Topological Dynamics via Structured Koopman Subsystems

Dissertation
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard Karls Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von
Kari Valentina Küster
aus Stuttgart

Tübingen
2021

Gedruckt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Eberhard Karls Universität Tübingen.

Tag der mündlichen Qualifikation:	24.09.2021
Dekan:	Prof. Dr. Thilo Stehle
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Rainer Nagel
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Frank Loose
3. Berichterstatterin:	Prof. Dr. Tanja Eisner

Danksagung

Rainer Nagel danke ich als einem Doktorvater, wie man sich ihn nur wünschen kann. Seine Art, Mathematik zu machen, hat mich von Anfang an begeistert und stark geprägt. Er hat mir die Arbeit zu einem Thema ermöglicht, das ich nicht nur sehr interessant, sondern auch mathematisch schön finde. Er hat mir unzählige Möglichkeiten gegeben, mich fachlich und persönlich weiterzuentwickeln, hat mich zu Konferenzen, Auslandsaufenthalten und Tutorien ermutigt und mich in meinen individuellen Interessen unterstützt. Insbesondere möchte ich mich für die Möglichkeit bedanken, das Romseminar als Teilnehmerin und Mitorganisatorin mitzugestalten. Mein Dank gilt hierbei allen »Elefanten« des Romseminars. Rainer Nagel versteht es, seine Arbeitsgruppe so zu führen, dass man nicht nur mit Kollegen das Büro teilt, sondern mit Freunden und auch dafür bin ich ihm dankbar.

Maßgeblich zur Entwicklung meiner Doktorarbeit hat Roland Derndinger beigetragen. Er hat sich in den letzten Jahren überabzählbar viele Stunden Zeit für angeregte Diskussionen, Ideenfindung und detaillierte Korrekturen meiner Aufschriebe genommen. Diese Zusammenarbeit war nicht nur sehr hilf- und lehrreich für mich, sondern hat mir auch viel Freude bereitet. Für seinen großen Einsatz möchte ich ihm von Herzen meinen Dank aussprechen!

Mein Dank gilt allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Funktionalanalysis, die mir in meiner Promotionszeit angenehme Weggenossen waren. Die Teerunden mit ihren interessanten Diskussionen zu Mathematik und darüber hinaus werden mir in bester Erinnerung bleiben. Besonders möchte ich mich bei meinen Mitdoktorandinnen und Mitdoktoranden Sita Siewert, Viktoria Kühner, Henrik Kreidler und Tim Binz bedanken und außerdem bei meinen langjährigen Bürokollegen Nikolai Edeko und Patrick Hermle. Nikolai Edeko möchte ich darüber hinaus für so manches inspirierende mathematische Gespräch danken, das Einfluss auf meine Doktorarbeit hatte, insbesondere für seine gewitzten Gegenbeispiele.

Ulrich Groh danke ich sehr herzlich für die vielen hilfreichen Anregungen und Tipps vor allem in Bezug auf LaTeX, insbesondere für das Layout meiner Doktorarbeit. Außerdem gilt ihm und Britta Dorn mein Dank für die Gelegenheit, Tutorien zu halten. Tanja Eisner und Frank Loose haben mich als meine Ko-Betreuer unterstützt und ich danke ihnen für die Begutachtung meiner Doktorarbeit. Tanja Eisner und außerdem Petra Csomós, Marjeta Kramar Fijavž und Abdelaziz Rhandi möchte ich für inspirierende Forschungsaufenthalte in Leipzig, Budapest, Ljubljana und Salerno herzlich danken, die meinen Horizont mathematisch und geographisch erweitert haben.

Mein großer Dank gilt außerdem dem Evangelischen Studienwerk Villigst, das meine Doktorarbeit nicht nur finanziell ermöglicht hat, sondern mir durch sein ideelles Progamm auch Einblicke in andere Wissenschaften und Gelegenheit zu interdisziplinären Begegnungen gegeben hat.

Meinem Freund David Reißfelder danke ich für seine uneingeschränkte Unterstützung, die hilfreichen Anregungen zu meinem »Präludium« und dafür, dass durch ihn der Arbeitsalltag auch während der Corona-Pandemie sehr angenehm war. Meiner Familie danke ich von Herzen für den immerwährenden Rückhalt und ihr Vertrauen in mich.

Contents

Introduction

Henri Poincaré and Aleksandr M. Lyapunov introduced qualitative methods for the study of differential equations investigating properties of solutions and their orbits instead of explicitely or approximately solving the equations. George David Birkhoff tied up with these achievements introducing the term "dynamical systems". In 1931, Birkhoffs former student Bernard Osgood Koopman wrote down the idea to assign to a dynamical system a group of linear unitary operators. This simple observation (also made by André Weil) inspired John von Neumann and, subsequently, Birkhoff to develop Boltzmann's ergodic hypothesis into their famous ergodic theorems establishing the discipline of ergodic theory. Since then, the *Koopman operators*, as they are called nowadays, expanded into a fascinating theory.

The idea behind these powerful operators is as follows. To a dynamical system $(K;\varphi)$ consisting of a *state space* K and a *dynamics*

$$\varphi\colon K \to K$$

we define the assignment

$$f \mapsto f \circ \varphi$$

for *observables* f, i. e., real valued functions on K with certain properties forming an *observable space*. Various choices for the dynamical system and the observable space can be made. In this thesis, *topological dynamical systems* will be studied, hence K is a compact Hausdorff space and the dynamics φ is continuous. As observable space the space $\mathrm{C}(K)$ of continuous real- or complex-valued functions on K is used, hence the corresponding *Koopman operator* is

$$\begin{aligned} T_\varphi\colon \mathrm{C}(K) &\to \mathrm{C}(K), \\ f &\mapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

establishing the *Koopman system* $(\mathrm{C}(K); T_\varphi)$. This system is linear independently of the structure of the underlying dynamical system. Moreover, it captures the relevant dynamical behavior in the sense that the categories consisting of Koopman systems, respectively, topological dynamical systems are antiequivalent. This antiequivalence yields that each subsystem of a Koopman system corresponds with a quotient system of its underlying dynamical system. This correspondence is the leitmotiv of this thesis.

The thesis is composed of two parts, "Präludium" and "Fuge" ("prelude" and "fugue"). The prelude is an introduction highlighting some biographical aspects of the historical personalities involved in the development of ergodic theory. Moreover, the evolution of "Koopmanism" is briefly studied. This prelude is written in German, i. e., the author's mother tongue.

The fugue is the mathematical, hence the main part consisting of three chapters. In Chapter 1, the main players of this thesis – topological dynamical systems and Koopman systems – their basic properties and some first examples are introduced. The fully faithful, essentially surjective contravariant functor which yields the antiequivalence of the categories $\mathbf{CTop}$ of topological dynamical systems and the category $\mathbf{C}^*_{\mathbf{com},\mathbf{1}}$ of commutative unital C^*-algebras and the algebra homomorphisms between them is defined. In Section 1.2 the interplay of sub- and quotient systems is briefly explained and some examples of important Koopman subsystems are given.

Chapter 2 is devoted to the simplest Koopman subsystem, namely the fixed space $\operatorname{fix} T_\varphi$ of a Koopman operator T_φ, and its corresponding quotient system of $(K;\varphi)$. The goal of this chapter is to describe the decomposition of K induced by the fixed space, i. e., the quotient system, in terms of the dynamical system. First, characteristica of the desired equivalence relation are listed (see Lemma 2.1.3) and the strategy how to construct the right Hausdorff quotient space by means of a *Hausdorffization* is outlined. Closed *orbits* are key objects in this construction but not sufficient as can be seen from Example 2.2.1. Therefore, *approximating orbits* and from these *superorbits* are constructed in Definition 2.2.7 which are neither sufficient, though, as is clear from Example 2.2.11. It turns out that a transfinite hierarchy of equivalence relations is needed to describe the fixed factor, thus *superorbits of degree* γ are introduced for any ordinal number γ in Definition 2.3.1. These then yield the desired result in Theorem 2.3.6, hence the decomposition of K induced by $\operatorname{fix} T_\varphi$ can be described by superorbits of degree γ for some specific γ.

In particular, a dynamical property corresponding to a one-dimensional fixed space is achieved by this decomposition in Theorem 2.3.8. This yields an analogue of "ergodicity" in measure-preserving dynamical systems.

The constructed equivalence classes (i. e., superorbits) are differentiated from other concepts in the literature such as prolongations (see Remark 2.3.10).

In Section 2.4 the concept of *Lyapunov stability* is generalized by means of the superorbits and it is shown that $\operatorname{fix} T_\varphi$ induces the finest decomposition of K into *absolutely Lyapunov stable* subsets (see Theorem 2.4.7).

In Chapter 3 a new Koopman subsystem is introduced: The *Lyapunov algebra*, induced by so-called *Lyapunov functions*, hence T_φ-subinvariant functions. In Section 3.1 different dynamical concepts of recurrence and attractivity which are needed subsequently are defined and their relations explained. In Section 3.2 the subfixed cone $\operatorname{subfix} T_\varphi$ consisting of all positive subfixed functions (i. e., Lyapunvov functions) and the Lyapunov algebra $\mathcal{L}$ are studied. A list of examples is given illustrating the cases $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$, $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi$ and $\operatorname{fix} T_\varphi \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathrm{C}(K)$ (see Example 3.2.14–3.2.16).

The next section deals with (T_φ-invariant) ideals in $\mathrm{C}(K)$ that are obtained via the subfixed cone. It turns out that the *Lyapunov ideal* generated by all subfixed functions (see Definition 3.3.5) is the invariant ideal serving best for our purposes. In Theorem 3.3.8 then is shown that in the metric case there always exists some *strict Lyapunov function* generating this ideal. In Section 3.4 the support of the Lyapunov ideal, the *generalized recurrent set* $\operatorname{gr} \varphi$, is studied in detail. The set $\operatorname{gr} \varphi$ is identified in a row of examples and compared to the sets introduced in Section 3.1. Moreover, attractivity properties of $\operatorname{gr} \varphi$ such as its pointwise attractivity (see Proposition 3.4.17) are discussed.

In the following sections, the cases $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi$, $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$ and the case in between are studied separately. Necessary and sufficient conditions for $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi$, in particular for the one-dimensional case, are discussed. For the case $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$ the longterm behavior of φ is described in Proposition 3.6.1 and in Corollary 3.6.2 that $\operatorname{gr} \varphi$ coincides with the fixed points of φ. In the general case, the Lyapunov algebra and the generalized recurrent set are compared with their analogues corresponding to the quotient dynamics (see Proposition 3.7.1 and Proposition 3.7.2). The case where $\mathcal{L}$ has codimension 1

in $\mathrm{C}(K)$ is studied and the question whether the Lyapunov algebra always separates the points of the complement $(\mathrm{gr}\,\varphi)^c$ arises. In Theorem 3.7.10 it is shown that the Lyapunov algebra coincides with $\mathrm{subfix}\,T_\varphi - \mathrm{subfix}\,T_\varphi$ if and only if the generalized recurrent set is absorbing.

The next section is on algebras generated by a single Lyapunov function illustrated by a number of examples. In Section 3.9, *extended Lyapunov functions* are introduced. These (in general discontinuous) functions offer another way to obtain the Lyapunov ideal, respectively, the generalized recurrent set. Particularly interesting are continuity properties of such functions. In Theorem 3.9.7 we show that continuity of some specific extended Lyapunov function is equivalent to uniform attractivity of the generalized recurrent set. A larger T_φ-invariant Banach algebra containing an extended Lyapunov function is constructed and studied in examples.

Section 3.10 is on decompositions. The famous Conley decomposition is introduced and an alternative decomposition of K by means of the generalized recurrent set is suggested. Moreover, the decompositions of K and $\mathrm{gr}\,\varphi$ induced by the Lyapunov algebra are briefly discussed and compared with the decompositions corresponding to the fixed space (see p. 149 ff). Lastly, a decomposition of K into parts on which each extended Lyapunov function is continuous is obtained on p. 152.

Teil I

Präludium

Geschichten hinter den Theoremen – Die Ergodentheorie im Lichte ihrer Begründer

Die vorliegende Doktorarbeit bewegt sich in den Bereichen der Ergodentheorie und der Dynamischen Systeme, jeweils aus funktionalanalytischer Perspektive. Die Ursprünge dieser noch relativ jungen mathematischen Disziplinen liegen in Himmelsmechanik, statistischer Physik und Thermodynamik und begannen mit Fragen wie: Ist das Sonnensystem stabil? Kann man die Planetenbewegungen exakt vorhersagen? Nehmen die Atome eines Gases jeden physikalisch möglichen Zustand auch tatsächlich einmal an? Diese Fragen, ihre Antworten und deren mathematische Weiterentwicklungen sind mit so bekannten Namen wie Ludwig Boltzmann, Henri Poincaré, Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, George David Birkhoff und John von Neumann verbunden sowie mit einem weniger bekannten: Bernard Osgood Koopman. Zum Einstieg soll die Entwicklung von Ergodentheorie und Dynamischen Systemen anhand dieser Personen und ihrer Geschichten schlaglichtartig nacherzählt werden. Hinter den Theoremen verstecken sich nicht selten persönliche Animositäten, die Frage nach dem »Wer war zuerst?«, schwerwiegende mathematische Fehler und eine breite Spanne von Gefühlen. Überzeugungen standen sich unvereinbar gegenüber ebenso wie gegensätzliche Charaktere, die sich auch in ihrem jeweiligen mathematischen Schaffen widerspiegeln. Auch geographisch mussten große Distanzen überwunden werden, denn die Entstehung von Ergodentheorie und Dynamischen Systemen spielte sich in Mitteleuropa, Russland und den USA ab. In Beschreibungen von Zeitgenossen, Briefen und Anekdoten, ihren Lebenswegen und Interessen zeigen sich die Menschen, die uns durch ihre Mathematik bis heute prägen. Randnotizen über das geschichtliche Geschehen geben einen Eindruck, unter welchen Umständen damals gelebt und eben auch Mathematik gemacht wurde.

Ludwig Boltzmann – der konfliktbeladene Begründer der Ergodenhypothese

Der österreichische Physiker Ludwig Eduard Boltzmann (1844–1906) wirkte während einer wissenschaftlichen Zeitenwende und kann als Vollender der klassischen Mechanik angesehen werden, der zugleich den Weg für die moderne Physik des zwanzigsten Jahrhunderts ebnete. Kern seiner Arbeit ist eine mechanistische Weltsicht. Seiner Theorie nach können thermodynamische Prozesse mit Hilfe der kinetischen Gastheorie mechanisch beschrieben werden. Entsprechend war er ein vehementer Vertreter der Atomistik, die zu seinen Lebzeiten noch stark angezweifelt wurde. Zu seinen größten Errungenschaften gehört die wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. Seine Arbeit baut entscheidend auf den Ergebnissen von James Clerk Maxwell auf, zu dem er aber nie Kontakt aufgenommen hat. Trotz einer starken wissenschaftlichen Gegnerschaft wurde Boltzmanns Werk mit zahlreichen Ehrungen bedacht, darunter seine Mitgliedschaft in der Accademia dei Lincei in Rom.

Die für die Entstehung der Ergodentheorie so wichtige »Ergodenhypothese« – die schon 1845 in einem nicht beachteten Artikel von John James Waterston angedeutet worden war (Brush [12, S. 288]) – zog sich durch Boltzmanns Arbeiten zur Thermodynamik hindurch. In ihrer frühesten Version von 1871 lautete die Hypothese bei Boltzmann wie folgt:

> Die grosse Unregelmässigkeit der Wärmebewegung und die Mannigfaltigkeit der Kräfte, welche von aussen auf die Körper wirken, macht es wahrscheinlich, dass die Atome derselben vermöge der Bewegung, die wir Wärme nennen, alle möglichen mit der Gleichung der lebendigen Kraft vereinbaren Positionen und Geschwindigkeiten durchlaufen, dass wir also die zuletzt entwickelten Gleichungen auf die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten der Atome warmer Körper anwenden können. (Boltzmann [11, S. 707])

In heutiger Terminologie formuliert vermutete Boltzmann also, dass jeder Orbit eines dynamischen Systems den ganzen Zustandsraum durchläuft. Aus dieser Annahme folgt die Gleichheit von »Zeitmittel« und »Raummittel«. Boltzmann selbst maß der Ergodenhypothese offenbar nicht die zentrale Bedeutung bei, die sie rückwirkend betrachtet – obwohl in ihrer ursprünglichen Form falsch – verdient (Badino [4, Abschnitt 1]). Durch die Arbeit von Josiah Willard

Gibbs und Paul und Tatjana Ehrenfest rückte die Ergodenhypothese mehr ins Zentrum. Ihre Gültigkeit wurde schon früh angezweifelt, und die Ehrenfests formulierten eine alternative »Quasiergodenhypothese«. 1913 zeigten schließlich Arthur Rosenthal und Michel Plancherel, dass die Ergodenhypothese für mechanische Systeme nie erfüllt ist. Auch die Quasiergodenhypothese erwies sich als problematisch, da sie nicht immer die gewünschte Gleichheit von Raummittel und Zeitmittel implizierte. Die richtigen Voraussetzungen für diese Gleichheit waren schließlich Gegenstand der berühmten »Ergodentheoreme« von Birkhoff und von Neumann aus den 1930er Jahren. Aus diesen Theoremen erblühte die Ergodentheorie als eine neue mathematische Disziplin. Auch wenn sich die Ergodentheorie von ihren physikalisch motivierten Wurzeln weit entfernt hat, erinnert ihr Name noch an diese: Das Kunstwort »Ergode« geht auf Boltzmann zurück. Für eine Begriffsgeschichte siehe Mathieu [51] und Gallavotti [27].

Die Bedeutung Boltzmanns für die Ergodentheorie beschränkt sich nicht auf seine Ergodenhypothese. Er realisierte, dass für eine Beschreibung der immer wachsenden Entropie eine wahrscheinlichkeitstheoretische Struktur erforderlich ist: ein invariantes Maß. Damit motivierte er ein zentrales Objekt der späteren Ergodentheorie, das maßtheoretische dynamische System (Ornstein [61]).

Boltzmanns Leben war von Konflikten durchzogen: Er führte sowohl wissenschaftlich harte Kontroversen als auch erbitterte seelische Kämpfe gegen sich selbst. Mit wissenschaftlicher Kritik ging er unbefangen um. So soll er schon als junger Mann bei Besuchen in Heidelberg und Berlin Größen der Physik wie Gustav Kirchhoff und Hermann von Helmholtz vorlaut auf ihre Rechenfehler hingewiesen haben. Aus Graz und Wien war er offenbar einen lockereren Umgang gewöhnt und über seinen Fehltritt klärte ihn sogleich »ein einziger Blick Helmholtz'« auf (Fasol-Boltzmann [26, S. 6]).

Sein wissenschaftlicher Kontrahent Friedrich Wilhelm Ostwald gibt folgendes Bild von Boltzmann:

> Er war ein Fremdling in dieser Welt. Ganz und gar seiner Wissenschaft hingegeben, von ihren Problemen unausgesetzt erfüllt, hat er nie Zeit und Neigung gefunden, sich mit jenen tausend Kleinigkeiten vertraut zu machen, auf deren instinktiver Handhabung das Leben des modernen Menschen zum größten Teil beruht. Der-

> selbe Mann, dessen mathematischem Scharfsinn nicht die kleinste wissenschaftliche Unstimmigkeit entging, war im täglichen Leben von der Harmlosigkeit und Unerfahrenheit eines Kindes. (Fasol-Boltzmann [26, S. 46])

Berufungen an andere Universitäten brachten Boltzmann mehrfach in schwere innere Konflikte. Die 1888 überstürzt getroffene Entscheidung, von Graz nach Berlin zu wechseln, um dort Kirchhoffs Nachfolge anzutreten, verschwieg er zunächst monatelang in Graz, um diese schließlich wieder rückgängig zu machen. Innerhalb weniger Tage entschied er sich noch dreimal um, jedoch wurde ihm das Amt in Berlin dann verwehrt und die Professur mit Max Planck besetzt. Psychisch zermürbt von dem Hin und Her, ließ sich Boltzmann mehrere Wochen lang zur Erholung beurlauben. Sein persönliches Scheitern in dieser Angelegenheit hinterließ Narben auf seinem Gemüt (Fasol-Boltzmann [26, S. 18]). Von dieser Zeit an, zusätzlich überschattet vom Tod seiner Mutter und seines 11-jährigen Sohnes an einer zu spät erkannten Blinddarmentzündung, wurde seine diagnostizierte »Neurasthenie« offenkundig. Sein Krankheitsbild war durch den Wechsel depressiver und euphorischer Phasen gekennzeichnet und wurde mit einer Überreizung des Nervensystems erklärt, wie sie durch übersteigerte geistige Betätigung entstehen könne (Höflechner [32, S. 2]).

Darauffolgende Stationen des Rastlosen waren München (1890–1894), wo er seine schönsten akademischen Jahre verbrachte (Fasol-Boltzmann [26, S. 22]) und Wien (1894–1900). Seine anschließende Professur in Leipzig von 1900–1902 stellte sich leider als Katastrophe für Boltzmann heraus. Noch bevor er diese überhaupt angetreten hatte, führte er schon Rückkehrverhandlungen mit Wien und erlitt einen Nervenzusammenbruch (Reiter [69, S. 366]). Seine psychischen Probleme quälten ihn in Leipzig bis hin zu einem Selbstmordversuch, so dass er später nie über die kurze Episode dort sprach. Im Hörsaal hatte er mit Ängsten zu kämpfen, plötzlich seine geistigen Fähigkeiten zu verlieren (Fasol-Boltzmann [26, S. 34]). Für seine Rückkehr an die Universität Wien musste er eine ehrenwörtliche Erklärung abgeben, Österreich nie wieder zu verlassen (Höflechner [32, S. 2]).

Das Werk Boltzmanns war immer wieder Gegenstand von wissenschaftlichen Kontroversen und hatte in Kontinentaleuropa einen schweren Stand. Auf größeren Anklang trafen seine Theorien in England (Brush [13, S. 78]).

Boltzmanns Lehrer und Freund Josef Loschmidt brachte 1876 den »Umkehreinwand« gegen Boltzmanns mechanisches Erklärungsmodell der Thermodynamik auf. Laut diesem ist eine Erklärung thermodynamischer Prozesse anhand der Mechanik nicht möglich, da ein mechanisches System im Gegensatz zu einem thermodynamischen reversibel ist. Boltzmanns Lösungsidee dieses Paradoxons war eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation: Für manche sehr unwahrscheinliche Anfangsbedinungen sei eine Abnahme der Entropie in der Tat möglich (Brush [13, S. 71]).

Ernst Mach, in Wien ein zeitweiser Kollege von Boltzmann, sah die Grundlage für die Naturgesetze in Beobachtungen und Empfindungen. Wissenschaftliche Theorien, die sich nicht beobachten ließen, waren für ihn »sinnleere metaphysikalische Spekulation«. So auch die Atomistik und Mach war folglich Verfechter einer kontinuierlichen Struktur der Materie. In Bezug auf Atome fragte er seinen Landsmann Boltzmann schlicht: »Haben's denn schon einmal ein's g'sehn?« (Fasol [24, S. 92]).

Der spätere Nobelpreisträger Ostwald vertrat die These, dass sich alle Vorgänge in der Natur auf Energieumwandlung zurückführen ließen – dies mit einer solchen Überzeugung, dass er sogar sein Anwesen »Villa Energie« nannte (Fasol [24, S. 95]). Boltzmanns Atomistik und die darauf basierende statistische Mechanik und Thermodynamik passten nicht mit dieser »Energetik« zusammen, und es kam zu heftigen Auseinandersetzungen mit Boltzmann. Diese erfuhren auf der Naturforscherversammlung 1895 in Lübeck einen Höhepunkt, wo Boltzmann zum Angriff auf Ostwalds Energetik ansetzte. Arnold Sommerfeld, ein Zuhörer des Streits, beschrieb diesen sehr bildhaft:

> Das Referat für die Energetik hatte Helm aus Dresden gehalten; hinter ihm stand Wilhelm Ostwald, hinter beiden die Naturphilosophie des nicht anwesenden Ernst Mach. Der Opponent war Boltzmann, sekundiert von Felix Klein. Der Kampf zwischen Boltzmann und Ostwald glich, äußerlich und innerlich, dem Kampf des Stiers mit dem geschmeidigen Fechter. Aber der Stier besiegte diesmal den Torero trotz aller Fechtkunst. Die Argumente Boltzmanns schlugen durch. Wir damals jüngeren Mathematiker standen alle auf der Seite Boltzmanns. (Fasol-Boltzmann [26, S. 26])

Letztlich hatte Boltzmann sogar schon früher einen Vorschlag zur Lösung des Konflikts angedeutet, als er meinte: »Ich sehe keinen Grund, nicht auch die Energie als atomistisch eingeteilt anzusehen!« (Stiller [82, S. 97]). Dieser Gedanke wurde schließlich von Max Planck mit seiner Quantentheorie zu Ende gedacht.

Trotz der fachlichen Kämpfe war Boltzmanns persönliches Verhältnis sowohl zu Mach als auch Ostwald wertschätzend und sogar freundschaftlich. Mach hatte sich 1885 für eine Berufung Boltzmanns nach Wien eingesetzt, Ostwald drängte ihn 1900 geradezu dazu, nach Leipzig zu kommen. Bei Ostwald und seiner Familie war Boltzmann gelegentlich zu Musikabenden eingeladen (Fasol-Boltzmann [26, S. 35]). Boltzmann selbst war zeitlebens ein hervorragender Pianist, der in jungen Jahren von dem damals noch wenig bekannten Anton Bruckner unterrichtet worden war.

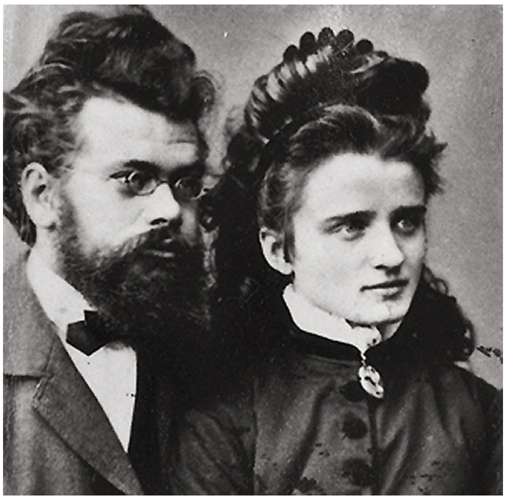
In einem Vortrag von 1904, in dem er das Glück energetisch interpretierte, entglitt Ostwald in seiner Kritik allerdings ins Persönliche:

> [...] Den entgegengesetzten Zustand bietet der Neurastheniker dar. Bei diesem sind die Widerstandsempfindungen exzessiv gesteigert; er ist außer Stande, den kleinsten Entschluss zu fassen, weil er die entgegengesetzten Widerstände nicht überwinden kann, und er gehört zu den unglücklichsten Menschen, die es gibt. (Fasol-Boltzmann [26, S. 41])

1896, kurz nach dem Zusammenprall in Lübeck, führte Plancks Schüler Ernst Zermelo den sogenannten »Wiederkehreinwand« gegen Boltzmann ins Feld. Dieser basierte auf Henri Poincarés »Wiederkehrsatz«, den dieser bereits 1890 in seiner Arbeit »Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique« (Poincaré [66]) veröffentlicht hatte (siehe den nächsten Abschnitt). Wie Zermelo feststellte, widersprach dieser Satz einer steten Zunahme der Entropie im Sinne des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, da gemäß Poincarés Satz jedes System irgendwann wieder beliebig nah an seinen Ursprungszustand zurückkehren würde. Boltzmanns Antwort war, dass der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik lediglich als wahrscheinlichkeitstheoretische Aussage zu verstehen sei, und er berechnete die ungeheure Zeitspanne von $10^{10^{19}}$ Sekunden als erwartete Wiederkehrzeit für die Teilchen in einem Kubikzentimeter eines idealen Gases (Höflechner [32, S. 6]). Bis heute ist diese Problematik offenbar nicht abschließend geklärt (Sklar [79]).

Die heftige Kritik seiner Widersacher ließ bei Boltzmann Zweifel an seinem Lebenswerk aufkommen. Dies, und dass er als letzter Anhänger der Atomistik und Relikt aus alten Zeiten gesehen wurde (Höflechner [32, S. 7]), destabilisierte Boltzmanns ohnehin schon labile psychische Konstitution weiter. In seinen letzten Lebensjahren wandte er sich mehr und mehr der Philosophie zu.

Leider hat Boltzmann nicht mehr erlebt, wie seine Theorie in den Arbeiten etwa von Albert Einstein, Erwin Schrödinger und Max Planck noch Früchte getragen hat. Am 5. September 1906 nahm er sich während eines Aufenthalts mit seiner Familie in Duino, der eigentlich seiner Erholung hätte dienen sollen, das Leben. Seine Frau Henriette überlebte ihren »Louis« um 32 Jahre. Sie war selbst studierte Physikerin und eine der ersten Studentinnen der Universität Graz gewesen. Nach der Heirat hatte sie ihr Studium allerdings aufgeben müssen. Ihrem stark kurzsichtigen Mann war sie eine sachkundige Vorleserin von Fachartikeln gewesen (Fasol-Boltzmann [26, S. 22]).



Boltzmann und seine Verlobte Henriette von Aigentler (1875)[1]

Boltzmann fand die Begründung für seine wechselhaften Gemütszustände scherzhaft in der Stunde seiner Geburt: Er war 1844 in der Nacht von Faschingsdienstag auf Aschermittwoch geboren worden (Fasol-Boltzmann [26, S. 39]). Auf bittersüße Weise verarbeitete er seine eigene Tragik auch literarisch in seinem Scherzgedicht »Beethoven im Himmel«: Das lyrische Ich

[1]Bildquelle: `https://mujeresconciencia.com/2015/11/02/henriette-y-ludwig-los-boltzmann/` (abgerufen am 19.7.2021)

erkennt beim Eintritt in den Himmel den Engelschoral sogleich als ein Werk Ludwig van Beethovens, das dieser offenbar im Himmel komponiert hat. Jedoch scheint ihm die Qualität nicht dem zu entsprechen, was Beethoven auf Erden vollbracht hatte. Beethovens Geist stimmt ihm daraufhin zu; was im Himmel fehle, um gute Musik zu komponieren, sei der Schmerz, »des Lebens wärmster Ton«.

> [...]
>
> Dein Urtheil stimmt mit meinem! Du hast Recht!
> Im Himmel hier gelingt mir alles schlecht.
> Ich schreib' auch nichts mehr! Nur zum Weltgericht
> Den Satz für die Posaunen weigr' ich nicht.
> Sonst brächt' ich in Verlegenheit den Herrn.
> Da muß ich wohl, thu' ich es gleich nicht gern.
> Und weißt Du, was mir raubt des Schaffens Feuer?
> Der Töne mächtigster fehlt hier der Leier
> Und dieser mächt'ge Ton – es ist der Schmerz!
> Der so gewaltig klingt, der hallt wie Erz.
> Und packt er dich, dass jede Faser bebt,
> Er ist Dein Freund, der Dich vom Staub erhebt.
> Nur der wird mit der Menschheit Preis gekrönt,
> Den er gefoltert, dass er ächzt und stöhnt.
>
> [...]
>
> So fand, wo Großes ist, den Schmerz ich wieder;
> Er war auch stets der Grundton meiner Lieder
> Und hier in seel'ger Geister schönem Land
> Entsank gar bald die Leier meiner Hand.
>
> [...]
>
> (Fasol-Boltzmann & Fasol [25, S. 168, 169])

Ein bedeutungsschwerer Fehler – Henri Poincarés Entdeckung chaotischer Dynamik

Zu Ehren des 60. Geburtstags des wissenschaftsaffinen schwedischen Königs Oskar II. – er hatte selbst Mathematik studiert – wurde 1885, unter Regie des schwedischen Mathematikers Gösta Mittag-Leffler, eine internationale Preisausschreibung in Mathematik bekannt gegeben. Die Jury-Mitglieder Karl Weierstraß, Charles Hermite und Mittag-Leffler selbst gehörten zu den führenden Mathematikern ihrer Generation. Einen Nobelpreis oder eine Fieldsmedaille gab es zu dieser Zeit noch nicht, so dass dieser Preis viel Aufmerksamkeit erregte. Der Sieger sollte mit einer Veröffentlichung in der vor Kurzem gegründeten, bis heute herausgegebenen Zeitschrift *Acta Mathematica*, einem hohen Preisgeld und einer Gold-Medaille mit dem Antlitz des Königs geehrt werden. Eine der vier Preisfragen betraf das N-Körper-Problem und seine mögliche Lösung, die eine Schlussfolgerung auf die Stabilität des Sonnensystems erlauben würde. Diese Problematik, ob starke Änderungen der Planetenlaufbahnen ausgeschlossen werden können und kein Planet aus dem System entkommen kann, hatte schon Generationen von Gelehrten beschäftigt.

1888 reichte der 34-jährige Henri Poincaré seine Arbeit »Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique« ein und die Jury war sich schnell einig: Poincaré sollte den Wettbewerb gewinnen, auch wenn er das eigentliche Problem nicht gelöst hatte. In dieser und früheren Arbeiten hatte Poincaré vollkommen neue Methoden zur Untersuchung von Differentialgleichungen bzw. deren Lösungen entwickelt: Statt der lange Zeit üblichen Untersuchung von Reihenentwicklungen asymptotischer Lösungen führte er eine qualitative, globale Untersuchung der Dynamik auf dem Zustandsraum mit geometrischen und topologischen Methoden ein, um das Langzeitverhalten der Orbits zu studieren. Auch sein bahnbrechendes, später auch für die Ergodentheorie wichtiges und Ludwig Boltzmann in Bedrängnis bringendes »Rekurrenztheorem« war in dieser Arbeit erstmals enthalten. Allerdings hatte die hochkarätig besetzte Jury erhebliche Verständnisprobleme beim Lesen der intuitiv und sprunghaft geschriebenen Arbeit. Daher kam sie zu dem Schluss, dass Poincaré noch einige Punkte klären müsse, woraufhin dieser weitere hundert Seiten nachreichte. Ohne Zweifel war aber, dass Poincarés neue Konzepte nicht nur die Theorie dynamischer Systeme, sondern weitere Bereiche der Mathematik revolutionieren würden. Poincaré erhielt schließlich das Preisgeld, während er noch mit den Umarbeitungen beschäftigt war. Nachdem schon die ersten Druckexemplare der neuen Ausgabe von Acta Mathematica weltweit verschickt worden waren,

Henri Poincaré (1889)[2]

kam dann die Schreckensnachricht: Poincaré hatte einen schwerwiegenden Fehler in seiner Arbeit entdeckt und es war unklar, welche Teile der Arbeit noch zu retten waren. Die verschickten Exemplare mussten unter großem Aufwand zurückgefordert und zerstört werden, die Reputation der beteiligten Personen stand auf dem Spiel, auch die des nichtsahnenden schwedischen Königs. Die Rückrufaktion war offenbar erfolgreich: Heute existieren nur noch zwei Exemplare, beide am Mittag-Leffler-Institut in Stockholm, eines davon mit der Inschrift »Hela upplagan blev makulerad« (»die ganze Ausgabe wurde vernichtet«) von Mittag-Leffler (Rågstedt [67]). Man einigte sich darauf, dass Poincaré die entstandenen Druckkosten – um einiges höher als das Preisgeld und mehr als ein halbes Jahresgehalt – selbst übernehmen würde. Poincaré indessen arbeitete fieberhaft an seinen Ergebnissen. Er kam zum unausweichlichen und überraschenden Schluss, dass eine sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen im N-Körper-Problem möglich ist, langfristige Vorhersagen über beispielsweise die (exakten) Planetenbewegungen also unmöglich sind. Er wurde so zum Entdecker chaotischen Verhaltens dynamischer Systeme.

[2] Bildquelle: `http://www.mittag-leffler.se/library/henri-poincare` (abgerufen am 5.7.2021)

1890 erschien schließlich eine stark überarbeitete Version seines Artikels in *Acta Mathematica* (Poincaré [66]). Für eine ausführliche Beschreibung der Umstände um Poincarés zunächst fehlerhafte Veröffentlichung siehe etwa Rågstedt [67] oder Yoccoz [88].

Die intuitive Denkweise Poincarés, der die Jury schwer folgen konnte, war schon in seiner Jugend angelegt. Sein langjähriger Freund Paul Appell erinnerte sich an seinen ersten Eindruck:

> [...] il était comme absorbé dans des pensées intérieures, avec des yeux en quelque sorte voilés par la réflexion : quand il parlait, ses yeux s'animaient d'une expression de bonté, à la fois malicieuse et profonde. [...] Je fus frappé de sa façon de parler un peu brève et saccadée, entrecoupée de longs silences. Dès les premieres interrogations en classe, sa supériorité apparut éclatante : il répondait aux questions en supprimant les raisonnements intermédiaires, avec une brièveté et une concision telles, que le professeur lui demandait toujours de développer ses réponses : il lui disait : »Si vous répondez ainsi à l'examen, vous risquez de n'être pas compris«.[3]
> (Appell [2, S. 190])

Als Schuljunge fiel Poincaré als Gedächtniskünstler auf: Er kannte nach dem Lesen eines Buchs dessen gesamten Inhalt und konnte die Seitenanzahl angeben, auf der sich eine bestimmte Information befand. Er machte keine Notizen, sondern merkte sich die Inhalte des Unterrichts nach Gehör, womit er auch seine starke Kurzsichtigkeit ausgleichen konnte. Für den breit interessierten und begabten Poincaré war keineswegs schon in seiner Jugend klar, dass er den Weg der Mathematik einschlagen würde. Er tat sich als Philosoph hervor, war ein begabter Tänzer und Schauspieler mit einer Vorliebe für Komödien, der gerne auch kleine Theaterstücke für seine Familie verfasste oder zur Freude seiner Klassenkameraden seine Lehrer imitierte. Während der Besetzung Nancys durch Preußen war ein hoher deutscher Beamter im Hause Poincaré einquartiert. Der junge Henri nutze trotz der schwierigen politischen Lage die

[3] [...] er war wie absorbiert von inneren Gedanken, mit von Nachdenken in gewisser Weise verschleierten Augen: Wenn er sprach, belebten sich seine Augen mit einem Ausdruck der Freundlichkeit, zugleich verschmitzt und tief. [...] Ich war erstaunt von seiner Art zu reden, ein bisschen kurz und abgehackt, unterbrochen von langen Pausen. Von den ersten Abfragen in der Klasse an war seine Überlegenheit offenkundig: Er ließ bei seinen Antworten auf Fragen die Zwischenschritte der Überlegungen weg, mit einer solchen Kürze und Prägnanz, dass der Lehrer ihn immer dazu anhielt, seine Antworten genauer auszuführen: Er sagte ihm: »Wenn Sie so in der Klausur antworten, riskieren Sie, nicht verstanden zu werden.«

Gelegenheit, um jeden Abend im Gespräch mit dem Mann sein Deutsch zu verbessern und die neuesten Nachrichten zu erfahren (zu Poincarés Kindheit siehe Verhulst [86, Kap. 1], für einen kurzen Überblick seines Lebens und Denkens siehe etwa Ayoub [3, Part I] oder Strick [83]).

Auch als Mathematiker blieb Poincaré ein Universalist und war in vielen verschiedenen Gebieten der Mathematik aktiv. Übersprudelnd von Ideen, die er häufig nicht ausarbeitete, da er sie für klar hielt, fehlte es dem mathematischen Impressionisten oft an Rigorosität. Die Gutachter seiner Doktorarbeit kritisierten, dass die Arbeit konfus aufgebaut sei und es ihm nicht gelang, seine Ideen in klarer und einfacher Weise auszudrücken. Die Hörer seiner Vorlesungen wurden schnell weniger, da sie seinem sprung- und lückenhaften Stil nicht folgen konnten. Poincaré wusste seine mathematische Intuition gezielt einzusetzen und in seinen Arbeitsstil war sein Unterbewusstsein fest integriert: Kam er bei einem Problem oder beim Verfassen eines Artikels nicht weiter, ließ er davon ab im Wissen um eine spätere Erleuchtung. Vom Hilbertschen Formalismus und der Idee, die Mathematik vollständig axiomatisieren zu können, distanzierte er sich, da er Logik als Einschränkung der Ideenfindung empfand. Auch wissenschaftsphilosophisch setzte er sich mit mathematischer Kreativität und seiner eigenen Denkweise auseinander (Poincaré [65]).

