die Simulation der Quadrupollinse wurde die Linse, wie sie in Abschnitt 3.1.5 dargestellt wurde, verwendet. Die Geometrie und die Abmessungen stimmen mit dem Vorbild überein. Es wurde jedoch noch eine weitere Simulation durchgeführt, bei der die Elektroden nicht zylindrisch, sondern parabolisch sind. Der Innkreisradius  $g_0$  bleibt hierbei unverändert. Wie bereits beschrieben, wird die Geometrie

durch ein adaptives Gitter diskretisiert und anschließend auf dem Gitter die Potentialverteilung an den Elektroden berechnet. Dann werden die Elektronen am Ursprung in einer quadratischen Verteilung der Ausdehnung  $100\ \mu\text{m} \times 100\ \mu\text{m}$  mit einer Anfangsenergie von 1000 eV durch den Quadrupol geschickt. Die Zeitschritte werden adaptiv diskretisiert, um eine optimale Wechselwirkung der Teilchen mit dem Feld zu gewährleisten. Am Auftreffpunkt wird die Verteilung aufgenommen und die Vergrößerung  $M$  in die beiden Richtungen bestimmt. Hierbei ist  $M = \frac{B_{end}}{B_{start}}$ , wobei  $B_{start}$  für die Ausdehnung des Spots steht und  $B_{end}$  das Bild nach Durchfliegen des Quadrupols. Für die defokussierende Ebene erwartet man einen beinahe exponentiellen Anstieg der Vergrößerung bei steigender Elektrodenspannung. In Abbildung 4.6 kann man erkennen, dass es einen Unterschied macht, ob die Elektroden zylindrisch oder parabolisch sind. Obwohl rein optisch der Potentialverlauf, wie er in Abbildung 4.5 dargestellt, keinen sichtbaren Unterschied aufweist, spielt die Elektrodenform für die Vergrößerung eine große Rolle.

### 4.2.3 Wienfilter



**Abbildung 4.7:** Simulation des Wienfilters. (a) Darstellung des elektrostatischen Potentials. Die Geometrie wurde dem eingebauten Wienfilter nachempfunden. (b) Darstellung des Magnetfelds. (c) Teilchenbahn durch den Wienfilter. Die Teilchen verlassen im abgeglichenen Zustand den Filter geradlinig mit keiner Energieänderung (vgl. Farbskala). (d) Die Teilchen haben eine Verschiebung erfahren. (e) Ausgewertete Teilchenpositionen zu einem Zeitpunkt  $t_0$  nach Verlassen des Wienfilters. Der Versatz ist klar erkennbar.

In COMSOL wurde ein Wienfilter moduliert. Er entspricht dem im Experiment verbauten. Ziel war es hierbei die Wirkung auf die Elektronen zu untersuchen und die Formeln für die Verschiebung der Wellenpakete (siehe Gleichung 2.31) zu verifizieren. Dazu wurde die Windungszahl der Spule auf 500 Windungen je Seite abgeschätzt. Für den abgeglichenen Betrieb wurde bei einer Ablenkspannung von 255 V (siehe Abbildung 4.7 (a), obere Platte: 127,5 V, untere Platte: -127,5 V) ein Spulenstrom von 100 mA benötigt. Das Magnetfeld ist in Abbildung 4.7 (b) dargestellt. Die Elektronen verlassen den Wienfilter geradlinig, es findet keine Ablenkung statt. Auch die Teilchenenergie ist bei Ein- und Austritt dieselbe (siehe Abbildung 4.7 (c)).

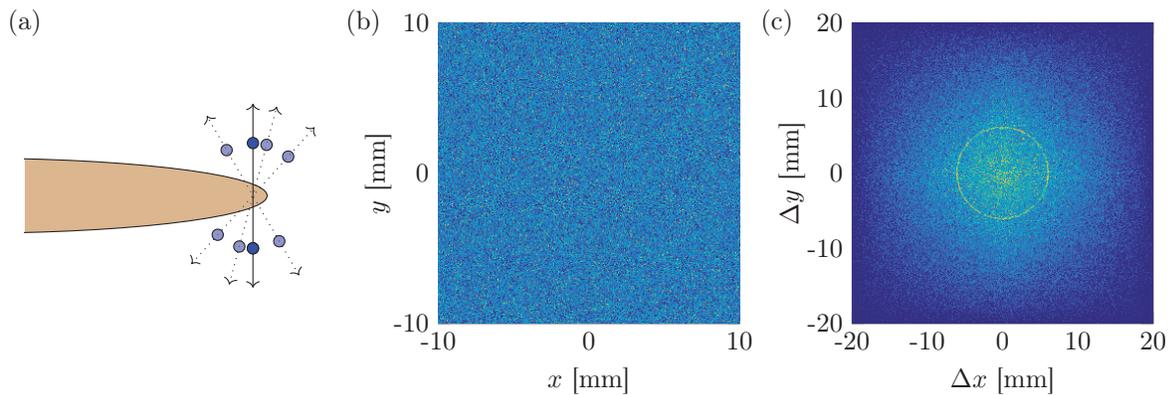
Jedoch erfahren die Teilchen im Strahl eine Verschiebung. Die eine Seite des Strahls durchläuft den Wienfilter schneller als die andere, was an der Farbskala zu erkennen ist. Rot bedeutet höhere und blau niedrigere Teilchenenergie. Allerdings müssen die schnelleren Teilchen einen leicht längeren Weg zurücklegen. Die Verschiebung ist abhängig von der Entfernung zur optischen Achse, also der Aufspaltung  $\Delta x$ . Aus der Simulation kann man eine Verschiebung der Randpositionen von  $\Delta y_{sim} = 46 \mu\text{m}$  entnehmen. Setzt man die Parameter der Simulation in Formel 2.31 ein, erhält man eine theoretische Verschiebung von  $\Delta y_{theo} = 44,2 \mu\text{m}$ . Hierbei war die Länge des Wienfilters mit  $L = 13 \text{ mm}$  angegeben, die Ablenkspannung mit  $U_{WF} = 255 \text{ V}$  und die Beschleunigungsspannung der Elektronen  $U_b = 1000 \text{ V}$ . Wie man in Abbildung 4.7 erkennen kann, sind die Ablenkplatten gebogen. Deshalb wurde in der Formel mit dem mittleren Abstand  $D = 6,91 \text{ mm}$  gerechnet. Es ist zu erwähnen, dass dies eine rein klassisch berechnete Teilchenbahn beschreibt, wie es auch von Wohland [27] und Nicklaus [44] gemacht wurde. Mit den Berechnungen von COMSOL lassen sich aber keine Aussagen über die Phasenlage des Interferenzmusters treffen, da dies ein rein quantenmechanischer Effekt ist. Die Simulation gibt jedoch Aufschluss darüber, was im Wienfilter geschieht. Da die Elektronen keine Richtungs- und Energieänderung beim Verlassen des Wienfilters erfahren haben, gibt diese Simulation ein gutes Verständnis für die Situation im Wienfilter. Betrachtet man den Wienfilter als eine Art "Black Box", in die die Teilchen ein und wieder ausfliegen, kann man rein Anhand der Richtungsänderung oder der Teilchenenergie keine Aussage treffen ob der Wienfilter eingeschaltet war oder nicht. Es findet nur eine Verschiebung statt, welche nur dann messbar wäre, wenn der Startzeitpunkt des Teilchens bekannt wäre, wie es zum Beispiel bei einer laserinduzierten Elektronenemission möglich wäre. Durch den Laserpuls ist der Startzeitpunkt gegeben. Bei einer poissonverteilten Elektronenemission ist dieser Parameter nicht auslesbar. Die Abweichung zwischen dem Wert aus der Simulation und dem Berechneten lassen sich darauf zurückführen. Jedoch lässt sich Gleichung 2.31 anhand der Simulation verifizieren. Es ist zu erwähnen, dass in der Simulation kein Linseneffekt des Elektronenstrahls beobachtbar war. Dies kann, wie bereits in Abschnitt 3.1.6 vermutet, an den gebogenen Ablenkplatten liegen, die die Randfelder der Spule kompensieren.

## Fazit

Anhand der beiden Beispiele des Ablenkelements und der Quadrupollinse kann man sehen, dass die Simulation mit finiten Elementen zu demselben Ergebnis führt, wie die Transfermatrizen. Zur Simulation von Strahlengängen, beziehungsweise

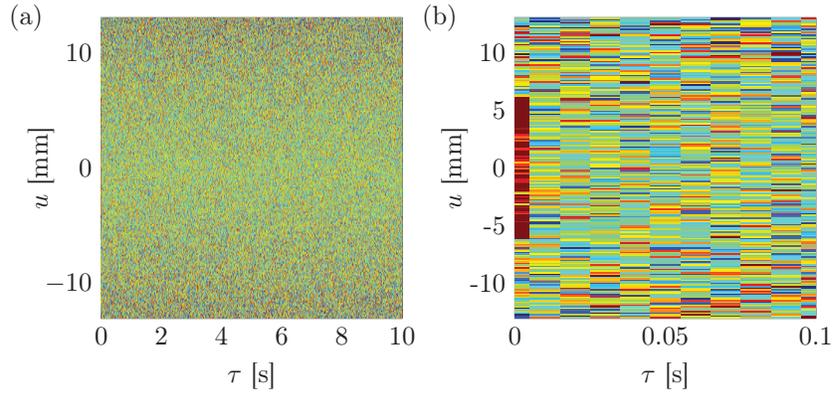
wie hier zur Berechnung von Aufspaltungen, ist die Methode der Transfermatrizen vorzuziehen. Die Berechnungszeit ist deutlich kürzer. Wie in [34] gezeigt wurde, stimmen die berechneten Aufspaltungen mit den gemessenen sehr gut überein. Mit dieser Methode ist es möglich die Aufspaltung und somit die Breite der Wienkurve passend zu wählen. Des Weiteren konnte anhand von der Simulation des Wienfilters in COMSOL gezeigt werden, dass die Formel für die Verschiebung der Wellenpakete bestätigt werden kann.

### 4.3 Simulation zur Korrelationsfunktion 2. Ordnung



**Abbildung 4.8:** (a) Möglichkeiten einer paarweisen Emission. Simulationen zur supraleitenden Niobemission (b) Aufsummiertes Bild der Teilcheneinschläge, wie sie am Detektor erwartet werden. Die Ereignisse sind poissonverteilt und ohne Struktur (c) Berechnung der Korrelation der nächsten Nachbarn. Es ist klar ein Kreis erkennbar.

In Abschnitt 2.6.3 wurde erläutert, dass verschränkte Elektronenpaare anhand einer Korrelationsanalyse der Auftreffzeit- und Ortspunkte der einzelnen Elektronen nachgewiesen werden können. Dafür wurde in Abschnitt 2.7 die Korrelationsfunktion näher erläutert. Zur Vorbereitung des Experiments, welches in Abschnitt 5 genau erklärt wird, wurden Simulationen in Matlab durchgeführt, um das zu erwartende Messsignal zu untersuchen. Für diesen Zweck werden poissonverteilte Elektroneneinschläge simuliert. Die genaue Simulationsmethode wird in [74] in Abschnitt 3.3 genau beschrieben. Der Kontrast wird hierbei auf 0 gesetzt, es ist also keine Struktur in dem aufsummierten Bild sichtbar. Die Simulation wird dahingehend erweitert, dass mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ein doppeltes Ereignis ausgelöst wird. Es soll eine Situation geschaffen werden, wie sie von Yuasa [49] beschrieben wird.



**Abbildung 4.9:** Korrelationsfunktion des Signals aus Abbildung 4.8. (a) Korrelationsfunktion 2. Ordnung: Die Teilchenereignisse sind poissonverteilt. Der Wert der  $g^{(2)}$ -Funktion ist überall eins. (b) Für kurze Zeitabstände ist eine klare Erhöhung der Korrelationsfunktion zu erkennen. Dies lässt Rückschlüsse auf die Verschränktheit zu.

Zwei Elektronen mit  $\vec{k}$  und  $-\vec{k}$  verlassen in entgegengesetzter Richtung die Spitze, die beiden Vektoren liegen also auf einer Geraden. Diese Gerade lässt sich natürlich in vielen Orientierungen in die Spitze legen, wie in Abbildung 4.8 (a) zu sehen. Durch den Radius der Spitze können die Teilchen jedoch die Spitze nicht nach vorne verlassen, es gibt also einen kritischen Winkel. Die Elektronen liegen also auf einem Kreis mit einer gewissen Ausdehnung. Durch die Verteilung der Elektronen haben sie einen leicht unterschiedlichen Weg zum Detektor, weshalb sie in einem Zeitintervall gemessen werden. Die Teilchen haben in der Simulation also einen festen Abstand zueinander und die Auftreffzeit liegt in einem Zeitfenster von 10 ns. Die in Abbildung 4.8 und 4.9 dargestellte Simulation umfasst 250.000 Teilchen, die über einen Zeitraum von 100 s ankommen. Die Wahrscheinlichkeit für ein Doppelevent wurde auf 1 % gesetzt. Der Abstand den die doppelten Events annehmen können liegt zwischen 5,8 mm und 6,2 mm. Im aufsummierten Bild erkennt man keine Struktur (Abbildung 4.8 (a)), da die Elektronenevents poissonverteilt auftreten. Dies kann man an der  $g^{(2)}$ -Funktion erkennen, die überall den Wert eins annimmt (Abbildung 4.9 (a)). Betrachtet man jedoch die Korrelation der nächsten Nachbarn, also die Korrelation der Teilchen die direkt nacheinander ankommen, ist eine deutliche Ringstruktur erkennbar (Abbildung 4.8 (b)). Auch für kurze Zeitabstände sieht man eine deutliche Erhöhung in der  $g^{(2)}$ -Funktion (Abbildung 4.9 (b)). Die numerische Auswertung der  $g^{(2)}$ -Funktion, wie sie in Gleichung 2.49 dargestellt ist, wird in [74] in Abschnitt 3.1 genau dargestellt. Die Abstände, Teilchenzahl und Integrationszeit

---

sind typische Parameter, wie sie im Experiment vorkommen. Nur die Wahrscheinlichkeit, dass ein Doppelereignis gemessen wird, wurde großzügig geschätzt. Für eine Wahrscheinlichkeit von 0,1 % ist der Ring in der Korrelation der nächsten Nachbarn nur noch sehr schwach auszumachen. Jedoch ist eine Erhöhung in der  $g^{(2)}$ -Funktion weiterhin gut sichtbar.

Man sieht also, dass Doppelereignisse anhand der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung identifizierbar sind. Damit ist es möglich, Aussagen über die räumliche und zeitliche Verteilung der doppelten Ereignisse zu treffen und damit Aussagen über die Verschränktheit der Elektronen zu machen.

# Kapitel 5

## Feldemitter aus Niob

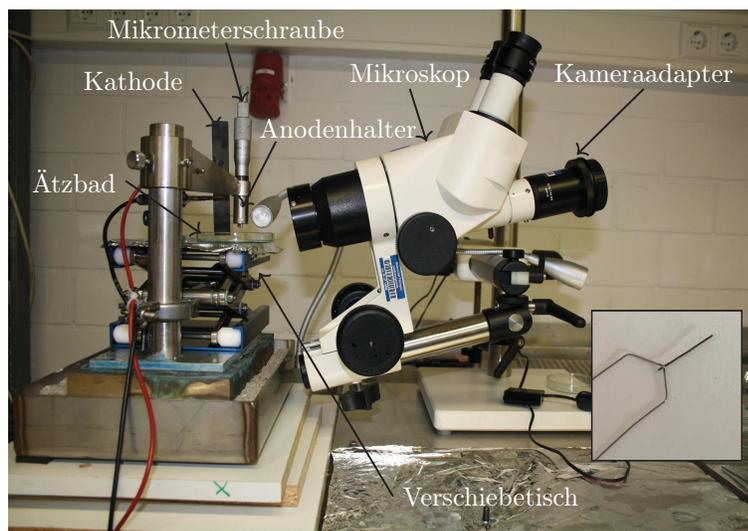
In Abschnitt 2.6 wurde bereits darauf eingegangen, dass eine supraleitende Feldemitterkathode interessante Emissionseigenschaften hat. Es wird erwartet, dass supraleitende Spitzen eine schmale Energiebreite bei gleichzeitig hoher Elektronenemission haben. Außerdem wird legt die Theorie nahe, dass ein supraleitender Feldemitter die Elektronen paarweise emittieren, nämlich Cooper-Paare, welche verschränkt zueinander sind. Man erwartet deshalb eine sehr gute räumliche und zeitliche Kohärenz der Emission. In diesem Kapitel sollen die Techniken zum Ätzen von Niob und daraus folgend der Feldemitterherstellung aus Niob beschrieben werden. Niob ist ein interessantes Material, da es ein elementarer Supraleiter ist mit hoher Sprungtemperatur ( $T_c = 9,25$  K), die mit einem Heliumkryostaten erreicht werden kann. Es wird das Ätzverfahren vorgestellt und der Spitzenpräparationsvorgang näher erläutert. Es werden der Aufbau und die Messung zur kohärenten Elektronenemission bei Raumtemperatur von Niobfeldemittern präsentiert. Es werden außerdem die vorbereitenden Messungen präsentiert in denen gezeigt wird, dass die Spitze unter die Sprungtemperatur von 9,25 K gekühlt werden kann. Es wurde ein spezieller Halter für die Niobspitze erarbeitet, welcher guten Kältekontakt bei guter elektrischer Isolation liefert. Außerdem ist die Spitze thermisch so isoliert, dass ein Glühen der Spitze bei Kryotemperaturen möglich ist. Des Weiteren wird das experimentelle Setup beschrieben und erklärt, um die Eigenschaften die in Abschnitt 2.6.2 und 2.6.3 beschrieben sind, zu messen.

### 5.1 Ätzprozess

Das hier beschriebene Verfahren orientiert sich an der Technik, die von Hou 2016 veröffentlicht und beschrieben wird [82]. Es handelt sich hierbei um einen elektro-

---

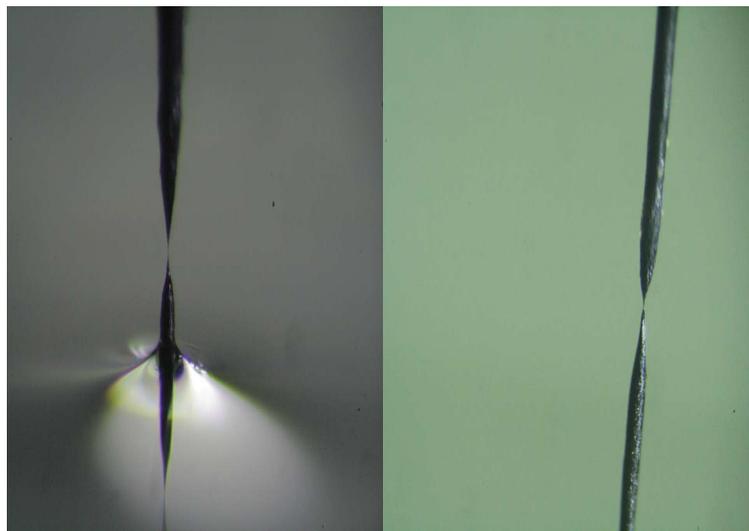
chemischen Prozess, bei welchem Niob mit Kaliumhydroxid geätzt werden kann. Der Ätzprozess ist aus mehreren Gründen interessant und vorteilhaft; zum einen ist Kaliumhydroxid eine relativ harmlose Chemikalie, welche leicht zu handhaben ist. Zum anderen lehnt sich der Ätzprozess sehr stark an den Prozess vom Ätzen von Wolfram an, welcher ein Standardprozess in der Feldemitterherstellung ist. Es lassen sich Wolframfeldemitter mit sehr kontrollierbaren Profilen erzeugen, wie Chang zeigt [83]. Zur Vorbereitung wird ein Niobdraht auf einen Niobbügel mit einer



**Abbildung 5.1:** Aufbau zum Ätzen von Niob. Der Niobdraht bildet die Anode, ein Graphitblättchen die Kathode, welche in der Ätzlösung eingetaucht sind. Der Ätzprozess wird durch ein Mikroskop beobachtet. Der Ätzdraht aus Niob wird auf einen Bügel aus Niob punktgeschweißt und anschließend in den Halter eingespannt.

Punktschweißanlage aufgeschweißt. Die Schweißparameter sind vor jedem Schweißvorgang neu zu bestimmen. Es ist darauf zu achten, dass der Schweißpunkt den Drahtbügel nicht durchbrennt, aber die zukünftige Spitze auch fest genug an dem Bügel befestigt ist. Auch auf die Ausrichtung des Drahtstücks auf dem Bügel ist zu beachten. Eine punktgeschweißte Spitze ist in Abbildung 5.1 zu sehen. Ein  $125\ \mu\text{m}$  dicker, polykristalliner Niobdraht wird mit Isopropanol, Aceton und entmineralisiertem Wasser jeweils für 5 Minuten im Ultraschallbad gereinigt und anschließend in den Anodenhalter eingespannt. Als Kathode dient eine Graphitelektrode. Anode und Kathode werden anschließend in 5 molare Kaliumhydroxidlösung getaucht. Die Eintauchtiefe des Niobdrahtes beeinflusst den Ätzprozess nicht unerheblich. Die Faustregel ist eigentlich, dass die Eintauchtiefe vier mal dem Drahtdurchmesser entsprechen sollte, also hier  $500\ \mu\text{m}$ . Erfahrungsgemäß funktioniert das Ätzen bei einer

Eintauchtiefe von 2 mm am besten, was sich sowohl auf die Reproduzierbarkeit und die Ätzdauer bezieht. Durch das größere Gewicht des Reststücks, bricht die Spitze besser ab. Die Eintauchtiefe der Anode ist gut kontrollierbar, da der Halter an einer Mikrometerschraube befestigt ist mit einem Gesamtverfahrweg von 20 mm. Um den Ätzprozess besser kontrollieren und beobachten zu können, ist ein Mikroskop<sup>1</sup> mit Kameraadapter verbaut, so dass in sicherer Entfernung das Ätzen beobachtet werden kann. Für die optimale Justage auf das Mikroskop, befindet sich das Ätzbad auf einem Verschiebetisch. Der Aufbau ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Der Ätzprozess



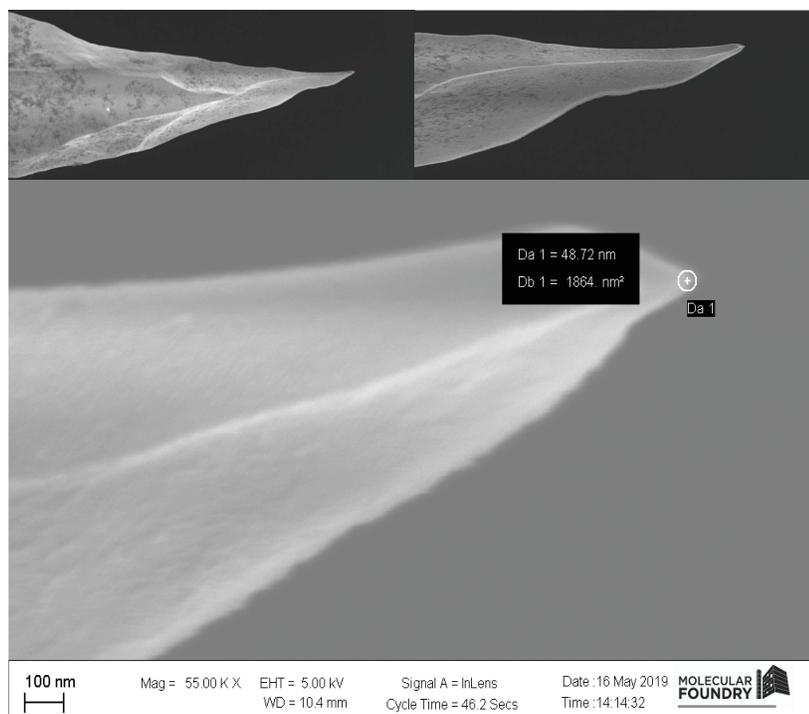
**Abbildung 5.2:** Zu sehen ist ein Nacken nach dem erfolgreichen Ätzen mit dem Transformator. Der Draht hat eine Dicke von  $125\ \mu\text{m}$ , die dünnste Stelle am Nacken ist unter dem Mikroskop nur noch schwer zu erkennen. Er hat eine Dicke von ca.  $5\ \mu\text{m}$ . Im nächsten Schritt werden Spannungspulse zum Ätzen angelegt.

startet, indem zwischen Kathode und Anode eine Wechselspannung von  $U_{eff} = 20\ \text{V}$  angelegt wird. Es ist darauf zu achten, dass die Spannungsquelle eine angemessene Strombegrenzung besitzt, da Ströme von  $\approx 100\ \text{mA}$  fließen können. Dies funktioniert am besten mit einem Regeltransformator. Diese Spannung wird zwischen 60 - 120 s angelegt und währenddessen der Prozess unter dem Mikroskop kontrolliert. Es bildet sich oberhalb des Eintauchmeniskus ein Nacken, wie in Abbildung 5.2 zu sehen. Anschließend wird die Spannung am Regeltransformator zuerst auf 10 V und dann auf 5 V reduziert und der Nacken vollends in die Ätzlösung eingetaucht. Man ätzt solange bis sich der Nacken auf etwa  $5\ \mu\text{m}$  verjüngt hat, wie in Abbildung 5.2 zu sehen ist. Anschließend wird der Transformator vom Aufbau getrennt und durch

<sup>1</sup>Zeiss STEMI mit 100-facher Vergrößerung

---

einen Frequenzgenerator<sup>2</sup> ersetzt. Es wird nun ein Spannungspuls mit einer Frequenz von einem Hertz angelegt. Die Spannung ist hierbei 995 ms auf dem maximalen und 5 ms auf dem minimalen Wert. Die Offsetspannung wird auf 700 mV gesetzt und die Spannung von Peak zu Peak wird auf 7,2 V gesetzt. Die Wechselspannung bewirkt eine Redoxreaktion, welche langsam das Niob gleichmäßig an dem eingetauchten Drahtstück abträgt. Durch die Nackenbildung bricht der Draht an der dünnsten Stelle und der Ätzvorgang ist unvorzüglich manuell abzubrechen, um ein Nachätzen zu verhindern, was die Spitze stumpfer machen würde. Die frisch geätzte Spitze wird nun vorsichtig mithilfe der Mikrometerschraube aus dem Ätzbad gehoben und anschließend vorsichtig zur Reinigung zuerst in entmineralisiertes Wasser, dann in Aceton und Isopropanol getaucht. Die gesäuberte Spitze wird anschließend im Rasterelektronenmikroskop<sup>3</sup> (REM) betrachtet und vermessen. Eine REM-Aufnahme ist in Abbildung 5.3 dargestellt.



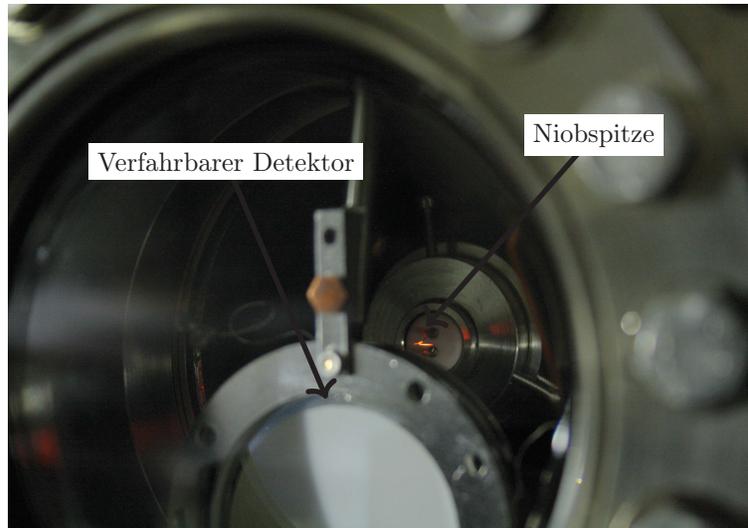
**Abbildung 5.3:** Aufnahme einer Niobspitze mit einem Rasterelektronenmikroskop. Die grobe Struktur kommt vom Ätzprozess des polykristallinen Niobs. Es können reproduzierbar Spitzen mit einem Enddurchmesser von 50 nm und kleiner hergestellt werden. Die Aufnahme wurde in der Imaging Facility der Molecular Foundry am LBNL gemacht.

---

<sup>2</sup>Rigol DG1012

<sup>3</sup>Zeiss Gemini Supra 55 VP-SEM

## 5.2 Spitzenpräparation



**Abbildung 5.4:** Glühende Niobspitze in der Testkammer. Zu sehen ist der MCP-Detektor, der zur besseren Sicht nach unten gefahren wurde. Die Spitze glüht bei ungefähr 900 °C. Der Glühprozess ist dem für Ein-Atom-Spitzen, wie in Abschnitt 3.1.2 beschrieben, sehr ähnlich.

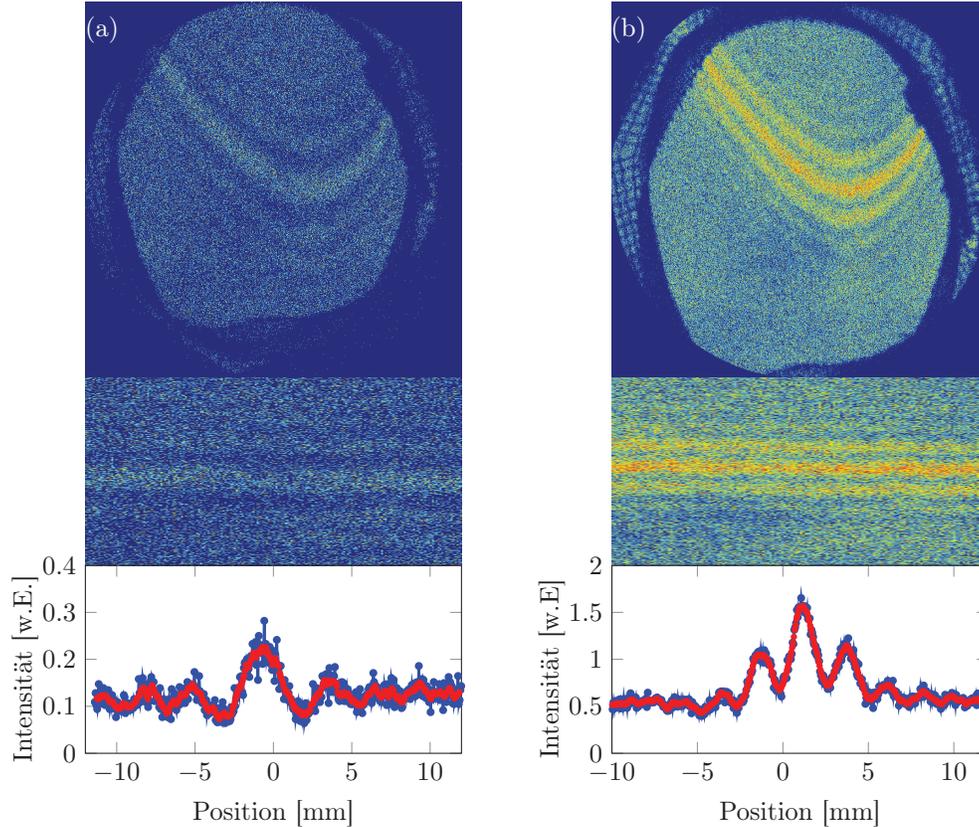
In Abschnitt 5.1 haben wir gesehen, dass ein polykristalliner Draht zu einer Spitze geätzt wird. Zwar wird die Spitze nach dem Ätzvorgang gereinigt, jedoch lässt sich nicht jede Verschmutzung entfernen. Wie in der Arbeit von Hou [82] beschrieben, wird durch kontrolliertes Glühen der Niobspitze zum einen die Spitze gereinigt und zum anderen dient der Glühprozess dazu bestimmte Kristallfacetten herauszuarbeiten, welche für den Emissionsprozess förderlich sind. Hou beschreibt, dass sich durch glühen die Nb(100)-Facette herausbildet, welche eine, ähnlich einer SAT (siehe Abschnitt 3.1.2), einen kleinen, klaren Emissionsfleck liefert. Für den Glühprozess wird die Spitze auf einen Halter montiert, elektrisch kontaktiert und in einen Vakuumrezipienten mit MCP-Detektor eingebracht. An der Kammer ist eine Turbomolekularpumpe und eine NEG-Pumpe verbaut. Durch eine Kryopumpe wird der Druck auf  $\leq 5 \cdot 10^{-10}$  mbar abgesenkt. Die NEG-Pumpe säubert das Restgas in der Kammer von Wasserstoff, welcher sich beim Glühprozess in die Niobkristallstruktur einbauen können und damit die sensible Spitze unter Umständen zerstört werden könnte. Der Glühprozess ist dem einer SAT, wie er in Abschnitt 3.1.2 beschrieben wurde, sehr ähnlich. Die Spitze wird durch ohmsches Heizen langsam erwärmt. Trotz sorgfältigem Reinigen der Spitze nach dem Ätzen, dampft beim Erwärmen

---

der Spitze viel Fremdmaterial ab. Bei Druckeranstiegen wird der Strom gehalten, bis der Druck wieder zu sinken beginnt. Dies macht das erste Aufheizen der Spitze sehr zeitaufwändig. Mit dieser Methode wird der Glühpunkt der Spitze bestimmt. Damit wird der Punkt beschrieben, bei dem die Spitze gerade anfängt mit Glühen. Nach jedem Glühvorgang wird das Emissionsbild der Spitze betrachtet. Ist der Glühpunkt bestimmt, wird die Spitze über ein MATLAB-Programm geglüht, wie in Abbildung 3.6 gezeigt. Das Programm regelt den Strom bis zum eingestellten Formpunkt und hält dann über die eingestellte Zeit die Leistung konstant. Währenddessen wird mit einem Glühfadenpyrometer die Temperatur der Spitze bestimmt. Für den besseren optischen Zugang, lässt sich der MCP-Detektor mit einer Lineardurchführung verfahren. Anhand des Emissionsbildes lässt sich der Stand des Glühprozesses beurteilen. Die wichtigen Parameter für die Spitze sind dann: Glühpunkt, Formpunkt, Glühtemperatur, Einsatzspannung und gegebenenfalls Emissionsrichtung. Der wichtigste Unterschied zur SAT ist hierbei, dass die Emissionsrichtung bei Niobspitzen oftmals unter einem Winkel geschieht, was ein Nachjustieren der Spitze auf dem Halter vor dem Einbau ins Experiment notwendig macht. Der Glühprozess wird beendet, wenn das Emissionsbild einen klaren einzelnen Spot zeigt, welcher stabil in der Emission ist. Der Emissionsspot und die Stabilität der Emission darf sich dann auch nach weiteren Glühvorgängen nicht mehr ändern. Die meisten Vakuumkammern lassen keinen direkten Blick auf die Spitze zu, deswegen ist es wichtig, die Spitze vor dem Einbau gut zu charakterisieren, da dies im späteren Verlauf des Experiments nicht mehr möglich ist.

### 5.3 Kohärente Emission

Zur Bestimmung der Kohärenz wurde eine Niobspitze in ein Biprismainterferometer gebracht. Für diese Untersuchung wurde die Spitze bereits auf einem passenden Halter montiert, geätzt und in der Präparationsvakuumkammer vorbereitet. Der Elektronenstrahl wurde durch das Interferometer geführt, mit dem Biprisma aufgespalten und überlagert. Im Zuge dieses Experiments hat sich herausgestellt, dass ein Feldemitter aus Niob durchaus robust ist, da er auch über längere Zeit hohe Emissionsströme von mehreren Mikroampere unbeschadet überstehen kann und selbst bei Spannungsüberschlägen eine überraschende Robustheit an den Tag legt. Die Probleme mit einem Feldemitter aus Niob sind jedoch, dass die Emission nicht selten unter einem Winkel erfolgt, was durch die polykristalline Struktur des Drahtes bedingt ist. Dadurch ist es anspruchsvoll eine Strahlführung durch



**Abbildung 5.5:** Dargestellt sind Interferenzstreifen einer Niobspitze bei Raumtemperatur. Die Biegung der Streifen kommt durch schiefe Justage durch den Vergrößerungsquadrupol zustande. (a) Bei kleinerem Überlagerungswinkel sind die Beugungsordnungen -2 bis 2 zu sehen. (b) Bei größerem Überlagerungswinkel werden bei längerer Integrationszeit die Beugungsordnungen -4 bis 4 zu sehen.

die vielen Aperturen zu finden. Dabei ist es extrem schwierig, die optische Achse der Vergrößerungslinsen zu treffen, was ein verzerrtes Bild nach sich zieht, welches im Nachhinein korrigiert werden muss. Das verzerrte Bild ist in Abbildung 5.5 zu sehen. Die Korrektur findet im Nachhinein im Zuge der Kontrastbestimmung statt. Eine weitere Schwierigkeit ist folgende: Da Niob ein reaktionsfreudiges Metall ist, lagern sich viele Fremdatome an der Oberfläche der Spitze ab, was ein häufiges Reinigen durch ohmsches Heizen nach sich zieht. Interferenzstreifen einer Elektronenemission von einem Niobfeldemitter sind in Abbildung 5.5 zu sehen. Es wurden Interferenzen bei unterschiedlichen Überlagerungswinkeln betrachtet. Man sieht, dass das ursprüngliche Bild verzerrt ist, da es nicht möglich war, die optische Achse der Linsen zu treffen. Das Bild wird im Anschluss "entparabolisiert". Die

---

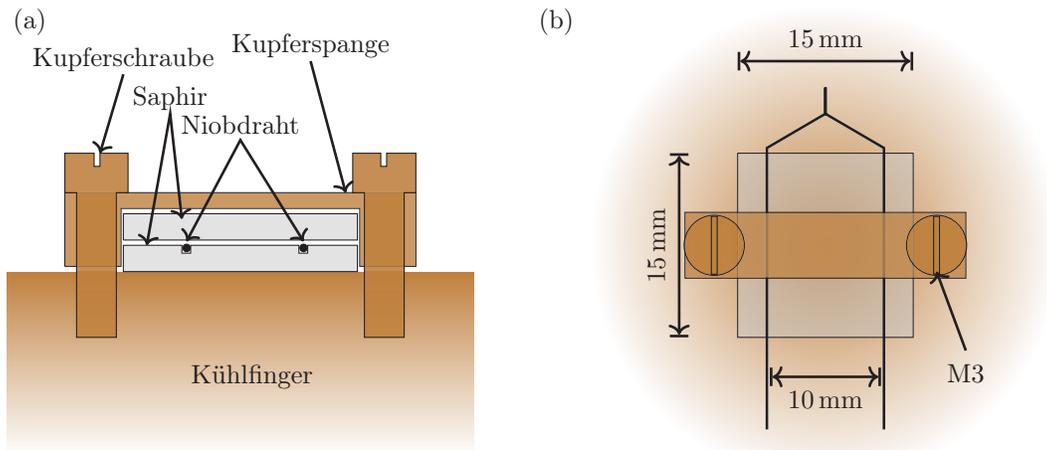
parabolische Verzerrung wird herausgerechnet und das Bild anschließend entlang der Streifen aufsummiert. Da es mit dem Interferometeraufbau nicht möglich war die Spitze unter die Sprungtemperatur von Niob, 9,25 K, zu kühlen, wurde die Kohärenz der Emission nur bei Raumtemperatur untersucht. Es konnte gezeigt werden, dass eine Feldemission einer warmen Niobspitze stabil genug ist um Elektroneninterferenzen aufzunehmen. Bei einer Emissionsspannung von  $U_b = 1300$  V wurden Kontraste von  $K \approx 60\%$  erreicht, bei einem Streifenabstand von  $d_s = 2,56$  mm. Die Kohärenzeigenschaften lassen sich also mit der einer SAT vergleichen.

## 5.4 Supraleitende Emission

Eine supraleitende Feldemission hat mehrere Herausforderungen zur Folge. Zuerst ist es eine Herausforderung, einen Niobdraht unterhalb der Sprungtemperatur zu kühlen. Die nächste Schwierigkeit stellt dar, Kryotemperaturen mit Hochspannung zu kombinieren. Speziell für diese Problemstellung ist eine große Schwierigkeit, die Spitze auf dem kalten Kryostaten zu Glühen, ohne den Kryostaten zu gefährden. Die technischen Voraussetzungen wurden im Zuge dieser Arbeit geschaffen und getestet. Mit Hilfe des hier vorgestellten Halters ist es zum einen möglich, die Spitze auf 4,2 K zu kühlen und im gekühlten Zustand auf 1500 K zu glühen, ohne den Kryostaten aufzuheizen. Des Weiteren lässt sich an die Spitze eine Hochspannung von  $\geq 3000$  V anlegen.

### 5.4.1 Halterung

Für die Experimente mit einer Niobspitze sind verschiedenste Ansprüche an den Halter gestellt. Zum einen muss der Draht gegenüber der Umwelt gut genug isoliert sein, um eine Hochspannung anlegen zu können und freie Elektronen durch Feldemission zu erzeugen. Zum anderen muss der Draht gut thermisch an den Kryostaten gekoppelt werden da die nötige Temperatur von 9,25 K erreicht werden muss damit das Niob in den supraleitenden Zustand übergeht. Des Weiteren muss die Spitze aber thermisch zum Kryostaten so isoliert werden, dass bei Glühtemperaturen der Spitze von 1500 K der Kryostat nicht erhitzt wird. Dies könnte sonst das flüssige Helium schlagartig verdampfen und den Kryostaten zerstören. Diese scheinbar widersprüchlichen Anforderungen wurden durch Verwendung von Saphir gelöst. Der Niobdrahtbügel mit der geätzten Spitze wird zwischen zwei Saphir-Blättchen eingeklemmt. Die Blättchen besitzen eine Dicke von 1 mm und eine Abmessung von

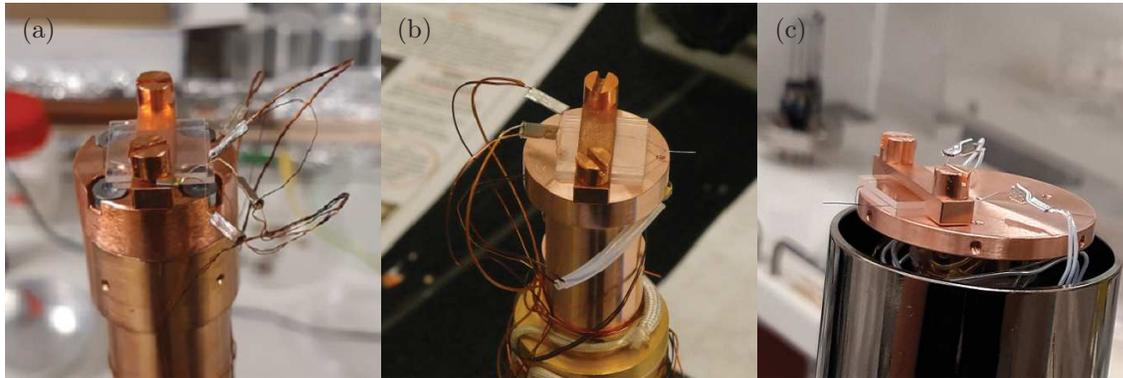


**Abbildung 5.6:** Halterung für Niobspitzen auf einem Kryostaten. Der Draht wird zwischen zwei Saphir-Blättchen eingespannt. Zur besseren Führung sind in ein Blättchen zwei Nuten mit 150  $\mu\text{m}$  Breite und 100  $\mu\text{m}$  Tiefe eingesägt. Das aufliegende Blättchen wird mit einer Kupferspange angepresst. Durch die Kupferschrauben ist auch eine Kühlung von oben vorhanden.

15 mm  $\times$  15 mm. Zur besseren Führung sind in ein Blättchen zwei Führungsnuten im Abstand von 10 mm geschnitten. Sie orientieren sich an der Drahtdicke. Da der Draht einen Durchmesser von 125  $\mu\text{m}$  hat, wurde der Durchmesser der Nut mit 150  $\mu\text{m}$  gewählt. Um den Draht fest einklemmen zu können, ist die Tiefe auf 100  $\mu\text{m}$  gesetzt. Das Saphir erfüllt hierbei mehrere Aufgaben. Zum einen wird durch das Blättchen der Niobdraht elektrisch isoliert. Es lassen sich bei diesem Aufbau Spannungen von  $\geq 3000$  V an den Draht anlegen, ohne Überschlüge an der Spitze befürchten zu müssen. Zum anderen ist Saphir durch seinen stark temperaturabhängigen Wärmeleitkoeffizient ein gängiges Material in der Tieftemperaturanwendung. Durch die gute Wärmeleitung bei tiefen Temperaturen ist eine gute Anbindung an das Kältereservoir gegeben, was einen guten Kälteübertrag auf den Niobdraht mit sich bringt. Um eine Kühlung nicht nur von unten zu bekommen, werden die beiden Saphir-Blättchen durch eine Kupferspange zusammengehalten, welche mit zwei Vollkupferschrauben in den Kühlfinger des Kryostaten geschraubt sind. Dadurch wird auch eine Kühlung von oben gewährleistet. Eine weitere Eigenschaft des Saphirs ist auch, dass die Wärmeleitfähigkeit bei steigender Temperatur stark abnimmt. Damit ist es möglich, den Niobdraht durch ohmsches Heizen auf Temperaturen von über 1500 K zu heizen, ohne dass sich die Temperatur im Kryostaten unkontrolliert erhöht. Die Halterung mit den oben beschriebenen Eigenschaften wurde an

---

drei verschiedenen Kryostaten mit unterschiedlicher Kühlleistung jeweils erfolgreich getestet. Die Halterung auf den drei Kryostaten ist in Abbildung 5.7 zu sehen.



**Abbildung 5.7:** Halterung montiert auf den drei benutzten Kryostaten. (a) Heliumdurchflusskryostat in Tübingen. Ein Niobdraht konnte mit der Halterung erfolgreich unterhalb der Sprungtemperatur gekühlt werden. (b) Heliumdurchflusskryostat am LBNL. Eine geätzte Niobspitze konnte unterhalb der Sprungtemperatur gekühlt werden. (c) Refrigeratorkryostat am LBNL. Im aufgebauten Quanteninformationsexperiment konnte mit dem Halter auf dem Kryostaten erfolgreich die Spitze gekühlt werden.

## 5.4.2 Temperaturmessung

Um den supraleitenden Zustand zu erreichen, muss das System weiter abgeschirmt werden, da ansonsten der Wärmeeintrag durch Wärmestrahlung viel zu groß wäre. Dazu wird ein Strahlungsschild verwendet. Es ist ein poliertes Metallrohr, oftmals vergoldet, um die Wärmestrahlung gut zu reflektieren. Das Kühlschild ist am Kryostaten befestigt, weit weg vom Kühlfinger, so dass es durch das bereits aufgewärmte herausströmende Helium gekühlt wird. Das Kühlschild erreicht eine Temperatur von ungefähr 60 K. Durch die Kühlung des Strahlungsschildes wird die Schwarzkörperstrahlung und somit die Wärmestrahlung stark reduziert. In Abbildung 5.7 sind die Kryostaten jeweils ohne Kühlschild abgebildet. Da in Abbildung 5.7 (b) und (c) jeweils eine geätzte Niobspitze montiert ist, muss das Kühlschild eine Aussparung zur Montage und für die Elektronenemission besitzen. Es gibt hierbei nun zwei Möglichkeiten, wie die Niobspitze in dem Kühlschild montiert werden kann. Im ersten Fall ist die Spitze im Kühlschild, welches gleichzeitig als geerdete Gegenanode für die Feldemission dient. Das Kühlschild ist hierbei aus Aluminium hergestellt und ist in Abbildung 5.8 zu sehen. Durch den Feldverlauf

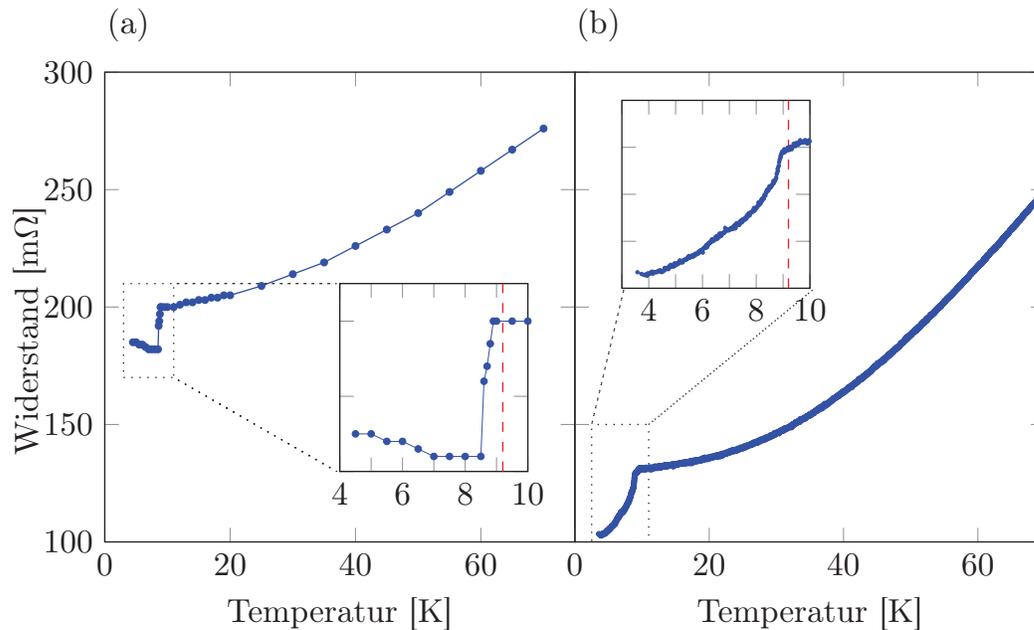
wird eine divergente Emission erwartet. Im zweiten Fall schaut die Spitze etwas aus dem Kühlschild heraus. Die Umgebung dient hierbei als Erdpotential für die Feldemission und man erwartet einen weniger divergenten Strahl. Dafür wird die Spitze der Wärmestrahlung ausgesetzt. Da die Umgebung auf Raumtemperatur liegt, kann man mit der Abschätzung, dass ein Schwarzer Körper bei dieser Temperatur etwa  $400 \text{ W m}^{-2}$  abstrahlt, davon ausgehen, dass die Spitze bei einer Austrittslänge von 1 mm, was ungefähr einer Oberfläche von  $1 \text{ mm}^2$  entspricht, einer Heizleistung von  $400 \mu\text{W}$  ausgesetzt wird. Die Kühlleistung des Kryostaten ist natürlich viel größer, allerdings muss die Wärme über den dünnen Draht abgeführt werden und es besteht die Gefahr, dass der vordere Teil der Spitze nicht den supraleitenden Zustand erreicht. Die andere Stelle, an der ein Wärmeeintrag erfolgen kann, ist die Zuleitung zur Spitze. Die beiden Füßchen der Spitze sind jeweils mit einem Kupferdraht<sup>4</sup> kontaktiert, über die sowohl der Strom zum Heizen der Spitze geführt wird, als auch die Hochspannung für die Feldemission angelegt wird. Der Draht wird durch eine Crimp-Verbindung mit der Spitze verbunden. Zur Vorkühlung des Drahtes wird der Kupferdraht von der Durchführung bis hin zum Spitzenthalter einige male um den Kryostaten gewickelt.



**Abbildung 5.8:** Kühlschild des verwendeten Heliumdurchflusskryostaten am LBNL. (a) Abdeckkappe mit Schlitz, Kühlschild, Haltespange (v.l.n.r.). Das Kühlschild ist aus Aluminium hergestellt. (b) Zusammengebautes Kühlschild. Die Spaltgröße für die Spitze kann variiert werden. (c) Kühlschild auf dem Kryostaten montiert. Zum besseren Kältetransfer zwischen Schild und Kappe wird eine Indiumschicht mit dem Skalpell in den schmalen Zwischenraum gedrückt.

Da eine Temperaturmessung des Drahtes nicht möglich ist, wird die Temperatur

<sup>4</sup>Kapton isolierter Kupferdraht mit  $d = 0,25 \text{ mm}$  bzw  $A = 0,05 \text{ mm}^2$



**Abbildung 5.9:** Dargestellt ist der Widerstandsverlauf eines (a) Niobdrahts und (b) einer Spitze, wie sie aus dem Kühlschild herauschaut. Man kann erkennen, dass beides Mal die Sprungtemperatur erreicht wird. Die Spitze wird jedoch sehr viel schlechter supraleitend, was darauf schließen lässt, dass, wie im Text beschrieben, eine Konfiguration vorzuziehen ist, bei dem die Spitze im Kühlschild verbleibt.

indirekt über eine Widerstandsmessung des Drahtes gemacht. Da die Sprungtemperatur  $T_c$  von Niob bei  $T_c = 9,25$  K liegt, kann man anhand des Einbruches im elektrischen Widerstand des Drahtes die Temperatur kalibrieren. Der Widerstand wird hierbei über eine 4-Punktmessung am Draht durchgeführt. Zusätzlich zu den Zuleitungsdrähten aus Kupfer, sind an die Niobfüßchen je ein Draht aus Manganin angecrimpt. Durch die Crimp-Verbindung ist kein optimaler elektrischer Kontakt gegeben, der auch durch unterschiedlichen Druck beim Ancrimpen variieren kann. In Abbildung 5.9 (a) sieht man den Sprung im Widerstand sehr gut. Allerdings handelt es sich hierbei um ein Stück Niobdraht auf dem Testkryostaten. Das Kühlschild besitzt keine Aussparung. In Abbildung 5.9 (b) ist klar zu erkennen, dass es eine Schwierigkeit darstellt, wenn die Spitze aus dem Kühlschild herauschaut. Anhand der Widerstandskurve kann man erkennen, dass der Drahtbügel mit der Spitze erst nach und nach kalt genug wird, um überall unterhalb der Sprungtemperatur  $T_c$  zu sein. So fällt der Widerstand bei abfallender Temperatur immer weiter. Man kann in diesem Fall nicht mit letzter Sicherheit sagen, ob bei der Endtemperatur von 3,5 K

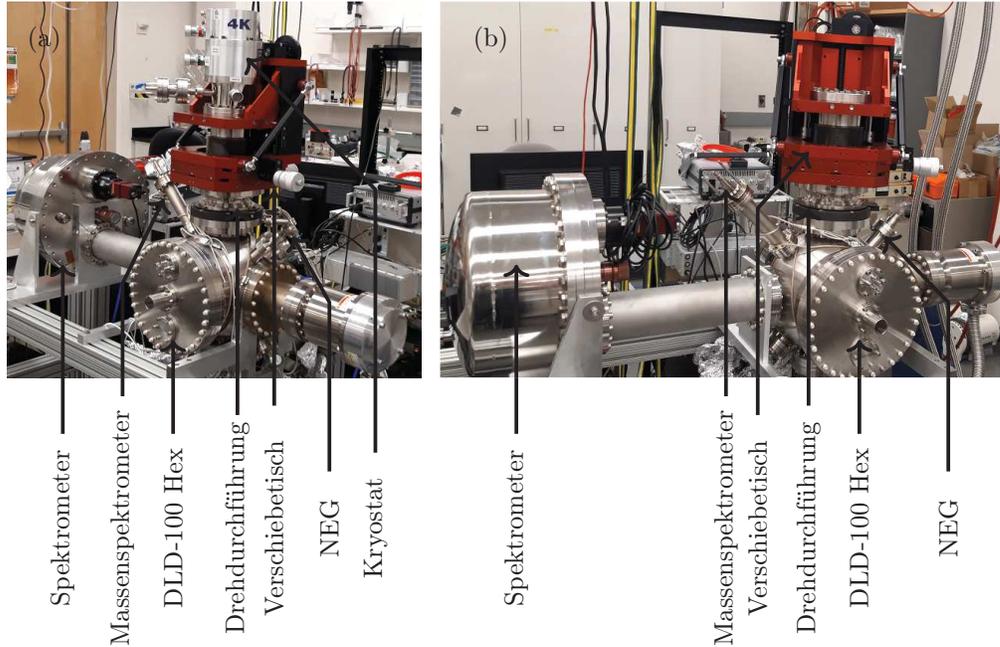
die komplette Spitze den supraleitenden Zustand erreicht oder nicht. Die bessere Variante ist, die Spitze komplett unter dem Kühlschild zu halten und gegebenenfalls den divergenten Elektronenstrahl mit passender Elektronenoptik zu fokussieren. Die Ergebnisse lassen die Aussage zu, dass man mit dem vorhanden System grundsätzlich ein Feldemitter aus Niob unterhalb der Sprungtemperatur gekühlt werden kann, eine Feldemission der Spitze möglich ist und eine Spitzenpräparation durch Glühen trotz Kühlen keine Probleme darstellt.

### 5.4.3 Messaufbau

In Abschnitt 2.6 wurde auf die Vorteile einer supraleitenden Spitze hingewiesen und auf die vorausgegangenen Experimente eingegangen. In den vorausgehenden Abschnitten wurde gezeigt, dass es möglich ist, mit der neu etablierten Methode und Fähigkeit, Feldemitter aus Niob reproduzierbar herzustellen und eine Möglichkeit geschaffen wurde, die Spitzen unterhalb der Sprungtemperatur zu kühlen. Mit diesen Voraussetzungen wurde nun ein Aufbau entworfen und aufgebaut, mit dem Ziel, die in Abschnitt 2.6.2 und 2.6.3 dargestellte Effekte zu messen. Dazu werden folgende Bedingungen an das Experiment gestellt:

- (1) Kryostat, um die Spitze auf unter  $T_c = 9,25$  K zu kühlen.
- (2) Einzelelektronendetektor mit hoher zeitlicher und räumlicher Auflösung, um räumliche und zeitliche Korrelationen betrachten zu können.
- (3) Elektronenspektrometer mit einer Energieauflösung  $\Delta E \leq 5$  meV.
- (4) Gutes Vakuum, welches besser als  $1 \cdot 10^{-12}$  mbar sein sollte.
- (5) Elektronenoptik, um den Spin der Elektronen messen zu können und die Kohärenz des Feldemitters bestimmen zu können.
- (6) Die Möglichkeit die unterschiedlichen Messapparaturen ansprechen zu können, ohne die Spitze ausbauen zu müssen.

In Abschnitt 5.4.1 und 5.4.2 haben wir bereits gesehen, dass es möglich ist, mit der konstruierten Halterung die Spitze unterhalb der Sprungtemperatur zu kühlen und gleichzeitig die Möglichkeit zu haben, den Emitter zu heizen und mit Spannungen bis 3000 V zu betreiben. Durch diese Vorarbeit ist Punkt (1) erfüllt. Auch Punkt (2) lässt sich erfüllen. Es wurden bereits weitläufige Erfahrungen

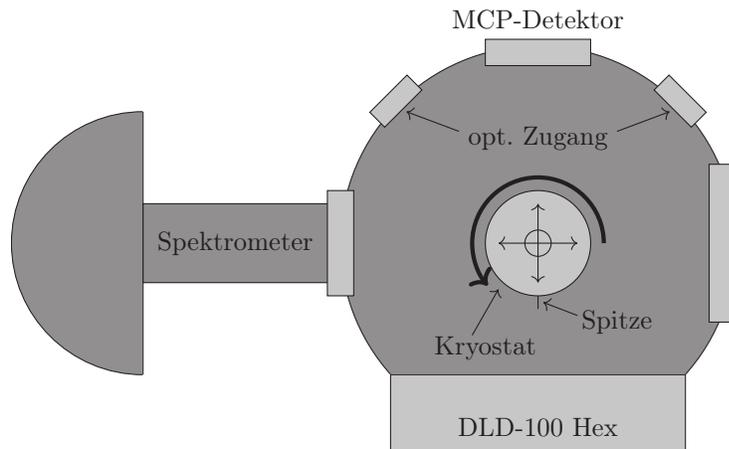


**Abbildung 5.10:** Experiment zur Untersuchung der supraleitenden Emission von Niob. Zur Messung ist ein Elektronenspektrometer mit hoher Energieauflösung, ein DLD-100 Hex und ein Massenspektrometer verbaut. Der Kryostat sitzt auf einem 3-Achsen-Verschiebetisch und einer Drehdurchführung für manuelle Justage.

mit einem Delay-Line Detektor gemacht, welcher alle diese Eigenschaften mit sich bringt. Es wurden bereits Korrelationsfunktionen mit Hilfe solch eines Detektors berechnet und gemessen (siehe [91],[92],[73],[74]). Für Punkt (3) kommen mehrere Lösungsansätze in Frage. Es lässt sich die Energiebreite interferometrisch bestimmen, wie in [94] und [45] dargestellt, oder mit einem Elektronenspektrometer mit hoher Auflösung. Wie in Abschnitt 5.3 gezeigt, kann ein Feldemitter aus Niob prinzipiell kohärente Elektronen emittieren. Da es aber schwierig ist einen Kryostat für den Feldemitter in den vorhandenen Interferometrieaufbau zu integrieren. Daher haben wir uns für die Lösung mit dem Elektronenspektrometer entschieden. Damit lässt sich dieser Punkt ebenfalls erfüllen. Um ein gutes Vakuum zu bekommen, wie in Punkt (4) gefordert, muss die Vakuumkammer längere Zeit auf mindestens  $150^{\circ}\text{C}$  ausgeheizt werden. Dies bedeutet aber auch, dass alle angebauten Bauteile dieser Temperatur über längere Zeit standhalten können müssen. Dies stellt eine nicht zu vernachlässigende Schwierigkeit dar. Der verbaute Kryostat ist nicht für eine so hohe Ausheiztemperatur spezifiziert. Auch die Geometrie und der Aufbau der Elektronenspektrometer kann für Schwierigkeiten beim Vakuum sorgen, was

sich durch längeres Ausheizen jedoch kompensieren lässt. Des Weiteren muss die Kammer mit einer NEG-Pumpe ausgestattet sein, um eventuellen Wasserstoff aus dem Restgas zu entfernen. Um wie in Punkt (5) gefordert, den Spin messen zu können, gibt es unterschiedliche Möglichkeiten. Zum einen kann man den Spin mit einer Art Stern-Gerlach Experiment messen, wie in [95] beschrieben. Da die Lorentz-Kraft auf die geladenen Teilchen sehr viel größer ist, als die Kraft durch das magnetische Moment  $\mu_b$ , muss die Lorentzkraft ausgeglichen werden. Dies könnte zum Beispiel durch eine Art Wienfilter geschehen, indem sich die Ablenkungen gegenseitig aufheben. Auch ein Ansatz, wie in [96] beschrieben, ist möglich. Die Idee ist hierbei, mithilfe des Kapitza-Dirac-Effekts [97] eine Spin-abhängige Beugung der Elektronen an zwei gegenläufigen, zirkular polarisierten Laserstrahlen. Um so einen Ansatz zu verfolgen benötigt der Aufbau hierzu optische Zugänge. Eine Entscheidung, wie der Spin zu messen ist, wurde letztendlich noch nicht getroffen, allerdings wurde Wert darauf gelegt, keine Möglichkeit von vorne herein baulich auszuschließen, weshalb die Vakuumkammer so entworfen wurde, dass alle Möglichkeiten offen sind. Im Abschnitt 5.3 haben wir gesehen, dass ein Feldemitter aus Niob sehr anfällig gegen Verschmutzung ist und regelmäßig ausgeheizt werden muss. Aus diesem Grund sollte, wie in Punkt (6) gefordert, es möglich sein, alle Effekte mit ein und derselben Spitze messen zu können, ohne diese auszubauen, was die Spitze zerstören könnte. Da, wie bereits beschrieben, Niob ein Getter-Material ist, kann bei jedem Ein- und Ausbauvorgang die Spitze oxidieren, oder durch Staub die feine Struktur zerstört werden. Aus diesem Grund soll der Kryostat mit der montierten Spitze frei um  $360^\circ$  drehbar sein um die unterschiedlichen Experimente, wie den DLD, den Elektronenspektrometer und den Spin-Analysator in der Kammer ansprechen zu können.

Aus all den Überlegungen und Punkten wurde ein Experiment aufgebaut, wie es in Abbildung 5.10 dargestellt ist. An der Kammer ist ein sogenannter "Closed-Cycle-Cryostat" verbaut, also ein Kryostat mit angeschlossenem Kühlkompressor, welcher ohne externe LHe-Zuführung funktioniert, auch Refrigeratorkryostat genannt. Der Kryostat kann die Spitze auf 3,8 K kühlen und ist sowohl auf einem X-Y-Z-Verschiebetisch montiert, als auch auf einer  $360^\circ$ -Drehdurchführung. Damit lässt sich die Elektronenemission rein mechanisch in der Kammer justieren und alle Messapparaturen ansprechen. Eine schematische Darstellung der Kammer ist in Abbildung 5.11 zu sehen. Als Einzelelektronendetektor mit hoher zeitlicher und räumlicher Auflösung wurde ein DLD-100 Hex verbaut. Durch die große Detektionsfläche soll gewährleistet werden, dass ein ein stark aufgeweiteter Strahl komplett



**Abbildung 5.11:** Schematische Darstellung des Experiments. Der Kryostat mit Emittierer lässt sich um  $360^\circ$  drehen und mit dem Verschiebetisch in allen Raumrichtungen verfahren. Damit lassen sich die unterschiedlichen Messapparaturen ansprechen. Links und rechts vom MCP-Detektor sind optische Zugänge. Durch eine Verlängerung lässt sich vor den MCP-Detektor ein kleines Interferometer integrieren um die Kohärenz der Emission zu messen.

dargestellt werden kann, und somit auch gleichzeitig auftreffende Teilchen gemessen werden können. Wie in Abschnitt 3.1.8 erklärt, benötigen die auftreffenden Teilchen einen gewissen räumlichen Abstand, weshalb ein aufgeweiteter Strahl zu bevorzugen ist. Für die Energiebreitenmessung ist ein Elektronenspektrometer<sup>5</sup> an der Kammer montiert mit vorgesetzter Elektronenoptik für die verbesserte Strahlführung. Des Weiteren ist ein MCP-Detektor mit Phosphorschirm an die Kammer angebracht, für die erste Justage des Elektronenstrahls. Damit soll vermieden werden, dass beim ersten Einschalten der Spitze der Delay-Line-Detektor zu viel Intensität abbekommt und damit beschädigt wird. Außerdem kann in späteren Stadien des Experiments der MCP-Detektor dafür genutzt werden, die Spinmessung sichtbar zu machen oder aber um die Kohärenz der Quelle durch ein miniaturisiertes Interferometer, wie es in [98] beschrieben ist, zu überprüfen. Zum jetzigen Zeitpunkt wurde der Aufbau in Betrieb genommen. Der Kryostat ist funktionsfähig und es konnte bereits eine Elektronenemission sowohl bei Raumtemperatur, als auch bei 3,8 K beobachtet werden. Hierfür wurde der Detektor justiert und für die Messung vorbereitet. Das

<sup>5</sup>Hemispherical electron energy analyzer SES-100 von Scienta Omicron. Dieser alte Analyzer wurde jedoch wenige Monate nach meinem US-Aufenthalt durch einen modernen des Typs DA20 R von derselben Firma ersetzt.

Elektronenspektrometer ist nach Reparatur der Anstreuerelektronik einsatzbereit und es wurde bereits ein Elektronensignal gesehen. Mit dem angebauten Massenspektrometer lässt sich zuverlässig das Restgas in der Kammer analysieren, was für die späteren Experimente äußerst sinnvoll ist. Der angeflanschte MCP-Detektor mit Phosphorschirm ist einsatzbereit und funktioniert. Hierfür wurden neue Spannungsquellen beschafft. Durch die Drehdurchführung lassen sich problemlos alle genannten Messapparaturen anfahren und durch den Verschiebetisch ist eine mechanische Justage der Emission möglich. Probleme bereitet bisher jedoch das Vakuum. Der verwendete Kryostat lässt sich nicht höher als 100 °C ausheizen und auch die verbaute Pumpleistung scheint zu gering. So dass mit aktivem Kryostaten als Kryopumpe nur Drücke bis  $2 \cdot 10^{-11}$  mbar erreichbar sind. Aus den Erfahrungen der Gruppe um Oshima ist solch ein Druck nicht ausreichend. Außerdem sorgt dies dafür, dass sehr viele Fremdatome an der Spitze ausfrieren, was häufiges Reinigen der Spitze durch Heizen nötig macht. Auch ist noch kein Aufbau realisiert, um den Spin der Elektronen zu messen. Optische Zugänge sind jedoch in ausreichender Zahl vorhanden. Im nächsten Schritt soll dann die Energiebreite einer supraleitenden Emission mit der einer normalleitenden verglichen werden und Korrelationsmessung der Teilchenstatistik untersucht werden.

### **Fazit**

Es wurde die Methode in Tübingen und am LBNL etabliert, Feldemissionskathoden aus Niob herzustellen. Die Spitzen können geätzt und so präpariert werden, sodass eine Emissionsspannung von 300-2000 V erreichbar ist. Es konnte gezeigt werden, dass eine kohärente Elektronenemission bei Raumtemperatur mit solchen Emittern grundsätzlich möglich ist. Für eine supraleitende Emission wurde ein Halterungsschema entworfen, gebaut und getestet, was die Spitzenpräparation mit dem nötigen Heizen zulässt, hohe Spannungen für den Emissionsprozess aushält und einen guten Kälteübertrag vom Kryosystem auf die Spitze garantiert. Es konnte gezeigt werden, dass eine Temperatur von 3,8 K erreicht werden kann, was deutlich unter der Sprungtemperatur von Niob, also 9,25 K, liegt. Daraufhin wurde ein Messaufbau entworfen und aufgebaut, um die Eigenschaften einer supraleitenden Elektronenemission zu vermessen. Es ist mit diesem Aufbau grundsätzlich möglich, bei einer Spitze die Energiebreite mit einem Spektrometer und eventuell auch die Verschränkung der Elektronen anhand von Korrelationsmessungen zu bestimmen. Die Simulationen, welche in Abschnitt 4.3 gezeigt wurden, legen nahe, dass mithilfe des verbauten Delay-Line-Detektors und der in Abschnitt 2.7 beschriebenen Korrela-

---

tionsanalyse die Vermutung von Nagaoka [55] und die Berechnungen von Yuasa [49] grundsätzlich gemessen werden können. Der Aufbau bietet zudem genügend Platz und Möglichkeiten, Experimente um den Elektronenspin direkt messen zu können zu integrieren. Die wichtigsten Komponenten des Experiments wurden bereits von mir in Betrieb genommen und getestet.

# Kapitel 6

## Datenübertragung

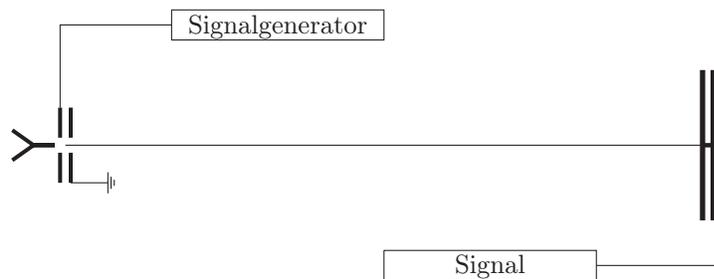
In der Datenübertragung mit elektromagnetischen Wellen gibt es mittlerweile viele Standardtechniken, wie die Amplitudenmodulation (AM), Frequenzmodulation (FM) oder die Phasenmodulation (PM). Der folgende Abschnitt gliedert sich in drei Abschnitte. Zuerst soll gezeigt werden, dass mit den oben genannten Möglichkeiten auch ein Elektronenstrahl moduliert werden kann. Es wird unter anderem auf die theoretisch machbaren Amplituden-, die Frequenz-, Phasen- und die Kontrastmodulation eingegangen. Danach wird dann praktisch durchgeführte Methode der Kontrastmodulation mit einem Wienfilter dargestellt und bezüglich Übertragungsgeschwindigkeit und Langzeitstabilität untersucht. Es wird mit den herausgearbeiteten Parametern eine Nachricht übertragen. Anschließend wird die Sicherheit der Übertragungsmethode diskutiert. Es wird gezeigt, dass die Methode ein hohes Maß an Sicherheit aufweist. Diesbezüglich wird ein Übertragungsschema präsentiert, welches die Sicherheit bei aktiven Angriffen erheblich erhöht. Es werden die Schwachstellen der Methode diskutiert. Die Ergebnisse sind auch in [99] nachzulesen.

### 6.1 Übertragungsarten

In diesem Abschnitt soll darauf eingegangen werden, wie durch verschiedene Modulationsmöglichkeiten eines Elektronenstrahls ein Elektroneninterferometer zur Datenübertragung genutzt werden kann. Die gängigsten Methoden der Datenübertragung sind, wie wir sie zum Beispiel aus dem Rundfunk kennen, die Amplitudenmodulation (AM) die Frequenzmodulation (FM) und die Phasenmodulation (PM). Alle diese Übertragungsmethoden kennt man sehr gut bei elektromagnetischen Wellen. Auch ein Elektronenstrahl lässt sich auf diese Art und Weise modulieren. Diese Methoden sollen hier dargestellt werden. Des Weiteren hat man bei

Materiewellen durch das Wienfilter die Möglichkeit einer Kontrastmodulation bei stabiler Phasenlage, was so bei elektromagnetischen Wellen nicht möglich ist, da es in der Optik kein Analogon zum Wienfilter gibt. Im Wienfilter heben sich der elektrische und magnetische Aharonov-Bohm-Effekt gerade auf, weshalb es effektiv keinen Phasenschub des Interferenzmusters gibt [19]. Im hier vorliegenden Abschnitt soll näher auf die möglichen Realisierungen dieser Modulationsarten mit einem Elektronen-Biprismainterferometer eingegangen werden.

### 6.1.1 Amplitudenmodulation

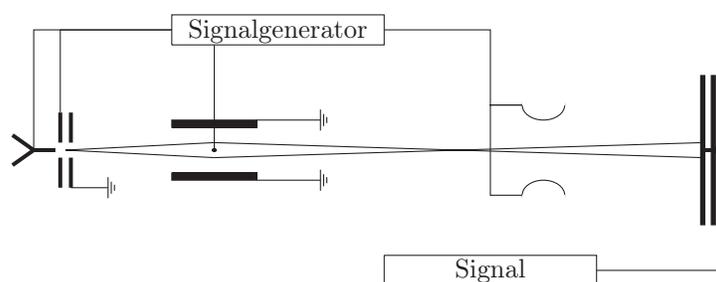


**Abbildung 6.1:** Schema zur Amplitudenmodulation. Eingezeichnet sind die Spitze, die Extraktionsblende, die Erdblende und der MCP-Detektor. Die Extraktionsspannung wird moduliert. Der Emissionsstrom, beziehungsweise die Zählrate, wird am MCP Detektor gemessen.

Eine Amplitudenmodulation ist hier gleichzusetzen mit einer Intensitätsmodulation. Um eine Amplitudenmodulation des Elektronenstrahls durchzuführen, wird der Emissionsstrom der Elektronenquelle moduliert. Dazu benötigt man eine Feldemitterkonfiguration wie in Abschnitt 3.1.2 beschrieben. Die Spannungsdifferenz zwischen Spitze und Extraktionsblende gibt den Emissionsstrom vor, während die Spannungsdifferenz zwischen Spitze und der Erdblende die Elektronenenergie definiert. Es lässt sich also die Extraktionsspannung variieren, ohne die Energie der Elektronen zu verändern. Am Detektor wird dann die Zählrate über die Zeit gemessen. Der schematische Aufbau ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Schwierigkeiten bei dieser Modulationsart sind zum einen die Modulationsgeschwindigkeit bei dem hier benutzten Aufbau. Da die zu variierende Spannung bis zu  $\pm 100$  V betragen kann und die Kapazität der Kabel und der Extraktionsblende nicht vernachlässigbar klein sind, sieht man beim Auswerten der Zählrate die typischen Auf- und Entladekurven eines Kondensators. Dies wird dadurch noch verstärkt, da die Spannungsquelle

auf 1 mA strombegrenzt ist. Dadurch ist die Modulationsgeschwindigkeit auf wenige Hertz beschränkt. Durch zwischengeschaltete Hochspannungskondensatoren mit entsprechender Kapazität ließe sich dieses Problem jedoch lösen. Eine weitere Schwierigkeit ist, dass die Emission der Quelle in der Regel eine Schwankung von 10 % besitzt. Für eine binäre Modulation (also Schalten zwischen 0 und 1) muss also die Zählrate dementsprechend stark moduliert werden. Vorteil dieser Modulationsmethode ist hier allerdings, dass keine kohärente Emission von Nöten ist. Selbst mit einer thermischen Emission würde diese Methode funktionieren. Im Grunde passiert in einer einfachen Dioden-Elektronenröhre nichts anderes. Dort wird der Elektronenstrom durch ein oder mehrere Steuergitter moduliert.

### 6.1.2 Frequenzmodulation

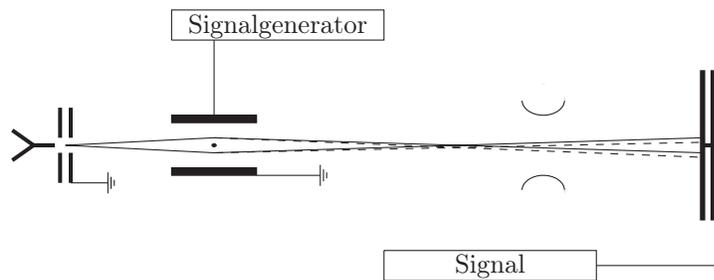


**Abbildung 6.2:** Schema zur Frequenzmodulation. Eingezeichnet sind die Spitze, die Extraktionsblende, die Erdblenne, der Biprismafaden, der Quadrupol und der MCP-Detektor. Um die Wellenlänge zu modulieren muss die Spitzenspannung variiert werden. Damit der Emissionsstrom gleich bleibt, muss die Extraktionsspannung im gleichen Maße mit moduliert werden. Da der Ablenkwinkel am Biprisma und die Vergrößerung am Quadrupol energieabhängig sind, muss die Spannung an diesen Bauteilen ebenfalls variiert werden. Am MCP-Detektor wird dann der Streifenabstand als Signal gemessen.

Bei der Frequenzmodulation wird die Wellenlänge der Materiewelle variiert und zwar ohne dass der Emissionsstrom oder die Phasenlage des Interferenzmusters variiert wird. Dazu wird die Extraktionsspannung im gleichen Maße variiert wie die Spitzenspannung, so dass sich zwar die Energie der Elektronen ändert und somit auch die Wellenlänge der Materiewelle (siehe Gleichung 2.3), aber sich die Zählrate dabei nicht ändert. Bei gleichem Überlagerungswinkel am Biprisma ändert sich dann der Streifenabstand (siehe Gleichung 2.9). Für diese Modulationsart wird ein kohärenter Elektronenstrahl benötigt, jedoch ist sie sehr unpraktikabel und somit

eher von Interesse bei theoretischen Überlegungen, da sowohl die Ablenkung am Biprisma (Siehe Gleichung 2.6) als auch die Vergrößerung an den Elektronenlinsen stark geschwindigkeitsabhängig ist. Wenn sich also die Elektronenenergie ändert muss sich auch jede andere Spannung im Interferometer ebenfalls ändern um den Strahlengang nicht zu verändern. Der schematische Aufbau ist in Abbildung 6.2 zu sehen. Selbst wenn man ohne Ablenkelemente ein Interferenzmuster erzeugen kann, muss man die anderen Spannungen am Biprismafaden oder an den Linsen sehr gut kontrollieren können und die zugrunde liegenden Parameter wie Überlagerungswinkel und Vergrößerung der Interferenzstreifen sehr gut kennen. Dies setzt voraus, dass die verwendeten Bauteile in hohem Maße charakterisiert sein müssen. Die Übertragungsgeschwindigkeit ist durch das Erzeugen des Interferenzmusters beschränkt. Es braucht mindestens 2000 Ereignisse auf dem Detektor, um die Phasenlage des Interferenzmusters feststellen zu können [24]. Als Signal wird dann der Streifenabstand gegen die Zeit aufgetragen. Da der Streifenabstand eben auch variiert wird, wenn sich die Vergrößerung ändert oder der Überlagerungswinkel, kann man sich sehr leicht Fehler in der Übertragung einfangen.

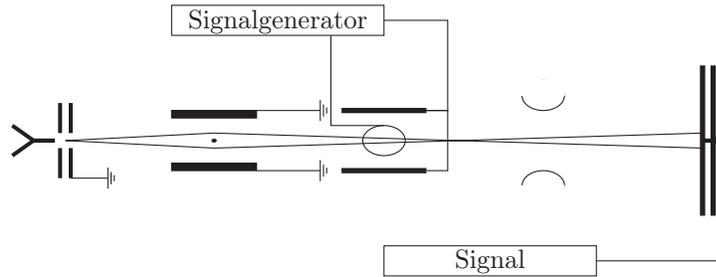
### 6.1.3 Phasenmodulation



**Abbildung 6.3:** Schema zur Phasenmodulation. Eingezeichnet sind die Spitze, die Extraktionsblende, die Erdblenne, der Biprismafaden, der Quadrupol und der MCP-Detektor. Um einen Gangunterschied zwischen linken und rechten Pfad am Biprisma zu erreichen wird ein elektronenoptischer Brechungsindex eingeführt. Eine Erdbacke wird isoliert und von der Erde getrennt. Durch Anlegen einer Modulationsspannung ändert sich der Weg vom linken zu rechten Pfad. Am MCP-Detektor wird die Phasenlage eines Maximums/Minimums als Signal gemessen.

Es gibt grundsätzlich zwei Varianten für eine Phasenmodulation des Elektroneninterferenzmusters. Für eine Phasenmodulation muss die optische Weglänge der

einen Partialwelle im Vergleich zur anderen verändert werden. In der Lichtoptik kann man dies durch das Einsetzen eines Mediums in einen Pfad des Interferometers bewerkstelligen, oder durch eine Verlängerung der Teilpfade mit verschiebbaren Spiegeln. Elektronenoptisch kann man dies genauso machen, indem man einen elektronenoptischen Brechungsindex einführt, in Form eines elektrostatischen Potentials. Dies kann dadurch geschehen, dass man beim Biprisma eine der zwei Erdbacken elektrisch isoliert, um ebenfalls auf eine Spannung legen zu können. Einen solchen Phasenschieber hat bereits Möllenstedt und Düker in der ersten Veröffentlichung zur Biprismainterferometrie beschrieben [15]. Er ist schematisch in Abbildung 6.3 dargestellt. Sie haben damit einen Phasenschub von  $\pi/2$  erzeugt, das Streifenmuster also um eine halbe Periode verschoben. Da in dem verwendeten Aufbau die Biprismaspannung im Bereich von einigen 100 mV liegt, wäre die Spannung für einen  $\pi/2$ -Phasenschub im Bereich von wenigen 10 mV. Durch die geringe Modulationsspannung kann die Spannung am Erdbacken ziemlich schnell moduliert werden. Der begrenzende Faktor hierbei ist, dass genügend Teilchen auf dem Schirm akkumuliert sein müssen, um ein Interferenzmuster bzw. die Phasenlage des Interferenzmusters zu bestimmen. Dafür sind in etwa 2000 Ereignisse auf dem Detektor notwendig [24]. Der limitierende Faktor bei der Übertragungsgeschwindigkeit ist also hierbei die Emissionsrate und dann letztendlich die maximale Zählrate des Detektors. Kann der Detektor also mit 100 kHz Elektronen detektieren, wäre die Übertragungsrate hierbei bei etwa 50 bit/s. Es ist allerdings fraglich, ob ein kohärenter Feldemitter solch einen Emissionsstrom überhaupt standhalten kann. Die meisten Elektronen werden zuvor durch etliche Aperturen abgehalten, so dass nur ein sehr kleiner Teil des Emissionsstroms tatsächlich am Detektor gemessen werden kann. Eine andere Möglichkeit einen Phasenschub zu erzeugen ist durch den magnetischen und elektrostatischen Aharonov-Bohm Effekt [100]. Elektronenwellen erfahren im feldfreien Raum durch das Vektorpotential bzw. das elektrostatische Potential einen Phasenschub, welcher messbar ist, wie in [22] gezeigt. Durch Ein- und Ausschalten einer Luftspule zwischen den kohärent aufgespaltenen Elektronenpfaden bzw. durch Ein- und Ausschalten eines elektrostatischen Zylinders durch den eine der beiden Partialwellen läuft, lässt sich dann zwischen zwei Positionen, also 0 und 1, hin und herschalten.



**Abbildung 6.4:** Schema zur Kontrastmodulation. Eingezeichnet sind die Spitze, die Extraktionsblende, die Erdblende, der Biprismafaden, das Wienfilter, der Quadrupol und der MCP-Detektor. Mit dem Wienfilter werden die Wellenpakete zueinander verschoben. Die Spannung am Wienkondensator und der Strom der Wienspule wird so moduliert, dass sich die Lage des Interferenzmusters nicht ändert, der Wienfilter also immer im abgeglichenen Zustand ist. Am MCP-Detektor wird ein Interferenzmuster gemessen. Der Kontrast des Interferenzmusters ist das Signal.

### 6.1.4 Kontrastmodulation

Für eine Kontrastmodulation wird das Wienfilter als Bauteil im Strahlengang verwendet. Mit ihm werden die Wellenpakete der linken und rechten Partialwelle zueinander verschoben was eine Modulation im Kontrast nach sich zieht. Nachdem in den Abschnitten 2.5 und 3.1.6 die Funktionsweise eines Wienfilters beschrieben wurde, wird eine Modulation des Kontrasts folgendermaßen realisiert: Für eine binäre Übertragung (Umschalten zwischen vollem Kontrast und keinem Kontrast) wird der Wienfilter im abgeglichenen Zustand so eingestellt, dass der Kontrast des Interferenzmusters maximal ist. Durch gleichzeitiges Umschalten des Spulenstroms und der Wienspannung wird der Wienfilter in einen anderen abgeglichenen Zustand eingestellt, sodass der Kontrast des Interferenzmusters minimal ist. So kann zwischen 1 und 0 hin- und hergeschaltet werden. Der schematische Aufbau ist in Abbildung 6.4 skizziert. Die Zählrate am Detektor wird dabei nicht geändert. Auch bleibt die Phasenlage des Interferenzmusters stabil [27] [44] [94] [19]. Die Übertragungsgeschwindigkeit wird, wie vorher auch, durch die Zählrate am Detektor limitiert. Da man mindestens 2000 Ereignisse pro Interferenzmuster braucht, um den Kontrast und die Phase zu bestimmen, ist wie vorhin auch die Übertragungsrate auf etwa 50 bit/s beschränkt. Ein weiterer limitierender Faktor ist die Induktivität der Wienspulen. Dadurch wird ein schnelles Umschalten des Spulenstroms stark eingeschränkt. Eine andere Schwierigkeit stellt die Hysterese der Spule dar. Durch den Eisenkern, der in den Spulen verbaut ist, bleiben die Spulen

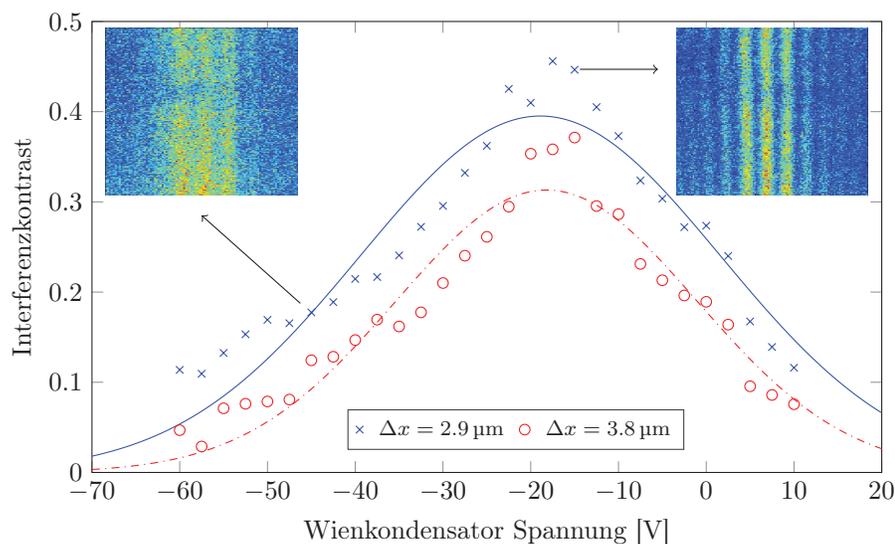
magnetisiert, wenn man den Spulenstrom abschaltet. Wenn man also einmal Strom und Spannung zwischen 0 und 1 hin- und herschaltet, ist das Wienfilter danach nicht mehr ausgeglichen. Erst durch sehr häufiges Umpolen gehen die Spulen in eine Sättigungsmagnetisierung, wo die Hysterese des Magnetfelds vernachlässigbar klein wird. Da die Modulation mit dem Wienfilter durch den Aharonov-Bohm-Effekt ein reiner Quanteneffekt ist, handelt es sich bei der Datenübertragung um eine rein quantenmechanische Modulation.

---

## 6.2 Datenübertragung durch Kontrastmodulation

Im vorherigen Abschnitt wurde unter anderem auch die Übertragungsart durch eine Kontrastmodulation beschrieben. Auf diese Übertragungsart soll im Folgenden näher eingegangen werden. Bereits im Abschnitt 2.5 und 3.1.6 wurde die Funktionsweise und der Aufbau des Wienfilters beschrieben. Im Folgenden wird auf die Ansteuerung des Wienfilters eingegangen und auf das Auslesen der Daten. Es wird untersucht wie sich die Übertragungsgeschwindigkeit auf die Übertragungsqualität auswirkt. Des Weiteren wird die Stabilität der Übertragung untersucht, indem lange Testsequenzen übertragen werden. Mit der gewonnen Erkenntnis wird dann eine Nachricht übertragen.

### 6.2.1 Ansteuerung des Wienfilters

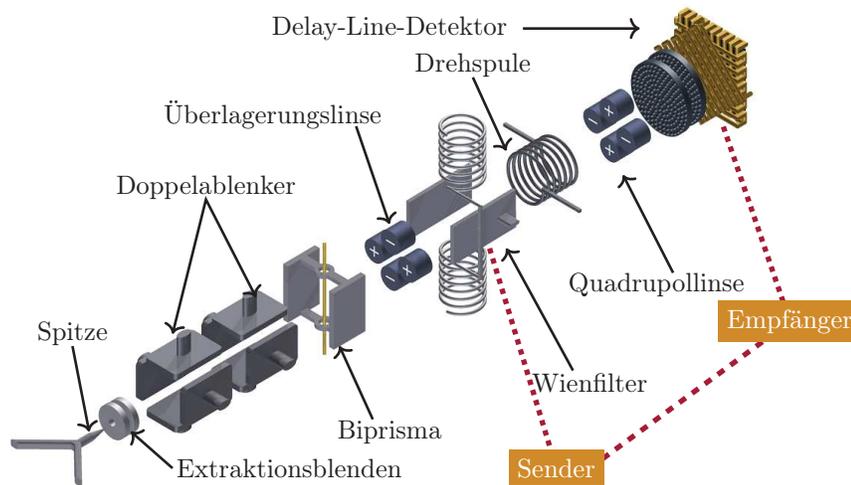


**Abbildung 6.5:** Zwei in unserem Interferometeraufbau experimentell gemessene Wienkurven mit jeweils unterschiedlicher Aufspaltung  $\Delta x$ . Es werden unterschiedliche ausgeglichene Zustände des Wienfilters angefahren und der Kontrast bestimmt. Für jeden Datenpunkt wurde fünf Mal 250.000 Teilchen gemessen der Kontrast bestimmt und anschließend gemittelt. Aufgetragen ist die Wienspannung gegen den Kontrast. Der Spulenstrom wird so angepasst, dass die Ablenkungen sich gerade aufheben. Die zwei Interferenzbilder zeigen beispielhaft den Kontrast an zwei Punkten der Kurve.

Um die Spulen und Ablenker des Wienfilters ansteuern zu können, wurde ein computergesteuertes Ansteuergerät, wie es in Abschnitt 3.2.5 beschrieben wurde,

entworfen und gebaut. Ziel soll es sein, zwischen zwei abgeglichenen Zuständen hin- und herschalten zu können. Dabei wird ein Zustand so gewählt, dass der Kontrast minimal ist und der andere Zustand, dass maximaler Kontrast sichtbar ist. Es muss also sowohl der Spulenstrom, als auch die Kondensatorspannung umgeschaltet werden. Die Werte werden aus einer Wienkurve entnommen, wie in Abbildung 6.5 zu sehen. Die jeweiligen Strom und Spannungswerte werden in das Steuerprogramm eingegeben. Eine Ansteuerung erfolgt über eine selbst programmierte grafische Oberfläche in Matlab, mit der alle Werte des Geräts überprüft werden können. Auch die zu sendende Textnachricht kann in das Programm, zusammen mit der gewünschten Übertragungsgeschwindigkeit eingegeben werden. Wie in Abschnitt 3.1.6 bereits erwähnt, besitzen die Wienspulen einen Kern aus Weicheisen, der Wienfilter besitzt also nach dem ersten Umschalten eine große Hysterese. Durch mehrmaliges Umschalten und jeweils Anpassen der Stromwerte stellt sich eine Sättigungsmagnetisierung ein. Dies ist meistens nach 30-40 Umpolungen der Fall. Das Umpolen und Anpassen des Spulenstroms ist mit Hilfe des Steuerprogramms einfach. Der Ausgangszustand für die Datenübertragung ist dann der "1" Zustand, also wenn das Interferenzmuster vollen Kontrast besitzt. Die zu übertragende Nachricht wird binär übersetzt und jeweils mit einem Start und Stopbit ergänzt. Das Startbit ist "000010" und das Endbit ist "110000". Das Ansteuergerät wird dann vom Computer angesteuert und schaltet den Kontrast dann zwischen niedrigem und hohem Kontrast hin und her. Die Schwierigkeit besteht darin, den Strom und die Spannung am Wienfilter gleichzeitig umzuschalten. Bei den moderaten Zählraten, wie bei diesem Experiment verwendet, spielt dies keine große Rolle, da die Schaltvorgänge im Bereich weniger Millisekunden stattfindet. Weder das Ansteuergerät, noch die Programmierung ist im Moment auf schnelle Schaltzeiten optimiert. Aus Erfahrungen von anderen Experimenten in der Atomphysik ist jedoch bekannt, dass mit einem sehr ähnlichen Gerät Schaltzeiten im Nanosekunden-Bereich möglich sind. Die Ansteuerung des Geräts erfolgt über eine serielle Schnittstelle (USB), welche ein schnelles Umschalten zulässt. Auch der verbaute Mikrocontroller ist von der Geschwindigkeit in der Lage die Steuerbefehle schnell genug umzusetzen. Das Problem liegt hierbei eher an der Strombegrenzung der Spannungsquelle. Um die Spannungs- und Stromwerte zu minimieren, ist eine Möglichkeit, die Aufspaltung des Elektronenstrahls im Wienfilter zu vergrößern. Wie in Abbildung 6.5 zu sehen, hat eine größere Aufspaltung eine schmalere Wienkurve zur Folge und dementsprechend sind die Strom und Spannungswerte zum Umschalten des Kontrasts kleiner. Bei einer Aufspaltung von  $50\ \mu\text{m}$  benötigt man nur noch wenige Volt und Milliampere, um zwischen den Zuständen

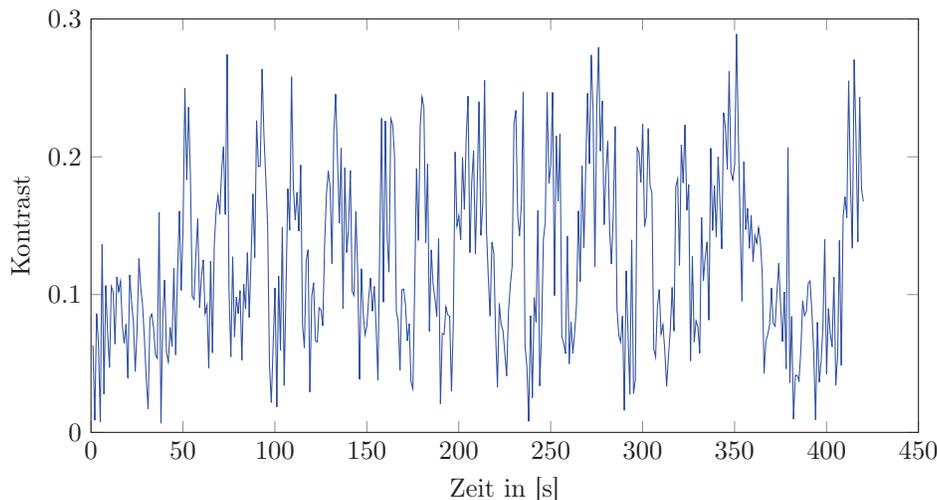
hin- und herzuschalten. Allerdings stellt dies große Stabilitätsansprüche an die Strom und Spannungsquellen. Der verwendete Versuchsaufbau ist in Abbildung 6.6 dargestellt. Der Wienfilter moduliert das Signal auf den Elektronenstrahl auf und dient als Sender während der Delay-Line-Detektor das Interferenzmuster aufnimmt, aus welchem der Kontrast bestimmt wird. Er dient also also als Empfänger.



**Abbildung 6.6:** Schematischer Aufbau des Versuchsaufbaus. Der Wienfilter fungiert als Sender, der Delay-Line-Detektor als Empfänger

## 6.2.2 Auslesen der Daten

Die Daten werden mit einem Delay-Line-Detektor der Firma Roentdek aufgenommen, wie er in Abschnitt 3.1.8 beschrieben ist. Der große Vorteil hierbei ist, dass die Zeitkomponente der einzelnen Elektronenevents zugänglich ist. Damit lässt sich im Nachhinein aus dem aufsummierten Bild eine Analyse des Kontrasts zu gewissen Zeitpunkten durchführen. Das aufsummierte Bild wird in der Nachbearbeitung zurechtgeschnitten und wenn nötig gedreht, sodass die Streifen eine senkrechte Ausrichtung haben. Danach wird eine Zeitschrittweite festgelegt. Hierbei ist darauf zu achten, dass die Zeitschrittweite kleiner ist, als die Übertragungsgeschwindigkeit. Bei einer Übertragungsgeschwindigkeit von 1 bit/s, muss der Zeit-Bin beim Auswerten kleiner als 1 s sein. Da man aber nicht genau weiß, mit welcher Geschwindigkeit die Daten übertragen werden, sollte man die Auswertungszeitschritte großzügig klein wählen. Es ist jedoch ebenfalls darauf zu achten, dass sich pro Zeit-Bin genügend Teilchen befinden, um eine Kontrastbestimmung durchführen zu können. Es werden dann alle Teilchen in dem Zeit-Bin aufsummiert und der Kontrast bestimmt. Der

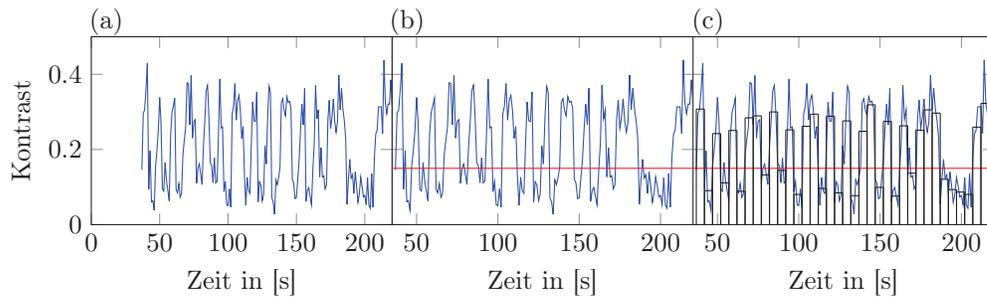


**Abbildung 6.7:** Zu sehen ist das Rohsignal nach der zeitlichen Auswertung des Kontrasts. Die Zeit-Bin-Länge bei der Auswertung ist auf 0,5s gesetzt. Es ist deutlich das Umschalten zwischen 0 und 1 zu sehen. Die Anfangssequenz "000010" und die Endsequenz "110000" sind klar sichtbar. Nach der Übertragung wird der Kontrast wieder auf 1 gestellt, was anhand des Anstiegs am Ende der Nachricht zu sehen ist.

Kontrast wird mit der Funktion

$$I(x) = I_0 \left( 1 + K \cos \left( \frac{2\pi x}{s} + \phi_0 \right) \right) \text{sinc}^2 \left( \frac{2\pi x}{s_1} + \phi_1 \right) \quad (6.1)$$

beschrieben, wobei  $K$  den Kontrast darstellt,  $s$  den Streifenabstand des Interferenzmusters und  $\phi_0$  die Phase. Der hintere Teil gibt die Überlagerung mit dem Intensitätsprofil eines Einzelspaltes an. Der Kontrastverlauf über die Zeit ist in Abbildung 6.7 dargestellt. Die Nachricht beginnt mit der Sequenz "000010". Diese Anfangssequenz erfüllt zwei Aufgaben. Da der Ausgangszustand des Wienfilters so ist, dass der Kontrast maximal ist, sorgt die Sequenz dafür, dass der Nachrichtenanfang klar identifiziert werden kann. Außerdem lässt sich aus der Sequenz "10" dann die Bit-Länge identifizieren. Bisher erfolgt die Längenbestimmung eines Bits noch manuell und ist ein Prozess der etwas Erfahrung braucht. Langfristig ist dieser Prozess softwaregestützt durchzuführen. Nachdem die Bit-Länge bestimmt wurde, wird die Anfangssequenz vom Programm abgeschnitten und ein Schwellenwert bestimmt. Der Schwellenwert wird als  $K_s = 0,8 \cdot \bar{K}$  angegeben und ist ein heuristischer Wert, welcher für den Großteil aller Übertragungen geeignet ist. Dabei gibt  $\bar{K}$  den mittleren Kontrast über die ganze Nachricht an. Das beschriebene Schema der Auswertprozedur ist in Abbildung 6.8 dargestellt. Nachrichten mit

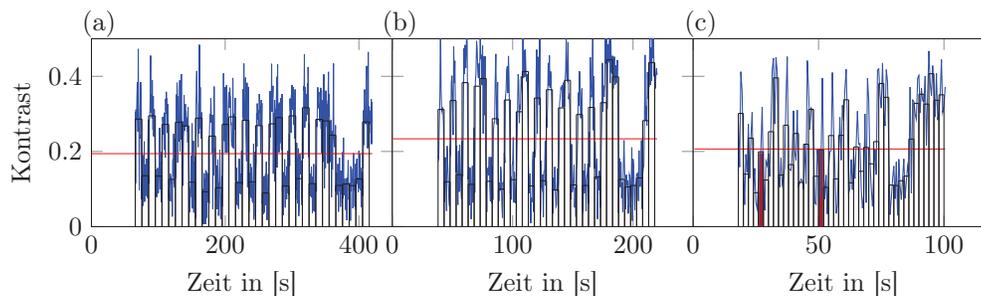


**Abbildung 6.8:** (a) Die Bit-Länge wurde anhand der Anfangssequenz bestimmt diese wird anschließend abgeschnitten. (b) Ein mittlerer Kontrast  $\bar{K}$  wird bestimmt. Der Schwellenwert wird auf  $K_s = 0,8 \cdot \bar{K}$  gesetzt. (c) Der mittlere Kontrast in jedem Bit wird bestimmt. Liegt der Wert über  $K_s$ , ist es 1, liegt er unterhalb  $K_s$  ist es 0.

vielen "1", haben erfahrungsgemäß einen etwas höheren Schwellenwert, während Nachrichten mit vielen "0" einen etwas niedrigeren Schwellenwert haben. Für jeden Zeit-Bin wird der Kontrast bestimmt und anschließend der mittlere Kontrast eines jeden Bits berechnet und verglichen, ob der Kontrast über oder unter  $K_s$  liegt. Dementsprechend wird eine 1 oder eine 0 gesetzt. Dabei ist zu beachten, dass in immer mehrere Zeit-Bins ein Bit ergeben. Die Bin-Länge ist so zu wählen, dass der Kontrast des Interferenzbildes bestimmbar ist, also in etwa 2000 Teilchen im Interferenzbild sind. Man sollte meinen, dass das optimale Ergebnis genau dann erreicht wird, wenn die Zeit-Bin-Länge genau einem Bit entspricht, also viele Teilchen im Bild aufintegriert wurden. Die Erfahrung hat jedoch gezeigt, dass der Mittelwert des Kontrasts aus vielen Zeit-Bins ein zuverlässigeres Ergebnis liefert, als der Kontrast des aufsummierten Bilds. Aus der binären Sequenz wird dann das Wort wieder zurückübersetzt und ausgegeben. In Abbildung 6.8 ist dieser Vorgang in den drei Schritten dargestellt. Übertragen wurde in diesem Fall die Nachricht "1010101101010110101011010101110000". Jedes Zeichen besteht aus 7 Bit, dementsprechend haben wir "1010101 - 1010101 - 1010101 - 1010101 - 110000", was übersetzt UUUU+Endbit bedeutet. Dies ist eine typische Testnachricht, da man an dieser Nachricht gut die Umschaltvorgänge des Wienfilters erkennen kann.

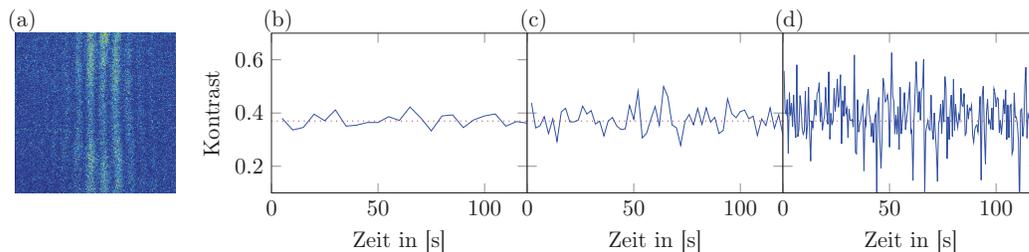
### 6.2.3 Übertragungsgeschwindigkeit

Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich die Übertragungsgeschwindigkeit auf die Qualität der Übertragung auswirkt. In dem hier diskutierten Fall ist die Zählrate am Detektor immer gleichbleibend. Wenn dann die Übertragungsgeschwindigkeit



**Abbildung 6.9:** Einfluss der Übertragungsgeschwindigkeit auf die Qualität der Übertragung. Die selbe Nachricht wurde mit drei unterschiedlichen Übertragungsgeschwindigkeiten übertragen. (a) 0,1 bit/s, (b) 0,2 bit/s (c) 0,5 bit/s. Man sieht, dass sich bei (c) bereits falsche Bits eingeschlichen haben. Die fehlerhaften Bits sind rot markiert.

steigt und die Zeit-Bin-Länge gleich bleibt, sind weniger Kontrastwerte pro Bit enthalten. Wie bereits beschrieben, muss die Zeit-Bin-Länge kürzer als ein Bit sein und lang genug, um genügend Teilchen für eine Kontrastbestimmung aufsummieren zu können. Da das Interferenzbild aus einzelnen Elektronen aufgebaut wird, ist eben bei sehr wenigen Elektronenevents der Fehler bzw. die Schwankung der Kontrastmessung sehr groß. Das Signal zu Rauschverhältnis ist relativ schlecht. Es kann leicht zu Schwankungen in der Kontrastbestimmung kommen. Diese Schwankungen spielen bei wenigen Kontrastwerten pro Bit eine viel größere Rolle als bei mehreren, wo sich der Fehler leicht heraus mittelt. Durch den größeren Einfluss der Kontrastschwankung, kann man in Abbildung 6.9(c) erkennen, wie sich fehlerhafte Bits einschleichen. Dies kann dadurch vermieden werden, indem das Signal erhöht wird. Dadurch hat man entweder mehr Elektroneneinschläge pro Zeit-Bin, was eine bessere Kontrastbestimmung zulässt, oder, wenn die Zahl der Elektronen pro Bin gleich bleiben soll, kann man die Bin-Größe verkleinern, was, wie bereits beschrieben zu mehr Kontrastwerten je Bit führt und damit Schwankungen besser ausgemittelt werden können. Um den Feldemitter während des Experiments zu schonen, wurde die Elektronenzählrate am Detektor mit 5000 El/s sehr moderat gewählt. Es ist dabei zu beachten, dass nicht alle Elektronen zum Interferenzbild beitragen. In Abbildung 6.10 ist zu sehen, dass selbst bei nur 285 Teilchen pro Zeit-Bin eine Kontrastbestimmung möglich ist. Jedoch steigt das Rauschen des Kontrasts, je weniger Teilchen im Zeit-Bin liegen. Man sieht an Abbildung 6.10 (c), dass bei knapp 1000 Teilchen pro Zeit-Bin eine gute Kontrastbestimmung möglich ist. Für die übertragene Testnachricht tragen bei dieser Zählrate etwa nur knapp 2000

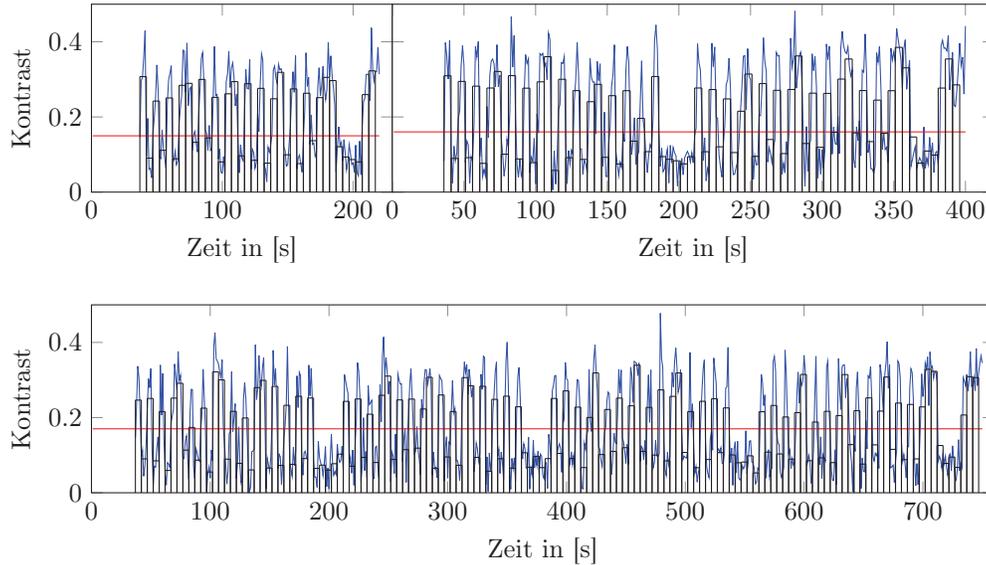


**Abbildung 6.10:** (a) Ein Interferenzbild wurde 120 s lang aufgenommen. Der Kontrast wird zeitlich ausgewertet. Die Zeit-Bin-Länge wird variiert. (b) Zeit-Bin-Länge: 5 s und 2850 Teilchen/Bin (c) Zeit-Bin-Länge: 2 s und 1140 Teilchen/Bin (d) Zeit-Bin-Länge: 0,5 s und 285 Teilchen/Bin. Der mittlere Kontrast bleibt gleich, nur das Rauschen steigt.

Elektronen zum Interferenzbild bei, was eine Zeit-Bin-Größe von 0,5 s zulässt. Bei einer Übertragungsrate von 0,5 Bit/s, entspricht dies gerade 4 Kontrastwerte pro Bit. Ein Ausreißer im Kontrast beeinflusst dann den mittleren Kontrastwert enorm. In Abbildung 6.9 ist zu sehen, dass bei zu schneller Übertragung, fehlerhafte Bits ausgewertet werden. Die Zählrate wurde zum Schutz des Feldemitters nicht weiter erhöht, könnte aber ohne Probleme auf 50 000-75 000 El /s erhöht werden. Dadurch lässt sich die Übertragungsrate weiter steigern. Da die meisten Elektronen auf dem Weg durch das Interferometer durch die vielen Aperturen verloren gehen, kann die effektive Zählrate durch erweiterte Elektronenoptik weiter gesteigert werden. Die maximale erfolgreiche Übertragungsgeschwindigkeit in diesem Experiment betrug 2 Hz. Durch die oben genannten Techniken lässt sich die Übertragungsrate leicht um zwei bis drei Größenordnungen erhöhen. Der limitierende Faktor ist dann die maximale Zählrate am Detektor, welche mit 100 kHz angegeben wird. Bei 1000 El /s pro Zeit-Bin kann damit eine Übertragungsrate von ca. 100 Bit/s erreicht werden.

## 6.2.4 Langzeitstabilität

Im Folgenden soll überprüft werden, wie langzeitstabil die Übertragung stattfinden kann. Dabei steht im Augenmerk, ob die Übertragung an gewissen Punkten instabil wird, oder, ob die Übertragung nicht mehr zeitkonstant stattfindet, die Bits also mit der Zeit auseinanderlaufen. Dazu wurde das Testsignal "UUUU" jeweils blockweise übertragen mit einer Übertragungsgeschwindigkeit von 0,2 Bit/s. Die einzelnen Blöcke sind durch ein Leerzeichen getrennt, was in Binär als "0100000" dargestellt wird. In Abbildung 6.11 ist zu sehen, dass auch über einen Zeitraum von beinahe



**Abbildung 6.11:** Überprüfung der Langzeitstabilität der Übertragung. Es wurden Blöcke mit "UUUU" übertragen, um zu überprüfen, ob die Bins auseinanderlaufen oder, ob es Instabilitäten in der Übertragung gibt. Man sieht, dass auch 4 Blöcke mit "UUUU" über einen Zeitraum von über 12 min übertragen werden können, ohne dass eine Instabilität erkennbar ist.

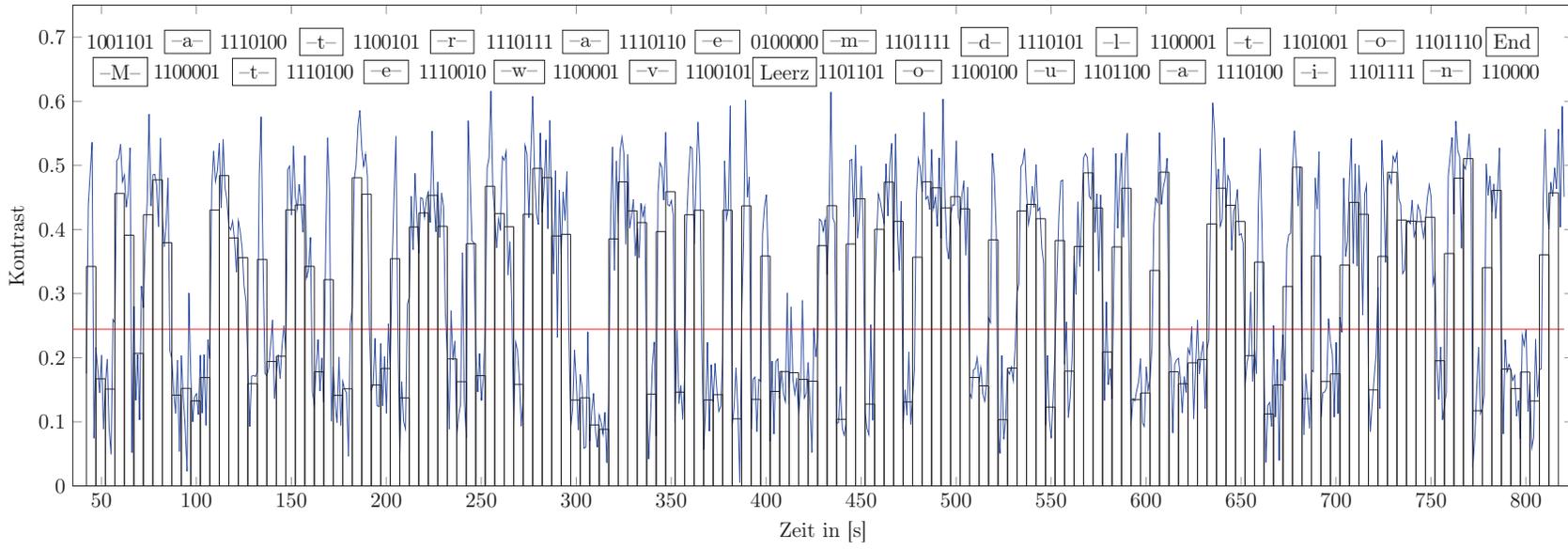
13 Minuten die Bits stabil übertragen werden. Es ist keine Instabilität beobachtbar und die Bitfolge ist klar erkennbar. Dies bescheinigt der Anstauerelektronik des Wienfilters, aber auch der gesamten Steuerung des Elektroneninterferometers eine große Langzeitstabilität. Mit der vorhandenen Elektronik und Ansteuerung sind stabile Übertragungen bis zu mehreren Stunden prinzipiell möglich.

### 6.2.5 Datenübertragung

Auf Basis der Erfahrungen und Messungen aus den Abschnitten 6.2.3 und 6.2.4 wird nun eine Nachricht eingegeben, vom Programm als Binärcode umgewandelt und an die Steuerung des Wienfilters übertragen. Die Strahlaufspaltung im Wienfilter wird auf  $2,9(4) \mu\text{m}$  gesetzt (siehe Abbildung 6.5). Die Elektronen wurden mit einer Spannung von  $U_b = 1000 \text{ V}$  beschleunigt, was einer Wellenlänge  $\lambda_{dB} = 38,8 \text{ pm}$  entspricht. Die Energiebreite der Elektronenemission wurde bestimmt als  $\Delta E = 377(40) \text{ meV}$ , was eine Kohärenzlänge  $l_c = 66(7) \text{ nm}$  bedeutet. Wie in Abbildung 6.5 dargestellt, entspricht die Wien-Spannung für den minimalen Kontrast ("0")  $U_{WK_{min}} = -45 \text{ V}$  und für den maximalen Kontrast ("1")  $U_{WK_{max}} = -15 \text{ V}$ . Der Kontrast des Elek-

---

tronenstrahls wird dann durch den Wienfilter moduliert. Die Modulation entspricht dabei einer Verschiebung der Wellenpakete von  $\Delta y = 58 \text{ nm}$ . Als Nachricht wird das Wort "Matterwave modulation" mit einer Übertragungsgeschwindigkeit von  $0,2 \text{ Bit/s}$  gewählt. Die Datei wird nach dem in Abschnitt 6.2.2 beschriebenen Schema ausgewertet. Die übertragene Nachricht ist in Abbildung 6.12 zu sehen. Die Modulation ist klar zu erkennen und alle Bits wurden fehlerfrei übertragen, selbst über die lange Zeit von fast 15 Minuten. Dabei beträgt die Übertragungstrecke von Wienfilter zu Detektor etwa  $14 \text{ cm}$ . Die sichere Wegstrecke von Wienfilter bis zum Überlagerungspunkt beträgt in etwa  $3,8 \text{ cm}$ . Die Begrifflichkeit der "sicheren Wegstrecke" wird in Abschnitt 6.3 näher beleuchtet.



**Abbildung 6.12:** Übertragung der Nachricht "Matterwave modulation" mit einer Übertragungsgeschwindigkeit von 0,2 Bit/s. Man kann erkennen, dass jedes Bit sauber übertragen wurde, selbst über den langen Zeitraum von fast 15 Minuten. Über jedem Bit steht der binäre Wert, immer sieben Werte werden dann zu einem Zeichen zusammengefasst. Die Übertragungsstrecke Wienfilter-Detektor beträgt in etwa 14 cm. Die sichere Übertragungsstrecke, also Wienfilter bis zum Überlagerungspunkt, beträgt in etwa 3,8 cm.

---

## 6.3 Sicherheitsaspekte

Im Folgenden soll auf die Sicherheitsaspekte der in Abschnitt 6.2 beschriebene Methode der Datenübertragung eingegangen werden. Es wird gezeigt, dass die vorgestellte Technik ein hohes Maß an Sicherheit auf Quantenebene bietet. Als sicher wird in diesem Zusammenhang die Wegstrecke bezeichnet zwischen dem Sender (Wienfilter) und dem Überlagerungspunkt der beiden Partialwellen vor der Quadrupolvergrößerung. Wie bereits in Abschnitt 6 beschrieben, sind dies in diesem Experiment in etwa 3,8 cm. Alle Betrachtungen und Beschreibungen beziehen sich nur auf die Wegstrecke, bei der die beiden Partialwellen noch nicht überlagert sind. Zuerst wird die passive Sicherheit besprochen und anschließend wird über Sicherheitsaspekte bei aktiven Angriffen diskutiert und im Zuge dessen ein Übertragungsschema vorgestellt, welches dem Verfahren ein hohes Maß an Sicherheit gibt. Der Sender wird in diesem Zusammenhang als (A)<sup>1</sup> bezeichnet, der Empfänger als (B)<sup>2</sup>. Anschließend wird der Sicherheitsbegriff kritisch beleuchtet und mit der Quantensicherheit bei der Datenübertragung mit Photonen verglichen.

### 6.3.1 Sicherheit gegen passive Angriffe

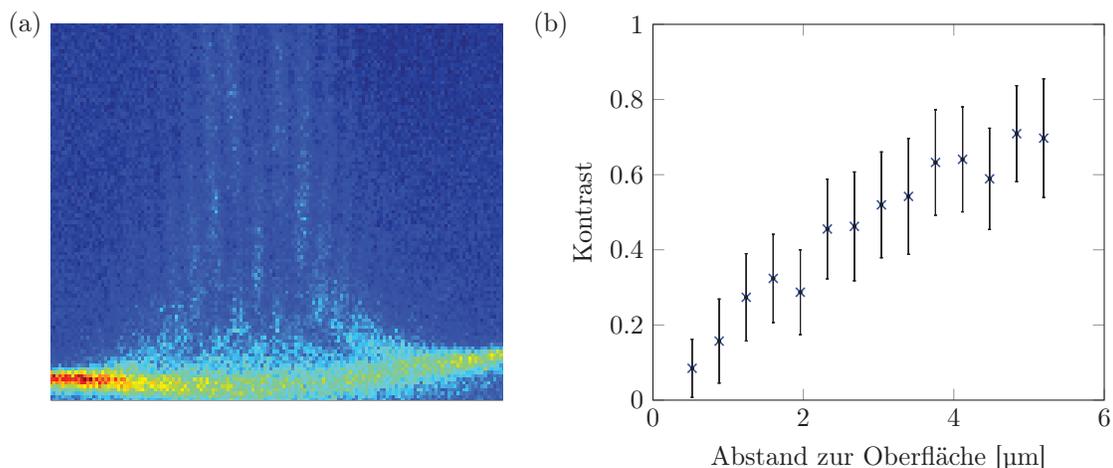
Zuerst soll geklärt werden, was ein passiver Angriff ist. Als passiv wird bezeichnet, wenn der Angreifer (E)<sup>3</sup> versucht die Information unbemerkt zu extrahieren, ohne aktiv das Signal zu beeinflussen. Eine Möglichkeit die Nachricht indirekt durch einen Detektor auszulesen, ohne den Strahl zu blocken, wäre zum Beispiel kapazitiv. Dieser Vorgang wurde experimentell realisiert, indem eine Siliziumplatte parallel an den Strahl herangefahren wird, wie es in Abbildung 2.6 dargestellt ist. Durch die Platte wird eine Welche-Weg-Information vom Quanten-Superpositionszustand des Elektrons an die Umgebung weitergegeben. Dies entspricht einem Messvorgang, der einen Kollaps der Wellenfunktion zu Folge hat und damit eine Reduzierung oder Zerstörung des Interferenzkontrasts, wie in Abbildung 6.13 zu sehen. Dieser Zusammenhang ist in Abschnitt 2.4 dargestellt und die ausführlichen Messungen dazu wurden in [34] veröffentlicht. Das elektrostatische Biprisma ist das Äquivalent zu einem optischen Doppelspalt. Der Interferenzkontrast geht verloren, sobald gemessen wird, welchen Weg das Teilchen nimmt [101]. Nähert sich also der Abhörer durch ein klassisches Gerät dem Elektronenstrahl, wie durch die Siliziumplatte in

---

<sup>1</sup>Vom Englischen Alice

<sup>2</sup>Vom Englischen Bob

<sup>3</sup>vom Englischen Eavesdropper



**Abbildung 6.13:** Ein passiver Angriff wird nachgestellt, indem eine Platte von unten an den Strahl herangebracht wird. (a) Die Interferenzstreifen nahe der Platte verschwinden. (b) Kontrastverlauf in Abhängigkeit der Höhe zur Platte. Ist der Abstand der Elektronen kleiner als  $6\ \mu\text{m}$ , dann beobachtet man eine deutliche Abnahme des Kontrasts.

Abbildung 6.13 simuliert wurde, geht der Kontrast verloren und der Empfänger erkennt, dass ein Abhörer die Nachricht abgefangen hat. Selbst wenn der Angreifer sich unbemerkt dem Elektronenstrahl nähern könnte, wäre er nicht in der Lage eine Information auszulesen. Wie in Abbildung 2.12 und 6.5 zu sehen, ist die Phasenlage und die Position des Interferenzmusters stabil. Auch der Streifenabstand ist konstant. Betrachtet man also die beiden Teilstrahlen, kann man keine Verschiebung des einen Teilstrahls zum anderen erkennen. Durch die unterschiedliche Gruppengeschwindigkeit könnte man die längere Laufzeit ermitteln. Der Emissionsprozess im Elektronenstrahl-Emitter ist jedoch zufällig, in [72] wurde gezeigt, dass die Elektronenemission poissonverteilt stattfindet. Aus diesem Grund ist der Anfangszeitpunkt unbekannt und man hat keine Information über die Laufzeit der Teilchen. Da der Kontrast moduliert wird, ändert sich auch die Zählrate am Detektor nicht. Die Teilchen werden im Interferenzmuster nur umsortiert. Deshalb lässt sich auch aus der Zählrate keine Rückschlüsse auf die Wienfilter-Einstellung schließen. Durch die Dekohärenz hat diese Methode ein hohes Maß an Quantensicherheit gegenüber passiven Angriffen. Da der Wienfilter keine klassische Wirkung auf die Teilchen ausübt, lässt sich die Nachricht auch nicht durch klassische Methoden abfangen.

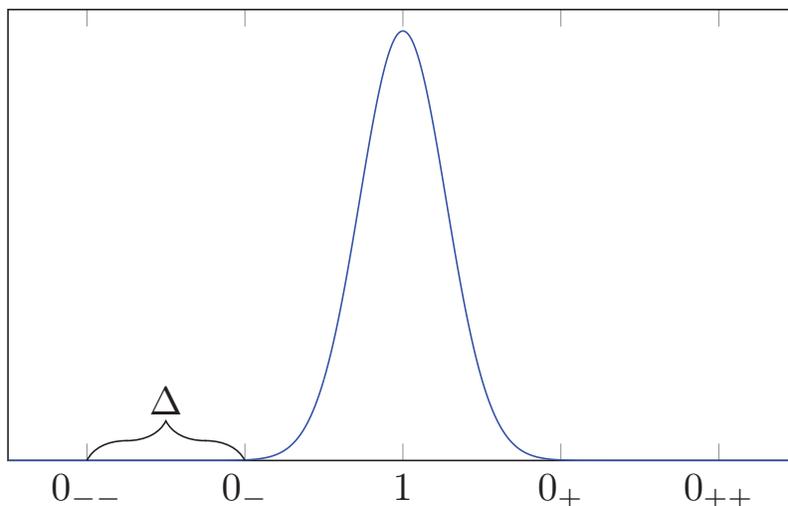
---

### 6.3.2 Sicherheit gegen aktive Angriffe

Bei einem aktiven Angriff versucht (E) durch Eingriff in den Strahl die Nachricht zu extrahieren. In diesem Abschnitt sollen verschiedene Angriffsmethoden diskutiert werden und die Sicherheit der Übertragung dargelegt werden. Während die Sicherheit der Methode bei einem passiven Angriff experimentell gezeigt wurde, sollen hier nun theoretische Überlegungen zeigen, wie die vorgestellte Methode auch bei einem aktiven Angriff ein hohes Maß an Sicherheit auf Quantenebene bietet. Im Folgenden werden nun verschiedene Angriffsszenarien diskutiert:

Ein möglicher Angriff kann sein, dass (E) einen Teil des Signals abzweigt, welches er im ersten Schritt auf einem Detektor misst. Wie bereits im vorherigen Abschnitt beschrieben, kann der Angreifer alleine durch das abgefangene Signal keine Information extrahieren, da der Wienfilter keine klassische Wirkung auf die Teilchen ausübt. Im zweiten Schritt kann (E) den Strahl nicht direkt auf einen Detektor lenken, sondern auf ein eigenes Interferometer und die Teilstrahlen zur Überlagerung bringen, um den Kontrast des Interferenzbildes zu bestimmen. Wie bereits in Abschnitt 6.2.3 gezeigt, benötigt man jedoch eine gewisse Anzahl an Teilchen, damit der Kontrast evaluiert werden kann. Um diese Sicherheitslücke zu schließen, muss gewährleistet sein, dass (A) die Nachricht so sendet, dass pro Zeit-Bin gerade genügend Teilchen vorhanden sind, damit der Kontrast bestimmt werden kann. Wird von (E) Signal abgezweigt, hat weder (B) noch (E) genügend Signal, um die Nachricht auszulesen. Es ist wichtig an diesem Punkt anzumerken, dass (E) das Signal nicht kohärent verstärken kann, ohne es zu messen. In diesem Fall geht die Information durch den Messprozess verloren. Eine andere Angriffsmethode kann dann sein, dass (E) den gesamten Elektronenstrahl auf sein eigenes Interferometer umleitet, indem er die Teilstrahlen zur Überlagerung bringt. So kann (E) die Nachricht lesen und mit einem weiteren Interferometer denselben Überlagerungszustand herstellen, um die Nachricht dann zu (B) weiterzusenden. Solch eine "Man in the middle"-Attacke wäre für (B) nicht erkennbar und (E) kann die Nachricht extrahieren. Diese Sicherheitslücke kann dadurch geschlossen werden, dass der Aufbau erweitert wird. Hinter den Sender-Wienfilter wird ein weiterer Wienfilter, der Verschlüsselungs-Wienfilter, gesetzt. Der Empfänger benötigt dann einen Entschlüsselungs-Wienfilter. Die beiden Wienfilter auf der Sende-Seite können jedoch zu einem Wienfilter zusammengefasst werden. Es wurde ein Übertragungsschema entwickelt, das Ähnlichkeiten zum BB84-Protokoll aus der Quanteninformationsübertragung mit Photonen aufweist [12]. Hierbei wird ausgenutzt, dass die Wienkurve, wie sie in Abbildung 6.5 dargestellt ist, symmetrisch ist. Es gibt also zwei Möglichkeiten eine "0" zu senden:

Links des Maximums, im Folgenden "0<sub>-</sub>" bezeichnet, und rechts vom Maximum, im folgenden "0<sub>+</sub>" bezeichnet. Das Sicherheitsschema fügt daher einen weiteren Schritt



**Abbildung 6.14:** Schematische Darstellung einer Wienkurve. Das Kontrastmaximum stellt die Sendung einer "1" dar. Minimaler Kontrast ist eine "0". Es ist zu sehen, dass es mehrere Möglichkeiten gibt, eine "0" zu senden. Der Abstand der möglichen Zustände wird mit  $\Delta$  bezeichnet.

in das Übertragungsschema ein. Durch die Symmetrie der Wienkurve kann im Sendevorgang eine "0<sub>-</sub>", "1" oder "0<sub>+</sub>" eingestellt werden. Zusätzlich wird dann durch ein Zufallsverfahren der eingestellte Zustand durch den Verschlüsselungs-Wienfilter um einen Zustands-Abstand  $\Delta$  verschoben, wie in Abbildung 6.14 dargestellt. Es ergeben sich dann die drei Möglichkeiten, dass ein Zustand nach links, nach rechts oder gar nicht verschoben wird. Die möglichen Verschiebungen sind dann " $-\Delta$ ", "0" oder " $+\Delta$ ". Damit ergeben sich die Sendevarianten wie sie in Tabelle 6.1 dargestellt sind. Aus den drei Ausgangszuständen lassen sich mit den drei Verschiebemöglichkeiten die neun möglichen Sendeeinstellungen kreieren. Wichtig dabei ist, dass sowohl (B), als auch (E) nicht unterscheiden können, ob (A) eine 0<sub>-</sub> oder eine 0<sub>+</sub> sendet. In der Bit-Folge wird jeweils eine 0 gemessen. Der Prozess des Demodulierens ist dann gerade das Inverse des Sendens. D.h. wenn (A) das Wellenpaket mit  $-\Delta$  verschoben hat, muss der Empfänger (B) es mit  $+\Delta$  zurückverschieben, um auf das richtige Ergebnis zu kommen. Wie macht diese Methode nun die Übertragung sicher gegenüber einem aktiven Angriff? Bei der beschriebenen Methode wird die Ähnlichkeit zum BB84-Protokoll deutlich. Der Angreifer (E) demoduliert das Signal mit seinem Entschlüsselungs-Wienfilter. Er hat dabei grundsätzlich zwei Möglichkeiten: Er

	$0_-$	1	$0_+$
$-\Delta$	$0_{--}$	$0_-$	1
0	$0_-$	1	$0_+$
$+\Delta$	1	$0_+$	$0_{++}$

**Tabelle 6.1:** Sendeschema mit allen Sendevarianten. Die drei Ausgangszustände  $0_-$ , 1 und  $0_+$  können mit den drei Varianten  $-\Delta$ , 0 und  $+\Delta$  verschoben werden. Daraus ergeben sich alle Sendevarianten.