Henri Poincaré in seinem Arbeitszimmer (ca. 1911)[4]

[4]Bildquelle: Dornac/Archives Henri-Poincaré (Nancy) `http://henri-poincare.ahp-numerique.fr/items/show/84` (abgerufen am 12.10.2021)

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov und die Frage nach der Stabilität

Neben Poincaré beschäftigte sich auch der russische Mathematiker Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857–1918) wegweisend mit qualitativen Methoden zur Betrachtung der Lösungen von Differentialgleichungen. Im Vorwort zu seiner Dissertation aus dem Jahr 1892 machte er Poincarés Einfluss auf seine Arbeit deutlich und betonte, dass einige seiner Resultate Verallgemeinerungen von Bemerkungen Poincarés seien (siehe auch Mawhin [52, Abschnitt 2]):

> The only attempt, as far as I know, at a rigorous solution belongs to Poincaré, who, [...] considered questions of stability for the case of second order systems of differential equations, and arrived also at some related questions pertaining to systems of third order. Although Poincaré limited himself to very special cases, the methods he used allow much more general applications and could still lead to many new results. This will be seen in what follows, for, in a large part of my researches, I was guided by the ideas developed in the above-mentioned memoir. (Lyapunov [48, S. 532])

Offenbar kam es aber auch ungewollt zu Überschneidungen mit Poincarés Werk, wie Lyapunov in einem Nachtrag zum Vorwort seiner Dissertation beschrieb, wo er außerdem die im vorigen Abschnitt behandelte Preisarbeit Poincarés zitierte:

> During the printing of this work, which extended over more than two years, there have appeared two very interesting works by Poincaré, treating questions related to many of those which I have considered. I refer to his memoir "Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique" which appeared in *Acta mathematica*, Vol. XIII, a short time after I had begun to arrange the printing of my work, as well as the first volume to appear of his treatise entitled "Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste" (Paris, 1892). In the first are found certain results analogous to those which I have obtained, which I indicate at suitable points of my work. As for the second, I have not yet had time to study it in detail; but insofar as the questions which I have considered are concerned, it does not seem to contain essential additions to the memoir of *Acta mathematica.* (Lyapunov [48, S. 534])

Zwei Jahrzehnte später klang Lyapunov in einem Brief an seinen Freund Wladimir A. Steklow frustriert, dass Poincaré die gleichen Fragestellungen wie er bearbeitete:

> Thank you for your communication which spared me a pointless loss of time. How annoying this would have been with the work now fit for throwing away; for, according to what you write, Poincaré did what would have been the subject for my investigations [...]. (Smirnov [80, S. 780])

Eine Woche darauf hatte er sich jedoch mit dessen neuer Veröffentlichung vertraut gemacht und urteilte, dass nur alte Ideen in dieser Arbeit Poincarés wiederkehrten:

> To my greatest surprise I did not find anything significant in this book. The greatest part of the book is devoted to the exposition (which is, it is necessary to note, highly disorganized) of results already known. As regards questions of interest to me, Poincaré only repeats, and in a very abridged form, that which he said in his old memoir of 1886. (Smirnov [80, S. 781])

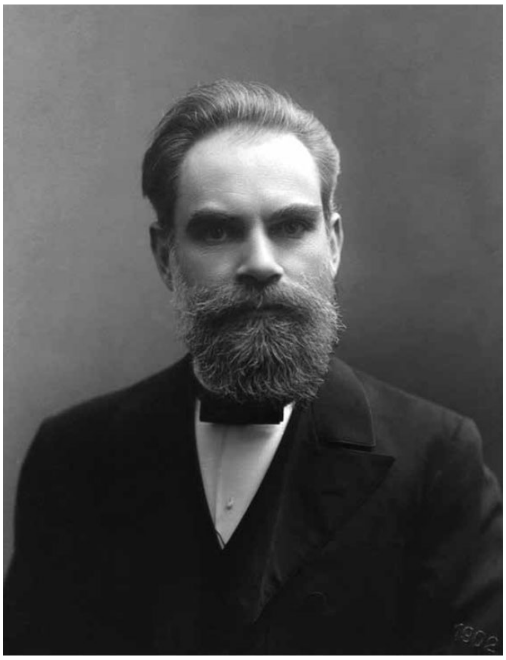
Umgekehrt erwähnte Poincaré Lyapunov in seinen Veröffentlichungen nicht. Eine persönliche Begegnung der beiden fand trotz der Verwandtschaft ihrer Arbeit nie statt.

Lyapunov, drei Jahre jünger als Poincaré, wurde an der Universität in St. Petersburg mathematisch stark von seinem Lehrer Pafnuti L. Tschebyschew geprägt. Dieser vertrat die Ansicht, dass nur in Anwendungen motivierte Mathematik einen Wert habe und folglich mathematische Forschung stets einen Bezug zur realen Welt behalten solle (Hatvani [31, S. 2]). Jeder ernstzunehmende Mathematikstudent solle sich außerdem in seiner Abschlussarbeit einem Problem von anerkannter Schwierigkeit widmen, nicht einer einfachen Frage, die mit gängigen Methoden schnell gelöst werden könne. So schlug Tschebyschew für Lyapunovs Arbeit eine Frage zur Stabilität von Rotationskörpern rotierender Flüssigkeiten vor und versprach ihm, dass deren Lösung ihn auf einen Schlag zu einem angesehenen Mathematiker machen würde. Lyapunov machte sich mit Feuereifer ans Werk, ohne einen Hinweis, wie er dieses Problem angehen könnte. Letztendlich löste er nur Randprobleme der eigentlichen Fragestellung, trotzdem verhalf ihm seine Abschlussarbeit zu internationaler Bekanntheit. Eine Besprechung dieser erschien direkt nach der Verteidigung 1885 in der Französischen Zeitschrift *Bulletin Astronomique* und 1904 wurde sie in die Wissenschaftssprache Französisch übersetzt.

Seine oben schon zitierte Doktorarbeit »The general problem of the stability of motion« wurde schließlich ein Meilenstein der Stabilitätstheorie. Hier führte Lyapunov seine Erste und Zweite Methode ein, wie sie heute immer noch genannt werden. Die Zweite Methode wird auch als Direkte Methode bezeichnet, weil hier die Lösung einer Differentialgleichung nicht bekannt zu sein braucht, um trotzdem Aussagen über ihre Eigenschaften machen zu können. Dies geschieht mit Hilfe einer entlang von Trajektorien fallenden Funktion, die heute Lyapunovfunktion genannt wird (siehe Kapitel 3 der vorliegenden Dissertation). Anhand einer Lyapunovfunktion kann ermittelt werden, ob eine Lösung stabil ist. Da im Sommer 1891 gerade eine Cholera-Pandemie wütete und ein Kommisionsmitglied starb, musste der Termin für Lyapunovs Verteidigung auf das Jahr 1892 verschoben werden. Auch seine Doktorarbeit wurde übersetzt und erschien 1908 und nochmals 1949 auf Französisch, 1992 schließlich in englischer Sprache.

Während seiner Zeit an der Universität Charkiw in den Jahren 1885–1902, in der seine Doktorarbeit entstand, war Lyapunov viel in der Lehre tätig. Nach anfänglicher, politisch motivierter Skepsis waren seine Vorlesungen bei den Studenten äußerst beliebt. Jedoch traute sich niemand, Fragen zu stellen und ein gewählter »Botschafter« übermittelte ihm die Fragen aller Hörer, wie sich sein früherer Student Steklow erinnert:

> From that day on, A. M. gained quite an exceptional status in students' eyes: he was treated with impeccable courtesy. The majority, who were totally indifferent to science, strained to do their utmost to at least rise a little closer to the heights to which A. M. was trying to lift his listeners. People started to feel shame if their unpreparedness became evident; most wouldn't even dare talk to him lest their ignorance was exposed. The upshot of this was a curious organization: the course selected a kind of authorized go-between to whom students would bring their problems, and this person would then discuss them with A. M.; he would bear the burden of feeling ashamed in case of an obvious misdemeanor.
>
> A. M. would later ask me with naive curiosity why so few of the students asked him to elucidate difficult points. (Steklov [81, S. 569])



Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1902)[5]

Auch wenn Lyapunov die Lehre hauptsächlich als Unterbrechung seiner wissenschaftlichen Tätigkeit ansah, erinnerte er sich an die Zeit in Charkiw als die glücklichste seines Lebens (Smirnov [80, S. 780]). Lyapunovs Vorlesungsskripte wurden später veröffentlicht, so dass noch Generationen von Studenten davon profitierten.

1902, wieder in St. Petersburg, wandte sich Lyapunov zum wiederholten Mal seinem Abschlussarbeitsthema, den Gleichgewichtsfiguren, zu und konnte zeigen, dass birnenförmige Rotationskörper nicht stabil sind. Er geriet dadurch in Konflikt mit dem Astronomen George H. Darwin, Charles Darwins Sohn, der das Gegenteil behauptete. Beide fanden keinen Fehler in ihren Arbeiten. Poincaré äußerte sich 1911 dazu folgendermaßen:

[5]Bildquelle: Autor unbekannt/Wikimedia Commons
`https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Aleksandr_Lyapunov.jpg`
(abgerufen am 15.7.2021)

> Piriforms may be stable, but there is no confidence that it is really so. Darwin finds this figure stable, but as Lyapunov contends, it is unstable. In order to resolve the problem finally, one should make calculations once more, but they are extremely complicated. (Shcherbakov [76, S. 867])

Erst 1917 fand sich ein Experte, der britische Astronom James H. Jeans, der die Richtigkeit von Lyapunovs auf tausend Seiten ausgeführten, teils bis auf vierzehn Nachkommastellen genauen Rechnungen bestätigte. (Shcherbakov [76, S. 867])

Lyapunov war ein arbeitswütiger Mensch, der oft ohne eine einzige Stunde Schlaf in den Hörsaal trat. Zerstreuung fand er gelegentlich in Konzerten seines Bruders Sergei Mikhailovich Lyapunov, einem anerkannten Komponisten und Pianisten. Dieser stand dem sogenannten »Mächtigen Häuflein« nah, einem Zusammenschluss von Komponisten, die das Ideal einer genuin russischen Musik vertraten. Außerdem liebte Lyapunov Pflanzen. Seine Wohnung mutete anscheinend wie ein kleiner botanischer Garten an (Pakshina [62, S. 5215]), voller exotischer Pflanzen, darunter sogar Bäume. So manche botanische Trophäe brachte er aus Italien mit, wo er 1908 am Internationalen Mathematikerkongress teilgenommen hatte.

Seine Errungenschaften in der Stabilitätstheorie, Mechanik, Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematischen Physik wurden durch die Mitgliedschaft in mehreren Akademien der Wissenschaften honoriert, darunter die Accademia dei Lincei in Rom. Eine Vielzahl von mathematischen Strukturen wie »Lyapunovfunktionen«, »Lyapunovexponenten«, »Lyapunovstabilität«, mehrere »Lyapunov-Theoreme«, »Lyapunovgleichungen« oder die »Lyapunovdimension« und außerdem ein Mondkrater tragen seinen Namen. In der vorliegenden Doktorarbeit wird diese Liste noch um die »Lyapunovalgebra« und das »Lyapunovideal« ergänzt.

Lyapunovs von Erfolg gekröntes Leben ging leider tragisch zu Ende: Die Russische Revolution von 1917 setzte seiner Familie als zum russischen Adel gehörig schwer zu. Der Familiensitz an der Wolga wurde niedergebrannt und mit ihm die von Lyapunovs Vater und Großvater begründete wertvolle Bibliothek. Lyapunov erfuhr von diesem schwerwiegenden Ereignis in Odessa, wo er und seine an Tuberkulose erkrankte Frau sich auf ärztliches Anraten hin aufhielten. Auch Lyapunov ging es gesundheitlich nicht gut, er litt am Grauen Star und drohte zu erblinden. Von all diesen Rückschlägen geschwächt, schaffte er es nach der Vorlesung kaum mehr nach Hause (Steklov [81, S. 576]). Der Zustand seiner Frau verschlechterte sich zunehmend und sie verstarb im Herbst 1918. Zutiefst erschüttert entschied sich Lyapunov am gleichen Tag, ihr zu folgen.

Wer kam zuerst? Unstimmigkeiten um die Veröffentlichung der Ergodentheoreme

> Koopman's observation was simultaneously a challenge and a hint. If there is an intimate connection between measure preserving transformations and unitary operators, then the known analytic theory of such operators must surely give some information about the geometric behavior of the transformations. By October of 1931, von Neumann had the answer; the answer was the mean ergodic theorem.
>
> Paul Halmos in Halmos [30, S. 91]

Der amerikanische Mathematiker George David Birkhoff (1884–1944) etablierte die Theorie Dynamischer Systeme schließlich als eigenständige mathematische Disziplin. Auch die Bezeichnung »dynamisches System« stammt von ihm, er benutzte diese erstmals 1909 vor der American Mathematical Society und 1912 dann in seiner Arbeit »Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques« (Birkhoff [7]). Hier führte er auch die Konzepte »Minimalität« und »Rekurrenz« ein. Birkhoff wird oft als Poincarés Erbe oder dessen »einziger wahrer Schüler« gesehen (Roque [70, S. 296]). Ein Höhepunkt seines Schaffens war der Beweis von »Poincarés letztem Satz«, den er 1913 veröffentlichte, ein Jahr nach Poincarés überraschendem Tod.

Birkhoffs früherer Doktorand Bernard Osgood Koopman präsentierte in seinem kurzen, aber wirkmächtigen Artikel »Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space« aus dem Jahr 1931 die einfache, aber wegweisende Idee, einem dynamischen System eine Gruppe unitärer linearer Operatoren zuzuordnen (Koopman [35]). Diese – in heutiger Terminologie – »Koopmangruppe auf L^2« wurde zum Türöffner für eine neue mathematische Disziplin, die Ergodentheorie.

Koopmans Idee inspirierte John von Neumann, die Problematik um Boltzmanns Ergodenhypothese mit operatorentheoretischen Methoden zu behandeln. Vermöge dieser fand er den Beweis zu seinem bahnbrechenden Ergodentheorem, das er 1932 in den *Proceedings of the National Academy of Sciences* veröffentlichte (Neumann [59]). Schon 1931 war dort allerdings Birkhoffs ebenso bedeutendes Ergodentheorem abgedruckt worden (Birkhoff [8]). Jedoch vermeldeten Birkhoff und Koopman in einer gemeinsamen Veröffentlichung kurz darauf:

> The first one actually to establish a general theorem bearing fundamentally on the Quasi-Ergodic Hypothesis was J. v. Neumann, who, with the aid of the above theory of the U_t-operator, proved what we will call the Mean Ergodic Theorem [...]. (Birkhoff & Koopman [10, S. 280])

Mit diesen beiden Theoremen war der Grundstein für die Herausbildung der Ergodentheorie gelegt. Wie kam es aber zur umgekehrten Reihenfolge ihrer Veröffentlichungen?

Aufschluss geben kann ein Brief, den von Neumann im Januar 1932 an Howard Percy Robertson verfasste, seinen Freund und Kollegen in Princeton (abgedruckt und transkribiert in Zund [89, S. 142–147]). In diesem Brief schildert von Neumann, dass Koopman ihm schon im Frühjahr 1930, während von Neumanns erstem USA-Aufenthalt, von seiner zu diesem Zeitpunkt noch unausgereiften Idee erzählt hatte. Der damals 26-jährige von Neumann wurde hellhörig, er erahnte eine vage Möglichkeit für den Beweis eines Ergodentheorems. Koopmans Idee lag offenbar in der Luft: Unabhängig von ihm kommunizierte auch André Weil an von Neumann die Beobachtung, abstrakte dynamische Systeme mit linearen Operatoren auf Hilberträumen zu verbinden. Weil, Gründungsmitglied des Autorenkollektivs Nicolas Bourbaki, war im Sommer 1931 zu Besuch aus Indien in Berlin, wo er von Neumann traf. In einem Kommentar zu seinen gesammelten Werken erinnert sich Weil an die Begebenheit:

> D'autre part Elie Cartan [...] avait bien mis en valeur, dans ses Invariants Intégraux, le fait qu'un système hamiltonien possède un volume invariant ; [...] De là à conclure qu'un tel système définit un groupe à un paramètre de transformations unitaires dans l'espace L^2 défini par ce volume, il n'y a qu'un pas à franchir, si aisé qu'aujourd'hui nous n'en prenons même plus conscience. Je crois me souvenir cependant que cette observation parut encore neuve à

> von Neumann quand je la lui communiquai en 1931 ; justement ses travaux venaient d'attirer l'attention sur la théorie des opérateurs hermitiens, bornés ou non, dans les espaces de Hilbert, opérateurs qui ne sont autres que les transformations infinitésimales des groupes unitaires à un paramètre dans ces mêmes espaces. Je cherchai à exploiter cette idée, mais j'en fus quelque peu découragé par Elie Cartan, qui ne crut pas qu'elle pût être d'aucune utilité en mécanique céleste. A vrai dire, il faut, pour aboutir par cette voie à des résultats concrets, non seulement que le système étudié ait un volume total V fini, mais surtout qu'il n'admette pas de partie mesurable invariante de volume > 0 et $< V$, ce qui en général n'est pas plus facile à vérifier que l'hypothèse ergodique elle même. Néanmoins, la même observation, faite indépendamment par Koopman, allait aboutir bientôt aux travaux de von Neumann sur la théorie ergodique, et surtout au beau théorème ergodique de G. D. Birkhoff. Comme il est bien connu, cette théorie a reçu par la suite un grand développement.[6] (Weil [87, S. 522–523])

Weil stand anschließend in brieflichem Kontakt mit Koopman und von Neumann und räumte Koopman das Vorrecht für die Entdeckung der unitären Operatoren ein. Er selbst publizierte nicht zu dem Thema und wandte sich anderen Projekten zu. Im September 1931 gelang von Neumann schließlich der Durchbruch: der Beweis seines Ergodentheorems. Mit der Veröffentlichung wartete er jedoch noch ab, um mit Koopman abzuklären, ob dieser

[6] Schon Elie Cartan [...] hat in seinen « Invariants Integraux » die Tatsache betont, dass ein Hamiltonisches System ein invariantes Maß besitzt [...]. Daraus zu schließen, dass ein solches System eine Einparametergruppe von unitären Transformationen definiert, ist nur ein kleiner Schritt, so leicht, dass uns das sogar nicht mehr bewusst ist. Ich glaube mich aber daran zu erinnern, dass diese Beobachtung für von Neumann noch neu war, als ich sie ihm 1931 mitteilte. Genau damals erhielten seine Arbeiten über die Theorie hermitescher Operatoren, beschränkt oder unbeschränkt, in Hilberträumen große Aufmerksamkeit. Diese Operatoren sind nichts anderes als die infinitesimalen Transformationen von unitären Einparametergruppen in genau diesen Räumen. Ich habe versucht, diese Idee aus zu nützen, wurde aber von Elie Cartan ein wenig entmutigt, der nicht glaubte, dass sie in der Himmelsmechanik nützlich sein könnte. In der Tat braucht man, um auf diesem Weg zu konkreten Resultaten zu kommen, nicht nur, dass das betrachtete System ein endliches Gesamtmaß hat, sondern vorallem, dass es keine nicht triviale invariante messbare Teilmenge besitzt. Dies ist, im Allgemeinen, nicht leichter als die Ergodenhypothese selbst zu verifizieren. Nichts desto trotz führte diese Beobachtung, unabhängig auch von Koopman gemacht, bald zu den Arbeiten von von Neumann über Ergodentheorie und vorallem zu dem schönen Ergodentheorem von G. D. Birkhoff. Wie wohlbekannt erfuhr diese Theorie eine große Weiterentwicklung.

nicht zwischenzeitlich das gleiche Resultat erreicht habe. Dies war nicht der Fall. Koopman half von Neumann, der erst seit Kurzem in den USA lebte und zuvor noch nie auf Englisch publiziert hatte, bei der Übersetzung seiner Ergebnisse. Außerdem kamen noch hilfreiche Anregungen von Marshall Harvey Stone, einem früheren Mitdoktoranden von Koopman bei Birkhoff (und heute in der Funktionalanalysis gut bekannt), was die Veröffentlichung weiter verzögerte.

von Neumann beim Afternoon Tea mit Absolventen (Princeton 1947)[7]

In dieser Zeit trafen Koopman und von Neumann bei der feierlichen Einweihung der Fine Hall, des neuen Mathematikgebäudes in Princeton, auf Birkhoff und schilderten ihm die bahnbrechenden Ergebnisse, »in a considerable state of excitement« wie es in Morse [55, S. 420] heißt. Wenige Wochen später

[7]Bildquelle: Alfred Eisenstaedt/LIFE Photo Collection `https://artsandculture.google.com/asset/6QGPLEz2_BStbA` (abgerufen am 12.10.2021)

eröffnete Birkhoff bei einer Konferenz, dass er ein noch stärkeres Theorem beweisen konnte: statt Konvergenz im Mittel wie bei von Neumann sogar Konvergenz punktweise fast überall. Der Bitte von Neumanns beim abendlichen Konferenzdinner im Harvard Club, sich für die Veröffentlichung mit ihm abzustimmen, kam Birkhoff offensichtlich nicht nach. Dass er innerhalb einer Woche gleich zwei Manuskripte – eines am 27. November, das andere am 1. Dezember 1931 – bei den *Proceedings of the National Academy of Sciences* einreichte (zu deren Herausgeber er gute Kontakte hatte), lässt darauf schließen, dass er es eilig hatte. Von Neumanns Arbeit – eingereicht nur wenige Tage nach Birkhoffs am 10. Dezember 1931 – erschien schließlich erst einen Monat später in der Januar-Ausgabe. Koopman, Weil und Stone würdigte er darin mit Dank für ihre Denkanstöße. Birkhoff verwies in seiner Publikation zwar auf von Neumanns Theorem, jedoch unzureichend, wie von Neumann und seine Verbündeten befanden:

> [...] it does not show to any person, uninformed about the real history of these things, who of Birkhoff and myself got the other started; that which one of us attacked the unsolved q.E.h, and which one found an independent proof, after he knew that it was solved, and what the necessary and sufficient conditions for its truth are. (Zund [89, S. 147])

Offensichtlich war von Neumann gekränkt und auch überrascht von Birkhoffs Alleingang, der im Kontrast zu seiner eigenen Kollegialität und offenen Diskussionskultur stand. Er reagierte mit einem Artikel »Physical Applications of the Ergodic Hypothesis«, in dem er Birkhoffs und sein eigenes Theorem in Bezug auf ihre physikalische Bedeutung verglich. Er kam zu dem Schluss, dass sowohl sein Theorem die Physik besser widergäbe als auch die dem Beweis zu Grunde liegende »method of Koopman« physikalisch nützlicher sei als Birkhoffs nicht-konstruktiver Beweis (Neumann [58, S. 264, 266]). Vermutlich versetzte diese Auffassung Birkhoff einen Stich, denn er hatte Ambitionen, physikalisch wichtige Ergebnisse hervorzubringen (Ulam [85, S. 98]). Die Unstimmigkeiten zwischen von Neumann und Birkhoff wurden in der Folge zumindest teilweise ausgeräumt. Möglicherweise gab es hier einen Vermittler, vielleicht Birkhoffs akademischer Nachkomme Stone oder Koopman selbst, dem die Angelegenheit sehr unangenehm war (Morse [55, S. 420]: »Koopman, who had been the catalytic agent in the process, felt quite embarrassed«). Wahrscheinlich aber war es Oswald Veblen, guter Freund von Birkhoff und Mentor des jungen von Neumann in Princeton (vgl. die Überlegungen in Zund [89, S. 148]), der die angespannte Lage zwischen »George« und »Johnny«

entschärfte. Im Februar 1931 erschien die eingangs schon erwähnte gemeinsame Notiz Birkhoff & Koopman [10] von Koopman und Birkhoff, in der die Historie der Ergodentheoreme offengelegt wurde, nicht ohne von Neumanns Errungenschaft und deren physikalische Bedeutung ausgiebig zu loben. Jedoch stößt man auf kleine Seitenhiebe: So ist von Neumanns Theorem das »Mittelergodentheorem«, wohingegen Birkhoffs Theorem als »Das Ergodentheorem« bezeichnet wird. Außerdem wird von Birkhoffs Ergodentheorem behauptet:

> From the viewpoint of the detailed statistics along an individual path-curve, it is fundamentally more far-reaching. (Birkhoff & Koopman [10, S. 281])

George David Birkhoff (1910?)[8]

Die Unstimmigkeiten zwischen den beiden Koryphäen entspannten sich offenbar nie vollumfänglich: Noch über zehn Jahre später grenzte sich Birkhoff in seiner Veröffentlichung »What is the Ergodic Theorem« folgendermaßen von seinem Konkurrenten ab:

> Our discussion here deals only with the "Ergodic Theorem," and not at all with the "Mean Ergodic Theorem" of von Neumann, which stimulated me to reconsider some old ideas, and so led me to the discovery and proof of the Ergodic Theorem, embodying a strong, precise result which, so far as I know, had never been hoped for. (Birkhoff [9, S. 222])

[8]Bildquelle: Autor unbekannt/Wikimedia Commons `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:George_David_Birkhoff_1.jpg` (abgerufen am 11.7.2021)

Von Neumann trug es Birkhoff laut seinem guten Freund Stanislaw Ulam zeitlebens nach, dass dieser ihn ausgestochen hatte:

> Von Neumann never quite forgave G. D. for having "scooped" him in the affair of the ergodic theorem: [...] This was something Johnny could never forget. He sometimes complained about this to me, but always in a most indirect and oblique way. (Ulam [85, S. 98])

Das obige und einige der anderen Zitate in diesem Abschnitt sind Vitaly Bergelsons Betrachtungen in Bergelson [6] entnommen. Mit Birkhoffs Sohn Garrett verband von Neumann jedoch kurioserweise später eine gute Zusammenarbeit und Freundschaft. Von Neumann selbst bewertete rückblickend im Jahr 1954 neben seiner Arbeit zu Quantenmechanik und Operatorentheorie sein Ergodentheorem als seine größte mathematische Errungenschaft (Zund [89, S. 151]).

»...the catalytic agent« – Bernard Osgood Koopman

Wer aber war Bernard Osgood Koopman (1900–1981), dessen Veröffentlichung 1931 der zündende Funke für das Aufblühen der Ergodentheorie war und um dessen Operator heute ganze Forschungsgruppen gewachsen sind? Aus den Beschreibungen seiner Weggenossen, wie man sie im Nachruf von Philip M. Morse zu seinem Tod im Jahr 1981 lesen kann, entsteht das Bild eines scharfsinnigen, schneidigen und direkten Mannes, der gerne Scherze mit seinen Mitmenschen trieb. So heißt es in den Erinnerungen von Edgar Lorch, einem Kollegen, Freund und Mitbewohner Koopmans aus jungen Jahren:

> Koopman was open, a social gadfly, always ready to pull people's legs, much in evidence at the lunch table, where he would expose his wit with clarity, zest and often pungency. (Morse [55, S. 419])

Morse, eine Schlüsselfigur in Koopmans Leben, bescheinigt ihm auch eine weiche Seite:

> He was a stimulating companion. Once one pierced the crust of rough frankness, one found a supportive and permanent friend. (Morse [55, S. 417])

Ein Pionier war Koopman nicht nur für die Ergodentheorie, wie man in der Beschreibung eines Kollegen erfährt:

> This quality of the pioneer shines of course in his scientific work – it extended broadly in the enjoyment of other human pursuits, from the English novel to baroque music. It carried over even to his skill in working with his hands. Bernard loved to fashion in wood and stone, to enlarge houses, cut trees, make gardens and stack wood. I have helped clamp furniture he made and helped hoist and move large stones, while listening to discourses on measurement, geometry, mechanical advantage, mountain climbing and the foolishness of belittling the scientific excitement in applied mathematics. (Morse [55, S. 425])

Aufgewachsen in Frankreich und Italien als Kind amerikanischer Eltern, siedelte Koopman als Jugendlicher nach New England um, fort von den Schauplätzen des Ersten Weltkrieges. Er studierte und promovierte an der Harvard University bei George David Birkhoff. Nach Stationen in Princeton und Paris (wo er von Émile Borel, Henri Lebesgue und Jacques Hadamard lernte, aber »with generous time off to travel« etwa für das Bergsteigen in den Alpen) wurde seine Basis ab 1927 bis zu seinem Ruhestand die Columbia University, von der aus er häufige und ausgedehnte Reisen und Forschungsaufenthalte antrat. An der Columbia University avancierte er zum Head of the Mathematics Department, machte sich dort als zupackender Reformer verdient und verhalf dem Institut zu neuer Blüte.

Nicht nur geographisch, auch mathematisch umfassten Koopmans Aktivitäten eine weite Spanne. Für ihn selbst war die Idee zum nach ihm benannten Operator wohl eher ein Nebenschauplatz seiner wissenschaftlichen Laufbahn, zur Ergodentheorie veröffentlichte er nach 1932 nicht mehr. An der Columbia University arbeitete er schwerpunktmäßig zu Wahrscheinlichkeitstheorie, seine rückblickend größten Errungenschaften erlangte er jedoch im Bereich der Militärforschung.

Während des Zweiten Weltkriegs arbeitete er schon an einem militärischen Forschungsprojekt mit, als 1943 Philip Morses dringliche Einladung, Teil seiner mit der Marine assoziierten Forschungsgruppe zu werden, offenbar für ihn wie gerufen kam. Morse war hocherfreut, dass er Koopman mit seinem Appell („...telling him he ought to quit theorizing and come down to Washington to work on *real* problems.“, Morse [55, S. 421]) für sein Projekt gewinnen konnte, da viele der besten Wissenschaftler damals für das geheimnisvolle Manhattan

Bernard Koopman[9]

Project angeworben wurden. Sobald er von der Columbia University freigestellt wurde, zog Koopman mit seiner Frau und seinen zwei Töchtern nach Washington. Dort setzte er seine Expertise in Wahrscheinlichkeitstheorie für die Search Theory ein und legte etwa die mathematischen Grundlagen zur Suche von U-Booten und Kriegsschiffen von einem Flugzeug bzw. Schiff aus. Er wurde so einer der Gründerväter der Military Operations Research, also der militärischen Entscheidungsfindung mit Hilfe mathematischer Methoden. Aus den Ergebnissen dieser Zeit entstanden einflussreiche Veröffentlichungen: Koopman wartete lange vergeblich darauf, die Erkenntnisse der Gruppe zum Thema »Search and Screening« öffentlich machen zu dürfen. 1955 fasste er diese, als erste wissenschaftliche Veröffentlichung zu dem Thema überhaupt, schließlich in einer Form zusammen, die keinem Geheimhaltungsgrad mehr unterlag. 1980 erschien das auf diesen Arbeiten basierende Buch Koopman [36], das offenbar bis heute ein Standardwerk der Operations Research ist.

Mit Kriegsende verkleinerte sich die Arbeitsgruppe um Morse wieder und auch Koopman kehrte an die Columbia University zurück. Er hatte aber offenbar Feuer gefangen für die Operations Research und verfolgte sein Interesse dafür weiter. In den kommenden Jahren war er als Berater aktiv, an der Begründung der Operations Research Society of America beteiligt und fungierte als deren Präsident. Mehrmals ließ er sich für längere Zeiträume von der Columbia beurlauben um seine Zeit Projekten in diesem Gebiet zu widmen. Beispielsweise leitete er eine Gruppe, die sich mit dem Vergleich der Fähigkeiten von Interkontinentalraketen versus bemannten Bombern befasste. Der finale Bericht ging in persönlicher Vorsprache an den Präsidenten Dwight D. Eisenhower. Koopman trug maßgeblich dazu bei, Operations Research in der NATO zu

[9] Bildquelle: `https://www.informs.org/Recognizing-Excellence/Community-Prizes/Military-and-Security-Society/Koopman-Prize/Who-Was-Bernard-Koopman` (abgerufen am 4.7.2021)

verankern, ein Unterfangen, für das er mit seiner Familie nach London zog. Nach seinem altersbedingten Ausschied an der Columbia University wurde Koopman quasi zum Vollzeit-Berater – bis auf einen verlängerten Sommerurlaub, um seiner Leidenschaft für das Reisen und die Berge nachgehen zu können – und arbeitete an Projekten für die US Navy, etwa an der Verbesserung eines Ozeanüberwachungssystems oder neuen Waffensystemen für U-Boote.

Für seine Arbeit im militärischen Bereich erhielt Koopman mehrere wichtige Auszeichnungen. Bei einer Preisverleihung soll er eine blumige Dankesrede für die Person gehalten haben, die verantwortlich für seine Leistungen in Operations Research war: Adolf Hitler (Morse [55, S. 424]). Nach Koopman selbst ist heute der jährlich vergebene »Koopman Prize« benannt[10], der die beste Veröffentlichung im Bereich Military Operations Research honoriert.

Ergänzend sei bemerkt, dass auch Bernard Koopmans Vorfahren bis heute sichtbare Spuren hinterlassen haben: Die Gemälde seines Vaters Augustus Koopman werden noch heute bei Auktionen gehandelt. Das Meer war für Augustus eine Inspirationsquelle, wie später auf ganz andere Weise für seinen Sohn. Augustus' Kinder standen für seine Werke gelegentlich Modell (Burton [15] oder Taylor [84]), sodass vermutlich Kinderbilder von Bernard existieren, wenn auch nicht als solche gekennzeichnet. Möglicherweise ist der vierjährige Bernard mit seiner Mutter und Schwester im Gemälde »Le petit bateau à la voile« aus dem Jahr 1904 beim Spiel am Strand verewigt. Eine ähnliche Szene zeigt »Golden Moments«, abgedruckt in Pattison [63, S. 365].

Ein Onkel höheren Grades von Bernard Koopman war der einflussreiche Mathematiker William Fogg Osgood. Geprägt von Felix Klein, brachte Osgood den Göttinger Geist nach Harvard, später auch Koopmans Alma mater.

Bernard Koopmans Großmutter mütterlicherseits, die für ihre Schönheit gerühmte Ellen Devereux Sewall, stand in engem freundschaftlichem Kontakt zum jungen Henry David Thoreau und dessen Familie. Beide Thoreau-Brüder hielten um Ellens Hand an, wurden aber abgewiesen. Thoreau, einer der bedeutendsten amerikanischen Schriftsteller und Philosophen, heiratete nie und

[10] siehe `https://www.informs.org/Recognizing-Excellence/Community-Prizes/Military-and-Security-Society/Koopman-Prize`, abgerufen am 30.6.2021

Augustus Koopman: Le petit bateau à la voile (1904)[11]

zog sich für eine längere Phase in eine Blockhütte im Wald zurück. Noch kurz vor seinem Tod soll er gesagt haben »I have always loved her«. Die Familienerinnerungen an diese Romanze hielt Ellens Tochter Louise Osgood Koopman – Bernard Koopmans Mutter – als 98-Jährige in einem Artikel (Koopman [37]) fest.

[11]Bildquelle: `https://www.mutualart.com/Artwork/Le-petit-bateau-a-la-voile/098801F3815C946E` (abgerufen am 30.6.2021)

Von Koopmans Operator zum Koopmanoperator

Wann sich die Bezeichnung »Koopmanoperator«[12] durchsetzte und wer diesen Namen eingeführt hat, lässt sich nicht eindeutig nachverfolgen. Vermutlich war die Benennung nach Koopmans Veröffentlichung so naheliegend, dass sie von mehreren Autoren unabhängig voneinander benutzt wurde. Allerdings findet sich die Bezeichnung bis in die späten 1980er Jahre nur vereinzelt. Schon von Neumann legte den Keim, indem er von »Koopmans operators« oder auch »Koopmans method« sprach (siehe seinen Brief in Zund [89, S. 147]), bzw. in korrektem Englisch »Koopman's method« und der »method of Koopman« in seiner Veröffentlichung Neumann [58]. Um »operadores de Koopman« geht es im Paper Cotlar & Ricabarra [18] aus dem Jahr 1950. Den Autoren Albertoni, Bocchieri & Loinger [1] war ihre ursprüngliche Bezeichnung »Koopman–von Neumann time evolution operator« wohl später zu lang, weshalb in Loinger [47, S. 147] in Kurzform nur noch auf den »Koopman operator« verwiesen wurde. Zur Popularisierung des Koopmanoperators unter diesem Namen hat möglicherweise das Buch von Andrzej Lasota und Michael Mackey Lasota & Mackey [44] aus dem Jahr 1985 bzw. die zweitausendfach zitierten späteren Editionen »Chaos, Fractals, and Noise – Stochastic Aspects of Dynamics« beigetragen. Dort wird der Koopmanoperator auf L^∞ als solcher in Definition 3.3.1 eingeführt. Bei den Autoren Dieter Mayer und Gert Roepstorff lässt sich eine Metamorphose von »Koopmanism« und »Koopman's operator«, wie der Operator in ihrer 1986 eingereichten Arbeit Mayer & Roepstorff [53] noch genannt wurde, hin zum »Koopman operator« kurz darauf in Mayer [54] beobachten.

Der Begriff »Koopmanism« als Schlagwort für die von Koopman entwickelte Theorie findet sich schon vorher, vielleicht zum ersten Mal, 1968 in Marsden [50, S. 343], und in einem ausführlicheren Abschnitt beispielsweise 1972 in Reed & Simon [68, Kapitel VII, Abschnitt 4]). Starken Aufwind bekam der Koopmanismus unter diesem Namen schließlich als »Applied Koopmanism« von Autoren um Igor Mezic; siehe die gleichnamige Veröffentlichung Budišić, Mohr & Mezić [14] aus dem Jahr 2012, welche den Eingang des Koopmanoperators in ein breit gefächertes Spektrum von Anwendungen insbesondere der Strömungsmechanik markierte. Kernaspekt im Applied Koopmanism ist der

[12] Als Randnotiz sei bemerkt, dass »Koopman« im Niederländischen und Niederdeutschen schlicht »Kaufmann« bedeutet.

Zusammenhang zwischen einem »Dynamic Mode Decomposition« genannten Algorithmus und Eigenwerten des Koopmanoperators (siehe etwa Chen, Tu & Rowley [17], oder für eine Weiterentwicklung des Algorithmus Küster, Schneider & Ruopp [43]; für eine ergodentheoretische Untersuchung siehe Krake [39]). Allerdings wird der Applied Koopmanism auch kontrovers diskutiert, siehe etwa das Preprint »Anti-Koopmanism« (Gonzalez u. a. [28]).

Koopman war nicht der einzige und auch nicht der erste Mathematiker, der die Idee zu dem nach ihm benannten Operator hatte. Wie aus dem vorigen Abschnitt deutlich wird, hätte der Operator unter anderen Umständen ebenso gut ein »Weiloperator« werden können.

Die Wurzeln des Operators, auch als »composition operator« oder »induced operator« bezeichnet, wie unten genauer ausgeführt, reichen aber noch weiter zurück: 1869 formulierte Ernst Schröder (geboren 1841 in Mannheim) in seiner Arbeit »Ueber iterirte Functionen« (Schröder [73]) das Problem, eine Funktion f und eine Zahl α zu finden, so dass

$$(f \circ \varphi)(z) = \alpha f(z)$$

für eine gegebene Funktion φ und z aus einem passenden Bereich (vgl. den historischen Abriss in Singh & Manhas [78, Chapter I, Section 1.1]). In heutiger Sprache geht es in »Schröders Gleichung« also um die Bestimmung von Eigenwerten und Eigenfunktionen des Koopmanoperators. So wurde in Pforzheim, nicht weit von einem späteren Hotspot der Koopmanoperatoren – Rainer Nagels Arbeitsgruppe in Tübingen – zum vielleicht ersten Mal ein Vorfahre des Koopmanoperators zu Papier gebracht. Gabriel Koenigs beschäftigte sich in den 1880er Jahren mit Lösungen von Schröders Gleichung, siehe Koenigs [34]. Auch John E. Littlewood untersuchte schon 1925 Eigen- bzw. Fixfunktionen des heutigen Koopmanoperators (Littlewood [45, Theorem 1]).

Eine systematische Behandlung von dort sogenannten »composition operators« begann mit der Arbeit Nordgren [60] von Eric Nordgren, der 1964 bei Paul Halmos promoviert wurde. Ab den 1970er Jahren breitete sich das Thema rasant aus, und immer mehr Mathematiker begannen, zu »composition operators« zu arbeiten, siehe etwa die Monographie Singh & Manhas [78] oder Schwartz [74], Cowen [19], Campbell & Jamison [16] und Shapiro [75]. Solche Operatoren werden üblicherweise auf unterschiedlichen Funktionenräumen – von beispielsweise stetigen, differenzierbaren oder holomorphen Funktionen, auf Hardyräumen oder Bergmanräumen – untersucht, meist im Zusammenhang mit einer holomorphen Dynamik (auf der komplexen Einheitskugel).

Auf ganz andere Weise erschienen solche Operatoren in der Theorie der Vektorverbände: In der Weiterentwicklung der Perron-Frobenius-Theorie positiver Matrizen hin zu einer unendlichdimensionalen Theorie gab es ab den 1960er Jahren zwei dominante Schulen: Die Gruppe um Wilhelmus »Wim« Luxemburg (Caltech, Pasadena/Kalifornien) und jene um Helmut Heinrich Schaefer (Universität Tübingen). Hierbei erforschte Luxemburg eher abstrakte Vektorverbände (Rieszräume) und ihre Operatoren, während Schaefer auch analytische Strukturen auf Banachverbänden untersuchte. Schon Stefan Banach hatte 1932 Isometrien zwischen Banachräumen stetiger Funktionen als von einer Dynamik zwischen den Grundräumen kommend beschrieben (Banach [5, Chapitre XI, Théorème 3 und Remarque]). Die Charakterisierung von Markov-Verbandsoperatoren als von einer Dynamik induzierte Operatoren – also nichts anderes als Koopmanoperatoren unter dem Namen »induced operators« – hatte als erster Robert R. Phelps explizit formuliert (Phelps [64, Theorem 2.1], vgl. auch Nagel [56] und Schaefer [71, Theorem 9.2]). Als einfache Folgerung aus den Darstellungssätzen von Gelfand und Kakutani war diese Charakterisierung auch anderen Autoren schon bekannt, vgl. Ionescu-Tulcea & Ionescu-Tulcea [33], Lloyd [46] und Ellis [23]. Dass solche Operatoren auch in den Ergodentheoremen von Birkhoff und von Neumann eine wesentliche Rolle spielten, war hierbei zunächst nebensächlich. Anders als die aus der Physik hergeleitete Ergodentheorie motivierten sich die Fragestellungen in der Vektorverbandstheorie intrinsisch im Stil von Bourbaki.

Um die Perspektive der Ergodentheorie erweiterte schließlich Schaefers Doktorand Rainer Nagel diese Theorie. Seine erste Vorlesung an der Universität Tübingen hielt er 1972/73 zu »Ergodentheorie in Banachverbänden«. Ihn beschäftigte, ob wichtige Sätze – wie etwa der Satz von Halmos–von Neumann (Nagel & Wolff [57]) – auch im Kontext von positiven Operatoren auf Banachverbänden beweisbar sind. Die Theorie aus der Vorlesung entwickelte er gemeinsam mit seinen Doktoranden Roland Derndinger und Günther Palm in mehreren Arbeiten und dem Buchmanuskript »Ergodic Theory in the Perspective of Functional Analysis« (Derndinger, Nagel & Palm [20]) weiter. Ihre neue Sichtweise auf die Ergodentheorie fand aber wenig Anklang. Zwar wurde ihr Manuskript 1984 schließlich für die *Lecture Notes in Mathematics* des Springer-Verlags akzeptiert, jedoch fand damals keiner der Autoren mehr die Zeit für eine gründliche Überarbeitung.