	$0_-$		1		$0_+$	
$-\Delta$	$0_{--} \rightarrow$	$\begin{array}{c} -\Delta \quad 0_{---} \\ \hline 0 \quad 0_{--} \\ +\Delta \quad 0_- \end{array}$	$0_- \rightarrow$	$\begin{array}{c} -\Delta \quad 0_{--} \\ \hline 0 \quad 0_- \\ +\Delta \quad 1 \end{array}$	$1 \rightarrow$	$\begin{array}{c} -\Delta \quad 0_- \\ \hline 0 \quad 1 \\ +\Delta \quad 0_+ \end{array}$
0	$0_- \rightarrow$	$\begin{array}{c} -\Delta \quad 0_{--} \\ \hline 0 \quad 0_- \\ +\Delta \quad 1 \end{array}$	$1 \rightarrow$	$\begin{array}{c} -\Delta \quad 0_- \\ \hline 0 \quad 1 \\ +\Delta \quad 0_+ \end{array}$	$0_+ \rightarrow$	$\begin{array}{c} -\Delta \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0_+ \\ +\Delta \quad 0_{++} \end{array}$
$+\Delta$	$1 \rightarrow$	$\begin{array}{c} -\Delta \quad 0_- \\ \hline 0 \quad 1 \\ +\Delta \quad 0_+ \end{array}$	$0_+ \rightarrow$	$\begin{array}{c} -\Delta \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0_+ \\ +\Delta \quad 0_{++} \end{array}$	$0_{++} \rightarrow$	$\begin{array}{c} -\Delta \quad 0_+ \\ \hline 0 \quad 0_{++} \\ +\Delta \quad 0_{+++} \end{array}$

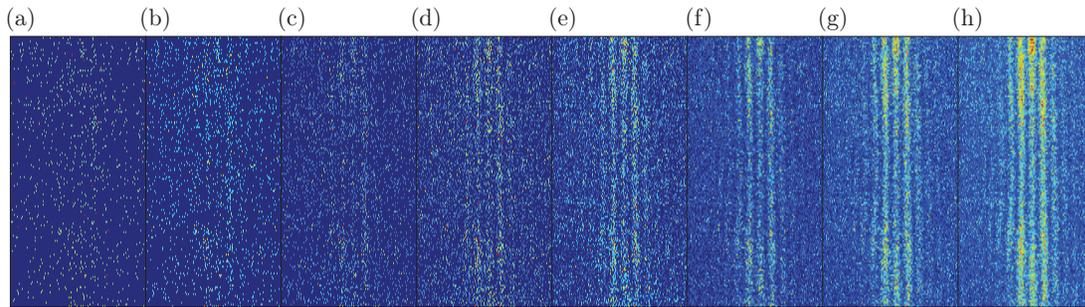
**Tabelle 6.2:** Schema für das Weitersenden des Angreifers. Die drei Zustände haben drei mögliche Verschiebungen. Der Angreifer hat dann ebenfalls drei Möglichkeiten das Signal weiterzusenden. Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit sendet (E) ein falsches Bit weiter.

schaltet ebenfalls zufällig die Verschiebungen zwischen den drei Einstellungen hin- und her, oder er wählt eine fixe Verschiebung. Für den Sicherheitsaspekt spielt es keine Rolle, wie sich (E) entscheidet, jedoch ist die Erklärung anschaulicher, wenn man Möglichkeit zwei betrachtet. Für dieses Beispiel wählt (E) die Verschiebung "0". Misst (E) nun eine "1", sieht man Anhand Tabelle 6.1, dass (A) entweder eine "0<sub>-</sub>" mit "Δ<sub>+</sub>", eine "1" mit "0" oder eine "0<sub>+</sub>" mit "Δ<sub>-</sub>" gesendet hat. Der Angreifer muss sich dann entscheiden, welchen Zustand mit welcher Verschiebung er zu (B) weiterschickt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 sendet (E) falsch weiter. Es besteht jedoch die Wahrscheinlichkeit, dass, obwohl (E) falsch weitersendet, (B) letztendlich trotzdem das richtige Bit empfängt, da z.B. eine "0<sub>-</sub>" oder eine "0<sub>+</sub>" trotzdem ein "0"-Bit ist. Alle Möglichkeiten, die (E) messen kann, sind in Tabelle

6.2 dargestellt. Dabei ist in jedem Feld der von (A) bereits verschobene Zustand dargestellt, mit allen drei Möglichkeiten, die (E) messen kann. Im Folgenden werden von der  $3 \times 3$ -Matrix die Einträge als (Zeile, Spalte) angegeben. So ergeben sich für (E) folgende Möglichkeiten:

- (E) setzt Verschiebung auf  $-\Delta$  und misst eine "0": (11)(12)(13)(21)(22)(31)(33).
- (E) setzt Verschiebung auf  $-\Delta$  und misst eine "1": (23)(32).
- (E) setzt Verschiebung auf 0 und misst eine "0": (11)(12)(21)(23)(32)(33).
- (E) setzt Verschiebung auf 0 und misst eine "1": (13)(22)(31).
- (E) setzt Verschiebung auf  $+\Delta$  und misst eine "0": (11)(13)(22)(23)(31)(32)(33).
- (E) setzt Verschiebung auf  $+\Delta$  und misst eine "1": (12)(21).

Der Angreifer hat also im besten Fall eine 50:50-Chance, den richtigen Zustand, mit der richtigen Verschiebung zu messen, und dementsprechend auch weiterzusenden. Es gibt jedoch Fälle, in denen (B) das richtige Bit misst, selbst wenn (E) sowohl den Ausgangszustand, als auch die Verschiebung falsch wählt. Wichtig dabei ist eben, dass (B) auch das falsche Ergebnis messen kann, wenn (E) den Ausgangszustand und die dazugehörige Verschiebung falsch wählt. Durch einen öffentlichen Kanal tauschen dann anschließend der Sender (A) und Empfänger (B) die Einstellungen des Ver- und Entschlüsselungs-Wienfilters aus, ohne jedoch die gesendeten oder Empfangenen Bits mitzuteilen. Nur die Werte, in denen (A) und (B) keine oder gegensätzliche Verschiebung hatten, werden als Schlüssel für eine zukünftige sichere Datenübertragung verwendet. Um (E) zu entlarven tauschen (A) und (B) bei den restlichen Bits oder einem zusätzlichen Teilset noch öffentlich aus, welches Bit sie gesendet bzw. empfangen haben. Durch Vergleich dieser Ergebnisse lässt sich dann herausfinden, ob eine "Man in the Middle"-Attacke stattgefunden hat oder nicht. Es lässt sich nun noch der Fall diskutieren, in dem die Nachricht mit einer sehr großen Signalstärke gesendet wird. Ein Angreifer könnte dann einen Teil des Signals abzweigen und auf drei unterschiedliche Interferometer verteilen, wobei jedes der Interferometer eine andere Einstellung des Entschlüsselungs-Wienfilters verwendet ( $-\Delta, 0, +\Delta$ ). Ist das abgegriffene Signal klein genug, kann (B) keinen Angriff erkennen und (E) hat alle möglichen Einstellungen des Verschlüsselungs-Wienfilter analysiert. Teilt der Sender (A) dann auf einem öffentlichen Kanal mit, was seine Einstellung des Verschlüsselungs-Wienfilter war, hat (E) die vollständige Nachricht



**Abbildung 6.15:** Das Interferenzbild baut sich langsam auf. Ein einzelnes Elektron trägt keine Information des Interferenzbildes. (a) 1000 Elektronen, (b) 2000 Elektronen, (c) 4000 Elektronen, (d) 8000 Elektronen, (e) 16000 Elektronen, (f) 32000 Elektronen, (g) 64000 Elektronen, (h) 128000 Elektronen.

und (B) hat einen Angriff nicht bemerkt. Wie in Abbildung 6.15(a) und (b) zu erkennen, ist es bei zu wenigen Teilchen nicht möglich, die notwendigen Parameter wie Kontrast zu bestimmen und (E) müsste dann mindestens dreimal das Minimal-signal zur Feststellung des Kontrasts abzweigen. Eine sichere Datenübertragung ist also so zu wählen, dass die Elektronen-Ereignisse pro Bit gerade so groß sind, dass der Kontrast noch fehlerfrei bestimmbar ist. Wird dann durch (E) einen Teil der Elektronen abgefangen, ist es weder für (B) noch für (E) möglich den Kontrast zu bestimmen. Dies setzt voraus, dass die Elektronenquelle kalibriert und vor Angriffen geschützt ist. Nur dann wird eine gute Übertragungssicherheit gewährleistet.

### 6.3.3 Kritische Betrachtung des Sicherheitsbegriffs

Die hier vorgestellte Methode bietet ein hohes Maß an Sicherheit. In Abschnitt 6.3.1 wurde auf die Sicherheit gegen passive Angriffe eingegangen. Das vorgestellte Übertragungsschema aus Abschnitt 6.3.2 bietet eine gute Sicherheit gegen aktive Attacken. Es besteht jedoch ein großer Unterschied zwischen der hier vorgestellten Methode und der weit etablierten sicheren Quanteninformationsübertragung mit Photonen [11] [12]. Während die Quantensicherheit bei Photonen auf die Unsicherheit beim Messen eines Quantenzustands und der Unmöglichkeit einen solchen Quantenzustand klonen zu können [102] basiert, beruht die Quantensicherheit der hier vorgestellten Methode auf dem Welle-Teilchen-Dualismus, der Dekohärenz und der Symmetrie des Wellenpakets. Ein großer Vorteil der Quanteninformationsübertragung mit Photonen ist, dass es ein Ein-Teilchen-Effekt ist. Der Polarisationszustand des Photons gibt bereits ein Bit an. Jedes Photon ist also ein Bit. Ein Photon kann nicht geklont werden. Es kann kein Photon dupliziert werden, ohne den Polarisationszustand zu messen. Misst also der Angreifer das Photon, ist der Polarisationszustand festgelegt. Dies gilt grundsätzlich für Elektronen auch. Man kann ein Elektron nicht kohärent vervielfachen. Fängt also ein Angreifer ein Elektron ab, lässt es sich nicht vervielfältigen, ohne es zu messen. Aus einem abgefangenen Elektron lässt sich nicht ein kohärentes Ensemble reproduzieren, welches dasselbe Interferenzmuster hat. Die Information, ob eine "0" oder "1" gesendet wurde, liegt also im Elektronen-Ensemble, nicht im Elektron selbst. Ein einzelnes Elektron trägt keine auslesbare Information. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Elektrons beschreibt zwar das Interferenzmuster, nach dem Messen gibt das Elektron jedoch nur einen Punkt des Interferenzmusters wieder. Der Kontrast ist nur extrahierbar, wenn eine gewisse Anzahl von Elektronen akkumuliert wurde. Trotzdem ist der Nachteil der Materiewellenmodulation, dass die Interferenz zwar grundsätzlich ein Einzel-Teilchen-Effekt ist, aber es viele Teilchen braucht, um den Effekt der Modulation sichtbar zu machen. Der Begriff der Quantensicherheit bezieht sich seither auf die Technik der Einzel-Photonen-Übertragung. Deshalb ist der Sicherheitsbegriff der hier vorgestellten Methode mit dem Begriff der Quantensicherheit nur bedingt vereinbar. Es wurde jedoch gezeigt, dass die Datenübertragung durch Materiewellenmodulation ein hohes Maß an Sicherheit, auch auf dem Quantenlevel aufweist. Der Ensemble-Nachteil muss dadurch kompensiert werden, dass die Elektronenquelle kalibriert sein muss und die Nachricht mit einem Minimum an Signal gesendet wird. Damit werden aktive Angriffe zusammen mit dem entwickelten Übertragungsschema unterbunden. In der technischen Realisierung bei der Übertragung von Photonen

---

besteht ebenfalls die Schwierigkeit, einzelne Photonen auf Knopfdruck zu erzeugen, oftmals wird die Intensität bei einem Puls-Laser sehr weit herabgesetzt, sodass im Mittel nur sehr wenige Photonen in einem Laserpuls vorhanden sind. Bei vielen Photonen in einem Puls, könnte auch ein Teil davon abgezweigt werden und der Polarisationszustand gemessen werden, ohne dass der Empfänger es bemerkt. In der Quantenkryptografie mit Photonen stecken bereits Jahrzehnte an Forschung, womit sie sich zu einer etablierten Methode entwickelt hat. Die hier vorgestellte Technik steht noch ganz am Anfang dieser Entwicklung, so wurde eine theoretische Betrachtung der Quanten-Übertragungsmethode mit Elektronen im Zuge dieser Arbeit nur angerissen. Eine vollständige, theoretische Evaluierung der Grenzen der Kontrastmodulation mittels Wienfilter steht jedoch noch aus.

# Kapitel 7

## Diskussion und Ausblick

Quanteninformationstechnologien verbreiten sich in unserer Gesellschaft immer stärker. Glasfasernetzwerke umspannen mittlerweile den ganzen Globus und quantenkryptografische Methoden werden bereits kommerziell vermarktet und eingesetzt. Durch Shor [7] wurde gezeigt, dass zukünftige, leistungsstarke Quantencomputer eine klassische, auf mathematischen Algorithmen bezogene Verschlüsselung, potentiell entschlüsseln können. Die Welt rüstet sich für das Zeitalter der Quantencomputer. Alle quantenkryptografischen Methoden basieren entweder auf der Übertragung von einzelnen [12] oder verschränkten Photonen [11]. Die Quantenkommunikation wurde in den letzten Jahrzehnten stetig weiterentwickelt und die Technik optimiert, sodass mittlerweile eine quantensichere Kommunikation zwischen Kontinenten über Satelliten stattfinden kann [103]. Die Übertragungsidee und die Übertragungsprotokolle sind jedoch schon lange bekannt [12] [10]. In dieser Arbeit werden zwei Experimente vorgestellt, welche das Ziel haben, das Portfolio der Quanteninformation auf Elektronen-Materiewellen zu erweitern. Dazu wurde ein Experiment durchgeführt, bei dem Daten durch die Modulation einer Materiewelle mittels Wienfilter übertragen wurde. Außerdem wurde ein Experiment aufgebaut und vorbereitet, um die supraleitenden Eigenschaften einer Niobspitze und die Emission von potenziell verschränkten Elektronen eines supraleitenden Feldemitters zu untersuchen. Mit dieser Arbeit wurde die Grundlage für eine neue Art der Quanteninformationstechnologie gelegt. Die neuartige Datenübertragungsmethode durch die quantenphysikalische Modulation einer Materiewelle stellt einen komplett neuen Ansatz im Bereich der Quanteninformationsübertragung dar. Es konnte gezeigt werden, dass die Art der Datenübertragung ein hohes Maß an passiver Sicherheit auf Quantenebene bietet. Durch Dekohärenz und damit Verbunden dem Kontrastverlust kann ein passiver Angriff erkannt und verhindert werden. Durch das entwickelte Übertragungsprotokoll

---

besitzt die Methode auch ein hohes Sicherheitslevel bei aktiven Angriffen. Basierend auf der Symmetrie der Wienkurve kann ein Übertragungsprotokoll, angelehnt an das BB84-Protokoll, benutzt werden, um aktive Angriffe sichtbar zu machen. Mit diesem Experiment werden Materiewellen zum ersten Mal als Informationsträger zur Datenübertragung verwendet.

Auch eine Elektronenquelle, die verschränkte Elektronen erzeugen kann, eröffnet ein neues Feld in der Elektronenoptik. Experimente, die bisher Photonen vorbehalten waren, wie z.B. Quantenteleportation, Quanteninformationsübertragung und Quanten-Computing können dann mit verschränkten Elektronen durchgeführt werden. Die Möglichkeit Feldemitterkathoden aus dem supraleitenden Material Niob herstellen zu können, stellt hierbei der Grundstein für weiterführende Experimente dar. Es konnte gezeigt werden, dass Niobnanospitzen bei Raumtemperatur kohärent Elektronen emittieren können. Um die Eigenschaften einer supraleitenden Emission zu bestimmen, wurde ein Setup entworfen und aufgebaut. Ein Augenmerk wurde darauf gelegt, die Energiebreite einer supraleitenden Spitze zu messen und die potenziell verschränkten Elektronen durch Korrelationen der Elektronenereignisse evaluieren zu können. Doch nicht nur für die Quanteninformationstechnologie ist eine solche supraleitende Quelle interessant. Eine annähernd monoenergetische Strahlquelle ist für die Auflösung in der Elektronenmikroskopie von großer Bedeutung. Auch in der Material- und Oberflächenanalyse könnte durch verschränkte Elektronen die Genauigkeit drastisch erhöht werden. Zum einen könnte durch Spin-abhängige Korrelationsmessungen in einem Quanten-SPLEEM<sup>1</sup> festgestellt werden, wie durch die Wechselwirkung der Elektronenpaare mit der Oberfläche der Verschränktheitsgrad abnimmt. Zum anderen könnte man, da die verschränkten Elektronen eine sehr definierte Energie zueinander haben, ein Elektron als "Test"-Strahl nehmen, das andere als "Referenz". Durch den gemessenen Energieunterschied könnte man zum Beispiel mit extrem hoher Auflösung Rückschlüsse auf das Material schließen, vergleichbar mit einer Elektronenenergieverlustspektroskopie. Die beiden hier in dieser Arbeit vorgestellten Experimente bilden daher eine wichtige Grundlage für zukünftige Quanteninformationsexperimenten mit Elektronen.

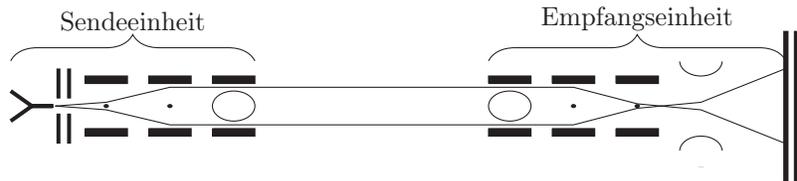
## Ausblick

Um die supraleitenden Eigenschaften eines Feldemitters aus Niob messen zu können, sind Verbesserungen an dem Aufbau vorzunehmen. Im ersten Schritt muss durch

---

<sup>1</sup>SPLEEM steht für "Spin Polarized Low Energy Electron Microscopy"

leistungsfähigere Pumpen das Vakuum verbessert werden. Es muss eine Möglichkeit gefunden werden, die Kammer auf höherer Temperatur ausheizen zu können. Im nächsten Schritt muss der Elektronenstrahl divergenter auf den Delay-Line-Detektor treffen, um zeitgleiche Ereignisse messen zu können. Damit kann gewährleistet werden, dass mögliche gleichzeitig auftreffende Elektronen tatsächlich gemessen werden können. Durch Korrelationen der Auftreffpunkte und Orte lässt sich dann ein Rückschluss auf den Grad der Verschränktheit der Elektronen ziehen. Dies kann dadurch geschehen, dass die Spitze in das Kühlschild versetzt wird. Durch die veränderte Feldverteilung kann ein divergenter Strahl erreicht werden. Alternativ muss der Strahl durch eine Elektronenoptik divergent gemacht werden. Alternativ kann die Wegstrecke Spitze - Detektor verlängert werden, indem der Detektor nach hinten versetzt wird. Aufgrund der Kühlung der Spitze wird ebenfalls dringend empfohlen, die Kathode in das Kühlschild zu setzen. Um die Energiebreite der supraleitenden Emission zu messen, muss ein effektives Schema gefunden werden, den Elektronenstrahl in das Elektronenspektrometer zu justieren. Hierfür ist entweder eine erweiterte Elektronenoptik vor dem Spektrometer einzubauen oder durch die mechanischen Justage-Einrichtungen ein effektives Justageschema gefunden werden.



**Abbildung 7.1:** Entwurf einer Sende- und Empfangseinheit. Der Strahl wird mit einem Biprisma aufgespalten und mit einem fokussierenden Element kollimiert. Dies kann mit einem Biprisma oder einer Einzellinse geschehen. Mit dem Wienfilter wird dann das Signal moduliert. Die Empfangseinheit demoduliert das Signal mit dem Wienfilter und überlagert dann die Partialwellen. Dazu wird der Strahl zuerst zusammengeleitet, was durch einen Biprismafaden oder eine Einzellinse geschehen kann. Ein weiterer Faden stellt den Überlagerungswinkel ein.

Das Experiment zur Datenübertragung durch Materiewellenmodulation mit einem Wienfilter stellte in dieser Arbeit ein sogenanntes Proof-of-Concept-Experiment dar. Verglichen zu kommerziell verfügbaren Quantendatenübertragungsmechanismen mit Photonen, ist die Datenübertragung durch Materiewellenmodulation weder in Geschwindigkeit noch Datenübertragungstrecke auch nur annähernd konkurrenzfähig

---

und vergleichbar. Erstes Ziel sollte deshalb sein, die Übertragungsgeschwindigkeit um mehrere Größenordnungen zu erhöhen. Der begrenzende Faktor sollte dann die maximal mögliche Zählrate des Detektors mit 1 MHz sein. Damit ließen sich Datenübertragungsraten von 200 Bit/s realisieren. Dies kann geschehen durch eine effektive Strahlführung durch das Interferometer. Bisher wurde keinen Wert darauf gelegt, viel Signal durch die Aperturen zu bekommen. Durch geeignete Elektrooptik, wie sie zum Beispiel auch in Rasterelektronenmikroskopen zum Einsatz kommt, könnten viel mehr Elektronen durch das Interferometer geführt werden. Auch neue Strahlquellen, wie zum Beispiel eine supraleitende Quelle, wären denkbar. Ebenso könnte eine verbesserte Auslesemethode die notwendigen Elektronen pro Interferenzbild verringern, was die Übertragungsrate weiter steigern würde. Es wurde bereits in dieser Arbeit gezeigt, dass mit 500 Elektronen im Interferenz ausreichen, den Kontrast zu bestimmen. Durch bessere Kontrastbestimmungsalgorithmen kann die Elektronenzahl eventuell auf 250 gesenkt werden. Im nächsten Schritt soll dann die Übertragungstrecke von bisher 4 cm auf mehrere Meter erweitert werden. Dazu soll eine Sendeeinheit bestehend aus Emitter-Biprisma-Einzellinse(oder Biprisma)-Wienfilter konstruiert werden, wie in Abbildung 7.1 dargestellt. Als Empfangseinheit vor dem Detektor wird gewählt Wienfilter - Einzellinse (oder Biprisma) - Biprisma-Quadrupollinse. Dadurch könnten Wegstrecken von mehreren Metern überbrückt werden. Der Strahl wird durch den ersten Biprismafaden aufgespalten und dann durch ein fokussierendes Element kollimiert. Mittels Wienfilter wird dann auf den aufgespaltenen Strahl das Signal moduliert. Der Empfänger demoduliert mit einem Wienfilter das Signal wieder, und lenkt die Teilstrahlen durch ein fokussierendes Element wieder zusammen. Mit einem Biprismafaden lässt sich dann der Überlagerungswinkel einstellen. Prinzipiell orientiert sich dieses Prinzip an dem bereits bekannten Prinzip der Drei-Element-Aufspaltung, wie sie in Abschnitt 2.2.1 dargestellt ist. Die Leistungsfähigkeit diesbezüglich soll untersucht werden. Im letzten Schritt soll dann die gesamte Elektronenoptik verkleinert werden. Als Grundlage soll die Idee von [104] dienen. Mit einem fokussierten Ionenstrahl (FIB<sup>2</sup>) wird die Elektronenoptik aus einem Draht herausgearbeitet. Ziel soll sein, diese Technik in Tübingen zu etablieren. Die technischen Geräte und das Wissen der Nanostrukturierung sind hierfür vorhanden. Dadurch lassen sich Sende- und Empfangseinheit auf wenige Millimeter zusammenfassen.

Die oben genannten Verbesserungen können dafür sorgen, dass die Methode der quantenphysikalischen Modulation einer Materiewelle im Bereich der Quanten-

---

<sup>2</sup>FIB steht für focused ion beam

kommunikation konkurrenzfähiger wird. Es wird noch viele Jahre Forschungsarbeit benötigen, um eine ähnliche Performance wie photonische Quantenkommunikationssysteme zu erlangen. Mit dieser Arbeit wurde der Grundstein dafür gelegt.

# Literaturverzeichnis

- [1] HERTZ, H.: *Ueber sehr schnelle elektrische Schwingungen*. Annalen der Physik, 267(7):421–448, 1887.
- [2] MAXWELL, JAMES CLERK: *II. A dynamical theory of the electromagnetic field*. Proceedings of the Royal Society of London, 13:531–536, 1864.
- [3] CARSON, J. R.: *Notes on the Theory of Modulation*. Proceedings of the Institute of Radio Engineers, 10(1):57–64, Feb 1922.
- [4] SCHAWLOW, A. L. und C. H. TOWNES: *Infrared and Optical Masers*. Phys. Rev., 112:1940–1949, Dec 1958.
- [5] MAIMAN, T. H.: *Stimulated Optical Radiation in Ruby*. Nature, 187(4736):493–494, 1960.
- [6] BÖRNER, MANFRED: *Mehrstufiges Übertragungssystem für in Pulsmodulation dargestellte Nachrichten*. Technischer Bericht, Patent, 1967.
- [7] SHOR, PETER W.: *Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer*. SIAM Review, 41(2):303–332, 1999.
- [8] ARUTE, FRANK et al.: *Quantum supremacy using a programmable superconducting processor*. Nature, 574(7779):505–510, 2019.
- [9] Gisin, NICOLAS, GRÉGOIRE RIBORDY, WOLFGANG TITTEL und HUGO ZBINDEN: *Quantum cryptography*. Rev. Mod. Phys., 74:145–195, Mar 2002.
- [10] EKERT, ARTUR K.: *Quantum cryptography based on Bell’s theorem*. Phys. Rev. Lett., 67:661–663, Aug 1991.

- [11] JENNEWEIN, THOMAS, CHRISTOPH SIMON, GREGOR WEIHS, HARALD WEINFURTER und ANTON ZEILINGER: *Quantum Cryptography with Entangled Photons*. Phys. Rev. Lett., 84:4729–4732, May 2000.
- [12] BENNETT, CHARLES H. und GILLES BRASSARD: *Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing*. In Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing, New York, 175:8, 1984. Theoretical Aspects of Quantum Cryptography – celebrating 30 years of BB84.
- [13] BROGLIE, LOUIS DE: *XXXV. A tentative theory of light quanta*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 47(278):446–458, 1924.
- [14] DAVISSON, C. und L. H. GERMER: *The Scattering of Electrons by a Single Crystal of Nickel*. Nature, 119(2998):558–560, 1927.
- [15] MÖLLENSTEDT, G. und H. DÜKER: *Beobachtungen und Messungen an Biprisma-Interferenzen mit Elektronenwellen*. Zeitschrift für Physik, 145(3):377–397, 1956.
- [16] JÖNSSON, CLAUDIUS: *Elektroneninterferenzen an mehreren künstlich hergestellten Feinspalten*. Zeitschrift für Physik, 161(4):454–474, 1961.
- [17] RAUCH, H., W. TREIMER und U. BONSE: *Test of a single crystal neutron interferometer*. Physics Letters A, 47(5):369 – 371, 1974.
- [18] GERLICH, STEFAN, LUCIA HACKERMÜLLER, KLAUS HORNBERGER, ALEXANDER STIBOR, HENDRIK ULBRICHT, MICHAEL GRING, FABIENNE GOLDFARB, TIM SAVAS, MARCEL MÜRI, MARCEL MAYOR und MARKUS ARNDT: *A Kapitza-Dirac-Talbot-Lau interferometer for highly polarizable molecules*. Nature Physics, 3(10):711–715, 2007.
- [19] HASSELBACH, FRANZ: *Progress in electron- and ion-interferometry*. Reports on Progress in Physics, 73(1):016101, dec 2009.
- [20] MAIER, UWE: *Ein Biprisma-Interferometer für Ionen*. Doktorarbeit, Universität Tübingen, 1997.
- [21] MÖLLENSTEDT, G. und W. BAYH: *Elektronen-Biprisma-Interferenzen mit weit getrennten kohärenten Teilbündeln*. Naturwissenschaften, 48(10):400–400, 1961.

- 
- [22] MÖLLENSTEDT, G. und W. BAYH: *Messung der kontinuierlichen Phasenschiebung von Elektronenwellen im kraftfeldfreien Raum durch das magnetische vektorpotential einer Luftspule*. Naturwissenschaften, 49(4):81–82, 1962.
- [23] HASSELBACH, FRANZ und MARC NICKLAUS: *Sagnac experiment with electrons: Observation of the rotational phase shift of electron waves in vacuum*. Phys. Rev. A, 48:143–151, Jul 1993.
- [24] SCHÜTZ, G., A. REMBOLD, A. POOCH, H. PROCHEL und A. STIBOR: *Effective beam separation schemes for the measurement of the electric Aharonov–Bohm effect in an ion interferometer*. Ultramicroscopy, 158:65 – 73, 2015.
- [25] SONNENTAG, PETER und FRANZ HASSELBACH: *Measurement of Decoherence of Electron Waves and Visualization of the Quantum-Classical Transition*. Phys. Rev. Lett., 98:200402, May 2007.
- [26] SCHMID, HUBERT: *Ein Elektronen-Interferometer mit 300 $\mu$ m weit getrennten kohärenten Teilbündeln zur Erzeugung hoher Gangunterschiede und Messung der Phasenschiebung durch das magnetische Vektorpotential bei metallisch abgeschirmtem Magnetfluß*. Doktorarbeit, Universität Tübingen, 1985.
- [27] WOHLAND, GERHARD: *Messung der Kohärenzlänge von Elektronen im Elektroneninterferometer mit Wien-Filter*. Doktorarbeit, Universität Tübingen, 1981.
- [28] HEISENBERG, WERNER: *Schwankungserscheinungen und Quantenmechanik*. Zeitschrift für Physik, 40(7):501–506, 1927.
- [29] SCHRÖDINGER, ERWIN: *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik*. Naturwissenschaften, 23(49):823–828, 1935.
- [30] SCHRÖDINGER, E.: *Discussion of Probability Relations between Separated Systems*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 31(4):555–563, 1935.
- [31] ZEH, H DIETER: *On the interpretation of measurement in quantum theory*. Foundations of Physics, 1(1):69–76, 1970.
- [32] ZUREK, W. H.: *Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?* Phys. Rev. D, 24:1516–1525, Sep 1981.

- [33] ANGLIN, J. R. und W. H. ZUREK: *A precision test of decoherence*. arXiv:quant-ph/9611049, 1996.
- [34] KERKER, N, R RÖPKE, L M STEINERT, A POOCH und A STIBOR: *Quantum decoherence by Coulomb interaction*. New Journal of Physics, 22(6):063039, 2020.
- [35] HORNBERGER, KLAUS, STEFAN UTTENTHALER, BJÖRN BREZGER, LUCIA HACKERMÜLLER, MARKUS ARNDT und ANTON ZEILINGER: *Collisional Decoherence Observed in Matter Wave Interferometry*. Phys. Rev. Lett., 90:160401, Apr 2003.
- [36] HACKERMÜLLER, LUCIA, KLAUS HORNBERGER, BJÖRN BREZGER, ANTON ZEILINGER und MARKUS ARNDT: *Decoherence of matter waves by thermal emission of radiation*. Nature, 427(6976):711–714, 2004.
- [37] MACHNIKOWSKI, PAWEŁ: *Theory of which path dephasing in single electron interference due to trace in conductive environment*. Phys. Rev. B, 73:155109, Apr 2006.
- [38] HOWIE, A.: *Mechanisms of decoherence in electron microscopy*. Ultramicroscopy, 111(7):761 – 767, 2011. Special Issue: J. Spence’s 65th birthday.
- [39] SCHEEL, STEFAN und STEFAN Y. BUHMANN: *Path decoherence of charged and neutral particles near surfaces*. Phys. Rev. A, 85:030101, Mar 2012.
- [40] ANGLIN, J. R., J. P. PAZ und W. H. ZUREK: *Deconstructing decoherence*. Phys. Rev. A, 55:4041–4053, Jun 1997.
- [41] BOERSCH, H., J. GEIGER und H. HELLWIG: *Steigerung der Auflösung bei der elektronen-energieanalyse*. Physics Letters, 3(2):64 – 66, 1962.
- [42] WIEN, W: *Verhandl. deut. physik. Ges*, 16:165, 1897.
- [43] BOERSCH, H., J. GEIGER und W. STICKEL: *Das Auflösungsvermögen des elektrostatisch-magnetischen Energieanalysators für schnelle Elektronen*. Zeitschrift für Physik, 180(4):415–424, 1964.
- [44] NICKLAUS, MARC und FRANZ HASSELBACH: *Wien filter: A wave-packet-shifting device for restoring longitudinal coherence in charged-matter-wave interferometers*. Phys. Rev. A, 48:152–160, Jul 1993.

- 
- [45] POOCH, A., M. SEIDLING, N. KERKER, R. RÖPKE, A. REMBOLD, W. T. CHANG, I. S. HWANG und A. STIBOR: *Coherent properties of a tunable low-energy electron-matter-wave source*. Phys. Rev. A, 97:013611, Jan 2018.
- [46] NAGAO, TADAAKI, YOSHITAKA IIZUKA, MAKOTO UMEUCHI, TERUHIKO SHIMAZAKI, MICHIO NAKAJIMA und CHUHEI OSHIMA: *Construction of a high resolution electron energy loss spectrometer*. Review of Scientific Instruments, 65(2):515–516, 1994.
- [47] WILLIAMS, DAVID B und C BARRY CARTER: *The transmission electron microscope*. Springer, 1996.
- [48] OSHIMA, CHUHEI: *Monochromatic field electron emission from a Nb superconductor*. Ultramicroscopy, 78(1):27 – 32, 1999.
- [49] YUASA, KAZUYA, PAOLO FACCHI, ROSARIO FAZIO, HIROMICHI NAKAZATO, ICHIRO OHBA, SAVERIO PASCAZIO und SHUICHI TASAKI: *Entanglement of electrons field-emitted from a superconductor*. Phys. Rev. B, 79:180503, May 2009.
- [50] BURNHAM, DAVID C. und DONALD L. WEINBERG: *Observation of Simultaneity in Parametric Production of Optical Photon Pairs*. Phys. Rev. Lett., 25:84–87, Jul 1970.
- [51] KLYSHKO, D. N., A. N. PENIN und B. F. POLKOVNIKOV: *Parametric Luminescence and Light Scattering by Polaritons*. Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters, 11:5, Januar 1970.
- [52] KWIAT, PAUL G., KLAUS MATTLE, HARALD WEINFURTER, ANTON ZEILINGER, ALEXANDER V. SERGIENKO und YANHUA SHIH: *New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs*. Phys. Rev. Lett., 75:4337–4341, Dec 1995.
- [53] YUAN, ZHEN-SHENG, XIAO-HUI BAO, CHAO-YANG LU, JUN ZHANG, CHENG-ZHI PENG und JIAN-WEI PAN: *Entangled photons and quantum communication*. Physics Reports, 497(1):1 – 40, 2010.
- [54] ASPELMEYER, MARKUS, HANNES R. BÖHM, TSEWANG GYATSO, THOMAS JENNEWEIN, RAINER KALTENBAEK, MICHAEL LINDENTHAL, GABRIEL MOLINA-TERRIZA, ANDREAS POPPE, KEVIN RESCH, MICHAEL TARABA,

- RUPERT URSIN, PHILIP WALTHER und ANTON ZEILINGER: *Long-Distance Free-Space Distribution of Quantum Entanglement*. *Science*, 301(5633):621–623, 2003.
- [55] NAGAOKA, K, T YAMASHITA, M YAMADA, H FUJII, R SEO, K MATSUDA, S UCHIYAMA und C OSHIMA: *Field emission energy spectra from superconducting and normal states of a niobium tip*. *Ultramicroscopy*, 79(1):51 – 57, 1999.
- [56] ONNES, H KAMERLINGH: *Further experiments with liquid helium*. In: *Proceedings of the KNAW*, Band 13, Seiten 1910–1911, 1911.
- [57] NARLIKAR, ANANT V: *Frontiers in superconducting materials*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [58] BARDEEN, J., L. N. COOPER und J. R. SCHRIEFFER: *Theory of Superconductivity*. *Phys. Rev.*, 108:1175–1204, Dec 1957.
- [59] BUCKEL, WERNER und REINHOLD KLEINER: *Supraleitung: Grundlagen und Anwendungen*. John Wiley & Sons, 2013.
- [60] COOPER, LEON N.: *Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas*. *Phys. Rev.*, 104:1189–1190, Nov 1956.
- [61] KITTEL, CHARLES, PAUL MCEUEN und PAUL MCEUEN: *Introduction to solid state physics*, Band 8. Wiley New York, 1996.
- [62] JAKLEVIC, R. C., JOHN LAMBE, A. H. SILVER und J. E. MERCEREAU: *Quantum Interference Effects in Josephson Tunneling*. *Phys. Rev. Lett.*, 12:159–160, Feb 1964.
- [63] GIAEVER, IVAR: *Electron Tunneling Between Two Superconductors*. *Phys. Rev. Lett.*, 5:464–466, Nov 1960.
- [64] GADZUK, J.W.: *Many-body tunneling-theory approach to field emission of electrons from solids*. *Surface Science*, 15(3):466 – 482, 1969.
- [65] GOMER, ROBERT und JOHN K. HULM: *Field Emission from Tantalum in the Normal and Superconducting State*. *The Journal of Chemical Physics*, 20(9):1500–1502, 1952.

- 
- [66] KLEIN, RALPH und LEWIS B. LEDER: *Field Emission from Niobium in the Normal and Superconducting States*. Phys. Rev., 124:1050–1052, Nov 1961.
- [67] A, CHUHEI OSHIMA, NORIAKI ARAI, KATSUMI NAGAOKA, HIROYUKI OGAWA, MANABU YOSHINO und HIROSHI SUTOH: *High-Resolution Field Emission Spectroscopy*. J. Vac. Soci. Jpn, 37(9):772–775, 1994.
- [68] BELL, A. E. und L. W. SWANSON: *Total energy distributions of field-emitted electrons at high current density*. Phys. Rev. B, 19:3353–3364, Apr 1979.
- [69] BOERSCH, H.: *Experimentelle Bestimmung der Energieverteilung in thermisch ausgelösten Elektronenstrahlen*. Zeitschrift für Physik, 139(2):115–146, 1954.
- [70] RODRIGO, J.G., V. CRESPO und S. VIEIRA: *Josephson current at atomic scale: Tunneling and nanocontacts using a STM*. Physica C: Superconductivity and its Applications, 437-438:270 – 273, 2006. Proceedings of the Fourth International Conference on Vortex Matter in Nanostructured Superconductors VORTEX IV.
- [71] KIESEL, HARALD, ANDREAS RENZ und FRANZ HASSELBACH: *Observation of Hanbury Brown-Twiss anticorrelations for free electrons*. Nature, 418(6896):392–394, 2002.
- [72] SCHÜTZ, G., A. REMBOLD, A. POOCH, S. MEIER, P. SCHNEEWEISS, A. RAUSCHENBEUTEL, A. GÜNTHER, W.T. CHANG, I.S. HWANG und A. STIBOR: *Biprism electron interferometry with a single atom tip source*. Ultramicroscopy, 141:9 – 15, 2014.
- [73] REMBOLD, A, G SCHÜTZ, R RÖPKE, W T CHANG, I S HWANG, A GÜNTHER und A STIBOR: *Vibrational dephasing in matter-wave interferometers*. New Journal of Physics, 19(3):033009, mar 2017.
- [74] REMBOLD, A, R RÖPKE, G SCHÜTZ, J FORTÁGH, A STIBOR und A GÜNTHER: *Second-order correlations in single-particle interferometry*. New Journal of Physics, 19(10):103029, oct 2017.
- [75] REMBOLD, ALEXANDER: *Second-order correlation analysis of multifrequency dephasing in single-particle interferometry*. Doktorarbeit, Universität Tübingen, 2017.

- [76] YOUNG, THOMAS: *I. The Bakerian Lecture. Experiments and calculations relative to physical optics*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 94:1–16, 1804.
- [77] BROWN, R. HANBURY und R.Q. TWISS: *A new type of interferometer for use in radio astronomy*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 45(366):663–682, 1954.
- [78] SONNENTAG, PETER: *Ein experiment zur kontrollierten Dekohärenz in einem Elektronen-Biprisma-Interferometer*. Doktorarbeit, Universität, 2006.
- [79] HASSELBACH, FRANZ: *A ruggedized miniature UHV electron biprism interferometer for new fundamental experiments and applications*. Zeitschrift für Physik B Condensed Matter, 71:443–449, 1988.
- [80] SCHÜTZ, G., A. REMBOLD, A. POOCH, W.T. CHANG und A. STIBOR: *Electron matter wave interferences at high vacuum pressures*. Measurement, 68:201 – 204, 2015.
- [81] CHANG, CHE-CHENG, HONG-SHI KUO, ING-SHOUH HWANG und TIEN T. TSONG: *A fully coherent electron beam from a noble-metal covered W(111) single-atom emitter*. Nanotechnology, 20(11):115401, feb 2009.
- [82] HOU, JIN-LONG, WEI-TSE CHANG, CHIH-CHIANG SHIH, YU-FONG YU, TSU-YI FU und ING-SHOUH HWANG: *A nanoemitter based on a superconducting material*. Applied Physics Letters, 108(26):263107, 2016.
- [83] CHANG, WEI-TSE, ING-SHOUH HWANG, MU-TUNG CHANG, CHUNG-YUEH LIN, WEI-HAO HSU und JIN-LONG HOU: *Method of electrochemical etching of tungsten tips with controllable profiles*. Review of Scientific Instruments, 83(8):083704, 2012.
- [84] KUO, HONG-SHI, ING-SHOUH HWANG, TSU-YI FU, YU-CHUN LIN, CHE-CHENG CHANG und TIEN T. TSONG: *Noble Metal/W(111) Single-Atom Tips and Their Field Electron and Ion Emission Characteristics*. Japanese Journal of Applied Physics, 45(11):8972–8983, nov 2006.
- [85] KUO, HONG-SHI, ING-SHOUH HWANG, TSU-YI FU, YI-HSIEN LU, CHUN-YUEH LIN und TIEN T. TSONG: *Gas field ion source from an Ir/W(111) single-atom tip*. Applied Physics Letters, 92(6):063106, 2008.

- 
- [86] KNOBLAUCH, A, CH WILBERTZ, TH MILLER und S KALBITZER: *Field electron emission properties of a supertip*. Journal of Physics D: Applied Physics, 29(2):470–473, feb 1996.
- [87] WARKEN, FLORIAN: *Ultradünne Glasfasern als Werkzeug zur Kopplung von Licht und Materie*. Doktorarbeit, Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2008.
- [88] WOLLNIK, HERMANN: *Optics of charged particles*. Elsevier, 2012.
- [89] JAGUTZKI, O, V MERGEL, K ULLMANN-PFLEGER, L SPIELBERGER, U SPILLMANN, R DÖRNER und H SCHMIDT-BÖCKING: *A broad-application microchannel-plate detector system for advanced particle or photon detection tasks: large area imaging, precise multi-hit timing information and high detection rate*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 477(1):244 – 249, 2002. 5th Int. Conf. on Position-Sensitive Detectors.
- [90] POOCH, ANDREAS: *Coherence and decoherence studies in electron matter wave interferometry*. Doktorarbeit, Universität Tübingen, 2018.
- [91] REMBOLD, A., G. SCHÜTZ, W. T. CHANG, A. STEFANOV, A. POOCH, I. S. HWANG, A. GÜNTHER und A. STIBOR: *Correction of dephasing oscillations in matter-wave interferometry*. Phys. Rev. A, 89:033635, Mar 2014.
- [92] GÜNTHER, A., A. REMBOLD, G. SCHÜTZ und A. STIBOR: *Multifrequency perturbations in matter-wave interferometry*. Phys. Rev. A, 92:053607, Nov 2015.
- [93] SCHÜTZ, GEORG: *Optimierung und Charakterisierung eines Biprisma-Interferometers für die Aharonov-Bohm Physik*. Doktorarbeit, Universität Tübingen, 2018.
- [94] HASSELBACH, F., A. SCHÄFER und H. WACHENDORFER: *Interferometric measurement of charged particle spectra (Fourier-spectroscopy)*. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 363(1):232 – 238, 1995. Charged Particle Optics.
- [95] BATELAAN, H., T. J. GAY und J. J. SCHWENDIMAN: *Stern-Gerlach Effect for Electron Beams*. Phys. Rev. Lett., 79:4517–4521, Dec 1997.

- 
- [96] AHRENS, SVEN: *Electron-spin filter and polarizer in a standing light wave*. Phys. Rev. A, 96:052132, Nov 2017.
- [97] BATELAAN, H.: *The Kapitza-Dirac effect*. Contemporary Physics, 41(6):369–381, 2000.
- [98] POOCH, ANDREAS, MICHAEL SEIDLING, MORITZ LAYER, ALEXANDER REMBOLD und ALEXANDER STIBOR: *A compact electron matter wave interferometer for sensor technology*. Applied Physics Letters, 110(22):223108, 2017.
- [99] RÖPKE, R, N KERKER und A STIBOR: *Data transmission by quantum matter wave modulation*. New Journal of Physics, 23(2):023038, Feb 2021.
- [100] AHARONOV, Y. und D. BOHM: *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*. Phys. Rev., 115:485–491, Aug 1959.
- [101] RUECKNER, WOLFGANG und JOSEPH PEIDLE: *Young’s double-slit experiment with single photons and quantum eraser*. American Journal of Physics, 81(12):951–958, 2013.
- [102] WOOTTERS, W. K. und W. H. ZUREK: *A single quantum cannot be cloned*. Nature, 299(5886):802–803, 1982.
- [103] LIAO, SHENG-KAI, WEN-QI CAI, WEI-YUE LIU, LIANG ZHANG, YANG LI, JI-GANG REN, JUAN YIN, QI SHEN, YUAN CAO, ZHENG-PING LI, FENG-ZHI LI, XIA-WEI CHEN, LI-HUA SUN, JIAN-JUN JIA, JIN-CAI WU, XIAO-JUN JIANG, JIAN-FENG WANG, YONG-MEI HUANG, QIANG WANG, YI-LIN ZHOU, LEI DENG, TAO XI, LU MA, TAI HU, QIANG ZHANG, YU-AO CHEN, NAI-LE LIU, XIANG-BIN WANG, ZHEN-CAI ZHU, CHAO-YANG LU, RONG SHU, CHENG-ZHI PENG, JIAN-YU WANG und JIAN-WEI PAN: *Satellite-to-ground quantum key distribution*. Nature, 549(7670):43–47, 2017.
- [104] STORECK, GERO, SIMON VOGELGESANG, MURAT SIVIS, SASCHA SCHÄFER und CLAUS ROPERS: *Nanotip-based photoelectron microgun for ultrafast LEED*. Structural Dynamics, 4(4):044024, 2017.



# Danksagung

Zuallererst möchte ich mich bei meinem Betreuer Dr. Alexander Stibor bedanken. Er hat mich, schon lange bevor ich überhaupt als Doktorand angestellt war, in der Gruppe aufgenommen. Auch wenn die räumliche Distanz durch seinen USA-Aufenthalt groß war, so war durch die zahllosen Videokonferenzen seine Anwesenheit bei aktuellen Problemen und Fragestellungen stets gegeben. Durch sein Vertrauen in meine Fähigkeiten hat er mir sehr viele Freiräume gelassen, womit ich mich in meiner Arbeit und meinen Ideen verwirklichen konnte. Dafür kann ich Alexander Stibor nicht oft genug danken. Auch für die Chance die er mir gegeben hat, am LBNL ein halbes Jahr arbeiten zu dürfen, bin ich ihm sehr dankbar.

Auch möchte ich auf diesem Wege Prof. Claus Zimmermann danken. Sehr viele Probleme wären bestimmt nicht so schnell gelöst worden ohne sein offenes Ohr und den beinahe endlosen Gesprächen in den Pausen. Sein Weitblick und die Fähigkeit an den richtigen Stellen die richtigen Fragen zu stellen, haben stets dazu geführt, dass man seine Arbeit kritisch hinterfragt und man sich damit nicht in Sackgassen verliert. Danke für die immer offene Tür wenn es Problemen oder einfach nur Fragen gab.

Diese Arbeit wäre so vermutlich nie entstanden ohne meine Kollegin Nicole Kerker. Deshalb gebührt ihr ein ganz besonderer Dank. Durch die gute Zusammenarbeit konnte jedes noch so komplizierte Problem im Labor schnell gelöst werden. Ich bin froh, nach dieser Zeit nicht nur eine gute Kollegin, sondern auch einen guten Freund gefunden zu haben. Danke für die tolle und spannende Zeit, die ich mit dir in den letzten Jahren im Labor erleben durfte.

Ein weiterer Dank geht an meine Vorgänger Alexander und Georg. Das Wissen, das ihr weitergegeben habt, ist von unschätzbarem Wert. Ihr habt das Labor und die Experimente auf grundsolide Beine gestellt. Aufgrund eurer Vorarbeit war die Arbeit so überhaupt erst möglich. Auch möchte ich mich bei meinem ehemaligen

---

Kollegen Andreas für die angenehme Zeit bedanken.

Ohne die feinmechanischen und elektronischen Werkstätten der Universität wären viele Projekte überhaupt nicht möglich gewesen. Vielen Dank für die Hilfe bei den etlichen "Notfällen". Danke für die vielen Hilfestellungen und Beratungen bei vielen technischen Problemen. Auch bei den Technikern von LISA+, Ronny und Markus, möchte ich mich für die vielen Hilfestellungen bedanken. Auch an die Verwaltung des physikalischen Instituts geht ein Dank. Herr Lang, Frau Walz und Frau Behring haben uns in so vielen Lebenslagen mit Rat und Tat unterstützt. Danke.

Auch bei meinen Kollegen und Freunden aus dem 5. Stock: Andreas, Matze, Max, Patrizia, Peter, Philipp und Reini möchte ich mich bedanken. Danke für die vielen Diskussionen, nicht immer nur physikalischer Natur und die ständige Hilfsbereitschaft, wenn mal eine helfende Hand, ein Ersatzteil oder einfach nur ein Rat gebraucht wurde. Auch bei den anderen Kollegen aus der Quantenoptik und Atomphysik möchte ich mich recht herzlich für die gute Atmosphäre und Zusammenarbeit bedanken.

Ich möchte mich auch bei meinen Kollegen und Freunden aus der angewandten Physik, Annika und Simon, bedanken. Bei REM-Aufnahmen, Programmierfragen oder sonstigen Problemen hat eine Diskussion mit euch immer eine Lösung gebracht. Danke für die Hilfen und vielen Anregungen die ihr gegeben habt.

Allen meinen Freunden, die mich im Studium und während meiner Promotion begleitet haben, möchte ich hier nochmals herzlich danken.

Ein großer Dank geht an meine Familie. Auch wenn ihr oftmals nicht so ganz verstehen konntet, wie man "so etwas" spannend finden kann, habt ihr mich immer unterstützt und seid immer hinter mir gestanden. Vielen Dank dafür!

Danke Verena, dass du das Alles mit mir durchgestanden hast. Danke, dass du mich ertragen hast als ich immer wieder in meine Arbeit vertieft war und ich mich viel zu oft viel zu rar gemacht habe. Danke für deine Unterstützung, deine Hilfestellungen und deine Fürsorge! Danke Verena, meine Maus Yara und mein Käfer Janosch, dass ihr mir gezeigt habt, dass Physik nicht das Wichtigste im Leben ist.

# Anhang A

## Publikationsliste

### Publikation 1 [99]

*R. Röpke*, N. Kerker und A. Stibor

**Data transmission by quantum matter wave modulation**

New J. Phys. 23, 023038 (2021)

### Publikation 2 [34]

N. Kerker, *R. Röpke*, L.-M. Steinert, A. Pooch und A. Stibor

**Quantum decoherence by Coulomb interaction**

New J. Phys. 22, 063039 (2020)

### Publikation 3 [73]

A. Rembold, G. Schütz, *R. Röpke*, W.T. Chang, I.S. Hwang, A. Günther und A. Stibor

**Vibrational dephasing in matter-wave interferometers**

New J. Phys. 19, 033009 (2017)

### Publikation 4 [74]

A. Rembold, *R. Röpke*, G. Schütz, J. Fortágh, A. Stibor und A. Günther

**Second-order correlations in single-particle interferometry**

New J. Phys. 19, 103029 (2017)

---

## Publikation 5 [45]

A. Pooch, M. Seidling, N. Kerker, *R. Röpke*, A. Rembold, W.T. Chang, I.S. Hwang  
und A. Stibor

**Coherent properties of a tunable low-energy electron-matter-wave source**

Phys. Rev. A 97, 013611 (2018)



## PAPER

**Data transmission by quantum matter wave modulation**R Röpke<sup>1</sup>, N Kerker<sup>1</sup> and A Stibor<sup>1,2,\*</sup><sup>1</sup> Institute of Physics and LISA<sup>+</sup>, University of Tübingen, Tübingen, Germany<sup>2</sup> Lawrence Berkeley National Lab, Molecular Foundry, Berkeley, United States of America

\* Author to whom any correspondence should be addressed.

E-mail: [astibor@lbl.gov](mailto:astibor@lbl.gov)**Keywords:** communication, quantum modulation, interferometry, electron, Wien filter, secure data transfer, matter wave

## OPEN ACCESS

RECEIVED  
30 October 2020REVISED  
25 January 2021ACCEPTED FOR PUBLICATION  
29 January 2021PUBLISHED  
23 February 2021

Original content from  
this work may be used  
under the terms of the  
[Creative Commons  
Attribution 4.0 licence](#).

Any further distribution  
of this work must  
maintain attribution to  
the author(s) and the  
title of the work, journal  
citation and DOI.

**Abstract**

Classical communication schemes exploiting wave modulation are the basis of our information era. Quantum information techniques with photons enable future secure data transfer in the dawn of decoding quantum computers. Here we demonstrate that also matter waves can be applied for secure data transfer. Our technique allows the transmission of a message by a quantum modulation of coherent electrons in a biprism interferometer. The data is encoded in the superposition state by a Wien filter introducing a longitudinal shift between separated matter wave packets. The transmission receiver is a delay line detector performing a dynamic contrast analysis of the fringe pattern. Our method relies on the Aharonov–Bohm effect but does not shift the phase. It is demonstrated that an eavesdropping attack will terminate the data transfer by disturbing the quantum state and introducing decoherence. Furthermore, we discuss the security limitations of the scheme due to the multi-particle aspect and propose the implementation of a key distribution protocol that can prevent active eavesdropping.

**Introduction**

We are living in the information age, and almost every aspect of our modern society depends on secure data transfer. Classical communication schemes based on electromagnetic wave modulation are protected by complex mathematical encoding algorithms [1]. Their vulnerability to decoding by potential future quantum computers [2] with Shor's algorithm [3] spurred the field of quantum cryptography and quantum information science with photons [4–7]. Exploiting the unique quantum behavior of photons led to further major achievements in quantum optics [8], e.g. the violation of Bell inequality [9], quantum teleportation [10] or quantum computing [11].

These photonic schemes are based on quantum uncertainty and entanglement. Another quantum cornerstone, the wave-particle duality, generated various matter wave experiments and applications for electrons [12], ions [13], atoms [14], molecules [15] and neutrons [16]. It was shown that almost any classical wave phenomenon has its counterpart realization with matter waves leading to particle interference [17] and Bragg scattering [18] of matter on light gratings, atomic Mach–Zehnder interferometer [19], transmission of electrons on bulk structures for tomography [20] or even an atom laser by releasing atoms from a Bose–Einstein condensate [21]. However, matter waves have yet not been exploited as carrier waves for the modulation and transmission of a signal, as it is common for classic electromagnetic data transfer.

In this paper, we describe such an approach, where a message is transmitted by a non-trivial quantum modulation of an electronic matter wave. We introduce and experimentally demonstrate a unique new data transfer scheme that is fundamentally different from the current quantum information science techniques with photons [22]. It can also not be realized classically or with neutral particle matter waves. Our method offers a valuable alternative to the future information market and can be suitable for situations where photons may not be the best choice. We discuss in detail that it provides a different kind of quantum security located between the classical and the quantum photonic schemes.

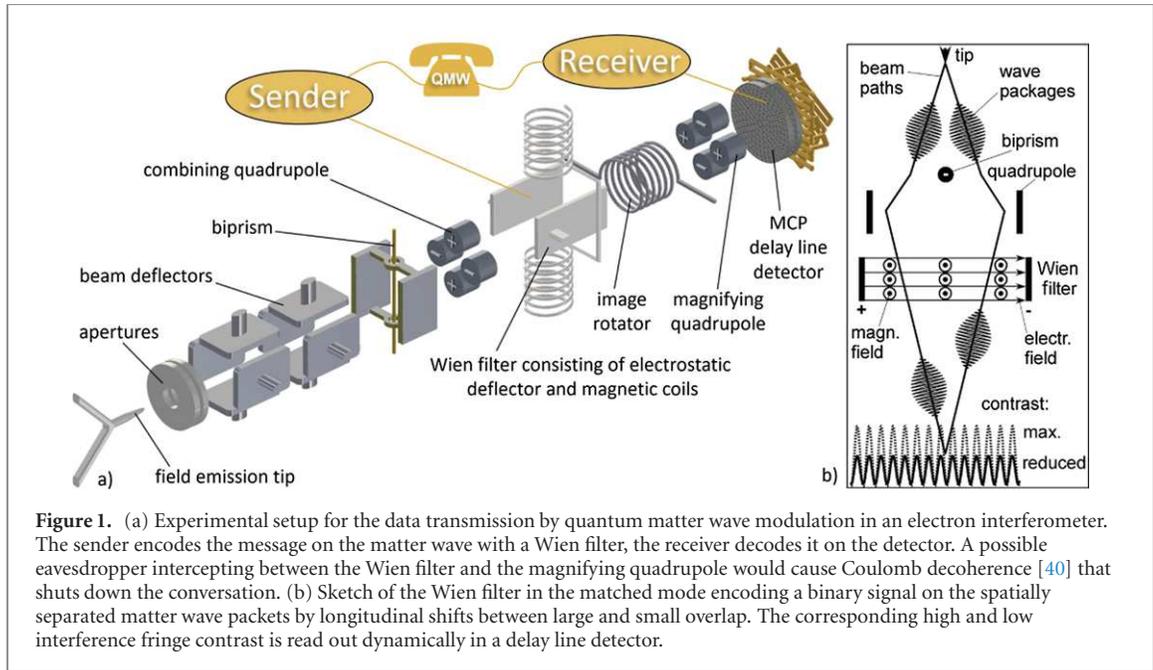
In our experiment, the matter waves of electrons in a biprism interferometer [12, 23–28] are used as the carrier waves to be modulated for signal transmission. The coherent electron beam is generated by a

nanotip field emitter [29–31] and separated by a biprism fiber into two partial waves. After superposition by a quadrupole lens, an interference fringe pattern is formed on a delay line detector with a high spatial and temporal resolution [32]. Due to the limited energy width of the source, each detected electron has a slightly different wavelength. The ensemble of these matter waves can be described by a wave-packet with a distinct width being the longitudinal coherence length [33, 38]. With a Wien filter in the beam path the separated wave-packets can be longitudinally shifted toward each other decreasing the interference contrast [12, 33, 38, 39] without changing the classical electron pathways or the phase of the fringe pattern. The Wien filter modulation is based on the Aharonov–Bohm effect on charged particle waves [12] and therefore has no counterpart with photons or neutral atoms. The signal to be transmitted is encoded binary on the matter wave with the Wien filter by switching between high and low contrast. In this way, neither the beam position or the total intensity, nor the interference phase are changed revealing it as a truly quantum modulation dependent on the electrons wave nature. The data readout is realized by a dynamic contrast measurement. A transfer rate of 1 bit per 5 s was achieved with a secure transmission distance of 3.8 cm until the overlap of the separated beams. The signal transmission is demonstrated to be secure for decohering interceptions by introducing a semiconducting plate parallel to the electron beam paths. The Coulomb interaction between beam electrons and image charges in the semiconductor represents a passive eavesdropping attempt. It causes a transfer of which-path information which quenches the interference fringes due to decoherence [40], effectively annihilating the communication. We furthermore discuss the security limitations against active eavesdropping with a quantum device and siphoning part of the signal. To overcome such attacks, we propose a key distribution scheme for matter waves with similarities to the BB84 protocol for photons [5]. The required technical modifications for a future implementation in our current experimental setup are presented. It can reveal an active eavesdropping attack based on the quantum wave nature of the electrons. We also point out that our scheme has a lower security level due to its multi-particle aspect than the well-established single-photon cryptography protocols.

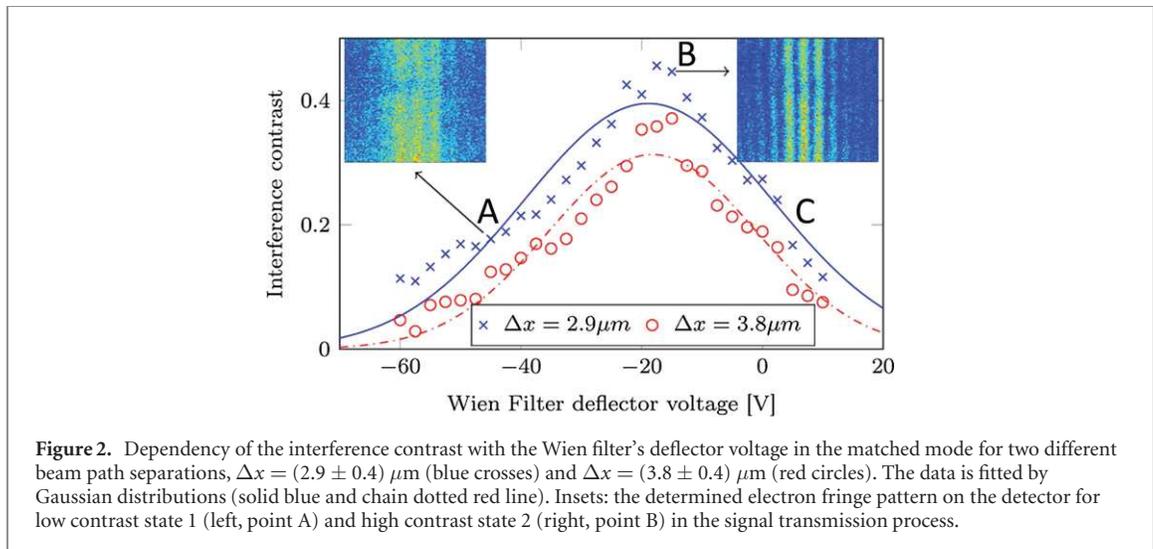
## Experimental setup

The principles of electron biprism interferometry are explained in [12, 23]. Our setup and its application for communication by matter wave modulation are illustrated in figures 1(a) and (b). It includes several beam optic components from a former experiment by Sonnentag and Hasselbach [40]. A single atom nanotip field emitter [25, 29–31] is the origin of coherent electron waves. The beam is guided by electrostatic deflectors to illuminate the biprism. It consists of an Au/Pd-coated glass fiber with a diameter of 395 nm [25] and is placed between two grounded parallel plates. The fiber is set on a low negative potential between 0 and  $-1$  V and can separate the beam coherently up to  $\Delta x = 8.5 \mu\text{m}$ . The partial waves are combined again by a quadrupole lens [35, 40]. Before they are superposed at the entrance of a quadrupole magnification lens, they pass a Wien filter [33] where the signal to be transmitted gets modulated on the electron waves as described below. The beam additionally traverses a magnetic coil as an image rotator to adjust the edges of the overlapping partial beams normal to the magnifying direction of the quadrupole. After superposition, the resulting fringe pattern is magnified by a factor of about 1500 and detected on a delay line detector with a high spatial and temporal single-particle resolution [32].

The non-zero energy width of the beam source  $\Delta E$  and the quantum superposition principle allow describing the beam with wave-packets being the Fourier sum of individual linearly independent plane de Broglie waves of single electrons with slightly different energies [12, 33]. The Wien filter is used in classical physics as a velocity filter and energy analyzer for electron beams [36, 37]. In biprism electron interferometry the unit was rediscovered to correct for longitudinal wave-packet shifts [33]. They are introduced by electrostatic deflectors for beam alignment. The partial waves traverse in regions between the deflector plates with different electrostatic potentials. It leads to non-equal group velocities and different arrival times of the wave-packets on the detector. This in turn results in a longitudinally shifted overlap and a loss of contrast [12, 33, 38, 39]. When the shift is greater than the width of the wave-packets, defined as the longitudinal coherence length, then the fringe contrast vanishes. The Wien filter can compensate for this relative delay and reestablish maximum contrast [33]. It consists of an electrostatic deflector and two connected magnetic coils generating a magnetic and electric field both perpendicular to each other and the direction of the beam path (see figure 1(a)). The Wien filter is always used in a state where the effects of the electric and magnetic forces on the electrons cancel each other. In this so-called matched mode, the Wien filter does not deflect the beam or shift the phase of the interference pattern, it has therefore no classical influence on the electrons. However, the spatially separated partial wave-packets still experience different potentials between the Wien filter deflector plates which change their relative group velocities. The magnetic field does not introduce such an effect. For that reason, a combination of electric and magnetic fields can



**Figure 1.** (a) Experimental setup for the data transmission by quantum matter wave modulation in an electron interferometer. The sender encodes the message on the matter wave with a Wien filter, the receiver decodes it on the detector. A possible eavesdropper intercepting between the Wien filter and the magnifying quadrupole would cause Coulomb decoherence [40] that shuts down the conversation. (b) Sketch of the Wien filter in the matched mode encoding a binary signal on the spatially separated matter wave packets by longitudinal shifts between large and small overlap. The corresponding high and low interference fringe contrast is read out dynamically in a delay line detector.



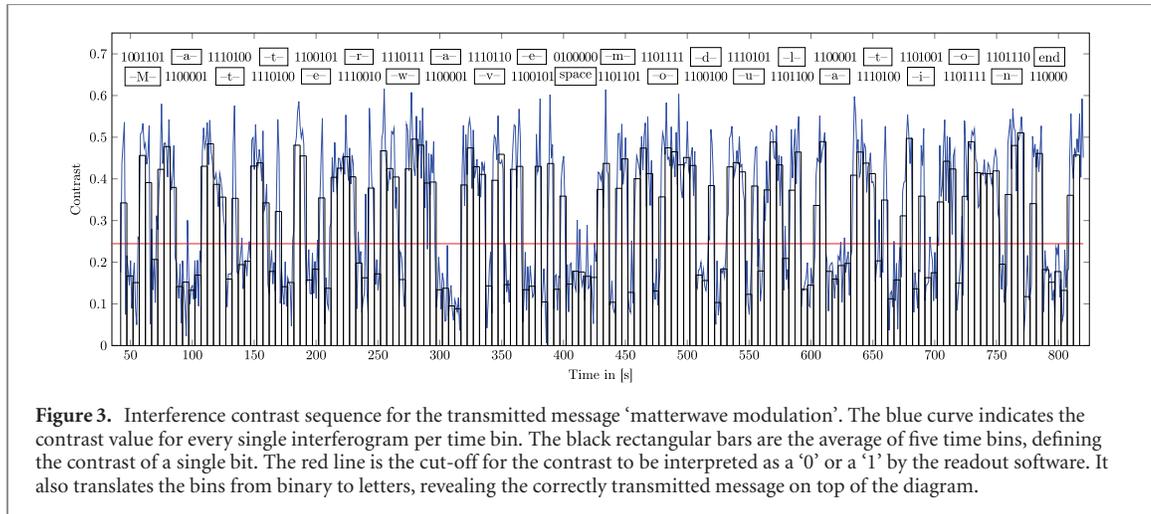
**Figure 2.** Dependency of the interference contrast with the Wien filter's deflector voltage in the matched mode for two different beam path separations,  $\Delta x = (2.9 \pm 0.4) \mu\text{m}$  (blue crosses) and  $\Delta x = (3.8 \pm 0.4) \mu\text{m}$  (red circles). The data is fitted by Gaussian distributions (solid blue and chain dotted red line). Insets: the determined electron fringe pattern on the detector for low contrast state 1 (left, point A) and high contrast state 2 (right, point B) in the signal transmission process.

always be found to fully compensate for the original longitudinal shift of the other deflectors in the beamline. It restores maximal contrast [33] without beam deflection.

## Results

In our new communication scheme, we use this mechanism to switch between two states in the Wien filter for binary signal transmission. The state 2 provides a full longitudinal overlap of the separated wave-packets on the detector and maximal contrast. For state 1, a voltage on the Wien filter deflector is applied (and the corresponding current through the magnetic coils for a matched state) to longitudinally shift the wave-packets toward each other slightly less than the coherence length. This results in a significantly reduced interference contrast. The two states and the dependency of the measured electron interference contrast as a function of the matched Wien filter deflector voltage are shown in figure 2 for two different beam path separations. The two insets indicate the interference pattern visible on the detector at those points (labeled as A and B in figure 2) which are switched for the binary encoding in the signal transmission. They reveal also the constant phase position of the fringe pattern.

With this setup, the first proof-of-principle experiment for information transfer by matter wave modulation was performed. The results are presented in figure 3. A user interface was coded where we input the message 'matterwave modulation'. It was transmitted from the sender (Wien filter) to the receiver

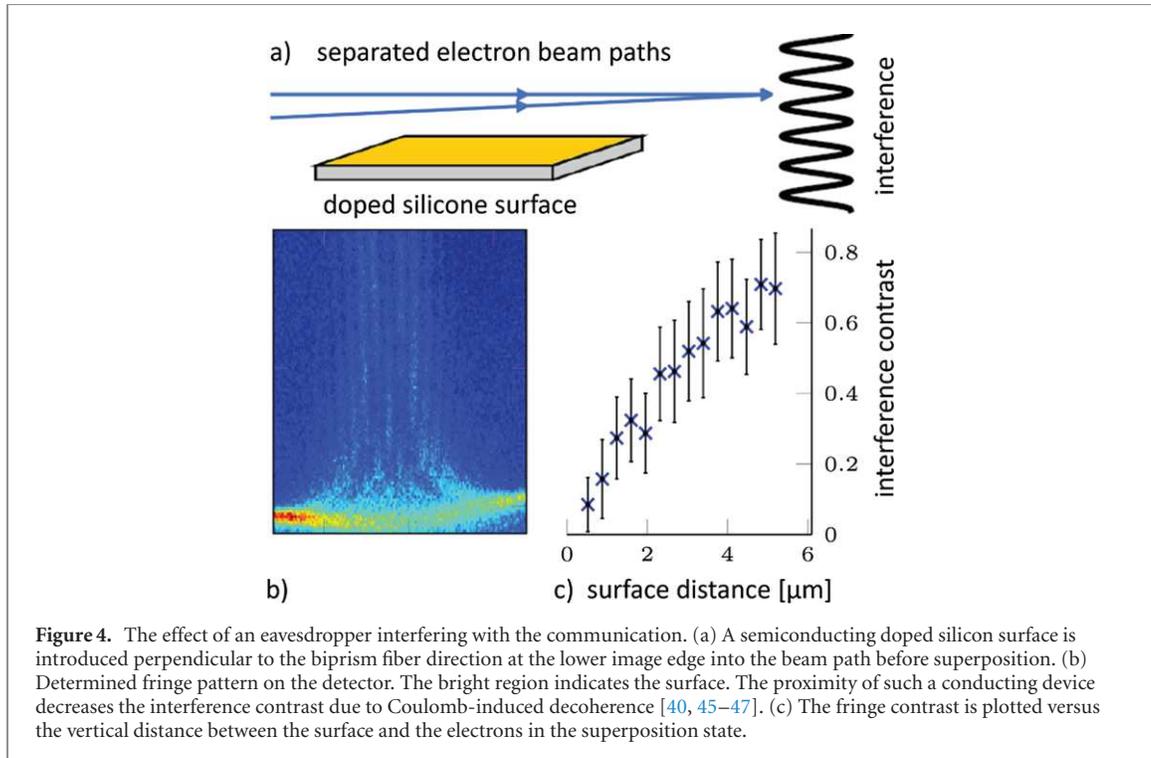


**Figure 3.** Interference contrast sequence for the transmitted message ‘matterwave modulation’. The blue curve indicates the contrast value for every single interferogram per time bin. The black rectangular bars are the average of five time bins, defining the contrast of a single bit. The red line is the cut-off for the contrast to be interpreted as a ‘0’ or a ‘1’ by the readout software. It also translates the bins from binary to letters, revealing the correctly transmitted message on top of the diagram.

(detector) as indicated in figure 1. The program converts every letter in its binary representation and sends it to the control unit for the Wien filter. It consists of a pair of bipolar voltage sources for the Wien deflector, a bipolar current source for the Wien coils, and a microcontroller. For the binary number ‘1’, the deflector voltage and coil current were set to state 2 (point B), for the binary number ‘0’ they were set to state 1 (point A), as indicated in figure 2. At these two points, the corresponding high or low contrast fringe pattern were recorded. Each interferogram reveals a particle event integration over 1 s. This time binning is a balance between the count rate and the signal transmission rate. To avoid errors, enough counts are needed to make sure the contrast and phase can be determined. Thus, 4000 to 5000 counts/s were accumulated on the whole screen, resulting in 1000–1500 counts/s for each recorded interference pattern within five fringes. It is a sufficient signal to determine the fit parameters and the contrast with reasonable accuracy as described in the methods [27, 31]. The extracted interference contrast is plotted by the blue curve in figure 3. Five time bins are averaged to form one bit and the averaged values are represented by black rectangular bars. The message could thus be transmitted with a rate of 1 bit per 5 s. To determine if a bit is ‘0’ or ‘1’, a cut-off value was defined as (red line):  $C_{\text{cutoff}} = 0.8 \times \bar{C}$ , with  $\bar{C}$  being the average contrast of all interferograms in the transmission. The readout software determines if an individual black bar value is above or below the red line and interprets it accordingly to a binary number ‘1’ or ‘0’. Every transmitted message is initialized by the bit sequence ‘000 010’ to normalize the length of a single bit before the start sequence is removed and the first sign begins. The end of the transmission is defined by the sequence ‘110 000’. After conversion into letters, the program reveals the correctly transmitted message, as presented by the binary numbers and corresponding letters above the data in figure 3. No incorrect bit was transferred.

## Discussion

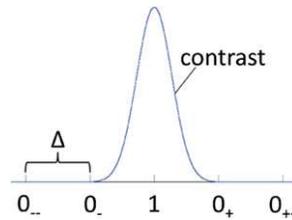
The biprism interferometer is comparable to the famous double-slit experiment in quantum physics [34]. It is well known that interference effects vanish as soon as the separated particle waves are measured before getting superposed [40–43]. For that simple reason, our transmission scheme intrinsically includes a high level of security beyond the classical scope against passive eavesdropping. The secure communication distance before superposition is between the Wien filter and the magnifying quadrupole. Since the coherent partial waves have not overlapped yet, direct measurement by an eavesdropper (denoted as (E) in the following) will only yield two independent beam spots of electrons and the modulated common information is lost. The exact distance depends on the number of fringes needed for analysis which is related to the width of the superposition, the superposition angle, the electron wavelength, and the resolution or magnification in the detection process. In this experiment, it is around 38 mm. Behind that point up to the detector, the partial waves are already superposed and the fringe pattern with the encoded information is visible at any place in different magnifications. This distance is 102 mm and cannot be considered to be secure. In the following, we discuss the security of our methods against passive and active eavesdropping. It leads to the conclusion that our quantum wave modulation technique has improved security compared to classical transmissions but also limitations compared to single-photon cryptography schemes due to the multi-particle character of the method.



**Figure 4.** The effect of an eavesdropper interfering with the communication. (a) A semiconducting doped silicon surface is introduced perpendicular to the biprism fiber direction at the lower image edge into the beam path before superposition. (b) Determined fringe pattern on the detector. The bright region indicates the surface. The proximity of such a conducting device decreases the interference contrast due to Coulomb-induced decoherence [40, 45–47]. (c) The fringe contrast is plotted versus the vertical distance between the surface and the electrons in the superposition state.

### Eavesdropping with a classical device

Any attempt to ‘tap the line’ with a classical instrument would disturb the quantum superposition state and cause decoherence due to Coulomb-interaction [40, 45]. This reduces or destroys the interference contrast on which our binary coding technique is based on. In turn, the receiver would immediately detect the tapping attempt due to the loss of the transmitted signal. It is thereby not important if information about the electron waves is actually measured by an external observer or could only in principle be gained from the environment. For that reason, any conducting surface can represent the effect of an eavesdropper. The surface atoms (as being the environment) can resolve the which-path information of the electrons if the surface is close enough to the separated coherent beam paths. We studied and compared this Coulomb-induced decoherence with current theoretical models in detail elsewhere [45]. It was also experimentally analyzed in [40, 46] and theoretically discussed in [47–52]. The theoretical conclusions allow us to determine the contrast loss in a specific passive eavesdropping situation with a classical device and relate directly to the security arguments in our scheme. However, independent of the tapping device, the more information is gained the less contrast can be measured by the receiver which reveals the eavesdropper. Here, we demonstrate such an eavesdropping attempt by applying a one-cm-long doped silicon surface parallel and below the separated beamlines before superposition, as illustrated in figure 4(a). The resulting fringe pattern on the detector from the aloof electron waves with a beam path separation of  $\Delta x = 5.0 \mu\text{m}$  is shown in figure 4(b). Figure 4(c) plots the determined interference contrast as a function of the electron distance normal to the semiconducting surface. It can be clearly observed that the contrast drops from about 70% to zero within  $5 \mu\text{m}$ . This represents the distinct effect of a passive eavesdropper who would be detected immediately and end the communication. The process depends on the beam path separation, surface conductivity and temperature [40, 45, 46]. As mentioned, our Wien filter scheme does not shift the fringe position on the detector and the electric and magnetic forces cancel each other. For that reason, nothing changes during switching between ‘0’ and ‘1’ for a classical measuring device and the separated electron pathways remain unaltered, making it impossible to gain any information about the transmitted signal. The only change in our electron beam is the group velocity of the wave-packets that classically alter the arrival times of the particles. However, since the electron emission is a Poisson distributed statistical process [25], the individual electron starting time is unknown, making the electron time differences not accessible. The security aspect of our scheme is therefore also a direct consequence of the random quantum tunneling process through the field emitters Coulomb barrier in the Schottky effect [53].



**Figure 5.** Schematic illustration of the interference contrast vs Wien filter deflector voltage from figure 2 to indicate the signal encoding points in the matter wave key distribution protocol. The shift between the separated wave-packets from max. to min. contrast is  $\Delta$ . The positions  $0_{--}$ ,  $0_{-}$ ,  $0_{+}$  and  $0_{++}$  indicate the points at multiples of  $\Delta$  in both directions. An eavesdropper cannot distinguish between those 0-states, since in either case there is no contrast.

### Eavesdropping with a quantum device

It is conceivable that the eavesdropper manages to coherently split all or part of the electron beam to reveal the transmitted signal. In this scenario, the interceptor deflects the separated coherent beams before overlap and superposes them on his own detector to measure the high and low contrast interference pattern according to the transmitted signal. For the case that the whole signal is captured, (E) could apply a second matter wave interferometer and induce a corresponding interference pattern into the optical axis of the receivers magnifying quadrupole and detector. With such a tapping setup, the receiver may not determine the presence of the eavesdropper. To reveal such an attack and accomplish secure data transfer, we present a new key distribution scheme using the quantum nature of the electron wave-packets. Our method has similarities to the BB84 protocol for quantum key distributions with photons [5]. It utilizes the symmetry of the curve in figure 2, where the contrast value at the indicated point C is equivalent to the one at point A. It leads to two possibilities of how a ‘0’ can be encoded that an eavesdropper cannot distinguish. Let us assume for this scheme that points A and C in figure 2 are set further away from the center of the Gaussian curve such as illustrated by the points  $0_{-}$  and  $0_{+}$  in figure 5. They have the same zero contrast value within the error as any other point in the background far away from the wave-packets overlap. We also assume an equally negative and positive Wien filter shift  $\Delta$  between minimal contrast at point  $0_{-}$  or  $0_{+}$  and the maximum contrast at perfect wave-packets overlap (point B in figure 2 or point 1 in figure 5). The positions where the partial wave-packets are shifted by  $\pm 2\Delta$  from max. overlap are labeled as  $0_{--}$  and  $0_{++}$ .

For our matter wave key distribution scheme, let us assume the implementation of a second Wien filter for signal encoding at the sender ( $W_s$ ) and a further one at the receiver’s end ( $W_r$ ), directly before the magnifying quadrupole.  $W_s$  encodes the message by shifting the wave-packets by  $\pm\Delta$  or leaving it as it is. The receiver’s  $W_r$  randomly does the same ( $\pm\Delta$  or no shift). After several turns, the sender and receiver exchange via a public channel for each bit how they have shifted (but not if they sent or measured a ‘0’ or a ‘1’). They only use those bits as an encryption key, where both did no shift, or where they did the opposite shift. This way, the receiver reverses the shift of the sender and measures the originally transmitted bit. For completeness, it is worth mentioning that in principle the first and second Wien filter of the sender can be combined to one Wien filter.

As a next step, the sender and receiver publicly exchange the remaining sent/received bits (or a separate small subset of the data) together with the applied shifts. Comparing the results are used to reveal a possible eavesdropper. To provide an example, if the sender sends a ‘1’ (max. contrast) and shifts it with  $W_s$  by  $-\Delta$  to a ‘0’ bit at point  $0_{-}$  (see figure 5) and the receiver chooses to shift with  $W_r$  also by  $-\Delta$ , he will end up at point  $0_{--}$  and measure a ‘0’ bit (min. contrast). If an eavesdropper is in line and chooses ‘no shift’ in the Wien filter, he or she measures a ‘0’ not knowing if it was sent as a  $0_{--}$ ,  $0_{-}$ ,  $0_{+}$  or  $0_{++}$ . In case he chooses to send it as a  $0_{+}$  the receiver (after subtracting  $\Delta$ ) will end up at the max. of the contrast curve at point ‘1’ and measure a ‘1’ bit. Since this is the opposite value as without the eavesdropper this interception can be revealed after the public data comparison. All possible settings on the sender and receiver site are summarized in table 1.

It also demonstrates the large uncertainty an eavesdropper has. If table 1 is considered a  $3 \times 3$  matrix with the elements (row nr., column nr.) the three cases for the eavesdropper (E) can be analyzed in more detail:

**Table 1.** Possible combinations of wave-packet shifts from the sender and receiver for the matter wave key distribution protocol and the corresponding bit measurement. The columns are labeled by the points  $0_-$ ,  $1$  or  $0_+$  (see figure 5) where the sender sends the original bit ‘0’ or ‘1’ with the first Wien filter. The rows provide the possible shifts ( $-\Delta$ , ‘no’ (no shift) and  $+\Delta$ ) for signal encoding with the sender’s second Wien Filter  $W_s$ . The first value in the boxes provides the signal state after the encoding by the sender ( $0_{--}$  to  $0_{++}$ ) and behind the arrow the receivers states after the decoding shifts by  $W_r$  of  $-\Delta$ , ‘no’ and  $+\Delta$ .

	$0_-$	$1$	$0_+$
$-\Delta$	$0_{--} \rightarrow \begin{array}{c} -\Delta \ 0_{---} \\ \text{no} \ 0_{--} \\ +\Delta \ 0_- \end{array}$	$0_- \rightarrow \begin{array}{c} -\Delta \ 0_{--} \\ \text{no} \ 0_- \\ +\Delta \ 1 \end{array}$	$1 \rightarrow \begin{array}{c} -\Delta \ 0_- \\ \text{no} \ 1 \\ +\Delta \ 0_+ \end{array}$
no	$0_- \rightarrow \begin{array}{c} -\Delta \ 0_{--} \\ \text{no} \ 0_- \\ +\Delta \ 1 \end{array}$	$1 \rightarrow \begin{array}{c} -\Delta \ 0_- \\ \text{no} \ 1 \\ +\Delta \ 0_+ \end{array}$	$0_+ \rightarrow \begin{array}{c} -\Delta \ 1 \\ \text{no} \ 0_+ \\ +\Delta \ 0_{++} \end{array}$
$+\Delta$	$1 \rightarrow \begin{array}{c} -\Delta \ 0_- \\ \text{no} \ 1 \\ +\Delta \ 0_+ \end{array}$	$0_+ \rightarrow \begin{array}{c} -\Delta \ 1 \\ \text{no} \ 0_+ \\ +\Delta \ 0_{++} \end{array}$	$0_{++} \rightarrow \begin{array}{c} -\Delta \ 0_+ \\ \text{no} \ 0_{++} \\ +\Delta \ 0_{+++} \end{array}$

Case 1, (E) has set his Wien filter on ‘no shift’ (no): (E) measures a 0: it could be (11), (12), (21), (23), (32), (33). (E) Measures a 1: it could be (13), (22), (31).

Case 2, (E) has set his Wien filter on  $-\Delta$ : (E) measures a 0: it could be (11), (12), (13), (21), (22), (31), (33). (E) Measures a 1: it could be (23), (32).

Case 3, (E) has set his Wien filter on  $+\Delta$ : (E) measures a 0: it could be (11), (13), (22), (23), (31), (32), (33). (E) Measures a 1: it could be (12), (21).

For that reason, even in the best case when (E) measures a ‘1’, he or she has only a 50–50 chance to correctly forward the bit to the receiver. Without information about the applied shifts from the sender, the eavesdropper cannot decode the transmitted sequence. In case there is sufficient electron count rate for various contrast measurements (this important requirement will be discussed below), (E) could manage to capture all signal in an active attack and then coherently split the beam multiple times. This would allow (E) to connect several interferometers that are set on all possible wave-packet shifts ( $-\Delta$ , ‘no’,  $+\Delta$ ). After the public exchange of the sender and receivers shift setting, (E) could decode the message. However, (E) still had to decide which state to forward to the receiver during transmission and will do this wrongly in several cases. For that reason, also in this case, our key distribution protocol would reveal the presence of the interceptor.

Besides capturing all signal, the eavesdropper could in principle split the beam coherently and siphone off unnoticed part of the electrons for interferometric analysis. There are three ways to prevent this scenario. One of them is to use a calibrated source where the count rate of the electrons is known by the sender and receiver beforehand. The second one is that the sender includes in his message the count rate he used during transmission. The third possibility was applied in figure 3 where we choose to keep the counts per fringe pattern low enough that only one party can measure the interference contrast. We accumulated 1000 to 1500 counts for each interferogram, which was just sufficient to determine the contrast without erroneous bits. In combination with the key distribution scheme, (E) would need to siphone enough signal to perform at least three additional contrast measurements, as described above. This is only possible if the accumulated counts per pattern are four times higher than in the case of the transmission of figure 3. Thus, our scheme becomes secure as soon as the time bin for a bit is chosen short enough with respect to the count rate. If the accumulated counts per fringe pattern are slightly above the minimal level to allow a contrast measurement without error, then (E) cannot siphone enough electrons to tap the line without annihilating the transmission. This security argument can even be extended if  $W_s$  or  $W_r$  shift by two or more  $\Delta$ , requiring additional beam splitting by (E) and more counts per fringe pattern. A general theoretical analysis of the security of our scheme is desired and a matter of future investigation. It may combine the noise in the setup, the stability of the source and the detection efficiency with the count rate, signal transfer rate and error bits in the transmission. This would allow determining the security level for various eavesdropping attempts and a comparison to quantum cryptography schemes with photons and classical encryption.

**Comparison to single-photon cryptography**

It is important to point out that our scheme includes a different kind of security compared to established quantum cryptography protocols with photons such as e.g. BB84 [5]. Quantum cryptography leverages the

uncertainty in the measurement of the single-photon quantum state that is protected by the no-cloning theorem [44]. The security of our scheme, on the other hand, depends on decoherence and the quantum nature (symmetry) of a matter wave packet. The message is encoded in the superposition and relies on the wave nature of each electron interfering with itself. However, to reveal the interference contrast, we need to sum over an ensemble of particles. This makes it a multi-particle scheme that is not protected by the no-cloning theorem. Additionally, the BB84 protocol transmits a fundamentally random sequence of '0' and '1'-bits, which is the requirement for a perfectly secure key to encrypt messages. In our case, the sequence is chosen by the sender and influenced by the switching of the receiver. These major differences toward single-photon quantum cryptography lead to a lower security level of our transmission technique.

### Future prospects and technical applications

We provide experimental evidence that a message can be securely encoded in the quantum superposition of electrons in an interferometer. Given the rise of quantum computers that possibly decode classical encryption schemes in the near future, our modulation scheme provides an alternative that is based on different quantum features than established single-photon cryptography methods. Our proof-of-principle experiment has yet a secure distance which is probably too short for direct technical applications. It certainly cannot compete with the established state-of-the-art photon quantum communication schemes. They allow secure intra-country distances accessible with glass fibers [54] or even over long, intercontinental distances via satellite communication [55]. However, the safe signal transmission distance in our scheme could be extended significantly by increasing the beam path separation. Coherent electron beam splitting up to 300  $\mu\text{m}$  have been reported [56]. With the same superposition angle, secure transmission of 3.8 m is feasible with such a separation with state-of-the-art technology. It can be further extended to  $\sim 6$  m by positioning the Wien filter closer to the tip, even between the tip and the biprism [33].

The implementation of the described key distribution scheme in our setup requires such technical modifications. In principle, only the second Wien filter just before the magnifying quadrupole needs to be added with the corresponding control electronics and software for the receiver part. However, due to limited space along our current beam path, adding this component requires prolonging the transmission distance which may only be realized with a larger beam path separation scheme [35].

Also, the data transfer rate has the potential to be improved significantly. We have been conservative with our signal rate, to preserve our source. However, driving our system to the maximum could increase the transmission rate by at least an order of magnitude. Optimizing the whole setup and the electron beam sources [25] could gain another factor 100. We experience a usual variation in the count rate of about 10%. This level of stability depends mainly on the source and can be improved by field emitter applied in electron microscopy and optimized for high stability [57]. Potential applications of our technique are short-range communication in environments, where photons cannot be applied due to an intensive light background on the sensors. It is also conceivable that in a low noise environment such as in space significantly larger beam paths separations and transmission distances are realistic. To improve signal quality and the influence of noise from the environment, it can be considered to include classical postprocessing. This would require to reverse an unwanted contrast loss introduced by dephasing or decoherence, both leading to erroneous bits. Dephasing by e.g. external frequencies [24, 26, 58] or vibrational noise [28] can be reversed by second-order correlation analysis with the tradeoff to require more counts per fringe pattern. Postprocessing is not possible in case of decoherence by e.g. Coulomb interaction [45] or by collisions with background gas molecules [42, 59], thereby the information-carrying contrast cannot be revealed.

The quest for novel quantum techniques for communication is important in various fields of modern science and technology. Here, we demonstrated in a proof-of-principle experiment that it is possible to perform a true quantum modulation on a matter wave for signal transfer in a biprism interferometer. The information is transmitted by a longitudinal wave-packet shift introduced by a Wien filter. We show that decoherence plays an important role in the security aspect and present a matter wave key distribution protocol to prevent an eavesdropping attack. It is also emphasized that the Wien filter has an electron-optical refractive index of one [12] and is able to shift the wave-packets longitudinally without shifting the transverse phase of the fringe pattern. This is a result of the compensating phase shifts from the magnetic and electric Aharonov–Bohm effects [12] for charged particles. For that reason, our scheme presents a unique method for electron waves. It is a separate class of information transfer technique based on matter wave quantum features and indicates a significant improvement in safety compared to classical communication.

## Methods

We apply the Wien filter to shift the wave-packets of the separated beam paths as described in detail in [31, 33]. The Wien filter introduces a longitudinal shift of  $\Delta y = \frac{L\Delta x U_{WF}}{2DU_{tip}}$ , where  $L$  is the length of the Wien filter deflector plates,  $\pm U_{WF}$  the applied voltage,  $D$  is the distance between them and  $U_{tip}$  the electron acceleration voltage [31]. The longitudinal coherence length is the width of the wave-packets and can be calculated with  $l_c = \frac{-2eU_{tip}\lambda}{\pi\Delta E}$ , with  $\lambda$  being the electron de Broglie wavelength at  $U_{tip}$  [31].

The following parameters were applied for the signal transmission in figure 3:  $L = 11.75$  mm,  $\Delta x = (2.9 \pm 0.4)$   $\mu\text{m}$  at a biprism voltage of  $-0.104$  V and a combining quadrupole voltage of  $-15.9$  V,  $D = 8.75$  mm,  $U_{tip} = -1000$  V,  $\lambda = 38.8$  pm,  $\Delta E = (377 \pm 40)$  meV,  $l_c = (66 \pm 7)$  nm. The distances from the tip to the biprism, combining quadrupole (center), Wien filter (center) and magnifying quadrupole (center) have been  $d_{tip-bp} = 83$  mm,  $d_{tip-QP1} = 125$  mm,  $d_{tip-WF} = 237$  mm and  $d_{tip-QPmag} = 275$  mm, respectively. For state 2 (high contrast) and state 1 (low contrast) the Wien filter deflector voltages  $U_{WF\ high} = -15$  V and  $U_{WF\ low} = -45$  V were set. The wavepackets are shifted by  $\Delta y = 58$  nm at each state change. The corresponding currents in the Wien filter coil are set in a way that the beam deflection vanishes and the Wien filter is in the matched state. The whole setup is in an ultrahigh vacuum at a pressure of  $1 \times 10^{-10}$  mbar and shielded by a mu-metal tube.

For every deflector voltage in the Wien curve of figure 2, five pictures with 250.000 particle events each were taken and averaged. Every single measurement lasts only approximately 1 min to avoid long-term drifts. The contrast value data points in figures 2 and 3 were determined by summing up the signal along the fringe direction to form a histogram. The fit function  $I(x) = I_0 \cdot (1 + C \cdot \cos(\frac{2\pi x}{s} + \phi_0)) \cdot \text{sinc}^2(\frac{2\pi x}{s_1} + \phi_1)$  was then applied as described in more detail elsewhere [27, 31]. Here,  $C$  describes the interference contrast and  $s$  the fringe distance. Further fitting parameters are the phases  $\phi_0$ ,  $\phi_1$ , the average intensity  $I_0$  and the width of the interference pattern  $s_1$ .

For the contrast analysis in figure 4(c), the interference was determined as a function of the surface distance. Each contrast point is evaluated by slicing a horizontal rectangular section of the image normal to the fringe orientation with a height of 400 nm. The counts in each slice were summed up to form a histogram that was fitted with the above function. The contrast was normalized to the undisturbed value at distances higher than 20  $\mu\text{m}$  to the semiconducting surface.

## Acknowledgments

This work was supported by the Vector Stiftung through the initiative ‘MINT-Innovationen’. Work at the Molecular Foundry was supported by the Office of Science, Office of Basic Energy Sciences, of the US Department of Energy under Contract No. DE-AC02-05CH11231. We also acknowledge support by the Deutsche Forschungsgemeinschaft through the research Grant STI 615/3-1.

## Data availability statement

All data that support the findings of this study are included within the article.

## References

- [1] Daemen J and Rijmen V 2002 *The Design of Rijndael: AES-The Advanced Encryption Standard* (Berlin: Springer)
- [2] Arute F et al 2019 Quantum supremacy using a programmable superconducting processor *Nature* **574** 505
- [3] Shor P W 1997 Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer *SIAM J. Comput.* **26** 1484–509
- [4] Bennett C H and DiVincenzo D P 2000 Quantum information and computation *Nature* **404** 247–55
- [5] Bennett C H and Brassard G 1984 Quantum cryptography: public key distribution and coin tossing *Proc. of IEEE Int. Conf. on Computers, Systems and Signal Processing* (New York) 175
- [6] Beth T and Leuchs G (ed) 2006 *Quantum Information Processing* (New York: Wiley)
- [7] Jennewein T, Simon C, Weihs G, Weinfurter H and Zeilinger A 2000 Quantum cryptography with entangled photons *Phys. Rev. Lett.* **84** 4729
- [8] Kwiat P G, Mattle K, Weinfurter H, Zeilinger A, Sergienko A V and Shih Y 1995 New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs *Phys. Rev. Lett.* **75** 4337
- [9] Ou Z Y and Mandel L 1988 Violation of Bell’s inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment *Phys. Rev. Lett.* **61** 50
- [10] Bouwmeester D, Pan J-W, Mattle K, Eibl M, Weinfurter H and Zeilinger A 1997 Experimental quantum teleportation *Nature* **390** 575
- [11] Walther P, Resch K J, Rudolph T, Schenck E, Weinfurter H, Vedral V, Aspelmeyer M and Zeilinger A 2005 Experimental one-way quantum computing *Nature* **434** 169

- [12] Hasselbach F 2010 Progress in electron- and ion-interferometry *Rep. Prog. Phys.* **73** 016101
- [13] Hasselbach F and Maier U 1999 Quantum coherence and decoherence *Proc. of ISQM-Tokyo 98* ed Y A Ono and K Fujikawa (Amsterdam: Elsevier)
- [14] Cronin A D, Schmiedmayer J and Pritchard D E 2009 Optics and interferometry with atoms and molecules *Rev. Mod. Phys.* **81** 1051
- [15] Haslinger P, Dörre N, Geyer P, Rodewald J, Nimmrichter S and Arndt M 2013 A universal matter-wave interferometer with optical ionization gratings in the time domain *Nat. Phys.* **9** 144
- [16] Rauch H and Werner S A 2015 *Neutron Interferometry: Lessons in Experimental Quantum Mechanics, Wave-Particle Duality, and Entanglement* vol 12 (Oxford: Oxford University Press)
- [17] Gerlich S et al 2007 A Kapitza–Dirac–Talbot–Lau interferometer for highly polarizable molecules *Nat. Phys.* **3** 711
- [18] Freimund D L and Batelaan H 2002 Bragg scattering of free electrons using the Kapitza–Dirac effect *Phys. Rev. Lett.* **89** 283602
- [19] Berrada T, van Frank S, Bücker R, Schumm T, Schaff J-F and Schmiedmayer J 2013 Integrated Mach–Zehnder interferometer for Bose–Einstein condensates *Nat. Commun.* **4** 3077
- [20] Xu R et al 2015 Three-dimensional coordinates of individual atoms in materials revealed by electron tomography *Nat. Mater.* **14** 1099–103
- [21] Bloch I, Hänsch T W and Esslinger T 1999 Atom laser with a cw output coupler *Phys. Rev. Lett.* **82** 3008
- [22] Yuan Z-S, Bao X-H, Lu C-Y, Zhang J, Peng C-Z and Pan J-W 2010 Entangled photons and quantum communication *Phys. Rep.* **497** 1
- [23] Möllenstedt G and Düker H 1956 Beobachtungen und Messungen an Biprisma-Interferenzen mit Elektronenwellen *Z. Phys.* **145** 377
- [24] Rembold A, Schütz G, Chang W T, Stefanov A, Pooch A, Hwang I S, Günther A and Stibor A 2014 Correction of dephasing oscillations in matter-wave interferometry *Phys. Rev. A* **89** 033635
- [25] Schütz G et al 2014 Biprism electron interferometry with a single atom tip source *Ultramicroscopy* **141** 9
- [26] Günther A, Rembold A, Schütz G and Stibor A 2015 Multi-frequency perturbations in matter-wave interferometry *Phys. Rev. A* **92** 053607
- [27] Pooch A, Seidling M, Layer M, Rembold A and Stibor A 2017 A compact electron matter wave interferometer for sensor technology *Appl. Phys. Lett.* **110** 223108
- [28] Rembold A, Schütz G, Röpke R, Chang W T, Hwang I S, Günther A and Stibor A 2017 Vibrational dephasing in matter-wave interferometers *New J. Phys.* **19** 033009
- [29] Kuo H-S, Hwang I-S, Fu T-Y, Lin Y-C, Chang C-C and Tsong T T 2006 Noble metal/W(111) single-atom tips and their field electron and ion emission characteristics *Japan. J. Appl. Phys.* **45** 8972
- [30] Kuo H-S, Hwang I-S, Fu T-Y, Lu Y-H, Lin C-Y and Tsong T T 2008 Gas field ion source from an Ir/W(111) single-atom tip *Appl. Phys. Lett.* **92** 063106
- [31] Pooch A, Seidling M, Kerker N, Röpke R, Rembold A, Chang W T, Hwang I S and Stibor A 2018 Coherent properties of a tunable low-energy electron-matter-wave source *Phys. Rev. A* **97** 013611
- [32] Jagutzki O, Mergel V, Ullmann-Pfleger K, Spielberger L, Spillmann U, Dörner R and Schmidt-Böcking H 2002 A broad-application microchannel-plate detector system for advanced particle or photon detection tasks: large area imaging, precise multi-hit timing information and high detection rate *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **477** 244
- [33] Nicklaus M and Hasselbach F 1993 Wien filter: a wave-packet-shifting device for restoring longitudinal coherence in charged-matter-wave interferometers *Phys. Rev. A* **48** 152
- [34] Jönsson C 1974 Electron diffraction at multiple slits *Am. J. Phys.* **42** 4
- [35] Schütz G, Rembold A, Pooch A, Prochel H and Stibor A 2015 Effective beam separation schemes for the measurement of the electric Aharonov–Bohm effect in an ion interferometer *Ultramicroscopy* **158** 65
- [36] Wien W 1897 *Verhandl. Deut. Phys. Ges.* **16** 165
- [37] Boersch H, Geiger J and Stickel W 1964 Das Auflösungsvermögen des elektrostatisch-magnetischen Energieanalysators für schnelle Elektronen *Z. Phys.* **180** 415
- [38] Sonntag P, Kiesel H and Hasselbach F 2000 Visibility spectroscopy with electron waves using a Wien filter: higher order corrections *Micron* **31** 451–6
- [39] Sonntag P and Hasselbach F 2005 Decoherence of electron waves due to induced charges moving through a nearby resistive material *Braz. J. Phys.* **35** 385
- [40] Sonntag P and Hasselbach F 2007 Measurement of decoherence of electronwaves and visualization of the quantum-classical transition *Phys. Rev. Lett.* **98** 200402
- [41] Sanz A S and Borondo F 2005 Loss of coherence in double-slit diffraction experiments *Phys. Rev. A* **71** 042103
- [42] Hornberger K, Uttenthaler S, Brezger B, Hackermüller L, Arndt M and Zeilinger A 2003 Collisional decoherence observed in matter-wave interferometry *Phys. Rev. Lett.* **90** 160401
- [43] Hackermüller L, Hornberger K, Brezger B, Zeilinger A and Arndt M 2004 Decoherence of matter waves by thermal emission of radiation *Nature* **427** 711
- [44] Wootters W K and Zurek W H 1982 A single quantum cannot be cloned *Nature* **299** 802
- [45] Kerker N, Röpke R, Steinert L M, Pooch A and Stibor A 2020 Quantum decoherence by Coulomb interaction *New J. Phys.* **22** 063039
- [46] Beierle P J, Zhang L and Batelaan H 2018 Experimental test of decoherence theory using electron matter waves *New J. Phys.* **20** 113030
- [47] Scheel S and Buhmann S Y 2012 *Phys. Rev. A* **85** 030101(R)
- [48] Zurek W H 2003 Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical *Rev. Mod. Phys.* **75** 715
- [49] Anglin J R, Paz J P and Zurek W H 1997 Deconstructing decoherence *Phys. Rev. A* **55** 4041
- [50] Machnikowski P 2006 Theory of which path dephasing in single electron interference due to trace in conductive environment *Phys. Rev. B* **73** 155109
- [51] Howie A 2011 Mechanisms of decoherence in electron microscopy *Ultramicroscopy* **111** 761
- [52] Howie A 2020 Continued skirmishing on the wave-particle frontier *Ultramicroscopy* **203** 52
- [53] Orloff J 2008 Schottky emission *Handbook of Charged Particle Optics* 2nd edn (Boca Raton, FL: CRC Press)
- [54] Stucki D, Walenta N, Vannel F, Thew R T, Gisin N, Zbinden H, Gray S, Towery C R and Ten S 2009 High rate, long-distance quantum key distribution over 250 km of ultra low loss fibres *New J. Phys.* **11** 075003

- [55] Liao S-K *et al* 2017 Long-distance free-space quantum key distribution in daylight towards inter-satellite communication *Nat. Photon.* **11** 509–13
- [56] Schmid H 1985 PhD Thesis University of Tübingen, Germany
- [57] Yeong K S and Thong J T L 2006 Life cycle of a tungsten cold field emitter *J. Appl. Phys.* **99** 104903
- [58] Rembold A, Röpke R, Schütz G, Fortágh J, Stibor A and Günther A 2017 Second-order correlations in single-particle interferometry *New J. Phys.* **19** 103029
- [59] Schütz G, Rembold A, Pooch A, Chang W T and Stibor A 2015 Electron matter wave interferences at high vacuum pressures *Measurement* **68** 201





## PAPER

**Quantum decoherence by Coulomb interaction**

## OPEN ACCESS

## RECEIVED

20 March 2020

## REVISED

22 April 2020

## ACCEPTED FOR PUBLICATION

30 April 2020

## PUBLISHED

22 June 2020

N Kerker<sup>1</sup>, R Röpke<sup>1</sup>, L M Steinert<sup>1</sup>, A Pooch<sup>1</sup> and A Stibor<sup>1,2,3</sup><sup>1</sup> Institute of Physics and LISA<sup>+</sup>, University of Tübingen, Tübingen, Germany<sup>2</sup> Lawrence Berkeley National Lab, Molecular Foundry, Berkeley, United States of America<sup>3</sup> Author to whom any correspondence should be addressed.E-mail: [astibor@lbl.gov](mailto:astibor@lbl.gov)**Keywords:** quantum, decoherence, Coulomb, electron, interferometry, silicon, gold

Original content from  
this work may be used  
under the terms of the  
[Creative Commons  
Attribution 4.0 licence](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Any further distribution  
of this work must  
maintain attribution to  
the author(s) and the  
title of the work, journal  
citation and DOI.

**Abstract**

The performance of modern quantum devices in communication, metrology or microscopy relies on the quantum–classical interaction which is generally described by the theory of decoherence. Despite the high relevance for long coherence times in quantum electronics, decoherence mechanisms mediated by the Coulomb force are not well understood yet and several competing theoretical models exist. Here, we present an experimental study of the Coulomb-induced decoherence of free electrons in a superposition state in a biprism electron interferometer close to a semiconducting and metallic surface. The decoherence was determined through a contrast loss at different beam path separations, surface distances and conductivities. To clarify the current literature discussion, four theoretical models were compared to our data. We could rule out three of them and got good agreement with a theory based on macroscopic quantum electrodynamics. The results will enable the determination and minimization of specific decoherence channels in the design of novel quantum instruments.

**1. Introduction**

A deep understanding of the transition region between a quantum and a classical system is necessary for various fields of physics and technical applications. Decoherence, being the loss of quantum behaviour is described by a variety of theoretical approaches [1–8]. The question of how complex and massive an object can possibly be to still show quantum mechanical behaviour like superposition [9, 10] and how strong the influence of gravitational [11] or electromagnetic [12] interactions with a ‘measuring’ environment is, induced numerous experiments in the last decades [13–15]. At the same time, quantum hybrid systems appeared in several realizations [16], like photons with cavity mirrors [17], ultracold atoms near nanotubes [18], cantilevers [19] or microwave cavities [20], indicating the rise of new devices that work in this transition regime. New ideas in quantum electron microscopy [21, 22] and quantum information science [23] were proposed and identified to be restricted by the decoherence of the electrons in a superposition state. These systems have in common that a quantum object interacts with a classical microscopic solid state device, with promising applications in quantum information science [24], quantum metrology [25] and quantum simulation [26]. To enhance such technologies, it is desired not only to understand the quantum–classical transition, but also to control the interaction of a quantum system with its environment and to keep the quantum state coherent as long as possible. A good approach to study this field is to take a rather simple, well understood quantum system and gradually turn on decoherence by introducing more and more interaction with the classical environment. This can be performed by e.g. the emission of photons out of Rydberg atoms in a microwave cavity [27] or out of helium atoms after interacting with a standing light wave [28]. Also, decoherence studies with neutron matter waves crossing oscillating magnetic fields have been conducted [29, 30]. Matter wave interferometers are in particular suitable for such experiments, where decoherent interactions lead to a gradual leakage of which-path information and a deteriorating fringe contrast. This has been performed for C<sub>70</sub> fullerene molecules, where laser excitation [14] or collisions with gas atoms [13] led to decoherence.

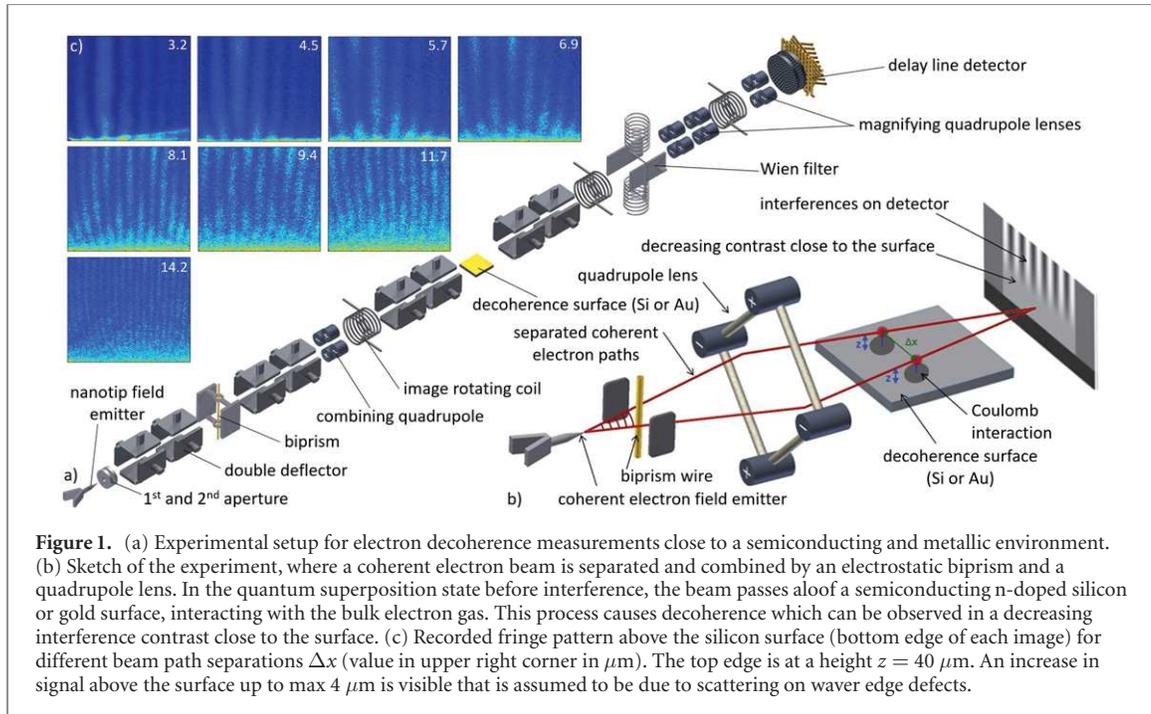
In all these cases the quantum object was neutral. To determine the role of decoherence by Coulomb interaction, an experiment was proposed by Anglin *et al* [5, 31] and performed by Sonnentag and Hasselbach [12, 32] where electrons are interfered in a biprism interferometer. The separated and coherent matter wave paths pass aloof a semiconducting silicon surface and interact with the electron gas inside by the Coulomb force. The decoherence was measured in dependence of the path separation and the electron beam distance to the surface. The theoretical analysis of the results could satisfactorily describe the distribution, but the strength of the decoherence had to be adjusted by fit factors that deviated significantly from the predicted values [5, 7, 12]. In addition to this study, an experiment was recently published by Beierle *et al* [33] where the widths of the electron diffraction peaks in the vicinity of silicon and gold surfaces could be associated with decoherence.

In this article, we present a Coulomb-induced decoherence measurement that is in good agreement to a current decoherence theory by Scheel and Buhmann [6] without the need of a fit factor. Similar to the experiment of Sonnentag and Hasselbach [12], the electrons are prepared in a superposition state close to a semiconducting doped silicon surface in a biprism interferometer. We additionally performed measurements aloof of a gold surface. The theoretical approach of Scheel and Buhmann relies on macroscopic quantum electrodynamics based on linear-response theory [6]. Our data agree well with this theory in a Markov approximation. Additionally, our experiment with silicon is able to rule out the finite temperature approximation of Scheel and Buhmann [6] and three other current decoherence approaches by Anglin *et al* [5], Machnikowski [7] and Howie [8]. For gold, the decoherence is significantly weaker due to the high surface conductivity. Our data is also in favor of the Scheel theory but resolution needs to be improved for a final conclusion. This study provides a better understanding of the complex mechanisms that change a quantum to a classical system. It is relevant for future technological applications in quantum electron microscopy, soft-surface analysis and quantum information science.

## 2. Experimental setup

The decoherence measurements are performed in an electron biprism interferometer with a large beam path separation [34, 35]. Figure 1(a) provides the experimental configuration of all implemented electron optical components and the sketch in figure 1(b) illustrates the principle of the measurement. A significant part of the setup was resumed from the experiment by Sonnentag and Hasselbach [12]. A coherent and monochromatic electron beam is generated with an energy of 1 keV by a single atom nano-tip field emitter [36, 37] close to two extraction apertures [38]. The electron waves are guided and aligned on the optical axis by four double deflectors. The beam is separated by an electrostatic biprism wire [39] on a negative potential and combined again with a quadrupole lens. After superposition, the resulting matter wave interference pattern is amplified by further quadrupole lenses and visualized by a delay line detector [40]. The potential gradient between the deflector electrodes can cause an interference contrast loss due to the limited longitudinal coherence length. This well-known effect is corrected by a Wien filter consisting of two deflector plates and two magnetic coils [41]. The electron beam path separation was varied by adapting the biprism and first quadrupole lens voltages which also changes the superposition angle and the fringe distance. The total beam size was limited by 1 mm apertures and the diameter of the coherent overlapping before magnification was around  $5 \mu\text{m}$  at the beam path separation of  $9.4 \mu\text{m}$  in figure 1(c). To measure the Coulomb-induced decoherence of the superposition state, the separated coherent electron paths are sent aloof and parallel to a 1 cm long semiconducting plate of doped silicon at room temperature that is placed behind the first quadrupole lens. In a separate experiment a gold plate was introduced as the decoherence surface (also at room temperature). Its resistivity ( $2.2 \times 10^{-6} \Omega \text{ cm}$  [42]) is six orders of magnitude smaller than the one of the n-doped silicon ( $1.5 \Omega \text{ cm}$ ), causing a significant difference in the decoherence behaviour. The silicon or gold plate can be moved up and down normal to the surface by a micrometer stage to calibrate the horizontal  $z$  distance between the electrons and the plate by its shadow on the detector after magnification. Three image rotating coils allow to further align the partial beams. The whole setup is in an ultrahigh vacuum at a pressure of  $5 \times 10^{-10}$  mbar and shielded by a mumetal tube.

A correct identification of the beam path distance  $\Delta x$  is crucial for the decoherence analysis. In the study by Sonnentag and Hasselbach [12],  $\Delta x$  was calculated by transfer matrices. It cannot be determined from the fringe distance due to the unknown quadrupole magnification factor in this direction. In this experiment we present a novel method to directly measure  $\Delta x$  with the Wien filter without destroying the wave function and independent of the magnification. As outlined in the literature [38, 41, 46], the Wien filter introduces a longitudinal shift  $\Delta y = \frac{L_{\text{WF}} \Delta x U_{\text{WF}}}{2 D U_{\text{beam}}}$  between the spatially separated wave packets in the interferometer. Thereby,  $L_{\text{WF}}$  is the length of the Wien filter deflector plates,  $\pm U_{\text{WF}}$  the applied voltage,  $D$  is the distance between them and  $e U_{\text{beam}}$  the electron energy [38]. The wave packets consist of the Fourier sum of linearly independent single electron plane waves. They have slightly different energies in accordance

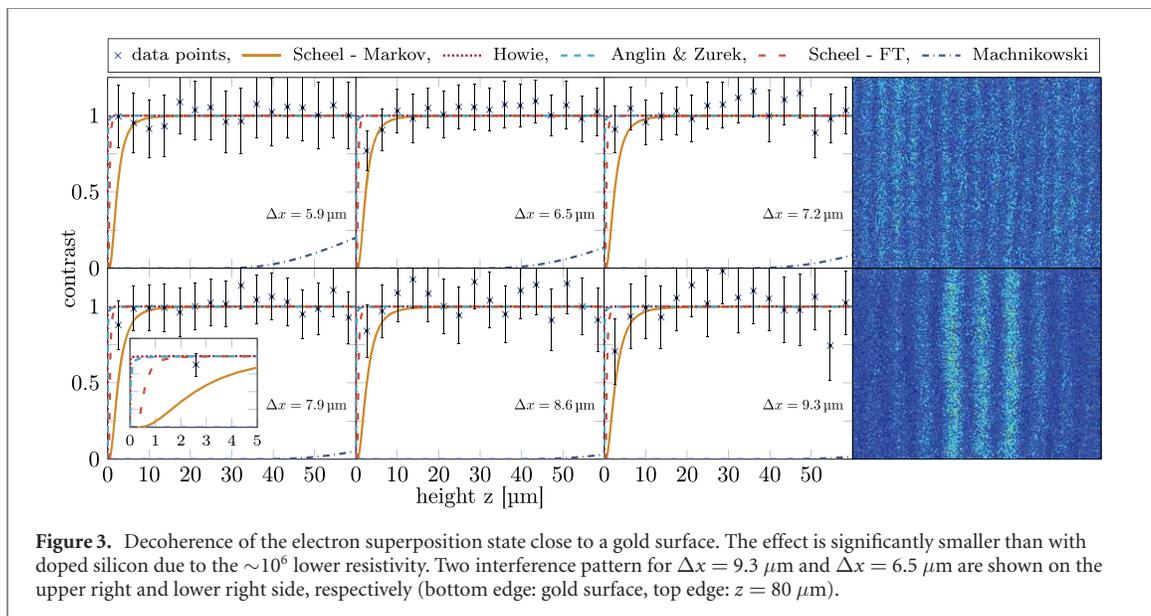
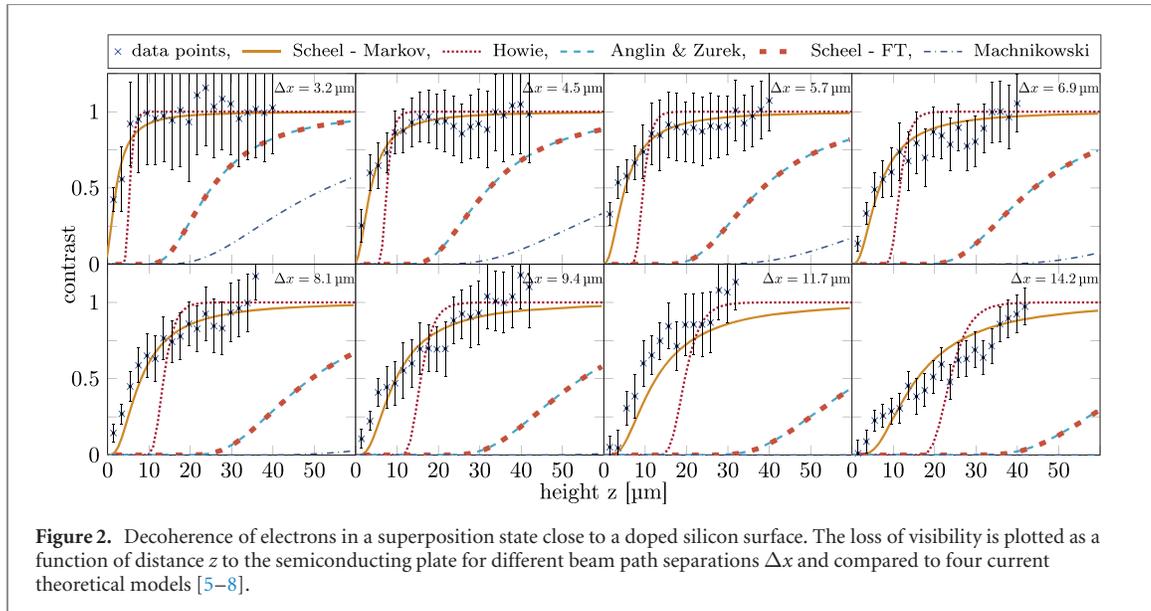


**Figure 1.** (a) Experimental setup for electron decoherence measurements close to a semiconducting and metallic environment. (b) Sketch of the experiment, where a coherent electron beam is separated and combined by an electrostatic biprism and a quadrupole lens. In the quantum superposition state before interference, the beam passes aloof a semiconducting n-doped silicon or gold surface, interacting with the bulk electron gas. This process causes decoherence which can be observed in a decreasing interference contrast close to the surface. (c) Recorded fringe pattern above the silicon surface (bottom edge of each image) for different beam path separations  $\Delta x$  (value in upper right corner in  $\mu\text{m}$ ). The top edge is at a height  $z = 40 \mu\text{m}$ . An increase in signal above the surface up to max  $4 \mu\text{m}$  is visible that is assumed to be due to scattering on waver edge defects.

to the energy distribution of the beam source [41]. Changing  $\Delta y$  reveals a Gaussian distributed dependency of the interference contrast that defines the longitudinal coherence length of our beam:  $l_c = \frac{2 U_{\text{beam}} \lambda}{\pi \Delta E}$ , with  $\lambda$  being the electron de Broglie wavelength [38, 41, 46]. We determined the energy width  $\Delta E$  of our source in a separate measurement [38] where the beam paths were not additionally manipulated by the first quadrupole. The only separation was the biprism diameter which could be assessed in an electron microscope [39]. A value  $\Delta E = (377 \pm 40) \text{ meV}$  was measured [38], leading to  $l_c = (66 \pm 7) \text{ nm}$ . In the current setup, we could extrapolate  $U_{\text{WF}}$  from the width of the Gaussian contrast curve determined when the wave packets are shifted by an amount of  $\Delta y = l_c$  [38]. Inserting this in the equation above reveals a  $\Delta x$  at the center of the Wien filter of  $(2.9 \pm 0.4) \mu\text{m}$ . To check this result, we performed a calculation with transfer matrices for the optical elements in the beam path, leading to  $\Delta x_{\text{tm}} = 3.2 \mu\text{m}$  (as outlined in the methods section). A beam path simulation with Simion (Sci. Instr. Serv., USA) yields  $\Delta x_{\text{Simion}} = 2.6 \mu\text{m}$ . Due to the good agreement, we consider the transfer matrices calculation a valid method and applied it in the data evaluation.

### 3. Results

For the decoherence analysis with the doped silicon surface, eight different beam path separations are chosen between  $\Delta x = 3.2 \mu\text{m}$  and  $14.2 \mu\text{m}$ . The resulting electron fringe distributions above the decoherence surface are illustrated in the figure 1(c). Each image contains  $500 \times 10^3$  electron counts. For contrast analysis, the interference patterns were insignificantly straightened by polynomial fits to decrease distortions. With decreasing beam-surface distance  $z$ , decoherence increases because of a stronger Coulomb interaction between the quantum system (electrons in superposition) and the decohering environment (semiconducting plate). A clear contrast loss is therefore observed for electrons passing close to the surface. As expected, the effect is stronger for larger beam path separations. With increasing  $\Delta x$  the environment obtains more which-path information of the electrons, leading to stronger contrast loss and decoherence. For a better analysis, the interference contrast was determined as a function of the distance  $z$  to the surface. The resulting distributions for the eight images in figure 1(c) are shown in figure 2. Each contrast point is determined by slicing a horizontal rectangular section of the image normal to the fringe orientation with a height of  $\Delta z = 2 \mu\text{m}$ . Then the counts therein were summed up to form a histogram that was fitted with the model function  $I(x) = I_0 \cdot (1 + C \cdot \cos(\frac{2\pi x}{s} + \phi_0)) \cdot \text{sinc}^2(\frac{2\pi x}{s_1} + \phi_1)$  as described elsewhere [38, 43]. Thereby,  $C$  is the interference contrast,  $s$  the fringe distance,  $\phi_0$  and  $\phi_1$  phases,  $I_0$  the average intensity and  $s_1$  the width of the interference pattern. For contrast normalization, the average visibility of the upper  $5 \mu\text{m}$  in the data set was determined in each image separately and set to the contrast value equal 1. The data was compared to four current decoherence models [5–8] also plotted in figure 2 with a good overlap to the theory of Scheel *et al* in the Markov approximation [6]. The exact position of the surface at  $z = 0$  can only be determined within a small uncertainty. For the theoretical analysis it is set  $3 \mu\text{m}$  below the bottom edge



in the images in figure 1(c). We describe the applied equations and different approximations in figures 2 and 3 in detail in the methods section.

We repeated the decoherence measurements with a gold surface of the same size. Due to its significantly lower resistivity, a smaller coherence loss is observed compared to doped silicon. The measured contrast versus surface distance data for different beam path separations are plotted in figure 3 together with two interference pattern for a large and small  $\Delta x$ . Again, we compared our data to the predicted decoherence distributions from four current theoretical models [5–8]. The results can clearly exclude the theory of Machnikowski [7]. The transition slopes between minimal and maximal contrast predicted by Howie [8] (where the cut-off frequency was adapted with the conductivity of gold), Anglin *et al* [5] and Scheel in the finite temperature approximation (Scheel-FT) [6] are confined to a small region below  $\sim 2 \mu\text{m}$ . This can be observed in the magnified section in the inset of figure 3. For some path separations, our data has a better overlap with the theory of Scheel and Buhmann [6] in the Markov approximation similar to the measurements with the doped silicon surface. But the resolution in the sub- $5 \mu\text{m}$  regime needs further improvement for a final conclusion which theory fits best for gold.

## 4. Discussion

Several competing theoretical approaches exist to describe decoherence mediated by the Coulomb force, depending on different assumptions how the quantum state is modified by the environment. We compared four of them [5–8] to our experimental data with low and high conductivity surface materials (doped silicon and gold). Our measured decoherence dependence on  $z$  and  $\Delta x$  for silicon is in accordance to the experimental results from Sonnentag and Hasselbach [12]. In that paper, two theories were fitted to the data that either included a fit factor with a large deviation to the predicted value (model from Anglin *et al* [5, 12]) or applied an approach that was originally only worked out for metals (model from Machnikowski [7]). Our results in figure 2 demonstrate that both theoretical approaches do not describe the decoherence well for silicon. Also a proposed decoherence model by Howie based on aloof scattering with long wavelength plasmons [8, 33] does not reflect our experimental results. However, the data in this study clearly reveals that a theoretical model by Scheel *et al* [6, 44], applying macroscopic quantum electrodynamics based on linear-response theory, describes the Coulomb-induced decoherence well without a fit factor. It is plotted in figure 2 in the Markov approximation [6] after a transformation of coordinates [44]. The finite temperature approximation [6] (‘Scheel-FT’ in figure 2), however, does not fit to our outcome. The distribution overlaps with Anglin’s approach [5]. The finite temperature approximation was also applied to the results in a recent decoherence study by Beierle *et al* [33]. They studied the decoherence of electrons in a quantum superposition state by the broadening of the diffraction peak aloof a doped silicon and a gold surface in a grating interferometer [33, 45]. For the case of doped silicon, they come to the opposite conclusion by ruling out Scheel’s theory while claiming to be in agreement with the data of Sonnentag and Hasselbach [12]. However, they also acknowledged that Scheel’s theory fits their data in case of a gold surface.

Our study can clarify this situation by demonstrating that only a non-appropriate approximation was applied and Scheel’s theory is correct in the less simplified Markov approximation. We solve the decoherence functional numerically for our experimental situation in the Markov approximation that assumes only the long-time limit [6]. It is closer to the full solution of the decoherence functional and significantly more complex to solve than the finite temperature approximation [6] (see Methods section). The high-temperature expansion in the finite temperature approximation requires additionally to fulfill the condition:  $k_B T/\hbar \gg v/z$ , with  $v$  being the velocity of the electrons [6]. It can be discussed if the condition is sufficiently well met in our case and the experiment of Beierle *et al* [33]. This could be a possible reason for the deviation in the predictions from the two approximations. Our results for decoherence close to a gold surface are in accordance to the measurements by Beierle *et al* [33]. As it can be seen in figure 3, the comparison between the different theories is not as clear as with silicon due to a much lower decoherence strength but also in this case, Scheel’s theory [6] provides a good description within the error margins.