So geriet die Ergodentheorie in der Tübinger Arbeitsgruppe Funktionalanalysis in den Hintergrund, Schwerpunkt wurde unterdessen die Theorie starkstetiger Operatorhalbgruppen. Erst über zwanzig Jahre später wurde das Thema Ergodentheorie für Rainer Nagel und seine Gruppe wieder relevant, ausgelöst durch den Beweis des Green–Tao-Theorems (Green & Tao [29]) und die damit einhergehende Veröffentlichung Kra [38] von Bryna Kra. Terence Tao und Benjamin Green konnten mit Hilfe ergodentheoretischer Methoden zeigen, dass arithmethische Progressionen beliebiger Länge in den Primzahlen enthalten sind. Rainer Nagels damalige Doktorandinnen Britta Dorn und Tanja Eisner lernten beim Internationalen Mathematikerkongress in Madrid 2006 den Fields-Medaillengewinner Terence Tao persönlich kennen und kehrten inspiriert wieder nach Tübingen zurück. Daraufhin griff Rainer Nagel die ergodentheoretischen Fäden wieder auf und initiierte als Weiterentwicklung des Manuskripts Derndinger, Nagel & Palm [20] ein Buchprojekt zur operatorentheoretischen Betrachtung von Ergodentheorie zusammen mit Tanja Eisner, Bálint Farkas und Markus Haase. Ein Zwischenschritt dabei war die Organisation des »Internationalen Internetseminars« (ISEM) 2008/09 zu »Ergodic Theory – An Operator Theoretic Approach«. Mehrere Doktoranden von Rainer Nagel promovierten anschließend zu ergodentheoretischen Themen (Kunszenti-Kovács [42], Maier [49] und Schreiber [72]). Für das 2015 erschienene Buch »Operator Theoretic Aspects of Ergodic Theory« (Eisner, Farkas, Haase & Nagel [22]) setzte sich schließlich der Name »Koopmanoperator« an Stelle von »induced operator« durch. Diese Namensgebung führte zu dem Versuch eines Brückenschlags mit Anwendern des Koopmanismus in Stuttgart, Aachen und Santa Barbara. Eine Reihe von studentischen Arbeiten und Dissertationen (siehe etwa Edeko [21], Kreidler [40], Kühner [41], Siewert [77]) wurden um den Koopmanoperator herum realisiert. Auch die vorliegende Doktorarbeit soll ein weiterer Baustein dieser Theorie sein.

Literatur

Hier die Literaturliste zu Teil I der Dissertation, dem »Präludium«.

[1] S. Albertoni, P. Bocchieri & A. Loinger, *New theorem in the classical ensemble theory,* J. Math. Phys. **1**(3) (1960), 244–248.

[2] P. Appell, *Henri Poincaré, en mathématiques spéciales à Nancy,* Acta Math. **38**(1) (1915), 189–195.

[3] R. G. Ayoub, Hrsg., *Musings of the masters. An anthology of mathematical reflections.* Washington, DC: Mathematical Association of America (MAA), 2004.

[4] M. Badino, *The foundational role of ergodic theory,* Found. Sci. **11**(4) (2006), 323–347.

[5] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires.* Monografie Matematyczne. Chelsea Publishing Company, 1932.

[6] V. Bergelson, *Some historical remarks and modern questions around the ergodic theorem,* Int. Math. Nachr., Wien **205** (2007), 1–10.

[7] G. D. Birkhoff, *Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques,* Bull. Soc. Math. France **40** (1912), 305–323.

[8] G. D. Birkhoff, *Proof of the ergodic theorem,* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **17**(12) (1931), 656–660.

[9] G. D. Birkhoff, *What is the ergodic theorem?,* Amer. Math. Mon. **49**(4) (1942), 222–226.

[10] G. D. Birkhoff & B. O. Koopman, *Recent contributions to the ergodic theory,* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **18**(3) (1932), 279.

[11] L. E. Boltzmann, *Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht.* K. Akad. der Wissensch., 1871.

[12] S. G. Brush, *Proof of the impossibility of ergodic systems: The 1913 papers of Rosenthal and Plancherel,* Transport Theor. Stat. **1**(4) (1971), 287–298.

[13] S. G. Brush, »Ludwig Boltzmann and the foundations of natural science«. *Ludwig Boltzmann (1844–1906).* Hrsg. von I. Fasol-Boltzmann & G. L. Fasol. Springer, 2006, S. 65–80.

[14] M. Budišić, R. Mohr & I. Mezić, *Applied Koopmanism,* Chaos **22**(4) (2012), 047510.

[15] A. B. Burton, »Koopman, Augustus«. *Dictionary of North Carolina biography.* Hrsg. von W. S. Powell. Bd. 6. University of North Carolina Press, 1988.

[16] J. T. Campbell & J. E. Jamison, *On some classes of weighted composition operators,* Glasg. Math. J. **32**(1) (1990), 87–94.

[17] K. K. Chen, J. H. Tu & C. W. Rowley, *Variants of dynamic mode decomposition: boundary condition, Koopman, and Fourier analyses,* J. Nonlinear Sci. **22**(6) (2012), 887–915.

[18] M. Cotlar & R. A. Ricabarra, *Sobre transformaciones de conjuntos y operadores de Koopman,* Rev. Un. Mat. Argentina **14** (1950), 232–254.

[19] C. C. Cowen, *Composition operators on H^2,* J. Operator Theory (1983), 77–106.

[20] R. Derndinger, R. Nagel & G. Palm, »Ergodic theory in the perspective of functional analysis«. unpublished. 1987.

[21] N. Edeko, *On the isomorphism problem for non-minimal transformations with discrete spectrum,* Discrete Contin. Dyn. Syst. **39**(10) (2019).

[22] T. Eisner, B. Farkas, M. Haase & R. Nagel, *Operator theoretic aspects of ergodic theory.* Springer, 2015.

[23] A. Ellis, *Extreme positive operators,* Q. J. Math. **15**(1) (1964), 342–344.

[24] K. H. Fasol, »Mach, Ostwald und Boltzmann«. *Ludwig Boltzmann (1844–1906).* Hrsg. von I. Fasol-Boltzmann & G. L. Fasol. Springer, 2006, S. 91–97.

[25] I. Fasol-Boltzmann & G. L. Fasol, Hrsg., *Ludwig Boltzmann (1844–1906): zum hundertsten Todestag.* Springer, 2006.

[26] I. M. Fasol-Boltzmann, »Ludwig Boltzmann«. *Ludwig Boltzmann (1844–1906).* Hrsg. von I. Fasol-Boltzmann & G. L. Fasol. Springer, 2006, S. 1–64.

[27] G. GALLAVOTTI, *Ergodicity, ensembles, irreversibility in Boltzmann and beyond,* J. Stat. Phys. **78**(5) (1995), 1571–1589.

[28] E. GONZALEZ u. a., *Anti-Koopmanism,* arXiv:2106.00106 (2021).

[29] B. GREEN & T. TAO, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions,* Ann. of Math. (2008), 481–547.

[30] P. R. HALMOS, *Von Neumann on measure and ergodic theory,* Bull. Amer. Math. Soc. **64**(3. P2) (1958), 86–94.

[31] L. HATVANI, *Aleksandr Lyapunov, the man who created the modern theory of stability,* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **2019**(26) (2019), 1–9.

[32] W. HÖFLECHNER, *Ludwig Boltzmann – Persönlichkeit – Karriere – Bedeutung.* Vortrag bei der Österreichischen Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte. 2006.

[33] A. IONESCU-TULCEA & C. IONESCU-TULCEA, »A note on extreme points«. unpublished.

[34] G. KOENIGS, »Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles«. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* Bd. 1. 1884, S. 3–41.

[35] B. O. KOOPMAN, *Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space,* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **17** (1931), 315–318.

[36] B. O. KOOPMAN, *Search and screening: general principles with historical applications.* Pergamon Press, 1980.

[37] L. O. KOOPMAN, *The Thoreau romance,* Mass. Rev. **4**(1) (1962), 61–67.

[38] B. KRA, *The Green-Tao theorem on arithmetic progressions in the primes: an ergodic point of view,* Bull. Amer. Math. Soc. **43**(1) (2006), 3–23.

[39] T. KRAKE, *Dynamic Mode Decomposition – Eine ergodentheoretische Interpretation.* MA thesis. 2017.

[40] H. KREIDLER, »Contributions to the Koopman theory of dynamical systems«. Diss. Universität Tübingen, 2020.

[41] V. KÜHNER, »Koopmanism for attractors in dynamical systems«. Diss. Universität Tübingen, 2020.

[42] D. KUNSZENTI-KOVÁCS, *Ergodic theorems and the Jacobs-de Leeuw-Glicksberg decomposition.* Verlag Dr. Hut, 2011.

[43] U. Küster, R. Schneider & A. Ruopp, »The numerical approximation of Koopman modes of a nonlinear operator along a trajectory«. *Sustained Simulation Performance 2017.* Springer, 2017, S. 27–51.

[44] A. Lasota & M. C. Mackey, *Probabilistic properties of deterministic systems.* Cambridge University Press, 1985.

[45] J. E. Littlewood, *On inequalities in the theory of functions,* Proc. Lond. Math. Soc. **2**(1) (1925), 481–519.

[46] S. Lloyd, *On extreme averaging operators,* Proc. Amer. Math. Soc. **14**(2) (1963), 305–310.

[47] A. Loinger, *A study of the quantum ergodic problem,* Rend. Sc. Int. Fis. Fermi (1960).

[48] A. M. Lyapunov, *The general problem of the stability of motion,* Int. J. Control **55**(3) (1992), 531–534.

[49] D. Maier, *Realizations of dynamical systems with discrete spectrum.* Verlag Dr. Hut, 2013.

[50] J. E. Marsden, *Generalized Hamiltonian mechanics,* Arch. Ration. Mech. Anal. **28**(5) (1968), 323–361.

[51] M. Mathieu, *On the origin of the notion 'ergodic theory',* Expo. Math. **6**(4) (1988), 373–377.

[52] J. Mawhin, *The early reception in France of the work of Poincaré and Lyapunov in the qualitative theory of differential equations,* Philos. Sci. **1**(4) (1996), 119–133.

[53] D. Mayer & G. Roepstorff, *On the relaxation time of Gauss's continued-fraction map I. The Hilbert space approach (Koopmanism),* J. Stat. Phys. **47**(1) (1987), 149–171.

[54] D. H. Mayer, *On the location of poles of Ruelle's zeta function,* Lett. Math. Phys. **14**(2) (1987), 105–115.

[55] P. M. Morse, *Bernard Osgood Koopman, 1900–1981,* Oper. Res. **30**(3) (1982), 417–427.

[56] R. J. Nagel, *Darstellung von Verbandsoperatoren auf Banachverbänden,* Rev. Acad. Cienc. Exactas Fís. Quím. Nat. Zaragoza **27**(2) (1972), 281–288.

[57] R. J. Nagel & M. Wolff, *Abstract dynamical systems with an application to operators with discrete spectrum,* Arch. Math. **23**(1) (1972), 170–176.

[58] J. v. Neumann, *Physical applications of the ergodic hypothesis,* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **18**(3) (1932), 263.

[59] J. v. Neumann, *Proof of the quasi-ergodic hypothesis,* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **18**(1) (1932), 70–82.

[60] E. A. Nordgren, *Composition operators,* Canad. J. Math. **20** (1968), 442–449.

[61] D. S. Ornstein, *Boltzmann, ergodic theory, and chaos,* Boltzmann's Legacy (2008), 99–104.

[62] N. Pakshina, *Aleksandr Lyapunov: remembered by his contemporaries,* IFAC-PapersOnLine **50**(1) (2017), 5208–5218.

[63] J. W. Pattison, *Augustus Koopman: Painter of emotions,* Fine Arts Journal **28**(6) (1913), 355–365.

[64] R. R. Phelps, *Extreme positive operators and homomorphisms,* Trans. Amer. Math. Soc. **108**(2) (1963), 265–274.

[65] H. Poincaré, *Science et méthode.,* Rev. Sci. **10** (1908), 417–423.

[66] H. Poincaré, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique,* Acta Math. **13**(1) (1890), A3–A270.

[67] M. Rågstedt, *From order to chaos: The prize competition in honour of King Oscar II.*

[68] M. Reed & B. Simon, *Methods of modern mathematical physics: Functional analysis.* Academic Press, 1972.

[69] W. L. Reiter, *In memoriam Ludwig Boltzmann: A life of passion,* Phys. Perspect. **9**(3) (2007), 357–374.

[70] T. Roque, *Stability of trajectories from Poincaré to Birkhoff: approaching a qualitative definition,* Arch. Hist. Exact Sci. **65**(3) (2011), 295–342.

[71] H. H. Schaefer, *Banach lattices and positive operators.* Springer, 1974.

[72] M. Schreiber, *Topological Wiener-Wintner theorems for amenable semigroups.* Verlag Dr. Hut, 2013.

[73] E. Schröder, *Ueber iterirte Functionen,* Math. Ann. **3**(2) (1870), 296–322.

[74] H. J. Schwartz, »Composition operators on H^p«. Diss. The University of Toledo, 1969.

[75] J. H. Shapiro, *Composition operators and classical function theory.* Springer Science & Business Media, 2012.

[76] P. S. Shcherbakov, *Alexander Mikhailovitch Lyapunov: On the centenary of his doctoral dissertation on stability of motion,* Automatica **28**(5) (1992), 865–871.

[77] S. Siewert, »Weighted Koopman semigroups on Banach modules«. Diss. Universität Tübingen, 2020.

[78] R. K. Singh & J. S. Manhas, *Composition operators on function spaces.* Elsevier, 1993.

[79] L. Sklar, »Philosophy of statistical mechanics«. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Hrsg. von E. N. Zalta. Fall 2015. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2015.

[80] V. I. Smirnov, *Biography of AM Lyapunov,* Int. J. Control **55**(3) (1992), 775–784.

[81] V. A. Steklov, *Aleksandr Mikhailovich Lyapunov,* Russ. J. Nonlinear Dyn. **3**(3) (2007), 239–253.

[82] W. Stiller, *Ludwig Boltzmann: Altmeister der klassischen Physik, Wegbereiter der Quantenphysik u. Evolutionstheorie.* Verlag Harri Deutsch, 1989.

[83] H. K. Strick, *Henri Poincaré (1854–1912): Vielseitiger „Unsterblicher".* 2010.

[84] E. A. Taylor, *The paintings of Augustus Koopman,* The Studio **61**(252) (1914), 215–220.

[85] S. M. Ulam, *Adventures of a mathematician.* UC Press, 1991.

[86] F. Verhulst, *Henri Poincaré. Impatient genius.* Springer, 2012.

[87] A. Weil, *Œuvres scientifiques. Collected papers. Vol. I (1926–1951).* Springer, 1979.

[88] J.-C. Yoccoz, *Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré,* Gaz. Math., Soc. Math. Fr. **107** (2006), 19–26.

[89] J. D. Zund, *George David Birkhoff and John von Neumann: a question of priority and the ergodic theorems, 1931–1932,* Historia Math. **29**(2) (2002), 138–156.

Part II

Fuge

1 Subsystems versus quotient systems

1.1 Topological dynamical systems and their Koopman systems

We start by introducing the main players in this thesis: *Topological dynamical systems* and *Koopman systems.*

A *topological dynamical system* $(K;\varphi)$ consists of a compact space K together with a continuous selfmap

$$\varphi\colon K \to K.$$

Then K is called *state space* and φ is the *dynamics* describing how states move within the state space. Instead of "topological dynamical system" we sometimes use the short form "dynamical system" or just "system". Note that in this thesis a compact space shall always have the Hausdorff property.

The following is a very basic example serving as our "model organism" throughout this thesis. As a building block for more complex systems it reveals intricate dynamical behavior.

Example 1.1.1. The compact interval $K := [0,1]$ together with the continuous map

$$\begin{aligned}\varphi\colon K &\to K,\\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$$

defines a topological dynamical system $(K;\varphi)$.

When studying dynamical systems, a crucial question is their evolution in time, in particular, what happens with the iterates φ^n as n tends to infinity? Does φ^n "converge" to some part of the state space, an *attractive set*? Are there points that exhibit a certain kind of "recurrence"? Are there *φ-invariant sets*, hence sets $A \subseteq K$ such that $\varphi(A) \subseteq A$?

A useful object to study such long-term behavior of a particular $x \in K$ is its *orbit*

$$\operatorname{orb}(x) := \{\varphi^n(x) \colon n \in \mathbb{N}_0\}$$

as well as the orbit closure $\overline{\operatorname{orb}}(x)$. If $\varphi^n(x) = x$ for some $n \in \mathbb{N}$, then x is called a *periodic point*. If its orbit consists only of one point, then it is a *fixed point*.

An interesting dynamical behavior is, for example, if there is some $x \in K$ such that $\operatorname{orb}(x)$ is dense in K. Such systems are called *transitive*. If K and the empty set $\emptyset$ are the only closed φ-invariant sets, then the system is called *minimal*. Clearly, each minimal system is also transitive. Our standard example above has two fixed points 0 and 1 and is not transitive.

Let us now turn to Koopman systems. For a given dynamical system $(K;\varphi)$ and the *observable space* $\mathrm{C}(K)$ of continuous complex-valued functions on K, the *Koopman operator* is defined as

$$\begin{aligned} T_\varphi \colon \mathrm{C}(K) &\to \mathrm{C}(K), \\ f &\mapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

and $(\mathrm{C}(K); T_\varphi)$ is called the *Koopman system corresponding to* $(K;\varphi)$.

Remark 1.1.2. Analogously, for a continuous map $\varphi \colon K \to L$ between compact spaces K and L the corresponding Koopman operator is defined as $T_\varphi \colon \mathrm{C}(L) \to \mathrm{C}(K)$, $f \mapsto f \circ \varphi$.

We collect some basic properties of such Koopman systems.

Equipped with the supremum norm, $\mathrm{C}(K)$ is a highly structured space. It carries the structure of both a commutative unital C*-algebra and a complex Banach lattice (and even an AM-space with unit). Conversely, the Gelfand–Naimark theorem states that each commutative unital C*-algebra $\mathcal{A}$ is C*-isomorphic to $\mathrm{C}(K)$ for some compact space K (see Eisner, Farkas, Haase &

NAGEL [20, Theorem 4.23]). Likewise, the representation theorem of Kakutani and Krein yields that each complex AM-space with unit is lattice-isomorphic to $\mathrm{C}(K)$ for some compact space K (see SCHAEFER [47, Chapter II, §7, Theorem 7.4]).

Important objects within $\mathrm{C}(K)$ are *ideals* (see, e. g., SCHAEFER [47, Chapter II, §2], EISNER, FARKAS, HAASE & NAGEL [20, Definition 7.9] or BÁTKAI, KRAMAR FIJAVŽ & RHANDI [8, Definition 10.11]).

Definition 1.1.3. A vector subspace $I \subseteq \mathrm{C}(K)$ is called

(a) *algebra ideal* if for $f \in I$, $g \in \mathrm{C}(K)$ also $f \cdot g \in I$ and $\bar{f} \in I$.

(b) *lattice ideal* if

  (i) $f \in I$ implies $|f| \in I$ and

  (ii) for $0 \leq f \leq g$ and $g \in I$ also $f \in I$.

Closed algebra and lattice ideals coincide and are characterized as follows.

Proposition 1.1.4. *Let $M \subseteq K$ be closed. Then*

$$I_M := \{f \in \mathrm{C}(K) \colon f(x) = 0 \text{ for all } x \in M\}$$

is both a closed algebra and lattice ideal in $\mathrm{C}(K)$. Conversely, for each closed algebra or lattice ideal I there is a closed subset $M \subseteq K$ called the support of *I such that $I = I_M$ (see EISNER, FARKAS, HAASE & NAGEL [20, Theorem 4.8 and Remark 7.11 (3)]).*

Clearly, for each subset $A \subseteq K$ we have $I_A = I_{\overline{A}}$. A closed ideal I in $\mathrm{C}(K)$ is maximal if and only if there is some $x \in K$ such that $I = I_{\{x\}}$ (see EISNER, FARKAS, HAASE & NAGEL [20, Lemma 4.9]). For $M \subseteq K$ closed, the ideal I_M can be viewed as the space $\mathrm{C}_0(M^c)$ of all continuous functions on M^c vanishing at infinity. The quotient space $\mathrm{C}(K)/I_M$ with respect to an ideal is again a C^*-algebra and Banach lattice (see EISNER, FARKAS, HAASE & NAGEL [20, Chapter 4, Exercise 6] and SCHAEFER [47, Chapter II, Proposition 5.4]) and can be characterized as follows.

Lemma 1.1.5. *For each closed set $M \subseteq K$ we have*

$$\mathrm{C}(K)/I_M \cong \mathrm{C}(M).$$

The Koopman operator T_φ on $\mathrm{C}(K)$ is linear, multiplicative and satisfies $T_\varphi \mathbb{1}_K = \mathbb{1}_K$ for the unit $\mathbb{1}_K$ in $\mathrm{C}(K)$. In particular, $\|T_\varphi\| = 1$. Even more, T_φ is a C^*-algebra homomorphism, respectively, a Banach lattice homomorphism. In fact, also the converse holds true (see Eisner, Farkas, Haase & Nagel [20, Theorem 4.13]).

Theorem 1.1.6. *Let K and L be compact spaces and $T\colon \mathrm{C}(L) \to \mathrm{C}(K)$ a linear bounded operator with $T\mathbb{1}_L = \mathbb{1}_K$. Then the following assertions are equivalent.*

(a) T is a C^*-algebra homomorphism.

(b) T is a Banach lattice homomorphism.

(c) T is a Koopman operator for some continuous map $\varphi\colon K \to L$.

In the following, we simply write algebra homomorphism for a C^*-algebra homomorphism.

We now turn to a more fundamental view on the interplay of dynamical systems and their corresponding Koopman systems using the language of categories.

Let **CTop** be the category of compact spaces. Here, the class of objects consists of all compact spaces, and the continuous functions $\varphi\colon K \to L$ between compact spaces K and L are the morphisms.

Moreover, consider the category $\mathbf{C}^*_{\mathbf{com},\mathbf{1}}$ consisting of all commutative unital C^*-algebras and the algebra homomorphisms between them.

Then the assignment

$$F\colon \mathbf{CTop} \longrightarrow \mathbf{C}^*_{\mathbf{com},\mathbf{1}}$$

defined as

$$\begin{aligned} K &\longmapsto \mathrm{C}(K), \\ [\varphi\colon K \to L] &\longmapsto [T_\varphi\colon \mathrm{C}(L) \to \mathrm{C}(K)] \end{aligned}$$

is a fully faithful, essentially surjective contravariant functor by Theorem 1.1.6 and the Gelfand–Naimark theorem yielding the antiequivalence of **CTop** and $\mathbf{C}^*_{\mathbf{com},\mathbf{1}}$ (cf. Hermle [25, Chapter 4], Edeko [19], or Landsman [35, Theorem E.5]).

This correspondence means that not only every dynamical system gives rise to a Koopman system, but also the converse holds true. In this transition, all relevant information of a dynamical system is preserved in the Koopman system and vice versa. In particular, the change from a dynamical system to its Koopman system can be seen as a global linearization of $(K;\varphi)$ because the Koopman operator is linear. This allows to use functional analytic methods for the investigation of dynamical systems. The so-called *Koopmanism* is the leitmotiv in Eisner, Farkas, Haase & Nagel [20]. The overarching idea in this thesis is the interplay of sub- and quotient systems in these categories as described in the next section.

1.2 Subsystems and quotient systems

It is a common strategy to decompose a topological dynamical system $(K;\varphi)$ into smaller parts and investigate these instead of the whole system.

Definition 1.2.1. A system $(L;\psi)$ is called

(a) *factor* or *quotient system of the system* $(K;\varphi)$ if there is a continuous surjective mapping $p\colon K \to L$, the *factor map*, such that $\psi \circ p = p \circ \varphi$. Thus, the diagram

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & K \arrow[d, "p"] \\ L \arrow[r, "\psi"'] & L \end{tikzcd}$$

commutes. The system $(K;\varphi)$ is called an *extension of* $(L;\psi)$.

(b) *subsystem of* $(K;\varphi)$ if there is a continuous injection $\iota\colon L \to K$ such that $\iota \circ \psi = \varphi \circ \iota$, i. e., the diagram

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\varphi"] & K \\ L \arrow[r, "\psi"'] \arrow[u, "\iota"'] & L \arrow[u, "\iota"] \end{tikzcd}$$

commutes.

Sub- and quotient systems of a topological dynamical system can be interpreted in the following way.

(a) A subsystem $(L;\psi)$ of $(K;\varphi)$ can be seen as a φ-invariant closed subset $M := \iota(L)$ of K with the restriction of φ on M, hence a system $(M;\varphi|_M)$.

Conversely, every closed and φ-invariant subset of K induces a subsystem of $(K;\varphi)$.

(b) For a quotient system $(L;\psi)$ of $(K;\varphi)$, the corresponding factor map p induces a decomposition of K into disjoint closed sets via

$$K = \dot{\bigcup_{l\in L}} p^{-1}(\{l\}).$$

Hence there is an equivalence relation $\sim$ on K with equivalence classes $p^{-1}(\{l\})$ for $l \in L$. This equivalence relation is *φ-invariant*, i. e., for $x, y \in K$ with $x \sim y$ also $\varphi(x) \sim \varphi(y)$.

Conversely, every φ-invariant equivalence relation $\sim$ on K with a Hausdorff quotient space $K/\!\sim$ induces a quotient system of $(K;\varphi)$.

Analogously, we now define sub- and quotient systems in the category $\mathbf{C}^*_{\mathbf{com},\mathbf{1}}$ of commutative unital C*-algebras.

Definition 1.2.2. Let $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ be unital commutative C*-algebras and $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $S\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ algebra homomorphisms. Then the system $(\mathcal{B};S)$ is called a

(a) *subsystem of* $(\mathcal{A};T)$ if there is some injective algebra homomorphism $J\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ with $J \circ S = T \circ J$, hence the diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} & \mathcal{A} \arrow[l, "T"'] \\
\mathcal{B} \arrow[u, "J"] & \mathcal{B} \arrow[l, "S"] \arrow[u, "J"']
\end{tikzcd}$$

commutes.

(b) *quotient system of* $(\mathcal{A};T)$ if there is some surjective algebra homomorphism $P\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ with $S \circ P = P \circ T$, hence the diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[d, "P"] & \mathcal{A} \arrow[l, "T"'] \arrow[d, "P"'] \\
\mathcal{B} & \mathcal{B} \arrow[l, "S"]
\end{tikzcd}$$

commutes.

A subsystem $(\mathcal{B}; S)$ of $(\mathcal{A}; T)$ can be seen as the T-invariant closed subalgebra $J(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$ together with the restriction $T|_{J(\mathcal{B})}$ and, conversely, each T-invariant closed subalgebra of $\mathcal{A}$ defines a subsystem.

Given a quotient system $(\mathcal{B}; S)$ of $(\mathcal{A}; T)$, the projection $P\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ is surjective and hence the fundamental theorem on homomorphisms gives a C^*-isomorphism

$$\mathcal{B} \cong \mathcal{A}/I$$

for the T-invariant and closed ideal $I := \ker P$. Conversely, each T-invariant closed ideal in $\mathcal{A}$ induces a quotient system of $(\mathcal{A}; T)$.

As seen by the functor F on page 50, each system $(\mathcal{A}; T)$ yields a Koopman system $(\mathrm{C}(K); T_\varphi)$ for some topological dynamical system $(K; \varphi)$. Along with the following elementary lemma (see Eisner, Farkas, Haase & Nagel [20, Lemma 4.14]) this connection reveals the interplay of sub- and quotient systems of $(K; \varphi)$ and $(\mathrm{C}(K); T_\varphi)$.

Lemma 1.2.3. *Let M, N be compact spaces and $\alpha\colon M \to N$ a continuous map with corresponding Koopman operator T_α. Then*

(a) α is surjective if and only if T_α is injective.

(b) α is injective if and only if T_α is surjective.

As a consequence we obtain that quotient systems of a topological dynamical system correspond to subsystems of the Koopman system and the other way around.

Theorem 1.2.4. *Let $(K; \varphi)$ and $(L; \psi)$ be topological dynamical systems with corresponding Koopman systems $(\mathrm{C}(K); T_\varphi)$ and $(\mathrm{C}(L); T_\psi)$.*

(a) There is a continuous surjection $p\colon K \to L$ such that

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & K \arrow[d, "p"] \\ L \arrow[r, "\psi"'] & L \end{tikzcd}$$

commutes if and only if there is an injective algebra homomorphism $J\colon \mathrm{C}(L) \to \mathrm{C}(K)$ such that $J = T_p$ and

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}(K) & \mathrm{C}(K) \arrow[l, "T_\varphi"'] \\ \mathrm{C}(L) \arrow[u, "J"] & \mathrm{C}(L) \arrow[l, "T_\psi"] \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd}$$

commutes. In particular, each quotient system of $(K;\varphi)$ *gives rise to a subsystem of* $(\mathrm{C}(K);T_\varphi)$ *and vice versa.*

(b) *There is a continuous injection* $\iota\colon L\to K$ *such that the diagram*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\varphi"] & K \\ L \arrow[u, "\iota"'] \arrow[r, "\psi"'] & L \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

commutes if and only if there is a surjective algebra homomorphism $P = T_\iota$ *from* $\mathrm{C}(K)\to\mathrm{C}(L)$ *such that*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}(K) \arrow[d, "P"] & \mathrm{C}(K) \arrow[l, "T_\varphi"'] \arrow[d, "P"'] \\ \mathrm{C}(L) & \mathrm{C}(L) \arrow[l, "T_\psi"] \end{tikzcd}$$

commutes. Hence each subsystem of $(K;\varphi)$ *induces a quotient system of* $(\mathrm{C}(K);T_\varphi)$ *and the converse.*

In this thesis, the focus is on subsystems of $(\mathrm{C}(K);T_\varphi)$ and their corresponding quotient systems of $(K;\varphi)$. Every such subsystem induces a decomposition of K into certain disjoint closed sets and the other way around. The advantage is that subsystems of the Koopman system – hence T_φ-invariant subalgebras of $\mathrm{C}(K)$ – are easier to understand than a quotient systems of $(K;\varphi)$. Hence canonical equivalence relations on K can be found by means of subalgebras of $\mathrm{C}(K)$ and conclusions on $(K;\varphi)$ can be drawn.

In Chapters 2 and 3 two important subalgebras and their corresponding quotient systems will be studied extensively.

Note the following basic observations concerning quotient systems of $(K;\varphi)$, respectively, subsystems of $(\mathrm{C}(K);T_\varphi)$.

Lemma 1.2.5. *(a) Let $\mathcal{A} \cong \mathrm{C}(L)$ be a T_φ-invariant closed and commutative unital C^*-subalgebra of $\mathrm{C}(K)$ and $p\colon K \to L$ the corresponding factor map. Then by the universal property of the quotient topology we have for $x, y \in K$ that $f(x) = f(y)$ for all $f \in \mathcal{A}$ if and only if $p(x) = p(y)$.*

(b) For T_φ-invariant closed and commutative unital C^*-subalgebras $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \mathrm{C}(K)$, the decomposition of K induced by $\mathcal{A}_2$ is finer than the decomposition induced by $\mathcal{A}_1$.

We give some first examples.

Example 1.2.6. (a) Denote by

$$\operatorname{fix} T_\varphi := \{f \in \mathrm{C}(K)\colon T_\varphi f = f\}$$

the *fixed space of* T_φ. Since T_φ is a C^*-homomorphism, the fixed space is a T_φ-invariant closed subalgebra of $\mathrm{C}(K)$, hence $\operatorname{fix} T_\varphi \cong \mathrm{C}(L)$ for some compact space L. Consider the induced subsystem $(\operatorname{fix} T_\varphi; T_\varphi|_{\operatorname{fix} T_\varphi})$ of $(\mathrm{C}(K);T_\varphi)$. By Lemma 1.2.5 (a) then $T_\psi = \mathrm{Id}_{\mathrm{C}(L)}$, respectively, $\psi = \mathrm{id}$. Therefore, the fixed factor is sometimes refered to as *maximal trivial factor* (cf. Edeko [18]).

How to describe the decomposition of K induced by $\operatorname{fix} T_\varphi$ by means of the dynamics will be subject of Chapter 2.

(b) Next, take the *Kronecker algebra*

$$\operatorname{kro} T_\varphi := \overline{\operatorname{lin}}\{f \in \mathrm{C}(K)\colon \text{there is } \lambda \in \mathbb{T} \text{ such that } T_\varphi f = \lambda f\}$$

where $\mathbb{T}$ denotes the unit circle in the complex numbers $\mathbb{C}$. The Kronecker algebra is also a T_φ-invariant closed subalgebra of $\mathrm{C}(K)$, hence $\operatorname{kro} T_\varphi \cong \mathrm{C}(L)$ for some compact space L. Then L is known as the *Kronecker factor*. It coincides with the so-called *maximal equicontinuous factor* if φ is invertible (cf. Edeko [19]). Clearly, $\operatorname{fix} T_\varphi \subseteq \operatorname{kro} T_\varphi$.

From the Halmos–von Neumann theorem it is known that a minimal Kronecker quotient system $(L;\psi)$ is isomorphic to some minimal rotation on a compact monothetic group (cf. Vries [51, Theorem 1.6.9] or Derndinger, Nagel & Palm [13, Chapter VIII, Theorem 2]). The non-minimal case was characterized in Edeko [18].

Given a subsystem $(M;\varphi|_M)$ of $(K;\varphi)$, the fixed space $\operatorname{fix} T_{\varphi|_M}$ of the Koopman operator corresponding to this subsystem may contain fixed functions that cannot be extended to fixed functions on the entire space K, i. e., the inclusion

$$\{f|_M \colon f \in \operatorname{fix} T_\varphi\} \subseteq \operatorname{fix} T_{\varphi|_M}$$

may be proper. Here is an example.

Example 1.2.7. Take the standard example $K := [0,1]$ with $\varphi(x) = x^2$ for $x \in K$. For the φ-invariant closed set $M := \{0,1\}$ then $\{f|_M \colon f \in \operatorname{fix} T_\varphi\} = \langle \mathbb{1}_M \rangle$ while $\operatorname{fix} T_{\varphi|_M} = \mathrm{C}(M)$ is two-dimensional.

As seen in Example 1.2.6 (a), the fixed space $\operatorname{fix} T_\varphi$ decomposes K into disjoint closed φ-invariant sets. Hence the fixed space induces many subsystems of $(K;\varphi)$. Also here, the local fixed functions may not be extendable to the entire space, thus the *fibers* $p^{-1}(\{l\})$, $l \in L$, induced by $\operatorname{fix} T_\varphi$ as in Example 1.2.6 (a) can be further decomposed by the "local" fixed spaces as in the example below.

Example 1.2.8. Let $K := D$ be the closed unit disk in $\mathbb{C}$ and

$$\varphi(x) := r\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\alpha+r)}$$

for $x := r\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha} \in K$ with $r \in [0,1]$, $\alpha \in [0,1)$. Hence φ rotates the unit disk and the rotation speed depends on the radius. Then the decomposition of K induced by $\operatorname{fix} T_\varphi$ is

$$K = \dot{\bigcup_{r\in[0,1]}} r\mathbb{T}.$$

However, for $r \in (0,1)$, $r = \frac{p}{q}$ rational and p, q coprime we have

$$\operatorname{fix} T_{\varphi|_{r\mathbb{T}}} = \{f \in \mathrm{C}(r\mathbb{T}) \colon f(r\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}) = f(r\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\alpha+\frac{1}{q})}) \text{ for } \alpha \in [0,1)\}.$$

Hence the fixed space corresponding to the restricted Koopman operator consists of periodic functions which induce a non-trivial decomposition of the fiber $r\mathbb{T}$.

The process of decomposing the fibers of $\operatorname{fix} T_\varphi$ via local fixed functions can be iterated, i. e., the fibers of the local fixed spaces could be further decomposed. However, this will not be discussed in more detail here. We now move on to a closer inspection of the decomposition of K induced by $\operatorname{fix} T_\varphi$ in the next chapter.

2 The fixed space of a Koopman operator

For a topological dynamical system $(K;\varphi)$ we now apply the correspondence of sub- and quotient systems as introduced in Chapter 1 to the subsystem of $(\mathrm{C}(K);T_\varphi)$[1] induced by the *fixed space of* T_φ,

$$\operatorname{fix} T_\varphi = \{f \in \mathrm{C}(K) \colon T_\varphi f = f\}$$

(cf. Example 1.2.6 (a)). As described in Chapter 1 we have $\operatorname{fix} T_\varphi \cong \mathrm{C}(L)$ for the compact *fixed factor* L and the fixed space decomposes the system $(K;\varphi)$ into disjoint subsystems. Thus K is a disjoint union of φ-invariant closed sets,

$$K = \dot{\bigcup_{l\in L}} p^{-1}(\{l\}),$$

for the factor map $p\colon K \to L$ as in Example 1.2.6 (a). Hence there is an equivalence relation $\sim$ on K with equivalence classes $p^{-1}(\{l\})$ for $l \in L$. This decomposition induced by $\operatorname{fix} T_\varphi$ has already been described in Sine [49]. The goal of this chapter is to characterize this equivalence relation dynamically and topologically, i. e., by means of the system $(K;\varphi)$. For this purpose, we introduce a transfinite hierarchy of "generalized" orbits. In particular, this complex construction reveals how much easier it is to express this canonical decomposition of K in terms of the Koopman system.

The fixed space is the eigenspace of T_φ corresponding to the eigenvalue 1, hence it is a spectral notion. Clearly, all constant functions on K are contained in $\operatorname{fix} T_\varphi$,

$$\langle \mathbb{1}_K\rangle \subseteq \operatorname{fix} T_\varphi.$$

The case $\operatorname{fix} T_\varphi = \langle \mathbb{1}_K\rangle$ is particularly interesting since it is needed for important theorems such as the Halmos–von Neumann theorem. Moreover, the one-dimensionality of the fixed space implies that the unimodular eigenvalues of T_φ form a group (see Eisner, Farkas, Haase & Nagel [20, Theorem 4.21]).

[1] As before, $\mathrm{C}(K)$ denotes the space of all continuous complex-valued functions on K.

This motivates the characterization of a one-dimensional fixed space via $(K;\varphi)$. A well-known fact is that transitivity of $(K;\varphi)$ implies $\dim \operatorname{fix} T_\varphi = 1$. In particular, minimal systems have a one-dimensional fixed space $\operatorname{fix} T_\varphi$. The converse does, in general, not hold true as our standard example $\varphi(x) = x^2$ for $x \in [0,1]$ shows. This is an important difference to measure-preserving dynamical systems $(\Omega, \Sigma, \mu; \varphi)$ (cf. Eisner, Farkas, Haase & Nagel [20, Chapter 5]) where *ergodicity*, i. e., the analogue of minimality, is characterized by a one-dimensional fixed space

$$\operatorname{fix} T_\varphi := \left\{ f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu) \colon T_\varphi f = f \right\}$$

of the corresponding Koopman operator on $\mathrm{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Using the decomposition of K corresponding to the fixed space we will be able to give a necessary and sufficient condition for $\operatorname{fix} T_\varphi$ being one-dimensional in the topological case (see Theorem 2.3.8). By analogy with the measure-preserving setting this property will be called *topologically ergodic*.

Moreover, we generalize the concept of *Lyapunov stability* in Section 2.4 and show that $\operatorname{fix} T_\varphi$ induces the finest decomposition of K into *absolutely Lyapunov stable* subsets (see Theorem 2.4.7).

This chapter is essentially based on the publication Küster [33].

2.1 Preliminaries

We first introduce some technical terms related to the fixed space $\operatorname{fix} T_\varphi$.

Definition 2.1.1. (a) A nonempty set $M \subseteq K$ is called a *level set of* $\operatorname{fix} T_\varphi$ if $f|_M$ is constant for all $f \in \operatorname{fix} T_\varphi$.

(b) A level set M is called *maximal* if for any other level set $M' \subseteq K$ with $M \subseteq M'$ already $M' = M$.

Remark 2.1.2. (a) Maximal level sets exist and are closed.

(b) A set $M \subseteq K$ is a maximal level set of $\operatorname{fix} T_\varphi$ if and only if $M = p^{-1}(\{l\})$ for some $l \in L$ where p is the canonical projection onto the fixed factor L.

Proof. To show (a), consider the family $\{M\colon M \text{ level set of } \operatorname{fix} T_\varphi\}$ together with the inclusion "$\subseteq$" and use Zorn's lemma. Clearly, maximal level sets are closed.

For the proof of (b), Lemma 1.2.5 (a) shows that $p^{-1}(\{l\})$ is a level set of $\operatorname{fix} T_\varphi$ for all $l \in L$. Now assume that there is a level set $M \subseteq K$ such that $p^{-1}(\{l_1\}) \cup p^{-1}(\{l_2\}) \subseteq M$ for some $l_1 \neq l_2 \in L$. Then for $x_1 \in p^{-1}(\{l_1\})$ and $x_2 \in p^{-1}(\{l_2\})$ we have $f(x_1) = f(x_2)$ for all $f \in \operatorname{fix} T_\varphi$. This implies

$$\hat{f}(l_1) = \hat{f}(p(x_1)) = \hat{f}(p(x_2)) = \hat{f}(l_2)$$

for all $\hat{f} \in \mathrm{C}(L)$ which is a contradiction. Conversely, it is clear that each maximal level set M of $\operatorname{fix} T_\varphi$ is of the form $M = p^{-1}(\{l\})$ for some $l \in L$. $\square$

The following characterization will be essential to find the equivalence relation on K induced by $\operatorname{fix} T_\varphi$.

Lemma 2.1.3. *Let $(K;\varphi)$ be a topological dynamical system and identify $\operatorname{fix} T_\varphi$ with $\mathrm{C}(L)$. Let $\sim$ be any equivalence relation on K with canonical projection $\pi\colon K \to K/{\sim}$ satisfying*

(i) $\varphi(x) \sim x$ and

(ii) the equivalence class $[x]$ is a level set of $\operatorname{fix} T_\varphi$

for all $x \in K$. Then the following are equivalent.

(a) $[x]$ is a maximal level set of $\operatorname{fix} T_\varphi$ for each $x \in K$.

(b) $K/{\sim}$ is Hausdorff with respect to the quotient topology.

(c) $K/{\sim} \cong L$.