Future hybrid quantum devices with charged particles and novel quantum electron microscopic techniques rely on long coherence times of electrons in a superposition state close to a macroscopic conducting environment. The theoretical description of this Coulomb-induced decoherence was still an open question. This study tested the decoherence of aloof electrons in a superposition state close to a semiconducting and metallic surface by contrast loss in an electron biprism interferometer. Our results could exclude three current decoherence models [5, 7, 8] and clearly favor a recent theory by Scheel and Buhmann [6] where decoherence is based on linear-response theory in macroscopic quantum electrodynamics.

## 5. Methods

### 5.1. Applied decoherence models

In the analysis of our decoherence measurements of an electronic superposition state close to a semiconducting and metallic surface, we compared four theoretical models. Here, we point out briefly the equations from the according publications [5–8, 12, 44] that were applied for the theoretical curves in figures 2 and 3 and refer to the original literature for a detailed description of the parameters.

The best agreement to our experimental data was achieved with the model from Scheel and Buhmann [6]. In their article they formulated the general equation for the decoherence functional in equation (11). Since it is not analytically tractable, several levels of approximation were made for simplification. The minimum assumption was the long-time, slow velocity limit. Thereby, the interaction time with the electrons (time the electrons need to pass the plate) is long in regard to other timescales in the system.

The resulting expression for the decoherence functional is the ‘Markov approximation’ (equation (15) in [6]):

$$\Gamma[c] = t \frac{q^2}{\epsilon_0 \hbar} \iint \frac{k_{\parallel} dk_{\parallel} d\varphi}{(2\pi)^2} [1 - \cos(k_{\parallel} \Delta x \sin \varphi)] [2\bar{n}_{\text{th}}(\eta) + 1] \frac{e^{-2k_{\parallel} z \gamma(\varphi)}}{2k_{\parallel} \gamma(\varphi)} \times \text{Im} \left\{ r_p(k_{\parallel}, \eta) - \frac{v^2}{c^2} [r_p(k_{\parallel}, \eta) \cos^2 \varphi - r_s(k_{\parallel}, \eta) \sin^2 \varphi] \right\} \quad (1)$$

with  $\eta = k_{\parallel} v |\cos \varphi|$  and  $\Delta x$  the beam path separation.

The effective contrast is calculated as  $V = e^{-\Gamma[c]}$ . In figures 2 and 3, this equation is solved numerically in its equivalent form after a transformation in Cartesian coordinates as outlined in [44]. The integral was numerically solved by replacing it with sums. Because of the different components of the function, an adaptive mesh was used.

As a next step for easier calculation of the decoherence functional, a high-temperature expansion is performed in connection to the Drude model. In Scheel and Buhmann it is called the ‘finite temperature approximation’ (equation (17) in [6]):

$$\Gamma_{\text{th}}[c] = t \frac{q^2 k_B T r_p^{(0)}}{2\pi \epsilon_0 \hbar^2} \left[ \frac{1}{2z} - \frac{1}{\sqrt{(2z)^2 + (\Delta x)^2}} \right] \quad (2)$$

Another theory that was applied on our data is by Anglin and Zurek [5] as expressed in [12]:

$$\Gamma[c] = \frac{\pi e^2 k_B T \rho L (\Delta x)^2}{4 \hbar^2 v z^3} \quad (3)$$

with  $\rho$  being the resistance of the material and  $L$  the length of the decoherence surface.

The third theory is by Machnikowski (equation (22) in [7]):

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{k_B T}{2\pi^2 \hbar v} \gamma \left( \frac{\Delta x}{z} \right) \mu \left( \frac{m_{\text{eff}} e^2}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_i \hbar^2 k_F} \right) \quad (4)$$

with  $m_{\text{eff}}$  the effective electron mass and  $k_F$  the Fermi wave vector. It includes the ‘geometric’ function

$$\gamma(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} \ln \left( 1 + \frac{\xi^2}{4} \frac{u^2}{1+u^2} \right) du \quad (5)$$

and the ‘material’ function

$$\mu(\zeta) = \frac{\zeta^2}{4} \int_0^1 \frac{1}{u^3} \left( 1 + \frac{\zeta}{4\pi u^2} \left( 1 + \frac{1-u^2}{2u} \ln \left( \frac{1+u}{1-u} \right) \right) \right)^{-2} du \quad (6)$$

The effective contrast is calculated as  $V = e^{-\frac{t}{\lambda}}$ .

The fourth theory is by Howie [8]:

$$P \left( \frac{z}{\alpha \Delta x} \right) = \left[ \frac{e^2 L \omega_m^2}{4\pi^2 \hbar \sigma v^2} \right] \int_{\alpha/\delta x}^{\infty} \frac{\exp(-2zq_x)}{q_x} dq_x \quad (7)$$

$$= \left[ \frac{e^2 L \omega_m^2}{4\pi^2 \hbar \sigma v^2} \right] E_1 \left( \frac{2\alpha z}{\Delta x} \right) \quad (8)$$

where  $\omega_m$  is the cut-off frequency of the dielectric response function,  $\sigma$  the conductivity of the surface and

$$E_1(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} \frac{\exp(-z)}{z} dz. \quad (9)$$

In [8], the parameter  $\alpha$  is set as  $\alpha = 2$ , the fringe visibility is given as  $V = e^{-P}$ .

In the data evaluation of the decoherence above doped silicon in figure 2, all theory curves were shifted by  $-3 \mu\text{m}$  due to a small uncertainty in the determination of the exact position of the surface at  $z = 0$ .

## 5.2. Applied transfer matrices

The beam path separation  $\Delta x$  is a crucial parameter in this experiment for the correct determination of the decoherence. We measured the beam path directly with a novel method using the Wien filter as described in section 2. It is a time consuming process that could not be performed between each decoherence measurement with a different beam path separation due to long term stability of the whole setup. For that reason, the Wien filter method was applied once to verify the correctness of the beam path separation calculated by transfer matrices. The matrices for each major component are defined in the following expressions [47, 48] and applied successively according to the setup in figure 1(a). The beam path starts with an incoming vector  $v_1$  with an initial position  $x_0$  with respect to the optical axis and an initial angle  $\alpha_0$ :

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \tan \alpha_0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

A drift distance  $d$  between different components is described by the matrix:

$$M_{\text{drift}} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

The biprism is in principle a kind of deflector with different deflection angles depending on which side the electron passes:

$$M_{\text{BP}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\tan(\alpha_0 \pm \gamma)}{\tan \alpha_0} \end{pmatrix} \quad (12)$$

with

$$\gamma = \frac{\pi}{2 \cdot \log\left(\frac{r_g}{r_{\text{BP}}}\right)} \cdot \frac{U_{\text{BP}}}{U_{\text{beam}}} \quad (13)$$

where  $r_g$  is the distance between the biprism wire and the grounded plates,  $r_{\text{BP}}$  is the radius of the biprism wire,  $U_{\text{BP}}$  the applied voltage on the wire and  $e U_{\text{beam}}$  the electron energy.

Every quadrupole has a focusing and a defocusing plane. The relevant beam path separation in our setup is along the optical axis such as illustrated in figure 1(b). For beam focusing and fringe pattern magnification in different sections, the first and the fourth quadrupole lenses are in reverse polarity than the second and third quadrupole lenses. The corresponding transfer matrices are:

$$M_{\text{QP focusing}} = \begin{pmatrix} \cosh(kl) & \frac{1}{k} \sinh(kl) \\ k \sinh(kl) & \cosh(kl) \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$M_{\text{QP defocusing}} = \begin{pmatrix} \cos(kl) & \frac{1}{k} \sin(kl) \\ -k \sin(kl) & \cos(kl) \end{pmatrix} \quad (15)$$

with  $k = \sqrt{\frac{U_q}{g_0^2 U_{\text{beam}}}}$ , the applied voltage  $U_q$  on the quadrupole electrodes and the inner diameter  $g_0$  of the quadrupole. The parameter  $l$  is the length of the quadrupole electrodes along the optical axis. All remaining electron optical elements in the setup are not required to calculate the beam path separation.

## Acknowledgments

This work was supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) through the research grant STI 615/3-1. Work at the Molecular Foundry was supported by the Office of Science, Office of Basic Energy Sciences, of the U.S. Department of Energy (DOE) under Contract No. DE-AC02-05CH11231. We also acknowledge support from the Vector Stiftung. We thank Colin Ophus for the fruitful discussions.

## References

- [1] Zeh H D 1970 On the interpretation of measurement in quantum theory *Found. Phys.* **1** 69
- [2] Zurek W H 1981 Pointer basis of quantum apparatus: into what mixture does the wave packet collapse? *Phys. Rev. D* **24** 1516
- [3] Joos E, Zeh H D, Kiefer C, Giulini D J W, Kupsch J and Stamatescu I O 2003 *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory* 2nd edn (Berlin: Springer)
- [4] Zurek W H 2003 Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical *Rev. Mod. Phys.* **75** 715
- [5] Anglin J R, Paz J P and Zurek W H 1997 Deconstructing decoherence *Phys. Rev. A* **55** 4041
- [6] Scheel S and Buhmann S Y 2012 Path decoherence of charged and neutral particles near surfaces *Phys. Rev. A* **85** 030101
- [7] Machnikowski P 2006 Theory of which path dephasing in single electron interference due to trace in conductive environment *Phys. Rev. B* **73** 155109

- [8] Howie A 2011 Mechanisms of decoherence in electron microscopy *Ultramicroscopy* **111** 761
- [9] Gerlich S, Eibenberger S, Tomandl M, Nimmrichter S, Hornberger K, Fagan P J, Tüxen J, Mayor M and Arndt M 2011 Quantum interference of large organic molecules *Nat. Commun.* **2** 263
- [10] Arndt M and Hornberger K 2014 Testing the limits of quantum mechanical superpositions *Nat. Phys.* **10** 271
- [11] Pikovski I, Zych M, Costa F and Brukner C 2015 Universal decoherence due to gravitational time dilation *Nat. Phys.* **11** 668
- [12] Sonntag P and Hasselbach F 2007 Measurement of decoherence of electron waves and visualization of the quantum–classical transition *Phys. Rev. Lett.* **98** 200402
- [13] Hornberger K, Uttenthaler S, Brezger B, Hackermüller L, Arndt M and Zeilinger A 2003 Collisional decoherence observed in matter wave interferometry *Phys. Rev. Lett.* **90** 160401
- [14] Hackermüller L, Hornberger K, Brezger B, Zeilinger A and Arndt M 2004 Decoherence of matter waves by thermal emission of radiation *Nature* **427** 711
- [15] Gerlich S et al 2007 A Kapitza–Dirac–Talbot–Lau interferometer for highly polarizable molecules *Nat. Phys.* **3** 711
- [16] Wallquist M, Hammerer K, Rabl P, Lukin M and Zoller P 2009 Hybrid quantum devices and quantum engineering *Phys. Scr.* **T137** 014001
- [17] Chan J, Alegre T P M, Safavi-Naeini A H, Hill J T, Krause A, Gröblacher S, Aspelmeyer M and Painter O 2011 Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state *Nature* **478** 89
- [18] Gierling M, Schneeweiss P, Visanescu G, Federsel P, Häffner M, Kern D P, Judd T E, Günther A and Fortágh J 2011 Cold-atom scanning probe microscopy *Nat. Nanotechnol.* **6** 446
- [19] Hunger D, Camerer S, Hänsch T W, König D, Kotthaus J P, Reichel J and Treutlein P 2010 Resonant coupling of a Bose–Einstein condensate to a micromechanical oscillator *Phys. Rev. Lett.* **104** 143002
- [20] Rabl P, DeMille D, Doyle J M, Lukin M D, Schoelkopf R J and Zoller P 2006 Hybrid quantum processors: molecular ensembles as quantum memory for solid state circuits *Phys. Rev. Lett.* **97** 033003
- [21] Putnam W P and Yanik M F 2009 Noninvasive electron microscopy with interaction-free quantum measurements *Phys. Rev. A* **80** 040902
- [22] Kruit P et al 2016 Designs for a quantum electron microscope *Ultramicroscopy* **164** 31
- [23] Röpke R, Kerker N and Stibor A 2020 arXiv:2003.08555
- [24] Nielsen M A and Chuang I L 2010 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [25] Giovannetti V, Lloyd S and Maccone L 2006 Quantum metrology *Phys. Rev. Lett.* **96** 010401
- [26] Georgescu I M, Ashhab S and Nori F 2014 Quantum simulation *Rev. Mod. Phys.* **86** 153
- [27] Brune M, Hagley E, Dreyer J, Maître X, Maali A, Wunderlich C, Raimond J M and Haroche S 1996 Observing the progressive decoherence of the ‘meter’ in a quantum measurement *Phys. Rev. Lett.* **77** 4887
- [28] Pfau T, Spälter S, Kurtsiefer C, Ekstrom C R and Mlynek J 1994 Loss of spatial coherence by a single spontaneous emission *Phys. Rev. Lett.* **73** 1223
- [29] Sulyok G, Lemmel H and Rauch H 2012 Neutrons in a time-dependent magnetic field: photon exchange and decoherence modeling *Phys. Rev. A* **85** 033624
- [30] Sulyok G, Hasegawa Y, Klepp J, Lemmel H and Rauch H 2010 Noise-induced dephasing in neutron interferometry *Phys. Rev. A* **81** 053609
- [31] Anglin J R and Zurek W H 1996 *Dark Matter in Cosmology, Quantum Measurements, Experimental Gravitation* ed R Ansari, Y Giraud-Héraud and J Tràn Thanh Vân (Gif-sur-Yvette: Editions Frontieres) p 263
- [32] Sonntag P and Hasselbach F 2005 Decoherence of electron waves due to induced charges moving through a nearby resistive material *Braz. J. Phys.* **35** 385
- [33] Beierle P J, Zhang L and Batelaan H 2018 Experimental test of decoherence theory using electron matterwaves *New J. Phys.* **20** 113030
- [34] Möllenstedt G and Düker H 1956 Beobachtungen und Messungen an Biprisma-Interferenzen mit Elektronenwellen *Z. Phys. A* **145** 377
- [35] Hasselbach F 1988 A ruggedized miniature UHV electron biprism interferometer for new fundamental experiments and applications *Z. Phys. B* **71** 443
- [36] Kuo H S, Hwang I S, Fu T Y, Lin Y C, Chang C C and Tsong T T 2006 Noble metal/W(111) single-atom tips and their field electron and ion emission characteristics *Japan. J. Appl. Phys.* **45** 8972
- [37] Kuo H S, Hwang I S, Fu T Y, Lu Y H, Lin C Y and Tsong T T 2008 Gas field ion source from an Ir/W(111) single-atom tip *Appl. Phys. Lett.* **92** 063106
- [38] Pooch A, Seidling M, Kerker N, Röpke R, Rembold A, Chang W T, Hwang I S and Stibor A 2018 Coherent properties of a tunable low-energy electron-matter-wave source *Phys. Rev. A* **97** 013611
- [39] Schütz G, Rembold A, Pooch A, Meier S, Schneeweiss P, Rauschenbeutel A, Günther A, Chang W T, Hwang I S and Stibor A 2014 Biprism electron interferometry with a single atom tip source *Ultramicroscopy* **141** 9
- [40] Jagutzki O, Mergel V, Ullmann-Pfleger K, Spielberger L, Spillmann U, Dörner R and Schmidt-Böcking H 2002 A broad-application microchannel-plate detector system for advanced particle or photon detection tasks: large area imaging, precise multi-hit timing information and high detection rate *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **477** 244
- [41] Nicklaus M and Hasselbach F 1993 Wien filter: A wave-packet-shifting device for restoring longitudinal coherence in charged-matter-wave interferometers *Phys. Rev. A* **48** 152
- [42] Kittel C 1996 *Introduction to Solid State Physics* 7th edn (Toronto: Wiley)
- [43] Pooch A, Seidling M, Layer M, Rembold A and Stibor A 2017 A compact electron matterwave interferometer for sensor technology *Appl. Phys. Lett.* **110** 223108
- [44] Karstens K 2014 Pfaddekohärenz von Elektronen und Ionen in der Nähe dielektrischer Oberflächen *Master’s Thesis* University of Rostock, Germany
- [45] Chen Z, Beierle P and Batelaan H 2018 Spatial correlation in matter-wave interference as a measure of decoherence, dephasing, and entropy *Phys. Rev. A* **97** 043608
- [46] Hasselbach F 2010 Progress in electron- and ion-interferometry *Rep. Prog. Phys.* **73** 016101
- [47] Wollnik H 1987 *Optics of Charged Particles* (Orlando: Academic)
- [48] Maier U 1997 Ein Biprisma-Interferometer für Ionen *PhD Thesis* University of Tübingen, Germany

**PAPER****Vibrational dephasing in matter-wave interferometers**A Rembold<sup>1</sup>, G Schütz<sup>1</sup>, R Röpke<sup>1</sup>, W T Chang<sup>2</sup>, I S Hwang<sup>2</sup>, A Günther<sup>3</sup> and A Stibor<sup>1,4</sup><sup>1</sup> Institute of Physics and Center for Collective Quantum Phenomena in LISA<sup>+</sup>, University of Tübingen, Auf der Morgenstelle 15, D-72076 Tübingen, Germany<sup>2</sup> Institute of Physics, Academia Sinica, Nankang, Taipei 11529, Taiwan, Republic of China<sup>3</sup> Institute of Physics and Center for Collective Quantum Phenomena in LISA<sup>+</sup>, University of Tübingen, Auf der Morgenstelle 14, D-72076 Tübingen, Germany<sup>4</sup> Author to whom any correspondence should be addressed.E-mail: [a.guenther@uni-tuebingen.de](mailto:a.guenther@uni-tuebingen.de) and [alexander.stibor@uni-tuebingen.de](mailto:alexander.stibor@uni-tuebingen.de)**Keywords:** matter-wave interferometry, dephasing, vibration, correlation analysis, sensor technology, spectrum analysis**OPEN ACCESS****RECEIVED**

17 August 2016

**REVISED**

27 January 2017

**ACCEPTED FOR PUBLICATION**

15 February 2017

**PUBLISHED**

9 March 2017

Original content from this work may be used under the terms of the [Creative Commons Attribution 3.0 licence](#).

Any further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the title of the work, journal citation and DOI.

**Abstract**

Matter-wave interferometry is a highly sensitive tool to measure small perturbations in a quantum system. This property allows the creation of precision sensors for dephasing mechanisms such as mechanical vibrations. They are a challenge for phase measurements under perturbing conditions that cannot be perfectly decoupled from the interferometer, e.g. for mobile interferometric devices or vibrations with a broad frequency range. Here, we demonstrate a method based on second-order correlation theory in combination with Fourier analysis, to use an electron interferometer as a sensor that precisely characterizes the mechanical vibration spectrum of the interferometer. Using the high spatial and temporal single-particle resolution of a delay line detector, the data allows to reveal the original contrast and spatial periodicity of the interference pattern from ‘washed-out’ matter-wave interferograms that have been vibrationally disturbed in the frequency region between 100 and 1000 Hz. Other than with electromagnetic dephasing, due to excitations of higher harmonics and additional frequencies induced from the environment, the parts in the setup oscillate with frequencies that can be different to the applied ones. The developed numerical search algorithm is capable to determine those unknown oscillations and corresponding amplitudes. The technique can identify vibrational dephasing and decrease damping and shielding requirements in electron, ion, neutron, atom and molecule interferometers that generate a spatial fringe pattern on the detector plane.

**1. Introduction**

The high phase sensitivity of interferometric sensors is the basis for their broad implementation in technical [1] as well as in fundamental applications [2, 3]. Recent developments in matter-wave interferometry indicate the wide applicability in various fields of quantum physics. Such interferometers are used for interferometry with large organic molecules [4], to test the limits of quantum mechanical superpositions [5], for interference on optical ionization gratings in the time domain [6], for the measurement of inertial forces [7, 8], to determine gravitational acceleration [9] or with coherent particles prepared as self-interfering clocks [10, 11].

Interferometers are also highly sensitive towards mechanical vibrations [12]. Such perturbations dephase the matter-wave and decrease the interference contrast. This is in particular critical for precision experiments in a perturbing environment. Vibrational dephasing has been analyzed and decreased in several related fields of research e.g. for a continuous beam of thermal atoms in a Mach–Zehnder interferometer [13]. In precision interferometric measurements with ultracold atoms, such as for gravity [14] or inertial effects [15], the vibrations induce an arbitrary phase shift for each interfering particle pulse. Usually, the atoms have a large time of flight in the setup and therefore an elaborated active and passive vibration damping is required [16]. The vibrational phase shifts can be compensated e.g. with the signal of a low noise seismometer attached to the beam mirror [17] or by simultaneous operation of a pair of conjugate atom interferometers [18, 19]. Vibrational noise is also one of the main challenges to achieve a higher accuracy in measurements concerning the equivalence principle [20, 21] since

it is impossible to distinguish between the gravitational acceleration and a perturbing movement of the setup. For precise tests of the weak equivalence principle, the differential phase between dual-species atom interferometers can be extracted using a mechanical accelerometer to measure the vibration-induced phase and to reconstruct the interference contrast [22]. Dephasing noise reduction has also applications to increase current frequency standards for atomic clocks. By a phase lock of a classical oscillator to an atomic superposition state, based on repeated coherence-preserving measurements and phase corrections, an atomic clock can be operated beyond the limit set by the local oscillator noise [23]. Furthermore, the laser noise in the stability between different optical clocks can be decreased, allowing probe times longer than the coherence of the laser in the time domain [24].

It is also important to identify dephasing in experiments to study the theory of decoherence [25, 26]. Thereby, the gradual loss of interference contrast due to entanglement of the quantum superposition state of the matter-wave with the environment is measured [27–29] and needs to be distinguished from the contrast loss originating from dephasing. Such mechanisms also significantly disturb sensitive phase measurements, as necessary in Aharonov–Bohm physics [30–33].

Recently, we demonstrated in theory and experiment a method to reestablish an electron interference pattern disturbed by known single [34] and multifrequency [35] electromagnetic perturbations using second-order correlation analysis [36]. Thereby, the technique is based on the high spatial and temporal resolution of a delay line detector [37] for single-particle events. In this article, we demonstrate that this method can be applied on vibrational dephasing and be extended to perform spectroscopy of unknown dephasing perturbation frequencies from a ‘washed-out’ interference pattern. We present a precise characterization of the mechanical resonance spectrum of our electron interferometer after applying vibrational dephasing perturbations. In contrast to previous measurements with electromagnetic disturbances, the actual perturbation frequencies can vary from the applied ones due to possible excitations of higher harmonics in the setup and additional perturbation frequencies originating from the environment. Therefore, a numerical search algorithm has been developed to identify the unknown perturbation frequencies and corresponding amplitudes. As for electromagnetic oscillations, it is again possible to fully correct the dephasing by our correlation method, reestablishing interferograms with a high contrast. Furthermore, the influence of temporal binning of the measurement data is analyzed in detail.

The mechanical dephasing perturbations were artificially applied in a biprism electron interferometer by a speaker and piezo element in a frequency range between 100 and 1000 Hz. This kind of frequencies occur in typical lab situations when acoustic noise, vibrations from the building, the cooling system or the vacuum pumps decrease the interference contrast and therefore ‘wash-out’ the matter-wave interferogram. Because of the complexity of the system with several mechanical resonances, the contributing perturbation frequencies are not known *a priori*. Therefore, our numerical search algorithm was developed, combining the second-order correlation theory with a Fourier analysis. According to the Wiener–Khintchine theorem [38, 39], the Fourier transform of the correlation function equals the power spectrum of the perturbed measurement signal. This is used in our method to identify the perturbation frequencies and amplitudes that have contributed to the dephasing of the interference pattern. With these values it is possible to reconstruct the original undisturbed pattern. The contrast of the unperturbed interference pattern could be recovered in the whole frequency range. Our technique allows to reveal the matter-wave nature of particles under conditions in which usual spatial integration of an interference pattern would be inapplicable.

The method has potential applications to restore the contrast for interferometers in perturbing environments that cannot be satisfactorily decoupled by damping or shielding in a broad frequency range. In case, the time that the particles need to cross the interferometer is significantly smaller than the cycle duration of the perturbation, our technique can reveal the spectrum of vibrational and electromagnetic frequencies and amplitudes in all interferometers that generate a spatial fringe pattern on a detector with a high spatial and temporal single-particle resolution. Such detectors exist for electrons [37], ions [37], neutrons [40], atoms [41] and molecules [42]. The technique is therefore also a helpful tool to design optimal active and passive damping structures for a specific setup.

## 2. Theory

To calculate the two-dimensional second-order correlation function  $g^{(2)}(u, \tau)$ , we start with the probability distribution  $f(y, t)$  of the particle impacts at the detector

$$f(y, t) = f_0(1 + K_0 \cos(ky + \varphi(t))), \quad (1)$$

where  $K_0$  is the unperturbed contrast,  $k = 2\pi/\lambda$  the wave number of the unperturbed interference pattern, with  $\lambda$  the spatial periodicity, and the normalization factor  $f_0$ . The interference pattern is perturbed by the time-dependent phase shift  $\varphi(t)$ , which consists of a superposition of  $N$  frequencies  $\omega_i$ :

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^N \varphi_j \cos(\omega_j t + \phi_j). \quad (2)$$

Here  $\varphi_j$  and  $\phi_j$  denote the peak phase deviation and phase of the perturbation frequency  $\omega_j$  respectively. This phase shift leads to a washout of the integrated interference pattern at the detector [34, 35], yielding

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(y, t) dt &= f_0 + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f_0 K_0}{2T} \left( e^{iky} \int_0^T e^{i\varphi_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)} dt + \text{c.c.} \right) \\ &= f_0 (1 + K_0 J_0(\varphi_1) \cos(ky)) \end{aligned} \quad (3)$$

for  $N = 1$ . Here,  $e^{\pm i\varphi_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)} = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} J_{n_1}(\varphi_1) e^{in_1(\omega_1 t + \phi_1 \pm \frac{\pi}{2})}$  was used. The limit of the time integral is equal to one only for  $n_1 = 0$  and zero otherwise. The contrast in the ‘washed-out’ interference pattern is thus reduced by a factor of  $J_0(\varphi_1) \approx 1 - \varphi_1^2/4$  for small peak phase deviations  $\varphi_1 < 1$ .

According to [34, 35] the second-order correlation function is calculated and the explicit correlation function for  $N$  perturbation frequencies  $\omega_j$  becomes

$$g^{(2)}(u, \tau) = 1 + \frac{1}{2} K_0^2 \sum_{\substack{\{n_j, m_j\} \in \mathbb{Z} \\ j=1 \dots N}} A_{\{n_j, m_j\}}(\tau, \Phi_{\{n_j, m_j\}}) \cos(ku + \tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}), \quad (4)$$

with

$$A_{\{n_j, m_j\}}(\tau, \Phi_{\{n_j, m_j\}}) = \tilde{B}_{\{n_j, m_j\}}(\varphi_j) \cdot \cos\left(\sum_{j=1}^N m_j \omega_j \tau + \Phi_{\{n_j, m_j\}}\right). \quad (5)$$

The sum in equation (4) has to be taken over all integer multiplets  $\{n_j, m_j\} \in \mathbb{Z}$ ,  $j = 1 \dots N$ , for which the following constraint is fulfilled [35]

$$\sum_{j=1}^N (n_j + m_j) \omega_j = 0. \quad (6)$$

For a finite acquisition time  $T$ , the constraint in equation (6) has to be modified to  $|\sum_{j=1}^N (n_j + m_j) \omega_j| < 2\pi/T$ , as  $1/T$  defines the minimal resolvable frequency. In principle an infinite number of integer multiplets fulfill this constraint, but the contribution to the sum is suppressed due to the strong decay of the Bessel functions of first kind  $J_n$  in

$$\tilde{B}_{\{n_j, m_j\}}(\varphi_j) := \prod_{j=1}^N J_{n_j}(\varphi_j) J_{m_j}(\varphi_j). \quad (7)$$

The spatial correlation phase  $\tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}$  and temporal phase  $\Phi_{\{n_j, m_j\}}$  in equations (4) and (5) are given by

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}} &:= \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^N (m_j - n_j), \\ \Phi_{\{n_j, m_j\}} &:= \sum_{j=1}^N \phi_j (m_j + n_j). \end{aligned} \quad (8)$$

If the constraint in equation (6) is satisfied only for  $n_j = -m_j$  ( $j = 1 \dots N$ ), the temporal phase  $\Phi_{\{-m_j, m_j\}}$  in equation (8) becomes zero and  $\tilde{\varphi}_{\{-m_j, m_j\}} = \pi \sum_{j=1}^N m_j$ . Together with  $J_{-m_j}(\varphi_j) = (-1)^{m_j} J_{m_j}(\varphi_j)$  equation (4) then simplifies, yielding the approximate correlation function [35]

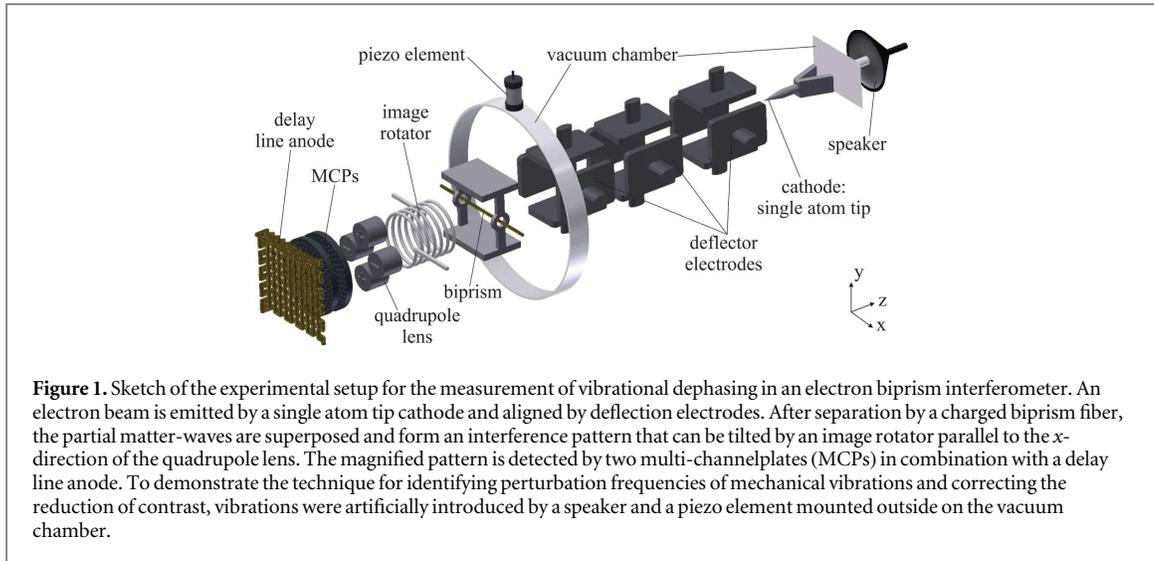
$$g^{(2)}(u, \tau) = 1 + A(\tau) \cos(ku), \quad (9)$$

with

$$A(\tau) = \frac{1}{2} K_0^2 \prod_{j=1}^N \sum_{m_j=-\infty}^{\infty} J_{m_j}(\varphi_j)^2 \cos(m_j \omega_j \tau). \quad (10)$$

More details to the differentiation and applicability of the explicit and approximate correlation theory can be found in [35].

The correlation functions in equations (4) and (9) show a periodic modulation in the spatial distance  $u$ , with the same periodicity  $\lambda$  as in the unperturbed interference pattern. The amplitudes  $A_{\{n_j, m_j\}}(\tau, \Phi_{\{n_j, m_j\}})$  and  $A(\tau)$  of this modulation result from the specific perturbation spectrum. The maximum of  $0.5K_0^2$  is achieved at  $\tau = 0$ , where only the addends with  $n_j = -m_j$  contribute to the correlation function and therefore equation (4) is equal to equation (9), resulting in [34, 35]



$$g^{(2)}(u, 0) = 1 + \frac{1}{2}K_0^2 \cos(ku), \quad (11)$$

which is appropriate to obtain the contrast of the unperturbed interference pattern  $K_0$  and the spatial periodicity  $\lambda = 2\pi/k$ . Therefore, it is possible to proof matter-wave interference, although the periodic pattern would be ‘washed-out’ after integration of the signal.

The function  $A_{\{n_j, m_j\}}(\tau, \Phi_{\{n_j, m_j\}})$  in equation (5) contains a superposition of harmonics, intermodulation terms (sums and differences) of the perturbation frequencies at discrete values of  $\sum_{j=1}^N m_j \omega_j$ , with the coefficient  $m_j \in \mathbb{Z}$  resulting from the constraint in equation (6). Their amplitudes are given by the peak phase deviations  $\varphi_j$  via the product of the Bessel functions in equation (7). The highest contributing frequency component appears at roughly  $\sum_{j=1}^N m_{j, \max} \omega_j$ , with  $m_{j, \max} \approx \varphi_j$ . For higher orders  $m_j > \varphi_j$ , the Bessel function decays strongly and the frequency component disappears. To get the positions of the frequencies and the corresponding amplitudes, the amplitude spectrum  $|\mathcal{F}(g^{(2)}(u, \tau))(u, \omega)|$  of equation (4) for the positive frequency region is calculated to

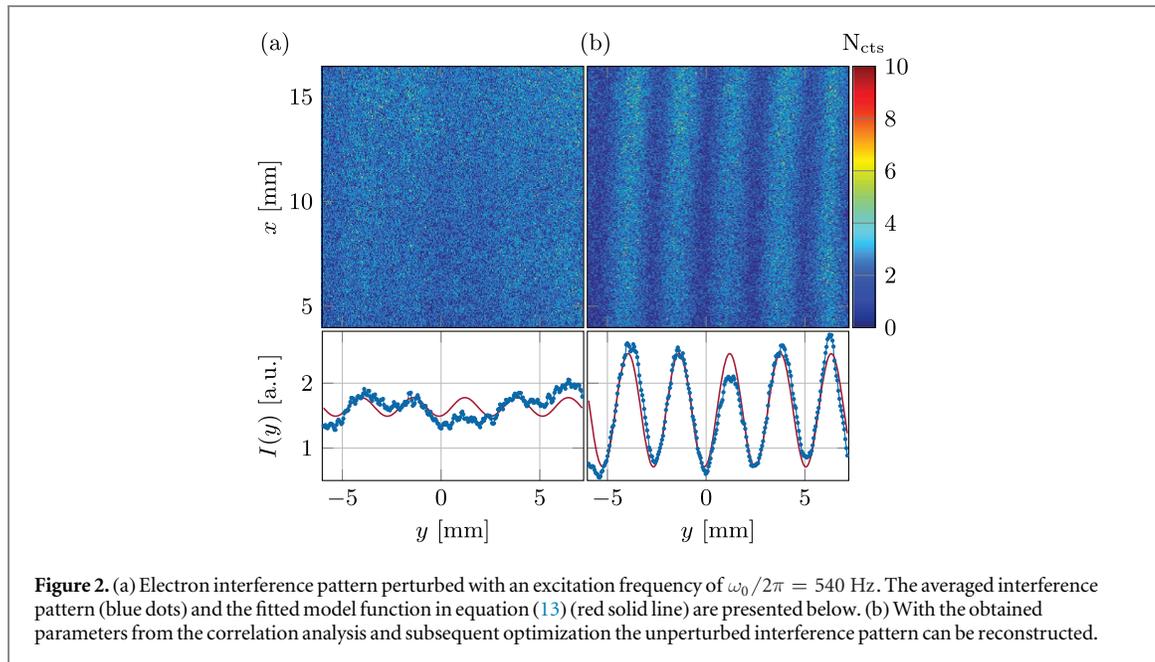
$$\frac{1}{2\pi} |\mathcal{F}(g^{(2)}(u, \tau))(u, \omega)|^2 = \delta(\omega)^2 + 2 \cdot \left[ \frac{1}{2}K_0^2 \sum_{\substack{\{n_j, m_j\} \in \mathbb{Z} \\ j=1 \dots N}} \tilde{B}_{\{n_j, m_j\}}(\varphi_j) \cdot \delta(\omega - \omega_{\{m_j\}}) \cdot \cos\left(\Phi_{\{n_j, m_j\}} + \frac{\pi}{4}\right) \cos(ku + \tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}) \right]^2, \quad (12)$$

with the Dirac delta function  $\delta(\omega)$  and the frequency components  $\omega_{\{m_j\}} := \sum_{j=1}^N m_j \omega_j$ .

The amplitude spectrum of the correlation function is used to identify the perturbation frequencies  $\omega_j$ , peak phase deviations  $\varphi_j$  and phases  $\phi_j$  of the applied perturbation.

### 3. Experiment

We demonstrate the identification of vibrational dephasing in an electron biprism interferometer [43]. The experimental setup is illustrated in figure 1 and described elsewhere [44–47]. A coherent electron beam is field emitted by a single atom tip source [48, 49]. The beam is adjusted by electrostatic deflection electrodes towards a 400 nm-thick biprism fiber that is coated with gold-palladium [44]. It is positioned between two grounded electrodes and acts as a coherent beam splitter for the electron matter-wave [43]. By the application of a positive voltage the two separated beam paths get deflected towards each other creating a matter-wave interference pattern with a period of a few hundred nanometers. The quadrupole lens expands the pattern by a factor of several thousand which is then projected on a delay line detector. Using the image rotator the pattern is aligned parallel to the  $x$ -direction. The detector amplifies the single electron events by two multi-channelplates and detects them with high spatial and temporal resolution [37]. The individual components are mounted on two ceramic rods to prevent temperature drifts and provide electrical insulation. The whole system is installed within



an ultrahigh vacuum chamber at a pressure of  $4.5 \times 10^{-10}$  mbar. To avoid perturbations it is mounted on an air-damped optical table and shielded against electromagnetic radiation.

For the demonstration of dephasing identification and frequency analysis, the electron interferences are artificially disturbed by mechanical vibrations from a speaker in the frequency range between 100 and 320 Hz and a piezo element in the range between 330 and 1000 Hz. Both are mounted outside on the vacuum-chamber. The speaker was attached behind the cathode generating vibrations along the  $z$ -direction (see figure 1), with a direct connection to the vacuum chamber. The piezo element mounted on the vacuum chamber produced vibrations in the  $y$ -direction. Both are controlled by a frequency generator with a resolution of  $1 \mu\text{Hz}$  and an accuracy of  $\pm 10$  ppm on the set frequency value.

Only a single excitation frequency is applied at once. At each frequency an interference pattern with  $(1.95 \pm 0.02) \times 10^5$  electrons (at a count rate of  $(2.0 \pm 0.5)$  kHz for the speaker measurement and  $(11 \pm 2)$  kHz for the piezo measurement) is accumulated and the temporal and spatial information for each particle is recorded. Stepwise, the frequency is increased and a new interference pattern is acquired. This way, the complete spectral response of the interferometer was measured. The electron energy for each measurement was 1.45 keV which results in a velocity of  $2.26 \times 10^7$  m s $^{-1}$ . The flight time of the electrons from the tip to the delay line detector amounts 26 ns.

#### 4. Data analysis

We will demonstrate exemplarily our method to analyze an electron interference pattern perturbed by a mechanical vibration with the excitation frequency of  $\omega_0/2\pi = 540$  Hz, which is introduced by a piezo element.

For each electron that reaches the detector the spatial positions  $(x_i, y_i)$  and the arrival time  $t_i$  is recorded. The histogram for the integrated signal is shown in figure 2(a). To determine the contrast of the perturbed interference pattern  $K_{\text{pert}}$  and spatial periodicity  $\lambda_{\text{pert}}$ , the histogram is averaged along the  $x$ -direction and fitted with a model function

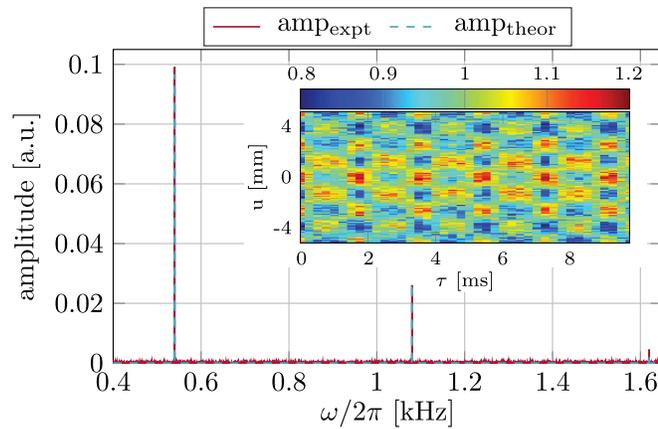
$$I(y) = I_0(1 + K \cos(ky)), \quad (13)$$

with the mean intensity  $I_0$ , contrast  $K$  and wave number  $k = 2\pi/\lambda$ . The result is plotted below the histogram in figure 2(a), yielding a contrast  $K_{\text{pert}} = (8.8 \pm 1.6)\%$  and a spatial periodicity  $\lambda_{\text{pert}} = (2.62 \pm 0.06)$  mm. Here, the errors indicate the 95% confidence interval of the fit.

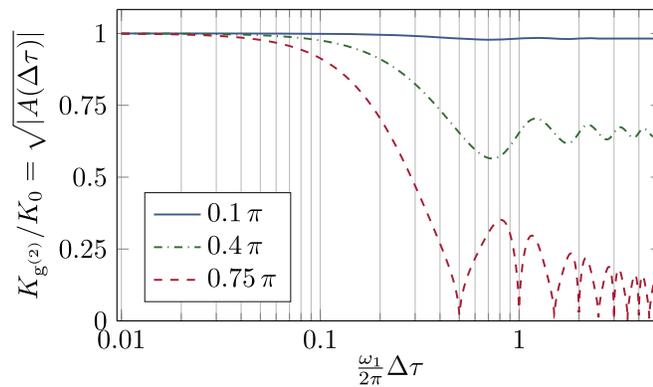
To extract the two-dimensional correlation function  $g^{(2)}(u, \tau)$ , a histogram  $N_{u,\tau}$  of all particle pair distances  $(y_i - y_j)$  and time differences  $(t_i - t_j)$  is generated and properly normalized [34]

$$g^{(2)}(u, \tau) = \frac{TY}{N^2 \Delta \tau \Delta u} \frac{N_{u,\tau}}{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \left(1 - \frac{|u|}{Y}\right)}. \quad (14)$$

Here,  $T$  and  $Y$  describe the acquisition time and spatial length and  $\Delta \tau$ ,  $\Delta u$  the histogram bin size. The factor  $[(1 - \tau/T)(1 - |u|/Y)]^{-1}$  corrects  $N_{u,\tau}$  for the finite acquisition time and spatial length. The correlation function is normalized such that  $\langle g^{(2)}(u, \tau) \rangle = 1$ .



**Figure 3.** Amplitude spectrum of the  $\omega_0/2\pi = 540$  Hz measurement (solid red line), as calculated from the correlation function (see inset) via a discrete Fourier transformation at  $u = N_u \lambda_g^{(2)}/2$ . After identifying the fundamental perturbation frequency of  $\omega_1/2\pi = (540.0 \pm 0.05)$  Hz equation (12) is fitted to the spectrum (dashed blue line) and the peak phase deviation  $\varphi_1 = (0.5725 \pm 0.0015) \pi$  is obtained.



**Figure 4.** Contrast reduction due to temporal binning for three different peak phase deviations  $0.1 \pi$ ,  $0.4 \pi$  and  $0.75 \pi$  (blue solid line, green chain line and red dashed line). The curves are calculated according to equation (15).

The resulting correlation function for  $\Delta u = 90 \mu\text{m}$  and  $\Delta \tau = 50 \mu\text{s}$  is shown in the inset of figure 3. The spatial periodicity of the unperturbed interference pattern can be seen in  $u$ -direction. The periodicity in  $\tau$ -direction is  $2\pi/\omega_1 = 1.9$  ms. The contrast of the unperturbed interference pattern is extracted at  $\tau = 0$  by fitting equation (11) to the data. The results are  $K_g^{(2)} = (58.5 \pm 3.2)\%$  and  $\lambda_g^{(2)} = (2.60 \pm 0.02)$  mm. The extracted contrast, however, depends on the temporal binning  $\Delta \tau$  of the correlation function. Following equation (9), the bin averaged correlation function at  $\tau = 0$  and  $N = 1$  becomes

$$\frac{1}{\Delta \tau} \int_0^{\Delta \tau} g^{(2)}(u, \tau) d\tau = 1 + \frac{1}{2} K_0^2 \cdot A(\Delta \tau) \cos(ku), \quad (15)$$

with

$$A(\Delta \tau) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} J_{m_1}(\varphi_1)^2 \cdot \frac{\sin(m_1 \omega_1 \Delta \tau)}{m_1 \omega_1 \Delta \tau}.$$

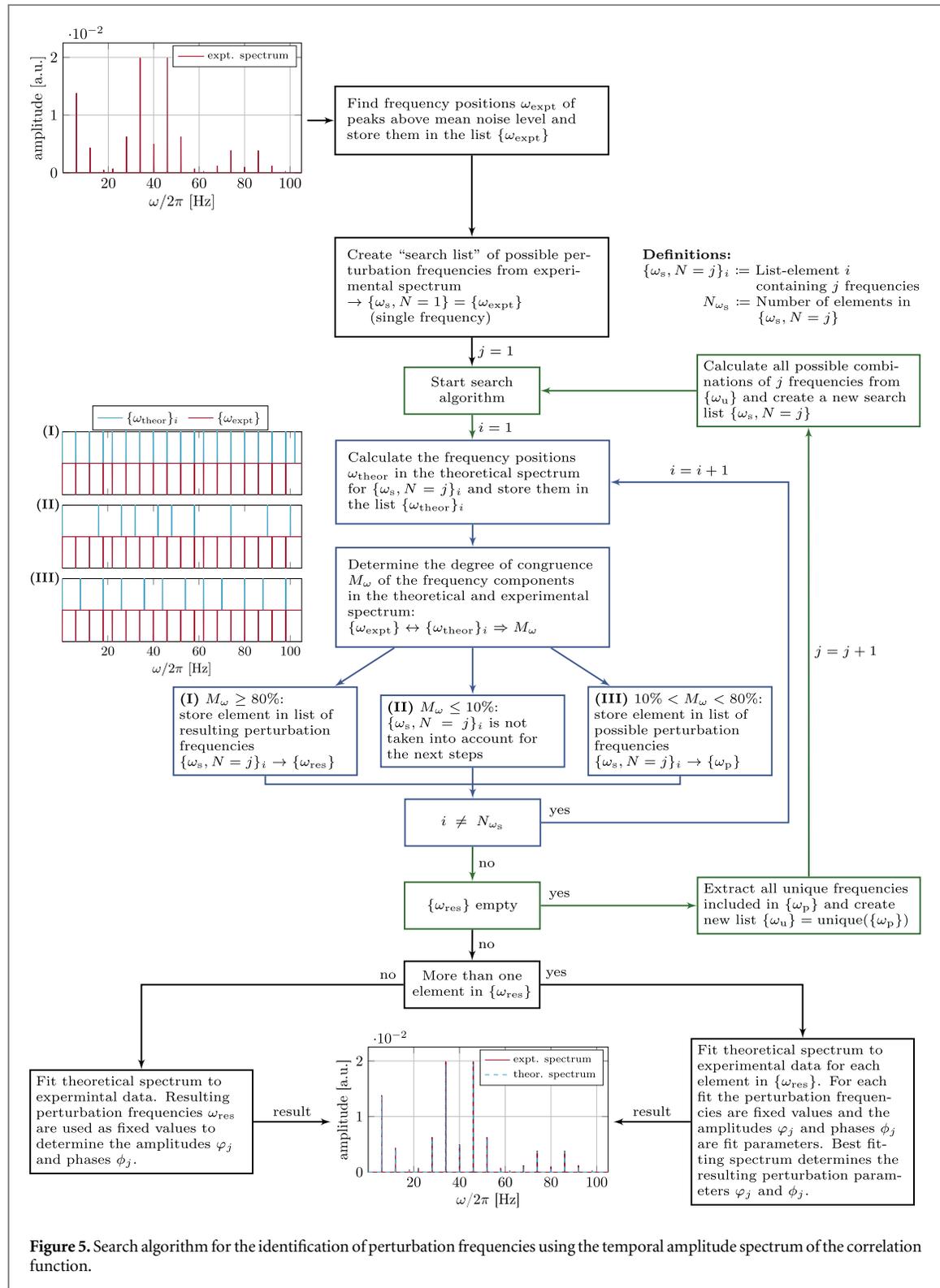
The extracted contrast  $K_g^{(2)}$  is thus modified by the amplitude  $A(\Delta \tau)$ , reaching  $K_0$  only in the limit  $\Delta \tau \rightarrow 0$ . Figure 4 shows the expected contrast reduction  $K_g^{(2)}/K_0 = \sqrt{|A(\Delta \tau)|}$  due to temporal binning, for a single perturbation frequency  $\omega_1$  and three different peak phase deviations  $\varphi_1$  ranging from  $0.1 \pi$  to  $0.75 \pi$ . At these modulation strengths a binning of  $\Delta \tau < 0.08 \cdot 2\pi/\omega_1$  is sufficient to extract the unperturbed contrast with 95% accuracy.

After having determined contrast and spatial periodicity of the unperturbed interference pattern, the perturbation frequency needs to be identified. This is done by calculating the temporal amplitude spectrum of the correlation function via a discrete Fourier transformation for every value  $u = N_u \lambda_g^{(2)}/2$  with  $N_u \in \mathbb{Z}$  and subsequent averaging. Following equation (12), the resulting spectrum contains all frequency components

$\omega_{\{m_i\}}$ , as can be seen in figure 3 for the 540 Hz measurement (red solid line). Three peaks can be identified, that correspond to the fundamental frequency and harmonics at discrete frequencies  $m_1\omega_1$ ,  $m_1 \in \{1, 2, 3\}$  in equation (12). The amplitudes are given by the Bessel functions of the peak phase deviation and the contrast of the unperturbed interference pattern  $\frac{1}{2}K_0^2 J_{m_1}^2(\varphi_1)^2$ .

For more than one perturbation frequency  $\omega_j$ , the spectrum consists not only of the fundamental frequencies and harmonics, but also of intermodulation terms. Therefore, it is difficult to identify the fundamental frequencies. For the determination of the correct perturbation frequencies a search algorithm has been developed which is described below and illustrated in figure 5. The algorithm will be discussed exemplary on a two-frequency perturbation with  $\omega_1/2\pi = 6$  Hz,  $\varphi_1 = 0.6\pi$ ,  $\phi_1 = 0\pi$  and  $\omega_2/2\pi = 40$  Hz,  $\varphi_2 = 0.5\pi$ ,  $\phi_2 = 0\pi$ . This results in an amplitude spectrum of the correlation function as shown in figure 5 top left (red solid line). First, the frequency positions  $\omega_{\text{expt}}$  of all peaks above the mean noise level in the experimental amplitude spectrum are identified and stored in a list  $\{\omega_{\text{expt}}\}$ . For the example shown in figure 5, this list is  $\{\omega_{\text{expt}}\}/2\pi = \{6, 12, 18, 22, \dots, 98\}$ . The next step is the creation of a 'search list' of possible perturbation frequencies from the experimental spectrum  $\{\omega_{s,N=1}\} = \{\omega_{\text{expt}}\}$  (single frequency case). Here,  $\{\omega_{s,N=j}\}_i$  is the list-element  $i$  containing  $j$  frequencies. The total number of elements in  $\{\omega_{s,N=j}\}$  is  $N_{\omega_s}$ . The search algorithm starts with the single frequency case ( $j = 1$ ) and uses the first element  $i = 1$  of  $\{\omega_{s,N=1}\}$ . In the example, this is  $\{\omega_{s,N=1}\}_1/2\pi = 6$  Hz. It is used as perturbation frequency  $\omega_1$  in equation (12) to calculate the positions of the frequency components  $\omega_{\text{theor}}$  in the theoretical amplitude spectrum. The resulting positions are stored in the list  $\{\omega_{\text{theor}}\}_i$  with  $i = 1$ . For the perturbation frequency of 6 Hz this list is  $\{\omega_{\text{theor}}\}_1/2\pi = \{6, 12, 18, 24, \dots, 96\}$ . By comparing the frequency components in the theoretical and experimental spectrum,  $\{\omega_{\text{theor}}\}_i$  and  $\{\omega_{\text{expt}}\}$ , the degree of congruence  $M_\omega$  is determined. This indicates how many frequencies in the experimental spectrum coincide with those in the theoretical, compared to  $N_{\omega_{\text{expt}}}$ , the total number of frequencies stored in  $\{\omega_{\text{expt}}\}$ . In the example, three frequency positions coincide,  $\{6, 12, 18\}$ , and  $N_{\omega_{\text{expt}}} = 17$ . This results in a degree of congruence of  $M_\omega = 17.6\%$ . The value of  $M_\omega$  determines which of the next three cases is fulfilled. If  $M_\omega \geq 80\%$ , the element  $\{\omega_{s,N=1}\}_1$  is stored in the list of resulting perturbation frequencies  $\{\omega_{\text{res}}\}$ . The element  $\{\omega_{s,N=1}\}_1$  is not taken into account for the next steps, if  $M_\omega \leq 10\%$ . For  $10\% < M_\omega < 80\%$ , the element is stored in a list of possible perturbation frequencies  $\{\omega_p\}$ . The third case is fulfilled for the element  $\{\omega_{s,N=1}\}_1/2\pi = 6$  Hz. Then, the next element ( $i = i + 1$ ) in the list  $\{\omega_{s,N=1}\}$ ,  $\{\omega_{s,N=1}\}_2/2\pi = 12$  Hz, is taken for the calculation of  $\{\omega_{\text{theor}}\}_i$  and the determination of the degree of congruence  $M_\omega$ . This loop (indicated by the blue arrows and boxes in figure 5) continues until the last element in  $\{\omega_{s,N=1}\}$  was used ( $i = N_{\omega_s}$ ). For the example in figure 5, the list of possible perturbation frequencies is  $\{\omega_p\}/2\pi = \{6, 12, 18, 24, \dots, 92\}$ . The last element in  $\{\omega_{s,N=1}\}$ , 98 Hz, is missing because it fulfilled the second case. If no element has satisfied the first case ( $M_\omega \geq 80\%$ ), then  $\{\omega_{\text{res}}\}$  is empty and a new list  $\{\omega_u\}$  is created containing all unique frequencies included in  $\{\omega_p\}$ . In the single frequency case it is trivial because  $\{\omega_u\} = \{\omega_p\}$ . As example, for two frequencies per element in  $\{\omega_p\}/2\pi = \{\{7, 13\}, \{7, 19\}, \{13, 41\}\}$  the list of unique frequencies would be  $\{\omega_u\}/2\pi = \{7, 13, 19, 41\}$ . Using  $\{\omega_u\}$ , all possible combinations of  $j = j + 1$  frequencies are calculated and a new search list  $\{\omega_{s,N=2}\}/2\pi = \{\{6, 12\}, \{6, 18\}, \{6, 22\}, \dots, \{86, 92\}\}$  is created. Afterwards, the search algorithm starts with the first element ( $i = 1$ ) in  $\{\omega_{s,N=2}\}$ . This loop which increases the number of frequencies ( $j = j + 1$ ) is indicated in figure 5 with green arrows and boxes. Then, all elements  $i$  in  $\{\omega_{s,N=2}\}$  are probed by the search algorithm in the same way as described above for the single frequency case. On the left side of figure 5, the three cases are illustrated with different lists of frequency components  $\{\omega_{\text{theor}}\}_i$  (blue solid line) together with  $\{\omega_{\text{expt}}\}$  (red solid line). The first case was calculated for  $\{\omega_{s,N=2}\}_i/2\pi = \{6 \text{ Hz}, 40 \text{ Hz}\}$ , the second for  $\{\omega_{s,N=2}\}_i/2\pi = \{58 \text{ Hz}, 74 \text{ Hz}\}$  and the third for  $\{\omega_{s,N=2}\}_i/2\pi = \{18 \text{ Hz}, 62 \text{ Hz}\}$ . A very good match between theory and experiment can be seen for the first case. If the algorithm has stored one element in  $\{\omega_{\text{res}}\}$  it is used as perturbation frequencies for the fit of equation (12) to the experimental spectrum. Thereby, the extracted contrast  $K_g^{(2)}$ , spatial periodicity  $\lambda_g^{(2)}$  and the perturbation frequencies  $\omega_j$  are fixed parameters for the determination of the peak phase deviation  $\varphi_j$  and phases  $\phi_j$ . If the list of resulting perturbation frequencies  $\{\omega_{\text{res}}\}$  contains more than one element, a theoretical spectrum is fitted to the experimental data with each element of  $\{\omega_{\text{res}}\}$  in the same way as described above for one element. The best matching theoretical spectrum determines the perturbation frequencies  $\omega_j$  and parameters  $\varphi_j$  and  $\phi_j$ . At the bottom of figure 5 the theoretical spectrum (dashed blue line) for the resulting perturbation frequencies  $\omega_1/2\pi = 6$  Hz and  $\omega_2/2\pi = 40$  Hz can be seen. The algorithm identifies the perturbation frequencies  $\omega_j$  with a probability of about 90% for  $N = 3$  and 70% for  $N = 4$ .

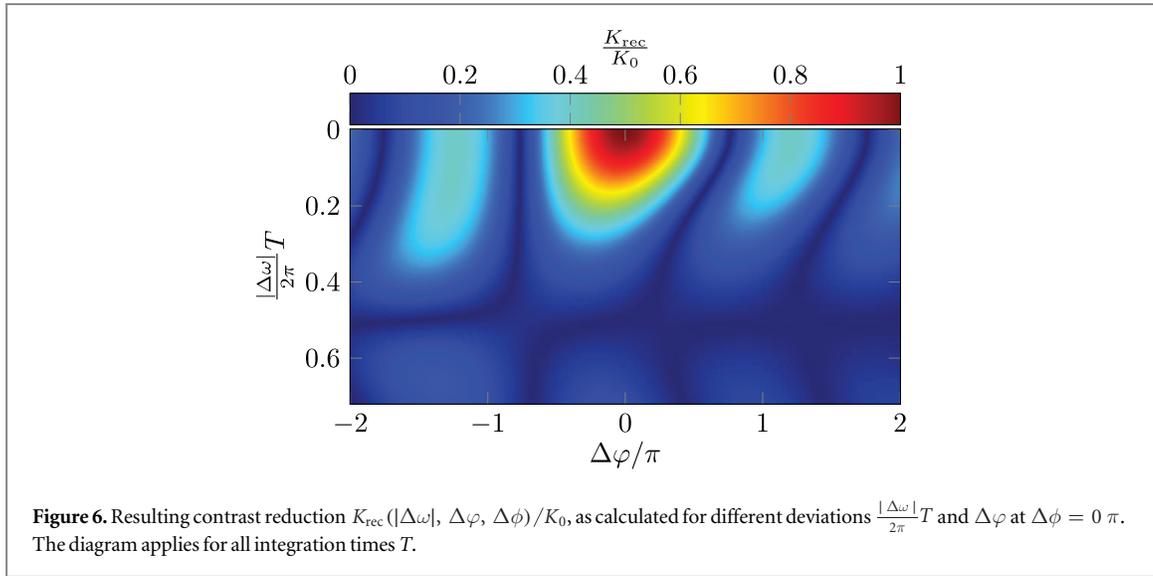
With the exemplary measurement from figures 2 and 3, the above described algorithm yields a single perturbation frequency  $\omega_1/2\pi = (540.0 \pm 0.05)$  Hz. After identification of the perturbation frequencies, equation (12) is used to fit the peak phase deviation  $\varphi_j$  to the amplitude spectrum, as shown in figure 3 (dashed blue line). The resulting peak phase deviation is  $\varphi_1 = (0.5725 \pm 0.0015)\pi$ . The main error in the determination of the perturbation parameters  $\omega_j$ ,  $\varphi_j$  and  $\phi_j$  originates from the frequency resolution in the



numerical amplitude spectrum. This was set to 100 mHz to reduce the computing time, especially for the search algorithm.

With the obtained values from the correlation analysis, it is possible to reconstruct the interference pattern from the perturbed one in figure 2(a). To get the reconstructed pattern the new particle coordinates  $y_{i,\text{new}}$  have to be calculated according to the extracted perturbation frequencies  $\omega_j$  and peak phase deviations  $\varphi_j$  [35]

$$y_{i,\text{new}} = y_i - \frac{\lambda}{2\pi} \varphi(t_i) = y_i - \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{j=1}^N \varphi_j \cos(\omega_j t_i + \phi_j), \quad (16)$$



where  $\varphi(t_i)$  is the time-dependent phase shift in equation (2) and  $y_i, t_i$  are the spatial and temporal particle coordinates of the perturbed interference pattern. To determine the contrast of the reconstructed pattern, a two-dimensional histogram is calculated with  $y_{i,\text{new}}$ , averaged along the  $x$ -direction and fitted using equation (13). To maximize the resulting contrast the perturbation frequencies  $\omega_j$ , the peak phase deviations  $\varphi_j$  and phases  $\phi_j$  are optimized by varying their values in a narrow window around the values extracted from the correlation analysis. For the exemplary measurement, this optimization results in  $\omega_1/2\pi = 539.994$  Hz,  $\varphi_1 = 0.66\pi$  and  $\phi_1 = 0.59\pi$ . The reconstructed interference pattern, which can be seen in figure 2(b), reveals a contrast  $K_{\text{rec}} = (55.5 \pm 2.8)\%$  and pattern periodicity  $\lambda_{\text{rec}} = (2.57 \pm 0.01)$  mm. Both are determined similarly as for the perturbed interference pattern with equation (13). The result for the reconstructed contrast is in good agreement with the contrast obtained from the correlation analysis  $K_g^{(2)} = (58.5 \pm 3.2)\%$ .

The contrast in the reconstructed interference pattern depends strongly on the extracted perturbation values. Only, if the exact values of the perturbation ( $\omega_j, \varphi_j$  and  $\phi_j$ ) are used in equation (16), the reconstructed contrast  $K_{\text{rec}}$  is equal to the one of the unperturbed interference pattern  $K_0$ . For values with a deviation from the exact values  $K_{\text{rec}}(|\Delta\omega|, \Delta\varphi, \Delta\phi)$  is reduced.

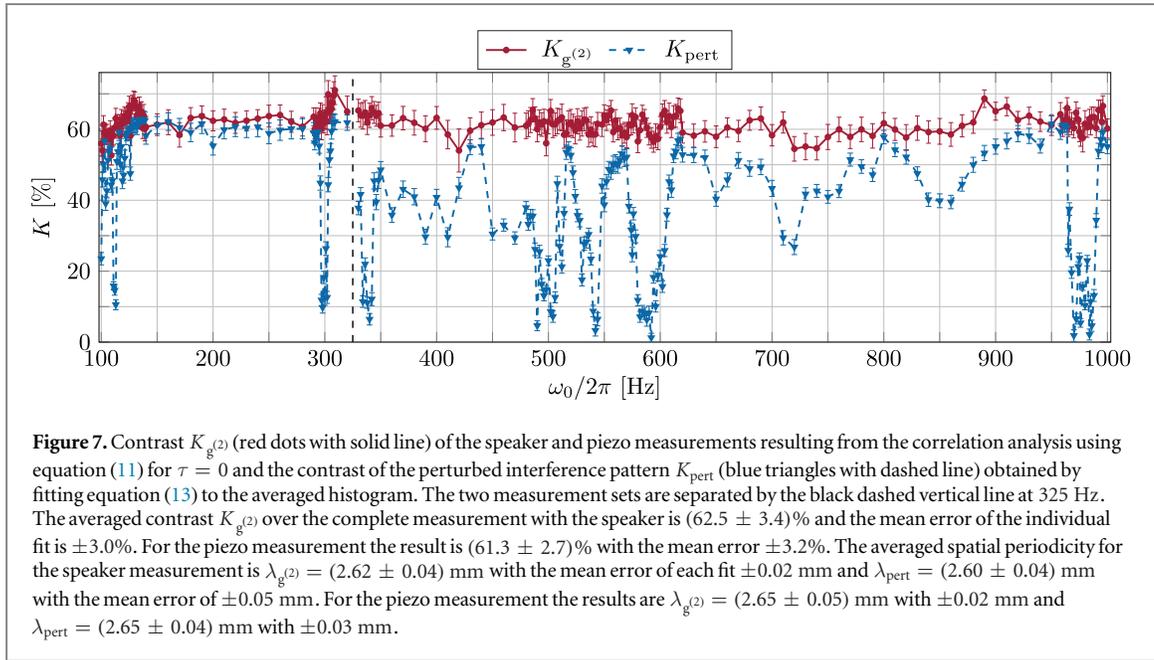
In equation (13) the model function yields the contrast  $K_0$ , if the reconstructed coordinates are equal to the coordinates of the unperturbed interference pattern  $y_0$ . The maximum contrast is obtained at positions, where  $k y_0 = 2\pi M$  for  $y_0 = M\lambda$  with  $M \in \mathbb{Z}$ , resulting in  $K_{\text{rec}} = K_0 \cos(2\pi M)$ . If not the exact perturbation parameters are used in equation (16), the coordinates of the unperturbed interference pattern are not correctly determined and a phase factor  $\Delta\tilde{\varphi}$  remains, that depends on the deviations  $|\Delta\omega|, \Delta\varphi$  and  $\Delta\phi$ . This factor reduces the contrast of the reconstructed interference pattern  $K_{\text{rec}}(|\Delta\omega|, \Delta\varphi, \Delta\phi) = K_0 \cos(2\pi M + \Delta\tilde{\varphi})$ . By integration over the acquisition time  $T$  a theoretical description for one perturbation frequency can be found and reads

$$K_{\text{rec}}(|\Delta\omega|, \Delta\varphi, \Delta\phi) = \frac{K_0}{T} \int_0^T \cos(2\pi M + \varphi_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - (\varphi_1 + \Delta\varphi) \cos((\omega_1 + |\Delta\omega|)t + (\phi_1 + \Delta\phi))) dt. \quad (17)$$

Figure 6 shows the resulting contrast reduction  $K_{\text{rec}}(|\Delta\omega|, \Delta\varphi, \Delta\phi)/K_0$  as function of the relevant parameters  $\frac{|\Delta\omega|}{2\pi}T$  and  $\Delta\varphi$  for  $\Delta\phi = 0\pi$ . The result is independent of  $\omega_1, \phi_1$  and  $T$  as long as  $T \gg \frac{2\pi}{\omega_1}$ , i.e. the measurement time is much larger than the cycle duration of the perturbation. For the three cases, where two of three deviations are equal to zero and one is small, approximate solutions can be found

$$\begin{aligned} K_{\text{rec}}(|\Delta\omega|, 0, 0) &\approx K_0 \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{8} |\Delta\omega| T \varphi_1\right)^2} \approx K_0 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{8} |\Delta\omega| T \varphi_1\right)^2\right) \\ K_{\text{rec}}(0, \Delta\varphi, 0) &\approx K_0 \cdot |J_0(\Delta\varphi)| \approx K_0 \left|1 - \frac{\Delta\varphi^2}{4}\right| \\ K_{\text{rec}}(0, 0, \Delta\phi) &\approx K_0 \cdot |J_0(\Delta\phi \cdot \varphi_1)| \approx K_0 \left|1 - \frac{\Delta\phi^2}{4} \varphi_1^2\right|. \end{aligned} \quad (18)$$

Knowing the landscape of figure 6, it is possible to optimize the reconstruction of the interference pattern. At the position of  $K_{\text{rec}} = K_0$  also the values of the perturbation are correctly determined. Above theory has been demonstrated for one perturbation frequency, but can be applied also in the case of numerous frequencies,



because in equation (16) the perturbations are independent of each other and therefore can be recalculated successively. For each reconstruction step the resulting contrast gets larger, until it reaches  $K_0$ .