Proof. (a) $\Rightarrow$ (c): By assumption we have $[x] = p^{-1}(\{l\})$ for some $l \in L$, where $p\colon K \to L$ is the factor map. Hence for $x, y \in K$ we have $\pi(x) = \pi(y)$ if and only if $p(x) = p(y)$. By the universal property of the quotient topology there are unique continuous maps $h\colon K/{\sim} \to L$ and $g\colon L \to K/{\sim}$ such that $h \circ \pi = p$ and $g \circ p = \pi$. Then $g = h^{-1}$ since

$$g \circ h(\pi(x)) = g(p(x)) = \pi(x)$$

and

$$h \circ g(p(x)) = h(\pi(x)) = p(x)$$

for all $x \in K$. Hence h is a homeomorphism between $K/{\sim}$ and L.

(c) $\Rightarrow$ (b): Since $K/{\sim}$ is homeomorphic to the space L it is Hausdorff.

(b) $\Rightarrow$ (a): It suffices to show that $p^{-1}(p(x)) \subseteq [x]$ for all $x \in K$, because $p^{-1}(p(x))$ are the maximal level sets of $\operatorname{fix} T_\varphi$. Assume for a contradiction that there are some $y, z \in K$ such that $y \in p^{-1}(p(z)) \backslash [z]$. Since $K/{\sim}$ is Hausdorff, $[y]$ and $[z]$ are closed. By Urysohn's lemma, there is some $\tilde{f} \in \mathrm{C}(K/{\sim})$ such that $\tilde{f}([y]) \neq \tilde{f}([z])$. Then $f := \tilde{f} \circ \pi \in \operatorname{fix} T_\varphi$, since f is continuous and $x \sim \varphi(x)$ implies

$$f(x) = \tilde{f}([x]) = \tilde{f}([\varphi(x)]) = T_\varphi f(x)$$

for all $x \in K$. By the universal property of the quotient topology there is some $\hat{f} \in \mathrm{C}(L)$ such that $f = \hat{f} \circ p$. Since $y \in p^{-1}(p(z))$, we obtain

$$f(y) = \hat{f}(p(y)) = \hat{f}(p(z)) = f(z)$$

which contradicts $\tilde{f}([y]) \neq \tilde{f}([z])$. □

Remark 2.1.4. In Lemma 2.1.3 both conditions (i) and (ii) are needed. This can be seen by the following trivial equivalence relations.

(a) $x \sim y$ for all $x, y \in K$ shows that $\varphi(x) \sim x$ does not imply that $[x]$ is a level set of $\operatorname{fix} T_\varphi$ for $x \in K$.

(b) $x \sim y$ only for $x = y$ shows that also the converse implication does not hold true in general.

2.2 Equivalence relations induced by generalized orbits

To dynamically describe $\operatorname{fix} T_\varphi$, we use Lemma 2.1.3 and search for an equivalence relation $\sim$ on K such that $K/{\sim}$ is Hausdorff, $\varphi(x) \sim x$ for all $x \in K$ and each equivalence class is a level set of $\operatorname{fix} T_\varphi$.

A first observation is the following. If we take the closed orbit for $x \in K$, then $f|_{\overline{\operatorname{orb}}(x)}$ is constant for all $f \in \operatorname{fix} T_\varphi$. Thus, every closed orbit is a level set of $\operatorname{fix} T_\varphi$. If K admits a decomposition into mutually disjoint closed orbits, this clearly induces an equivalence relation $\sim$ with $\varphi(x) \sim x$ for all $x \in K$. But the corresponding quotient space may not be Hausdorff as the following example shows.

Example 2.2.1. As in Example 1.2.8 let $K := D$ be the closed unit disk in $\mathbb{C}$ and

$$\varphi(x) := r\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\alpha+r)}$$

for $x := r\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha} \in K$ with $r \in [0,1]$, $\alpha \in [0,1)$. Then the closed orbits

$$\overline{\mathrm{orb}}(x) = \begin{cases} \left\{r\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\alpha+nr)} \colon n = 1, \ldots, q-1\right\} & \text{for } r = \frac{p}{q} \text{ rational,} \\ & p \text{ and } q \text{ coprime,} \\ r\mathbb{T} & \text{for } r \text{ irrational} \end{cases}$$

form a non-trivial decomposition of K. However, the fixed space of T_φ is

$$\operatorname{fix} T_\varphi = \{f \in \mathrm{C}(K) \colon f|_{c\mathbb{T}} \equiv const. \text{ for all } c \in [0,1]\},$$

so the maximal level sets are the circles $c\mathbb{T}$ for $c \in [0,1]$. This shows that even mutually disjoint closed orbits may induce a quotient space that is not Hausdorff.

Our approach to obtain the Hausdorff quotient space corresponding to $\operatorname{fix} T_\varphi$ is based on the following characterization.

Remark 2.2.2. A topological space X is Hausdorff if and only if each point is the intersection of its closed neighborhoods, i. e., for all $x \in X$ we have

$$\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}(x) \text{ closed}} U$$

where $\mathcal{U}(x)$ denotes the neighborhood filter of x consisting of all its neighborhoods.

Moreover, we need the following notion.

Definition 2.2.3. Let $(K_x)_{x\in K}$ be a covering of K satisfying $x \in K_x$ for all $x \in K$. Define an equivalence relation $\sim$ on K via $x \sim y$ for $x, y \in K$ if there is some $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in K$ such that $x_1 = x$ and $x_k = y$ and

$$K_{x_i} \cap K_{x_{i+1}} \neq \emptyset \text{ for } i = 1, \ldots, k-1.$$

Then $\sim$ is called the *equivalence relation generated by* $(K_x)_{x\in K}$.

Remark 2.2.4. For the equivalence relation $\sim$ generated by $(K_x)_{x\in K}$ we have $[x] = \bigcup_{y\in K, y\sim x} K_y$.

Example 2.2.5. For our standard example $K := [0, 1]$ and $\varphi(x) := x^2$ take, e. g., $K_x := \overline{\mathrm{orb}}(x)$ for each $x \in K$. Then the equivalence relation $\sim$ generated by $(K_x)_{x \in K}$ yields the equivalence classes $[0, 1)$ and $\{1\}$.

We now outline our strategy. Starting from a quotient space $K/{\sim_0}$ the Hausdorff property is successively achieved by the following steps. We first build the intersection of closed neighborhoods of each equivalence class (cf. Remark 2.2.2). The preimages under the canonical projection of these intersections yield a covering of K. A new quotient space $K/{\sim_1}$ is obtained by taking the equivalence relation generated by this covering. We then repeat the steps above with the new equivalence relation and so forth. By repeating sufficiently often we arrive at a Hausdorff space as will be shown in this chapter.

Remark 2.2.6. For a similar approach to a *Hausdorffization* we refer to Munster [41]. Here, the author starts from an arbitrary topological space X and constructs the smallest equivalence relation $\sim$ on X such that $X/{\sim}$ is Hausdorff. See also Osborne [44] or Kelly [28].

Approximating orbits and superorbits

We apply this strategy to our situation in order to obtain an equivalence relation on K such that the equivalence classes are φ-invariant and level sets of fix T_φ. These assumptions are necessary to characterize the fixed factor of T_φ (see (i) and (ii) in Lemma 2.1.3).

Definition 2.2.7. (a) We define the *approximating orbit* of x for each $x \in K$ as

$$\mathrm{aorb}(x) := \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{U}(x) \text{ closed}, \\ \varphi(U) \subseteq U}} U.$$

(b) Let $\sim$ be the equivalence relation on K generated by $(\mathrm{aorb}(x))_{x \in K}$. The *superorbit* of x is the equivalence class

$$\mathrm{sorb}(x) := [x] = \bigcup_{\substack{y \in K, \\ y \sim x}} \mathrm{aorb}(y)\,.$$

Indeed, we then have the following.

Proposition 2.2.8. *For each $x \in K$ we have*

(a) $\varphi(x) \sim x$ *and*

(b) the superorbit $\operatorname{sorb}(x)$ *is a level set of* $\operatorname{fix} T_\varphi$.

Proof. The proof of (a) is clear. For (b) it suffices to show that $\operatorname{aorb}(x)$ is a level set of $\operatorname{fix} T_\varphi$ for all $x \in K$. For $x \in K$, $f \in \operatorname{fix} T_\varphi$ and $\varepsilon > 0$ define the closed neighborhood $U := \{y \in K\colon |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon\}$ of x which is φ-invariant because f is a fixed function of T_φ. This implies $\operatorname{aorb}(x) \subseteq U$ by the definition of the approximating orbit. If $z \in \operatorname{aorb}(x)$, then $z \in U$, hence $|f(z) - f(x)| \leq \varepsilon$ for each $\varepsilon > 0$ showing $f(z) = f(x)$. □

We now give examples for approximating orbits, respectively, superorbits and analyze the corresponding quotient space.

Example 2.2.9. Take $K := [0, 1]$ and $\varphi(x) := x^2$ for $x \in K$. Then

$$\operatorname{aorb}(x) = \begin{cases} \overline{\operatorname{orb}}(x) & \text{for } x \in [0, 1), \\ [0, 1] & \text{for } x = 1. \end{cases}$$

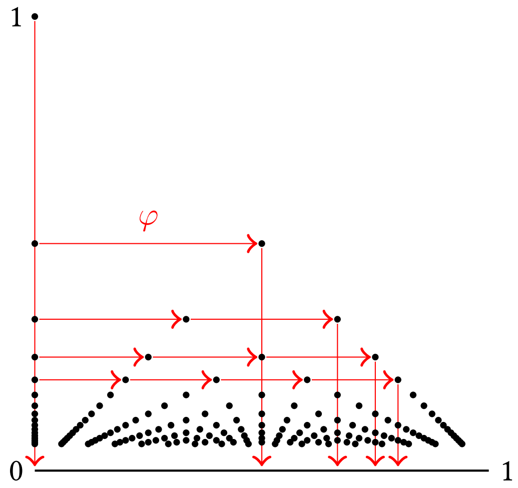
By $\operatorname{aorb}(1) = K$ we obtain the trivial decomposition of K. The corresponding quotient space is a singleton and therefore Hausdorff, hence corresponds to the fixed factor L by Proposition 2.1.3. This is in accordance with $\dim \operatorname{fix} T_\varphi = 1$.

Example 2.2.10. Take the compact space

$$K := \{(c, 0)\colon c \in [0, 1]\} \,\dot\cup\, \left\{\left(\tfrac{k}{n}, \tfrac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N},\ k = 0, ..., n-1\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

and consider on K the continuous dynamics

$$\varphi(x) := \begin{cases} x & \text{if } x = (c, 0) \text{ for some } c \in [0, 1], \\ \left(\frac{k+1}{n}, \frac{1}{n}\right) & \text{if } x = \left(\frac{k}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ for some } n \in \mathbb{N} \text{ and } k \in \{0, ..., n-2\}, \\ \left(\frac{n-1}{n}, 0\right) & \text{if } x = \left(\frac{n-1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ for some } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$



(a) The approximating orbits are

$$\operatorname{aorb}(x) = \begin{cases} \{(a,0)\colon a \in [c,1]\} & \text{if } x = (c,0) \text{ for some } c \in [0,1], \\ \operatorname{orb}(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

where

$$\operatorname{orb}(x) = \left\{ \left(\tfrac{k+m}{n}, \tfrac{1}{n} \right) : m = 0, \dots, n-k-1 \right\} \cup \left\{ \left(\tfrac{n-1}{n}, 0 \right) \right\}$$

for $x = \left(\frac{k}{n}, \frac{1}{n} \right)$ with $n \in \mathbb{N}$ and $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

(b) If $x = \left(\frac{k}{n}, \frac{1}{n} \right) \in K$ for some $n \in \mathbb{N}$ and $k \in \{0, \dots, n-2\}$, we have

$$\operatorname{aorb}(x) \cap \operatorname{aorb}\left(\tfrac{n-1}{n}, 0 \right) = \left\{ \left(\tfrac{n-1}{n}, 0 \right) \right\} \neq \emptyset.$$

This implies

$$\begin{aligned} &\operatorname{aorb}\left(\tfrac{n-1}{n}, 0 \right) \cap \operatorname{aorb}(x_1, 0) \\ &\quad = \left\{ (c,0)\colon c \in \left[\tfrac{n-1}{n}, 1 \right] \right\} \cap \left\{ (c,0)\colon c \in [x_1, 1] \right\} \\ &\quad \neq \emptyset \end{aligned}$$

for all $x_1 \in [0,1]$. Hence $x \sim y$ for all $y \in K$ yielding

$$\operatorname{sorb}(x) = K.$$

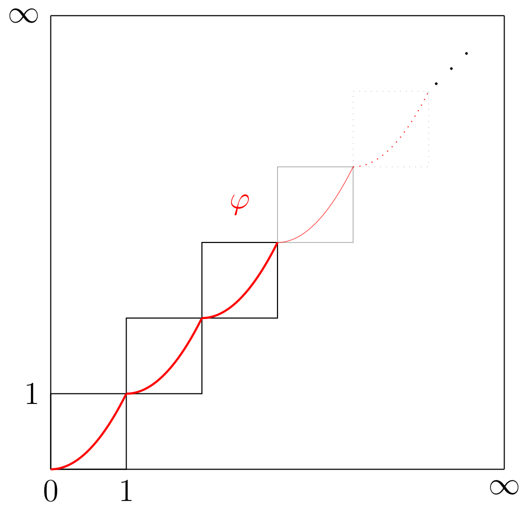
Therefore, the quotient space induced by the superorbits is a singleton and hence a Hausdorff space, thus corresponds to the one-dimensional fixed space of T_φ.

While the superorbits in the above examples were sufficient to characterize the fixed space of T_φ, the next example reveals that this is not always the case.

Example 2.2.11. Let $K := [0, \infty]$ be the one-point compactification of $[0, \infty)$ and

$$\varphi\colon K \to K, \quad x \mapsto \begin{cases} (x-n)^2 + n & \text{for } x \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{N}_0, \\ \infty & \text{for } x = \infty. \end{cases}$$

We call this system the *dynamical long line*.



Then the approximating orbits are

$$\operatorname{aorb}(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{for } x = 0, \\ [n-1, n] & \text{for } x = n \in \mathbb{N}, \\ \overline{\operatorname{orb}}(x) = \left\{(x-n)^{2k} + n \colon k \in \mathbb{N}_0\right\} \cup \{n\} & \text{for } x \in (n, n+1), \\ & n \in \mathbb{N}_0, \\ \{\infty\} & \text{for } x = \infty. \end{cases}$$

This yields the superorbits

$$\operatorname{sorb}(x) = \begin{cases} [0, \infty) & \text{for } 0 \leq x < \infty, \\ \{\infty\} & \text{for } x = \infty. \end{cases}$$

However, since $\dim \operatorname{fix} T_\varphi = 1$, the maximal level set of $\operatorname{fix} T_\varphi$ is $[0, \infty]$. Hence the quotient space induced by the superorbits is not Hausdorff.

Superorbits of finite degree

To obtain a Hausdorff quotient space, we iterate the process of building intersections of certain neighborhoods (approximating orbits) and then defining an equivalence relation yielding superorbits.

Definition 2.2.12. Let $n \in \mathbb{N}_0$ and $x \in K$.

Base case:

For $n = 0$, define the *approximating orbit of x of degree* 0 as

$$\operatorname{aorb}_0(x) := \operatorname{aorb}(x)$$

and the *superorbit of x of degree* 0 as

$$\operatorname{sorb}_0(x) := \operatorname{sorb}(x)$$

as in Definition 2.2.7.

Successor case:

(i) Let $n \geq 1$. The *approximating orbit of x of degree n* is

$$\operatorname{aorb}_n(x) := \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{U}(x) \text{ open}, \\ \operatorname{sorb}_{n-1}(U) \subseteq U}} \overline{U}^{\operatorname{sorb}_{n-1}}$$

with $\operatorname{sorb}_{n-1}(U) := \bigcup_{y \in U} \operatorname{sorb}_{n-1}(y)$ for $U \subseteq K$ and

$$\overline{U}^{\operatorname{sorb}_{n-1}} := \bigcap_{\substack{U \subseteq F \text{ closed}, \\ \operatorname{sorb}_{n-1}(F) \subseteq F}} F,$$

called the $\operatorname{sorb}_{n-1}$*-closure of U*.

(ii) Let $\sim_n$ be the equivalence relation generated by $(\operatorname{aorb}_n(x))_{x \in K}$. The *superorbit of x of degree n* is

$$\operatorname{sorb}_n(x) := [x]_n = \bigcup_{\substack{y \in K, \\ y \sim_n x}} \operatorname{aorb}_n(y).$$

We collect some basic properties of approximating orbits, superorbits and the sorb_n-closure.

Proposition 2.2.13. *Let $n \in \mathbb{N}_0$ and $U \subseteq K$.*

(a) For all $x, y \in K$ with $y \sim_n x$ we have

$$\operatorname{aorb}_n(y) \subseteq \operatorname{sorb}_n(x),$$

$$\operatorname{sorb}_n(y) \subseteq \operatorname{aorb}_{n+1}(x)$$

and

$$\operatorname{aorb}_n(y) \subseteq \operatorname{aorb}_{n+1}(x),$$

$$\operatorname{sorb}_n(y) \subseteq \operatorname{sorb}_{n+1}(x).$$

In particular, these inclusions hold true for $x = y$.

(b) For all $x \in K$ we have that $\operatorname{aorb}_n(x)$ and $\operatorname{sorb}_n(x)$ are φ-invariant.

(c) The following assertions are equivalent.

(i) $\operatorname{sorb}_n(U) \subseteq U$.

(ii) $\operatorname{sorb}_n(U) = U$.

(iii) There is some $M \subseteq K$ such that $U = \bigcup_{y \in M} \operatorname{sorb}_n(y)$.

Proof. (a) is clear by definition. For (b) it suffices to show that $\operatorname{sorb}_n(x)$ is φ-invariant for all $x \in K$ and $n \in \mathbb{N}$. We give a proof by induction on n. For $n = 0$, see Proposition 2.2.8. If $\operatorname{sorb}_n(x)$ is φ-invariant for all $x \in K$ and $n \in \mathbb{N}_0$, then $\operatorname{sorb}_{n+1}(x)$ is also φ-invariant since $\operatorname{sorb}_n(y) \subseteq \operatorname{aorb}_{n+1}(y) \subseteq \operatorname{sorb}_{n+1}(x)$ for $x, y \in K$ with $y \in \operatorname{sorb}_{n+1}(x)$.

In (c) the implications (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) are trivial. (iii) $\Rightarrow$ (ii): By assumption we have $U \subseteq \bigcup_{y \in M} \operatorname{sorb}_n(y)$ and thus for all $z \in U$ there is some $y \in M$ such that $z \in \operatorname{sorb}_n(y)$. Since $\sim_n$ is an equivalence relation, we have $\operatorname{sorb}_n(z) = \operatorname{sorb}_n(y)$, hence $\operatorname{sorb}_n(U) = \bigcup_{y \in U} \operatorname{sorb}_n(y) \subseteq \bigcup_{y \in M} \operatorname{sorb}_n(y)$. The converse inclusion is clear.

□

As before, we check whether the necessary assumptions of Lemma 2.1.3 are satisfied.

Proposition 2.2.14. *For each $n \in \mathbb{N}_0$ and $x \in K$ we have that*

(a) $\varphi(x) \sim_n x$ and

(b) the superorbit $\operatorname{sorb}_n(x)$ of degree n is a level set of $\operatorname{fix} T_\varphi$.

Proof. Assertion (a) follows from the φ-invariance of $\mathrm{sorb}_n(x)$ for each $n \in \mathbb{N}_0$ and $x \in K$ shown in Proposition 2.2.13 (b).

We use induction on n to show (b). For $n = 0$ see Proposition 2.2.8. For $n \in \mathbb{N}_0$ and $x \in K$ assume that $\mathrm{sorb}_n(x)$ is a level set of T_φ. We show that the assertion holds true for $n+1$. As in the base case, consider

$$U := \{y \in K \colon |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon\} = f^{-1}(\overline{B_\varepsilon(f(x))})$$

for some $f \in \operatorname{fix} T_\varphi$ and some $\varepsilon > 0$. To prove $\mathrm{aorb}_{n+1}(x) \subseteq U$, we need to find some open $V \in \mathcal{U}(x)$ with $\mathrm{sorb}_n(V) \subseteq V$ such that $\overline{V}^{\mathrm{sorb}_n} \subseteq U$.

Define

$$V := f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))).$$

Then $V \in \mathcal{U}(x)$, V is open and $V \subseteq U$. By the induction hypothesis we have for $x' \in K$ with $x \sim_n x'$ that $f(x) = f(x')$. Hence by the universal property of the quotient topology there is some unique continuous function $\hat{f} \colon K/{\sim_n} \to \mathbb{C}$ such that $f = \hat{f} \circ \pi_n$ for the canonical projection $\pi_n \colon K \to K/{\sim_n}$. This implies $V = \pi_n^{-1}\left(\hat{f}^{-1}\left(B_\varepsilon\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)$, hence

$$\mathrm{sorb}_n(V) = \pi_n^{-1}(\pi_n(V)) = V. \tag{2.1}$$

This yields $\mathrm{aorb}_{n+1}(x) \subseteq \overline{V}^{\mathrm{sorb}_n}$.

We now show that $\overline{V}^{\mathrm{sorb}_n} \subseteq U$. For $f \in \operatorname{fix} T_\varphi$ and $C \subseteq \mathbb{C}$, we have $\mathrm{sorb}_n(f^{-1}(C)) = f^{-1}(C)$ by the universal property of the quotient topology as above. Moreover, if $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq C$ then $V \subseteq f^{-1}(C)$ by definition.

Whence we conclude that

$$\begin{aligned} U &= f^{-1}(\overline{B_\varepsilon(f(x))}) = \bigcap_{\substack{C \subseteq \mathbb{C} \text{ closed}, \\ B_\varepsilon(f(x)) \subseteq C}} f^{-1}(C) \\ &\supseteq \bigcap_{\substack{C \subseteq \mathbb{C}, \\ f^{-1}(C) \text{ closed}, \\ f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(C)}} f^{-1}(C) \supseteq \bigcap_{\substack{F \subseteq K \text{ closed}, \\ \mathrm{sorb}_n(F) \subseteq F, \\ V \subseteq F}} F \\ &= \overline{V}^{\mathrm{sorb}_n}. \end{aligned}$$

Hence $\mathrm{aorb}_{n+1}(x) \subseteq \overline{V}^{\mathrm{sorb}_n} \subseteq U$. This implies that for $z \in \mathrm{aorb}_{n+1}(x)$ we have $|f(z) - f(x)| \leq \varepsilon$ by definition of U. Since ε is arbitrary, this implies $f(z) = f(x)$. $\square$

We now give a concrete example for these new orbits and analyze the corresponding quotient space.

Example 2.2.15. (a) Let $K := [0,\infty]$ be the one-point compactification of $[0,\infty)$ and $\varphi_1\colon K \to K$ with $\varphi_1 := \varphi$ as in Example 2.2.11. As seen before, $\dim \operatorname{fix} T_{\varphi_1} = 1$ and

$$\operatorname{sorb}_0(x) = \begin{cases} [0,\infty) & \text{for } 0 \leq x < \infty, \\ \{\infty\} & \text{for } x = \infty. \end{cases}$$

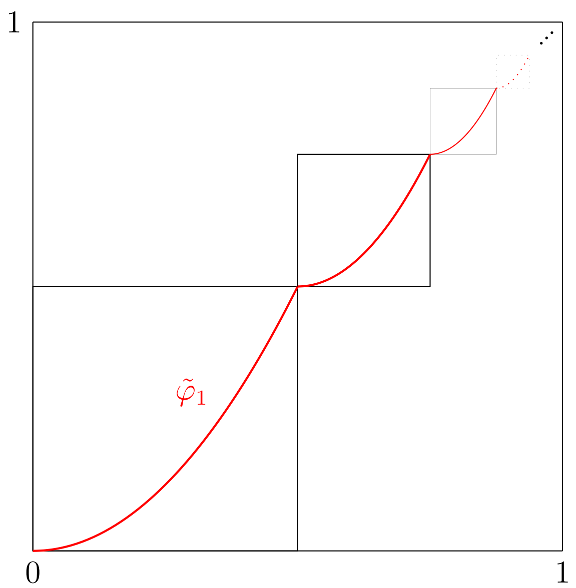
Since $[0,\infty)$ is the only sorb_0-invariant open subset of K, we have for all $x \in K$

$$\operatorname{aorb}_1(x) = \operatorname{sorb}_1(x) = K.$$

Next we define an isomorphic system $(\tilde{K};\tilde{\varphi}_1)$ by $\tilde{K} := [0,1]$ and

$$\tilde{\varphi}_1\colon \tilde{K} \to \tilde{K}, \quad \tilde{\varphi}_1 := h \circ \varphi_1 \circ h^{-1}$$

for a homeomorphism $h\colon K \to \tilde{K}$ with $h(0) = 0$ and $h(\infty) = 1$.



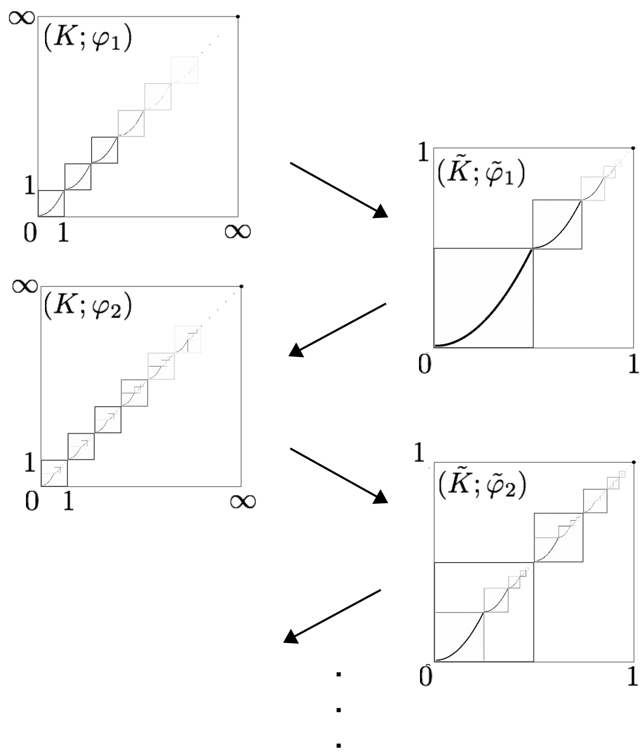
For this "compressed" system $(\tilde{K};\tilde{\varphi}_1)$ (see the figure above for a schematic view) we still have $\dim \operatorname{fix} T_{\tilde{\varphi}_1} = 1$.

(b) Analogously, we construct a system $(K;\varphi_2)$ on the space $K=[0,\infty]$ with $\mathrm{sorb}_2(x)=K$ and $\mathrm{sorb}_1(x)\subsetneq K$ for all $x\in K$ via

$$\varphi_2\colon K\to K,\quad x\mapsto\begin{cases}\tilde{\varphi}_1(x-m)+m & \text{for } x\in[m,m+1),\ m\in\mathbb{N}_0,\\ \infty & \text{for } x=\infty.\end{cases}$$

We iterate this procedure of compressing systems and lining up copies of these on $K=[0,\infty]$ (see the figure below). By this procedure we obtain systems $(K;\varphi_n)$ with $\mathrm{sorb}_{n-1}(x)\subsetneq K$ and $\mathrm{sorb}_n(x)=K$ for some $n\in\mathbb{N}$ and all $x\in K$. Hence the quotient space $K/{\sim_n}$ is a singleton, thus homeomorphic to the fixed factor L by Lemma 2.1.3.

Construction of systems with $\mathrm{sorb}_n(x)=K$ for $x\in K, n\in\mathbb{N}$

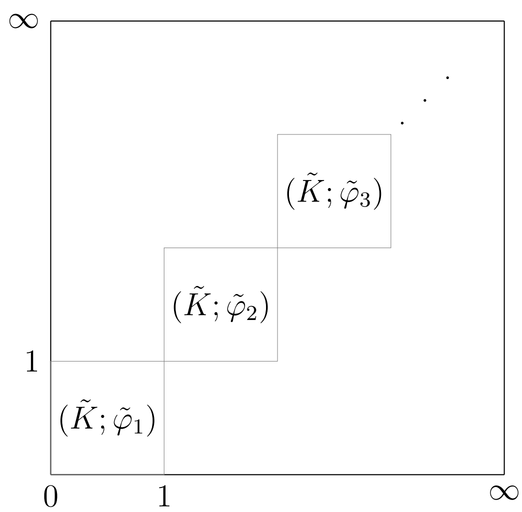


This construction leads to an example in which even superorbits of arbitrary degree $n\in\mathbb{N}$ are not sufficient to characterize the fixed space.

Example 2.2.16. Let $K := [0, \infty]$ and define

$$\varphi(x) := \begin{cases} \tilde{\varphi}_k(x) & \text{for } x \in [k-1, k),\ k \in \mathbb{N}, \\ \infty & \text{for } x = \infty \end{cases}$$

with $\tilde{\varphi}_k$ as in Example 2.2.15. Here is a schematic picture of $(K; \varphi)$.



Then for $n \in \mathbb{N}_0$ the superorbit of degree n is

$$\operatorname{sorb}_n(x) = \begin{cases} [0, n+1) & \text{for } x \in [0, n+1), \\ \{\infty\} & \text{for } x = \infty \end{cases}$$

and

$$\operatorname{sorb}_n(x) \subseteq [n+1, \infty) \text{ for } x \in [n+1, \infty).$$

Hence $\operatorname{sorb}_n(x) \neq K$ for all $x \in K$ and $n \in \mathbb{N}_0$ which implies that the corresponding quotient space $K/{\sim_n}$ contains more than one element. Thus, it does not correspond to the fixed factor L, which is a singleton since $\dim \operatorname{fix} T_\varphi = 1$.

Superorbits of non-finite degree

Because superorbits of arbitrary finite degree do not, in general, yield a Hausdorff quotient space, we introduce superorbits of non-finite degree using ordinal numbers. We propose the following definition, where ω denotes the first non-finite ordinal number (see, e. g., Dugundji [17, Definition 6.1]).

Definition 2.2.17. For any $x \in K$ the *approximating orbit of x of degree ω* is

$$\mathrm{aorb}_\omega(x) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{sorb}_n(x),$$

and the *superorbit of x of degree ω* is

$$\mathrm{sorb}_\omega(x) := [x]_\omega = \bigcup_{\substack{y\in K,\\ y\sim_\omega x}} \mathrm{aorb}_\omega(y),$$

where $\sim_\omega$ is the equivalence relation generated by $(\mathrm{aorb}_\omega(x))_{x\in K}$.

By Proposition 2.2.14, the following necessary assumptions for the characterization of the fixed factor are satisfied for this equivalence relation (cf. (i) and (ii) of Lemma 2.1.3).

Proposition 2.2.18. *For each $x \in K$ we have that*

(a) $\varphi(x) \sim_\omega x$ and

(b) the superorbit $\mathrm{sorb}_\omega(x)$ of degree ω is a level set of $\operatorname{fix} T_\varphi$.

Even superorbits of degree ω do not, in general, yield a Hausdorff quotient space as the following example shows.

Example 2.2.19. Let again $K := [0,\infty]$ be the one-point compactification of $[0,\infty)$ and $\tilde{K} := [0,1]$. Consider the system $(K;\varphi)$ as in Example 2.2.16 and the isomorphic system

$$\tilde{\varphi}\colon \tilde{K} \to \tilde{K}, \quad \tilde{\varphi} := h \circ \varphi \circ h^{-1}$$

for a homeomorphism $h\colon K \to \tilde{K}$ with $h(0) = 0$ and $h(\infty) = 1$. Analogously to Example 2.2.15, we construct a system $(K;\psi)$ via

$$\psi\colon K \to K, \quad x \mapsto \begin{cases} \tilde{\varphi}(x-n)+n & \text{for } x \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{N}_0, \\ \infty & \text{for } x = \infty, \end{cases}$$

by putting copies of the compressed system in a row. Then the fixed factor L is a singleton, while $\mathrm{sorb}_\omega(x) \neq K$ for all $x \in K$, thus the corresponding quotient space $K/{\sim_\omega}$ contains more than one point.

2.3 Characterization of the fixed space via transfinite superorbits

To achieve our goal to characterize the fixed space $\operatorname{fix} T_\varphi$ dynamically, we need superorbits for arbitrary ordinal numbers. We define the base case, successor case and limit case analogously to Definitions 2.2.12 and 2.2.17. The class of ordinal numbers is denoted by Ord.

Definition 2.3.1. Let $x \in K$.

Base case:

(i) The *approximating orbit of x of degree 0* is

$$\mathrm{aorb}_0(x) := \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{U}(x) \text{ closed,} \\ \varphi(U) \subseteq U}} U.$$

(ii) Let $\sim_0$ be the equivalence relation on K generated by $(\mathrm{aorb}_0(x))_{x \in K}$. The *superorbit of x of degree 0* is

$$\mathrm{sorb}_0(x) := [x]_0 = \bigcup_{\substack{y \in K, \\ y \sim_0 x}} \mathrm{aorb}_0(y).$$

Successor case:

(i) Let $\gamma \in \mathrm{Ord}$ be a successor. Then the *approximating orbit of degree γ* is

$$\mathrm{aorb}_\gamma(x) := \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{U}(x) \text{ open,} \\ \mathrm{sorb}_{\gamma-1}(U) \subseteq U}} \overline{U}^{\mathrm{sorb}_{\gamma-1}}$$

where $\mathrm{sorb}_{\gamma-1}(U) := \bigcup_{y \in U} \mathrm{sorb}_{\gamma-1}(y)$ and

$$\overline{U}^{\mathrm{sorb}_{\gamma-1}} := \bigcap_{\substack{U \subseteq F \text{ closed,} \\ \mathrm{sorb}_{\gamma-1}(F) \subseteq F}} F \tag{2.2}$$

denotes the $\mathrm{sorb}_{\gamma-1}$*-closure of U*.

(ii) As before let $\sim_\gamma$ be the equivalence relation on K generated by $(\mathrm{aorb}_\gamma(x))_{x\in K}$. Finally, the *superorbit of x of degree γ* is

$$\mathrm{sorb}_\gamma(x) := [x]_\gamma = \bigcup_{\substack{y\in K,\\ y\sim_\gamma x}} \mathrm{aorb}_\gamma(y).$$

Limit case:

Let $0 \neq \gamma \in \mathrm{Ord}$ be a limit ordinal. Then the *approximating orbit of x of degree γ* is

$$\mathrm{aorb}_\gamma(x) := \bigcup_{\beta<\gamma} \mathrm{sorb}_\beta(x) = \bigcup_{\substack{\beta<\gamma,\\ y\in K, y\sim_\beta x}} \mathrm{aorb}_\beta(x) = \bigcup_{\substack{\beta<\gamma,\\ y\in K, y\sim_\beta x}} \mathrm{sorb}_\beta(x).$$

The equivalence relation $\sim_\gamma$ on K and the superorbit $\mathrm{sorb}_\gamma(x)$ of degree γ are defined as in the successor case,

$$\mathrm{sorb}_\gamma(x) := [x]_\gamma = \bigcup_{\substack{y\in K,\\ y\sim_\gamma x}} \mathrm{aorb}_\gamma(y).$$

Before proving that superorbits of arbitrary degree are level sets, we list some basic properties by analogy with Proposition 2.2.13.

Proposition 2.3.2. *Let $\beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$ with $\beta \leq \gamma$ and $U \subseteq K$.*

(a) For all $x, y \in K$ with $y \sim_\gamma x$ we have

$$\mathrm{aorb}_\gamma(y) \subseteq \mathrm{sorb}_\gamma(x),$$
$$\mathrm{sorb}_\gamma(y) \subseteq \mathrm{aorb}_{\gamma+1}(x)$$

and

$$\mathrm{aorb}_\beta(y) \subseteq \mathrm{aorb}_\gamma(x),$$
$$\mathrm{sorb}_\beta(y) \subseteq \mathrm{sorb}_\gamma(x).$$

In particular, these inclusions hold true for $x = y$.

(b) For all $x \in K$ we have that $\mathrm{aorb}_\gamma(x)$ and $\mathrm{sorb}_\gamma(x)$ are φ-invariant.

(c) The following assertions are equivalent.

(i) $\mathrm{sorb}_\gamma(U) \subseteq U$.

(ii) $\mathrm{sorb}_\gamma(U) = U$.

(iii) There is some $M \subseteq K$ such that $U = \bigcup_{y\in M} \mathrm{sorb}_\gamma(y)$.

Proof. Take $x, y \in K$ with $x \sim_\gamma y$. The inclusions $\operatorname{aorb}_\gamma(y) \subseteq \operatorname{sorb}_\gamma(x)$ and $\operatorname{sorb}_\gamma(y) \subseteq \operatorname{aorb}_{\gamma+1}(x)$ in (a) are clear by definition. We show $\operatorname{sorb}_\beta(y) \subseteq \operatorname{sorb}_\gamma(x)$ for all $\beta \leq \gamma$ using transfinite induction. For $\gamma = 0$ the statement is trivial. For $\gamma \in \mathrm{Ord}$ assume $\operatorname{sorb}_\beta(y) \subseteq \operatorname{sorb}_\gamma(x)$ for all $\beta \leq \gamma$. We show $\operatorname{sorb}_\beta(y) \subseteq \operatorname{sorb}_{\gamma+1}(x)$ for all $\beta \leq \gamma + 1$. This follows immediately from

$$\operatorname{sorb}_\gamma(y) \subseteq \operatorname{aorb}_{\gamma+1}(y) \subseteq \operatorname{sorb}_{\gamma+1}(x).$$

Now let γ be a limit and $\beta < \gamma$. Then $\operatorname{sorb}_\beta(y) \subseteq \operatorname{sorb}_\gamma(x)$ by the definition of $\operatorname{sorb}_\gamma(x)$.

Similarly, one can show $\operatorname{aorb}_\beta(y) \subseteq \operatorname{aorb}_\gamma(x)$ for all $\beta \leq \gamma$.

To show (b) we use again transfinite induction. For $\gamma = 0$ or $\gamma \in \mathrm{Ord}$ a successor, see the proof of Proposition 2.2.13. For $\gamma \in \mathrm{Ord}$ a limit, the assertion follows by definition directly from the induction hypothesis. (c) can be proved by analogy with Proposition 2.2.13. $\square$

We now show that the necessary conditions (i) and (ii) of Lemma 2.1.3 hold for all superorbits (of transfinite order).

Proposition 2.3.3. *For each $\gamma \in \mathrm{Ord}$ and $x \in K$ we have that*

(a) $\varphi(x) \sim_\gamma x$ and

(b) the superorbit $\operatorname{sorb}_\gamma(x)$ of degree γ is a level set of $\operatorname{fix} T_\varphi$.

Proof. We use transfinite induction. For the base case $\gamma = 0$ see Proposition 2.2.8. If $\gamma \in \mathrm{Ord}$ is a successor, the proof works analogously to Proposition 2.2.14. Let thus $\gamma \in \mathrm{Ord}$ be a limit. Clearly, $\varphi(x) \sim_\gamma x$ for all $x \in K$. Assume that $\operatorname{sorb}_\beta(x)$ is a level set of T_φ for all $x \in K$, $\beta < \gamma$. Then $\operatorname{sorb}_\gamma(x)$ is a level set of T_φ by definition and Proposition 2.3.2 (a). $\square$

The next proposition is crucial for the proof of our main Theorem 2.3.6. It shows that an approximating orbit corresponds to the intersection of closed neighborhoods in the quotient space.

Proposition 2.3.4. *If $x \in K$, $\gamma \in \mathrm{Ord}$ a successor and $\pi_\gamma \colon K \to K/{\sim_\gamma}$ the canonical projection, then*

$$\pi_\gamma\left(\operatorname{aorb}_{\gamma+1}(x)\right) = \bigcap_{\substack{U_\sim \in \mathcal{U}([x]_\gamma) \\ \text{closed}}} U_\sim$$

and

$$\pi_\gamma^{-1}\left(\bigcap_{\substack{U_\sim\in\mathcal{U}([x]_\gamma)\\ \textit{closed}}} U_\sim\right) = \operatorname{aorb}_{\gamma+1}(x).$$

Proof. Since π_γ is surjective, it suffices to show the following inclusions:

(a) $\pi_\gamma(\operatorname{aorb}_{\gamma+1}(x)) \subseteq \bigcap_{\substack{U_\sim\in\mathcal{U}([x]_\gamma)\\ \text{closed}}} U_\sim$,

(b) $\pi_\gamma^{-1}\left(\bigcap_{\substack{U_\sim\in\mathcal{U}([x]_\gamma)\\ \text{closed}}} U_\sim\right) \subseteq \operatorname{aorb}_{\gamma+1}(x)$.

By the definition of an approximating orbit and the results obtained in Proposition 2.3.2, we conclude

$$\begin{aligned}
\pi_\gamma\left(\operatorname{aorb}_{\gamma+1}(x)\right) &\overset{2.3.2\ (c)}{=} \pi_\gamma\left(\bigcap_{\substack{U\in\mathcal{U}(x)\text{ open},\\ \operatorname{sorb}_\gamma(U)=U}} \overline{U}^{\operatorname{sorb}_\gamma}\right)\\
&\underset{\operatorname{sorb}_\gamma(\overline{U}^{\operatorname{sorb}_\gamma})=\overline{U}^{\operatorname{sorb}_\gamma}}{\overset{2.2.4}{=}} \pi_\gamma\left(\bigcap_{\substack{U\in\mathcal{U}(x)\text{ open},\\ \operatorname{sorb}_\gamma(U)=U}} \pi_\gamma^{-1}\left(\pi_\gamma(\overline{U}^{\operatorname{sorb}_\gamma})\right)\right)\\
&= \bigcap_{\substack{U\in\mathcal{U}(x)\text{ open},\\ \pi_\gamma^{-1}(\pi_\gamma(U))=U}} \pi_\gamma(\overline{U}^{\operatorname{sorb}_\gamma})\\
&\subseteq \bigcap_{U_\sim\in\mathcal{U}([x]_\gamma)\text{ closed}} U_\sim
\end{aligned}$$

which proves (a).