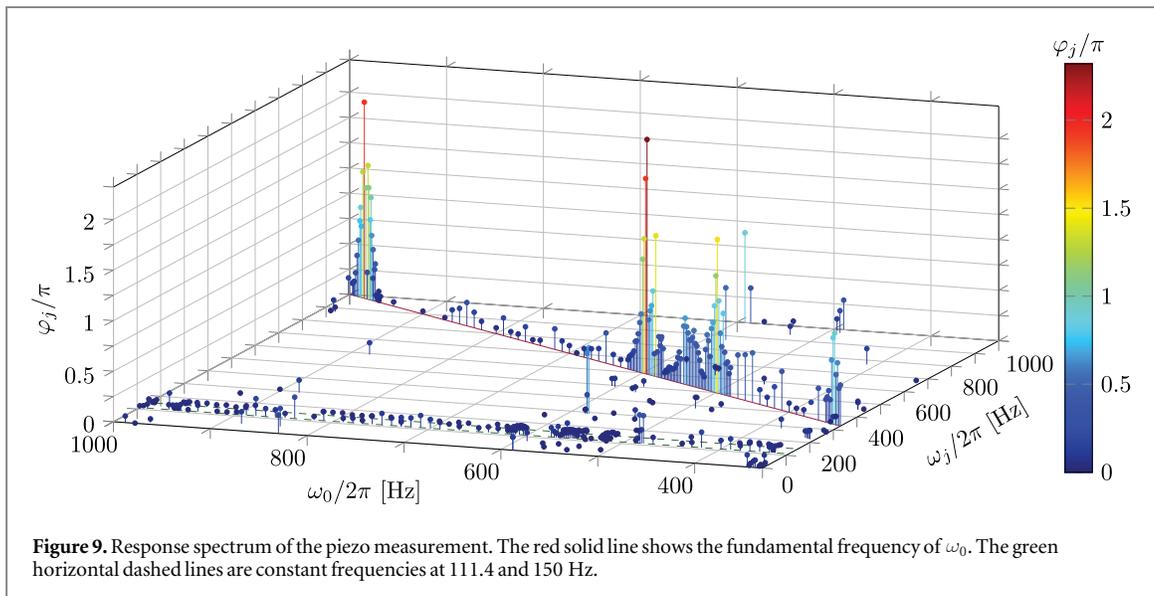
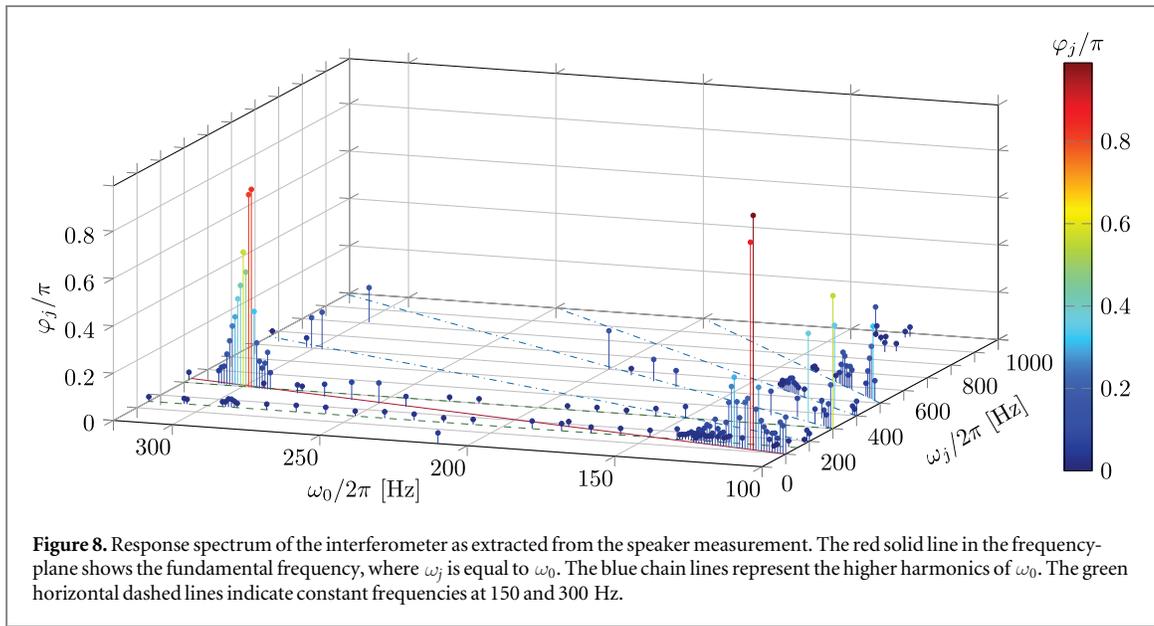
For the exemplary measurement with 540 Hz, the acquisition time was  $T = 19.2$  s. Using equation (18) with  $\varphi_1 = 0.66\pi$ ,  $\Delta\varphi = 0$ ,  $\Delta\phi = 0$  and  $\Delta\omega/2\pi = 5$  mHz, the reconstructed contrast is reduced to  $K_{\text{rec}} = 0.88 \cdot K_0$ . For the reconstruction of the unperturbed interference pattern with equation (16), a frequency accuracy of  $\pm 1$  mHz is required for the optimization process to reveal the reconstructed contrast with less than 1% deviation from  $K_0$ .

## 5. Results

The following measurements will demonstrate the extraction of the unperturbed interference pattern contrast  $K_0$  in the presence of dephasing. Additionally, we will determine the vibrational response spectrum of the interferometer, including the possibility to reconstruct the unperturbed interference pattern.

From the measurements with the speaker (excitation frequency  $\omega_0/2\pi$  from 100 to 320 Hz) and the piezo ( $\omega_0/2\pi$  from 330 to 1000 Hz) the correlation function is extracted according to equation (14). For each measurement the correlation function is calculated with a spatial discretization of  $\Delta u = 90 \mu\text{m}$  and a temporal of  $\Delta\tau = 200 \mu\text{s}$  for the speaker and  $\Delta\tau = 50 \mu\text{s}$  for the piezo measurement. The maximum correlation time is  $\tau = 10$  s. As discussed in section 4, the contrast of the perturbed interference pattern  $K_{\text{pert}}$  is determined by using equation (13). From the correlation function at  $\tau = 0$  (equation (11)), the corresponding contrast of the unperturbed interference pattern  $K_{g^{(2)}}$  is extracted. The results for the speaker and piezo measurement are shown in figure 7. The data for  $K_{\text{pert}}$  show clear resonance structures at discrete frequencies. At these resonances, the contrast of the integrated interference image vanishes almost completely. However, the correlation analysis reveals the full contrast of the unperturbed interference pattern over the full spectral range.

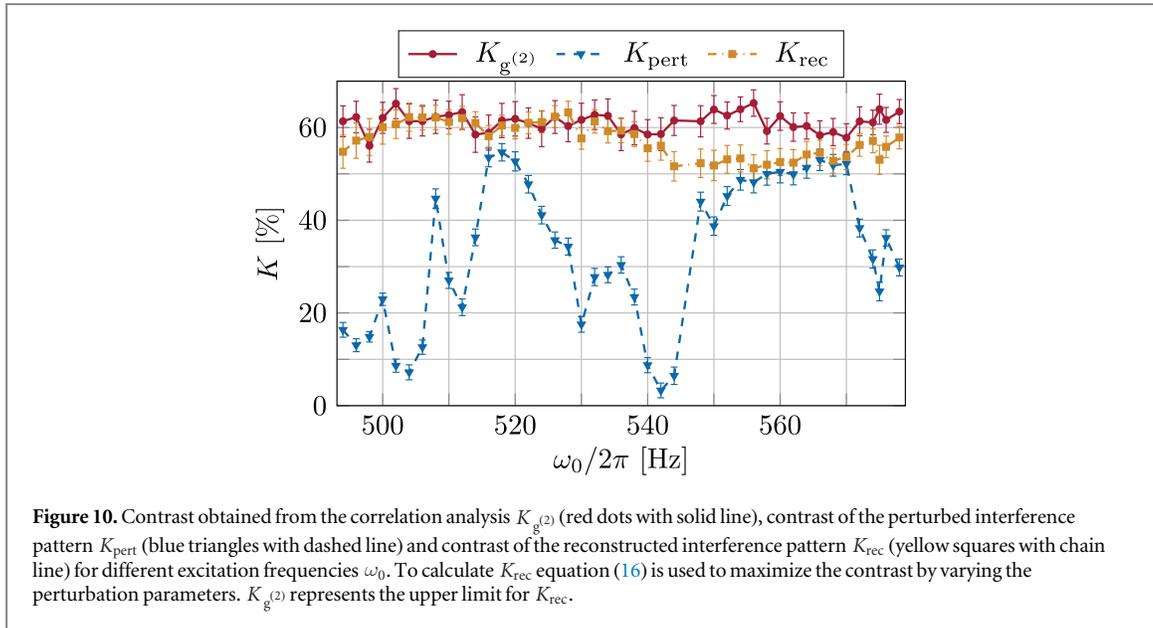
Following section 4, the amplitude spectrum of the correlation function is calculated and the involved perturbation frequencies  $\omega_j$  and corresponding peak phase deviations  $\varphi_j$  are identified by the described algorithm. The resulting response spectrum for the speaker measurement with excitation frequencies of  $\omega_0/2\pi$  from 100 to 320 Hz is shown in figure 8. The red solid line, plotted in the frequency-plane, denotes the positions of the fundamental frequency, where  $\omega_j$  is equal to  $\omega_0$ . By comparison of the positions of large amplitudes  $\varphi_j$  on this line with the positions of the reduced contrast  $K_{\text{pert}}$  in figure 7, a good agreement can be seen, according to equation (3). The maximum peak phase deviation in the complete spectrum is  $\varphi_j = 0.99\pi$  at  $\omega_j/2\pi = 112$  Hz. The blue chain lines in the frequency-plane represent higher harmonics of  $\omega_0$ . For a given harmonic excitation at  $\omega_0$  and a linear response of the interferometer, the response spectrum should include only the excitation frequency. However, due to anharmonicities in the excitation process and possible nonlinear response of the complex interferometer setup, the response spectrum may include higher harmonics. Especially in the region of 100 to 140 Hz this behavior can be observed. The green horizontal dashed lines show constant frequencies at 150 and 300 Hz that are independent of the excitation frequency, probably originating from the electrical network frequency at 50 Hz.



The results of the piezo measurement with  $\omega_0/2\pi$  from 330 to 1000 Hz are shown in figure 9. Again, the positions of large peak phase deviations  $\varphi_j$  agree well with the positions of reduced contrast  $K_{\text{pert}}$  in figure 7, according to equation (3). The maximum value in this spectrum is  $\varphi_j = 2.32 \pi$  at  $\omega_j/2\pi = 594$  Hz. The green horizontal dashed lines of constant frequencies are at 111.4 and 150 Hz. The origin of the first one could be a vibration in the laboratory. The latter is likely a harmonic frequency of the electrical network.

Comparing the two spectra in figures 8 and 9 it can be seen, that the resulting peak phase deviations of the speaker measurement are below the values extracted from the piezo measurement. One reason could be, that the excitation of the speaker is directed along the interferometer axis ( $z$ -direction, figure 1), whereas the piezo excitation is oriented along the direction of interference ( $y$ -direction). The piezo excitation will thus have a stronger influence on the dephasing of the interference pattern. Another difference between the two spectra are the positions of constant frequencies indicated by the green horizontal lines. This difference could probably originate from the excitation direction mentioned above and the fact that the two measurements have been made at different days. Therefore, a change of the environmental conditions could be possible.

Calculating the spatial periodicity of the electron interference pattern before the magnification through the quadrupole lens, allows to determine the spatial perturbation amplitude. The measurements have been made with an electron emission voltage of 1.45 kV and a voltage of 0.3 V at the biprism, yielding an interference pattern with the unmagnified spatial periodicity of  $\lambda = 880$  nm [43]. With this value and the resulting peak phase deviations  $\varphi_j$ , the spatial perturbation amplitude  $A$  can be calculated via  $A(\varphi_j) = \lambda \frac{\varphi_j}{2\pi}$ . The resulting



amplitudes are in the range of 6 nm ( $\varphi_1 = 0.014 \pi$  at  $\omega_1/2\pi = 111.4$  Hz) up to  $1.021 \mu\text{m}$  ( $\varphi_1 = 2.320 \pi$  at  $\omega_1/2\pi = 594$  Hz). Here we assume, that the perturbation occurs before the magnification of the interference pattern through the quadrupole lens. In principle it is possible to increase the sensitivity for measuring perturbation amplitudes by reducing the spatial periodicity. This can be achieved by decreasing the acceleration voltage or increasing the biprism voltage.

With the obtained values from the correlation analysis, the unperturbed interference pattern can be reconstructed from the experimental data with equation (16). In addition, the accuracy in identifying the perturbation frequencies  $\omega_j$  and peak phase deviations  $\varphi_j$  can be increased by maximizing the contrast of the reconstructed pattern  $K_{\text{rec}}$ . The result is plotted in figure 10 for the region from 494 to 578 Hz of the piezo measurement. Over the whole range the contrast of the reconstructed interference pattern  $K_{\text{rec}}$  is significantly larger than the contrast of the perturbed one  $K_{\text{pert}}$  and close to the contrast  $K_{g^{(2)}}$  of the unperturbed interference pattern, which marks an upper limit for the contrast of the reconstructed pattern.

## 6. Conclusion

Due to the technological progress for single-particle detection with high spatial and temporal resolution, it is possible to prove matter-wave interference by second-order correlation analysis, although the integrated interference structure vanishes by vibrational dephasing. Furthermore, the involved perturbation frequencies and amplitudes can be identified. In this paper we have demonstrated theoretically and experimentally, how this can be performed using the additional information about the particle impact time  $t_i$  and position  $y_i$ . Our method can in principle be applied in various interferometric experiments equipped with such a detector. It has major potential for applications in sensor technology for vibrational as well as electromagnetic perturbations [34, 35].

By introducing vibrations artificially to our biprism electron interferometer, we have disturbed the integrated interference pattern. The degree of disturbance depends on the response of the interferometer to this excitation frequency. With our method the matter-wave characteristics, contrast and spatial periodicity, were extracted for the whole excitation spectrum from 100 to 1000 Hz. By calculating the amplitude spectrum of the correlation function, it is possible to identify the perturbation frequencies using our numerical search algorithm. With the obtained frequencies, the theoretical function was fitted to the experimental spectrum to determine the perturbation amplitudes and phases. By applying our method to all measurements, a response spectrum of the interferometer was created. With the possibility to reconstruct the unperturbed interference pattern, the accuracy of the parameters obtained from the correlation analysis could be increased.

We have demonstrated, that our method is not only a tool to prove matter-wave interferences even if they are invisible in the integrated picture, but has also possible sensor applications for the identification of perturbation frequencies and amplitudes originating from the environment. The interferometer could be used for the analysis of external perturbations, if its response spectrum is known. On the other hand, it is possible to apply a defined external perturbation source to map the response spectrum of the interferometer. With the knowledge of the vibrational as well as electromagnetic response spectrum of an interferometer, the mechanical decoupling from

the environment and electromagnetic shielding can be optimized for the specific application. Additionally, perturbation sources can be identified and eliminated.

## Acknowledgments

This work was supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG, German Research Foundation) through the Emmy Noether program STI 615/1-1. AG acknowledges support from the DFG SFB TRR21, and AR from the Evangelisches Studienwerk eV Villigst. The authors thank N Kerker and A Pooch for helpful discussions.

## References

- [1] Grattan L S and Meggitt B T (ed) 2000 *Optical Fiber Sensor Technology: Fundamentals* (New York: Springer Science & Business Media)
- [2] Abbott B P *et al* 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 061102
- [3] Graham P W, Hogan J M, Kasevich M A and Rajendran S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 171102
- [4] Gerlich S, Eibenberger S, Tomandl M, Nimmrichter S, Hornberger K, Fagan P J, Tüxen J, Mayor M and Arndt M 2011 *Nat. Commun.* **2** 263
- [5] Arndt M and Hornberger K 2014 *Nat. Phys.* **10** 271
- [6] Haslinger P, Dörre N, Geyer P, Rodewald J, Nimmrichter S and Arndt M 2013 *Nat. Phys.* **9** 144
- [7] Gustavson T L, Bouyer P and Kasevich M A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2046
- [8] Hasselbach F and Nicklaus M 1993 *Phys. Rev. A* **48** 143
- [9] Peters A, Chung K Y and Chu S 1999 *Nature* **400** 849
- [10] Margalit Y, Zhou Z, Machluf S, Rohrlich D, Japha Y and Folman R 2015 *Science* **349** 1205
- [11] Arndt M and Brand C 2015 *Science* **349** 1168
- [12] Stibor A, Hornberger K, Hackermüller L, Zeilinger A and Arndt M 2005 *Laser Phys.* **15** 10
- [13] Miffre A, Jacquy M, Büchner M, Tréneç G and Vigué J 2006 *Appl. Phys. B* **84** 617
- [14] Hauth M, Freier C, Schkolnik V, Senger A, Schmidt M and Peters A 2013 *Appl. Phys. B* **113** 49
- [15] Geiger R *et al* 2011 *Nat. Commun.* **2** 474
- [16] Hensley J M, Peters A and Chu S 1999 *Rev. Sci. Instrum.* **70** 2735
- [17] Gouët L, Mehlstäubler T E, Kim J, Merlet S, Clairon A, Landragin A and Pereira dos Santos F 2008 *Appl. Phys. B* **92** 133
- [18] Chiow S W, Herrmann S, Chu S and Müller H 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 050402
- [19] Chiow S-W, Kovachy T, Chien H-C and Kasevich M A 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 130403
- [20] Fray S, Alvarez Diez C, Hänsch T W and Weitz M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 240404
- [21] Chen X, Zhong J, Song H, Zhu L, Wang J and Zhan M 2014 *Phys. Rev. A* **90** 023609
- [22] Barrett B, Antoni-Micollier L, Chichet L, Battelier B, Gominet P-A, Bertoldi A, Bouyer P and Landragin A 2015 *New J. Phys.* **17** 085010
- [23] Kohlhaas R, Bertoldi A, Cantin E, Aspect A, Landragin A and Bouyer P 2015 *Phys. Rev. X* **5** 021011
- [24] Hume D B and Leibbrandt D R 2016 *Phys. Rev. A* **93** 032138
- [25] Zurek W H 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 715
- [26] Pikoński I, Zych M, Costa F and Brukner Č 2015 *Nat. Phys.* **11** 668
- [27] Hackermüller L, Hornberger K, Brezger B, Zeilinger A and Arndt M 2004 *Nature* **427** 711
- [28] Hornberger K, Uttenthaler S, Brezger B, Hackermüller L, Arndt M and Zeilinger A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 160401
- [29] Sonntag P and Hasselbach F 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 200402
- [30] Aharonov Y and Bohm D 1959 *Phys. Rev.* **115** 485
- [31] Batelaan H and Tonomura A 2009 *Phys. Today* **62** 38
- [32] Schmid H 1997 *Doctoral Thesis* University of Tübingen
- [33] Schütz G, Rembold A, Pooch A, Prochel H and Stibor A 2015 *Ultramicroscopy* **158** 65
- [34] Rembold A, Schütz G, Chang W T, Stefanov A, Pooch A, Hwang I S, Günther A and Stibor A 2014 *Phys. Rev. A* **89** 033635
- [35] Günther A, Rembold A, Schütz G and Stibor A 2015 *Phys. Rev. A* **92** 053607
- [36] Fölling S, Gerbier F, Widera A, Mandel O, Gericke T and Bloch I 2005 *Nature* **434** 481
- [37] Jagutzki O, Mergel V, Ullmann-Pfleger K, Spielberger L, Spillmann U, Dörner R and Schmidt-Böcking H 2001 *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **477** 244
- [38] Wiener N 1930 *Acta Math.* **55** 117–258
- [39] Khintchine A 1934 *Math. Ann.* **109** 604–15
- [40] Siegmund O H, Vallerga J V, Tremsin A S, Mcphate J and Feller B 2007 *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **576** 178
- [41] Schellekens M, Hoppeler R, Perrin A, Viana Gomes J, Boiron D, Aspect A and Westbrook C I 2005 *Science* **310** 648
- [42] Zhou X, Ranitovic P, Hogle C W, Eland J H D, Kapteyn H C and Murnane M M 2012 *Nat. Phys.* **8** 232
- [43] Möllenstedt G and Düker H 1956 *Z. Phys. A* **145** 377
- [44] Schütz G, Rembold A, Pooch A, Meier S, Schneeweiss P, Rauschenbeutel A, Günther A, Chang W T, Hwang I S and Stibor A 2014 *Ultramicroscopy* **141** 9
- [45] Hasselbach F 2010 *Rep. Prog. Phys.* **73** 016101
- [46] Hasselbach F and Maier U 1999 *Quantum Coherence and Decoherence—Proc. ISQM-Tokyo 98* ed Y A Ono and K Fujikawa (Amsterdam: Elsevier) p 299
- [47] Maier U 1997 *Doctoral Thesis* University of Tübingen
- [48] Kuo H S, Hwang I S, Fu T Y, Lin Y C, Chang C C and Tsong T T 2006 *Japan. J. Appl. Phys.* **45** 8972
- [49] Kuo H S, Hwang I S, Fu T Y, Lu Y H, Lin C Y and Tsong T T 2008 *Appl. Phys. Lett.* **92** 063106



**PAPER****Second-order correlations in single-particle interferometry****OPEN ACCESS****RECEIVED**  
22 March 2017**REVISED**  
27 July 2017**ACCEPTED FOR PUBLICATION**  
29 August 2017**PUBLISHED**  
25 October 2017

Original content from this work may be used under the terms of the [Creative Commons Attribution 3.0 licence](#).

Any further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the title of the work, journal citation and DOI.

**A Rembold<sup>1</sup>, R Röpke<sup>1</sup>, G Schütz<sup>1</sup>, J Fortágh<sup>2</sup>, A Stibor<sup>1</sup> and A Günther<sup>2,3</sup>**<sup>1</sup> Institute of Physics and Center for Collective Quantum Phenomena in LISA, University of Tübingen, Auf der Morgenstelle 15, D-72076 Tübingen, Germany<sup>2</sup> Institute of Physics and Center for Collective Quantum Phenomena in LISA, University of Tübingen, Auf der Morgenstelle 14, D-72076 Tübingen, Germany<sup>3</sup> Author to whom any correspondence should be addressed.**E-mail:** [alexander.stibor@uni-tuebingen.de](mailto:alexander.stibor@uni-tuebingen.de) and [a.guenther@uni-tuebingen.de](mailto:a.guenther@uni-tuebingen.de)**Keywords:** single-particle interferometry, second-order correlation analysis, dephasing, sensor technology**Abstract**

Interferometers with single particles are susceptible for dephasing perturbations from the environment, such as electromagnetic oscillations or mechanical vibrations. On the one hand, this limits sensitive quantum phase measurements as it reduces the interference contrast in the signal. On the other hand, it enables single-particle interferometers to be used as sensitive sensors for electromagnetic and mechanical perturbations. Recently, it was demonstrated experimentally, that a second-order correlation analysis of the spatial and temporal detection signal can decrease the electromagnetic shielding and vibrational damping requirements significantly. Thereby, the relevant matter-wave characteristics and the perturbation parameters could be extracted from the correlation analysis of a spatially ‘washed-out’ interference pattern and the original undisturbed interferogram could be reconstructed. This method can be applied to all interferometers that produce a spatial fringe pattern on a detector with high spatial and temporal single-particle resolution. In this article, we present and discuss in detail the used two-dimensional second-order correlation theory for multifrequency perturbations. The derivations of an explicit and approximate solution of the correlation function and corresponding amplitude spectra are provided. It is explained, how the numerical correlation function is extracted from the measurement data. Thereby, the influence of the temporal and spatial discretization step size on the extracted parameters, as contrast and perturbation amplitude, is analyzed. The influence of noise on the correlation function and corresponding amplitude spectrum is calculated and numerically cross-checked by a comparison of our theory with numerical single-particle simulations of a perturbed interference pattern. Thereby, an optimum spatial discretization step size is determined to achieve a maximum signal-to-noise ratio, which was used in former experiments to identify the perturbation caused by the electrical network. Our method can also be applied for the analysis of broad-band frequency noise, dephasing the interference pattern. Using Gaussian distributed noise in the simulations, we demonstrate that the relevant matter-wave parameters and the applied perturbation spectrum can be revealed by our correlation analysis.

**1. Introduction**

Single-particle interferometry became a remarkable tool in various fields of quantum physics and sensor technology. Interferometers for coherent atoms [1–3] recently investigated the nature of time [4, 5] and measured inertial forces [6] and gravitational acceleration [7]. Molecule interferometers [1, 8] proved the wave nature of large particles [9–12] and contributed to the understanding of quantum decoherence [13–15]. In neutron interferometers [16], the quantum-mechanical phase shift due to the Earth’s gravitational field was observed [17]. Moreover, remarkable progress was achieved in the field of matter-wave interferometry with charged particles such as electrons and ions [18–20] based on new developments concerning the beam source [21–23], the precise electron guiding [24, 25], the coherent beam path separation by nanostructures [22, 26–28]

and highly resolved spatial and temporal single-particle detection [29]. This advance opened the door for experiments in Aharonov–Bohm physics [30–32] and Coulomb-induced decoherence [13, 33, 34]. Technical devices with interfering single particles can decrease the amount of destructive particle deposition in electron microscopy for the analysis of fragile biological specimen [35, 36].

All these technical [37] and fundamental applications [38, 39] of single-particle interferometers are based on the high phase sensitivity and are therefore susceptible to dephasing, which can be caused by external electromagnetic oscillations, mechanical vibrations or temperature drifts. In contrast to decoherence [33, 34], where actual information of the quantum state is lost to the environment, dephasing is a collective, time-dependent phase shift of the interference pattern. Both, decoherence and dephasing, cause a reduction of the contrast of the time-averaged interference pattern on the detector. However, in opposite to decoherence, dephasing can in principle be corrected after the measurement, if the temporal and spatial information of the single-particle events are known. Then, two-particle correlations may be used to study the dephasing process and to reveal the undisturbed interference pattern.

Ever since the famous Hanbury Brown and Twiss experiment [40], second-order correlations are successfully used in many research areas. Thereby, noise correlations play a key role, as they give direct access to the quantum nature of the source. This understanding has not only set the fundament for modern quantum optics [41], but also helped to prove the quantum nature of fermions [42] and bosons [43]. Today, noise correlation analysis is widely used in modern astrophysics [44], quantum atom optics [45] and particle physics [46]. For matter-waves, temporal correlations have been used to analyze the counting statistics of atom lasers [47] and to demonstrate the coherent transfer of magnetic field fluctuations onto an atom laser [48]. Spatial correlations, on the other hand, have been used to analyze atoms in optical lattices [49] or to study many-body states, such as the Mott insulator state, in cold atom physics [50, 51].

In previous publications [52–54] we have demonstrated experimentally in a biprism electron interferometer [18, 26, 55], how multifrequency dephasing caused by electromagnetic [52, 53] and vibrational oscillations [54] can be corrected using second-order correlation analysis in combination with the amplitude spectrum of the correlation function. Latter can be used for the identification of unknown perturbation frequencies [54], as according to the Wiener–Khinchine theorem [56, 57] the Fourier transform of the correlation function is equal to the power spectrum of the perturbed measurement signal. For the measurements, an interference pattern was shifted artificially by external perturbations leading to a contrast reduction of the temporally integrated pattern on the detector. Using the time and position information of particle impacts at the detector, the numerical second-order correlation function was extracted. With this, we were able to reveal the unknown perturbation frequencies, corresponding amplitudes and the characteristics of the matter-wave, such as contrast and pattern periodicity. The undisturbed interference pattern could be reconstructed with the parameters of the perturbation. Our method is a powerful tool to prove the wave nature of particles, even if the integrated interference pattern is vanished. Therefore, it reduces the requirements for electromagnetic shielding and vibrational damping of the experimental setup, e.g. for mobile interferometers or experiments in a perturbing environment. Furthermore, it can be used to sensitively detect electromagnetic and mechanical perturbations or for the spectroscopy of the electromagnetic and vibrational response spectrum of an interferometer [54]. Therefore, this technique has the potential for the application in sensor technology and can in principle be applied in interferometers for electrons [29], ions [29], atoms [43], neutrons [58] and molecules [59] that generate a spatial fringe pattern in the detection plane. For the application of the correlation analysis, the devices have to be equipped with a detector with high spatial and temporal single-particle resolution, which is available for all above mentioned interferometers. Another requirement is, that the particle flight time is shorter than the cycle time of the perturbation. Otherwise, the particles traverse many periods of the perturbation and therefore the perturbation is averaged out and can not be resolved.

This article provides a comprehensive description of the applied theory, being the base for the experimental application of second-order correlations in single-particle interferometry. In the first chapter, we give a detailed derivation of the two-dimensional second-order correlation theory for multifrequency perturbations leading to the equations applied in former dephasing experiments [52–54]. We deduce the explicit solution for the correlation function and explain under which conditions an approximation can be applied. The characteristics of the explicit and approximate solutions are discussed and the determination of the matter-wave properties is shown. Furthermore, we calculate the analytic solution of the corresponding amplitude spectrum used for the identification of the unknown perturbation frequencies and amplitudes [54]. The invariance of the correlation function under time and space transformations is analyzed in detail and the consequence for the determination of the perturbation parameters is shown.

In the second part of this article, we investigate the general characteristics of numerical correlation functions. They are typically derived from a finite set of measurement data, causing statistics and noise to play an important role. Temporal and spatial discretization, then influences not only the contrast and the amplitude spectrum of the correlation function, but also the corresponding noise levels. This limits the maximal signal-to-noise ratio in the correlation analysis. From our theoretical study, we identify an optimum discretization step size for best

sensitivity, which was used in a previous publication [60] for the identification of the electrical network frequency. With single-particle simulations of a perturbed interference pattern, we cross-check our theoretical description and show, how the correlation theory can be used to identify broad-band frequency noise.

## 2. Theory of second-order correlations

In this chapter, the theory of second-order correlations in single-particle interferometry is derived and the properties are discussed in detail. First, the contrast reduction of a time-averaged interference pattern dephased by a perturbation is analyzed. Afterwards, the explicit solution of the second-order correlation function is calculated and discussed under which conditions an approximate solution is suitable. The determination of the contrast and spatial periodicity of the unperturbed interference pattern is demonstrated. The corresponding amplitude spectra used for the identification of unknown perturbation frequencies are derived. At the end of the chapter, the invariance of the correlation function under time and space transformations is analyzed in detail and the consequence for the determination of the perturbation phases is discussed.

### 2.1. Time-averaged interference pattern

In many experiments in single-particle interferometry, the interference pattern is detected using multichannel plates in conjunction with a phosphor screen [18, 19, 24, 33, 61]. The particle impacts generate light pulses on the phosphor screen, that are temporally integrated with a charge-coupled device camera (CCD-camera). An interference pattern, that is dephased by a temporal perturbation, is then irreversibly ‘washed-out’ in the spatial signal and its contrast is reduced. This behavior shall be calculated in the following.

The probability distribution, that describes the particle impacts in the detection plane forming the interference pattern, is given by

$$f(y, t) = f_0(1 + K \cos(ky + \varphi(t))), \quad (1)$$

where  $f_0$  assures normalization,  $K$  and  $k = 2\pi/\lambda$  indicate the contrast and wave number of the unperturbed interference pattern, with the spatial periodicity  $\lambda$ . The time-dependent perturbation  $\varphi(t)$  is described as a superposition of  $N$  harmonic frequencies  $\omega_j$

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^N \varphi_j \cos(\omega_j t + \phi_j), \quad (2)$$

with perturbation amplitudes (peak phase deviations)  $\varphi_j$  and phases  $\phi_j$ . The perturbation leads to a washout of the time-averaged interference pattern. For one perturbation frequency ( $N = 1$ ), this can be easily seen by calculating the time-average of equation (1)

$$\langle f(y, t) \rangle_t := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(y, t) dt, \quad (3)$$

resulting in

$$\begin{aligned} \langle f(y, t) \rangle_t &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f_0}{T} \int_0^T \left( 1 + \frac{K}{2} (e^{i(ky + \varphi(t))} + \text{c.c.}) \right) dt \\ &= f_0 + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f_0 K}{2T} \left( e^{iky} \int_0^T e^{i\varphi_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)} dt + \text{c.c.} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Using Bessel functions of first kind  $J_n$ , the exponential function can be rewritten as

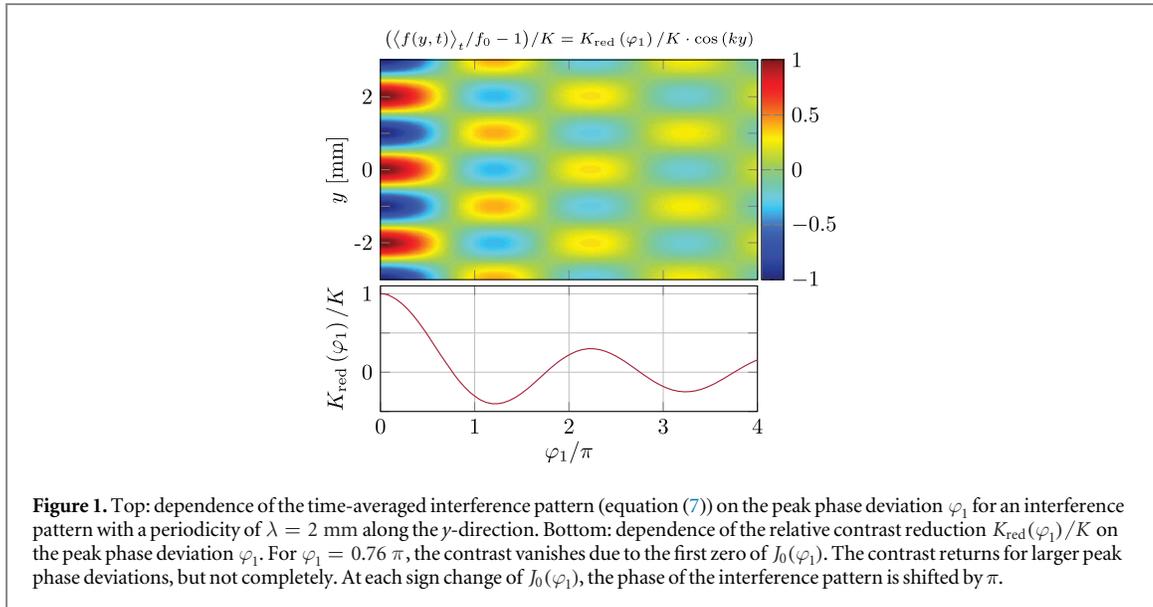
$$e^{\pm i\phi_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)} = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} (\pm i)^{n_1} J_{n_1}(\phi_1) e^{in_1(\omega_1 t + \varphi_1)} = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} J_{n_1}(\phi_1) e^{in_1(\omega_1 t + \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2})}, \quad (5)$$

yielding

$$\begin{aligned} \langle f(y, t) \rangle_t &= f_0 + \frac{f_0 K}{2} \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} J_{n_1}(\varphi_1) (e^{iky} e^{in_1(\phi_1 + \frac{\pi}{2})} \\ &\quad + e^{-iky} e^{in_1(\phi_1 - \frac{\pi}{2})}) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{in_1 \omega_1 t} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Only for  $n_1 = 0$ , the limit of the time integral is equal to one. For all other  $n_1 \neq 0$ , it approaches zero, such that the time-averaged interference pattern becomes

$$\langle f(y, t) \rangle_t = f_0(1 + \underbrace{K J_0(\varphi_1)}_{=K_{\text{red}}(\varphi_1)} \cos(ky)). \quad (7)$$



The perturbation thus leads to a reduced contrast  $K_{\text{red}}(\varphi_1)$  given by the perturbation amplitude:  $K_{\text{red}}(\varphi_1) = KJ_0(\varphi_1)$ , with  $|J_0(\varphi_1)| \leq 1$ . In figure 1 at the top, the dependence of the time-averaged interference pattern (equation (7)) on the peak phase deviation  $\varphi_1$  is illustrated. The interference pattern with a spatial periodicity of  $\lambda = 2$  mm can be identified in the  $y$ -direction. The reduced contrast  $K_{\text{red}}(\varphi_1)$  normalized to the contrast of the unperturbed interference pattern  $K$  is plotted at the bottom of figure 1. For a peak phase deviation of  $\varphi_1 = 0.76 \pi$ , the contrast is zero corresponding to the first zero of  $J_0(\varphi_1)$ . The contrast returns for larger peak phase deviations, but does not recover completely. Additionally, the interference pattern is phase shifted by  $\pi$  as the sign of  $J_0(\varphi_1)$  changes from positive to negative. This behavior is repeated for higher peak phase deviations and the contrast is further reduced.

For multifrequency perturbations ( $N > 1$ ) with peak phase deviations  $\varphi_j < 1$ , equation (7) becomes

$$\langle f(y, t) \rangle_t = f_0 \left( 1 + K \underbrace{\prod_{j=1}^N J_0(\varphi_j) \cos(ky)}_{=K_{\text{red}}(\varphi_{j=1\dots N})} \right). \quad (8)$$

Here, the reduced contrast  $K_{\text{red}}(\varphi_{j=1\dots N})$  depends on all peak phase deviations  $\varphi_j$ , via the product of the zeroth order Bessel functions. Therefore, the contrast is typically stronger reduced as compared to the single frequency case in figure 1.

## 2.2. Solution for the analytic second-order correlation function

With the spatial and temporal information of the particles arriving in the detection plane, it is possible to reveal the contrast  $K$  and spatial periodicity  $\lambda$  of the unperturbed interference pattern by correlation analysis. This is possible, because in the correlation function the spatial and temporal differences are taken into account in contrast to the temporally integrated interference pattern. Then, on timescales below the perturbation frequency, the interference pattern is still visible and not influenced by the perturbation. Furthermore, the characteristics of the perturbation (frequencies  $\omega_j$ , peak phase deviations  $\varphi_j$  and phases  $\phi_j$ ) can be determined from the correlation analysis.

With the probability distribution in equation (1), the second-order correlation function reads

$$g^{(2)}(u, \tau) = \frac{\langle\langle f(y+u, t+\tau)f(y, t) \rangle\rangle_{y,t}}{\langle\langle f(y+u, t+\tau) \rangle\rangle_{y,t} \langle\langle f(y, t) \rangle\rangle_{y,t}}, \quad (9)$$

with  $\langle\langle \cdot \rangle\rangle_{y,t}$  denoting the average over position and time

$$\langle\langle f(y, t) \rangle\rangle_{y,t} := \lim_{Y, T \rightarrow \infty} \frac{1}{TY} \int_0^T \int_{-Y/2}^{Y/2} f(y, t) dy dt. \quad (10)$$

If the acquisition time  $T$  and length  $Y$  are large compared to the involved perturbation frequencies  $T \gg 2\pi/\omega_j$  and spatial periodicity  $Y \gg \lambda$ , equation (9) can be solved analytically. First, the term  $\langle\langle f(y+u, t+\tau) \rangle\rangle_{y,t}$  in the denominator of equation (9) is calculated, using equations (1) and (10)

$$\begin{aligned}
 \langle\langle f(y + u, t + \tau) \rangle\rangle_{y,t} &= \lim_{Y,T \rightarrow \infty} \frac{f_0}{TY} \int_0^T \int_{-Y/2}^{Y/2} (1 + K \cos(k(y + u) + \varphi(t + \tau))) dy dt \\
 &= f_0 + \lim_{Y,T \rightarrow \infty} \frac{f_0 K}{TY} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{-Y/2}^{Y/2} (e^{i(k(y+u)+\varphi(t+\tau))} + \text{c.c.}) dy dt \\
 &= f_0 + \lim_{Y,T \rightarrow \infty} \frac{f_0 K}{TY} \left( e^{iku} \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-Y/2}^{Y/2} e^{iky} dy}_{=\sin(k\frac{Y}{2})/k} \int_0^T e^{i\varphi(t+\tau)} dt + \text{c.c.} \right). \tag{11}
 \end{aligned}$$

In the limit of large acquisition length  $Y \gg \lambda$ , the spatial limit becomes

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(k\frac{Y}{2}\right)}{kY} \rightarrow 0, \tag{12}$$

yielding

$$\langle\langle f(y + u, t + \tau) \rangle\rangle_{y,t} = f_0. \tag{13}$$

Using  $u = 0$  and  $\tau = 0$  in equation (11), the second term in the denominator becomes  $\langle\langle f(y, t) \rangle\rangle_{y,t} = f_0$ . This is expected, because shifts in time and space should not alter the long time and position average of the probability distribution.

Using equations (1) and (10), the numerator in equation (9) results in

$$\begin{aligned}
 &\langle\langle f(y + u, t + \tau)f(y, t) \rangle\rangle_{y,t} \\
 &= \lim_{Y,T \rightarrow \infty} \frac{f_0^2}{TY} \int_0^T \int_{-Y/2}^{Y/2} [1 + K \cos(k(y + u)\varphi(t + \tau)) + K \cos(ky + \varphi(t)) \\
 &\quad + K^2 \cos(k(y + u) + \varphi(t + \tau)) \cdot \cos(ky + \varphi(t))] dy dt. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Similar as before, the second and third term in equation (14) vanish, leaving

$$\begin{aligned}
 &\langle\langle f(y + u, t + \tau)f(y, t) \rangle\rangle_{y,t} \\
 &= f_0^2 + \lim_{Y,T \rightarrow \infty} \frac{f_0^2 K^2}{TY} \frac{1}{4} \int_0^T \int_{-Y/2}^{Y/2} (e^{-i(k(y+u)+\varphi(t+\tau))} + \text{c.c.})(e^{-i(ky+\varphi(t))} + \text{c.c.}) dy dt \\
 &= f_0^2 + \lim_{Y,T \rightarrow \infty} \frac{f_0^2 K^2}{TY} \frac{1}{4} \left( e^{-iku} \underbrace{\int_{-Y/2}^{Y/2} 1 dy}_{=Y} \int_0^T e^{-i(\varphi(t+\tau)-\varphi(t))} dt + \text{c.c.} \right. \\
 &\quad \left. + e^{-iku} \underbrace{\int_{-Y/2}^{Y/2} e^{-2iky} dy}_{=\frac{\sin(kY)}{k}} \int_0^T e^{-i(\varphi(t+\tau)+\varphi(t))} dt + \text{c.c.} \right). \tag{15}
 \end{aligned}$$

In the limit  $Y \gg \lambda$ , again  $\lim_{Y \rightarrow \infty} \sin(kY)/kY \rightarrow 0$ , yielding with equation (2)

$$\begin{aligned}
 \langle\langle f(y + u, t + \tau)f(y, t) \rangle\rangle_{y,t} &= f_0^2 + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f_0^2 K^2}{T} \frac{1}{4} \left( e^{-iku} \int_0^T e^{-i\sum_{j=1}^N \varphi_j \cos(\omega_j(t+\tau)+\phi_j)} e^{i\sum_{j=1}^N \varphi_j \cos(\omega_j t+\phi_j)} dt \right. \\
 &\quad \left. + e^{iku} \int_0^T e^{i\sum_{j=1}^N \varphi_j \cos(\omega_j(t+\tau)+\phi_j)} e^{-i\sum_{j=1}^N \varphi_j \cos(\omega_j t+\phi_j)} dt \right). \tag{16}
 \end{aligned}$$

Using equation (5) for  $N$  perturbation frequencies

$$e^{\pm i\sum_{j=1}^N \varphi_j \cos(\omega_j t+\phi_j)} = \prod_{j=1}^N \sum_{n_j=-\infty}^{+\infty} J_{n_j}(\varphi_j) e^{in_j(\omega_j t+\phi_j \pm \frac{\pi}{2})}, \tag{17}$$

equation (16) can be rewritten, yielding

$$\begin{aligned}
 \langle\langle f(y + u, t + \tau)f(y, t) \rangle\rangle_{y,t} &= f_0^2 + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f_0^2 K^2}{T} \frac{1}{4} \\
 &\cdot \left( e^{-iku} \int_0^T \prod_{j=1}^N \sum_{n_j, m_j} \underbrace{J_{n_j}(\varphi_j) J_{m_j}(\varphi_j) e^{im_j \omega_j \tau} e^{i[n_j(\phi_j + \frac{\pi}{2}) + m_j(\phi_j - \frac{\pi}{2})]}}_{=A_{n_j, m_j}^+} \cdot e^{i(n_j + m_j)\omega_j t} dt \right. \\
 &+ \left. e^{iku} \int_0^T \prod_{j=1}^N \sum_{n_j, m_j} \underbrace{J_{n_j}(\varphi_j) J_{m_j}(\varphi_j) e^{im_j \omega_j \tau} e^{i[n_j(\phi_j - \frac{\pi}{2}) + m_j(\phi_j + \frac{\pi}{2})]}}_{=A_{n_j, m_j}^-} \cdot e^{i(n_j + m_j)\omega_j t} dt \right) \\
 &= f_0^2 + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f_0^2 K^2}{T} \frac{1}{4} \\
 &\cdot \left( e^{-iku} \int_0^T \sum_{n_1, m_1} \dots \sum_{n_N, m_N} A_{n_1, m_1}^+ \dots A_{n_N, m_N}^+ \cdot e^{i(n_1 + m_1)\omega_1 t} \dots e^{i(n_N + m_N)\omega_N t} dt \right. \\
 &+ \left. e^{iku} \int_0^T \sum_{n_1, m_1} \dots \sum_{n_N, m_N} A_{n_1, m_1}^- \dots A_{n_N, m_N}^- \cdot e^{i(n_1 + m_1)\omega_1 t} \dots e^{i(n_N + m_N)\omega_N t} dt \right) \\
 &= f_0^2 + f_0^2 \frac{K^2}{4} \\
 &\cdot \left( e^{-iku} \sum_{n_1, m_1} \dots \sum_{n_N, m_N} A_{n_1, m_1}^+ \dots A_{n_N, m_N}^+ \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i \sum_{j=1}^N (n_j + m_j)\omega_j t} dt \right. \\
 &+ \left. e^{iku} \sum_{n_1, m_1} \dots \sum_{n_N, m_N} A_{n_1, m_1}^- \dots A_{n_N, m_N}^- \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i \sum_{j=1}^N (n_j + m_j)\omega_j t} dt \right). \tag{18}
 \end{aligned}$$

A closer look to the time integral reveals, that it can only become zero or one

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i \sum_{j=1}^N (n_j + m_j)\omega_j t} dt = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{j=1}^N (n_j + m_j)\omega_j = 0. \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{19}$$

This reduces the 2N sums in equation (18) to a (single) sum over all integer multiplets  $\{n_j, m_j\} \in \mathbb{Z}, j = 1 \dots N$  for which the constraint

$$\sum_{j=1}^N (n_j + m_j)\omega_j = 0 \tag{20}$$

is fulfilled. Here it shall be noted, that for a finite acquisition time  $T$ , the constraint has to be changed to

$$\left| \sum_{j=1}^N (n_j + m_j)\omega_j \right| < 2\pi/T, \tag{21}$$

because the minimal resolvable frequency is defined by the measurement time via  $1/T$ . In the following, however, it is assumed that  $T \rightarrow \infty$  and therefore equation (20) is used for the calculations and discussions. Trivially, equation (20) is satisfied for all integer multiplets with  $n_j = -m_j$ . However, depending on the specific values of  $\omega_j$ , the constraint might be fulfilled by additional integer multiplets  $\{n_j, m_j\}$  with  $n_j \neq -m_j$ . The constraint from equation (20) can be expressed mathematically by introducing a function  $c$

$$c : \mathbb{Z}^N \times \mathbb{Z}^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (n_{j=1 \dots N}, m_{j=1 \dots N}) \longmapsto \sum_{j=1}^N (n_j + m_j)\omega_j, \tag{22}$$

with the kernel of  $c$  ( $\ker(c)$ ) being the set of all integer multiplets  $\{n_j, m_j\} \in \mathbb{Z}, j = 1 \dots N$  for which  $c(n_{j=1 \dots N}, m_{j=1 \dots N}) = 0$  and therefore the constraint in equation (20) is fulfilled. Using this definition, equation (18) simplifies to

$$\langle\langle f(y + u, t + \tau)f(y, t) \rangle\rangle_{y,t} = f_0^2 + f_0^2 \frac{K^2}{4} \cdot \left( e^{-iku} \sum_{\substack{\{n_j, m_j\} \in \ker(c) \\ j=1 \dots N}} \prod_{j=1}^N A_{n_j, m_j}^+ + e^{iku} \sum_{\substack{\{n_j, m_j\} \in \ker(c) \\ j=1 \dots N}} \prod_{j=1}^N A_{n_j, m_j}^- \right). \tag{23}$$

Using the result of equations (13) and (23), the second-order correlation function in equation (9) now becomes

$$g^{(2)}(u, \tau) = 1 + \frac{K^2}{4} (e^{-iku} A_+ + e^{iku} A_-), \tag{24}$$

with

$$A_{\pm} = \sum_{\substack{\{n_j, m_j\} \in \ker(c) \\ j=1 \dots N}} \prod_{j=1}^N J_{n_j}(\varphi_j) J_{m_j}(\varphi_j) e^{im_j \omega_j \tau} \chi_{n_j, m_j}^{\pm} \tag{25}$$

$$\chi_{n_j, m_j}^{\pm} = e^{i \left[ n_j \left( \phi_j \pm \frac{\pi}{2} \right) + m_j \left( \phi_j \mp \frac{\pi}{2} \right) \right]}. \tag{26}$$

To calculate a more descriptive representation of the correlation function and to demonstrate, that  $g^{(2)}(u, \tau) \in \mathbb{R}$ , equations (24)–(26) can be further rewritten in terms of real and imaginary parts

$$\begin{aligned} g^{(2)}(u, \tau) &= 1 + \frac{K^2}{4} \sum_{\substack{\{n_j, m_j\} \in \ker(c) \\ j=1 \dots N}} \tilde{B}_{\{n_j, m_j\}}(\varphi_j) e^{i \left( \sum_{j=1}^N m_j \omega_j \tau + \sum_{j=1}^N \phi_j (m_j + n_j) \right)} \\ &\cdot \left[ e^{-i \left( ku + \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^N (m_j - n_j) \right)} + e^{i \left( ku + \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^N (m_j - n_j) \right)} \right] \\ &= 1 + \frac{K^2}{2} \sum_{\substack{\{n_j, m_j\} \in \ker(c) \\ j=1 \dots N}} \tilde{B}_{\{n_j, m_j\}}(\varphi_j) \cos(ku + \tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}) \\ &\cdot \left[ \cos \left( \sum_{j=1}^N m_j \omega_j \tau + \Phi_{\{n_j, m_j\}} \right) + i \cdot \sin \left( \sum_{j=1}^N m_j \omega_j \tau + \Phi_{\{n_j, m_j\}} \right) \right], \end{aligned} \tag{27}$$

with the product of the Bessel functions

$$\tilde{B}_{\{n_j, m_j\}}(\varphi_j) := \prod_{j=1}^N J_{n_j}(\varphi_j) J_{m_j}(\varphi_j). \tag{28}$$

The spatial correlation phase  $\tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}$  and temporal phase  $\Phi_{\{n_j, m_j\}}$  in equation (27) are given by

$$\tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}} := \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^N (m_j - n_j), \quad \Phi_{\{n_j, m_j\}} := \sum_{j=1}^N \phi_j (m_j + n_j). \tag{29}$$

If the constraint in equation (20) is fulfilled for a multiplet  $\{n_j, m_j\}$ , it is also satisfied for  $-\{n_j, m_j\}$ . With  $\tilde{B}_{-\{n_j, m_j\}}(\varphi_j) = (-1)^{\sum_j (n_j + m_j)} \tilde{B}_{\{n_j, m_j\}}(\varphi_j)$ ,  $\tilde{\varphi}_{-\{n_j, m_j\}} = -\tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}$  and  $\Phi_{-\{n_j, m_j\}} = -\Phi_{\{n_j, m_j\}}$ , it can be shown, that the addend with  $-\{n_j, m_j\}$  of the sum in equation (27) is complex conjugated to the addend with  $\{n_j, m_j\}$ . The addend of the zero multiplet  $\{0, 0\}$  is purely real valued. Therefore, the imaginary part vanishes after summing up all addends and equation (27) becomes real

$$g^{(2)}(u, \tau) = 1 + \frac{K^2}{2} \sum_{\substack{\{n_j, m_j\} \in \ker(c) \\ j=1 \dots N}} A_{\{n_j, m_j\}}(\tau, \Phi_{\{n_j, m_j\}}) \cos(ku + \tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}), \tag{30}$$

with the amplitude

$$A_{\{n_j, m_j\}}(\tau, \Phi_{\{n_j, m_j\}}) = \tilde{B}_{\{n_j, m_j\}}(\varphi_j) \cdot \cos \left( \sum_{j=1}^N m_j \omega_j \tau + \Phi_{\{n_j, m_j\}} \right). \tag{31}$$

Here, the sum has to be taken over all integer multiplets  $\{n_j, m_j\} \in \ker(c)$ ,  $j = 1 \dots N$  fulfilling the constraint in equation (20). In principle, the constraint is satisfied for an infinite number of multiplets each with their own contribution to the correlation function given by

$$a_{\{n_j, m_j\}}(u, \tau) = A_{\{n_j, m_j\}}(\tau, \Phi_{\{n_j, m_j\}}) \cos(ku + \tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}). \tag{32}$$

However, contributions with large values of  $\{n_j, m_j\}$  are suppressed, because the Bessel function (equation (28)) strongly decays for  $m_j > \varphi_j$  [62]. This limits the number of multiplets that have to be taken into account for the correlation analysis. The contribution to  $g^{(2)}(u, \tau)$  of each multiplet addend  $a_{\{n_j, m_j\}}(u, \tau)$  shows a periodic modulation in the correlation length  $u$  with the same spatial periodicity  $\lambda = 2\pi/k$  as the unperturbed interference pattern, but shifted in  $u$ -direction by the spatial correlation phase  $\tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}$ . The amplitude  $A_{\{n_j, m_j\}}(\tau, \Phi_{\{n_j, m_j\}})$  (equation (31)) of each multiplet addend  $a_{\{n_j, m_j\}}(u, \tau)$  depends on the correlation time  $\tau$  and the specific perturbation characteristics. It shows a periodic structure in  $\tau$  with the periodicity determined by the frequency component  $\sum_{j=1}^N m_j \omega_j$  with the coefficients  $\{n_j, m_j\} \in \ker(c)$ . This periodic structure is shifted in  $\tau$ -direction by the temporal phase  $\Phi_{\{n_j, m_j\}}$ . The amplitude of the modulation in  $\tau$ -direction is given by the peak phase deviations  $\varphi_j$ , via the product of the Bessel functions in equation (28).

After summing up all addends  $a_{\{n_j, m_j\}}(u, \tau)$ , the resulting correlation function (equation (30)) shows the same spatial periodicity  $\lambda$ . The overall amplitude is equal to 1 only at certain correlation times  $\tau$  given by the involved perturbation frequencies (see section 2.4). At these temporal positions, the contrast of the correlation function is  $K^2/2$  and therefore directly linked to the contrast of the unperturbed interference pattern  $K$ . For all other correlation times, the contrast of the correlation function is  $< K^2/2$ . It has to be noted, that the maximum contrast of the correlation function is  $K^2/2$  and therefore a factor of  $K/2$  lower than the contrast  $K$  of the unperturbed interference pattern.

The overall amplitude of the resulting correlation function includes the perturbation frequencies  $\omega_j$ , their harmonic frequencies as well as their differences and sums (intermodulation terms). All frequency components are given by the argument of the cosine  $\sum_{j=1}^N m_j \omega_j$  in equation (31). Approximately, the maximum frequency component per perturbation frequency included in the correlation function is given by  $m_{j, \max} \omega_j$ , with  $m_{j, \max} \approx \varphi_j$ , as larger frequency components are suppressed due to the strong decay of the Bessel function in equation (28) for  $m_j > \varphi_j$ . Therefore, the maximum frequency component of all perturbation frequencies included in the correlation function is approximately given by  $\max\{\varphi_j \omega_j\}$ .

### 2.3. Approximate solution for the second-order correlation function

In the following, an approximate solution for the correlation function is deduced, by taking into account only the trivial solution to the constraint in equation (20). These are the multiplets with  $n_j = -m_j$ , which typically give the main contribution to the correlation function. Using  $\Phi_{\{-m_j, m_j\}} = 0$ ,  $\tilde{\varphi}_{\{-m_j, m_j\}} = \pi \sum_{j=1}^N m_j$  and  $J_{-m_j}(\varphi_j) = (-1)^{m_j} J_{m_j}(\varphi_j)$ , equations (30) and (31) become

$$g^{(2)}(u, \tau) = 1 + \frac{K^2}{2} \cdot \sum_{\substack{\{-m_j, m_j\} \in \ker(c) \\ j=1 \dots N}} \left( \prod_{j=1}^N J_{m_j}(\varphi_j)^2 \right) \cos \left( \sum_{j=1}^N m_j \omega_j \tau \right) \underbrace{(-1)^{\sum_{j=1}^N m_j} \cos \left( ku + \pi \sum_{j=1}^N m_j \right)}_{=\cos(ku)}. \tag{33}$$

With  $\cos(\sum_{j=1}^N m_j \omega_j \tau) = \frac{1}{2}(e^{i \sum_{j=1}^N m_j \omega_j \tau} + e^{-i \sum_{j=1}^N m_j \omega_j \tau})$  and  $e^{i \sum_{j=1}^N m_j \omega_j \tau} = \prod_{j=1}^N e^{i m_j \omega_j \tau}$ , the approximate second-order correlation function yields

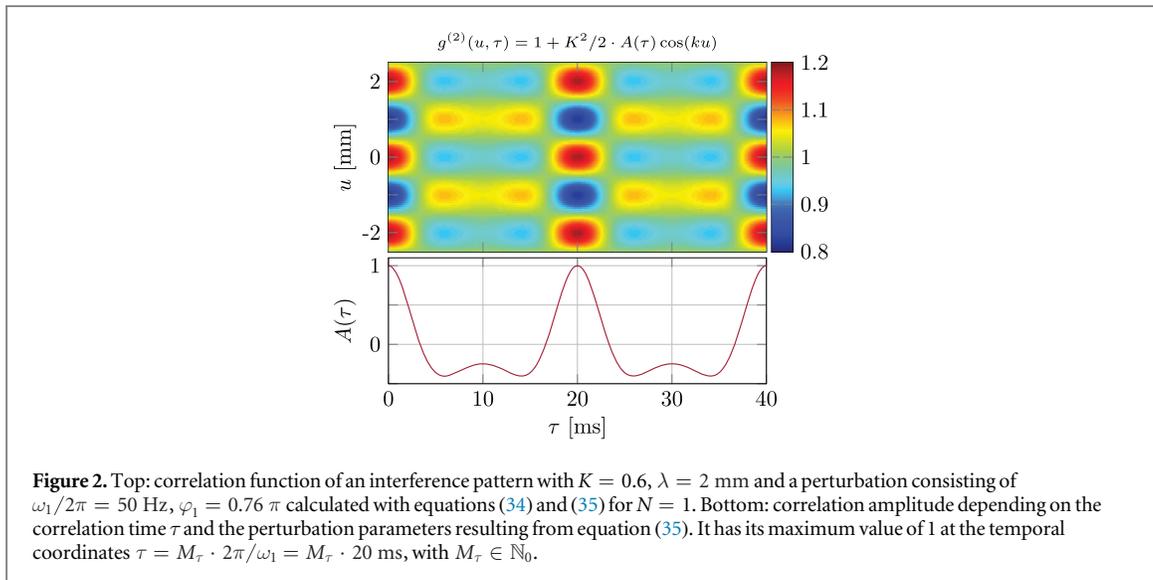
$$g^{(2)}(u, \tau) = 1 + \frac{K^2}{2} \cdot A(\tau) \cos(ku), \tag{34}$$

with the time-dependent amplitude

$$A(\tau) = \prod_{j=1}^N \left( \sum_{m_j=-\infty}^{\infty} J_{m_j}(\varphi_j)^2 \cos(m_j \omega_j \tau) \right) = \prod_{j=1}^N \left( J_0(\varphi_j)^2 + 2 \cdot \sum_{m_j=1}^{\infty} J_{m_j}(\varphi_j)^2 \cos(m_j \omega_j \tau) \right). \tag{35}$$

Similar to the explicit solution of the correlation function in equations (30) and (31), the spatial modulation of the approximate solution is given by the spatial periodicity  $\lambda$  of the unperturbed interference pattern. The approximate solution is independent of the spatial correlation phases  $\tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}$  and temporal phases  $\Phi_{\{n_j, m_j\}}$  (equation (29)). Therefore, the addends are not phase shifted with respect to each other in  $u$ - and  $\tau$ -direction.

Usually, the approximate correlation function in equation (34) can be used for the description of multifrequency perturbations. However, in the case of few perturbation frequencies, that are multiples of each other, the constraint in equation (20) is additionally fulfilled for  $n_j \neq -m_j$  and the explicit solution of the correlation function in equation (30) has to be applied. In the case of a single perturbation frequency, the constraint of equation (20) is only satisfied for  $m_j = -m_j$ . Thus, the explicit and approximate solution of the



correlation function are identical. This demonstrates that it depends on the specific perturbation spectrum if either the explicit or approximate solution has to be applied to describe the experimental correlation function correctly.

#### 2.4. Determination of contrast and spatial periodicity

The determination of the contrast  $K$  and spatial periodicity  $\lambda$  from the correlation function shall be discussed now. Both can only be correctly obtained at certain correlation times. As mentioned in sections 2.2 and 2.3, the explicit and approximate solution of the correlation function show a periodic modulation in  $u$ -direction having the same periodicity  $\lambda$  as the unperturbed interference pattern. The overall amplitude of this modulation (after summing up all multiplet addends) depends on the correlation time  $\tau$  resulting from the specific perturbation spectrum for both correlation functions (equations (30) and (34)). Its maximum value of 1 is achieved at  $\tau = M_\tau \tau_s$ ,  $M_\tau \in \mathbb{N}_0$ , with the superperiod  $\tau_s = 2\pi/\omega_{\text{gcd}}$  given by the reciprocal value of the greatest common divisor of all perturbation frequencies  $\text{gcd}(\omega_1, \dots, \omega_N) = \omega_{\text{gcd}}$ . For each frequency  $\omega_j$  there is an integer  $s_j \in \mathbb{N}$  for which  $\omega_{\text{gcd}} = \omega_j/s_j$ . At the temporal positions  $\tau = M_\tau \tau_s$ , only the addends with  $n_j = -m_j$  sum up to a maximum value of 1, because then the addends in equation (30) are not phase shifted in  $u$ - and  $\tau$ -direction with respect to each other. The sum of the addends with  $n_j \neq -m_j$  is equal to zero at these temporal positions. Therefore, the exact and approximate solution are identical at correlation times  $\tau = M_\tau \tau_s$ . Using equations (34) and (35), the correlation function then becomes

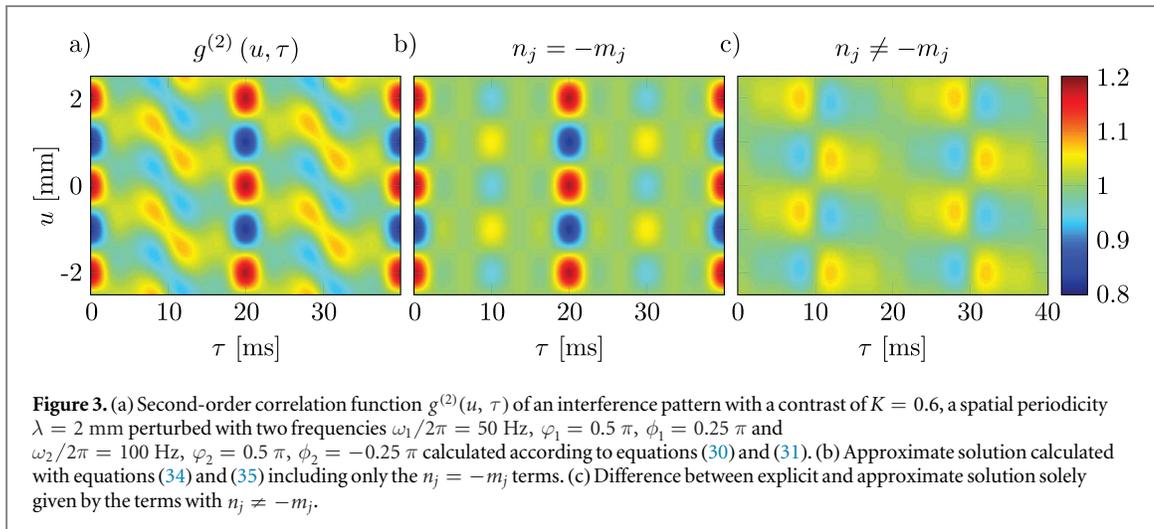
$$\begin{aligned}
 g^{(2)}(u, M_\tau \tau_s) &= 1 + \frac{K^2}{2} \cos(ku) \cdot \prod_{j=1}^N \left( \underbrace{\sum_{m_j=-\infty}^{\infty} J_{m_j}(\varphi_j)^2 \cos(2\pi M_\tau m_j s_j)}_{=1} \right) \\
 &= 1 + \frac{K^2}{2} \cos(ku), \tag{36}
 \end{aligned}$$

which is suitable to obtain the contrast  $K$  and pattern periodicity  $\lambda = 2\pi/k$  of the unperturbed interference pattern. If there is no greatest common divisor  $\omega_{\text{gcd}}$ , the superperiod  $\tau_s$  is infinite and the only position, where the amplitudes have a maximum value of 1, is at  $\tau = 0$ . Therefore, the determination of the contrast and spatial periodicity using equation (36) can always be applied to the correlation function at the correlation time of  $\tau = 0$ .

#### 2.5. Correlation function of single- and two-frequency perturbations

The properties of the explicit and approximate correlation function, discussed in sections 2.2 and 2.3, are illustrated below for single- and two-frequency perturbations. The commonalities and differences of both solutions are pointed out.

In the case of one perturbation frequency  $\omega_1$  ( $N = 1$ ), the constraint in equation (20) is only fulfilled for  $n_1 = -m_1$ . Thus, the explicit and approximate solution are identical. A correlation function of an interference pattern with  $K = 0.6$ ,  $\lambda = 2$  mm, a perturbation frequency  $\omega_1/2\pi = 50$  Hz and a peak phase deviation  $\varphi_1 = 0.76 \pi$  is calculated according to equations (34) and (35) for  $N = 1$  and plotted in figure 2 at the top,



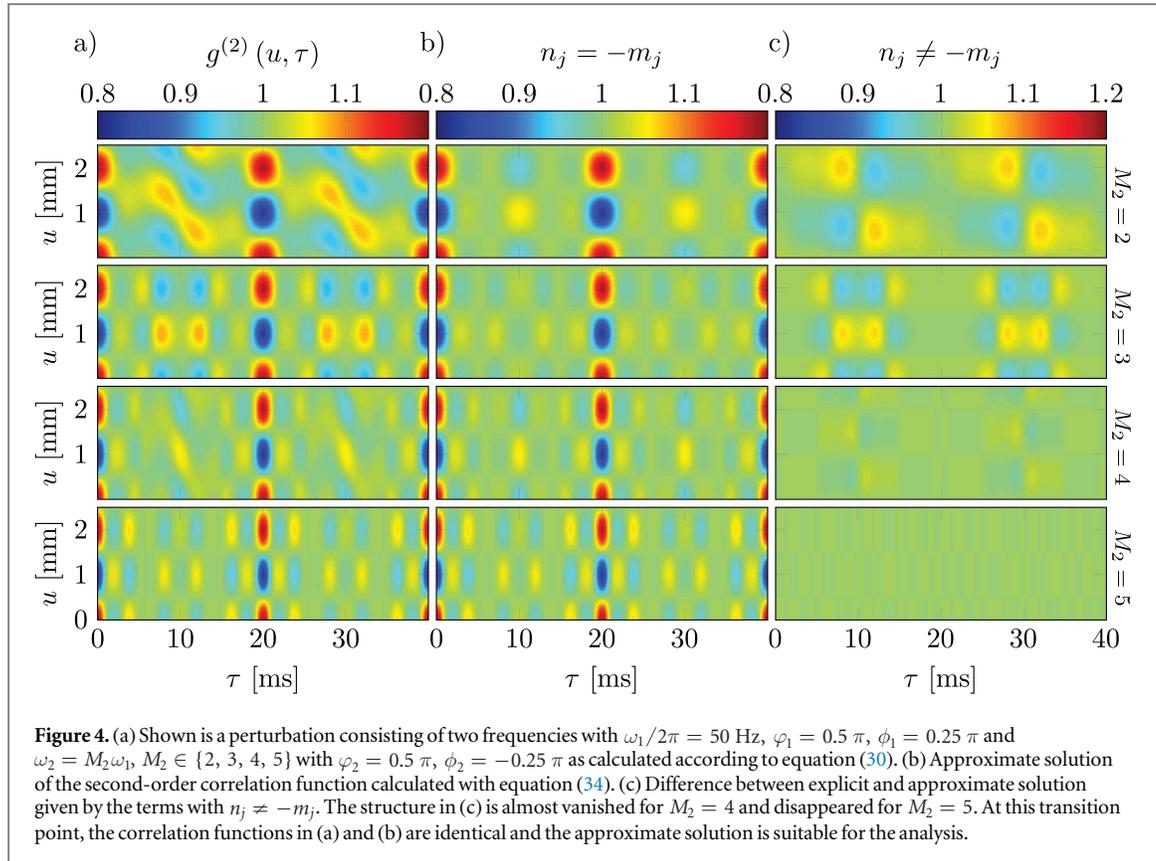
showing a clear periodic structure in the correlation length  $u$  and time  $\tau$ . As seen from equation (34), the spatial periodicity of the unperturbed interference pattern is recovered in the correlation function as modulation along  $u$ . At each  $\tau$ , however, the contrast is reduced to  $K^2/2 \cdot A(\tau)$ . As seen from equation (35) and figure 2 at the bottom, the amplitude  $A(\tau)$  reaches its maximum at correlation times that are multiples of the perturbation time period  $2\pi/\omega_1 = 20$  ms. Here,  $A(\tau)$  becomes 1 and the contrast in the correlation function  $K^2/2$  is directly linked to the contrast of the unperturbed interference pattern. According to equation (7) and figure 1, the integrated interference pattern would be completely ‘washed-out’ for these perturbation parameters. Using correlation theory, however, the contrast and spatial periodicity can be unveiled as described in section 2.4.

In the case of perturbation frequencies, that are multiples of each other, the explicit solution of the correlation function has to be used. This shall be demonstrated for two frequencies with  $\omega_2 = 2\omega_1$ . Here, equation (20) becomes  $(n_1 + m_1) = -2(n_2 + m_2)$  and the constraint is satisfied not only for integer multiplets with  $n_{1/2} = -m_{1/2}$ , but also for  $n_{1/2} \neq -m_{1/2}$ , as  $\{n_1, m_1, n_2, m_2\} = \{1, 1, -1, 0\}$ . These terms lead to additional contributions to the explicit correlation function in equation (30), causing a spatial and temporal phase shift due to the not vanishing phases  $\tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}$  and  $\Phi_{\{n_j, m_j\}}$  (equation (29)). Therefore, the approximate solution of equation (34) is not suitable, and the explicit solution has to be used. In figure 3(a), a second-order correlation function calculated with the explicit solution (equations (30) and (31)) is shown for an interference pattern with a contrast of  $K = 0.6$  and a spatial periodicity  $\lambda = 2$  mm perturbed with  $\omega_1/2\pi = 50$  Hz,  $\varphi_1 = 0.5\pi$ ,  $\phi_1 = 0.25\pi$  and  $\omega_2/2\pi = 100$  Hz,  $\varphi_2 = 0.5\pi$ ,  $\phi_2 = -0.25\pi$ . The approximate solution (equations (34) and (35)) including only the  $n_j = -m_j$  terms can be seen in figure 3(b) and differs clearly from the exact solution in (a). Both correlation functions, figures 3(a) and (b), show a periodic modulation in  $u$ -direction having the same periodicity  $\lambda$  as the unperturbed interference pattern. The superperiod  $\tau_s = 2\pi/\omega_{\text{gcd}} = 20$  ms can be identified in both correlation functions originating from the greatest common divisor of the involved perturbation frequencies  $\omega_{\text{gcd}}/2\pi = 50$  Hz. At correlation times, which are multiples of this superperiod, the explicit and approximate correlation function are identical and the amplitudes achieve their maximum value of 1 (see section 2.4). The difference between the exact and approximate solution, which is solely given due to the terms with  $n_j \neq -m_j$ , is illustrated in figure 3(c). Its contribution to the correlation function in figure 3(a) leads to the correlation time dependent phase shift of the pattern in  $u$ -direction originating from the spatial correlation phases  $\tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}$  and temporal phases  $\Phi_{\{n_j, m_j\}}$ .

## 2.6. Transition between explicit and approximate solution

As discussed in section 2.3, the explicit and approximate solution (equations (30) and (34)) are identical in the case of one perturbation frequency ( $N = 1$ ) and also in the case of numerous frequencies  $\omega_j$ , that are not multiples of each other. A common scenario, when both solutions differ from each other, is the case when the frequencies are multiples of each other, e.g. for  $N$  perturbation frequencies  $\omega_j = M_j\omega_1$  with  $j = 2 \dots N$ ,  $M_j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  and  $M_2 < \dots < M_N$ . Here, it shall be shown, that also in this case the approximate solution might be suitable to describe the correlation function.

The explicit solution turns into the approximate, if the largest contributing addend in equation (30) for  $n_j \neq -m_j$  is small compared to the largest addend with  $n_j = -m_j$ . The amplitudes of all addends are given by the peak phase deviations  $\varphi_j$ , via the product of the Bessel functions in equation (28). The maximum value of the



Bessel function  $J_m(\varphi)$  is approximately achieved, if the order is  $m \approx \varphi - 1$  for  $\varphi \geq 1$  and  $m = 0$  otherwise. Therefore, the amplitude of the largest addend with  $n_j = -m_j$  is given by

$$\tilde{B}_{\{n_j=-m_j\}}(\varphi_j) \approx \prod_{j=1}^N J_{\varphi_j-1}(\varphi_j)^2. \quad (37)$$

Using equation (20), the constraint for the integer multiplets  $\{n_j, m_j\} \in \ker(c)$  can be written as

$$(n_1 + m_1) = -\sum_{j=2}^N M_j(n_j + m_j). \quad (38)$$

This constraint is generally satisfied for the multiplet with  $n_j \neq -m_j$ , resulting in the largest contributing integer multiplet

$$\{n_1, m_1, n_2, m_2, n_3, m_3, \dots, n_N, m_N\} = \left\{ \frac{M_2}{2}, \frac{M_2}{2}, -(m_2 + 1), m_2, -m_3, m_3, \dots, -m_N, m_N \right\}. \quad (39)$$

Using this multiplet and  $m \approx \varphi - 1$  for the order of the Bessel function, the amplitude (equation (28)) of the largest addend with  $n_j \neq -m_j$  contributing to the correlation function is

$$\tilde{B}_{\{n_j \neq -m_j\}}(\varphi_j) \approx J_{\frac{M_2}{2}}(\varphi_1)^2 J_{-\varphi_2}(\varphi_2) J_{\varphi_2-1}(\varphi_2) \prod_{j=3}^N J_{\varphi_j-1}(\varphi_j)^2. \quad (40)$$

Here, the variable factor  $J_{\frac{M_2}{2}}(\varphi_1)^2$  is given by  $M_2 = \omega_2/\omega_1$  and determines the value of  $\tilde{B}_{\{n_j \neq -m_j\}}(\varphi_j)$ . The ratio of equations (37) and (40) is

$$\frac{\tilde{B}_{\{n_j \neq -m_j\}}(\varphi_j)}{\tilde{B}_{\{n_j = -m_j\}}(\varphi_j)} = \frac{J_{\frac{M_2}{2}}(\varphi_1)^2 J_{-\varphi_2}(\varphi_2)}{J_{\varphi_1-1}(\varphi_1)^2 J_{\varphi_2-1}(\varphi_2)}. \quad (41)$$

A closer look to the Bessel function unveils that  $J_{\frac{M_2}{2}}(\varphi_1)^2$  decays rapidly for  $M_2/2 > \varphi_1$ , which can be seen with the asymptotic form of the Bessel function for  $0 < \varphi_1 \ll \sqrt{n+1}$  [62]

$$J_n(\varphi_1) \approx \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left( \frac{\varphi_1}{2} \right)^n, \quad (42)$$

with  $\Gamma(n+1) = n!$  denoting the gamma function. Therefore, the explicit solution approaches rapidly to the approximate solution, once  $M_2 > 2\varphi_1$ .

Figure 4 shows an example for a two frequency perturbation with  $M_2 = \omega_2/\omega_1 = \{2, 3, 4, 5\}$ . For  $\varphi_1 = 0.5\pi$ , the explicit solution should closely approach the approximate once  $M_2 > 2\varphi_1 \approx 3$ , as can be seen in figure 4. For  $M_2 = 4$ , the structure in figure 4(c) is almost vanished. In this case, the leading term of equation (40) is about seven times smaller than  $\tilde{B}_{\{n_j=-m_j\}}(\varphi_j)$  in equation (37). The structure in figure 4(c) disappears for  $M_2 = 5$ . Here,  $\tilde{B}_{\{n_j \neq -m_j\}}(\varphi_j)$  is twenty-four times smaller than  $\tilde{B}_{\{n_j=-m_j\}}(\varphi_j)$  and has a negligible contribution to the correlation function. Therefore, the correlation functions in figures 4(a) and (b) for  $M_2 = 5$  are identical, proving the approximate solution to be suitable for the correlation analysis.

## 2.7. Amplitude spectrum of the second-order correlation function

As it might be difficult to identify the involved perturbation frequencies from the correlation function (see figure 3), the amplitude spectrum of the correlation function can be calculated and used for the determination of the perturbation characteristics [54]. This is possible, as the Fourier transform of the correlation function equals the power spectrum of the perturbed measurement signal according to the Wiener–Khinchine theorem [56, 57]. Therefore, the applied perturbation frequencies can be identified in the amplitude spectrum of  $g^{(2)}(u, \tau)$ . To determine the frequency components and their amplitudes, the temporal Fourier transform  $\mathcal{F}(g^{(2)}(u, \tau))(u, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g^{(2)}(u, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau$  of equation (30) is calculated

$$\mathcal{F}(g^{(2)}(u, \tau))(u, \omega) = \sqrt{2\pi} \delta(\omega) + \frac{K^2}{2} \cdot \sum_{\substack{\{n_j, m_j\} \in \ker(c) \\ j=1 \dots N}} \mathcal{F}(A_{\{n_j, m_j\}}(\tau, \Phi_{\{n_j, m_j\}}))(\omega) \cdot \cos(ku + \tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}), \quad (43)$$

with the Fourier transformed amplitude of equation (31)

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(A_{\{n_j, m_j\}}(\tau, \Phi_{\{n_j, m_j\}}))(\omega) \\ &= \frac{\tilde{B}_{\{n_j, m_j\}}(\varphi_j)}{2\sqrt{2\pi}} \left( e^{-i\Phi_{\{n_j, m_j\}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \sum_{j=1}^N m_j \omega_j) \tau} d\tau + e^{i\Phi_{\{n_j, m_j\}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega + \sum_{j=1}^N m_j \omega_j) \tau} d\tau \right) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} \tilde{B}_{\{n_j, m_j\}}(\varphi_j)}{2} \left[ e^{-i\Phi_{\{n_j, m_j\}}} \delta\left(\omega - \sum_{j=1}^N m_j \omega_j\right) + e^{i\Phi_{\{n_j, m_j\}}} \delta\left(\omega + \sum_{j=1}^N m_j \omega_j\right) \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

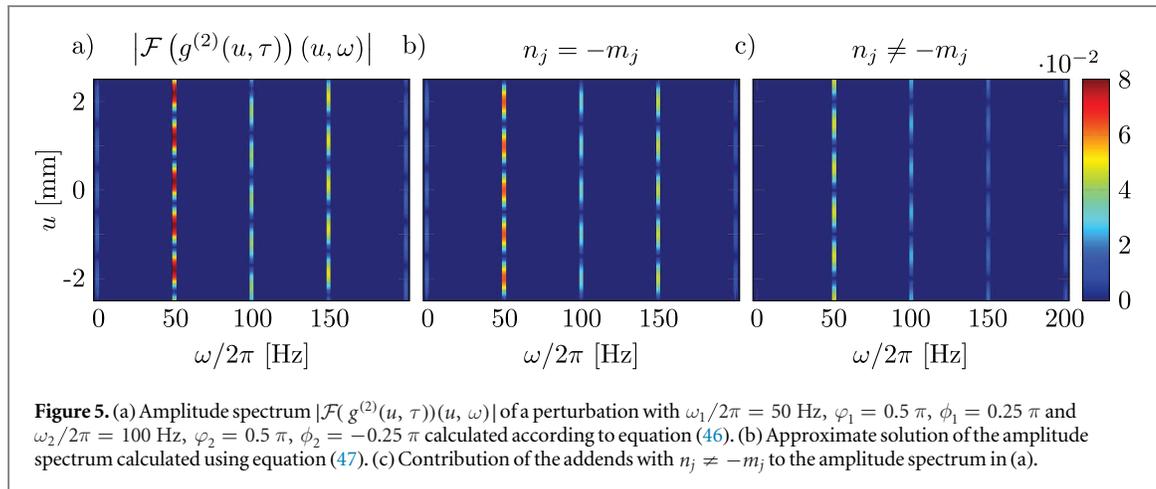
Using  $e^{\pm i\Phi_{\{n_j, m_j\}}} = \cos(\Phi_{\{n_j, m_j\}}) \pm i \cdot \sin(\Phi_{\{n_j, m_j\}})$  and  $\omega_{\{m_j\}} := \sum_{j=1}^N m_j \omega_j$ , the amplitude in equation (44) results in

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A_{\{n_j, m_j\}}(\tau, \Phi_{\{n_j, m_j\}}))(\omega) &= \sqrt{2\pi} \tilde{B}_{\{n_j, m_j\}}(\varphi_j) \\ &\cdot (\cos(\Phi_{\{n_j, m_j\}})(\delta(\omega + \omega_{\{m_j\}}) + \delta(\omega - \omega_{\{m_j\}})) \\ &+ i \cdot \sin(\Phi_{\{n_j, m_j\}})(\delta(\omega + \omega_{\{m_j\}}) - \delta(\omega - \omega_{\{m_j\}}))), \end{aligned} \quad (45)$$

where  $\omega_{\{m_j\}}$  are the frequency components and  $\delta(\omega)$  the Dirac delta function. The resulting amplitude spectrum  $|\mathcal{F}(g^{(2)}(u, \tau))(u, \omega)|$  calculated from equations (43) and (45) is given by

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} |\mathcal{F}(g^{(2)}(u, \tau))(u, \omega)|^2 = \delta(\omega)^2 \\ & + 2 \cdot \left( \frac{K^2}{2} \sum_{\substack{\{n_j, m_j\} \in \ker(c) \\ j=1 \dots N}} \tilde{B}_{\{n_j, m_j\}}(\varphi_j) \cdot \cos(ku + \tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}) \right. \\ & \left. \cdot \left( \cos\left(\Phi_{\{n_j, m_j\}} - \frac{\pi}{4}\right) \delta(\omega + \omega_{\{m_j\}}) + \cos\left(\Phi_{\{n_j, m_j\}} + \frac{\pi}{4}\right) \delta(\omega - \omega_{\{m_j\}}) \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (46)$$

As for the explicit correlation function in equation (30), the sum in equation (46) is taken over the integer multipliers  $\{n_j, m_j\} \in \ker(c)$ ,  $j = 1 \dots N$  resulting from the constraint in equation (20). Each addend shows a periodic structure in the correlation length  $u$  with the same spatial periodicity  $\lambda$  as the unperturbed interference pattern, but shifted in  $u$ -direction by the spatial correlation phase  $\tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}$  (equation (29)). The amplitude of this modulation depends on the peak phase deviation  $\varphi_j$ , via the product of the Bessel functions in equation (28) modified by the cosine of the temporal phase  $\Phi_{\{n_j, m_j\}}$  (equation (29)). The frequency position of the modulation is given by the frequency component  $\omega_{\{m_j\}} := \sum_{j=1}^N m_j \omega_j$  with the coefficients  $\{n_j, m_j\} \in \ker(c)$ . The summed up amplitude spectrum contains all frequency components up to a maximum frequency  $\max\{\varphi_j \omega_j\}$  resulting from the strong decay of the Bessel function as discussed for the explicit solution of the correlation function (equation (30)).



The amplitude spectrum of the approximate second-order correlation function in equation (34) is calculated from equation (46) using  $n_j = -m_j$  and reads

$$\frac{1}{2\pi} |\mathcal{F}(g^{(2)}(u, \tau))(u, \omega)|^2 = \delta(\omega)^2 + \left( \frac{K^2}{2} \cos(ku) \sum_{\substack{\{-m_j, m_j\} \in \ker(c) \\ j=1 \dots N}} \left( \prod_{j=1}^N J_{m_j}(\varphi_j)^2 \right) \cdot (\delta(\omega + \omega_{\{m_j\}}) + \delta(\omega - \omega_{\{m_j\}})) \right)^2. \quad (47)$$

As with the approximate solution, also the amplitude spectrum is independent from the spatial correlation phases  $\tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}$  and temporal phases  $\Phi_{\{n_j, m_j\}}$ . Therefore, the spatial periodicity in the amplitude spectrum is directly given by the periodicity of the unperturbed interference pattern. The amplitude of the modulation in  $u$ -direction is now solely given by the peak phase deviations  $\varphi_j$ , via the square of the Bessel functions.

The amplitude spectrum corresponding to the second-order correlation function of the two frequency perturbation shown in figure 3(a) is calculated according to equation (46) and plotted in figure 5(a) for positive frequency components. The amplitude spectrum of the approximate solution of equation (47) is plotted in figure 5(b). In figure 5(c), the contribution of the addends with  $n_j \neq -m_j$  to the explicit solution is shown. For each frequency component, given by  $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$  with  $\{n_1, m_1, n_2, m_2\} \in \ker(c)$ , the modulation of the unperturbed interference pattern with the periodicity  $\lambda$  can be identified in the spatial direction  $u$ . In figure 5(c), the phase shift of the interference pattern in the spatial direction is caused by the spatial phases  $\tilde{\varphi}_{\{n_j, m_j\}}$ . In figure 5(b), the interference pattern is not shifted in the spatial direction  $u$  and the amplitudes of the involved frequency components only depend on the peak phase deviations  $\varphi_j$  via the square of the Bessel functions in equation (47). As for the transition between the explicit and approximate correlation function discussed in section 2.6, the amplitude spectrum of the explicit correlation function (equation (46)) turns into the approximate solution (equation (47)), if the largest contributing addend in equation (40) is small compared to equation (37).

## 2.8. Determination of perturbation characteristics

The identification of unknown perturbation frequencies from the correlation function is difficult, because the structure of the correlation function does not reveal the frequencies directly (see figure 3). The amplitude spectrum offers a better access to the frequency components included in the correlation function. In [54], a numerical algorithm is described, which allows to identify unknown perturbation frequencies. After the determination of the perturbation frequencies  $\omega_j$ , either the explicit (equation (46)) or approximate solution (equation (47)) is applied, depending on the specific perturbation spectrum (see end of sections 2.3 and 2.6), to obtain the corresponding peak phase deviations  $\varphi_j$  and phases  $\phi_j$ . The latter are not uniquely determined, as the correlation function is invariant under phase transformations. However, it is possible to identify the original phases by the reconstruction of the unperturbed interference pattern with the obtained perturbation frequencies and amplitudes.

### 2.8.1. Invariance of the correlation function

As discussed in section 2.4, the contrast and pattern periodicity of the unperturbed interference pattern can be unveiled from the second-order correlation function. Using the amplitude spectrum, also the perturbation frequencies, amplitudes and phases can be determined (section 2.7). However, the perturbation phases can not be uniquely obtained. For a single perturbation frequency, for instance, the phase information is completely lost in the correlation function. However, for larger numbers of perturbation frequencies ( $N > 1$ ), the phase informations are not completely lost. For  $N > 1$ , only relative phase information can be unveiled. In this context, it is useful to understand under which phase transformation  $\phi_j \rightarrow \phi'_j$  the correlation function stays invariant.

As only time and position differences between particle events are taken into account, the second-order correlation function is invariant under position shifts  $y \rightarrow y + y_0$  and time transformations  $t \rightarrow t + t_0$ . Using equations (1) and (2) such a time transformation and position shift equals transformations

$$y \rightarrow y + y_0 \quad \cong \quad \varphi(t) \rightarrow \varphi(t) + ky_0, \quad (48)$$

$$t \rightarrow t + t_0 \quad \cong \quad \phi_j \rightarrow \phi_j + \omega_j t_0. \quad (49)$$

Furthermore, the correlation function is invariant under simultaneous time and space reversal:  $t \rightarrow -t$ ,  $y \rightarrow -y$ , because only time and space differences are taken into account. According to equations (1) and (2), this transformation equals a phase transformation

$$t \rightarrow -t, y \rightarrow -y \quad \cong \quad \phi_j \rightarrow -\phi_j + \pi. \quad (50)$$

Hence, under above phase transformations (equations (49) and (50)) the correlation function stays unchanged.

Exemplary, the invariance is calculated for a perturbation with two frequencies ( $N = 2$ ) and phases  $\phi_1$  and  $\phi_2$ . According to equation (49), the correlation function is invariant for following phase transformations

$$\hat{\phi}_1 = \phi_1 + \omega_1 t_0, \quad \hat{\phi}_2 = \phi_2 + \omega_2 t_0. \quad (51)$$

Eliminating  $t_0$  yields

$$\hat{\phi}_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} \hat{\phi}_1 + \left( \phi_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \phi_1 \right). \quad (52)$$

Every phase duplet  $\{\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2\}$  described by this equation, yields the same correlation function as the original phase duplet  $\{\phi_1, \phi_2\}$ . Therefore, the absolute phases  $\phi_1$  and  $\phi_2$  can not be uniquely determined by the correlation analysis. A second set of phase duplets  $\{\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2\}$  with identical correlation functions can be found after evaluating the phase transformation for time and space reversal from equation (50)

$$\tilde{\phi}_1 = -\hat{\phi}_1 + \pi, \quad \tilde{\phi}_2 = -\hat{\phi}_2 + \pi, \quad (53)$$

yielding together with equation (52)

$$\tilde{\phi}_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} \tilde{\phi}_1 + \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \phi_1 - \phi_2 + \pi \left( 1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \right). \quad (54)$$

As result, there are two linear equations (equations (52) and (54)), that describe the same correlation function. It is thus not possible to determine the original phases  $\phi_1$  and  $\phi_2$  from the correlation analysis.

### 2.8.2. Determination of perturbation phases

Although the original phases  $\phi_j$  can not be determined by the correlation analysis, the identification is possible by the reconstruction of the unperturbed interference pattern using the obtained perturbation parameters  $\omega_j$  and  $\varphi_j$  [54]

$$y_{i,\text{new}} = y_i - \frac{\lambda}{2\pi} \varphi(t_i) = y_i - \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{j=1}^N \varphi_j \cos(\omega_j t_i + \phi_j), \quad (55)$$

with the spatial coordinate of the reconstructed interference pattern  $y_{i,\text{new}}$ , the time-dependent perturbation  $\varphi(t_i)$  (equation (2)) and  $y_i, t_i$  the spatial and temporal coordinate of particle  $i$  forming the perturbed interference pattern. The phases  $\phi_j$  are varied until the maximum contrast of the reconstructed interference pattern is achieved. Using equations (52) or (54) in the reconstruction process, the free parameter space for the phases  $\phi_j$  can be reduced by one-dimension.

### 3. Numerical second-order correlation function

In this chapter, the characteristics of the numerical second-order correlation function used for the evaluation of the experimental data are analyzed in detail. First, the numerical correlation function is derived and investigated how the discretization affects the obtained parameters as contrast and perturbation amplitude. A theoretical description of the influence on the correlation analysis and the effect of noise is presented. This theory is numerically cross-checked by simulations of single-particle interference. Afterwards, the possibility to use the correlation analysis for broad-band frequency noise is demonstrated by a simulation with a Gaussian distributed noise. At the end of this chapter, the application limits of the second-order correlation theory are discussed.

#### 3.1. Correlation function for discrete signals

So far, the correlation function has been calculated from the analytic probability distribution of particle impacts at the detector. In reality, however, the detector yields a discrete signal of particle impacts for a finite acquisition time  $T$ . The corresponding second-order correlation function  $g^{(2)}(u, \tau)$  is thus extracted from this detector signal  $f(y, t)$  consisting of  $N$  particle arrival times  $t_i$  and coordinates  $y_i$  ( $i = 1 \dots N$ )

$$f(y, t) = \sum_{i=1}^N \delta(y - y_i) \delta(t - t_i). \quad (56)$$

Here,  $\delta$  denotes the Dirac delta function, which assures normalization of  $f(y, t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y, t) dy dt = N. \quad (57)$$

The approximation of the particle impacts in the detection plane by the Dirac delta function is suitable as the pulse width at the detector is much smaller than the mean time distance between particle impacts. Using this definition of the detector signal, the correlation function is calculated according to equation (9). As before, the denominator is calculated first

$$\begin{aligned} \langle\langle f(y + u, t + \tau) \rangle\rangle_{y,t} &= \frac{1}{TY} \int_0^T \int_{-Y/2}^{Y/2} \sum_{j=1}^N \delta(y + u - y_j) \delta(t + \tau - t_j) dy dt \\ &= \frac{1}{TY} \sum_{j=1}^N \underbrace{\int_0^T \delta(t - t_j + \tau) dt}_{=1} \underbrace{\int_{-Y/2}^{Y/2} \delta(y - y_j + u) dy}_{=1} \\ &= \frac{1}{TY} \sum_{j=1}^N 1 = \frac{N}{TY}, \end{aligned} \quad (58)$$

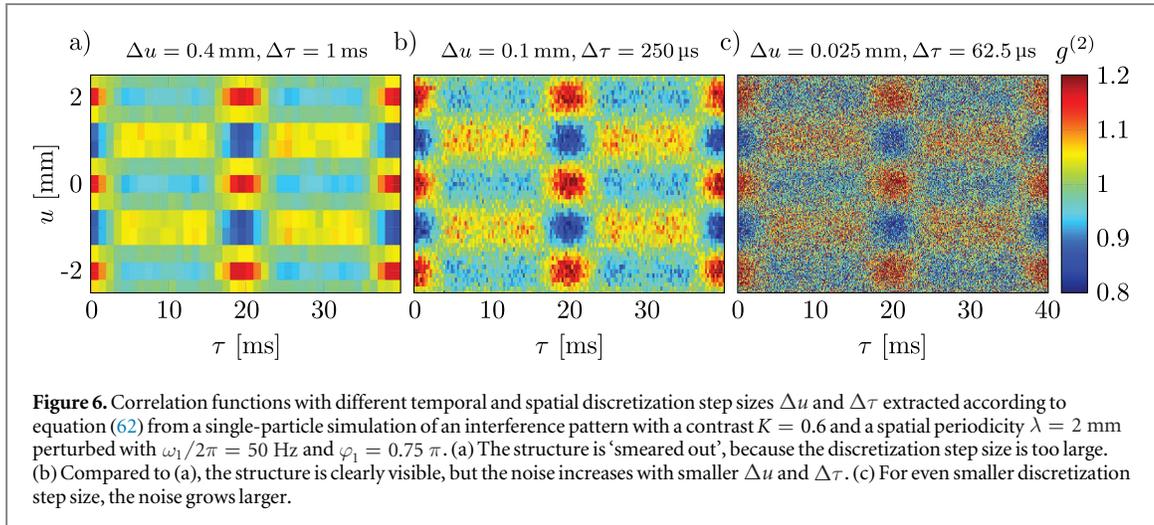
with the acquisition time  $T$  and length  $Y$ . The second term in the denominator can be determined from equation (58) for  $u = 0$  and  $\tau = 0$ , yielding  $\langle\langle f(y, t) \rangle\rangle_{y,t} = N/TY$ . Using equation (56), the numerator in equation (9) becomes

$$\begin{aligned} \langle\langle f(y + u, t + \tau) f(y, t) \rangle\rangle_{y,t} &= \frac{1}{TY} \int_0^T \int_{-Y/2}^{Y/2} \sum_{i,j=1}^N \delta(y + u - y_j) \delta(t + \tau - t_j) \delta(y - y_i) \delta(t - t_i) dy dt \\ &= \frac{1}{TY} \sum_{i,j=1}^N \underbrace{\int_0^T \delta(t + \tau - t_j) \delta(t - t_i) dt}_{=\delta(\tau + t_i - t_j)} \underbrace{\int_{-Y/2}^{Y/2} \delta(y + u - y_j) \delta(y - y_i) dy}_{=\delta(u + y_i - y_j)} \\ &= \frac{1}{TY} \sum_{i,j=1}^N \delta(\tau + t_i - t_j) \delta(u + y_i - y_j). \end{aligned} \quad (59)$$

With the results of equations (58) and (59), the discrete second-order correlation function is given by

$$\begin{aligned} g^{(2)}(u, \tau) &= \frac{\langle\langle f(y + u, t + \tau) f(y, t) \rangle\rangle_{y,t}}{\langle\langle f(y + u, t + \tau) \rangle\rangle_{y,t} \langle\langle f(y, t) \rangle\rangle_{y,t}} \\ &= \frac{TY}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \delta(\tau + t_i - t_j) \delta(u + y_i - y_j). \end{aligned} \quad (60)$$

To achieve a proper correlation function, which can be compared with the analytic theory, it is necessary to implement a temporal and spatial discretization step size  $\Delta\tau$  and  $\Delta u$  in equation (60), yielding



$$\begin{aligned}
 g^{(2)}(u, \tau) &= \frac{TY}{N^2} \frac{1}{\Delta \tau \Delta u} \int_{\tau - \frac{\Delta \tau}{2}}^{\tau + \frac{\Delta \tau}{2}} \int_{u - \frac{\Delta u}{2}}^{u + \frac{\Delta u}{2}} \underbrace{\sum_{i,j=1}^N \delta(\tau + t_i - t_j) \delta(u + y_i - y_j)}_{=N_{u,\tau}} dud\tau \\
 &= \frac{TY}{N^2 \Delta \tau \Delta u} N_{u,\tau},
 \end{aligned} \tag{61}$$

with  $N_{u,\tau}$  denoting the number of particle pairs  $(i, j)$  with distances  $(y_i - y_j) \in [u - \Delta u/2, u + \Delta u/2]$  and time separations  $(t_i - t_j) \in [\tau - \Delta \tau/2, \tau + \Delta \tau/2]$ .

Due to the finite acquisition time  $T$  and length  $Y$ , the probability to detect particle impacts with large temporal and spatial differences is reduced by a factor of  $(1 - \tau/T)$  and  $(1 - |u|/Y)$ , respectively. Therefore, the number  $N_{u,\tau}$  in equation (61) has to be corrected for this effect, resulting in

$$g^{(2)}(u, \tau) = \frac{TY}{N^2 \Delta \tau \Delta u} \frac{N_{u,\tau}}{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \left(1 - \frac{|u|}{Y}\right)}. \tag{62}$$

As with the analytic correlation function, the numerical correlation function in equation (62) is normalized to one.

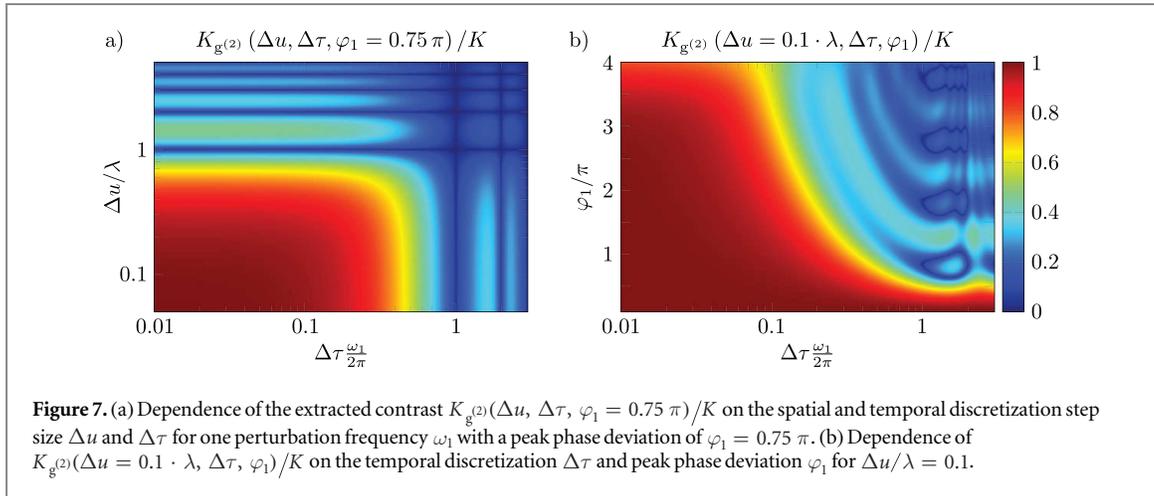
Three correlation functions with different spatial and temporal discretization step sizes are illustrated in figure 6. They are extracted using equation (62) from a single-particle simulation of an interference pattern (section 3.3) with a contrast  $K = 0.6$  and a spatial periodicity  $\lambda = 2$  mm perturbed with  $\omega_1/2\pi = 50$  Hz and  $\varphi_1 = 0.75\pi$ . If  $\Delta u$  and  $\Delta \tau$  are too large, the structure in the correlation function gets ‘smeared out’ as can be seen in figure 6(a). In contrast, the structure is clearly visible in figure 6(b). However, the noise in the correlation function increases compared to figure 6(a). This noise grows larger for even smaller discretization step size as seen in figure 6(c). Therefore, it is necessary to understand the effects of discretization and choose  $\Delta u$  and  $\Delta \tau$  in an appropriate way.

### 3.2. Discretization effects

In this section, the effects of the discretization step size on the correlation analysis and noise in the correlation function are analyzed. Therefore, the influence on the contrast and peak phase deviation due to the discretization of the correlation function is derived for one perturbation frequency. The theory reveals how the spatial and temporal discretization step size have to be chosen. Afterwards, a theoretical description for the noise in the correlation function and the corresponding amplitude spectrum is derived. Thereby, an optimum spatial discretization step size is found, resulting in a maximum signal-to-noise ratio. At the end, an estimation of the smallest detectable peak phase deviation is given.

#### 3.2.1. Influence on correlation analysis

To study the influence of the spatial and temporal discretization step size  $\Delta u$  and  $\Delta \tau$ , the analytic solution from equation (34) is used. For simplicity, only one perturbation frequency  $\omega_1$  is taken into account. Discretizing the correlation function into temporal and spatial intervals  $\Delta \tau$  and  $\Delta u$ , then yields



$$\begin{aligned}
g^{(2)}(u, \tau)_{\Delta u, \Delta\tau} &= \frac{1}{\Delta\tau \Delta u} \int_{u-\frac{\Delta u}{2}}^{u+\frac{\Delta u}{2}} \int_{\tau-\frac{\Delta\tau}{2}}^{\tau+\frac{\Delta\tau}{2}} g^{(2)}(u, \tau) d\tau du \\
&= 1 + \frac{K^2}{2} \frac{1}{\Delta u} \int_{u-\frac{\Delta u}{2}}^{u+\frac{\Delta u}{2}} \cos(ku) du \cdot \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} J_{m_1}(\varphi_1)^2 \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau-\frac{\Delta\tau}{2}}^{\tau+\frac{\Delta\tau}{2}} \cos(m_1\omega_1\tau) d\tau \\
&= 1 + \frac{K^2}{2} \cdot A(\tau)_{\Delta\tau} \operatorname{sinc}\left(k\frac{\Delta u}{2}\right) \cos(ku), \tag{63}
\end{aligned}$$

with the sinc-function  $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$  and the amplitude

$$A(\tau)_{\Delta\tau} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} J_{m_1}(\varphi_1)^2 \cdot \operatorname{sinc}\left(m_1\omega_1\frac{\Delta\tau}{2}\right) \cos(m_1\omega_1\tau). \tag{64}$$

For  $\Delta u = 0$  and  $\Delta\tau = 0$ , equations (63) and (64) yield the analytic solution of the correlation function in equations (34) and (35) for  $N = 1$ .

As discussed in section 2.4, the contrast  $K$  and spatial periodicity  $\lambda$  of the unperturbed interference pattern are determined from the correlation function at  $\tau = 0$  (equation (36)). For this correlation time, equations (63) and (64) become

$$g^{(2)}(u, 0)_{\Delta u, \Delta\tau} = 1 + \frac{K^2}{2} \cdot A(0)_{\Delta\tau} \operatorname{sinc}\left(k\frac{\Delta u}{2}\right) \cos(ku), \tag{65}$$

with

$$A(0)_{\Delta\tau} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} J_{m_1}(\varphi_1)^2 \cdot \operatorname{sinc}\left(m_1\omega_1\frac{\Delta\tau}{2}\right). \tag{66}$$

Thus, the spatial periodicity  $\lambda = 2\pi/k$  is not influenced by the discretization step size, but the extracted contrast  $K_{g^{(2)}}$  is modified to

$$K_{g^{(2)}}(\Delta u, \Delta\tau, \varphi_1) = K \cdot \sqrt{\left| A(0)_{\Delta\tau} \cdot \operatorname{sinc}\left(k\frac{\Delta u}{2}\right) \right|}. \tag{67}$$

This contrast is zero for multiples of  $\Delta\tau = 2\pi/\omega_1$  and  $\Delta u = \lambda$ , because the sinc-function is zero for this values. For  $\Delta\tau \rightarrow 0$  and  $\Delta u \rightarrow 0$ , the sinc-functions in equations (66) and (67) approach to 1. Full contrast  $K$  is only achieved for  $\Delta u = \Delta\tau = 0$ . The dependence of the extracted contrast  $K_{g^{(2)}}$  on  $\Delta\tau$  and  $\Delta u$  is illustrated in figure 7(a) for a peak phase deviation of  $\varphi_1 = 0.75\pi$ . The dependence of the extracted contrast on the temporal discretization step size  $\Delta\tau$  and the peak phase deviation  $\varphi_1$  is shown in figure 7(b) for  $\Delta u/\lambda = 0.1$ .

To determine the perturbation frequency  $\omega_1$  and corresponding peak phase deviation  $\varphi_1$  from the correlation function, the analytic amplitude spectrum of equation (47) is used. For discrete signals, the amplitude spectrum also depends on  $\Delta u$  and  $\Delta\tau$ . This dependence is calculated from equations (63) and (64) with a temporal Fourier transformation, yielding

$$\frac{1}{2\pi} |\mathcal{F}(g^{(2)}(u, \tau)_{\Delta u, \Delta \tau})(u, \omega)|^2 = \delta(\omega)^2 + \left( \frac{K^2}{2} \text{sinc} \left( k \frac{\Delta u}{2} \right) \cos(ku) \right. \\ \left. \cdot \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} J_{m_1}(\varphi_1)^2 \cdot \text{sinc} \left( m_1 \omega_1 \frac{\Delta \tau}{2} \right) (\delta(\omega + m_1 \omega_1) + \delta(\omega - m_1 \omega_1)) \right)^2, \quad (68)$$

with the frequency components  $\pm m_1 \omega_1$ . Comparing equation (68) with the analytic solution in equation (47) for  $N = 1$ , it can be seen, that the frequency components  $\pm m_1 \omega_1$  are not changed, but their amplitudes  $J_{m_1}(\varphi_1)^2$  are modified in equation (68) due to the spatial and temporal discretization. This dependence is calculated for the amplitude of the fundamental frequency component in equation (68) with  $m_1 = 1$  and  $u = 0$ , resulting in

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\mathcal{F}(g^{(2)}(0, \tau)_{\Delta u, \Delta \tau})(0, \omega_{\{m_1=1\}})| = \frac{K^2}{2} J_1(\bar{\varphi}_1)^2, \quad (69)$$

with the modified amplitude  $J_1(\bar{\varphi}_1)^2$  of the fundamental frequency component  $\omega_1$  depending on  $\Delta u$  and  $\Delta \tau$

$$J_1(\bar{\varphi}_1)^2 = \text{sinc} \left( k \frac{\Delta u}{2} \right) \text{sinc} \left( \omega_1 \frac{\Delta \tau}{2} \right) \cdot J_1(\varphi_1)^2. \quad (70)$$

Here, the amplitude of the fundamental frequency component  $J_1(\varphi_1)^2$  is reduced by the factor of  $\text{sinc} \left( k \frac{\Delta u}{2} \right) \text{sinc} \left( \omega_1 \frac{\Delta \tau}{2} \right)$ , which needs to be taken into account for the determination of  $\varphi_1$ . Therefore, the peak phase deviation  $\bar{\varphi}_1$  extracted from the amplitude spectrum of the correlation function also depends on the discretization step size via the square of the Bessel function. For  $\Delta u \rightarrow 0$  and  $\Delta \tau \rightarrow 0$ , equation (69) results in  $K^2/2 \cdot J_1(\varphi_1)^2$  yielding the correct peak phase deviation  $\varphi_1$ .

### 3.2.2. Influence of noise

As discussed in section 3.1, a real experiment requires the correlation function to be derived from a finite number of detection events. More precisely, it is calculated from the number of correlated particle pairs  $N_{u,\tau}$  within a given correlation window  $\Delta \tau$  and  $\Delta u$ . Due to the statistical nature of the particles,  $N_{u,\tau}$  is subject to Poissonian noise, which is transferred onto the correlation function and the corresponding amplitude spectrum. In principle, this limits the signal-to-noise ratio and the minimum detectable perturbation amplitude.

In the following section, this effect is estimated and optimal settings for the discretization step size are found. Therefore, all fluctuating variables  $X$  are described by their corresponding mean values  $\langle X \rangle$  and variances  $\sigma_X^2$ , with  $\sigma_X$  being the standard deviation

$$\sigma_X^2 = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2. \quad (71)$$

For simplicity reasons the analysis is restricted to correlation times  $\tau \ll T$  and positions  $u \ll Y$ . With the correlation function from equation (62) being normalized to 1, it can be found

$$g^{(2)}(u, \tau) = \frac{N_{u,\tau}}{\langle N_{u,\tau} \rangle} \quad \text{with} \quad \langle N_{u,\tau} \rangle = \frac{N^2 \Delta \tau \Delta u}{TY}. \quad (72)$$

The expected standard deviation can then be calculated yielding

$$\sigma_{g^{(2)}}^2 = \langle g^{(2)}(u, \tau)^2 \rangle - \langle g^{(2)}(u, \tau) \rangle^2 = \frac{\langle N_{u,\tau}^2 \rangle}{\langle N_{u,\tau} \rangle^2} - 1. \quad (73)$$

With  $N_{u,\tau}$  following a Poissonian distribution, variance and mean value are directly linked

$$\sigma_{N_{u,\tau}}^2 = \langle N_{u,\tau}^2 \rangle - \langle N_{u,\tau} \rangle^2 = \langle N_{u,\tau} \rangle, \quad (74)$$

yielding

$$\sigma_{g^{(2)}}^2 = \frac{1}{\langle N_{u,\tau} \rangle} = \frac{TY}{N^2 \Delta \tau \Delta u} = \frac{N_\tau N_u}{N^2}. \quad (75)$$

As expected, the variance (noise) of the correlation function depends on the total number of detected particles and the number of bins  $N_\tau = T/\Delta \tau$  and  $N_u = Y/\Delta u$  in the temporal and spatial direction.

Before calculating, how the noise in the correlation function transfers onto its amplitude spectrum, the correlation function is split in two parts: the first part  $g_{\text{id}}^{(2)}$  describing the ideal correlation function, as expected in the limit of infinite detection events and the second part  $f$  describing the noise only

$$g^{(2)}(\tau) = g_{\text{id}}^{(2)}(\tau) + f(\tau). \quad (76)$$

Obviously, mean values and standard deviations of these functions are given to

$$\langle g_{\text{id}}^{(2)} \rangle = \langle g^{(2)} \rangle, \quad \sigma_{g_{\text{id}}^{(2)}} = 0 \quad \text{and} \quad \langle f(\tau) \rangle = 0, \quad \sigma_f = \sigma_{g^{(2)}}. \quad (77)$$

Following this description, the amplitude spectrum of the correlation function reads

$$|\mathcal{G}(\omega)| = |\mathcal{G}_{id}(\omega) + \mathcal{F}(\omega)| \approx |\mathcal{G}_{id}(\omega)| + |\mathcal{F}(\omega)|, \tag{78}$$

with  $\mathcal{G}$  and  $\mathcal{F}$  denoting the discrete Fourier transforms of the time discrete signals  $g^{(2)}$  and  $f$

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\tau_{max}} \int_0^{\tau_{max}} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{\Delta\tau}{\tau_{max}} \sum_{n=1}^N f_n e^{i\omega\tau_n}. \tag{79}$$

Here,  $\tau_{max}$  denotes the maximum correlation time up to which the correlation function is evaluated. The noise in the spectrum is thus solely included in  $|\mathcal{F}(\omega)|$ . Using Parsival's theorem [63] together with  $N_{\tau_{max}} = \tau_{max}/\Delta\tau$ , it can be found

$$\langle |\mathcal{F}(\omega)|^2 \rangle = \frac{\sigma_f^2}{N_{\tau_{max}}} \quad \text{and} \quad \langle |\mathcal{F}(\omega)| \rangle^2 = \frac{\pi}{4} \frac{\sigma_f^2}{N_{\tau_{max}}} \tag{80}$$

and thus a direct link between the noise in the power spectrum and the noise in the correlation function (equation (75))

$$\sigma_{|\mathcal{F}(\omega)|}^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sigma_{g^{(2)}}^2}{N_{\tau_{max}}} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \frac{N_u}{N^2} \frac{T}{\tau_{max}}. \tag{81}$$

The signal-to-noise ratio  $\text{SNR}(\Delta u, \Delta\tau)$  of the amplitude spectrum used for the determination of the peak phase deviation  $\varphi_1$  can be calculated with equations (69), (70) and (81) yielding

$$\begin{aligned} \text{SNR}(\Delta u, \Delta\tau) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\mathcal{F}(g^{(2)}(0, \tau)_{\Delta u, \Delta\tau})(0, \omega_{\{m_1=1\}})|}{\sigma_{|\mathcal{F}(\omega)|}} \\ &= \frac{K^2 J_1(\varphi_1)^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) 2k}} \frac{\sin\left(k \frac{\Delta u}{2}\right)}{\left(k \frac{\Delta u}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \text{sinc}\left(\omega_1 \frac{\Delta\tau}{2}\right) \cdot \frac{N \sqrt{\tau_{max}/T}}{\sqrt{Y}} \\ &= \alpha \cdot \frac{\sin\left(k \frac{\Delta u}{2}\right)}{\left(k \frac{\Delta u}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \text{sinc}\left(\omega_1 \frac{\Delta\tau}{2}\right), \end{aligned} \tag{82}$$

with

$$\alpha = 0.6089 \cdot K^2 J_1(\varphi_1)^2 \cdot \frac{N \sqrt{\tau_{max}/T}}{\sqrt{Y/\lambda}}. \tag{83}$$

For  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , the sinc-function approaches to 1 and the signal-to-noise ratio only depends on the spatial discretization step size  $\Delta u$ . The function  $f\left(k \frac{\Delta u}{2}\right) = \frac{\sin\left(k \frac{\Delta u}{2}\right)}{\left(k \frac{\Delta u}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$  has a global maximum at the position  $k \frac{\Delta u_{opt}}{2} = 1.1656$  with the maximum value of  $f\left(k \frac{\Delta u_{opt}}{2}\right) = 0.8512$ . Hence, the optimum spatial discretization step size, leading to a maximum of the signal-to-noise ratio, becomes

$$\Delta u_{opt} = 0.371 \cdot \lambda. \tag{84}$$

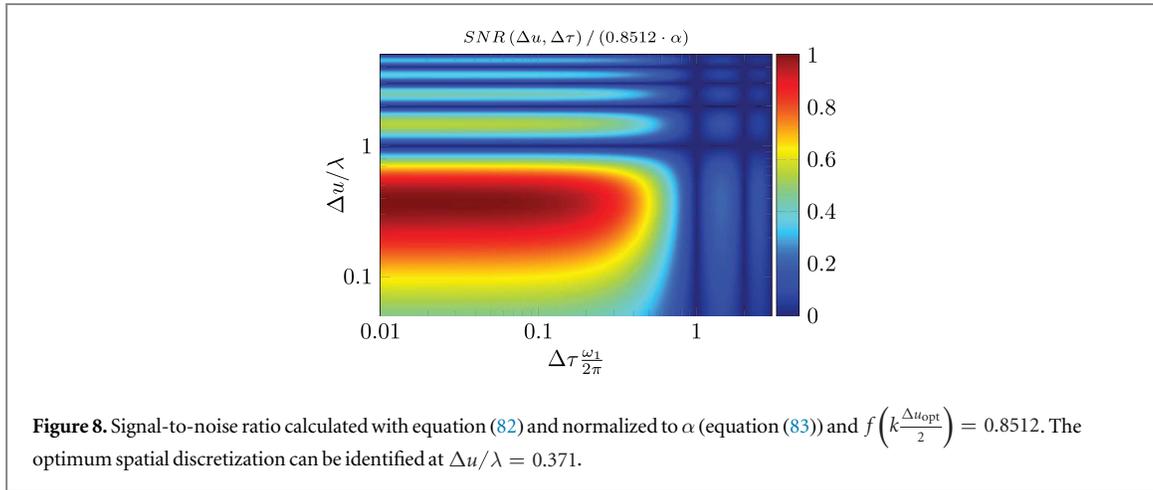
The signal-to-noise ratio calculated with equation (82) is plotted in figure 8 for different spatial and temporal discretization step sizes. The optimum spatial discretization step size is clearly visible at  $\Delta u/\lambda = 0.371$ . From equations (82) and (83), the optimum signal-to-noise ratio is deduced for  $\Delta u_{opt} = 0.371 \cdot \lambda$  and  $\Delta\tau \rightarrow 0$

$$\text{SNR}_{opt}(\Delta u_{opt} = 0.371 \cdot \lambda, \Delta\tau \rightarrow 0) = 0.5183 \cdot K^2 J_1(\varphi_1)^2 \cdot \frac{N \sqrt{\tau_{max}/T}}{\sqrt{Y/\lambda}}. \tag{85}$$

A lower limit for the identification of small peak phase deviations  $\varphi_1 \ll 1$  can be derived from equation (85) by setting  $\text{SNR}_{opt}$  equal to 1. This sets the threshold at which the noise and signal have equal amplitude. With  $J_1(\varphi_1)^2 \approx \varphi_1^2/4$  and equation (85), this yields

$$\varphi_{1,min} = 0.8842 \pi \cdot \frac{(Y/\lambda)^{\frac{1}{4}}}{KN^{\frac{1}{2}}(\tau_{max}/T)^{\frac{1}{4}}}. \tag{86}$$

For the measurement of small peak phase deviations it is thus favorable to have an interference pattern with large contrast  $K$  and pattern periodicity  $\lambda$ . Furthermore, a large number of particles  $N$  decreases the minimum detectable peak phase deviation.



### 3.3. Simulations of single-particle interference

To numerically cross-check the theoretical calculations in section 3.2, a set of  $N$  particles with temporal and spatial coordinates  $(t_i, y_i)$ ,  $i = 1 \dots N$  have been simulated. Therefore, time and position coordinates are generated according to the corresponding distribution functions using the acceptance-rejection method [64]. For the temporal coordinates, the probability distribution of time differences  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  between successive events is used, which for Poisson statistics is given by [65]

$$p(\Delta t) = e^{-cr\Delta t}. \quad (87)$$

Here,  $cr = N/T$  denotes the mean count rate. Following this distribution function, a set of  $N - 1$  time differences  $\Delta t_i$ ,  $i = 1 \dots N - 1$  is generated. Starting with the first event at  $t_1 = 0$ , the time steps for successive events are given by

$$t_j = \sum_{i=1}^{j-1} \Delta t_i. \quad (88)$$

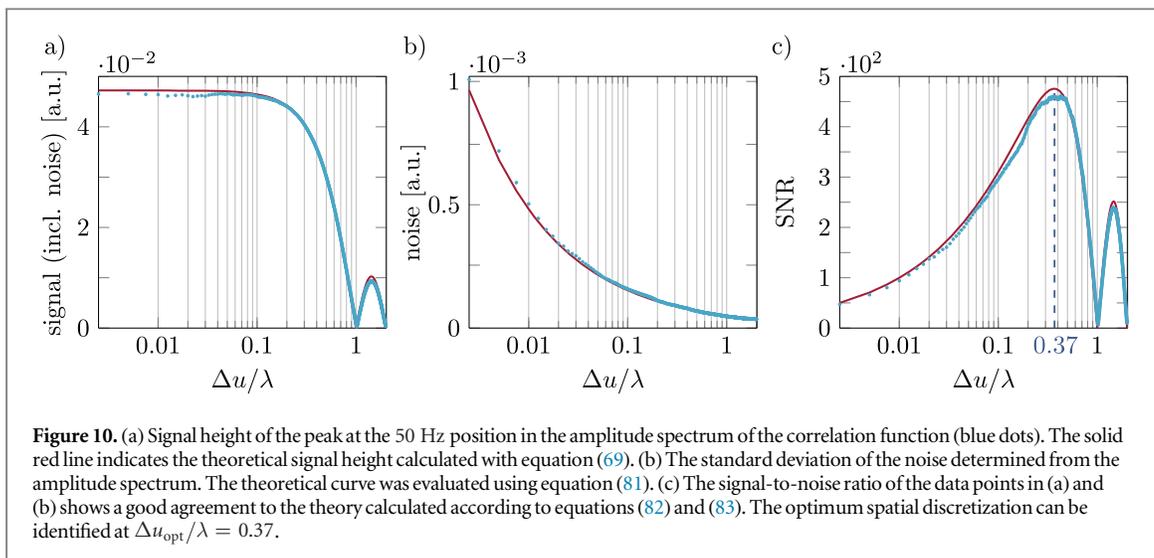
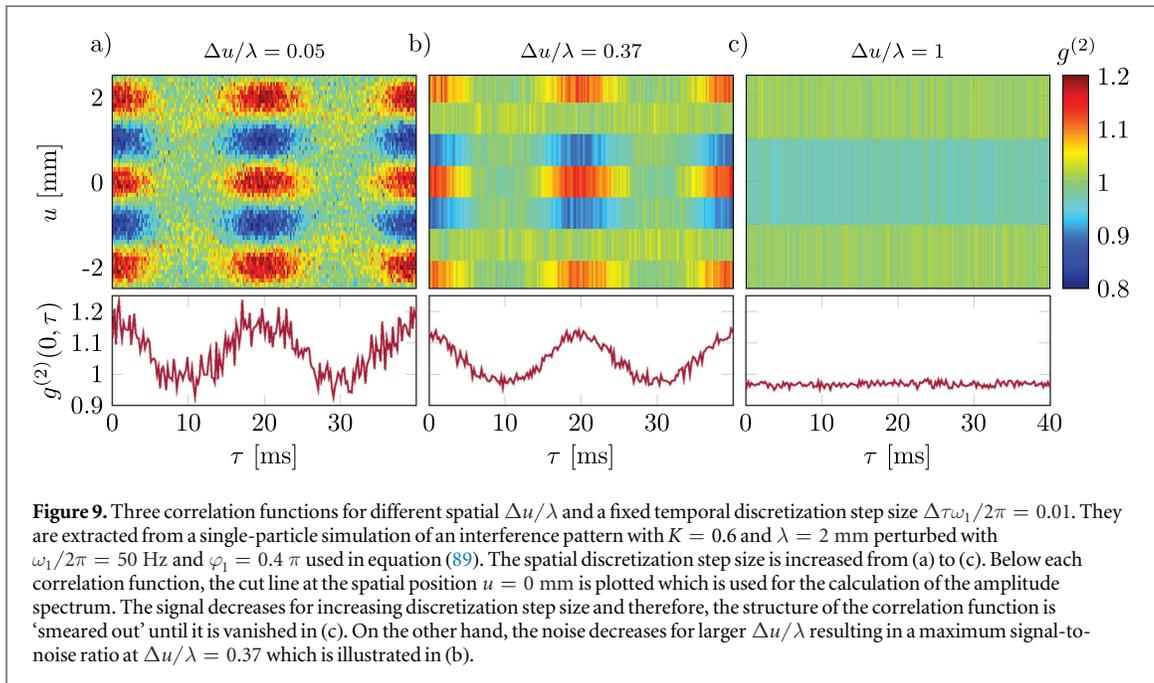
After having generated all time coordinates  $t_i$ , the corresponding spatial coordinates  $y_i$  are created according to the probability distribution

$$p(y, t_i) = 1 + K \cos(ky + \varphi(t_i)), \quad (89)$$

with the time-dependent perturbation  $\varphi(t_i)$  from equation (2). This results in a full set of time and position coordinates.

Such a simulation has been made for an interference pattern with a contrast of  $K = 0.6$ , a spatial periodicity of  $\lambda = 2$  mm and a single frequency perturbation  $\varphi(t)$  with  $\omega_1/2\pi = 50$  Hz and  $\varphi_1 = 0.4\pi$ . With an acquisition time of  $T = 39.05$  s and length  $Y = 20$  mm,  $1.95 \times 10^5$  particles have been simulated. This parameters have been chosen in accordance to typical experimental parameters [54]. The correlation function was extracted from the simulated data according to equation (62) for different spatial discretization step sizes ( $\Delta u$ ), a temporal discretization step size ( $\Delta\tau = 0.2$  ms) and a maximum correlation time of  $\tau_{\text{max}} = 1$  s. The temporal discretization step size is chosen to ensure that it does not reduce the signal-to-noise ratio (see figure 8 for  $\Delta\tau\frac{\omega_1}{2\pi} = 0.01$ ). Three correlation functions for different spatial discretization step sizes  $\Delta u$  are illustrated in figure 9. The cut line at  $u = 0$  mm plotted below each correlation function shows that the signal decreases for increasing  $\Delta u$  from figures 9(a)–(c). Therefore, the structure in the correlation function is ‘smeared out’. Additionally, the noise decreases for a larger spatial discretization step size, because the mean particle number increases (equation (75)). The relation between this two effects leads to an optimum  $\Delta u_{\text{opt}} = 0.371 \cdot \lambda$  (equation (84)) that provides a maximum of the signal-to-noise ratio (see equation (85)), which is illustrated in figure 9(b).