To show (b), let

$$[z]_\gamma \in \bigcap_{U_\sim\in\mathcal{U}([x]_\gamma)\text{ closed}} U_\sim.$$

Since $\operatorname{sorb}_\gamma(z) = [z]_\gamma = \pi_\gamma^{-1}([z]_\gamma)$, we show $\operatorname{sorb}_\gamma(z) \subseteq \operatorname{aorb}_{\gamma+1}(x)$. By the definition of $\operatorname{aorb}_{\gamma+1}(x)$ it suffices to show $\operatorname{sorb}_\gamma(z) \subseteq \overline{U}^{\operatorname{sorb}_\gamma}$ for $U \in \mathcal{U}(x)$ open with $\operatorname{sorb}_\gamma(U) \subseteq U$.

We now move to the quotient space and define

$$V_\sim := \pi_\gamma(\overline{U}^{\mathrm{sorb}_\gamma}) := \left\{\pi_\gamma(y) \colon y \in \overline{U}^{\mathrm{sorb}_\gamma}\right\}.$$

To show $V_\sim \in \mathcal{U}([x]_\gamma)$, we check the following.

(i) $[x]_\gamma \in V_\sim$ and

(ii) there is some subset $W_\sim \subseteq V_\sim$ which is open in $K/{\sim_\gamma}$ and $[x]_\gamma \in W_\sim$.

We have $\pi_\gamma^{-1}([x]_\gamma) = \mathrm{sorb}_\gamma(x) \subseteq \overline{U}^{\mathrm{sorb}_\gamma}$ since $x \in \overline{U}^{\mathrm{sorb}_\gamma}$ and $\mathrm{sorb}_\gamma(\overline{U}^{\mathrm{sorb}_\gamma}) \subseteq \overline{U}^{\mathrm{sorb}_\gamma}$. Therefore, $\{[x]_\gamma\} = \pi_\gamma(\pi_\gamma^{-1}([x]_\gamma)) \subseteq \pi_\gamma(\overline{U}^{\mathrm{sorb}_\gamma}) = V_\sim$, hence $[x]_\gamma \in V_\sim$ showing (i).

Define

$$W_\sim := \pi_\gamma(U).$$

Then $U \subseteq \overline{U}^{\mathrm{sorb}_\gamma}$ implies $W_\sim = \pi_\gamma(U) \subseteq \pi_\gamma(\overline{U}^{\mathrm{sorb}_\gamma}) = V_\sim$.

Furthermore, $W_\sim$ is open with respect to the quotient topology since

$$\pi_\gamma^{-1}(W_\sim) = \pi_\gamma^{-1}(\pi_\gamma(U)) = \mathrm{sorb}_\gamma(U) \overset{2.3.2\,(c)}{=} U$$

is open. Clearly, $[x]_\gamma \in W_\sim$. This shows (ii).

Analogously, we see $\pi_\gamma^{-1}(V_\sim) = \overline{U}^{\mathrm{sorb}_\gamma}$. Hence $V_\sim$ is closed with respect to the quotient topology.

Summarizing, we obtain $V_\sim \in \mathcal{U}([x]_\gamma)$ and $V_\sim$ closed, hence $[z]_\gamma \in V_\sim$ by assumption. This implies $\mathrm{sorb}_\gamma(z) = \pi_\gamma^{-1}([z]_\gamma) \subseteq \pi_\gamma^{-1}(V_\sim) = \overline{U}^{\mathrm{sorb}_\gamma}$ which proves assertion (b).

$\square$

To obtain a Hausdorff quotient space corresponding to the fixed factor L, the process of building superorbits must become stationary.

Theorem 2.3.5. *There is some ordinal number* $\gamma \in \mathrm{Ord}$ *such that* $\mathrm{sorb}_\gamma(x) = \mathrm{sorb}_{\gamma+1}(x)$ *for all* $x \in K$.

Proof. For all $\beta \in \mathrm{Ord}$ we have $|\{\mathrm{sorb}_\alpha(x) \colon x \in K, \alpha \leq \beta\}| \leq |\mathfrak{P}(K)|$ for the power set $\mathfrak{P}(K)$ of K. Moreover, by Proposition 2.3.2 (a), if $\mathrm{sorb}_\alpha(x) = \mathrm{sorb}_{\alpha+1}(x)$ for some $\alpha \in \mathrm{Ord}$ and some $x \in K$, then $\mathrm{sorb}_\alpha(x) = \mathrm{sorb}_{\alpha'}(x)$ for all $\alpha' \in \mathrm{Ord}$ with $\alpha \leq \alpha'$. This implies for some $\gamma \in \mathrm{Ord}$ with $|\gamma| > |\mathfrak{P}(K)|$ that $\mathrm{sorb}_\gamma(x) = \mathrm{sorb}_{\gamma+1}(x)$ for all $x \in K$. □

We can now describe the fixed space of T_φ in terms of $(K;\varphi)$.

Theorem 2.3.6. *Let* $\mathrm{fix}\, T_\varphi \cong \mathrm{C}(L)$ *for a compact Hausdorff space* L. *Then* L *is homeomorphic to* $K/{\sim_\alpha}$ *for some* $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

Proof. Choose $\alpha \in \mathrm{Ord}$ such that $\mathrm{sorb}_\alpha(x) = \mathrm{sorb}_{\alpha+1}(x)$ for all $x \in K$ (see Theorem 2.3.5) and assume, without loss of generality, that α is a successor. By Proposition 2.1.1 and Theorem 2.1.3 it remains to show that $K/{\sim_\alpha}$ is Hausdorff, i. e.,

$$\{[x]_\alpha\} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}([x]_\alpha) \text{ closed}} U$$

for all $x \in K$ (see Lemma 2.2.2). To do so, let

$$[z]_\alpha \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}([x]_\alpha) \text{ closed}} U.$$

As seen in the proof of Proposition 2.3.4 we have

$$\mathrm{sorb}_\alpha(z) \subseteq \mathrm{aorb}_{\alpha+1}(x).$$

Consequently,

$$\mathrm{sorb}_\alpha(z) \subseteq \mathrm{aorb}_{\alpha+1}(x) \overset{\text{2.3.2 (a)}}{\subseteq} \mathrm{sorb}_{\alpha+1}(x) = \mathrm{sorb}_\alpha(x).$$

This implies $\mathrm{sorb}_\alpha(z) \subseteq \mathrm{sorb}_\alpha(x)$ and hence $\mathrm{sorb}_\alpha(z) = \mathrm{sorb}_\alpha(x)$ since $\sim_\alpha$ is an equivalence relation. Therefore, also $[z]_\alpha = \pi(\mathrm{sorb}_\alpha(z)) = \pi(\mathrm{sorb}_\alpha(x)) = [x]_\alpha$ which shows that $K/{\sim_\alpha}$ is Hausdorff. □

From this, we obtain a characterization of a one-dimensional fixed space of T_φ in terms of its underlying dynamical system $(K;\varphi)$.

Definition 2.3.7. We call a topological dynamical system $(K;\varphi)$ *topologically ergodic* if there is some $x \in K$ and $\gamma \in \mathrm{Ord}$ such that

$$K = \mathrm{sorb}_\gamma(x).$$

Theorem 2.3.8. *The fixed space of T_φ is one-dimensional if and only if $(K;\varphi)$ is topologically ergodic.*

Remark 2.3.9. (a) Topological ergodicity is a global property depending on the dynamical behavior of φ on the entire space K.

Recall that a measure-preserving dynamical system $(\Omega, \Sigma, \mu; \varphi)$ is *ergodic* if and only if the fixed space

$$\operatorname{fix} T_\varphi := \left\{ f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu) \colon T_\varphi f = f \right\}$$

of the corresponding Koopman operator on $\mathrm{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ is one-dimensional. This motivates our choice of terminology even if there exist other meanings of "topological ergodicity", compare, e. g., Frick, Petersen & Shields [23], Petersen [45, Chapter 4, Section 4.2 B] or Vries [51, Chapter 1, Section 1.3].

Remark 2.3.10. (a) In continuous-time dynamical systems there is a transfinite construction yielding so-called *prolongations* (cf., e. g., Auslander & Seibert [5], Bhatia & Szegö [9, Chapter 1, Section 1.4 and Chapter 2, Section 2.13] or Ura [50]). These are – if adapted to the discrete-time setting – different from approximating orbits and superorbits as can be seen from Example 2.2.10. Here, we have for the first prolongation

$$\mathcal{D}_1(x) := \operatorname{aorb}_0(x) = \begin{cases} \{(c,0) \colon c \in [a,1]\} & \text{if } x = (a,0) \text{ for some} \\ & a \in [0,1], \\ \overline{\operatorname{orb}}(x) & \text{elsewhere} \end{cases}$$

and for the second prolongation

$$\mathcal{D}_2(x) := \bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_1^n(U)} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} \mathcal{D}_1(U) = \mathcal{D}_1(x)$$

for all $x \in K$ because $\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1(U)) = \mathcal{D}_1(U)$ and $\mathcal{D}_1(U)$ is closed for all $U \in \mathcal{U}(x)$. This implies that all prolongations of higher degree are equal to $\mathcal{D}_1(x)$ for all $x \in K$, while $\dim \operatorname{fix} T_\varphi = 1$. Hence the decomposition induced by $\operatorname{fix} T_\varphi$ is not obtained by the prolongations.

Also *chain prolongations* (see, e. g., Ding [16]) are in general different from our superorbits.

(b) By a completely different approach, Akin and Wiseman in Akin & Wiseman [2, Theorem 7.11] also obtain the equivalence relation $\sim_\alpha$ but do not relate it to the fixed space of the Koopman operator.

2.4 Lyapunov stability of higher order

In the previous sections we worked out how to dynamically obtain the decomposition of K induced by the fixed space $\operatorname{fix} T_\varphi$. As will be shown now, the fixed space does not only give a disjoint union of K into closed and φ-invariant but even "stable" sets. For this purpose we suggest a hierarchy of stability notions which are closely linked to the fixed space $\operatorname{fix} T_\varphi$ of a Koopman operator T_φ.

A closed and φ-invariant set $M \subseteq K$ is *stable in the sense of Lyapunov* if for all $U \in \mathcal{U}(M)$ there is some $V \in \mathcal{U}(M)$ such that

$$\varphi^n(V) \subseteq U$$

for all $n \geq 0$ (cf. Section 3.1 of the next chapter). The following characterization is shown in Lemma 3.1.9.

Lemma 2.4.1. *A closed and φ-invariant set $M \subseteq K$ is Lyapunov stable if and only if it is the intersection of its φ-invariant neighborhoods, i. e.,*

$$M = \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{U}(M),\\ \varphi(U) \subseteq U}} U.$$

As the next proposition shows the fixed space induces a decomposition of K into Lyapunov stable sets.

Proposition 2.4.2. *Each maximal level set of $\operatorname{fix} T_\varphi$ is Lyapunov stable.*

Proof. If $M \subseteq K$ is a maximal level set of $\operatorname{fix} T_\varphi$ then by Remark 2.1.2 (b) there is some $l_0 \in L$ such that $M = p^{-1}(\{l_0\})$ with $p\colon K \to L$ the factor map onto the fixed factor L. Note that for each $U \in \mathcal{U}(l_0)$ we have $p^{-1}(U) \in \mathcal{U}(M)$ and $p^{-1}(U) = \bigcup_{l \in U} p^{-1}(\{l\})$. In particular, $p^{-1}(U)$ is a union of maximal level sets and hence φ-invariant. Since L is Hausdorff we have

$$\{l_0\} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}(l_0)} U$$

yielding

$$M = \bigcap_{U \in \mathcal{U}(l_0)} p^{-1}(U).$$

This implies that M is the intersection of its φ-invariant neighborhoods and thus Lyapunov stable. □

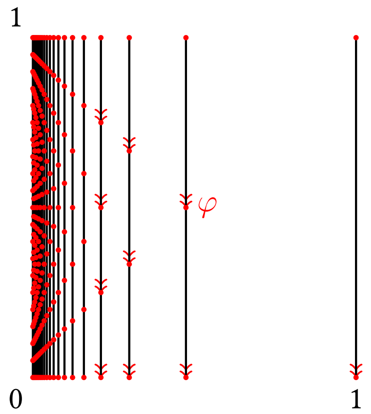
However, it may happen that there exist finer decompositions into Lyapunov stable sets as the following example shows.

Example 2.4.3. Take

$$K := \left\{\left(\tfrac{1}{n}, c\right) : n \in \mathbb{N},\ c \in [0,1]\right\} \cup \{(0,c) : c \in [0,1]\}$$

with the subspace topology of $\mathbb{R}^2$ and the dynamics φ given for $x \in K$ by

$$\varphi(x) := \begin{cases} \left(\frac{1}{n}, n\left(c - \frac{m}{n}\right)^2 + \frac{m}{n}\right) & \text{for } x = \left(\frac{1}{n}, c\right) \text{ with } c \in [\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}] \text{ for some} \\ & n \in \mathbb{N} \text{ and } m \in \{0, \dots, n\}, \\ (0,c) & \text{for } x = (0,c) \text{ with } c \in [0,1]. \end{cases}$$



Here, the decomposition of K induced by the fixed space $\operatorname{fix} T_\varphi$ is

$$K = \dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} \left\{\left(\tfrac{1}{n}, c\right) : c \in [0,1]\right\} \,\dot{\cup}\, \{(0,c) : c \in [0,1]\}.$$

However, there is a finer decomposition into Lyapunov stable sets since $\{(0,c)\}$ is Lyapunov stable for each $c \in [0,1]$.

To explain the difference between these decompositions, we use our concept of superorbits from Section 2.2 and 2.3 to generalize Lyapunov stability to a hierarchy of stability notions. This can produce decompositions of K which are coarser than a decomposition into Lyapunov stable sets but finer than the decomposition induced by $\operatorname{fix} T_\varphi$.

Definition 2.4.4. (a) A set $M \subseteq K$ is called *Lyapunov stable of degree* α for some $\alpha \in \mathrm{Ord}$ if

$$M = \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{U}(M) \text{ open}, \\ \mathrm{sorb}_\alpha(U) \subseteq U}} \overline{U}^{\mathrm{sorb}_\alpha}.$$

(b) A set $M \subseteq K$ is called *absolutely Lyapunov stable* if M is Lyapunov stable of degree α for all $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

Remark 2.4.5. If a set M is Lyapunov stable of degree α, then it is Lyapunov stable of degree β for all $\beta \leq \alpha$.

Lemma 2.4.6. *Let* $M \subseteq K$ *and* $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

(a) If M *is Lyapunov stable and* $x \in M$*, then also* $\mathrm{aorb}_0(x) \subseteq M$ *and* $\mathrm{sorb}_0(x) \subseteq M$*.*

(b) If M *is Lyapunov stable of degree* α *and* $x \in M$*, then also* $\mathrm{aorb}_{\alpha+1}(x) \subseteq M$ *and* $\mathrm{sorb}_{\alpha+1}(x) \subseteq M$*.*

Proof. It suffices to show the assertions for the approximating orbits. We have

$$\mathrm{aorb}_0(x) = \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{U}(x) \text{ closed}, \\ \varphi(U) \subseteq U}} U \subseteq \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{U}(M) \text{ closed}, \\ \varphi(U) \subseteq U}} U = \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{U}(M), \\ \varphi(U) \subseteq U}} U = M$$

since K is a Hausdorff space yielding (a). Assertion (b) follows by definition from

$$\mathrm{aorb}_{\alpha+1}(x) = \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{U}(x) \text{ open}, \\ \mathrm{sorb}_\alpha(U) \subseteq U}} \overline{U}^{\mathrm{sorb}_\alpha} \subseteq \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{U}(M) \text{ open}, \\ \mathrm{sorb}_\alpha(U) \subseteq U}} \overline{U}^{\mathrm{sorb}_\alpha} = M.$$

□

Remark 2.4.5 and Lemma 2.4.6 yield the following result.

Theorem 2.4.7. *The finest decomposition into absolutely Lyapunov stable sets is induced by* $\mathrm{fix}\, T_\varphi$*.*

Proof. We first show that the maximal level sets of $\operatorname{fix} T_\varphi$ are absolutely Lyapunov stable. By Remark 2.4.5 it suffices to show that a maximal level set M is Lyapunov stable of degree α where $L \cong K/{\sim_\alpha}$ for the fixed factor L. Let $x \in K$ such that $M = \pi^{-1}([x])$ where $\pi\colon K \to K/{\sim_\alpha}$ denotes the canonical projection.

Note that for any open $V \in \mathcal{U}([x])$ also $U := \pi^{-1}(V)$ is open and $\operatorname{sorb}_\alpha(U) = U$ because of $\operatorname{sorb}_\alpha(U) = \pi^{-1}(\pi(U))$. Moreover,

$$\overline{U}^{\operatorname{sorb}_\alpha} = \overline{\pi^{-1}(V)}^{\operatorname{sorb}_\alpha} = \bigcap_{\substack{F \text{ closed},\\ \pi^{-1}(V)\subseteq F,\\ \operatorname{sorb}_\alpha(F)\subseteq F}} F \overset{F:=\pi^{-1}(\overline{V})}{\subseteq} \pi^{-1}(\overline{V}).$$

From this we obtain that

$$\begin{aligned}\bigcap_{\substack{U\in\mathcal{U}(M) \text{ open},\\ \operatorname{sorb}_\alpha(U)\subseteq U}} \overline{U}^{\operatorname{sorb}_\alpha} &\subseteq \bigcap_{V\in\mathcal{U}([x]) \text{ open}} \overline{\pi^{-1}(V)}^{\operatorname{sorb}_\alpha} \subseteq \bigcap_{V\in\mathcal{U}([x]) \text{ open}} \pi^{-1}(\overline{V})\\ &= \pi^{-1}\left(\bigcap_{V\in\mathcal{U}([x]) \text{ open}} \overline{V}\right) \overset{K/{\sim_\alpha} \text{ Hausdorff}}{=} \pi^{-1}([x]) = M.\end{aligned}$$

Together with the converse inclusion

$$M \subseteq \bigcap_{\substack{U\in\mathcal{U}(M) \text{ open},\\ \operatorname{sorb}_\alpha(U)\subseteq U}} \overline{U}^{\operatorname{sorb}_\alpha}$$

we obtain that M is Lyapunov stable of degree α.

That there is no finer decomposition into absolutely Lyapunov stable sets follows from Lemma 2.4.6 because a finer decomposition contradicts $\operatorname{sorb}_{\alpha+1}(x) \subseteq M'$ for $x \in M'$ with $M' \subseteq K$ Lyapunov stable of degree α. $\square$

As a final result, we link absolute Lyapunov stability and topological ergodicity.

Theorem 2.4.8. *A topological dynamical system $(K;\varphi)$ is topologically ergodic if and only if there is no nontrivial decomposition of K into absolutely Lyapunov stable sets.*

3 The Lyapunov algebra

In the following, let $(K;\varphi)$ be a metric topological dynamical system with corresponding Koopman system $(\mathrm{C}(K);T_\varphi)$ restricted to the real-valued functions $\mathrm{C}(K;\mathbb{R})$ only. Having discussed fixed functions of T_φ in Chapter 2, now *subfixed functions of the Koopman operator* are considered, i. e., positive functions $f \in \mathrm{C}(K)$ satisfying

$$T_\varphi f \leq f.$$

In this chapter, a subalgebra of $\mathrm{C}(K)$ is constructed from these functions and we discuss which information on $(K;\varphi)$ can be gained from this *subfixed algebra*.

Before doing so, some preliminaries from the theory of topological dynamical systems are collected.

3.1 Recurrence and attractivity

We start by recalling several kinds of "recurrent" dynamical behavior leading to important φ-invariant subsets of K.

Definition 3.1.1. A point $x \in K$ is called a

(a) *fixed point* if

$$\varphi(x) = x.$$

The set of all fixed points is denoted by $\operatorname{fix}\varphi$.

(b) *periodic point* if there is some $N \in \mathbb{N}$ such that

$$\varphi^N(x) = x.$$

The periodic points are collected in the set $\operatorname{per}\varphi$.

(c) *almost periodic point* if for every open $U \in \mathcal{U}(x)$ there is some $N \in \mathbb{N}$ such that
$$\{m \in \mathbb{N} \colon \varphi^m(x) \in U\} \cap [n, n+N] \neq \emptyset$$
for all $n \in \mathbb{N}$. Denote the set of almost periodic points by $\operatorname{ap}\varphi$.

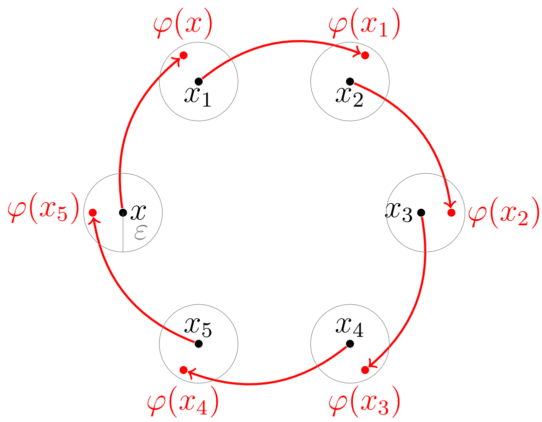
(d) *recurrent point* if for every $U \in \mathcal{U}(x)$ there is some $n \in \mathbb{N}$ such that
$$\varphi^n(x) \in U.$$
The set of all recurrent points is $\operatorname{rec}\varphi$.

(e) *nonwandering point* if for each $U \in \mathcal{U}(x)$ and $N \in \mathbb{N}$ there is some $n \geq N$ such that
$$\varphi^n(U) \cap U \neq \emptyset.$$
The *nonwandering set* consisting of these points is denoted by $\operatorname{nw}\varphi$.

Now take $\varepsilon > 0$ and $y \in K$. An *ε-chain* (or *ε-pseudo orbit*) from x to y is a sequence $x_0, \ldots, x_k \in K$, $k \in \mathbb{N}$, with $x_0 = x$ and $x_k = y$ such that $d(\varphi(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ for all $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ where d denotes the metric on K. Then call x a

(f) *chain recurrent point* if for every $\varepsilon > 0$ there is an ε-chain from x to x. All chain recurrent points are collected in the *chain recurrent set* $\operatorname{cr}\varphi$.

Remark 3.1.2. (a) An ε-pseudo orbit can be thought of as an orbit which is slightly perturbed after each iteration of φ. Below is a schematic picture of an ε-pseudo orbit from $x \in K$ back to itself.



(b) An equivalence relation $\sim$ on the chain recurrent set $\operatorname{cr}\varphi$ can be defined via $x \sim y$ for $x, y \in \operatorname{cr}\varphi$ if for each $\varepsilon > 0$ there is some ε-chain from x to y and another ε-chain from y to x. The equivalence classes are called *chain components.*

Proposition 3.1.3. *(a) All sets defined in Definition 3.1.1 are φ-invariant.*

(b) The sets $\operatorname{fix}\varphi$, $\operatorname{nw}\varphi$ and $\operatorname{cr}\varphi$ are closed.

For the closedness of $\operatorname{cr}\varphi$ we refer to ALONGI & NELSON [3, Proposition 2.7.10]. We now turn to the limit points of orbit closures yielding other important φ-invariant sets.

Definition 3.1.4. For $x \in K$ define the *ω-limit set of x* as

$$\omega(x) := \bigcap_{N \in \mathbb{N}_0} \overline{\{\varphi^n(x) \colon n \geq N\}}.$$

All ω-limit sets are collected in the *ω-limit set of φ*,

$$\omega\,\varphi := \overline{\bigcup_{x \in K} \omega(x)}.$$

Remark 3.1.5. For each $x \in K$, the ω-limit set $\omega(x)$ is closed and φ-invariant and so is the ω-limit set $\omega\,\varphi$ of φ.

For the φ-invariant subsets of K defined so far, the following inclusions hold true.

Proposition 3.1.6. *We always have*

$$\operatorname{fix}\varphi \subseteq \operatorname{per}\varphi \subseteq \operatorname{ap}\varphi \subseteq \operatorname{rec}\varphi \subseteq \omega\,\varphi \subseteq \operatorname{nw}\varphi \subseteq \operatorname{cr}\varphi.$$

Proof. Clearly, $\operatorname{fix}\varphi \subseteq \operatorname{per}\varphi \subseteq \operatorname{ap}\varphi \subseteq \operatorname{rec}\varphi$ and since a point $x \in K$ is recurrent if and only if $x \in \omega(x)$, we obtain $\operatorname{rec}\varphi \subseteq \omega\,\varphi$.

Now take $x \in \omega(y)$ for some $y \in K$ and $U \in \mathcal{U}(x)$. Then there are $n_i \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}_0$, such that $\varphi^{n_i}(y) \in U$ and $\varphi^{n_i}(y) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$. For $N \geq 0$ take $n_i \neq n_j$ with $N \leq n_i < n_j$. Then $\varphi^n(\varphi^{n_i}(y)) \in U$ for $n := n_j - n_i$ yielding that $\varphi^n(U) \cap U \neq \emptyset$, hence x is nonwandering.

To show $\operatorname{nw}\varphi \subseteq \operatorname{cr}\varphi$ take $x \in \operatorname{nw}\varphi$. For each $\varepsilon > 0$ there is some $n \in \mathbb{N}$ such that $\varphi^n(B_\varepsilon(x)) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ for the ε-ball $B_\varepsilon(x)$ around x. Then $x, \varphi(x), \ldots, \varphi^n(x), x$ defines an ε-chain from x to x. This yields $x \in \operatorname{cr}\varphi$. $\square$

A crucial concept in dynamical systems is that of an *attractive set*, which is, broadly speaking, a part of the state space to which the dynamics converges in some sense. A wide range of definitions have been proposed and explored such as in Lyapunov [36], Bhatia & Szegö [9], Conley [11] or Milnor [39] to name a few. The following compilation of different kinds of attractivity can be found in Kühner [31, Part I, Chapter 3, Section 3.2] for continuous-time dynamical systems.

Definition 3.1.7. A closed and φ-invariant non-empty set $A \subseteq K$ is called

(a) *absorbing* if there is some $N \in \mathbb{N}$ such that $\varphi^N(K) \subseteq A$.

(b) *pointwise absorbing* if for each $x \in K$ there exists $n \in \mathbb{N}_0$ such that $\varphi^n(x) \in A$.

(c) *uniformly attractive* if for all $U \in \mathcal{U}(A)$ there is some $N \in \mathbb{N}_0$ such that

$$\varphi^N(K) \subseteq U.$$

(d) *pointwise attractive* if for all $U \in \mathcal{U}(A)$ and all $x \in K$ there is some $N \in \mathbb{N}_0$ such that

$$\varphi^n(x) \in U$$

for all $n \geq N$.

(e) *center of attraction* if

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|\{n \in \{0, ..., N-1\} \colon \varphi^n(x) \in U\}|}{N} = 1$$

for all $U \in \mathcal{U}(A)$ and $x \in K$.

(f) *stable in the sense of Lyapunov* if for all $U \in \mathcal{U}(A)$ there is some $V \in \mathcal{U}(A)$ such that

$$\varphi^n(V) \subseteq U$$

for all $n \geq 0$.

Remark 3.1.8. For a closed and φ-invariant set $A \subseteq K$ the following implications hold true.

$$\begin{tikzcd}
& \text{uniformly attractive} \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
A \text{ absorbing} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{pointwise attractive} \arrow[r, Rightarrow] & \text{center of attraction} \\
& \text{pointwise absorbing} \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

Stability in the sense of Lyapunov can be characterized as follows (cf. Propositions 3.26 and 4.10 in Kühner [31] for the continuous-time case).

Lemma 3.1.9. *Let $A \subseteq K$ be a non-empty, closed and φ-invariant set. The following are equivalent.*

(a) *A is stable in the sense of Lyapunov.*

(b) *For all $U \in \mathcal{U}(A)$ there is some $V \in \mathcal{U}(A)$ with $V \subseteq U$ and $\varphi^n(V) \subseteq V$ for all $n \in \mathbb{N}_0$.*

(c)
$$A = \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{U}(A), \\ \varphi(U) \subseteq U}} U.$$

Proof. Clearly, (b) $\Rightarrow$ (a) and (b) $\Rightarrow$ (c). To show (a) $\Rightarrow$ (b), take $U, W \in \mathcal{U}(A)$ with $W \subseteq U$ such that $\varphi^n(W) \subseteq U$ for all $n \in \mathbb{N}_0$. Define

$$V := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \varphi^n(W).$$

Then $W \subseteq V \subseteq U$, hence $V \in \mathcal{U}(A)$ and $\varphi^n(V) \subseteq V$. For the proof of (c) $\Rightarrow$ (a) we follow Kühner [31, Part II, Chapter 4, Proposition 4.10]. Note that

$$V_n := \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{U}(A) \text{ inv.}, \\ d(\partial U, A) \leq \frac{1}{n}}} U$$

for $n \in \mathbb{N}$ and the topological boundary ∂U of $U \in \mathcal{U}(A)$ gives

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n.$$

Take some open $U \in \mathcal{U}(A)$ and assume that there is no $n \in \mathbb{N}$ such that $V_n \subseteq U$. Hence for every $n \in \mathbb{N}$ there is $x_n \in V_n \setminus U$ giving a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U^c$. By compactness of U^c there is a convergent subsequence $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ of $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ with

$$\lim_{i\to\infty} x_{n_i} =: x \in U^c.$$

Now take some closed and φ-invariant set $W \in \mathcal{U}(A)$. Then there is $i_0 \in \mathbb{N}$ such that $x_{n_i} \in W$ for all $i \geq i_0$ yielding $x \in W$. Since W was arbitrary, the Hausdorff property of K then implies

$$x \in \bigcap_{\substack{W\in\mathcal{U}(A)\\ \text{closed, inv.}}} W = A.$$

In particular, $x \in U$ which is a contradiction.

□

This yields the following connection between uniform attractiveness, pointwise attractiveness and stability in the sense of Lyapunov (see Theorem 4.11 in Kühner [31] or Bhatia & Szegö [9, Theorem 1.5.28] for continuous-time dynamical systems).

Proposition 3.1.10. *A closed and φ-invariant set $A \subseteq K$ is uniformly attractive if and only if it is pointwise attractive and stable in the sense of Lyapunov.*

Proof. Let A be uniformly attractive. Assume that A is not stable in the sense of Lyapunov. Then there is $U \in \mathcal{U}(A)$ such for all $V \in \mathcal{U}(A)$ with $V \subseteq U$ there exists some $m \in \mathbb{N}_0$ with $\varphi^m(V) \nsubseteq U$. Since K is metric, there are $V_m \subseteq \mathcal{U}(A)$, $m \in \mathbb{N}_0$, with $V_{m+1} \subseteq V_m \subseteq U$ and

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}_0} V_m = A.$$

By assumption, for each $m \in \mathbb{N}_0$ there is $x_m \in V_m$ and $n_m \in \mathbb{N}_0$ with

$$\varphi^{n_m}(x_m) \in U^c.$$

Moreover, there is some subsequence $(m_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ of $\mathbb{N}_0$ with

$$x_{m_i} \xrightarrow{i\to\infty} \overline{x}$$

for some $\overline{x} \in A$. Since A is uniformly attractive, there exists $N \in \mathbb{N}_0$ such that $\varphi^n(K) \subseteq U$ for all $n \geq N$. This implies that $n_m < N$ for all $m \in \mathbb{N}_0$, thus there is $M \in \mathbb{N}_0$ with $n_m = M$ for infinitely many $m \in \mathbb{N}_0$. For these m, $\varphi^{n_m}(x_{n_m}) = \varphi^M(x_{n_m}) \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} \varphi^M(\overline{x}) \in A$. This contradicts $\varphi^{n_m}(x_m) \in U^c$.

Conversely, let A be stable in the sense of Lyapunov and pointwise attractive. Take $U \in \mathcal{U}(A)$. By Lemma 3.1.9 we can assume that U is open and φ-invariant. Since A is pointwise attractive for each $x \in K$, there is some $n_x \in \mathbb{N}_0$ such that $\varphi^n(x) \in U$ for all $n \geq n_x$. By continuity of φ^{n_x} and $\varphi(U) \subseteq U$, there is some open neighborhood $U_x \in \mathcal{U}(x)$ with $\varphi^n(U_x) \subseteq U$ for all $n \geq n_x$. Then $\{U_x \colon x \in K\}$ is an open cover of K, thus by compactness of K there are $x_0, \dots, x_m$, $m \in \mathbb{N}_0$, such that

$$K = \bigcup_{i=0}^{m} U_{x_i}.$$

For $n \geq N \coloneqq \max_{i=0,\dots,n} n_{x_i}$ this yields

$$\varphi^n(K) = \varphi^n(\bigcup_{i=0}^{m} U_{x_i}) = \bigcup_{i=0}^{m} \varphi^n(U_{x_i}) \subseteq U,$$

thus A is uniformly attractive.

□

Proposition 3.1.11. *A closed and φ-invariant set $A \subseteq K$ is pointwise attractive if and only if $\omega\,\varphi \subseteq A$.*

Proof. First, let A be pointwise attractive. Take $x \in K$. Assume there is $y \in \omega(x)\backslash A$. Then $y \in \overline{\{\varphi^n(x) \colon n \geq N\}}$ for all $N \in \mathbb{N}_0$. Let $U \in \mathcal{U}(A)$ be closed such that $y \notin U$. By assumption there is some $N \in \mathbb{N}_0$ such that $\varphi^n(x) \in U$ for all $n \geq N$. Hence $\overline{\{\varphi^n(x) \colon n \geq N\}} \subseteq U$ which contradicts $y \notin U$.

Conversely, let $\omega(x) \subseteq A$ for all $x \in K$. Assume there is some open $U \in \mathcal{U}(A)$ and $x \in K$ such that for all $N \geq 0$ there is some $n_N \geq N$ with $\varphi^{n_N}(x) \in U^c$, i. e., $\{\varphi^{n_N}(x) \colon N \in \mathbb{N}_0\} \cap U = \emptyset$. Since U^c is compact, there is some accumulation point y of $\{\varphi^{n_N}(x) \colon N \in \mathbb{N}_0\}$, hence $y \in \omega(x)$ yielding $y \in A$ by assumption. This is a contradiction because $y \in U^c$ implies $y \notin A$. □

We now turn to centers of attraction as introduced in Definition 3.1.7 (e). Loosely speaking, a center of attraction consists of points to which the dynamics returns "often enough" arbitrarily close. There always exists a center of attraction which is minimal with respect to inclusion, (cf. Diamond, Kloeden & Pokrovskij [14], Sigmund [48] or Hilmy [26]). This can be obtained as follows.

Definition 3.1.12. Define the *minimal center of attraction* as

$$A_{\min} := \bigcap_{\substack{A\subseteq K \text{ closed, } \varphi\text{-inv.,}\\ \text{center of attr.}}} A.$$

Proposition 3.1.13. *The inclusions*

$$\operatorname{ap}\varphi \subseteq A_{min} \subseteq \omega\,\varphi$$

hold true.

Proof. Clearly, $\omega\,\varphi$ is a center of attraction and therefore the minimal center of attraction $A_{\min}$ is contained in $\omega\,\varphi$.

To show $\operatorname{ap}\varphi \subseteq A_{\min}$, let $x \in \operatorname{ap}\varphi$ and assume that $x \notin A_{\min}$. Take some closed neighborhood $U \in \mathcal{U}(A_{\min})$ such that $x \notin U$. Then U^c is an open neighborhood of x, hence there exists some $M \in \mathbb{N}$ such that

$$\{m \in \mathbb{N} \colon \varphi^m(x) \in U^c\} \cap [n, n+M] \neq \emptyset$$

for all $n \in \mathbb{N}$.

Now take $N \in \mathbb{N}$ with $N > M$. By division with remainder there are $a_N \in \mathbb{N}$ and $0 \leq r_N < M$ such that

$$N = a_N \cdot M + r_N$$

yielding

$$|\{n \in \{1,\dots,N-1\} \colon \varphi^n(x) \in U\}| \leq N - a_n.$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
\frac{|\{n \in \{1,\dots,N-1\} \colon \varphi^n(x) \in U\}|}{N} &\leq \frac{N - a_N}{N} \\
&= 1 - \frac{N - r_N}{M \cdot N} \\
&< 1 - \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \\
&< 1.
\end{aligned}$$

In particular,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|\{n \in \{1, ..., N-1\} \colon \varphi^n(x) \in U\}|}{N} \leq 1 - \frac{1}{M} < 1$$

which is a contradiction. $\square$

In general, $A_{\text{min}} \subsetneq \operatorname{rec}\varphi$ and $\operatorname{rec}\varphi \subsetneq A_{\text{min}}$ as can be seen from the next example.

Example 3.1.14. (a) Take

$$K := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

endowed with the product topology and let φ be the left shift on K, hence

$$\varphi\left((x_i)_{i\in\mathbb{N}}\right) = \left((x_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}\right)$$

for all $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K$. Since the periodic points are dense in K, we obtain $A_{min} = K$ while, clearly, not all points in K are recurrent.

(b) Define a point $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ as follows.[1] Let

$$y_0 := (0,1)$$

and, recursively,

$$y_{n+1} := (y_n, y_n, \underbrace{0, ...0}_{l_n^2 \text{ times}}, 1)$$

for $n \in \mathbb{N}_0$ where l_n denotes the length of y_n and satisfies

$$\begin{aligned} l_0 &= 2, \\ l_{n+1} &= 2l_n + l_n^2 + 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Now take

$$x := (\underbrace{\underbrace{\underbrace{0,1}_{y_0}, \underbrace{0,1}_{y_0}, \overbrace{0,0,0,0}^{l_0^2=4}, 1}_{y_1}, \underbrace{\underbrace{0,1}_{y_0}, \underbrace{0,1}_{y_0}, \overbrace{0,0,0,0}^{l_0^2=4}, 1}_{y_1}, \overbrace{0, ..., 0}^{l_1^2=81}, 1}_{y_2}, ...).$$

[1]Many thanks to Nikolai Edeko for the idea to this example.

Denote by φ the left shift on $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ and consider the dynamical system

$$(\overline{\mathrm{orb}}(x); \varphi|_{\overline{\mathrm{orb}}(x)}).$$

Then x is a recurrent point by construction, while

$$A_{\mathrm{min}} = \{\mathbf{0}\}$$

for the nullsequence $\mathbf{0} \coloneqq (0, 0, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. To see this, we need to show that

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|\{n \in \{0, \dots, N-1\} \colon \varphi^n(x') \in U\}|}{N} = 1$$

for all $U \in \mathcal{U}(\mathbf{0})$ and $x' \in K$. Thus, take $U \in \mathcal{U}(\mathbf{0})$ and $x' = (x_i')_{i\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathrm{orb}}(x)$. It suffices to consider a neighborhood basis of $\{\mathbf{0}\}$, hence take

$$U = U_k \coloneqq \{(z_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \colon z_1, \dots, z_k = 0\}$$

for some $k \in \mathbb{N}$.

Note that the orbit closure of x consists of the following parts,

$$\overline{\mathrm{orb}}(x) = \mathrm{orb}(x) \cup \{\mathbf{0}\} \cup \{(z_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \colon \exists!\, j \in \mathbb{N} \text{ such that } z_j = 1\}.$$

If there is at most one $i \in \mathbb{N}$ such that $x_i' = 1$, then, clearly,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|\{n \in \{0, \dots, N-1\} \colon \varphi^n(x') \in U_k\}|}{N} = 1.$$

Thus, let $x' \in \mathrm{orb}(x)$ and without loss of generality $x' = x$. Take $M \in \mathbb{N}$ such that $l_M \geq k$ and consider the subsequence $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of $\mathbb{N}$ where $n_i \coloneqq l_{M+1+i}$ for $i \in \mathbb{N}$. Then we have

$$\begin{aligned}
\limsup_{N\to\infty} \quad & \frac{|\{n \in \{0, \dots, N-1\} \colon \varphi^n(x) \in U_k\}|}{N} \\
\geq \quad & \limsup_{i\to\infty} \frac{|\{n \in \{0, \dots, n_i - 1\} \colon \varphi^n(x) \in U_k\}|}{n_i} \\
\geq \quad & \limsup_{i\to\infty} \frac{|\{n \in \{2l_{M+i}, \dots, l_{M+1+i} - 1\} \colon \varphi^n(x) \in U_k\}|}{l_{M+1+i}} \\
\overset{(3.1)}{=} \quad & \lim_{i\to\infty} \frac{l_{M+i}^2 - k}{2l_{M+i} + l_{M+i}^2 + 1} \\
= \quad & 1.
\end{aligned}$$

□

The minimal center of attraction is closely related to ergodic measures on K as will be seen in the next proposition. Denote by $\mathrm{M}(K)$ the set of finite real-valued Baire measures, hence $\mathrm{C}(K)' \cong \mathrm{M}(K)$. For $\mu \in \mathrm{M}(K)$ let

$$\operatorname{supp}\mu := \{x \in K\colon \mu(U) > 0 \text{ for all open } U \in \mathcal{U}(x)\}$$

be the *support of* μ. We obtain the following characterization of the minimal center of attraction (see, e. g., MAÑÉ [37, Chapter II, Section 1, Exercise 1.5] or DIAMOND, KLOEDEN & POKROVSKIJ [14, Theorem 1]).

Proposition 3.1.15. *The minimal center of attraction is given as*

$$A_{min} = \overline{\bigcup_{\mu \in \mathrm{M}(K) \text{ ergodic}} \operatorname{supp}\mu}.$$

For a continuous-time version of this proposition, see, e. g., KÜHNER [31, Part II, Chapter 4, Theorem 4.11] or BHATIA & SZEGÖ [9, Chapter 1, Section 1.5, Theorem 1.5.28].

The different concepts of recurrence and attractivity introduced in this section will be used to study to the so-called *generalized recurrent set* in Section 3.4. This set is closely related to the *Lyapunov algebra* which will be discussed in depth for the rest of this chapter.

3.2 The Lyapunov algebra

For the construction of the Lyapunov algebra, the following set consisting of all subfixed functions is needed.

Definition 3.2.1. We call

$$\operatorname{subfix} T_\varphi := \{f \in \mathrm{C}(K)\colon 0 \le T_\varphi f \le f\}$$

the *subfixed cone of* T_φ *in* $\mathrm{C}(K)$.

Proposition 3.2.2. *The set* $\operatorname{subfix} T_\varphi$ *is a proper cone in* $\mathrm{C}(K)$ *with the following additional properties.*

(a) *For each* $f, g \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ *also*

$$f \cdot g \in \operatorname{subfix} T_\varphi$$

and

$$f \vee g, f \wedge g \in \operatorname{subfix} T_\varphi$$

for $f \vee g := \sup\{f, g\}$ *and* $f \wedge g := \inf\{f, g\}$.