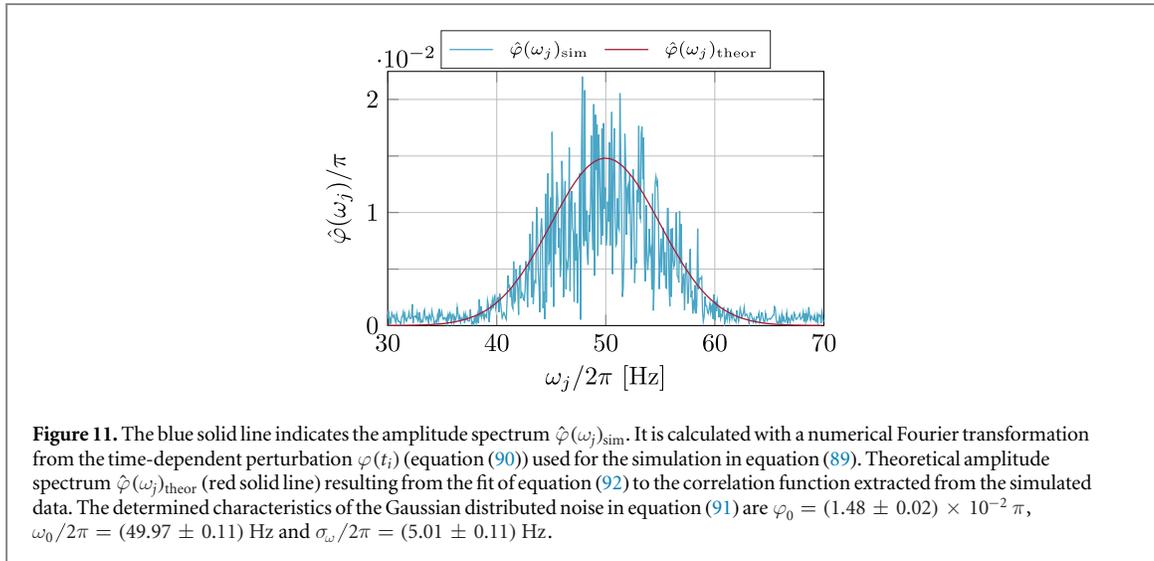
As the correlation functions in figure 9, many correlation functions with different spatial discretisation step sizes ranging from  $\Delta u = 0.009\lambda$  to  $\Delta u = 2\lambda$  are extracted from the above simulation according to equation (62). For each correlation function, the amplitude spectrum was calculated at the spatial position  $u = 0$  mm using a numerical Fourier transformation. The signal height of the peak at the 50 Hz position and the standard deviation of the noise were determined in each spectrum. The result for the extracted signal height is plotted in figure 10(a) (blue dots). The standard deviation of the noise is shown in 10(b) and the signal-to-noise ratio in figure 10(c). The theoretical curve in figure 10(a) (red solid line) was calculated using equation (69) with the parameters of the simulation. For  $\Delta u/\lambda > 0.1$ , the signal height is significantly reduced, because the structure in the correlation functions begins to ‘smear out’ (see figure 9(b)) until it is totally vanished for



$\Delta u/\lambda = 1$  (see figure 9(c)). The theoretical curve in figure 10(b) is evaluated with equation (81) indicating that the noise is reduced for larger  $\Delta u/\lambda$  due to the increasing mean particle number  $\langle N_{u,\tau} \rangle$  in equation (75). The theoretical signal-to-noise ratio in figure 10(c) is calculated according to equations (82) and (83) illustrating the predicted optimum at  $\Delta u_{\text{opt}}/\lambda = 0.37$ . The corresponding correlation function is shown in figure 9(b). The minimum detectable peak phase deviation in equation (86) can be calculated with the above values and yields  $\varphi_{1,\text{min}} = 1.49 \times 10^{-2} \pi$ .

### 3.4. Correlation analysis of broad-band frequency noise

To demonstrate the possibility, using the correlation analysis to describe not only single perturbation frequencies but also broad-band noise spectra, the following single-particle simulation has been made. The temporal coordinates  $t_i$  of the particles are generated in the same way as described in section 3.3. The perturbation caused by a broad-band frequency noise is given by the corresponding amplitude spectrum  $\hat{\varphi}(\omega_j)$  and phase spectrum  $\hat{\Phi}(\omega_j)$ . This is different to the former simulation, where the time-dependent perturbation  $\varphi(t_i)$  was given by equation (2). With the amplitude and phase spectrum, the time-dependent perturbation  $\varphi(t_i)$  for the temporal coordinate  $t_i$  can be calculated using a discrete Fourier transformation



$$\varphi(t_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} N_\omega} \sum_{j=1}^{N_\omega} \hat{\varphi}(\omega_j) e^{i\hat{\Phi}(\omega_j)} e^{-i\omega_j t_i}, \quad (90)$$

with the number of frequencies in the spectrum  $N_\omega$ . The spatial coordinate  $y_i$  is determined as before according to the probability distribution (equation (89)) with the calculated phase shift of equation (90). For the simulation demonstrated here, a Gaussian distributed noise spectrum with uncorrelated phases is applied. The discrete amplitude spectrum is thus given by

$$\hat{\varphi}(\omega_j) = \varphi_0 \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\omega_j - \omega_0}{\sigma_\omega} \right)^2} \quad (91)$$

and the phase spectrum  $\hat{\Phi}(\omega_j)$  is randomly distributed between  $-\pi$  and  $\pi$ . Here,  $\varphi_0$  denotes the maximum peak phase deviation,  $\omega_0$  the central frequency and  $\sigma_\omega$  the frequency standard deviation (band width).

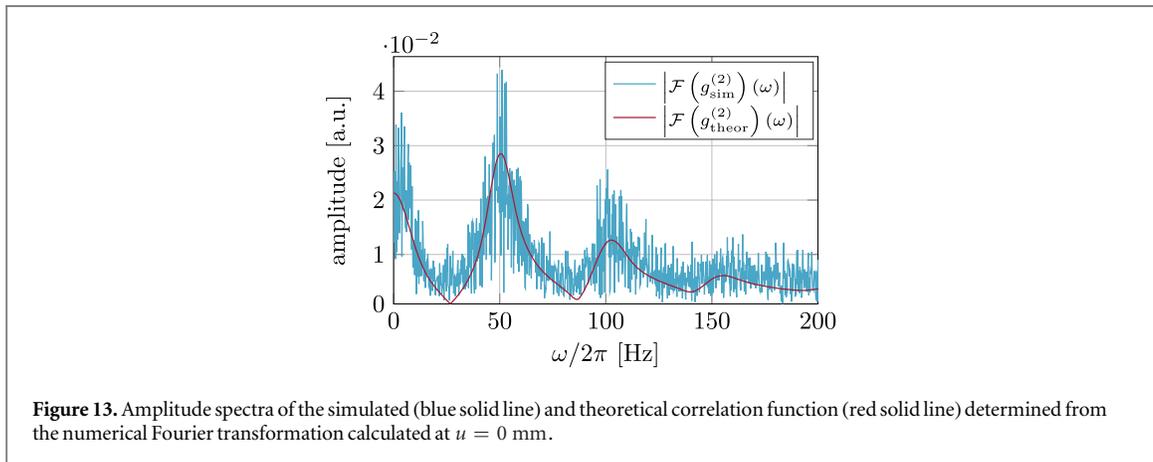
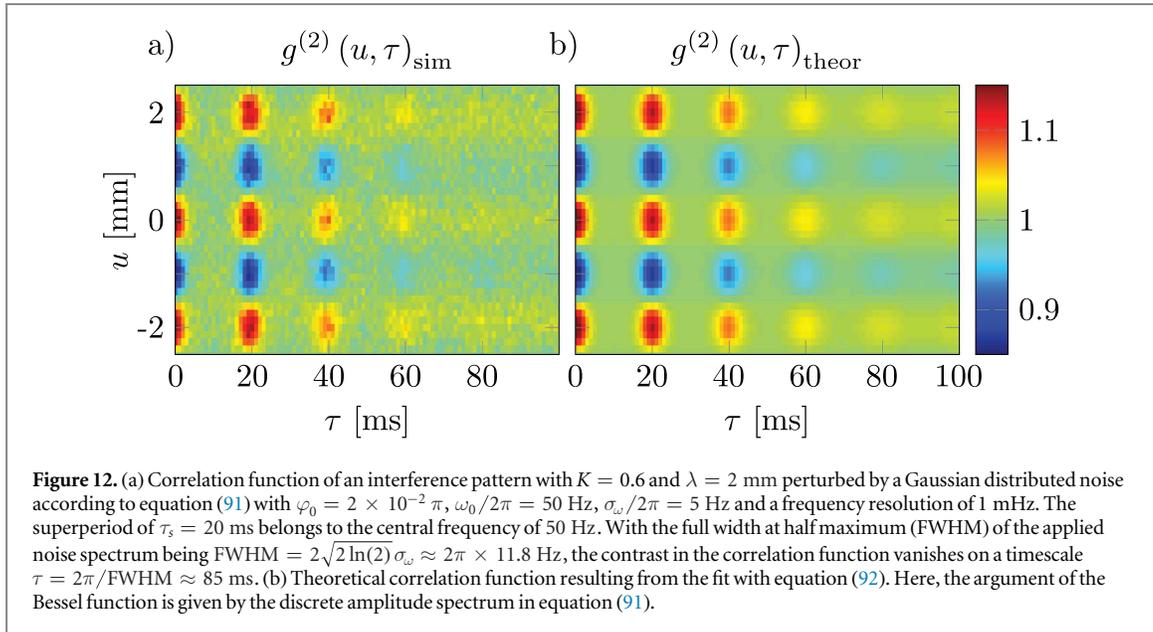
An interference pattern consisting of  $5 \times 10^5$  particles acquired in 100 s with a contrast of  $K = 0.6$  and a spatial periodicity  $\lambda = 2$  mm was perturbed by a Gaussian distributed noise according to equation (91) with  $\varphi_0 = 2 \times 10^{-2} \pi$ ,  $\omega_0/2\pi = 50$  Hz and  $\sigma_\omega/2\pi = 5$  Hz. The frequency spectrum used for the simulation ranges from 30 to 70 Hz with a resolution of 1 mHz. After the simulation, the amplitude spectrum  $\hat{\varphi}(\omega_j)_{\text{sim}}$  of the created time-dependent perturbation (equation (90)) is calculated using a numerical Fourier transformation and plotted in figure 11 (blue solid line). The noise on the Gaussian distribution originates from the finite acquisition time and the randomly chosen phases.

The correlation function of the simulated interference pattern is extracted according to equation (62) with a spatial and temporal discretization of  $\Delta u = 67 \mu\text{m}$  and  $\Delta \tau = 1$  ms, that were chosen to have a good signal in the correlation function. In figure 12(a), the resulting correlation function  $g^{(2)}(u, \tau)_{\text{sim}}$  is shown. The contrast  $K_g^{(2)} = 0.587 \pm 0.003$  and spatial periodicity  $\lambda_g^{(2)} = (1.996 \pm 0.001)$  mm are determined by fitting equation (36) to the correlation function at the temporal position  $\tau = 0$  ms (see section 2.4). The superperiod of  $\tau_s = 20$  ms belongs to the central frequency of 50 Hz. The contrast of the correlation function decays on timescales of  $\tau \propto 2\pi/\sigma_\omega$ . In figure 12(a), the contrast is almost vanished for  $\tau > 85$  ms. This point is shifted to higher correlation times for smaller  $\sigma_\omega$  until the single frequency case with  $\omega_1/2\pi = 50$  Hz is reached. For larger  $\sigma_\omega$ , more frequency components with random phases contribute to the perturbation and the resulting time-dependent perturbation  $\varphi(t_i)$  becomes more uncorrelated between two time stamps. Therefore, the corresponding particles are also uncorrelated and the contrast in the correlation function vanishes for shorter correlation times until it is completely lost.

To determine the characteristics of the Gaussian distributed noise ( $\varphi_0$ ,  $\omega_0$  and  $\sigma_\omega$ ), equations (34) and (35) are used together with the amplitude spectrum of the applied perturbation  $\hat{\varphi}(\omega_j)$  in equation (91) as argument of the Bessel function

$$g^{(2)}(u, \tau) = 1 + \frac{K_g^{(2)}}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_g^{(2)}} u\right) \cdot \prod_{j=1}^{N_\omega} \left( \sum_{m_j=-\infty}^{\infty} J_{m_j}(\hat{\varphi}(\omega_j))^2 \cos(m_j \omega_j \tau) \right). \quad (92)$$

The approximate correlation function can be used for the theoretical description of broad-band frequency noise as long as the number of involved frequencies is large enough, so that the constraint in equation (20) is only fulfilled for  $n_j = -m_j$ . The contrast  $K_g^{(2)}$  and spatial periodicity  $\lambda_g^{(2)}$  extracted according to section 2.4 are fixed parameters for the fit to the correlation function of the simulation in figure 12(a). The fit parameters are  $\varphi_0$ ,  $\omega_0$



and  $\sigma_\omega$  in the discrete amplitude spectrum of the Gaussian distributed noise (equation (91)). The resulting theoretical correlation function  $g^{(2)}(u, \tau)_{\text{theor}}$  is illustrated in figure 12(b) and shows a good agreement with the correlation function of the simulation. The corresponding amplitude spectrum  $\hat{\varphi}(\omega_j)_{\text{theor}}$  resulting from the fitted theoretical correlation function is plotted in figure 11 (red solid line). It is also in good agreement with the amplitude spectrum of the applied perturbation (blue solid line). The determined characteristics of the Gaussian distributed noise in equation (91) are  $\varphi_0 = (1.48 \pm 0.02) \times 10^{-2} \pi$ ,  $\omega_0/2\pi = (49.97 \pm 0.11)$  Hz and  $\sigma_\omega/2\pi = (5.01 \pm 0.11)$  Hz, which are in good agreement with the original values.

In figure 13, the amplitude spectra of the simulated and theoretical correlation function,  $|\mathcal{F}(g^{(2)}(0, \tau)_{\text{sim}})(0, \omega)|$  (blue solid line) and  $|\mathcal{F}(g^{(2)}(0, \tau)_{\text{theor}})(0, \omega)|$  (red solid line), are plotted. Both are calculated with a numerical Fourier transformation at  $u = 0$  mm with a frequency resolution of 100 mHz. The theoretical amplitude spectrum agrees well with the simulation. The theoretical description of the amplitude spectrum of the correlation function is given by equation (47) for  $u = 0$  mm and positive frequencies using the amplitude spectrum of the perturbation in equation (91) as argument of the Bessel function

$$\frac{1}{2\pi} |\mathcal{F}(g^{(2)}(0, \tau))(0, \omega)|^2 = \delta(\omega)^2 + \left( \frac{K_g^{(2)}}{2} \sum_{\substack{\{-m_j, m_j\} \in \ker(\epsilon) \\ j=1 \dots N_\omega}} \left( \prod_{j=1}^{N_\omega} J_{m_j}(\hat{\varphi}(\omega_j)) \right)^2 \cdot \delta(\omega - \omega_{\{m_j\}}) \right)^2. \quad (93)$$

The broad frequency distribution around 50 Hz originates from the fundamental frequencies of the applied perturbation. They are represented in equation (93) by the first order of the Bessel function ( $m_j = 1$ ). The distributions around 0 and 100 Hz are generated by the sum and difference frequencies (intermodulation terms) of the perturbation frequencies. Additionally, the distribution around 150 Hz originates from the sum of three frequency components of the applied perturbation.

If the properties of the applied perturbation are not known *a priori*, the amplitude spectrum can be used to get a reference to the shape and frequency characteristics, because they are included in the spectrum. In figure 13, the central frequency of 50 Hz can be identified at the position of the maximum frequency distribution in the amplitude spectrum and used as starting value for the theoretical fit function (equation (92)). If the central frequency of the perturbation would have been 100 Hz, for example, the distribution around 50 Hz would not be present in the spectrum. The frequency standard deviation of the frequency distribution around 50 Hz is broadened because of additional terms in equation (93), that do not correspond to the fundamental perturbation frequencies ( $m_j = 1$ ). However, it can be used as maximum frequency standard deviation for the theoretical fit function. The applied perturbation spectrum can be identified, if the frequency distributions contained in the resulting amplitude spectrum are separated. They can overlap, if the amplitudes of the perturbation spectrum are large or for very broad spectra.

### 3.5. Application limits of the second-order correlation analysis

The second-order correlation analysis can not be applied under all conditions. Especially, the possibility to determine the perturbation frequency and amplitude is crucial. Therefore, the limits of the applicability of the second-order correlation analysis shall be pointed out.

If the time of flight  $t_{\text{tof}}$ , that the particles spend in the area of perturbation, is much shorter than the cycle time of the oscillation ( $t_{\text{tof}} \ll 2\pi/\omega_1$ ) each particle probes the perturbation  $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$  at a constant time, yielding a phase shift

$$\varphi(t) \sim \mathcal{A}(t) \cdot t_{\text{tof}} = \underbrace{\mathcal{A}_1 t_{\text{tof}}}_{\varphi_1} \cos(\omega_1 t + \phi_1). \quad (94)$$

If, however, the time of flight is comparable to the cycle time of the perturbation or even larger, the particle experiences a temporal changing perturbation on its way through the area of dephasing, resulting in a phase shift

$$\varphi(t) \sim \int_t^{t+t_{\text{tof}}} \mathcal{A}(t) dt = \underbrace{\mathcal{A}_1 t_{\text{tof}}}_{\varphi_1} \text{sinc}\left(\frac{\omega_1 t_{\text{tof}}}{2}\right) \cos(\omega_1 t + \bar{\phi}_1) = \check{\varphi}_1 \cos(\omega_1 t + \bar{\phi}_1). \quad (95)$$

Therefore, the total phase shift  $\check{\varphi}_1$  is reduced as compared to  $\varphi_1$  and vanishes for  $\omega_1 = 2\pi N/t_{\text{tof}}$ , with  $N \in \mathbb{N}$ , and in the limit  $\omega_1 \rightarrow \infty$ . In these cases, the perturbation characteristics can not be obtained using the correlation analysis.

In general, the second-order correlation theory can be used for periodic oscillations, even if the average particle count rate is lower than the perturbation frequency, because of the infinite coherence of such a perturbation. Due to the strong decay of the Bessel function  $J_{m_j}(\varphi_j)$ , the highest order per perturbation frequency contributing to the correlation function is  $m_{j,\text{max}} \approx \varphi_j$ . Therefore, the maximum frequency component of all perturbation frequencies included in the correlation function is given by  $\max(\varphi_j \omega_j)$ , which arises from the argument of the cosine in equations (31) and (35). For slow and random perturbations with a high peak phase deviation this product sets a lower limit for the average particle count rate to get a good agreement between experiment and theory.

## 4. Conclusion

Single-particle interferometry is an outstanding instrument in the field of quantum physics and sensor applications. Due to the high sensitivity of interferometers, they are susceptible to dephasing effects originating from electromagnetic oscillations [52, 53], mechanical vibrations [54] or temperature drifts. Compared to decoherence, dephasing is a collective shift of the particle wave function and the contrast is only reduced in the temporally integrated interference pattern. Therefore, dephasing can in principle be reversed. Using second-order correlation theory, the wave properties can be identified and the perturbation characteristics can be determined. This was demonstrated experimentally in former publications for electromagnetic perturbations [52, 53] and mechanical vibrations [54]. This paper provides the theoretical fundament for those articles and other future applications in various fields of single-particle interferometry. It gives a detailed description of the analytic solution to the second-order correlation function and its numerical application.

We presented the full analytic derivation of our two-dimensional second-order correlation theory for multifrequency perturbations. The difference between the explicit and approximate solution was discussed and areas of validity were investigated. The amplitude spectra of both solutions, that are used for the identification of the perturbation characteristics [54], have been calculated. We provided the numerical solution of the correlation function and investigated the dependence of the extracted contrast and perturbation amplitude on the discretization step size. The influence of noise on the correlation function and corresponding amplitude spectrum was investigated and an optimum spatial discretization step size was provided to achieve a maximum

signal-to-noise ratio, which was used in a previous publication [60] for the identification of the electrical network frequency. The validity of our calculations could be demonstrated with a single-particle simulation of a perturbed interference pattern evaluated for different spatial discretization step sizes. The possibility to analyze broad-band frequency noise was shown using a simulated interference pattern perturbed by Gaussian distributed noise.

Our method is a powerful tool for the proof of single-particle interferences, even if they are vanished in the spatial signal. Especially for mobile interferometers or experiments in perturbing environments, the requirements for vibrational damping and electromagnetic shielding can be reduced. Furthermore, it is suitable to analyze the characteristics of multifrequency perturbations and broad-band noise. Therefore, it has possible sensor applications, which was demonstrated for mechanical vibrations in an electron interferometer [54]. It can be used in principle in every interferometer generating a spatial interference pattern on a detector with high spatial and temporal single-particle resolution. This makes our method applicable in a wide range of experiments.

## Acknowledgments

We gratefully acknowledge support from the DFG through the SFB TRR21 and the Emmy Noether program STI 615/1-1. AR acknowledges support from the Evangelisches Studienwerk eV Villigst. The authors thank N Kerker and A Pooch for helpful discussions.

## References

- [1] Cronin A D, Schmiedmayer J and Pritchard D E 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 1051
- [2] Carnal O and Mlynek J 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 2689
- [3] Keith D W, Ekstrom C R, Turchette Q A and Pritchard D E 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 2693
- [4] Margalit Y, Zhou Z, Machluf S, Rohrlich D, Japha Y and Folman R 2015 *Science* **349** 1205
- [5] Arndt M and Brand C 2015 *Science* **349** 1168
- [6] Gustavson T L, Bouyer P and Kasevich M A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2046
- [7] Peters A, Chung K Y and Chu S 1999 *Nature* **400** 849
- [8] Grisenti R E, Schöllkopf W, Toennies J P, Hegerfeldt G C, Köhler T and Stoll M 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2284
- [9] Brezger B, Hackermüller L, Uttenthaler S, Petschinka J, Arndt M and Zeilinger A 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 100404
- [10] Gerlich S, Eibenberger S, Tomandl M, Nimmrichter S, Hornberger K, Fagan P J, Tüxen J, Mayor M and Arndt M 2011 *Nat. Commun.* **2** 263
- [11] Arndt M and Hornberger K 2014 *Nat. Phys.* **10** 271
- [12] Haslinger P, Dörre N, Geyer P, Rodewald J, Nimmrichter S and Arndt M 2013 *Nat. Phys.* **9** 144
- [13] Zurek W H 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 715
- [14] Hackermüller L, Hornberger K, Brezger B, Zeilinger A and Arndt M 2004 *Nature* **427** 711
- [15] Hornberger K, Uttenthaler S, Brezger B, Hackermüller L, Arndt M and Zeilinger A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 160401
- [16] Rauch H, Treimer W and Bonse U 1974 *Phys. Lett. A* **47** 369
- [17] Colella R, Overhauser A W and Werner S A 1975 *Phys. Rev. Lett.* **34** 1472
- [18] Hasselbach F 2010 *Rep. Prog. Phys.* **73** 016101
- [19] Hasselbach F and Maier U 1999 *Quantum Coherence and Decoherence—Proc. ISQM-Tokyo 98* ed Y A Ono and K Fujikawa (Amsterdam: Elsevier) p 299
- [20] Maier U 1997 *Doctoral Thesis* University of Tübingen
- [21] Kuo H S, Hwang I S, Fu T Y, Lin Y C, Chang C C and Tsong T T 2006 *Japan. J. Appl. Phys.* **45** 8972
- [22] Ehberger D, Hammer J, Eisele M, Krüger M, Noe J, Högele A and Hommelhoff P 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 227601
- [23] Hommelhoff P, Kealhofer C and Kasevich M A 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 247402
- [24] Hasselbach F 1988 *Z. Phys. B* **71** 443
- [25] Hammer J, Hoffrogge J, Heinrich S and Hommelhoff P 2014 *Phys. Rev. Appl.* **2** 044015
- [26] Schütz G, Rembold A, Pooch A, Meier S, Schneeweiss P, Rauschenbeutel A, Günther A, Chang W T, Hwang I S and Stibor A 2014 *Ultramicroscopy* **141** 9
- [27] Chang C C, Kuo H S, Hwang I S and Tsong T T 2009 *Nanotechnology* **20** 115401
- [28] Cho B, Ichimura T, Shimizu R and Oshima C 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 246103
- [29] Jagutzki O, Mergel V, Ullmann-Pfleger K, Spielberger L, Spillmann U, Dörner R and Schmidt-Böcking H 2001 *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **477** 244
- [30] Aharonov Y and Bohm D 1959 *Phys. Rev.* **115** 485
- [31] Batelaan H and Tonomura A 2009 *Phys. Today* **62** 38
- [32] Schütz G, Rembold A, Pooch A, Prochel H and Stibor A 2015 *Ultramicroscopy* **158** 65
- [33] Sonnentag P and Hasselbach F 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 200402
- [34] Scheel S and Buhmann S Y 2012 *Phys. Rev. A* **85** 030101(R)
- [35] Putnam W P and Yanik M F 2009 *Phys. Rev. A* **80** 040902(R)
- [36] Kruit P et al 2016 *Ultramicroscopy* **164** 31–45
- [37] Grattan L S and Meggitt B T (ed) 2013 *Optical Fiber Sensor Technology: Fundamentals* (Berlin: Springer)
- [38] Abbott B P et al 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 061102
- [39] Graham P W, Hogan J M, Kasevich M A and Rajendran S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 171102
- [40] Hanbury Brown R and Twiss R Q 1956 *Nature* **177** 27
- [41] Glauber R J 1963 *Phys. Rev.* **130** 2529

- [42] Kiesel H, Renz A and Hasselbach F 2002 *Nature* **418** 392
- [43] Schellekens M, Hoppeler R, Perrin A, Gomes J V, Boiron D, Aspect A and Westbrook C I 2005 *Science* **310** 648
- [44] Foellmi C 2009 *Astron. Astrophys.* **507** 1719
- [45] Simon J, Bakr W S, Ma R, Tai M E, Preiss P M and Greiner M 2011 *Nature* **472** 307
- [46] Agakishiev G et al 2011 *Eur. Phys. J. A* **47** 63
- [47] Öttl A, Ritter S, Köhl M and Esslinger T 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 090404
- [48] Federsel P, Rogulj C, Menold T, Darázs Z, Domokos P, Günther A and Fortágh J 2017 *Phys. Rev. A* **95** 043603
- [49] Grondalski J, Alsing P M and Deutsch I H 1999 *Opt. Express* **5** 249
- [50] Altman E, Demler E and Lukin M D 2004 *Phys. Rev. A* **70** 013603
- [51] Fölling S, Gerbier F, Widera A, Mandel O, Gericke T and Bloch I 2005 *Nature* **434** 481
- [52] Rembold A, Schütz G, Chang W T, Stefanov A, Pooch A, Hwang I S, Günther A and Stibor A 2014 *Phys. Rev. A* **89** 033635
- [53] Günther A, Rembold A, Schütz G and Stibor A 2015 *Phys. Rev. A* **92** 053607
- [54] Rembold A, Schütz G, Röpke R, Chang W T, Hwang I S, Günther A and Stibor A 2017 *New J. Phys.* **19** 033009
- [55] Möllenstedt G and Düker H 1956 *Z. Phys. A* **145** 377
- [56] Wiener N 1930 *Acta Math.* **55** 117–258
- [57] Khintchine A 1934 *Math. Ann.* **109** 604
- [58] Siegmund O H, Vallerger J V, Tremsin A S, Mcphate J and Feller B 2007 *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **576** 178
- [59] Zhou X, Ranitovic P, Hogle C W, Eland J H D, Kapteyn H C and Murnane M M 2012 *Nat. Phys.* **8** 232
- [60] Pooch A, Seidling M, Layer M, Rembold A and Stibor A 2017 *Appl. Phys. Lett.* **110** 223108
- [61] Hasselbach F and Nicklaus M 1993 *Phys. Rev. A* **48** 143
- [62] Abramowitz M and Stegun I A 1964 *Handbook of Mathematical Functions* vol 55 (New York: Dover Publications) p 360
- [63] Arfken G B and Weber H J 2005 *Mathematical Methods for Physicists* (Oxford: Elsevier)
- [64] Casella G, Robert C P and Wells M T 2004 Generalized accept-reject sampling schemes *Lecture Notes-Monograph Series* 45, pp 342–7 ([www.jstor.org/stable/4356322](http://www.jstor.org/stable/4356322))
- [65] Haight F A 1967 *Handbook of the Poisson distribution* (New York: Wiley)

**Coherent properties of a tunable low-energy electron-matter-wave source**A. Pooch,<sup>1</sup> M. Seidling,<sup>1</sup> N. Kerker,<sup>1</sup> R. Röpke,<sup>1</sup> A. Rembold,<sup>1</sup> W. T. Chang,<sup>2</sup> I. S. Hwang,<sup>2</sup> and A. Stibor<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>*Institute of Physics and Center for Collective Quantum Phenomena in LISA<sup>+</sup>, University of Tübingen, Auf der Morgenstelle 15, 72076 Tübingen, Germany*<sup>2</sup>*Institute of Physics, Academia Sinica, Nankang, Taipei 11529, Taiwan, Republic of China*

(Received 23 November 2017; published 12 January 2018)

A general challenge in various quantum experiments and applications is to develop suitable sources for coherent particles. In particular, recent progress in microscopy, interferometry, metrology, decoherence measurements, and chip-based applications rely on intensive, tunable, coherent sources for free low-energy electron-matter waves. In most cases, the electrons get field emitted from a metal nanotip, where its radius and geometry toward a counter electrode determines the field distribution and the emission voltage. A higher emission is often connected to faster electrons with smaller de Broglie wavelengths, requiring larger pattern magnification after matter-wave diffraction or interferometry. This can be prevented with a well-known setup consisting of two counter electrodes that allow independent setting of the beam intensity and velocity. However, it needs to be tested if the coherent properties of such a source are preserved after the acceleration and deceleration of the electrons. Here, we study the coherence of the beam in a biprism interferometer with a single atom tip electron field emitter if the particle velocity and wavelength varies after emission. With a Wien filter measurement and a contrast correlation analysis we demonstrate that the intensity of the source at a certain particle wavelength can be enhanced up to a factor of 6.4 without changing the transverse and longitudinal coherence of the electron beam. In addition, the energy width of the single atom tip emitter was measured to be 377 meV, corresponding to a longitudinal coherence length of 82 nm. The design has potential applications in interferometry, microscopy, and sensor technology.

DOI: [10.1103/PhysRevA.97.013611](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.97.013611)**I. INTRODUCTION**

The quest to find the optimal particle source for a specific application in quantum physics has determined the progress in matter-wave experiments for atoms [1,2], neutrons [3], molecules [4,5], electrons [6,7], and ions [6,8]. New sources for free electron waves led to sophisticated recent developments in microscopy [9–13], laser-induced single-particle interference [14], or time-resolved dephasing measurements [15–17]. Particularly, to study the Coulomb-induced decoherence of an electron superposition close to a metallic, semi-, or superconducting surface [18–21], a source is desirable that allows the tuning of the electrons energy by remaining their coherence. The energy determines the velocity and therefore the interaction time of the quantum state with the environment. Most of the sources in interference experiments so far were etched metal tips with a diameter of several ten nanometers. By adding a monolayer of iridium or palladium the emission area can be reduced down to the size of a single atom at the end of a pyramidal atom stack (single atom tip (SAT) [22–24]). The electron-field emission follows the theory of Fowler and Nordheim [22,24,25] and the extraction voltage is determined by the properties of the tip, such as the material and the geometry, in relation to the distance and dimensions of a counter electrode. It is difficult to fabricate the geometry of a tip exactly on the nanometer scale, even if progress was made to control the tip profile during electrochemical etching [26].

As a result, individual tips have different extraction voltages for which the field emission will start, leading to varying intensity to velocity relations between different tips.

For that reason, in electron biprism interferometers the tip radius was manufactured as small as possible to get a low extraction voltage resulting in an intense and spatially coherent beam with a large electron wavelength. The electron emission signal was then enhanced by increasing the tip voltage. However, as a consequence, the resulting matter waves have larger energies and therefore shorter wavelengths, leading to smaller diffraction or interference fringes. Assuming a limited detection resolution and area, this in turn requires larger pattern magnification, which again reduces the signal. This problem can easily be addressed with a well-known technique used in electron microscopes by implementing two counter electrodes (apertures) behind the tip. They allow us to control the velocity (and wavelength) of the electrons independently to the emission intensity. By setting a low tip voltage in combination with a high first counter-electrode voltage relative to a second grounded aperture, a high emission intensity of slow electrons can be realized. However, this method was not applied in most biprism interferometers so far. The reason could be that it remains unclear how the lateral and longitudinal coherence of the particles are affected by accelerating and decelerating the particle, since the wavelength is not constant any more after emission. Therefore, in this geometry a combination of two factors influence the electrons. First, there is a position-dependent change of the electrons velocity leading to different wavelengths. And second, there is a lens effect of the electrodes.

\*alexander.stibor@uni-tuebingen.de

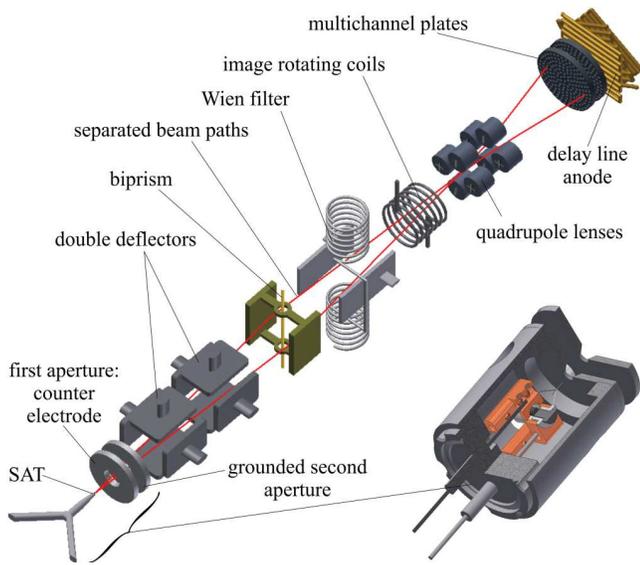


FIG. 1. Sketch of the experimental setup and the separated beam paths (red line) to measure the coherent properties of the single atom tip at different tip and counter-electrode settings and beam intensities in a biprism electron interferometer (not to scale). Inset: Mechanical drawing of the SAT field emission source realization in our setup with the two apertures (to scale).

In this article we describe such a beam source and test in a biprism electron interferometer how the lateral and longitudinal coherence of the particles are affected after tuning the intensity of the beam and keeping the wavelength constant behind the second aperture. We demonstrate with an iridium SAT that neither lens effects of the apertures nor the acceleration and deceleration of the electrons change their lateral coherence properties. Furthermore, the longitudinal coherence length and the energy spread of the emitted electrons are measured with a Wien filter [27]. These properties also remain unchanged. Our source allows us to increase the coherent low-energy electron emission by a factor of 6.4 at a constant matter wavelength, resulting in a constant interference contrast, pattern periodicity, and amount of fringes. The results have applications in matter-wave interferometry [6,24], in Aharonov-Bohm studies [28,29], decoherence measurements [18–21], electron-diffraction microscopy [11–13], time-resolved ultrafast electron diffraction [30], and for the development of a quantum electron microscope [9,10].

## II. EXPERIMENT

A sketch of the experimental setup is illustrated in Fig. 1. The aim of the experiment is to increase the electron emission without changing the transversal and longitudinal coherence of the matter waves. The de Broglie wavelength, which is reciprocal to the particle velocity, should thereby be kept constant. This is possible with a configuration where the field emission tip, in our case a SAT [22–24], is set on a low negative potential  $U_{\text{SAT}}$  and a counter electrode is set on a positive potential  $U_c$ . Since only the field between these components is relevant for the emission process, the electron-beam intensity can be increased by raising the positive

voltage of the counter electrode. In the following beam line, the electrons get decelerated by a second, grounded electrode to the low velocity corresponding to the electrical potential of the tip. Thereby, lower electron energies can be realized compared to the conventional high-voltage field emission directly to a grounded aperture. This is a well-known setup. However, it needs to be demonstrated that the longitudinal and transversal coherence of the beam is not reduced by the accelerating and decelerating process.

To study the coherent properties of this emitter setup, it is integrated in a biprism electron interferometer. It includes several beam optic parts from a former experiment by Sonnentag *et al.* [18]. The beam is adjusted by two double deflectors toward an electrostatic biprism. It consists out of a gold-palladium-coated glass fiber with a diameter of 400 nm [24] between two grounded electrodes. Just like the optical biprism for light, the electrostatic biprism separates coherently the electron waves from the emitter [6,31]. By applying a positive voltage  $U_f$  on the fiber, the biprism bends all beam paths by the same angle and combines them at the entrance of a magnifying quadrupole lens. The partial beams interfere and form a fringe pattern parallel to the biprism fiber. Directly after the biprism, the beam traverses a Wien filter, consisting of two opposing electrodes and two magnetic coils. As a result of the finite-energy spread of the emitted electrons, the separated partial waves can be described by matter-wave packages. The Wien filter allows us to shift them longitudinally relative to each other and to measure thereby the longitudinal coherence length of the beam [27]. To align the orientation of the fringes towards the magnifying axis of the quadrupole lens, an image rotating coil is positioned around the beam path behind the Wien filter. The interference pattern is magnified by two quadrupole lenses in the transverse direction normal to the biprism fiber with a magnification factor of several thousand. The electrons are amplified by two multichannel plates and detected with a delay line anode [32]. The position and point in time for every single electron event is recorded allowing a second-order correlation data analysis [15–17,33]. The red line in Fig. 1 illustrates a possible beam path according to the wave-particle duality. The whole setup is in an ultrahigh vacuum chamber at a pressure of  $<5 \times 10^{-10}$  mbar and magnetically shielded by a mu-metal tube.

## III. SIMULATION

For a detailed description of the electrical-field distribution between the tip, the counter electrode, and the second electrode, simulations with the program *Comsol* were performed. The results are illustrated in Fig. 2. Two cases were studied: first, the tip is set on a potential of  $-1600$  V, the counter electrode on  $200$  V and the second aperture is grounded. This combination of voltages is used in most of our presented data. As can be seen in the cross section of Fig. 2(a) a  $125\text{-}\mu\text{m}$ -thick tungsten wire is orientated horizontally at  $y = 0$ . Electrons with zero starting energy accelerate in  $x$  direction. As it is simulated in Fig. 2(b), those electrons passing the two apertures with  $2.5\text{-mm}$  diameter keep moving on the optical axis and approach an energy of  $1600$  eV given by the tip potential. Due to computational reasons the tip radius in this geometry is set to be  $2\text{ }\mu\text{m}$ , even if the actual physical tip radii are typically

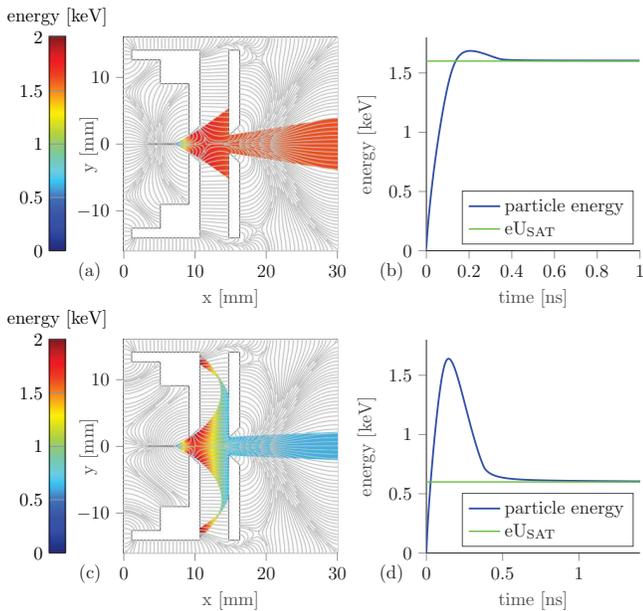


FIG. 2. (a) Simulation of the electrical-field distribution with a cross section of the cathode box geometry, including the tungsten tip and the two apertures. The tip defines the optical axis at  $y = 0$ . It is set on a potential of  $U_{\text{SAT}} = -1600$  V and emits electrons with 0 eV starting energy. They accelerate in the electric field between the tip and the counter electrode, which is set on a voltage  $U_c = 200$  V. The second aperture is grounded. The color bar represents the energy of the electrons. Also the electric field lines are shown in pale gray schematically. (b) The average energy of the electrons plotted versus time as they travel along the optical axis. They get accelerated by the first electrode and decelerated by the second, approaching the energy corresponding to the tip potential  $eU_{\text{SAT}} = 1600$  eV. (c) Same geometry as in (a) with the settings  $U_{\text{SAT}} = -600$  V and  $U_c = 1378$  V. Some of the electron trajectories bend back onto the surface of the counter electrode. However, those electrons passing the second electrode end up at a significantly lower velocity compared to (a). (d) The acceleration and deceleration between the counter and second aperture is more distinct than in (b) leading to an electron energy of 600 eV.

around 50 nm. However, this does not change the results for the electric field lines further away from the tip. For the calculation of the electron trajectories the starting energy and direction of the emission is selected manually. The field emission itself could not be simulated, and thus the exact field strength at the tip surface is not relevant. Certainly, it increases with increasing counter electrode voltage  $U_c$ . Figure 2 also indicates that the coherent signal enhancement is not due to a lensing effect of the electron beam.

In the second case, simulated in Fig. 2(c), the tip is set on a low voltage of  $-600$  V. To keep the relative potential high, 1378 V were applied on the counter electrode. This setting emerged to be the limit for creating interference fringes with minimal tip voltage in the experiment. In the simulations it leads to particle trajectories where electrons even get deflected back onto the counter electrode. The electrons close to the optical axis reach the final energy of only 600 eV in the interferometer with a corresponding large matter wavelength.

As it will be verified in the next section, those slow electrons do not lose their coherent properties.

#### IV. RESULTS

For the characterization of the intensity enhancement and the coherent properties of our field-emission setup, we compared two situations. In the first one, the counter electrode is grounded and the tip voltage is increased. This is the usual operating mode in most biprism matter-wave interferometers so far [6]. The second case demonstrates our method for the coherent signal enhancement. Thereby, the tip is set on a fixed potential and the first counter electrode is varied such as simulated in the last section. In both cases the second electrode is grounded.

Figures 3(a) to 3(c) show the results for the first case. The tip voltage is increased stepwise starting at a negative tip voltage of  $U_{\text{SAT}} = -1560$  V. The biprism voltage  $U_{\text{BP}} = 0.331$  V is kept constant. This leads to a field emission toward the first and second apertures that are both grounded in these measurements. As expected and revealed in the inset of Fig. 3(a), the increase in signal behaves according to the Fowler-Nordheim theory, even though some signal is blocked by the apertures. In Fig. 3(b) the resulting fringe distances  $s$  after interference are shown for increasing tip voltages. They decrease due to the shorter matter wavelengths  $\lambda$  in combination with a lower quadrupole magnification at the higher electron energies. The fringe distances vary between  $s = 2.59$  mm ( $\lambda = 31.1$  pm) and  $s = 1.89$  mm ( $\lambda = 28.9$  pm) in Fig. 3(b). Figure 3(c) presents the interference contrast given after a second-order correlation analysis that reduces dephasing from the environment (noise from the electricity network, vibrations, slow fringe drifts, etc.) [15–17,33].

The results of our study for the second case are presented in Figs. 3(d) to 3(f). Here, the tip and the biprism are set on a fixed potential of  $U_{\text{SAT}} = -1600$  V and  $U_{\text{BP}} = 0.331$  V resulting in an electron-matter wavelength of 30.7 pm. The voltage of the first counter electrode is varied between  $U_c = -119.7$  V and 199.7 V. The last value corresponds nearly to the simulation in Fig. 2(a). The second electrode is again grounded. The signal on the detector increases by a factor of  $\sim 6.4$  compared to the situation where no voltage is applied to the counter electrode [such as in Fig. 3(a)]. A linear behavior in a Fowler-Nordheim representation of the measured signal versus the potential difference between the SAT and the counter electrode can also be observed. However, the de Broglie wavelengths and particle velocities do not vary significantly, as it is expected according to our simulations and as it can be deduced from the constant fringe distance in Fig. 3(e). Furthermore, the interference contrast of around 50% in Fig. 3(f) does not change significantly, indicating constant transversal and longitudinal coherences. To perform a separate test of a possible variation of the transversal coherence length, the amount of visible fringes in the interference pattern were determined at the maximal and minimal first-aperture voltage. The corresponding correlation corrected [15–17,33] interference pattern are illustrated in Fig. 4. The amount of counted fringes, revealing the field of coherent superposition, does not change throughout these measurements, verifying a constant transversal coherent illumination of the biprism fiber.

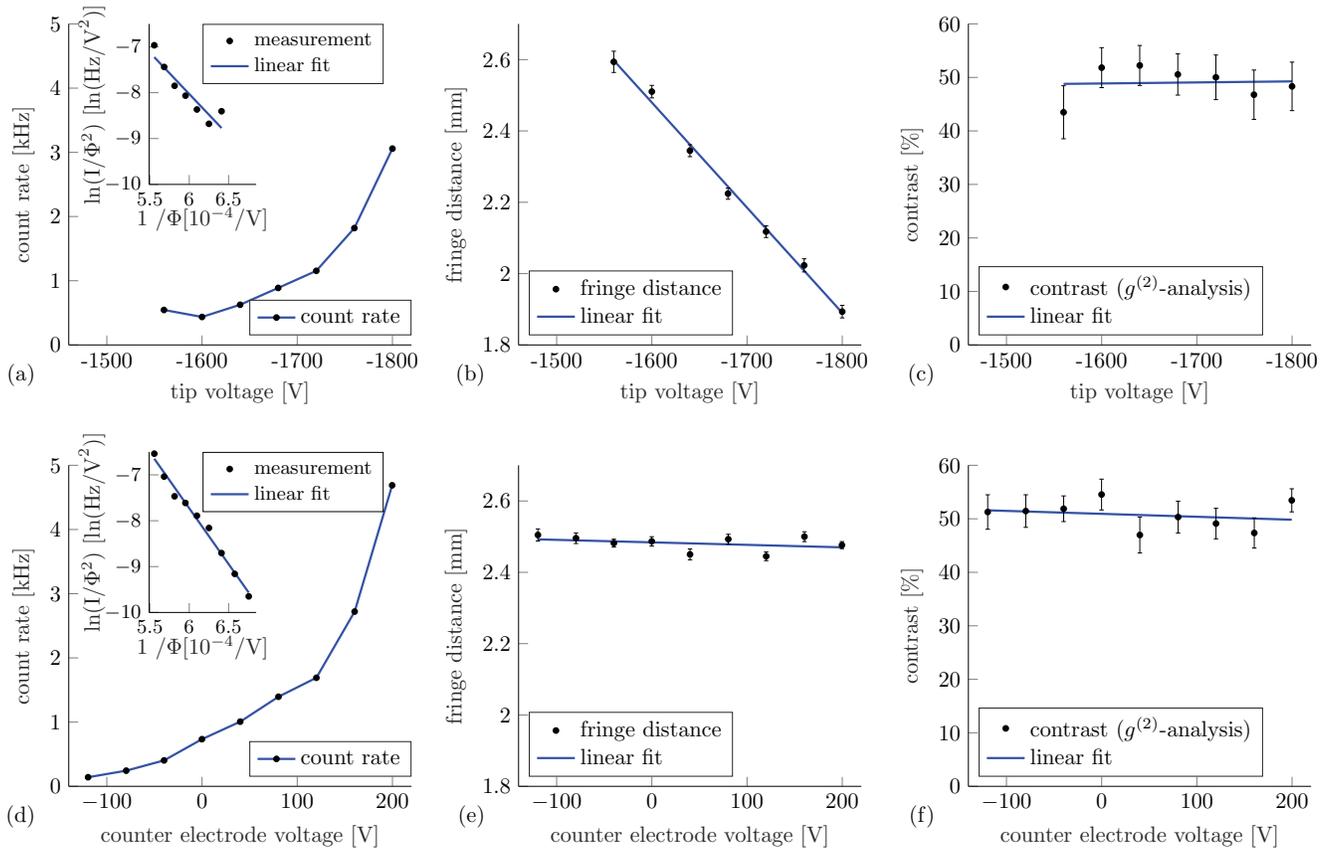


FIG. 3. Comparison of the behavior in count rate, fringe distance, and contrast between the increase of tip voltage toward a grounded counter electrode [(a) to (c)] and the application of a counter voltage to the first aperture [(d) to (f)]. (a) Count rate at the detector plane versus the tip field emission voltage. Inset: plot according to the Fowler-Nordheim relation, where  $\Phi$  equals the tip voltage. (b) Decrease of the measured fringe distances due to the higher electron energies, resulting in shorter de Broglie wavelengths and lower quadrupole magnifications. (c) The determined dephasing corrected contrast remains constant in this range of tip voltages. (d) In contrast to (a) the count rate is determined as a function of the aperture voltage, keeping the tip voltage constant at  $-1600$  V. Inset: plot according to the Fowler-Nordheim relation, where  $\Phi$  equals the potential difference between the tip and the counter electrode. (e) The fringe distance does not change over all different aperture voltages due to the constant electron energy according to the simulations in Fig. 2(b). (f) Also, the interference contrast remains constant in the measurement region.

A possible change in longitudinal coherence for different voltages on the first aperture can be tested with the Wien filter [27]. Thereby, the measurements were conducted in the “matched mode”, where the action of the electric field  $\mathbf{E}$  from the Wien filter condenser cancels the one of the magnetic field  $\mathbf{B}$  from the Wien coils along the optical beam axis. This “Wien condition” is fulfilled for  $e\mathbf{E} + e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$ , with the particle velocity  $\mathbf{v}$ . By measuring the contrast change for different values of  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ , the longitudinal coherence length can be determined [27]. The tip and biprism voltages were kept constant at the same values as above ( $U_{\text{SAT}} = -1600$  V,  $U_{\text{BP}} = 0.331$  V). Starting from  $+72$  V, the Wien condenser voltage was stepwise decreased to  $-99$  V. At each step the current in the Wien coils was increased until the fringe pattern shifts back to the original position to assure the “matched mode”. Then a signal of several  $10^5$  counts was recorded for the three different aperture voltages  $U_c = 0$  V,  $100.2$  V, and  $199.7$  V, while only minimal phase shifts were noted from these changes of the settings. Subsequently, the average intensity along the fringe-direction was deter-

mined within a section of the spatial interference pattern. The resulting distribution was fitted with the model function  $I(x) = I_0[1 + C \cos(\frac{2\pi x}{s} + \phi_0)]\text{sinc}^2(\frac{2\pi x}{s_1} + \phi_1)$ , according to a method described elsewhere [34]. Thereby,  $C$  is the interference contrast and  $s$  the fringe distance. The phases  $\phi_0, \phi_1$ , the average intensity  $I_0$ , and the width of the interference pattern  $s_1$  are additional fitting parameters. The resulting contrast distributions are shown in Fig. 5. The data indicates that the contrast is significantly reduced by electromagnetic dephasing from the electricity network. Due to different count rates, the signal integration times were significantly longer for an aperture voltage of  $0$  V, leading to a stronger dephasing compared to  $100.2$  and  $199.7$  V. This causes a higher contrast loss. In fact, there is no contrast determinable at the  $0$  V aperture setting for Wien filter voltages higher than  $\sim 30$  V. For that reason, it is not possible to determine if the longitudinal coherence is preserved for different aperture voltages by the spatial interferences only. It was necessary to reveal and correct the dephasing by a second-order correlation analysis that includes the spatial and temporal differences of the electron

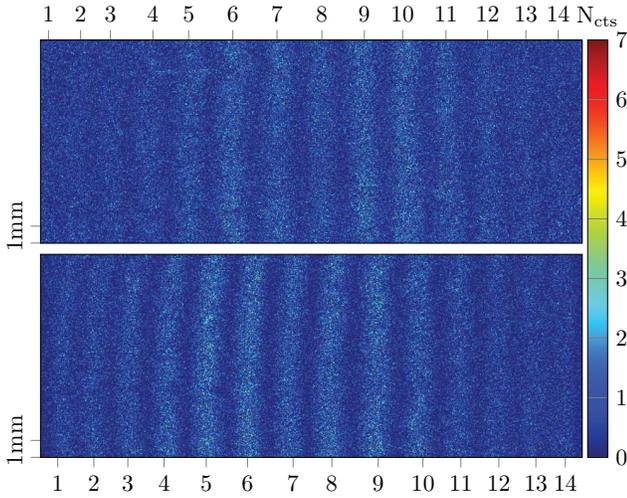


FIG. 4. Comparison of two interferograms with different voltages at the counter electrode  $U_c = -119.7$  V (top picture) and  $U_c = +199.7$  V (bottom picture), both at a fix tip voltage of  $U_{SAT} = -1600$  V. The interferograms exhibit the same amount of interference fringes (denoted by the number on the horizontal axis) and width of interference, revealing the transversal coherence of the interfering electrons is not influenced by the counter electrode voltage. A length scale is shown in the left bottom corner and the color bar represents the number of hits per pixel. Both pictures contain  $3 \times 10^5$  counts and are dephasing corrected by second-order correlation analysis [15–17,33]. The undisturbed interference contrasts were thereby determined to be  $51.3 \pm 3.2$  % at  $-119.7$  V and  $53.5 \pm 2.2$  % at  $+199.7$  V. The original uncorrected contrasts in the spatial pattern, determined by the model function described in the text, were  $30.6 \pm 2.1$  % and  $33.9 \pm 2.2$  %, respectively.

events at the delay line detector as described in detail elsewhere [15–17,33]. The resulting unperturbed contrast data is also plotted in Fig. 5, revealing contrast rates up to 71.6%. Thereby, a dephasing amplitude of  $\sim 0.4\pi$  was determined. Three Gauss fits were applied to the data sets. According to Ref. [27] the coherence length  $l_c$  equals the longitudinal shift of the separated partial wave packages between two points where the contrast vanishes. This was defined to be the case when the contrast drops to 10% of its maximum value. The necessary voltage  $U_{cl}$  for this shift is connected to the width of the Gaussian fit  $\sigma$  by  $U_{cl} = \sqrt{2 \cdot \ln 10} \cdot \sigma$ . For a given Wien filter condenser voltage  $U_{WF}$  the shift of the wave packets is calculated by  $\Delta y = \frac{L}{2D} \frac{\Delta x}{U_{SAT}} \cdot U_{WF}$ , where  $L$  is the length of the Wien filter condenser plates and  $D$  the distance between them.  $\Delta x$  denotes the distance between the separated beam paths at the center of the Wien filter [27]. It can be determined by  $\Delta x = \Theta d_{WF-QP}$ , with  $d_{WF-QP}$  being the distance between the Wien filter and the quadrupole and the superposition angle  $\Theta$  which can be calculated by the applied voltages  $U_{SAT}$  and  $U_{BP}$  [34,35]. The resulting data reveal longitudinal coherence lengths of  $82 \pm 9$  nm for 0 V on the first aperture,  $93 \pm 10$  nm for 100.2 V, and  $82 \pm 8$  nm for 199.7 V. The energy widths of the emitted beams can be determined by  $\Delta E = \frac{2U_{SAT}\lambda}{\pi l_c}$ . This leads to energy widths of  $377 \pm 40$  meV,  $334 \pm 37$  meV, and  $377 \pm 35$  meV, respectively. Our results are in good agreement with the literature value for the energy spread of

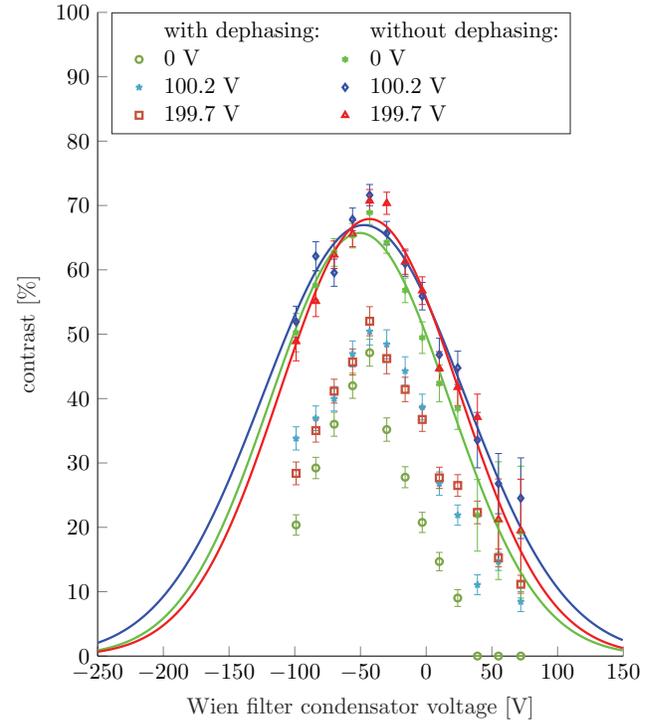


FIG. 5. Measurement of the interference contrast as a function of different Wien filter condenser voltages for a tip potential  $U_{SAT} = -1600$  V and three different voltages for the first aperture ( $U_c = 0$  V, 100.2 V, and 199.7 V). The determined contrast revealed by intensity evaluation of the spatial interference pattern is shown in green circles, blue stars, and red squares, respectively. The data is strongly dephased by the network frequency at 50 Hz. For that reason a  $g^{(2)}$ -correlation analysis using spatial and temporal differences of particle events at the detector [15–17,33] was applied, providing the unperturbed contrast distribution (green stars, blue diamonds, and red triangles). Gaussian fits to the data (green, blue, and red lines, corresponding to 0 V, 100.2 V, and 199.7 V, respectively) reveal comparable longitudinal coherence lengths with no significant variations for the different aperture voltages.

SAT field emitters of 0.4 eV [36]. The consistency within the error bars of the longitudinal coherence lengths for different aperture voltages verifies our conclusion that the coherent beam properties are not affected by our method of intensity enhancement.

Several applications in microscopy, interferometry, or sensor technology require slow coherent electrons [11–13]. Our method can generate such matter waves with energies that are significantly lower than for typical field emission tips. To test the limits of the technique in our setup, we reduced the tip voltage to the values simulated in Figs. 2(c) and 2(d). Thereby, the tip voltage was set to  $-600$  V where no emission is observed with a grounded counter electrode, since it is significantly lower than the minimal extraction voltage of the SAT. However, in combination with an aperture voltage of 1378 V a reasonable count rate of  $1138 \pm 2$  Hz after magnification was detected. The energy of the particles corresponds to a de Broglie wavelength of 50 pm. The slower the electrons are, the more susceptible they are for dephasing by external oscillations. This can also be observed in the deduced interference contrast of

$19.8 \pm 1\%$  from the spatial integrated image compared to the determined contrast after correlation analysis of  $37.7 \pm 3\%$ . For the same reason a larger dephasing amplitude of  $\sim 0.435\pi$  was determined. The measured pattern periodicity on the detector was  $9.0 \pm 0.3$  mm. From a comparison with the theoretical value at the entrance of the quadrupole before magnification of 928 nm, we deduce a magnification factor of  $9730 \pm 290$ .

## V. CONCLUSION

We demonstrated in an electron biprism matter-wave interferometer that the coherent properties of a beam are not affected by accelerating and decelerating the electrons or the associated lens effects. As a result, it was possible to increase the signal by a factor of 6.4 at a certain matter wavelength while remaining full transversal and longitudinal coherence. It was realized by a simple design known from electron microscopy, installing a field emission tip in combination with two counter electrodes. Thereby, a single atom tip is set on a voltage well below its minimal extraction voltage. Field emission is initiated by the application of a positive voltage on a counter electrode. The second electrode is grounded and decelerates the electrons to the energy corresponding to the low tip potential. This is also verified in particle beam simulations. By measurement of the interference pattern periodicity, amount of fringes, and interference contrast, it could be demonstrated that the velocity and transversal coherence of the electrons are kept constant with increasing first-aperture voltage and signal intensity.

Additionally, it was also possible to determine the energy width of the single-atom tip emitter to be  $377 \pm 40$  meV for 0 V on the first aperture. It corresponds to a longitudinal coherence length of  $82 \pm 9$  nm and does not change significantly for different counter aperture voltages. The experiment also showed that slow electrons are susceptible to external dephasing perturbations. For that reason, it was required to remove the significant dephasing from the 50 Hz electricity network by a correlation analysis [15–17,33].

The method also enabled the generation of slow coherent electrons with energies significantly lower than the ones corresponding to the minimum extraction voltage of the tip. We demonstrated this by interfering electrons with 600 eV and a counter-electrode voltage of 1378 V, still revealing a large contrast of  $37.7 \pm 3\%$ . Our technique is of relevance in all applications where an intense beam of tunable, slow, and coherent electrons is required such as for microwave chip-based designs [37], electron diffraction microscopy [11–13], sensitive sensors for inertial forces [38], vibrational [17] or electromagnetic [16] dephasing, and decoherence studies [18–21].

## ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft through the research Grant No. STI 615/3-1 and the Vector Stiftung. A.S. acknowledges support from the Bridging Fund of the University of Tübingen and A.R. from the Evangelisches Studienwerk e.V. Villigst.

- 
- [1] A. D. Cronin, J. Schmiedmayer, and D. E. Pritchard, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1051 (2009).
  - [2] J. R. Anglin and W. Ketterle, *Nature* **416**, 211 (2002).
  - [3] H. Rauch and S. A. Werner, *Neutron Interferometry: Lessons in Experimental Quantum Mechanics, Wave-particle Duality, and Entanglement*, Vol. 12 (Oxford University Press, Oxford, 2015).
  - [4] K. Hornberger, S. Gerlich, P. Haslinger, S. Nimmrichter, and M. Arndt, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 157 (2012).
  - [5] T. Juffmann, H. Ulbricht, and M. Arndt, *Rep. Prog. Phys.* **76**, 086402 (2013).
  - [6] F. Hasselbach, *Rep. Prog. Phys.* **73**, 016101 (2010).
  - [7] H. Batelaan, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 929 (2007).
  - [8] F. Hasselbach and U. Maier, in *Proceedings of ISQM'98, Tokyo*, edited by Y. A. Ono and K. Fujikawa (Elsevier, Amsterdam, 1999), p. 299.
  - [9] W. P. Putnam and M. F. Yanik, *Phys. Rev. A* **80**, 040902(R) (2009).
  - [10] P. Kruit, R. G. Hobbs, C.-S. Kim *et al.*, *Ultramicroscopy* **164**, 31 (2016).
  - [11] I.-S. Hwang, W.-T. Chang, C.-Y. Lin, W.-H. Hsu, *Microsc. Microanal.* **21**, 839 (2015).
  - [12] T. Latychevskaia, W.-H. Hsu, W.-T. Chang, C.-Y. Lin, and I.-S. Hwang, *Nat. Commun.* **8**, 14440 (2017).
  - [13] J.-N. Longchamp, T. Latychevskaia, C. Escher, and H.-W. Fink, *Appl. Phys. Lett.* **107**, 133101 (2015).
  - [14] D. Eherberger, J. Hammer, M. Eisele, M. Krüger, J. Noe, A. Högele, and P. Hommelhoff, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 227601 (2015).
  - [15] A. Rembold, G. Schütz, W. T. Chang, A. Stefanov, A. Pooch, I. S. Hwang, A. Günther, and A. Stibor, *Phys. Rev. A* **89**, 033635 (2014).
  - [16] A. Günther, A. Rembold, G. Schütz, and A. Stibor, *Phys. Rev. A* **92**, 053607 (2015).
  - [17] A. Rembold, G. Schütz, R. Röpke, W.-T. Chang, I.-S. Hwang, A. Günther, and A. Stibor, *New J. Phys.* **19**, 033009 (2017).
  - [18] P. Sonntag and F. Hasselbach, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 200402 (2007).
  - [19] P. Machnikowski, *Phys. Rev. B* **73**, 155109 (2006).
  - [20] S. Scheel and S. Y. Buhmann, *Phys. Rev. A* **85**, 030101(R) (2012).
  - [21] J. R. Anglin, J. P. Paz, and W. H. Zurek, *Phys. Rev. A* **55**, 4041 (1997).
  - [22] H.-S. Kuo, I.-S. Hwang, T.-Y. Fu, Y.-C. Lin, C.-C. Chang, and T.-T. Tsong, *Jpn. J. Appl. Phys.* **45**, 8972 (2006).
  - [23] H.-S. Kuo, I.-S. Hwang, T.-Y. Fu, Y.-H. Lu, C.-Y. Lin, and T.-T. Tsong, *Appl. Phys. Lett.* **92**, 063106 (2008).
  - [24] G. Schütz, A. Rembold, A. Pooch, S. Meier, P. Schneeweiss, A. Rauschenbeutel, A. Günther, W. T. Chang, I. S. Hwang, and A. Stibor, *Ultramicroscopy* **141**, 9 (2014).
  - [25] R. Fowler and L. Nordheim, *Proc. R. Soc. London A* **119**, 173 (1928).
  - [26] W.-T. Chang, I.-S. Hwang, M.-T. Chang *et al.*, *Rev. Sci. Instrum.* **83**, 083704 (2012).
  - [27] M. Nicklaus and F. Hasselbach, *Phys. Rev. A* **48**, 152 (1993).
  - [28] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).

- [29] G. Schütz, A. Rembold, A. Pooch, H. Prochel, and A. Stibor, *Ultramicroscopy* **158**, 65 (2015).
- [30] M. Gulde, S. Schweda, G. Storeck, M. Maiti, H. K. Yu, A. M. Wodtke, S. Schäfer, and C. Ropers, *Science* **345**, 200 (2014).
- [31] G. Möllenstedt and H. Düker, *Z. Phys. A* **145**, 377 (1956).
- [32] O. Jagutzki, V. Mergel, K. Ullmann-Pflegger, L. Spielberger, U. Spillmann, R. Dörner, and H. Schmidt-Böcking, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A* **477**, 244 (2002).
- [33] A. Rembold, R. Röpke, G. Schütz, J. Fortágh, A. Stibor, and A. Günther, *New J. Phys.* **19**, 103029 (2017).
- [34] A. Pooch, M. Seidling, M. Layer, A. Rembold, and A. Stibor, *Appl. Phys. Lett.* **110**, 223108 (2017).
- [35] F. Lenz and G. Wohland, *Optik* **67**, 315 (1984).
- [36] E. Rokuta, H.-S. Kuo, T. Itagaki, K. Nomura, T. Ishikawa, B.-L. Cho, I. S. Hwang, T. T. Tsong, and C. Oshima, *Surf. Sci.* **602**, 2508 (2008).
- [37] J. Hammer, S. Thomas, P. Weber, and P. Hommelhoff, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 254801 (2015).
- [38] F. Hasselbach and M. Nicklaus, *Phys. Rev. A* **48**, 143 (1993).

# Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Quellen angefertigt habe.

Tübingen, den 23. November 2020

Robin Röpke