(b) *The subfixed cone is closed and* T_φ*-invariant.*

(c) *Each positive fixed function* $f \in \operatorname{fix} T_\varphi$ *is contained in the subfixed cone.*

Proof. Let $f, g \in \operatorname{subfix} T_\varphi$. Clearly, $f+g$, $f \cdot g$ and $c \cdot f$ for $c \geq 0$ are contained in $\operatorname{subfix} T_\varphi$. Moreover, $\operatorname{subfix} T_\varphi \cap -\operatorname{subfix} T_\varphi = \{0\}$, hence $\operatorname{subfix} T_\varphi$ is a proper cone.

Since T_φ is a lattice homomorphism, we have

$$T_\varphi(f \vee g) = T_\varphi f \vee T_\varphi g \leq f \vee g,$$

hence $f \vee g \in \operatorname{subfix} T_\varphi$. Analogously, $f \wedge g \in \operatorname{subfix} T_\varphi$.

If $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$, then $T_{\varphi^2} f \leq T_\varphi f$ yielding the T_φ-invariance of $\operatorname{subfix} T_\varphi$.

To show that the subfixed cone is closed, let $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq \operatorname{subfix} T_\varphi$ with $\|\cdot\|\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n =: h$. Then

$$T_\varphi h = \lim_{n\to\infty} T_\varphi f_n \leq \lim_{n\to\infty} f_n = h,$$

hence $h \in \operatorname{subfix} T_\varphi$.

For $f \in \operatorname{fix} T_\varphi$ with $f \geq 0$, clearly $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$. ☐

Remark 3.2.3. From an arbitrary non-positive $f \in \mathrm{C}(K)$ with $T_\varphi f \leq f$ we can produce a function in the subfixed cone by passing to $f + c \cdot \mathbb{1}_K$ for $c \geq |\min_{x \in K} f(x)|$.

Example 3.2.4. Take our standard example $K := [0,1]$ and $\varphi(x) := x^2$ for $x \in [0,1]$. Then $f \in \mathrm{C}([0,1])$ is a subfixed function of T_φ if and only if it is positive and monotonically increasing on $[0,1]$, hence

$$\operatorname{subfix} T_\varphi = \{f \in \mathrm{C}([0,1]) \colon 0 \leq f(x) \leq f(y) \text{ for } x, y \in [0,1] \text{ with } x \leq y\}.$$

Now define

$$\mathcal{L} := \overline{\operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi} = \overline{\{f - g\colon f, g \in \operatorname{subfix} T_\varphi\}}$$

as the closed vector space generated by the subfixed cone.

Remark 3.2.5. (a) For each $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$ also

$$|f| \in \operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$$

by Proposition 3.2.2 (a) because $|f| = f_1 \vee f_2 - f_1 \wedge f_2$ for $f = f_1 - f_2$ with $f_1, f_2 \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ (see Schaefer [47, Chapter II, §1, Proposition 1.4 (5)]). This extends to all of $\mathcal{L}$ by the continuity of $\vee$ and $\wedge$.

(b) Take $f \in \mathcal{L}$ with positive and negative part $f^+, f^- \in \mathrm{C}(K)_+$. Then

$$f^+, f^- \in \mathcal{L}$$

by $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ and $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$.

Proposition 3.2.6. *The space $\mathcal{L}$ is a closed T_φ-invariant subalgebra and sublattice of $\mathrm{C}(K)$.*

Proof. Clearly, $\mathcal{L}$ is closed with respect to multiplication and hence a subalgebra of $\mathrm{C}(K)$. Moreover, by the T_φ-invariance of the subfixed cone also $\mathcal{L}$ is T_φ-invariant. The lattice property of $\mathcal{L}$ follows by Remark 3.2.5 and Schaefer [47, Chapter II, §1, Proposition 1.4 (5)].

□

Definition 3.2.7. We call $\mathcal{L}$ the *Lyapunov algebra* (or *subfixed algebra)* of T_φ.

Remark 3.2.8. Lyapunov functions, named after the Russian mathematician Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857–1918), originate from the theory of ordinary differential equations and their stability theory (see, e. g., Part I of this thesis, La Salle & Lefschetz [34] or Barreira & Valls [7]). However, different definitions of Lyapunov functions can be found in the modern literature. All definitions have in common, that Lyapunov functions are decreasing on specific orbits and so are related to stability theory. In general, they are difficult to construct explicitely. The definition used here can be found in, e. g., Alongi & Nelson [3, Definition 4.4.3], Fisher & Hasselblatt [22, Definition 1.4.9] for continuous-time or in Norton [43] for discrete-time dynamical systems. In our functional analytic perspective, we see Lyapunov functions as subinvariant functions of the Koopman operator.

Remark 3.2.9. (a) The Lyapunov algebra is the smallest closed Banach subalgebra, respectively, closed Banach sublattice in $\mathrm{C}(K)$ containing the subfixed cone $\operatorname{subfix} T_\varphi$.

(b) Besides subfixed functions, also all *superfixed functions*, i. e., $f \in \mathrm{C}(K)$ with

$$T_\varphi f \geq f$$

are contained in $\mathcal{L}$. The Lyapunov algebra could analogously be achieved as

$$\mathcal{L} = \overline{\operatorname{superfix} T_\varphi - \operatorname{superfix} T_\varphi}$$

where $\operatorname{superfix} T_\varphi := \{f \in \mathrm{C}(K) \colon T_\varphi f \geq f \geq 0\}$ denotes the *superfixed cone of* T_φ *in* $\mathrm{C}(K)$.

Lemma 3.2.10. *For each $f \in \mathcal{L}$ the sequence $(T_\varphi^n f)_{n \in \mathbb{N}_0}$ converges pointwise with*

$$\lim_{n \to \infty} T_\varphi^n f(x) = f(y)$$

for each $x \in K$ and $y \in \omega(x)$ (see Definition 3.1.4). In particular,

$$f|_{\omega(x)} \equiv const.$$

for all $x \in K$, $f \in \mathcal{L}$.

Proof. It suffices to take $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$. Then $(T_\varphi^n f(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ is convergent for any $x \in K$ because it is monotone and bounded. For $y \in \omega(x)$ there is $(n_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}_0$ such that $\varphi^{n_i}(x) \overset{i \to \infty}{\longrightarrow} y$. Then

$$\lim_{n \to \infty} T_\varphi^n f(x) = \lim_{i \to \infty} f(\varphi^{n_i}(x)) = f(y).$$

Clearly, for any other $y' \in \omega(x)$ the limit is the same, $\lim_{n \to \infty} T_\varphi^n f(x) = f(y')$. □

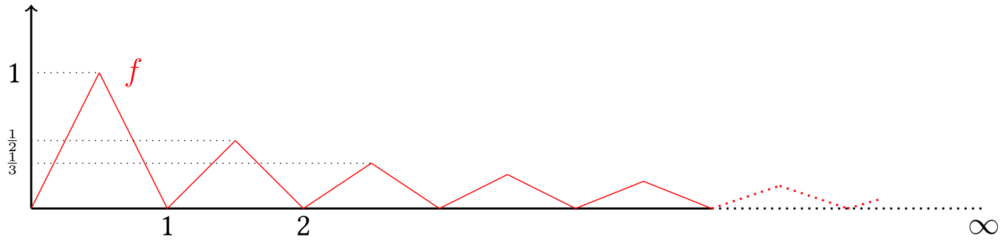
The following example shows that, in general, the closure of $\operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$ is needed to obtain a closed algebra.

Example 3.2.11. Consider the one-point compactification $K := [0, \infty]$ of $[0, \infty)$ and

$$\varphi(x) := \begin{cases} \ln(x+1) & \text{for } x \in [0, \infty), \\ \infty & \text{for } x = \infty. \end{cases}$$

To show that $\operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$ is not closed, take $f \in \mathrm{C}(K)$ as

$$f(x) := \begin{cases} \frac{2}{n}x - \frac{2(n-1)}{n} & \text{for } x \in [n-1, n-\frac{1}{2}],\ n \in \mathbb{N}, \\ -\frac{2}{n}x + 2 & \text{for } x \in (n-\frac{1}{2}, n),\ n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{for } x = \infty. \end{cases}$$



For $m \in \mathbb{N}$ define $f_m := f \cdot \mathbb{1}_{[0,m]}$,

$$f_{m,2}(x) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} & \text{for } x \in [n-1, n-\frac{1}{2}),\ n \in \{1, \ldots, m\}, \\ \frac{2}{n}x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2 & \text{for } x \in [n-\frac{1}{2}, n),\ n \in \{1, \ldots, m\}, \\ \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} & \text{for } x \in [m+1, \infty] \end{cases}$$

and

$$\begin{aligned} f_{m,1}(x) &:= f_{m,2}(x + \tfrac{1}{2}) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n}(x+\frac{1}{2}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2 & \text{for } x \in [n-1, n-\frac{1}{2}),\ n \in \{1, \ldots, m\}, \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \text{for } x \in [n-\frac{1}{2}, n),\ n \in \{1, \ldots, m\}, \\ \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} & \text{for } x \in [m+1, \infty]. \end{cases} \end{aligned}$$

Then

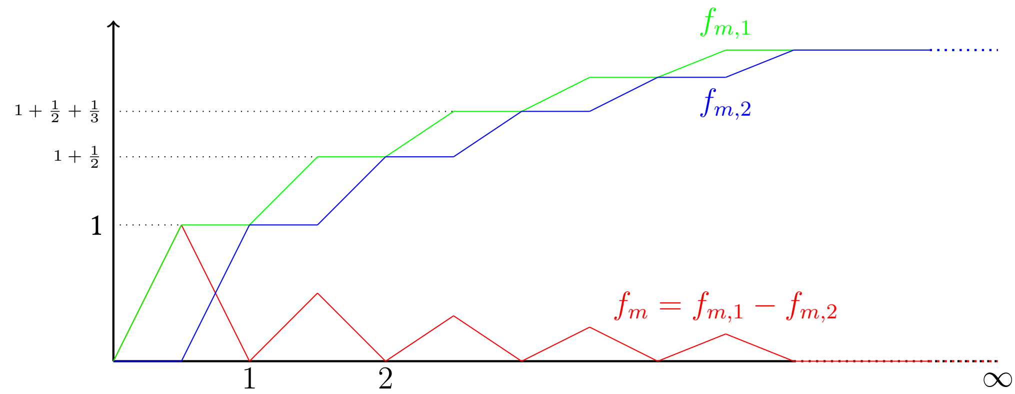
$$f_m \in \operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$$

because $f_m = f_{m,1} - f_{m,2}$ and $f_{m,1}, f_{m,2} \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ for all $m \in \mathbb{N}$. Since, clearly, $f = \|\cdot\|\text{-}\lim_{m\to\infty} f_m$, this yields

$$f \in \mathcal{L}.$$

Now assume $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$. Then there are $F_1, F_2 \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ such that

$$f = F_1 - F_2.$$



For $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $F_1(x) \geq f(x) = 2x = f_{1,m}(x)$ and $F_2(x) \geq 0 = f_{2,m}(x)$ for all $m \in \mathbb{N}$ by positivity of F_1 and F_2. For $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ we obtain

$$F_1(x) \geq F_1(\tfrac{1}{2}) = 1 = f_{1,m}(x)$$

by monotonicity of F_1 and

$$F_2(x) = F_1(x) - f(x) \geq 1 - f(x) = 2x - 1 = f_{m,2}(x)$$

for all $m \in \mathbb{N}$.

By induction we can show that

$$F_1 \geq f_{m,1}$$

and

$$F_2 \geq f_{m,2}$$

for all $m \in \mathbb{N}$. Hence F_1, F_2 are unbounded functions, thus not continuous on $[0, \infty]$ yielding a contradiction. This means that $f \notin \operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$.

Remark 3.2.12. Note that our standard example $([0,1]; \varphi)$ with $\varphi(x) = x^2$ for $x \in [0,1]$ is isomorphic to the system in Example 3.2.11. Hence also here $\operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$ is not closed.

By Proposition 3.2.6, $(\mathcal{L}; T_\varphi)$ is a subsystem of $(\mathrm{C}(K); T_\varphi)$ containing the unit $\mathbb{1}_K$ (cf. Chapter 1). The representation theorem of Kakutani and Krein (see Schaefer [47, Chapter II, §7, Theorem 7.4]) then yields

$$\mathcal{L} \cong \mathrm{C}(L)$$

for some compact space L. Denote the induced quotient system of $(K; \varphi)$ by $(L; \psi)$.

Remark 3.2.13. We clearly have

$$\langle \mathbb{1}_K \rangle \subseteq \operatorname{fix} T_\varphi \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathrm{C}(K).$$

In Section 3.8 Lyapunov algebras generated by a single function will be studied. These algebras may be smaller than $\mathcal{L}$.

In the following, examples are provided for each of the different inclusions in Remark 3.2.13. We start with examples where $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$.

Example 3.2.14. (a) As in Example 3.2.4 let $K := [0,1]$ and $\varphi(x) = x^2$ for $x \in [0,1]$. Then any positive strictly increasing function $f \in \mathrm{C}([0,1])$ is a subfixed function separating the points in $[0,1]$. Since also $\mathbb{1}_{[0,1]} \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ we have

$$\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$$

by the Stone–Weierstraß theorem.

(b) Consider the dynamical long line (cf. Example 2.2.11) where $K := [0,\infty]$ is the one-point compactification of $[0,\infty)$ and

$$\varphi(x) := \begin{cases} (x-n)^2 + n & \text{for } x \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{N}_0, \\ \infty & \text{for } x = \infty. \end{cases}.$$

Again,

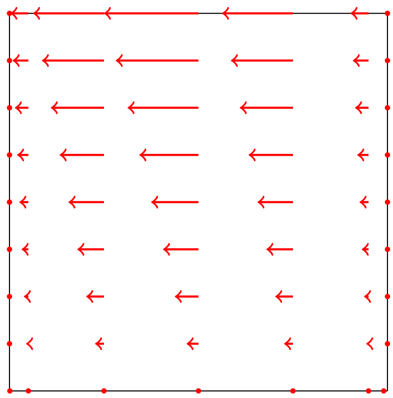
$$\mathcal{L} = \mathrm{C}(K).$$

(c) Similarly, for the unit square $K := [0,1] \times [0,1]$ in $\mathbb{R}^2$ with

$$\varphi(x,y) = (yx^2 + (1-y)x, y)$$

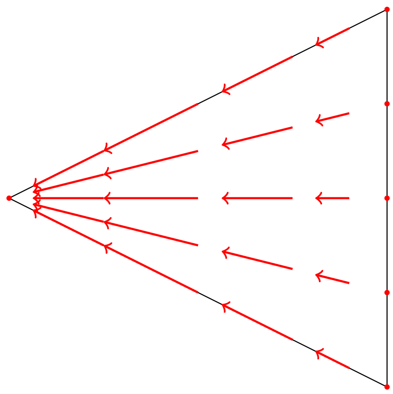
for $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ the Lyapunov algebra is

$$\mathcal{L} = \mathrm{C}(K).$$



(d) Let $K := [0,1] \times [0,1]$ and $\varphi\colon K \to K$, $(x,y) \mapsto (x^2, y)$. Define the quotient system $(\tilde{K}; \tilde{\varphi})$ with $\tilde{K} := K/{\sim}$ where $(x,y) \sim (x,y)$, $(0,y) \sim (0,y')$ for all $x, y, y' \in [0,1]$ and

$$\tilde{\varphi}\colon \tilde{K} \to \tilde{K},\ \tilde{\varphi}([(x,y)]) = [\varphi(x,y)].$$



Then

$$\mathcal{L} = \mathrm{C}(\tilde{K}).$$

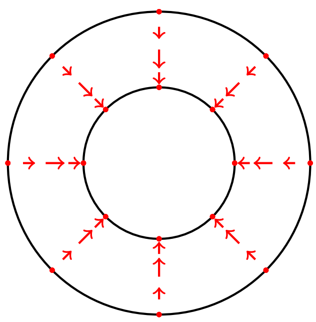
(e) Take the annulus

$$K := A_{r_1,r_2} := \{r\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}\colon r \in [r_1, r_2] \text{ and } \alpha \in [0,1)\} \subseteq \mathbb{C}$$

for $0 \leq r_1 < r_2 \leq 1$ together with

$$\varphi(r\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}) := \left(\frac{(r-r_1)^2}{r_2 - r_1} + r_1\right)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}$$

for each $r \in [r_1, r_2]$ and $\alpha \in [0,1)$. Thus, $r_1\mathbb{T} \cup r_2\mathbb{T}$ consists of fixed points of φ and each point in the interior of A_{r_1,r_2} is attracted radially to the inner circle of the annulus.



Then again

$$\mathcal{L} = \mathrm{C}(K).$$

(f) Let $K := I \cup H$ where

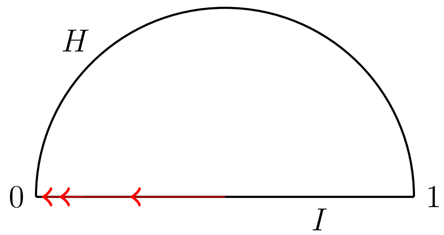
$$I := \{(x,0) \colon 0 < x < 1\}$$

and

$$H := \{(x,y) \colon x,y \geq 0, (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

is a semicircle connecting $(0,0)$ and $(1,0)$ and

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} (x^2, 0) & \text{if } (x,y) \in I \\ (x,y) & \text{if } (x,y) \in H. \end{cases}$$



Also for this example,

$$\mathcal{L} = \mathrm{C}(K).$$

We proceed with examples for the case $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi$.

Example 3.2.15. (a) Let $K := \mathbb{T}$ with some (rational or irrational) torus rotation $\varphi(x) = a \cdot x$ for $x \in \mathbb{T}$ and some $a \in \mathbb{T}$. Then $\operatorname{subfix} T_\varphi \subseteq \operatorname{fix} T_\varphi$ and hence

$$\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi.$$

(b) More general, for a compact group rotation $(G; \varphi_a)$ where G is a compact group, $a \in G$, and $\varphi_a(x) = a \cdot x$ for each $x \in G$ we have

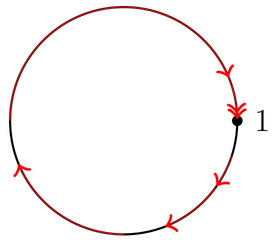
$$\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_{\varphi_a}.$$

This will be seen in Section 3.5.

(c) Again, let $K := \mathbb{T}$, this time with

$$\varphi(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \alpha}) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \alpha^2}$$

for $\alpha \in [0,1)$.



Then 1 is a fixed point with $\varphi^n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ and $\varphi^{-n}(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ for all $x \in K$ yielding
$$\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi.$$

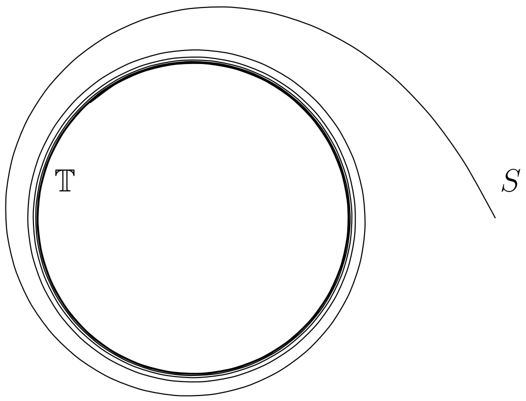
Incidentally, this example can also be seen as the quotient system of Example 3.2.14 (a) where 0 and 1 are identified.

(d) Let $K := [0,1]$ and
$$\varphi(x) := \begin{cases} 2x & \text{for } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -2x+2 & \text{for } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$
the tent map on $[0,1]$. By taking $x \in [0, \frac{1}{2}]$ we see that any $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ must be monotonically decreasing on $[0,1]$. Along with $f(0) = T_\varphi f(1) \leq f(1)$ this yields
$$\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi = \langle \mathbb{1} \rangle.$$

(e) Let K be a finite set and $\varphi\colon K \to K$ a bijective map, thus a permutation. Since φ can be decomposed into disjoint cycles, then
$$\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi.$$

Last, we give examples where $\operatorname{fix} T_\varphi \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathrm{C}(K)$.

Example 3.2.16. (a) Take $(K;\varphi)$ where $K := \mathbb{T} \cup S$ with
$$S := \{(1 + \tfrac{1}{\alpha})\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \alpha} \colon \alpha \geq 1\}$$
a spiral approximating $\mathbb{T}$ and
$$\varphi(x) := \begin{cases} x & \text{for } x \in \mathbb{T}, \\ (1 + \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\alpha}})\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\alpha + \frac{1}{\alpha})} & \text{for } x = (1+\frac{1}{\alpha})\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha} \text{ with } \alpha \geq 1. \end{cases}$$
So the dynamics on the spiral becomes slower and slower coming to rest on the unit circle.



Then $\mathcal{L} = \{f \in \mathrm{C}(K) \colon f\big|_{\mathbb{T}} \equiv \text{const.}\}$, thus

$$\operatorname{fix} T_\varphi \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathrm{C}(K).$$

(b) Let K be finite and $\varphi\colon K \to K$ not bijective. If there is some cycle of length at least 2, then

$$\operatorname{fix} T_\varphi \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathrm{C}(K).$$

(c) Now take the disjoint union of Example 3.2.14 (a) and 3.2.15 (a), hence $K := [0,1] \,\dot\cup\, \mathbb{T}$ equipped with the disjoint union topology and

$$\varphi(x) := \begin{cases} x^2 & \text{for } x \in [0,1], \\ a \cdot x & \text{for } x \in \mathbb{T} \end{cases}$$

for some $a \in \mathbb{T}$. Then $\mathcal{L} = \{f \in \mathrm{C}(K) \colon f|_{\mathbb{T}} \in \operatorname{fix} T_a\}$, where T_a denotes the Koopman operator associated with the torus rotation. Thus

$$\operatorname{fix} T_a \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathrm{C}(K).$$

From Example 3.2.14 (a) and 3.2.15 (a) we also see that $\mathcal{L}$ can be different from the Kronecker algebra $\operatorname{kro} T_\varphi$ (see Example 1.2.6 (b)).

Example 3.2.17. (a) Again, consider $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto x^2$. For $\lambda \in \mathbb{T}$ such that $T_\varphi f = \lambda f$ we obtain $\lambda = 1$, hence

$$\operatorname{kro} T_\varphi = \operatorname{fix} T_\varphi \subsetneq \mathrm{C}(K) = \mathcal{L}.$$

(b) For the compact group rotation $\varphi\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $x \mapsto ax$ with $1 \neq a \in \mathbb{T}$ we have

$$\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi \subsetneq \mathrm{C}(K) = \operatorname{kro} T_\varphi$$

by Example 17.9 in Eisner, Farkas, Haase & Nagel [20, Chapter 17, Section 17.2].

After having discussed the various examples above we come back to sub- and superfixed functions.

Remark 3.2.18. (a) For the positive cone $\mathcal{L}_+ := \{f \in \mathcal{L} \colon f \geq 0\}$ in $\mathcal{L}$ we have

$$\operatorname{subfix} T_\varphi + \operatorname{superfix} T_\varphi \subseteq \mathcal{L}_+.$$

(b) Let $f = f_1 - f_2 \in \mathcal{L}$ with $f_1, f_2 \in \operatorname{subfix} T_\varphi$. If $f_1 \geq \|f_2\| \cdot \mathbb{1}_K$ then $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi + \operatorname{superfix} T_\varphi$ by $f = (f_1 - \|f_2\| \cdot \mathbb{1}_K) + (-f_2 + \|f_2\| \cdot \mathbb{1}_K)$.

(c) Let $f \in \mathcal{L}$. Then $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi + \operatorname{superfix} T_\varphi$ if and only if there are $0 \leq f_1, f_2 \in \mathrm{C}(K)$ such that $f = f_1 + f_2$ and $f_1 - T_\varphi f_1 \leq f - T_\varphi f \leq f_2 - T_\varphi f_2$.

That in general $\operatorname{subfix} T_\varphi + \operatorname{superfix} T_\varphi \subsetneq \mathcal{L}_+$ can be seen by the following example.

Example 3.2.19. As in Example 3.2.14 (a), let $K := [0, 1]$ with $\varphi(x) := x^2$ for $x \in K$. Take

$$f := \begin{cases} x & \text{for } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 - x & \text{for } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Then $f \in \mathrm{C}(K)_+ = \mathcal{L}_+$ (see Example 3.2.17). Assume that $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi + \operatorname{superfix} T_\varphi$, hence there are $f_1 \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ and $f_2 \in \operatorname{superfix} T_\varphi$ such that $f = f_1 + f_2$. The positivity of f_1 and f_2 implies $f_1(x) = f_2(x) = 0$ for $x \in \{0, 1\}$. Since f_1 is monotonically increasing (see Example 3.2.4), whereas f_2 is monotonically decreasing we have $f_1 = f_2 = 0$ yielding a contradiction.

Remark 3.2.20. This chapter is confined to the real-valued function space $\mathrm{C}(K) = \mathrm{C}(K; \mathbb{R})$ as the natural approach to subfixed functions. Nevertheless, the theory can be carried over to the complexification

$$\mathcal{L}_\mathbb{C} = \mathcal{L} + i\mathcal{L}$$

of $\mathcal{L}$ in $\mathrm{C}(K; \mathbb{C})$ yielding a complex Banach lattice and a C^*-algebra (see Schaefer [47, Chapter II, §11]).

3.3 Closed invariant ideals via subfixed functions

Important objects to discuss the structure of $\mathrm{C}(K)$ are closed ideals and, in the Koopman situation, T_φ-invariant ideals (see Schaefer [46] or Kreidler [30]). We now use subfixed functions to construct such ideals. The definitions of an algebra, respectively, lattice ideal from Chapter 1 and the characterization of closed ideals by means of their support (see Proposition 1.1.4) likewise hold for the space $\mathrm{C}(K;\mathbb{R})$ of real-valued continuous functions on K. Moreover, recall the following characterization.

Proposition 3.3.1. *For $F \subseteq K$ closed, the closed ideal I_F is T_φ-invariant if and only if F is φ-invariant (see Küster [32, Chapter 2, Subsection 2.3.3] for further properties).*

Principal lattice ideals can be obtained as follows.

Proposition 3.3.2. *Let $0 \leq f \in \mathrm{C}(K)$. Then*

$$I_f \coloneqq \{g \in \mathrm{C}(K)\colon |g| \leq c \cdot f \text{ for some } c \geq 0\}$$

is a (principal) lattice ideal. Its closure is obtained as

$$\overline{I}_f = I_{[f=0]},$$

hence is a closed lattice and algebra ideal.

Proof. The inclusion $\overline{I}_f \subseteq I_{[f=0]}$ is clear. For the converse inclusion take $g \in I_{[f=0]}$. Without loss of generality assume $g \geq 0$. Define

$$g_n \coloneqq nf \wedge g$$

for $n \in \mathbb{N}_0$. Clearly, $g_n \in I_f$ for all $n \in \mathbb{N}_0$. Moreover, $g_n \leq g_{n+1}$ for all $n \in \mathbb{N}_0$ and $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ for all $x \in K$. Since g is continuous, Dini's theorem implies the uniform convergence $g_n \xrightarrow{\|\cdot\|} g$. Hence $g \in \overline{I}_f$. $\square$

We now turn to ideals in $\mathrm{C}(K)$ obtained via the subfixed cone. Here, the principal ideals with respect to subfixed functions are always T_φ-invariant.

Proposition 3.3.3. *For $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$, the ideal I_f and its closure $I_{[f=0]}$ are T_φ-invariant. In particular, $[f = 0]$ is φ-invariant.*

Proof. Let $g \in I_f$, hence there is some $c \geq 0$ such that $|g| \leq c \cdot f$. Since $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ we obtain $T_\varphi g \leq c \cdot T_\varphi f \leq c \cdot f$, hence $T_\varphi g \in I_f$. This implies that also $\overline{I}_f = I_{[f=0]}$ is T_φ-invariant. By Proposition 3.3.1 the support $[f = 0]$ is φ-invariant. $\square$

However, the disadvantage of such an ideal I_f is that

$$\overline{I}_{f+c\cdot\mathbb{1}_K} = \mathrm{C}(K)$$

for any $c > 0$. Thus, after a trivial shift of f a trivial ideal appears. In particular, this ideal does not capture the subinvariant part $[T_\varphi f < f]$ of f.

Therefore, we take another approach and consider the function

$$g_f \coloneqq f - T_\varphi f$$

for $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ and the corresponding ideal I_{g_f}. Clearly, this ideals remains unchanged after adding a constant to f. Moreover, it separates the subinvariant part $[T_\varphi f < f]$ of f from its invariant part $[T_\varphi f = f]$ by means of its support. However, in general I_{g_f} is not T_φ-invariant which can be seen by the example below.

Example 3.3.4. Consider again $(K; \varphi)$ with $K \coloneqq [0, 1]$ and $\varphi(x) \coloneqq x^2$ for $x \in [0, 1]$ as in Example 3.2.14 (a). Then

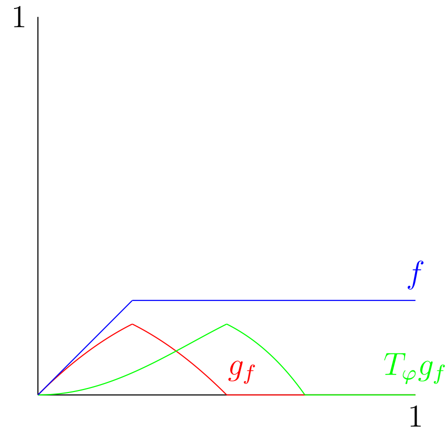
$$f(x) \coloneqq \begin{cases} x & \text{for } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ \frac{1}{4} & \text{for } x \in (\frac{1}{4}, 1] \end{cases}$$

defines a subfixed function f of T_φ yielding

$$g_f(x) = f(x) - T_\varphi f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{for } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ \frac{1}{4} - x^2 & \text{for } x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{for } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

and

$$T_\varphi g_f(x) = \begin{cases} x^2 - x^4 & \text{for } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{4} - x^4 & \text{for } x \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}], \\ 0 & \text{for } x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]. \end{cases}$$



Then for $z \coloneqq \frac{2}{3}$ we have $g_f(z) = 0$ whereas $T_\varphi g_f(z) = g_f(\frac{4}{9}) > 0$. Hence $T_\varphi g_f(z) > c \cdot g_f(z)$ for all $c \geq 0$ showing that $T_\varphi g_f \notin I_{g_f}$.

To obtain an ideal which is T_φ-invariant and even separates the invariant from the subinvariant part for all $T_\varphi^n f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$, $n \in \mathbb{N}_0$, consider

$$\overline{\operatorname{lin}}\{I_{T_\varphi^n g_f} : n \in \mathbb{N}_0\} = I_{\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0}[T_\varphi^n g_f = 0]}.$$

This ideal still depends on the choice of f, though, motivating to consider the ideal generated by all subfixed functions.

Definition 3.3.5. For each $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ let $g_f \coloneqq f - T_\varphi f$ and take

$$I_{\mathcal{L}} \coloneqq \overline{\operatorname{lin}}\{I_{g_f} : f \in \mathcal{L}\} = I_{\bigcap_{f \in \mathcal{L}}[g_f = 0]}.$$

This ideal is called the *Lyapunov ideal in* $\mathrm{C}(K)$.

Example 3.3.6. Going back to Example 3.3.4, the Lyapunov ideal in $\mathrm{C}(K)$ is

$$I_{\mathcal{L}} = I_{\{0,1\}}.$$

Summarizing, the following inclusions for the different ideals defined in this section are obtained.

Proposition 3.3.7. *For $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ and $g_f := f - T_\varphi f$, the inclusions*

$$I_{[g_f=0]} \subseteq I_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}[T_\varphi^n g_f=0]} \subseteq I_{\mathcal{L}}$$

and

$$I_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}[T_\varphi^n g_f=0]} \subseteq I_{[f=0]}$$

hold true.

Proof. Clearly,

$$\bigcap_{f\in\mathcal{L}}[g_f = 0] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}[T_\varphi^n g_f = 0] \subseteq [g_f = 0]$$

and

$$[f = 0] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}[T_\varphi^n g_f = 0]$$

yielding the opposite inclusions for the corresponding ideals. □

In fact, the Lyapunov ideal in $\mathrm{C}(K)$ is even a principal ideal since K is metric.

Theorem 3.3.8. *There exists $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ such that*

$$I_{[g_f=0]} = I_{\mathcal{L}}.$$

Proof. Since K is metric $\mathrm{C}(K)$ is separable (see Schaefer [47, Chapter II, §7, Proposition 7.5]). By Dieudonné [15, Chapter III, Section 10, (3.10.9)] then also $\operatorname{subfix} T_\varphi$ is separable, hence there is some countable dense subset $(f_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ in $\operatorname{subfix} T_\varphi$. Without loss of generality let $f_i \neq 0$ for $i \in \mathbb{N}_0$.

Define

$$f := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i\|f_i\|} f_i.$$

Clearly, $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$. If $x \in \bigcap_{f\in\mathcal{L}}[g_f = 0]$ then $T_\varphi \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x)$ for all $\tilde{f} \in \mathcal{L}$, in particular, $T_\varphi f(x) = f(x)$.

Conversely, if $x \in K$ with $T_\varphi f(x) = f(x)$ then $T_\varphi f_i(x) = f_i(x)$ for all $i \in \mathbb{N}_0$. By the density of $(f_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ this yields $T_\varphi \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x)$ for all $\tilde{f} \in \mathcal{L}$. Hence $g_f(x) = T_\varphi f(x) - f(x) = 0$ if and only if $x \in \bigcap_{f\in\mathcal{L}}[g_f = 0]$ yielding

$$I_{[g_f=0]} = I_{\bigcap_{\tilde{f}\in\mathcal{L}}[g_{\tilde{f}}=0]} = I_{\mathcal{L}}$$

for the Lyapunov ideal in $\mathrm{C}(K)$. □

Definition 3.3.9. A generating function of the Lyapunov ideal in $\mathrm{C}(K)$ is called a *strict subfixed (or Lyapunov) function.*

Example 3.3.10. (a) For $K := [0,1]$ with $\varphi\colon K \to K$, $\varphi(x) = x^2$ as in Example 3.2.14 (a), any strictly increasing positive function defines a strict Lyapunov function.

(b) In the case of the dynamics on the spiral as in Example 3.2.16 (a), any positive function that is strictly decreasing along the spiral S and constant on $\mathbb{T}$ is a strict Lyapunov function.

3.4 The generalized recurrent set

In this section, the support of the Lyapunov ideal $I_{\mathcal{L}}$ in $\mathrm{C}(K)$ is studied in detail under the following name. The terminology can be motivated by Proposition 3.4.4.

Definition 3.4.1. The support of the Lyapunov ideal

$$\operatorname{gr}\varphi := \bigcap_{f\in\mathcal{L}} [g_f = 0]$$

is called the *generalized recurrent set of* $(K;\varphi)$.

This set plays an important role in the theory of dynamical systems and has many interesting properties some of which are collected in this section.

Remark 3.4.2. (a) The Lyapunov ideal $I_{\mathcal{L}} = I_{\operatorname{gr}\varphi}$ is T_φ-invariant and consequently $\operatorname{gr}\varphi$ is φ-invariant. Moreover, $\operatorname{gr}\varphi$ is closed and non-empty (cf. Remark 3.4.5).

(b) Since $\mathcal{L}$ is generated by $\operatorname{subfix} T_\varphi$, the generalized recurrent set $\operatorname{gr}\varphi$ can be obtained as

$$\operatorname{gr}\varphi = \{x \in K\colon\ f(x) - T_\varphi f(x) = 0 \text{ for all } f \in \operatorname{subfix} T_\varphi\}.$$

The generalized recurrent set as characterized in Remark 3.4.2 has been introduced for continuous-time dynamical systems by J. Auslander in his work Auslander [4] and has been studied in, e. g., Wiseman [52], Fathi & Pageault [21] or Akin & Auslander [1].

We proceed with some examples for the generalized recurrent set.

Example 3.4.3. (a) As in Example 3.3.6 take $\varphi(x) := x^2$ for $x \in [0,1]$. Here, the generalized recurrent set consists of the fixed points of φ, i. e.,

$$\operatorname{gr}\varphi = \{0,1\}.$$

(b) For the dynamical long line (cf. Example 3.2.14 (b)), the generalized recurrent set is

$$\operatorname{gr}\varphi = \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}.$$

(c) If $K := [0,1] \times [0,1]$ with $\varphi(x,y) = (yx^2 + (1-y)x, y)$ as in Example 3.2.14 (c), then the generalized recurrent set again consists of the fixed points of φ, hence

$$\operatorname{gr}\varphi = \{(x,y)\colon x \in \{0,1\},\ y \in [0,1]\} \cup \{(x,0)\colon x \in [0,1]\}.$$

(d) For the annulus A_{r_1,r_2} with $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$ and

$$\varphi(r\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}) := \left(\frac{(r-r_1)^2}{r_2-r_1} + r_1\right)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}$$

for each $r \in [r_1,r_2]$ and $\alpha \in [0,1)$ as in Example 3.2.14 (e), the generalized recurrent set is

$$\operatorname{gr}\varphi = r_1\mathbb{T} \cup r_2\mathbb{T}.$$

(e) Take $(\tilde{K};\tilde{\varphi})$ as in Example 3.2.14 (d). Then

$$\operatorname{gr}\varphi = [(0,0)] \cup \{[(1,y)]\colon y \in [0,1]\}.$$

(f) Take $K := \mathbb{T} \cup S$ for the spiral S as in Example 3.2.16 (a) and the dynamics

$$\varphi(x) := \begin{cases} x & \text{for } x \in \mathbb{T}, \\ (1 + \frac{1}{\alpha+\frac{1}{\alpha}})\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\alpha+\frac{1}{\alpha})} & \text{for } x = (1+\frac{1}{\alpha})\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha} \text{ with } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Then

$$\operatorname{gr}\varphi = \mathbb{T}.$$

(g) For a torus rotation (see Example 3.2.15 (a)) as well as for the tent map (Example 3.2.15 (d)) we have
$$\operatorname{gr}\varphi = K.$$

The following proposition reveals why the generalized recurrent set got its name. Recall Definition 3.1.1 for the different φ-invariant sets below.

Proposition 3.4.4. *For the sets of fixed, periodic, almost periodic, recurrent, nonwandering and chain recurrent points and ω-limit sets the inclusions*
$$\operatorname{fix}\varphi \subseteq \operatorname{per}\varphi \subseteq \operatorname{ap}\varphi \subseteq \operatorname{rec}\varphi \subseteq \omega\,\varphi \subseteq \operatorname{nw}\varphi \subseteq \operatorname{gr}\varphi \subseteq \operatorname{cr}\varphi$$
hold.

Proof. We only show $\operatorname{nw}\varphi \subseteq \operatorname{gr}\varphi$ (cf. Auslander [4, Section 2.]), while $\operatorname{gr}\varphi \subseteq \operatorname{cr}\varphi$ will be shown later in Section 3.10.

Since K is metric, there is a sequence $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of open neighborhoods of x with $U_{i+1} \subseteq U_i$ for all $i \in \mathbb{N}$ such that
$$\{x\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i.$$

If x is nonwandering, then for all $i \in \mathbb{N}$ there exists some $k_i \in \mathbb{N}$ such that $\varphi^{k_i}(U_i) \cap U_i \neq \emptyset$. Without loss of generality we can assume that $k_{i+1} \geq k_i$ for all $i \in \mathbb{N}$ and that there is some $N \in \mathbb{N}$ such that $k_i > 1$ for all $i \geq N$. Take $x_i \in \varphi^{k_i}(U_i) \cap U_i$ for each $i \geq N$. Then for all $i \geq N$ there is some $y_i \in U_i$ with
$$x_i = \varphi^{k_i}(y_i).$$

Clearly,

(i) $\varphi^{k_i}(y_i) = x_i \to x$ and

(ii) $y_i \to x$.

For $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ we obtain

(i) $f(\varphi^{k_i}(y_i)) \to f(x)$,

(ii) $f(\varphi(y_i)) \to f(\varphi(x))$ and

(iii) $f(y_i) \to f(x)$

by continuity. Then $f(\varphi^{k_i}(y_i)) \leq f(\varphi(y_i)) \leq f(y_i)$ for all $i \geq N$ yields $T_\varphi f(x) = f(x)$, hence $x \in \operatorname{gr}\varphi$. $\square$

Remark 3.4.5. By Birkhoff's recurrence theorem (see, e. g., Eisner, Farkas, Haase & Nagel [20, Chapter 3, Section 3.3, Theorem 3.14]) every topological dynamical system contains at least one recurrent point. This implies that $\operatorname{gr}\varphi$ is nonempty.

Corollary 3.4.6. *Let $(A; \varphi|_A)$ be a minimal subsystem of $(K; \varphi)$. Then $A \subseteq \operatorname{gr}\varphi$.*

Proof. Because each point in A is recurrent the assertion follows from Proposition 3.4.4. $\square$

Corollary 3.4.7. *Let $\emptyset \neq A \subseteq K$ be closed and φ-invariant. Then $A \cap \operatorname{gr}\varphi \neq \emptyset$.*

Proof. Because $(A; \varphi|_A)$ has a minimal subsystem the assertion follows by Corollary 3.4.6. $\square$

Another important closed invariant set contained in $\operatorname{gr}\varphi$ is the minimal center of attraction (see Definition 3.1.12). Since $A_{\text{min}} \subseteq \omega\,\varphi$ as seen in Proposition 3.1.13, the following inclusion is obtained by Proposition 3.4.4.

Proposition 3.4.8. *For the minimal center of attraction A_{min} the inclusion*

$$A_{min} \subseteq \operatorname{gr}\varphi$$

holds true.

The following example shows that, in general, $A_{\text{min}} \subsetneq \operatorname{gr}\varphi$ and $\omega\,\varphi \subsetneq \operatorname{gr}\varphi$.

Example 3.4.9. For $K := \mathbb{T}$ the torus and $\varphi\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ the map with fixed point 1 as in Example 3.2.15 (c), we have

$$\operatorname{gr}\varphi = K$$

and

$$\operatorname{nw}\varphi = A_{\text{min}} = \omega\,\varphi = \{1\}.$$

From the next example (cf. Wiseman [52, Example 2.4]) can be seen that also the inclusion $\operatorname{gr}\varphi \subseteq \operatorname{cr}\varphi$ may be strict.

Example 3.4.10. Let $K := I \cup H$ the interval with "handle" and

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} (x^2, 0) & \text{if } (x,y) \in I \\ (x,y) & \text{if } (x,y) \in H \end{cases}$$

as in Example 3.2.14 (f). Then $\operatorname{gr}\varphi = H$, while $\operatorname{cr}\varphi = K$.

There are even examples with $\operatorname{gr}\varphi \neq \operatorname{cr}\varphi$ without fixed points (cf. Wiseman [52, Example 6.10]).

Example 3.4.11. Let $(K;\varphi)$ be as in Example 3.4.10 above and $(\mathbb{T};\psi)$ a (rational or irrational) torus rotation. Then for $\varphi \times \psi$ on $K \times \mathbb{T}$ we have $\operatorname{gr}(\varphi \times \psi) = H \times \mathbb{T}$ while $\operatorname{cr}(\varphi \times \psi) = K \times \mathbb{T}$ and $\operatorname{fix}(\varphi \times \psi) = \emptyset$.

The different kinds of recurrence as in Proposition 3.4.4 can be transfered to the Koopman system as follows (see Küster [32, Chapter 2, Subsection 2.3.3, Lemmata 2.2.23–2.2.25]).

Lemma 3.4.12. *A point $x \in K$ is*

(a) a fixed point if and only if $T_\varphi I_{\{x\}} = I_{\{x\}}$.

(b) periodic with period $m \in \mathbb{N}$ if and only if $T_{\varphi^m} I_{\{x\}} = I_{\{x\}}$.

(c) almost periodic if and only if $I = \{0\}$ and $I = \mathrm{C}(L)$ are the only $T_{\varphi|_L}$-invariant closed ideals contained in $\mathrm{C}(L)$ for $L := \overline{\operatorname{orb}}(x)$.

(d) recurrent if and only if $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_\varphi^{-n} I_{\{x\}} \subseteq I_{\{x\}}$.

By this, Proposition 3.4.4 yields the following.

Proposition 3.4.13. *The inclusions*

$$I_{\operatorname{gr}\varphi} \subseteq I_{\operatorname{rec}\varphi} \subseteq I_{\operatorname{ap}\varphi} \subseteq I_{\operatorname{per}\varphi} \subseteq I_{\operatorname{fix}\varphi}$$

imply

$$I_{\operatorname{gr}\varphi} \subseteq \bigcap_{\substack{I \text{ max. ideal,} \\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T^{-n} I \subseteq I}} I \subseteq \bigcap_{\substack{x\in K, \\ T_{\varphi|_{\overline{\operatorname{orb}(x)}}} \text{ irred.}}} I_{\{x\}} \subseteq \bigcap_{\substack{I \text{ max. ideal,} \\ T_\varphi^m I \subseteq I \text{ for some} \\ m\in\mathbb{N}}} I \subseteq \bigcap_{\substack{I \text{ max.} \\ T\text{-inv. ideal}}} I$$

for the generalized recurrent set $\operatorname{gr}\varphi$.

The generalized recurrent set $\operatorname{gr}\varphi$ can be related to different concepts from the theory of dynamical systems which we do not study in more detail.

Remark 3.4.14. (a) By Auslander [4, Section 3, Theorem 3] the generalized recurrent set can be characterized as

$$\operatorname{gr}\varphi = \{x \in K : x \in \mathcal{J}_\alpha(x) \text{ for some } \alpha \in \mathrm{Ord}\}$$

for continuous-time dynamical systems where $\mathcal{J}_\alpha(x)$ denotes the *prolongational limit set* of $x \in K$, $\alpha \in \mathrm{Ord}$ (cf. Auslander [4, Section 3] or Bhatia & Szegö [9, Chapter 2, Section 2.14, Definition 2.14.1]).

(b) As pointed out in Wiseman [52, Theorem 4.6], there always exists a metric equivalent to the original metric on K such that the *strong chain recurrent set* associated with this metric equals the generalized recurrent set.

Let $g_f := f - T_\varphi f$ for $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ as in Section 3.3. Then Theorem 3.3.8 yields the following connection between the generalized recurrent set and strict Lyapunov functions (see also Auslander [4, Section 2, Theorem 2]).

Lemma 3.4.15. *Each strict Lyapunov function f satisfies $g_f(x) = 0$ if and only if $x \in \operatorname{gr}\varphi$.*

The generalized recurrent set can be obtained as follows.

Remark 3.4.16. Take a strict Lyapunov function f with $\|f\| \leq 1$ and define

$$f_c := f \vee c \cdot \mathbb{1}$$

for $0 < c \leq 1$. Then $\operatorname{gr}\varphi = \bigcap_{0<c\leq 1} M_c$ where

$$M_c := \{x \in K : T_\varphi f_c(x) - f_c(x) = 0\}.$$

For each $0 < c \leq 1$ we have that M_c is φ-invariant and for $c_1 \leq c_2$ the inclusion $M_{c_1} \subseteq M_{c_2}$ holds true.

Apart from the inclusions in Proposition 3.4.4 and 3.4.8 and its relation with strict Lyapunov functions, the generalized recurrent set $\operatorname{gr}\varphi$ is particularly interesting because of its attractivity properties. These are discussed in the following. For the definitions, recall Section 3.1.

Proposition 3.4.17. *The generalized recurrent set* $\operatorname{gr}\varphi$ *is pointwise attractive.*

Proof. The assertion follows from Proposition 3.4.4 and Proposition 3.1.11. □

The pointwise attractiveness of $\operatorname{gr}\varphi$ can be transfered to the Koopman system as follows.

Proposition 3.4.18. *The restricted Koopman semigroup* $\left(T_\varphi^n\big|_{I_\mathcal{L}}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *is weakly stable, i. e.,*

$$\langle T_\varphi^n f, \mu\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

for all $f \in I_\mathcal{L}$ *and* $\mu \in I'_\mathcal{L}$.

Proof. We follow the proof of Kühner [31, Part II, Chapter 4, Theorem 4.9]. Take $\varepsilon > 0$, $f \in I_{\operatorname{gr}\varphi}$ and $x \in K$. Since $\operatorname{gr}\varphi$ is pointwise attractive there is some $N > 0$ such that

$$\langle T_\varphi^n f, \delta_x\rangle = T_\varphi^n f(x) < \varepsilon$$

for all $n \geq N$ where δ_x denotes the Dirac measure at x. This implies

$$\langle T_\varphi^n f, \delta_x\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

for all $x \in K$. Hence by Lebesgue's dominated convergence theorem

$$\langle T_\varphi^n f, \mu\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

for all $\mu \in I'_{\operatorname{gr}\varphi}$. □

Corollary 3.4.19. *Let* $f \in I_\mathcal{L}$. *Then* $\lim_{n\to\infty} T_\varphi^n f(x) = 0$ *for all* $x \in K$.

Combined with Proposition 3.1.10 the following connection is obtained.

Corollary 3.4.20. *The generalized recurrent set* $\operatorname{gr}\varphi$ *is uniformly attractive if and only if it is stable in the sense of Lyapunov.*

In general, $\operatorname{gr}\varphi$ is not stable in the sense of Lyapunov and consequently not uniformly attractive as the following example shows.

Example 3.4.21. Take $\varphi(x) = x^2$ for $x \in [0,1]$ (cf. Example 3.2.14 (a)). Then $\operatorname{gr}\varphi = \{0,1\}$ is not stable in the sense of Lyapunov because for $U \in \mathcal{U}(\operatorname{gr}\varphi)$ with $U \neq K$ there is no $V \in \mathcal{U}(\operatorname{gr}\varphi)$, $U \subseteq V$, with $\varphi^n(V) \subseteq U$ for all $n \geq 0$.

Next, we show that the time the dynamics stays within a compactum in $(\operatorname{gr}\varphi)^c$ is uniformly bounded.

Proposition 3.4.22. *Let $V \subseteq (\operatorname{gr}\varphi)^c$ be closed. Then there is some $N \in \mathbb{N}$ such that*

$$\varphi^n(V) \subseteq V^c$$

for all $n \geq N$.

Proof. Assume that there is some $x \in V$ and a sequence $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ such that $\varphi^{n_i}(x) \in V$ for all $i \in \mathbb{N}$. Since V is compact, $(\varphi^{n_i}(x))_{i\in\mathbb{N}}$ has an accumulation point $x^* \in V$. However, by $\omega(x) \subseteq \operatorname{gr}\varphi$ then $x^* \in \operatorname{gr}\varphi$ yielding a contradiction. Therefore, for every $x \in V$ there are only finitely many $n \in \mathbb{N}$ such that $\varphi^n(x) \in V$.

Assume that for each $N \in \mathbb{N}$ there is some $x_N \in V$ with $\varphi(x_N), ..., \varphi^N(x_N) \in V$. Since $\operatorname{orb}(x_N) \cap V$ is finite for each $N \in \mathbb{N}$, the set

$$S := \{x_N \colon N \in \mathbb{N}\}$$

must be infinite, thus has an accumulation point $y \in V$. Hence there is $(x_{N_i})_{i\in\mathbb{N}} \subseteq S$ such that

$$x_{N_i} \xrightarrow{i\to\infty} y.$$

Without loss of generality take $N_{i+k} \geq k$, hence $\varphi^k(x_{N_{i+k}}) \in V$ for all $i, k \in \mathbb{N}$. Then

$$\varphi^k(x_{N_{i+k}}) \xrightarrow{i\to\infty} \varphi^k(y)$$

for all $k \in \mathbb{N}$. Thus the closedness of V yields $\varphi^k(y) \in V$ for all $k \in \mathbb{N}$ which is a contradiction. $\square$

Corollary 3.4.23. *For every $U \in \mathcal{U}(\operatorname{gr}\varphi)$ there is some $N \in \mathbb{N}$ such that*

$$\varphi^n(U^c) \subseteq U$$

for all $n \geq N$.

In the next sections we consider the cases $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi$, $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$ and the general case $\operatorname{fix} T_\varphi \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathrm{C}(K)$ separately.

3.5 The case $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi$

The case $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi$ is equivalent to $\operatorname{gr}\varphi = K$, respectively, $I_{\operatorname{gr}\varphi} = \{0\}$. So, in this case we can apply our results from Chapter 2 and obtain a decomposition of $\operatorname{gr}\varphi$ via transfinitely constructed superorbits. Remind Example 3.2.15 for a collection of examples with $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi$.

Theorem 3.5.1. *If there is some φ-invariant and strictly positive $\mu \in \mathrm{M}(K)$ (cf. Section 3.1), then $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi$.*

Proof. Let $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$, hence $f - T_\varphi f \geq 0$. Then

$$\begin{aligned} \langle f - T_\varphi f, \mu\rangle &= \langle f, \mu\rangle - \langle T_\varphi f, \mu\rangle \\ &= \langle f, \mu\rangle - \langle f, T'_\varphi \mu\rangle \\ &= \langle f, \mu\rangle - \langle f, \mu\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Because μ is strictly positive, then $f - T_\varphi f = 0$, hence $f \in \operatorname{fix} T_\varphi$. Hence $\operatorname{subfix} T_\varphi \subseteq \operatorname{fix} T_\varphi = \mathcal{L}$. □

Example 3.5.2. (a) For a torus rotation $(\mathbb{T}; \varphi)$ as in Example 3.2.15 (a) the Lebesgue-measure on $\mathbb{T}$ is strictly positive and φ-invariant yielding $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi$.

(b) More general, for each compact group rotation $(G; \varphi_a)$ as in Example 3.2.15 (b), the φ-invariant and strictly positive *Haar measure* (see, e. g., Eisner, Farkas, Haase & Nagel [20, Chapter 5, Section 5.3]) yields $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_{\varphi_a}$.

We now collect sufficient conditions for a one-dimensional Lyapunov algebra.

Proposition 3.5.3. *Let $(K; \varphi)$ be minimal. Then $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi = \langle \mathbb{1}_K \rangle$ and $\operatorname{gr}\varphi = K$.*

Proof. If $(K; \varphi)$ minimal then every $x \in K$ is recurrent. Hence $\operatorname{gr}\varphi = K$ by Proposition 3.4.4. □

The converse direction does, in general, not hold true as shown by the next example.

Example 3.5.4. Let $K := [0,1]$ and φ the tent map on $[0,1]$ (see Example 3.2.15 (d)). Then $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi = \langle \mathbb{1} \rangle$ but $(K;\varphi)$ is not minimal.

The weaker property transitivity does not imply $\mathcal{L} = \langle \mathbb{1}_K \rangle$. This can be seen by the example $K := \{p,q\}$ for two points p and q with $\varphi(p) = \varphi(q) = q$, where p is a transitive point, but, clearly, $\mathcal{L} \neq \langle \mathbb{1}_K \rangle$. By excluding isolated points, transitivity yields a one-dimensional Lyapunov algebra, though.

Proposition 3.5.5. *If $(K;\varphi)$ is topologically transitive and K has no isolated points then $\mathcal{L} = \langle \mathbb{1}_K \rangle$.*

Proof. If $(K;\varphi)$ is transitive and has no isolated points then for all open $U, V \subseteq K$ there is some $n \in \mathbb{N}$ such that $\varphi^n(U) \cap U \neq \emptyset$ (see, e. g., Eisner, Farkas, Haase & Nagel [20, Proposition 2.33]). This implies that each point in K is nonwandering. Hence $\operatorname{gr} \varphi = K$ yielding $\operatorname{subfix} T_\varphi \subseteq \operatorname{fix} T_\varphi = \langle \mathbb{1}_K \rangle = \mathcal{L}$. □

Corollary 3.5.6. *If $(K;\varphi)$ is* chaotic in the sense of Devaney *– hence φ is transitive, there are no isolated points in K and $\operatorname{per} \varphi$ is dense in K (cf. Banks et al. [6]) – then $\mathcal{L} = \langle \mathbb{1}_K \rangle$.*

3.6 The case $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$

In this section we discuss the structure of $(K;\varphi)$ for the case $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$. Recall Example 3.2.14 for a number of examples. We first investigate the long-term behavior of φ.

Proposition 3.6.1. *Let $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$. Then for all $x \in K \setminus \operatorname{gr} \varphi$ there is some $y \in \operatorname{gr} \varphi$ such that $\varphi^n(x) \xrightarrow{n\to\infty} y$.*

Proof. Assume there are $y_1 \neq y_2 \in \operatorname{gr} \varphi$ such that $\varphi^{n_i}(x) \xrightarrow{i\to\infty} y_1$ and $\varphi^{m_i}(x) \xrightarrow{i\to\infty} y_2$ for some subsequences $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ and $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of $\mathbb{N}$. In other words, $\{y_1, y_2\} \subseteq \omega(x)$. By Lemma 3.2.10, $f|_{\omega(x)} \equiv const.$ for all $f \in \mathcal{L}$. Because $\mathcal{L}$ separates the points of $\operatorname{gr} \varphi$, then $y_1 = y_2$ contradicting the assumption. □

If $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$, the generalized recurrent set $\operatorname{gr}\varphi$ can easily be determined (see also Akin & Auslander [1, Theorem 5]).

Corollary 3.6.2. *If $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$, then $\operatorname{gr}\varphi$ coincides with $\operatorname{fix}\varphi$.*

Proof. If $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$, then for all $x \neq y \in K$ there is some $f \in \mathcal{L}$ with $f(x) \neq f(y)$. In particular, for $x \in K$ with $\varphi(x) \neq x$ there is some $f \in \mathcal{L}$ with $f(x) \neq f(\varphi(x))$. Hence $x \notin \operatorname{gr}\varphi$, thus $\operatorname{gr}\varphi = \operatorname{fix}\varphi$. □

Remark 3.6.3. Transferred to the Koopman system, Corollary 3.6.2 means that if $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$ then $I_{\operatorname{gr}\varphi}$ is the intersection of maximal invariant ideals,

$$I_{\operatorname{gr}\varphi} = \bigcap_{\substack{I \text{ max.} \\ T_\varphi\text{-inv. ideal}}} I$$

(cf. Lemma 3.4.12).

Example 3.6.4. (a) If for all $x \in K \setminus \operatorname{gr}\varphi$ there is some $y \in \operatorname{gr}\varphi$ such that $\varphi^n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ then, in general, neither $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$ nor $\operatorname{gr}\varphi = \operatorname{fix}\varphi$. This can be seen from the disjoint union in Example 3.2.16 (c).

(b) In general, $\operatorname{gr}\varphi = \operatorname{fix}\varphi$ does neither imply $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$ nor that for all $x \in K \setminus \operatorname{gr}\varphi$ there is some $y \in \operatorname{gr}\varphi$ such that $\varphi^n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Take for example the dynamics on the spiral as in Example 3.2.16 (a). Then we clearly have $\operatorname{gr}\varphi = \mathbb{T} = \operatorname{fix}\varphi$ but $\mathcal{L} = \{f \in \mathrm{C}(K) \colon f\big|_{\mathbb{T}} \equiv \text{const.}\}$.

A stronger condition for $\operatorname{gr}\varphi$ consisting of fixed points of φ is the following.

Remark 3.6.5. If there is some $f \in \mathcal{L}$ which separates the points in K, then $\operatorname{gr}\varphi = \operatorname{fix}\varphi$.

Proof. By the Stone–Weierstraß theorem we have $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$, hence the assertion follows by Remark 3.6.2. □

Example 3.6.6. From $\operatorname{gr}\varphi = \operatorname{fix}\varphi$ does, in general, not follow that there is some point-separating $f \in \mathcal{L}$ as can be seen from $K := [0,1] \times [0,1]$ and $\varphi(x, y) := (x^2, y)$. Here, $\operatorname{gr}\varphi = \{0,1\} \times [0,1]$ and $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$ but there is no point-separating $f \in \mathrm{C}(K)$.

Proposition 3.6.7. *If* $\operatorname{gr}\varphi = \operatorname{fix}\varphi$ *then* $\omega(x)\setminus\operatorname{orb}(x) \subseteq \partial\operatorname{gr}\varphi$ *for all* $x \in K\setminus\operatorname{gr}\varphi$.

Proof. Assume there is $z \in (\operatorname{gr}\varphi)^\circ \cap (\omega(x)\setminus\operatorname{orb}(x))$ for some $x \in K\setminus\operatorname{gr}\varphi$. Then there is $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ with $\varphi^{n_i}(x) \to z$. By continuity of φ and because $z \notin \operatorname{orb}(x)$ there is some $k \in \mathbb{N}$ such that $\varphi^{n_k}(x) \in (\operatorname{gr}\varphi)^\circ\setminus\{z\}$. Hence $\varphi^{n_k}(x)$ is a fixed point which contradicts $\varphi^{n_i}(x) \to z$. □

Example 3.6.8. In general, $\operatorname{gr}\varphi = \operatorname{fix}\varphi$ does not imply $\omega(x) \subseteq \partial\operatorname{gr}\varphi$ for all $x \in K\setminus\operatorname{gr}\varphi$. This can be seen from the example $K := [0,1] \cup \{2\}$ with

$$\varphi(x) := \begin{cases} x & \text{for } x \in [0,1], \\ \frac{1}{2} & \text{for } x = 2. \end{cases}$$

Here, $\operatorname{gr}\varphi = [0,1]$ and $\omega(2) = \varphi(\{2\}) \subseteq (\operatorname{gr}\varphi)^\circ$.

Proposition 3.6.9. *If* $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$, $\operatorname{fix} T_\varphi = \langle \mathbb{1}_K \rangle$ *and* $\omega(x) \cap \operatorname{orb}(x) = \emptyset$ *for all* $x \in K\setminus\operatorname{gr}\varphi$, *then* $(\operatorname{gr}\varphi)^\circ = \emptyset$.

Proof. Assume there is some $x \in (\operatorname{gr}\varphi)^\circ$. By Urysohn's lemma we find some $f \in \mathrm{C}(K)$ with $f|_{\overline{K\setminus\operatorname{gr}\varphi}} \equiv 1$ and $f(x) = 0$. Then Proposition 3.6.7 yields $f \in \operatorname{fix} T_\varphi$ contradicting $\dim\operatorname{fix} T_\varphi = 1$. □

Lemma 3.2.10 and Proposition 3.4.4 yield the following.

Proposition 3.6.10. *Let* $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$. *Then* $\lim_{n\to\infty} T_\varphi^n f(x) = 0$ *for all* $f \in I_{\operatorname{gr}\varphi}$ *and* $x \in K$.

The next example points out the varied fine structure of $\operatorname{gr}\varphi = \operatorname{fix}\varphi$ which can occur for $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$.

Example 3.6.11. (a) For the dynamical long line (cf. Example 3.2.14 (b) and Example 3.4.3 (b)) the Lyapunov algebra $\mathcal{L}$ coincides with $\mathrm{C}(K)$ and the generalized recurrent set $\operatorname{gr}\varphi$ is countable, hence totally disconnected and has empty interior. Moreover, $\dim\operatorname{fix} T_\varphi = 1$.

(b) Take $(\tilde{K};\tilde{\varphi})$ as in Example 3.2.14 (d), respectively, 3.4.3 (e). Then $\mathcal{L} = \mathrm{C}(\tilde{K})$, $\dim\operatorname{fix} T_{\tilde{\varphi}} = 1$ and $\operatorname{gr}\varphi$ is uncountable, not totally disconnected and $(\operatorname{gr}\varphi)^\circ = \emptyset$.

(c) Example 3.4.10 shows that $\operatorname{gr}\varphi \subsetneq \operatorname{cr}\varphi$ is possible for $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$, while the other inclusion from Proposition 3.4.4 become equalities. Here, $\operatorname{gr}\varphi$ has non-empty interior, is connected and uncountable.

3.7 The general case

Lastly, we consider the case where $\mathcal{L}$ lies between $\operatorname{fix} T_\varphi$ and $\mathrm{C}(K)$. To see some systems of this kind recall Example 3.2.16. In this case,

$$\mathcal{L} \cong \mathrm{C}(L)$$

for some compact space $L \ncong K$. Hence by Chapter 1 there is a surjection $p\colon K \to L$ and a corresponding injection $i\colon \mathrm{C}(L) \to \mathrm{C}(K)$ such that the diagrams

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & K \arrow[d, "p"] \\ L \arrow[r, "\psi"'] & L \end{tikzcd}$$

and

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}(K) & \mathrm{C}(K) \arrow[l, "T_\varphi"'] \\ \mathrm{C}(L) \arrow[u, "i"] & \mathrm{C}(L) \arrow[l, "T_\psi"] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

commute.

Proposition 3.7.1. *The Lyapunov algebra $\mathcal{L}_\psi$ of T_ψ in $\mathrm{C}(L)$ is isomorphic to the Lyapunov algebra $\mathcal{L}$ of T_φ, i. e.,*

$$\mathcal{L}_\psi \cong \mathcal{L}.$$

Proof. Take $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$. By definition of p we have $f(x) = f(y)$ for $x, y \in K$ with $p(x) = p(y)$. The universal property of the quotient topology yields that there is some $\tilde{f} \in \mathrm{C}(L)$ such that $\tilde{f} \circ p = f$. An easy calculation shows $\tilde{f} \in \operatorname{subfix} T_\psi$. Conversely, if $\tilde{f} \in \operatorname{subfix} T_\psi$, then $f := \tilde{f} \circ p \in \operatorname{subfix} T_\varphi$. Clearly, this yields an isomorphism between $\mathcal{L}$ and $\mathcal{L}_\psi$. $\square$

In particular, Proposition 3.7.1 shows that we can use the results of Section 3.6 for the quotient system $(L;\psi)$ of $(K;\varphi)$ yielding the following result.

Proposition 3.7.2. *The generalized recurrent set* $\operatorname{gr}\psi$ *coincides with the fixed points of* ψ *and equals* $\operatorname{gr}\varphi$ *under the image of* p*,*

$$p(\operatorname{gr}\varphi) = \operatorname{gr}\psi = \operatorname{fix}\psi.$$

Proof. Since $\mathcal{L} = \mathrm{C}(L)$, Corollary 3.6.2 yields

$$\operatorname{gr}\psi = \operatorname{fix}\psi.$$

Moreover,

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{gr}\varphi &\iff f(x) = f(\varphi(x)) \text{ for all } f \in \mathcal{L} \\ &\iff p(x) = p(\varphi(x)) \\ &\iff \psi(p(x)) = p(x) \\ &\iff p(x) \in \operatorname{fix}\psi. \end{aligned}$$

□

By Proposition 3.6.1, for each $\tilde{x} \in L$ there is some $\tilde{y} \in \operatorname{gr}\psi$ such that $\psi^n(\tilde{x}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{y}$. Transfering this to $(K;\varphi)$ yields the following.

Proposition 3.7.3. *For* $\tilde{x} \in L$ *and* $\tilde{y} \in \operatorname{gr}\psi$ *the following are equivalent.*

(a) $\psi^n(\tilde{x}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{y}$.

(b) For each $U \in \mathcal{U}(\tilde{y})$ *there is some* $N \geq 0$ *such that* $\varphi^n(x) \in p^{-1}(U)$ *for all* $x \in p^{-1}(\tilde{x})$ *and* $n \geq N$.

Proof. The implication (b) ⇒ (a) is clear. To show (a) ⇒ (b) let $\psi^n(\tilde{x}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{y}$, hence for every $U \in \mathcal{U}(\tilde{y})$ there is some $N \in \mathbb{N}_0$ such that $\psi^n(\tilde{x}) \in U$ for all $n \geq N$. Assume there is $x \in p^{-1}(\tilde{x})$ such that $\varphi^n(x) \notin p^{-1}(U)$ for some $n \geq N$. Then $p(\varphi^n(x)) \notin p(p^{-1}(U))) = U$ contradicting $\psi^n(\tilde{x}) = \psi^n(p(x)) = p(\varphi^n(x)) \in U$. □

One way to construct examples with $\mathcal{L} \subsetneq \mathrm{C}(K)$ is to take the disjoint union of $(K_1; \varphi_1)$ with corresponding Lyapunov algebra $\mathrm{C}(K_1)$ and $(K_2; \varphi_2)$ where the Lyapunov algebra coincides with $\operatorname{fix} T_{\varphi_2}$ (cf. Example 3.2.16 (c)).

Another class of examples with $\operatorname{fix} T_\varphi \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathrm{C}(K)$ is given via systems where $\mathcal{L}$ has codimension 1 in $\mathrm{C}(K)$ or, more general, finite codimension.

Example 3.7.4. Let $(K; \varphi)$ be bijective. Assume that there are $a, b \in K$, $a \neq b$, and

$$\mathcal{L} = \{f \in \mathrm{C}(K) \colon f(a) = f(b)\}.$$

Then the generalized recurrent set is

$$\operatorname{gr} \varphi = \{a, b\} \cup \operatorname{fix} \varphi$$

because $f(a) = f(b)$ for each $f \in \mathrm{C}(K)$ yields, in particular, $f(\varphi(a)) = f(\varphi(b))$. Hence either $\varphi(a), \varphi(b) \in \{a, b\}$ or $\varphi(a) = \varphi(b)$. Since the latter contradicts the bijectivity of φ, this implies $\{a, b\} \subseteq \operatorname{gr} \varphi$. Conversely, for $x \in \operatorname{gr} \varphi$, i. e., $f(x) = f(\varphi(x))$ for all $f \in \mathcal{L}$ we obtain $x, \varphi(x) \in \{a, b\}$ or $\varphi(x) = x$, hence $\operatorname{gr} \varphi \subseteq \{a, b\} \cup \operatorname{fix} \varphi$.

Therefore, there are three possibilities for the dynamics φ on $\{a, b\}$.

(i) a and b form a 2-cycle, hence $\varphi(a) = b$ and $\varphi(b) = a$;

(ii) both a and b are fixed, hence $\varphi(a) = a$ and $\varphi(b) = b$;

(iii) only one of the points a and b is fixed, hence $\varphi(a) = a$ and $\varphi(b) = a$ or vice versa.

Case (iii) contradicts the bijectivity of φ. Can also the case (ii) be excluded? This is true under the additional assumption that one of the points – say a – is isolated:

Assume that a is a fixed point and take $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$. Define $\tilde{f}$ as $\tilde{f}(x) \coloneqq f(x)$ for $x \neq a$ and $\tilde{f}(a) = f(a) - \varepsilon$ for $0 < \varepsilon < f(a)$. Since a is isolated, then $\tilde{f} \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ contradicting $\mathcal{L} = \{f \in \mathrm{C}(K) \colon f(a) = f(b)\}$.

Hence for a isolated we have the 2-cycle

$$\varphi(a) = b,\ \varphi(b) = a.$$

Example 3.7.5. Take K as the closure in $\mathbb{R}^2$ of

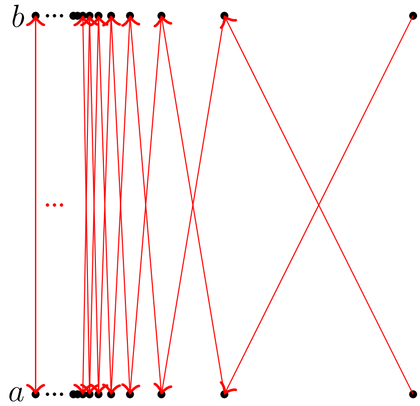
$$\{(\tfrac{1}{n}, m) \colon n \in \mathbb{N},\, m \in \{0,1\}\}$$

and $\varphi \colon K \to K$ with

$$\varphi(\tfrac{1}{n}, 0) := (\tfrac{1}{n+1}, 1) \text{ and } \varphi(\tfrac{1}{n}, 1) := (\tfrac{1}{n+1}, 0),$$

$$\varphi(0,0) := (0,1) \text{ and } \varphi(0,1) := (0,0)$$

for $n \in \mathbb{N}$.



Then

$$\operatorname{gr}\varphi = \{a, b\}$$

for $a := (0,0)$, $b := (0,1)$,

$$\mathcal{L} = \{f \in \mathrm{C}(K) \colon f(a) = f(b)\}$$

and the dynamics on a, b is a 2-cycle.

For systems with $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$ or $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi$ the Lyapunov algebra $\mathcal{L}$ separates the points in $(\operatorname{gr}\varphi)^c$. In case that $\operatorname{fix} T_\varphi \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathrm{C}(K)$ it is likely but still unclear whether this property holds.

Conjecture 3.7.6. The Lyapunov algebra $\mathcal{L}$ always separates the points of the complement $(\operatorname{gr}\varphi)^c$ of the generalized recurrent set.

For the special case that $\operatorname{gr}\varphi$ is uniformly attractive, this will be shown in Corollary 3.9.9. Another observation is the following.

Remark 3.7.7. Let φ be injective and $\operatorname{orb}(x) \subseteq (\operatorname{gr}\varphi)^c$ for all $x \in (\operatorname{gr}\varphi)^c$. Consider the set

$$S \coloneqq \{x \in (\operatorname{gr}\varphi)^c \colon \text{there is } y \in (\operatorname{gr}\varphi)^c, y \neq x \text{ with } f(x) = f(y) \\ \text{for all } f \in \mathcal{L}\}.$$

By injectivity of φ we have that S is φ-invariant. This implies that S cannot be closed since every closed and φ-invariant set has non-empty intersection with $\operatorname{gr}\varphi$ (see Corollary 3.4.7). In particular, S is either infinite or empty.

Directly related to the conjecture above are the following conditions.

Proposition 3.7.8. *The following are equivalent.*

(a) The Lyapunov algebra $\mathcal{L}$ separates the points of $(\operatorname{gr}\varphi)^c$.

(b) The Lyapunov ideal is contained in the Lyapunov algebra,

$$I_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{L}.$$

(c) If $p(x) = p(y)$ for $x \neq y \in K$ where $p\colon K \to L$ denotes the factor map for $\mathcal{L} = \mathrm{C}(L)$, then $x, y \in \operatorname{gr}\varphi$.

Proof. The implication (a) $\Rightarrow$ (c) is clear. To show (c) $\Rightarrow$ (a) assume that $\mathcal{L}$ does not separate the points of $(\operatorname{gr}\varphi)^c$. Take $x, y \in (\operatorname{gr}\varphi)^c$ with $x \neq y$ and $f(x) = f(y)$ for all $f \in \mathcal{L}$. By Lemma 1.2.5 (a) then $p(x) = p(y)$ yielding $x, y \in \operatorname{gr}\varphi$, thus a contradiction.

Clearly, there always exists some $f \in I_{\mathcal{L}}$ separating the points of $(\operatorname{gr}\varphi)^c$. Thus, if condition (b) holds true, then there is $f \in \mathcal{L}$ which separates the points of $(\operatorname{gr}\varphi)^c$. This shows (b) $\Rightarrow$ (c).

For (c) $\Rightarrow$ (b) note that condition (c) is equivalent to $I_{\mathcal{L}} \oplus \langle \mathbb{1}_K \rangle \cong \mathrm{C}(X) \subseteq \mathrm{C}(L) = \mathcal{L}$ where X denotes the one-point compactification of $(\operatorname{gr}\varphi)^c$. Hence also $I_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{L}$. $\square$

Recall from Example 3.2.11 that $\operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$ is not always closed. We now show that $\mathcal{L}$ coincides with $\operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$ if and only if the generalized recurrent set is absorbing. Before doing so, we give a special case.

Lemma 3.7.9. *Let $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$ and $\operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$ be closed. Then the generalized recurrent set $\operatorname{gr}\varphi$ is absorbing.*

Proof. Assume that $\operatorname{gr}\varphi$ is not absorbing. First, consider the case that $\operatorname{gr}\varphi$ is neither pointwise absorbing, hence there is some $x \in (\operatorname{gr}\varphi)^c$ such that $\overline{\operatorname{orb}(x)} \cap \operatorname{gr}\varphi = \emptyset$. Define a function $\tilde{f}$ on $\overline{\operatorname{orb}}(x)$ as

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\varphi^{2n}(x)) &:= 0, \\ \tilde{f}(\varphi^{2n+1}(x)) &:= \tfrac{1}{n+1} \end{aligned}$$

for $n \in \mathbb{N}_0$ and

$$\tilde{f}(y) := 0$$

where $y := \lim_{n\to\infty} \varphi^n(x)$ is the unique limit point as in Proposition 3.6.1. Then $\tilde{f}$ is continuous on $\overline{\operatorname{orb}}(x)$ and hence by Tietze's extension theorem there is some $f \in \mathrm{C}(K)$ such that $f|_{\operatorname{orb}(x)} = \tilde{f}$. Assume that $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$, hence there are $f_1, f_2 \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ such that $f = f_1 - f_2$. Then

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{n+1} &= f(\varphi^{2n+1}(x)) \\ &\le f_1(\varphi^{2n+1}(x)) \le f_1(\varphi^{2n}(x)) \\ &= f_2(\varphi^{2n}(x)) \le f_2(\varphi^{2n-1}(x)) \\ &= f_1(\varphi^{2n-1}(x)) - f(\varphi^{2n-1}(x)) \\ &= f_1(\varphi^{2n-1}(x)) - \tfrac{1}{n} \end{aligned}$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Inductively, this yields

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{n+1} &\le f_1(\varphi^{2n-1}(x)) - \tfrac{1}{n} \\ &\le f_1(\varphi^{2(n-1)-1}(x)) - \tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n} \\ &\le \dots \\ &\le f_1(x) - 1 - \tfrac{1}{2} - \dots - \tfrac{1}{n} \end{aligned}$$

and therefore

$$f_1(x) \ge \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k+1}$$

for all $n \in \mathbb{N}$ which is a contradiction.

Now, as a second case assume that $\operatorname{gr}\varphi$ is pointwise absorbing, hence $\operatorname{orb}(x) \cap \operatorname{gr}\varphi \neq \emptyset$ for all $x \in \operatorname{gr}\varphi$. Since $\operatorname{gr}\varphi$ is not absorbing, though, there are points with arbitrary orbit length in $(\operatorname{gr}\varphi)^c$. Thus we can take a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\operatorname{gr}\varphi)^c$ such that for each $n \in \mathbb{N}$ the orbit of x_n has length 2^n in $(\operatorname{gr}\varphi)^c$, hence we have $\varphi(x_n), \dots, \varphi^{2n}(x_n) \in (\operatorname{gr}\varphi)^c$ and $\varphi^{2n+1}(x_n) \in \operatorname{gr}\varphi$. For the closed set

$$S := \operatorname{gr}\varphi \cup \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{orb}(x_n)}$$

define a function $\tilde{f}$ on S as

$$\tilde{f}(\varphi^k(x_n)) = \begin{cases} 0 & \text{for } k \in \{0, \dots, 2^n\} \text{ uneven,} \\ \frac{1}{n} & \text{for } k \in \{0, \dots, 2^n\} \text{ even} \end{cases}$$

for each $n \in \mathbb{N}$ and

$$\tilde{f}|_{S\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{orb}(x_n)} \equiv 0.$$

Then $\tilde{f}$ is continuous on S yielding that there is some $f \in \mathrm{C}(K)$ with $f|_S = \tilde{f}$.

Assume that there are $f_1, f_2 \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ such that $f = f_1 - f_2$. Inductively, we show that $f_1(x_n) \geq m \cdot \frac{1}{n}$ for $n \in \mathbb{N}$ and $m \in \{1, \dots, 2^{n-1}\}$.

For $m = 1$, clearly $f_1(x_n) \geq f(x_n) = \frac{1}{n}$. Now take $m \in \{1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ and assume that $f_1(x) \geq m \cdot \frac{1}{n}$. Then

$$f_2(x_n) \geq f_2(\varphi(x_n)) = f_1(\varphi(x_n)) \geq f_1(\varphi^2(x_n)) \geq f(\varphi^2(x_n)) = \tfrac{1}{n}$$

yields

$$f_1(x_n) \geq m \cdot \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} = (m+1) \cdot \tfrac{1}{n}.$$

Hence f_1 is unbounded which is a contradiction. □

By means of this lemma, we can now prove the general case.

Theorem 3.7.10. *We have that* $\operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$ *is closed if and only if the generalized recurrent set* $\operatorname{gr}\varphi$ *is absorbing.*

Proof. Let $\operatorname{gr}\varphi$ be absorbing, hence there is $N \in \mathbb{N}$ such that $\varphi^N(K) \subseteq \operatorname{gr}\varphi$. Take $f \in \mathcal{L}$. Without loss of generality assume that f is positive and define

$$\begin{aligned} f_1 &:= \sum_{k=1}^{N} (T_\varphi^{k-1} f - T_\varphi^k f)^+ \quad + \quad T^N f, \\ f_2 &:= \sum_{k=1}^{N} (T_\varphi^{k-1} f - T_\varphi^k f)^-. \end{aligned}$$

Then f_1, f_2 are continuous, positive and

$$f = f_1 - f_2.$$

By $T_\varphi^{N+1} f = T_\varphi^N f$ we obtain

$$\begin{aligned} T_\varphi f_1(x) &= \sum_{k=1}^{N} T_\varphi (T_\varphi^{k-1} f - T_\varphi^k f)^+(x) \quad + \quad T_\varphi^{N+1} f(x) \\ &= \sum_{\substack{k \in \{1,\ldots,N\}: \\ T_\varphi^k f(x) \geq T_\varphi^{k+1} f(x)}} (T_\varphi^k f - T_\varphi^{k+1} f)(x) \quad + \quad T_\varphi^N f(x) \\ &= \sum_{\substack{k \in \{2,\ldots,N\}: \\ T_\varphi^{k-1} f(x) \geq T_\varphi^k f(x)}} (T_\varphi^{k-1} f - T_\varphi^k f)(x) \quad + \quad T_\varphi^N f(x) \\ &\leq \sum_{\substack{k \in \{1,\ldots,N\}: \\ T_\varphi^{k-1} f(x) \geq T_\varphi^k f(x)}} (T_\varphi^{k-1} f - T_\varphi^k f)(x) \quad + \quad T_\varphi^N f(x) \\ &= f_1(x) \end{aligned}$$

for $x \in K$. Hence $f_1 \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ and, similarly, $f_2 \in \operatorname{subfix} T_\varphi$. Therefore,

$$f \in \operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi.$$

Conversely, let $\operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$ be closed. Then by Proposition 3.7.1 also $\operatorname{subfix} T_\psi - \operatorname{subfix} T_\psi$ is closed for the quotient system $(L; \psi)$ corresponding to $(\mathcal{L}; T_\varphi|_\mathcal{L})$. Hence Lemma 3.7.9 implies that $\operatorname{gr} \psi$ is absorbing, thus there exists $N \in \mathbb{N}_0$ such that $\psi^N(L) \subseteq \operatorname{gr} \psi$. Then for each $\tilde{f} \in \mathrm{C}(L)$ we have

$$T_\psi^N \tilde{f} = T_\psi^{N+1} \tilde{f}$$

and by the universal property of the quotient topology this yields

$$T_\varphi^N f = T_\varphi^{N+1} f$$

for all $f \in \mathcal{L}$. Therefore, also $\operatorname{gr} \varphi$ is absorbing. $\square$

Below we give an example where $\operatorname{gr}\varphi$ is pointwise absorbing and $\operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$ not closed. Note that this example shows that a closed and φ-invariant set may be pointwise absorbing and uniform attractive but not absorbing (cf. Remark 3.1.8).

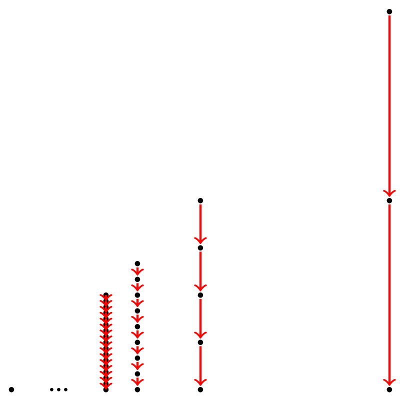
Example 3.7.11. Take

$$K := \{(\tfrac{1}{n}, \tfrac{k}{2^n n})\colon n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n\}\} \cup \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

with

$$\begin{aligned} \varphi(\tfrac{1}{n}, 0) &:= (\tfrac{1}{n}, 0), \\ \varphi(0,0) &:= (0,0), \\ \varphi(\tfrac{1}{n}, \tfrac{k}{2^n n}) &:= (\tfrac{1}{n}, \tfrac{k-1}{2^n n}) \end{aligned}$$

for $k \in \{1, \dots, 2^n\}$ and $n \in \mathbb{N}$.



Then $\operatorname{gr}\varphi = \{(\tfrac{1}{n}, 0)\colon n \in \mathbb{N}\} \dot\cup \{(0,0)\}$ is pointwise absorbing. Take $f \in \mathrm{C}(K) = \mathcal{L}$ as

$$f(\tfrac{1}{n}, \tfrac{k}{2^n n}) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{for } k \in \{0, \dots, 2^n\} \text{ uneven,} \\ 0 & \text{for } k \in \{0, \dots, 2^n\} \text{ even} \end{cases}$$

for $n \in \mathbb{N}$ and

$$f(0,0) := 0.$$

Similarly as in the proof of Lemma 3.7.9 we obtain that $f \notin \operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$.

3.8 Algebras generated by a single Lyapunov function

In this section invariant algebras generated by a single Lyapunov function are studied, hence algebras of the form

$$\mathcal{L}_f := \overline{\mathrm{alg}}(\mathbb{1}_K, f, T_\varphi f, T_\varphi^2 f, ...)$$

for some (strict) Lyapunov function $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$. Clearly, there is some compact space L_f such that

$$\mathcal{L}_f \cong \mathrm{C}(L_f).$$

Moreover, $\mathcal{L}_f$ is a T_φ-invariant closed Banach subalgebra of the Lyapunov algebra $\mathcal{L}$ and

$$\mathcal{L} = \overline{\mathrm{lin}}\{\mathcal{L}_f \colon f \in \operatorname{subfix} T_\varphi\}.$$

This motivates to study systems where $\mathcal{L} = \mathcal{L}_f$ for some strict Lyapunov function f. The following example shows that, in general, $\mathcal{L}$ does not coincide with $\mathcal{L}_f$ for an arbitrary strict Lyapunov function f.

Example 3.8.1. Take $K := [-1, 1]$ with $\varphi(x) = x^2$ for $x \in [-1, 1]$ and the strict Lyapunov function

$$f(x) := |x|,\ x \in [-1, 1].$$

Here, $\mathcal{L}_f = \{g \in \mathrm{C}(K) \colon g(x) = g(-x) \text{ for all } x \in K\}$. Then for example $f_0 \colon K \to \mathbb{R}$ with

$$f_0(x) = \begin{cases} |x| & \text{for } x \in [-1, 0], \\ \frac{1}{2}|x| & \text{for } x \in (0, 1] \end{cases}$$

defines a Lyapunov function but $f_0 \notin \mathcal{L}_f$ because it is not axial symmetric. Hence $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}_f$.

If $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi$ or $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$, the existence of $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ such that $\mathcal{L} = \mathcal{L}_f$ is characterized as follows.

Proposition 3.8.2. *(a) Let $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi$. Then there is some $f \in \mathcal{L}$ such that $\mathcal{L} = \mathcal{L}_f$ if and only if $\operatorname{fix} T_\varphi = \langle \mathbb{1}_K \rangle$ or $\operatorname{fix} T_\varphi = \overline{\mathrm{alg}}(\mathbb{1}_K, f)$.*

(b) Let $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$. *Then*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f$$

if and only if $\{f, T_\varphi f, ...\}$ *separates the points of* K.

Proof. If $\mathcal{L}_f \subseteq \operatorname{fix} T_\varphi$ for some $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$, then clearly $T_\varphi f = f$ showing (a).

If $\{f, T_\varphi f, ...\}$ separates the points of K, then $\mathcal{L}_f = \mathrm{C}(K)$ by the Stone–Weierstraß theorem. Conversely, let $\mathcal{L}_f = \mathrm{C}(K)$ and assume that $\{f, T_\varphi f, ...\}$ does not separate the points of K, hence there are $x, y \in K$ such that $T_\varphi^n f(x) = T_\varphi^{n+1} f(y)$ for all $n \in \mathbb{N}_0$. Hence $g(x) = g(y)$ for all $g \in \mathrm{C}(K)$ which is a contradiction. Thus, (b) holds true. $\square$

The next proposition reveals a necessary condition for the case $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K) = \mathcal{L}_f$.

Proposition 3.8.3. *Let* $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$. *If* $\mathcal{L} = \mathcal{L}_f$ *for some* $f \in \mathcal{L}$, *then* f *separates the points of* $\operatorname{gr} \varphi$.

Proof. Assume there are $x \neq y \in \operatorname{gr} \varphi$ such that $f(x) = f(y)$. Since $\operatorname{gr} \varphi = \operatorname{fix} \varphi$, then also $T_\varphi^n f(x) = T_\varphi^n f(y)$ for all $n \in \mathbb{N}$ contradicting $\mathcal{L} = \mathcal{L}_f$. $\square$

From Proposition 3.8.3 it can be seen that there are systems with $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$ and $\mathcal{L}_f \neq \mathcal{L}$ for all $f \in \mathcal{L}$.

Example 3.8.4. Take the annulus (cf. Example 3.2.14 (e))

$$K := A_{\frac{1}{2},1} = \{r\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\alpha} \colon r \in [\tfrac{1}{2}, 1] \text{ and } \alpha \in [0,1)\} \subseteq \mathbb{C}$$

and

$$\varphi(r\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\alpha}) := \left(2r^2 - 2r + 1\right) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\alpha}$$

for each $r \in [\frac{1}{2}, 1]$ and $\alpha \in [0,1)$. Then $\operatorname{gr} \varphi = \frac{1}{2}\mathbb{T} \cup \mathbb{T}$. Since for each continuous function $\tilde{f} \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ there are $x, y \in \mathbb{T}$ such that $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y)$, there exists no strict Lyapunov function separating the points of $\operatorname{gr} \varphi$.

Conversely, if $f \in \mathcal{L}$ separates the points of $\operatorname{gr}\varphi$, $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}_f$ is possible, though. This can be seen from the next example.

Example 3.8.5. Now take

$$K := \{r\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha} : 0 \leq r \leq \tfrac{1}{2}\} \subseteq \mathbb{C}$$

with

$$\varphi(r\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}) := r^2\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}$$

for each $r \in [0, \frac{1}{2}]$ and $\alpha \in [0, 1)$. Then $f(r\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}) := r$ for each $r \in [0, \frac{1}{2}]$, $\alpha \in [0, 1)$ defines a strict Lyapunov function separating the points of $\operatorname{gr}\varphi = \{0\}$. Clearly, $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}_f$ since f is radially symmetric.

Next, the case where $\mathcal{L}_f$ is finitely generated is studied in more detail, i. e., we assume

$$\mathcal{L}_f = \overline{\operatorname{alg}}(\mathbb{1}_K, f, ..., T_\varphi^n f)$$

for some $n \in \mathbb{N}_0$.

Proposition 3.8.6. *If there is $n \in \mathbb{N}_0$ such that $\mathcal{L}_f = \overline{\operatorname{alg}}(\mathbb{1}_K, f, ..., T_\varphi^n f) \cong \mathrm{C}(L_f)$, then L_f is homeomorphic to some compact subset of $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Proof. Define

$$\Phi\colon L_f \to \mathbb{R}^{n+1},\ x \mapsto \begin{pmatrix} f(x) \\ \vdots \\ T_\varphi^n f(x) \end{pmatrix}.$$

Clearly, Φ is injective. Thus, $L_f \cong \Phi(L_f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. □

Example 3.8.7. If $\operatorname{gr}\varphi$ is absorbing, i. e., there is some $n \in \mathbb{N}$ such that $\varphi^n(K) \subseteq \operatorname{gr}\varphi$, then we have $T_\varphi^n f = T_\varphi^{n+1} f$ for all $f \in \mathcal{L}$. Therefore, $\mathcal{L}_f = \overline{\operatorname{alg}}(\mathbb{1}_K, f, ..., T_\varphi^n f)$ and L_f is homeomorphic to some compact subset of $\mathbb{R}^{n+1}$.

Corollary 3.8.8. *If there exists a strict Lyapunov function f separating the points of K, then $T_\varphi^n f \in \overline{\operatorname{alg}}(\mathbb{1}_K, f)$ for all $n \in \mathbb{N}$. Moreover,*

$$\overline{\operatorname{alg}}(\mathbb{1}_K, f) = \mathcal{L}_f = \mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$$

and K is homeomorphic to some compact subset of $\mathbb{R}$.

Lastly, a number of counterexamples concerning Corollary 3.8.8 are given. The first example shows that $T_\varphi^n f \in \overline{\mathrm{alg}}(\mathbb{1}_K, f)$ for all $n \in \mathbb{N}$ does not imply that f is point-separating in K.

Example 3.8.9. Let $K \coloneqq [-1,1]$ and $\varphi(x) \coloneqq \frac{1}{2}x$ for $x \in [-1,1]$. Then $\operatorname{gr}\varphi = \{0\}$ and

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$$

is a strict Lyapunov function with $T_\varphi^n f = \left(\frac{1}{2}\right)^n f \in \overline{\mathrm{alg}}(\mathbb{1}_K, f)$ for all $n \in \mathbb{N}_0$, but f does not separate the points in $[-1,1]$.

In general, a strict Lyapunov function f does not yield $T_\varphi f \in \overline{\mathrm{alg}}(\mathbb{1}_K, f)$ as can be seen by the example below.

Example 3.8.10. Let $K \coloneqq [-1,1]$ and

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for } x \in [0,1], \\ \frac{1}{2}|x| & \text{for } x \in [-1,0). \end{cases}$$

Then $\operatorname{gr}\varphi = \{0,1\}$ and $f(x) \coloneqq |x|$ for $x \in [-1,1]$ defines a strict Lyapunov function. We have

$$\overline{\mathrm{alg}}(\mathbb{1}_K, f) = \{g \in \mathrm{C}(K)\colon g(x) = g(-x) \text{ for all } x \in K\},$$

thus $T_\varphi f = \varphi \notin \overline{\mathrm{alg}}(\mathbb{1}_K, f)$.

The following example shows that $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}$ for some strict Lyapunov function f does not imply that f separates the points of K.

Example 3.8.11. Let $K \coloneqq [-1,1]$ and $\varphi(x) \coloneqq x^2$ for $x \in K$. Take the strict Lyapunov function f with

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} |x| & \text{for } x \in [-1,0], \\ \frac{1}{2}x & \text{for } x \in (0,1]. \end{cases}$$

Then f does not separate the points in K. By the Stone–Weierstraß theorem we have $\mathcal{L}_f = \overline{\mathrm{alg}}(f, T_\varphi f) = \mathrm{C}(K)$ because for any $x, y \in K$ with $x \neq y$ and $f(x) = f(y)$ we have $T_\varphi f(x) \neq T_\varphi f(y)$.

Remark 3.8.12. In Example 3.8.11 the Lyapunov algebra is

$$\mathcal{L} = \overline{\mathrm{alg}}(\mathbb{1}_K, f, T_\varphi f) = \mathrm{C}(K)$$

hence Proposition 3.8.6 yields that K is isomorphic to some compact subset in $\mathbb{R}^2$. In fact, even $K = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$. This shows that the dimension $n + 1$ in Proposition 3.8.6 is only an upper bound. Moreover, this example shows that K being homeomorphic to some compact subset in $\mathbb{R}$ does not imply that there is some point-separating Lyapunov function.

3.9 Extended Lyapunov functions

In this section, another approach to the Lyapunov ideal $I_\mathcal{L}$ and the generalized recurrent set $\mathrm{gr}\,\varphi$ (see Section 3.4) is introduced. To do so, take $f \in \mathrm{subfix}\,T_\varphi$ and as before $g_f := f - T_\varphi f \geq 0$. Now define

$$h_f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} T_\varphi^k g_f(x)$$

for all $x \in K$. Then

$$0 \leq h_f(x) < \infty$$

for all $x \in K$ because the partial sums $h_{n,f}(x) := \sum_{k=0}^{n} T_\varphi^k g_f(x) = f(x) - T_\varphi^n f(x)$ are monotonically increasing and bounded by $f(x)$. In particular, $0 \leq h_f \leq f$, thus h_f is a bounded function.

We call h_f the *extended Lyapunov function associated with f*.

Remark 3.9.1. (a) For $f \in \mathrm{subfix}\,T_\varphi$, the extended Lyapunov function h_f can also be obtained as

$$\begin{aligned} h_f(x) &= f(x) - \lim_{n\to\infty} T_\varphi^n f(x) \\ &= f(x) - \inf_{n\in\mathbb{N}_0} T_\varphi^n f(x) \end{aligned}$$

for $x \in K$.

(b) As a pointwise limit of continuous functions h_f is a Baire-1-function, thus

$$h_f \in \mathrm{B}_1(K),$$

where $\mathrm{B}_1(K)$ denotes the space of bounded Baire-1 functions on K. That $\mathrm{B}_1(K)$ is a Banach space with respect to the supremum norm follows, e. g., from HAUSDORFF [24, Chapter IX, §41, Section 2 and §42, Section 1]. The Koopman operator on $\mathrm{B}_1(K)$ is defined as on $\mathrm{C}(K)$.

(c) Moreover,

$$T_\varphi h_f \leq h_f$$

since

$$\begin{aligned} T_\varphi h_f(x) &= \lim_{n\to\infty} T_\varphi h_{n,f}(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} T_\varphi^k g_f(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} h_{n+1,f}(x) - f(x) \\ &= h_f(x) - f(x) \\ &\leq h_f(x) \end{aligned}$$

for all $x \in K$.

We have that

$$[h_f = 0] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} [T_\varphi^n g_f = 0]$$

is closed. Hence $I_{[h_f=0]}$ is a closed ideal in $\mathrm{C}(K)$ even though h_f is, in general, not continuous. More specifically, $I_{[h_f=0]}$ coincides with the ideal

$$I_{\bigcap_{m\in\mathbb{N}_0}[T_\varphi^m g_f=0]}$$

introduced in Section 3.3.

By this, Proposition 3.3.7 yields the following inclusions for $I_{[h_f=0]}$.

Remark 3.9.2. For $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$, the inclusions

$$I_{[g_f=0]} \subseteq I_{[h_f=0]} \subseteq I_{[f=0]}$$

and

$$I_{[h_f=0]} \subseteq I_{\mathcal{L}}$$

for the Lyapunov ideal $I_{\mathcal{L}}$ (see Section 3.3) hold true.

Even for a strict Lyapunov function f it may happen that $I_{[h_f=0]} \subsetneq I_{[f=0]}$ and $h_f \notin \mathrm{C}(K)$ for the corresponding extended Lyapunov function as the following example shows.

Example 3.9.3. Let $K := [0,1]$ with $\varphi(x) := x^2$. Then f with $f(x) := x$ for $x \in [0,1]$ is a strict Lyapunov function. Consider

$$h_f(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} T_\varphi^n f(x) = \lim_{n\to\infty} x - x^{2^n} = \begin{cases} x & \text{for } x \in [0,1), \\ 0 & \text{for } x = 1. \end{cases}$$

Then $I_{[h_f=0]} = I_{\{0,1\}} \subsetneq I_{\{0\}} = I_f$ and clearly $h_f \notin \mathrm{C}(K)$.

Extended Lyapunov functions provide a new way to obtain the Lyapunov ideal $I_{\mathcal{L}}$ and the generalized recurrent set $\operatorname{gr}\varphi$, respectively.

Remark 3.9.4. (a) Clearly,

$$I_{\mathcal{L}} = I_{\bigcap_{f\in\operatorname{subfix} T_\varphi}[h_f=0]}$$

for the Lyapunov ideal and

$$\operatorname{gr}\varphi = \bigcap_{f\in\operatorname{subfix} T_\varphi} [h_f = 0]$$

for the generalized recurrent set.

(b) Let f be a strict Lyapunov function. Then

$$I_{\mathcal{L}} = I_{[h_f=0]}$$

and

$$\operatorname{gr}\varphi = [h_f = 0]$$

by Theorem 3.3.8.

Example 3.9.5. For an arbitrary $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ it may happen that $\operatorname{gr}\varphi \subsetneq [h_f = 0]$. This can be seen from $f := \mathbb{1}_K \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ for any system $(K;\varphi)$ yielding always

$$[h_f = 0] = K$$

for the corresponding extended Lyapunov function.

Next, we turn towards continuity properties of extended Lyapunov functions. As seen in Example 3.9.3, for $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ the corresponding extended Lyapunov function h_f is in general not continuous and its continuity properties are closely related to the generalized recurrent set. We start with two special cases.

Remark 3.9.6. (a) Let $x \in K$ be an attractive fixed point (hence there is some $U \in \mathcal{U}(x)$ such that $\varphi^n(y) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ for all $y \in U$) and $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$. Then h_f is continuous in x.

(b) If $\operatorname{gr}\varphi$ is absorbing, then h_f is continuous for any Lyapunov function f.

Proof. We first show (a). Since x is attractive, there is some $U \in \mathcal{U}(x)$ such that $\varphi^n(y) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ for all $y \in U$. Let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ such that $x_n \to x$. Then there is some $N \geq 0$ such that $x_n \in U$ for all $n \geq N$. This implies that $\lim_{m\to\infty} f(\varphi^m(x_n)) = f(\varphi(x)) = f(x)$ for all $n \geq N$ and hence

$$h_f(x_n) = f(x_n) - \lim_{m\to\infty} f(\varphi^m(x_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} h_f(x)$$

yielding the continuity of h_f in x.

For the proof of (b) take some Lyapunov function f. Take $x \in K$ and a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq K$ with $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Since $\operatorname{gr}\varphi$ is absorbing, there is some $N \in \mathbb{N}_0$ such that $\varphi^N(K) \subseteq \operatorname{gr}\varphi$. Then

$$\begin{aligned} h_f(x_n) &= f(x_n) - \inf_{k\in\mathbb{N}_0} f(\varphi^k(x_n)) \\ &= f(x_n) - \min_{k\in\{0,\ldots,N\}} f(\varphi^k(x_n)) \\ &= f(x_n) - f(\varphi^N(x_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) - f(\varphi^N(x)) \\ &= h_f(x) \end{aligned}$$

yielding the continuity of h_f. $\square$

Continuity of h_f for some strict Lyapunov function f can be characterized by uniform attractivity of $\operatorname{gr}\varphi$ – thus a strong form of attractivity.

Theorem 3.9.7. *The following are equivalent.*

(a) The generalized recurrent set $\operatorname{gr}\varphi$ *is uniformly attractive.*

(b) There is a strict Lyapunov function f *such that* $f|_{\operatorname{gr}\varphi} \equiv 0$.

(c) There is a strict Lyapunov function f *such that the corresponding extended Lyapunov function* h_f *is continuous.*

Proof. To show (b) $\Rightarrow$ (c) recall that $\omega(x) \subseteq \operatorname{gr}\varphi$ for all $x \in K$ by Lemma 3.2.10 yielding

$$h_f(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} f(\varphi^n(x)) = f(x).$$

Thus $h_f = f$ is continuous.

For the implication (c) $\Rightarrow$ (a) assume that h_f is continuous for some strict Lyapunov function f. By Remark 3.9.4 (b) then $\operatorname{gr}\varphi = h_f^{-1}(\{0\})$. Hence $h_f^{-1}([0,\varepsilon))$ is an open neighborhood of $\operatorname{gr}\varphi$ for every $\varepsilon > 0$. Take $U \in \mathcal{U}(\operatorname{gr}\varphi)$ open. Then $\varepsilon < \min_{x\in U^c} h_f(x)$ yields $h_f^{-1}([0,\varepsilon)) \subseteq U$, hence $(h_f^{-1}([0,\varepsilon)))_{\varepsilon>0}$ is a neighborhood basis of $\operatorname{gr}\varphi$. In particular,

$$\operatorname{gr}\varphi = \bigcap_{\varepsilon>0} h_f^{-1}([0,\varepsilon)).$$

Since $h_f^{-1}([0,\varepsilon))$ is φ^n-invariant for all $\varepsilon > 0$ and $n \in \mathbb{N}_0$ this shows that $\operatorname{gr}\varphi$ is stable in the sense of Lyapunov by Lemma 3.1.9. Hence $\operatorname{gr}\varphi$ is uniformly attractive by Corollary 3.4.20.

For (a) $\Rightarrow$ (b) we expand the proof of Theorem 4.11 in Kühner [31]. Take $g \in I_{\operatorname{gr}\varphi}$. Since K is metric, we can assume $g(x) > 0$ for all $x \in (\operatorname{gr}\varphi)^c$. Define

$$l_g(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} g(\varphi^n(x))$$

for $x \in K$. Then $\operatorname{gr}\varphi = [g = 0] = [l_g = 0]$ and

$$l_g(\varphi(x)) \le l_g(x)$$

for all $x \in K$. To show that l_g is continuous take $x \in K$, $\varepsilon > 0$ and

$$V := g^{-1}([0,\varepsilon)) \in \mathcal{U}(\operatorname{gr}\varphi).$$

Since $\operatorname{gr}\varphi$ is uniformly attractive, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that $\varphi^n(K) \subseteq V$ for all $n > N$. This yields

$$|\sup_{n>N} g(\varphi^n(y))| < \varepsilon$$

for all $y \in K$. Moreover, $y \mapsto \max_{0\le n\le N} g(\varphi^n(y))$ is continuous, hence there is some $W \in \mathcal{U}(x)$ such that

$$|\max_{0\le n\le N} g(\varphi^n(x)) - \max_{0\le n\le N} g(\varphi^n(y))| < \varepsilon$$

for all $y \in W$. By the rules for suprema in SCHAEFER [47, Chapter II, §1, Proposition 1.4 (6)] then

$$\begin{aligned}
& |l_g(x) - l_g(y)| \\
\leq\ & |\max_{0\leq n\leq N} g(\varphi^n(x)) - \max_{0\leq n\leq N} g(\varphi^n(y))| + |\sup_{n>N} g(\varphi^n(x)) - \sup_{n>N} g(\varphi^n(y))| \\
\leq\ & |\max_{0\leq n\leq N} g(\varphi^n(x)) - \max_{0\leq n\leq N} g(\varphi^n(y))| + |\sup_{n>N} g(\varphi^n(x))| + |\sup_{n>N} g(\varphi^n(y))| \\
\leq\ & 3\varepsilon
\end{aligned}$$

for all $y \in W$. Thus, l_g is continuous.

By these preliminary considerations a strict Lyapunov function can be constructed as follows. The separability of $\mathrm{C}(K)$ implies that there exists some sequence $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ which is dense in $I^+_{\operatorname{gr}\varphi}$ with $g_i(x) > 0$ for all $x \in (\operatorname{gr}\varphi)^c$ (cf. DIEUDONNÉ [15, Chapter III, Section 10, (3.10.9)]). Define

$$f := \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{l_{g_i}}{2^i \|l_{g_i}\|}.$$

Then $f \in I_{\operatorname{gr}\varphi}$ and $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$. To show that f is strict assume that there is some $x \in (\operatorname{gr}\varphi)^c$ with $f(x) = f(\varphi(x))$. Then $l_{g_i}(x) = l_{g_i}(\varphi(x))$ yielding

$$\begin{aligned}
\max\left(g_i(x), \sup_{n\geq 1} g_i(\varphi^n(x))\right) &= \sup_{n\geq 0} g_i(\varphi^n(x)) \\
&= \sup_{n\geq 0} g_i(\varphi^{n+1}(x)) \\
&= \sup_{n\geq 1} g_i(\varphi^n(x))
\end{aligned}$$

for all $i \in \mathbb{N}$. Hence

$$0 < g_i(x) \leq \sup_{n\geq 1} g_i(\varphi^n(x))$$

for all $i \in \mathbb{N}$. Note that $x \notin \overline{\operatorname{orb}}(\varphi(x))$ because of $x \in (\operatorname{gr}\varphi)^c$. Thus by Urysohn's lemma there is some $g \in I^+_{\operatorname{gr}\varphi}$ such that $g(x) = 1$ and $g|_{\overline{\operatorname{orb}}(\varphi(x))} \equiv 0$. Since $g(x) > \sup_{n\geq 1} g(\varphi^n(x))$ it follows that $g \notin \overline{\{g_i : i \in \mathbb{N}\}} = I^+_{\operatorname{gr}\varphi}$ yielding a contradiction. Therefore, f is a strict Lyapunov function with $f|_{\operatorname{gr}\varphi} \equiv 0$ as desired.

$\square$

It would be interesting to solve the following question or to find a counterexample.

Conjecture 3.9.8. Is $h_f|_{(\operatorname{gr}\varphi)^c}$ continuous for every $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$?

Since
$$h_f|_{\operatorname{gr}\varphi} \equiv 0,$$
this would in particular mean that discontinuities of the extended Lyapunov function h_f can only occur on $\partial \operatorname{gr}\varphi$. A decomposition of K into parts on which each extended Lyapunov function is continuous is constructed in Section 3.10. For $\operatorname{gr}\varphi$ uniformly attractive the desired property is obtained as a consequence of Theorem 3.9.7.

Corollary 3.9.9. *If the generalized recurrent set* $\operatorname{gr}\varphi$ *is uniformly attractive, then the Lyapunov algebra $\mathcal{L}$ separates the points of* $(\operatorname{gr}\varphi)^c$.

Proof. Take $x, y \in (\operatorname{gr}\varphi)^c$. If $x \in \overline{\operatorname{orb}}(y)$ or $y \in \overline{\operatorname{orb}}(x)$ then x and y are separated by any strict Lyapunov function. Thus let $x \notin \overline{\operatorname{orb}}(y)$ and $y \notin \overline{\operatorname{orb}}(x)$. By Urysohn's lemma there exists some $g \in I^+_{\operatorname{gr}\varphi}$ such that $g(x) = 1$ and $g|_{\overline{\operatorname{orb}}(y) \cup \overline{\operatorname{orb}}(\varphi(x))} \equiv 0$ (since clearly $x \notin \overline{\operatorname{orb}}(\varphi(x))$ because it cannot be recurrent). As in the proof of Theorem 3.9.7 the function
$$l_g := \sup_{n \geq 0}\{g \circ \varphi^n\}$$
is a continuous Lyapunov function, thus $l_g \in \operatorname{subfix} T_\varphi$. Moreover, $l_g(x) = 1$ and $l_g(y) = 0$, thus it separates x and y. ☐

Via the extended Lyapunov function h_f associated with some arbitrary $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ we can introduce the Banach algebra
$$\mathcal{A}_{h_f} := \overline{\operatorname{alg}}(\mathrm{C}(K), h_f)$$
in the space of bounded Baire-1 functions $\mathrm{B}_1(K)$ which can be embedded in the chain of inclusions as
$$\operatorname{fix} T_\varphi \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathrm{C}(K) \subseteq \mathcal{A}_{h_f} \subseteq B_1(K)$$
for each $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$.

The algebra $\mathcal{A}_{h_f}$ is clearly a Banach lattice and, more specifically, an AM-space with unit. Hence
$$\mathcal{A}_{h_f} = \mathrm{C}(L)$$
for some compact space L by the representation theorem of Kakutani and Krein. More specifically, L is isomorphic to the space of all normed real-valued lattice homomorphisms on the Banach lattice $\mathcal{A}_{h_f}$ (see Schaefer [47, Chapter II, §7, Theorem 7.4]).

Proposition 3.9.10. *Each algebra $\mathcal{A}_{h_f}$ is T_φ-invariant.*

Proof. It suffices to show $T_\varphi h_f \in \mathcal{A}_{h_f}$. For $x \in K$ we have

$$\begin{aligned} T_\varphi h_f(x) &= h_f(\varphi(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} T_\varphi^n g_f(\varphi(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} T_\varphi^n g_f(x) \\ &= -g_f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} T_\varphi^n g_f(x) = -g_f(x) + h_f(x). \end{aligned}$$

Hence $T_\varphi h_f = h_f - g_f \in \mathcal{A}_{h_f}$. □

Example 3.9.11. Take $K := [0,1]$ and $\varphi(x) := x^2$. As in Example 3.9.3 take the strict Lyapunov function $f(x) := x$, $x \in K$, yielding

$$h_f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \in [0,1), \\ 0 & \text{for } x = 1 \end{cases}$$

for the corresponding extended Lyapunov function. Then

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{h_f} &\cong \{k\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon k\big|_{[0,1)} \text{ uniformly continuous}\} \\ &= \{k\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon k\big|_{[0,1)} \text{ continuously extendable}\} \\ &\cong \mathrm{C}(L) \end{aligned}$$

for $L \cong [0,1] \,\dot\cup\, \{q\}$ for some q. For the induced extension $(L;\psi)$ of $(K;\varphi)$ we have
$$\psi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for } x \in [0,1], \\ q & \text{for } x = q. \end{cases}$$
Moreover, $K \cong L/{\sim}$ for the equivalence relation $\sim$ on L where $x \sim y$ if and only if $x = y$ or $x, y \in \{1, q\}$.

Proof. Clearly, $\mathcal{A}_{h_f} \subseteq \{k\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon k\big|_{[0,1)} \text{ continuously extendable}\}$ because $h_f\big|_{[0,1)}$ is continuously extendable on $[0,1]$.

For the converse inclusion take $k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ where $k\big|_{[0,1)}$ is continuously extendable with continuous extension $\tilde{k}$. Then

$$k = \tilde{k} \cdot \mathbb{1}_{[0,1)} + k(1) \cdot \mathbb{1}_{\{1\}}$$

and $\mathbb{1}_{[0,1)} = h - f + \mathbb{1}_K \in \mathcal{A}_{h_f}$, thus also $\mathbb{1}_{\{1\}} \in \mathcal{A}_{h_f}$. This yields $k \in \mathcal{A}_{h_f}$.

To see $\mathcal{A}_{h_f} \cong \mathrm{C}(L)$ for $L \cong [0,1] \cup \{q\}$, define $\Phi\colon \mathcal{A}_{h_f} \to \mathrm{C}(L)$, $k \mapsto \Phi(k)$ with

$$\Phi(k)(x) := \begin{cases} k(x) & \text{for } x \in [0,1), \\ \tilde{k}(1) & \text{for } x = 1, \\ k(1) & \text{for } x = q \end{cases}$$

for $k \in \mathcal{A}_{h_f}$ where $\tilde{k}$ denotes the continuous extension of $k\big|_{[0,1)}$ to $[0,1]$. Then Φ is clearly a Banach algebra isomorphism with inverse

$$\Phi^{-1}(\hat{k})(x) = \begin{cases} \hat{k}(x) & \text{for } x \in [0,1), \\ \hat{k}(q) & \text{for } x = 1 \end{cases}$$

for $\hat{k} \in \mathrm{C}(L)$.

To show that $(L;\psi)$ defined as above is an extension of $(K;\varphi)$, let $p\colon L \to K$ with

$$p(x) := \begin{cases} x & \text{for } x \in [0,1], \\ 1 & \text{for } x = q. \end{cases}$$

Then p is clearly a continuous surjection with $\varphi \circ p = p \circ \psi$.

By $x \sim y$ if and only if $p(x) = p(y)$ for the equivalence relation on L as above, then clearly $K \cong L/{\sim}$.

□

Remark 3.9.12. As mentioned previously, if $\mathcal{A}_{h_f} \cong \mathrm{C}(L)$ then L is isomorphic to the space of all normed real-valued lattice homomorphisms on $\mathcal{A}_{h_f}$. Thus, in Example 3.9.11 the space L consists of the Dirac measures δ_x for $x \in [0,1]$ and the lattice homomorphism $\mu\colon \mathcal{A}_{h_f} \to \mathbb{R}$, $\mu(\tilde{f}) := \lim_{x\to 1} \tilde{f}(x)$ for $\tilde{f} \in \mathcal{A}_{h_f}$.

Example 3.9.13. Now let $K := \left[0, \frac{3}{2}\right]$ with

$$\varphi(x) := \begin{cases} x^2 & \text{for } x \in [0,1), \\ (x-1)^2 + 1 & \text{for } x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]. \end{cases}$$

Take the strict Lyapunov function $f(x) := x$ for $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$. Then

$$h_f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \in [0,1), \\ x-1 & \text{for } x \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \end{cases}$$

for the extended Lyapunov function associated with f. For the induced algebra, clearly,

$$\mathcal{A}_{h_f} \subseteq \{k\colon \left[0, \tfrac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}\colon k\big|_{[0,1)}, k\big|_{\left[1,\frac{3}{2}\right]} \text{ uniformly continuous}\}$$

because $h_f\big|_{[0,1)}$ and $h_f\big|_{\left[1,\frac{3}{2}\right]}$ is uniformly continuous. To show the converse inclusion take

$$\begin{aligned} k \in \{k\colon \left[0, \tfrac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}\colon k\big|_{\left[1,\frac{3}{2}\right]} &\text{ continuous,} \\ &k\big|_{[0,1)} \text{ continuously extendable to } [0,1]\} \\ = \{k\colon \left[0, \tfrac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}\colon k\big|_{[0,1)}, k\big|_{\left[1,\frac{3}{2}\right]} &\text{ uniformly continuous}\} \end{aligned}$$

and define

$$\tilde{k}(x) := \begin{cases} k(x) & \text{for } x \in [0,1), \\ k(x) + \lim_{x \nearrow 1} k(x) - k(1) & \text{for } x \in \left[1, \frac{3}{2}\right). \end{cases}$$

Then $\tilde{k} \in \mathrm{C}(K)$ and

$$k = \tilde{k} \cdot \mathbb{1}_{[0,1)} + \underbrace{(\tilde{k} - (\lim_{x \nearrow 1} k(x) - k(1)) \cdot \mathbb{1}_K)}_{\in \mathrm{C}(K)} \cdot \mathbb{1}_{\left[1,\frac{3}{2}\right]}.$$

Since $\mathbb{1}_{[0,1)} = h - f + \mathbb{1}_K \in \mathcal{A}_{h_f}$ and $\mathbb{1}_{\left[1,\frac{3}{2}\right]} = \mathbb{1}_K - \mathbb{1}_{[0,1)} \in \mathcal{A}_{h_f}$ then

$$k \in \mathcal{A}_{h_f}.$$

That

$$\mathcal{A}_{h_f} \cong \mathrm{C}(L) \quad \text{for} \quad L \cong [0,1] \cup \left[2, \tfrac{5}{2}\right]$$

can be seen by means of the isomorphism $\Phi\colon \mathcal{A}_{h_f} \to \mathrm{C}(L)$, $k \mapsto \Phi(k)$ with

$$\Phi(k)(x) := \begin{cases} k(x) & \text{for } x \in [0,1)\,, \\ \lim_{x \nearrow 1} k(x) & \text{for } x = 1, \\ k(x-1) & \text{for } x \in \left[2, \frac{5}{2}\right]. \end{cases}$$

for $k \in \mathcal{A}_{h_f}$. The induced extension $(L;\psi)$ of $(K;\varphi)$ is

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for } x \in [0,1]\,, \\ (x-2)^2 + 2 & \text{for } x \in \left[2, \frac{5}{2}\right]. \end{cases}$$

with factor map $p\colon L \to K$,

$$p(x) := \begin{cases} x & \text{for } x \in [0,1]\,, \\ x-1 & \text{for } x \in \left[2, \frac{5}{2}\right] \end{cases}$$

satisfying $\varphi \circ p = p \circ \psi$. The corresponding equivalence relation $\sim$ on L yielding $K \cong L/{\sim}$ is clearly given by $x \sim y$ for $x, y \in L$ if $x = y$ or $x, y \in \{1, 2\}$.

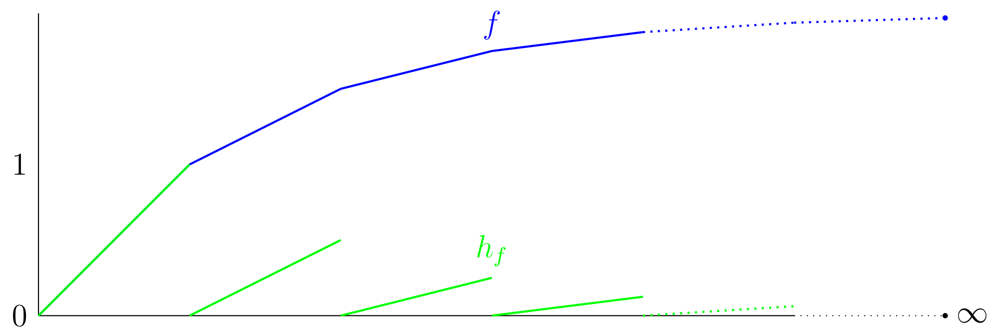
We now turn to the dynamical long line which can be studied by analogy with Example 3.9.11 and Example 3.9.13.

Example 3.9.14. Take the dynamical long line on $[0,\infty]$ as in Example 3.2.14 (b). Then

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2^n}x + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} & \text{for } x \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{N}_0, \\ 2 & \text{for } x = \infty \end{cases}$$

is a strict Lyapunov function yielding

$$h_f(x) = \begin{cases} f(x) - f(n) = \frac{x}{2^n n} & \text{for } x \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{for } x = \infty. \end{cases}$$



By induction then

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{h_f} &\cong \{k\colon [0,\infty] \to \mathbb{R}\colon k\big|_{[n,n+1)} \text{ uniformly continuous for all } n \in \mathbb{N}_0\} \\
&= \{k\colon [0,\infty] \to \mathbb{R}\colon k\big|_{[n,n+1)} \text{ continuously extendable to} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [n,n+1] \text{ for all } n \in \mathbb{N}_0\} \\
&\cong \mathrm{C}(L)
\end{aligned}
$$

for $L \cong \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} [2n, 2n+1] \cup \{\infty\} \subseteq [0,\infty]$ and the induced extension $(L;\psi)$ of $(K;\varphi)$ is

$$\psi(x) = \varphi(x)$$

for all $x \in L$. Moreover, $K \cong L/{\sim}$ for the equivalence relation $\sim$ on L where $x \sim y$ if and only if $x = y$ or $x, y \in \{2n+1, 2n+2\}$ for some $n \in \mathbb{N}_0$.

3.10 Decompositions

In this section, we present different decompositions of the state space K and the generalized recurrent set $\operatorname{gr}\varphi$ by means of the Lyapunov algebra $\mathcal{L}$. Such decompositions play an important role in the theory of dynamical systems and the so-called *Conley decomposition* is even referred to as "fundamental theorem of dynamical systems" in Norton [43].

Conley decomposition and decomposition via the generalized recurrent set

The famous Conley decomposition has been introduced in Conley [11] for continuous-time dynamical systems and gained considerable importance (cf. for example Mischaikow, Mrozek & Zgliczyński [40], Hurley [27], McGehee & Wiandt [38] or Chen & Duan [10] to name a few). For a discrete-time version see, e. g., Norton [42] or [43]). In our terminology and in a slightly weaker form it reads as follows.

Theorem 3.10.1 (Conley decomposition theorem)**.** *Take the chain recurrent set $\operatorname{cr}\varphi$ of $(K;\varphi)$ (see Definition 3.1.1). Then there is $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ such that $T_\varphi f(x) < f(x)$ for all $x \in (\operatorname{cr}\varphi)^c$.*

The idea behind this theorem is to split the state space K into a part that exhibits a certain kind of recurrence and a part, where the dynamics goes "down-hill" towards the recurrent part, namely

$$K = \operatorname{cr}\varphi \,\cup\, (\operatorname{cr}\varphi)^c.$$

Having this in mind, we find that the generalized recurrent set $\operatorname{gr}\varphi$ allows a similar decomposition as

$$K = \operatorname{gr}\varphi \,\cup\, (\operatorname{gr}\varphi)^c.$$

Here, K is decomposed into the closed φ-invariant set $\operatorname{gr}\varphi$ and the open, locally compact set $(\operatorname{gr}\varphi)^c$. As seen in Section 3.4, the generalized recurrent set has nice properties such as being pointwise attractive shown in Proposition 3.4.17. It contains different kinds of recurrent sets $\operatorname{fix}\varphi \subseteq \operatorname{per}\varphi \subseteq \operatorname{ap}\varphi \subseteq \operatorname{rec}\varphi \subseteq \omega\,\varphi \subseteq \operatorname{nw}\varphi \subseteq \operatorname{gr}\varphi$ as shown in Proposition 3.4.4. Moreover, there always exists a strict Lyapunov function (cf. Theorem 3.3.8 and Lemma 3.4.15) capturing the "down-hill" part of the dynamics. This makes the decomposition of K via the generalized recurrent set an interesting alternative to the Conley decomposition.

To express this decomposition in terms of the corresponding Koopman system recall Lemma 1.1.5. For the Lyapunov ideal $I_{\mathcal{L}}$ this yields

$$I_{\mathcal{L}} \cong \mathrm{C}_0((\operatorname{gr}\varphi)^c)$$

and

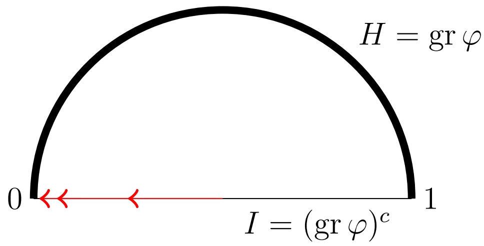
$$\mathrm{C}(K)/I_{\mathcal{L}} \cong \mathrm{C}(\operatorname{gr}\varphi).$$

Hence the decomposition $K = \operatorname{gr}\varphi \,\cup\, (\operatorname{gr}\varphi)^c$ gives us a T_φ-invariant ideal in $\mathrm{C}(K)$ and a quotient of $\mathrm{C}(K)$. More precisely, the subsystem $(\operatorname{gr}\varphi; \varphi|_{\operatorname{gr}\varphi})$ of $(K;\varphi)$ yields the quotient system $(\mathrm{C}(K)/I_{\mathcal{L}}; T_{\varphi|_{\operatorname{gr}\varphi}})$ of $(\mathrm{C}(K); T_\varphi)$.

Remark 3.10.2. (a) By means of the Conley decomposition theorem we can now complete the proof of Proposition 3.4.4 and show that $\operatorname{gr}\varphi \subseteq \operatorname{cr}\varphi$ (cf. Conley [12, Lemma 4.1E] for flows or Wiseman [52, Section 2] for maps). Indeed, take $x \in K$ being not chain recurrent. By Conley's decomposition theorem there is some $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ with $T_\varphi f(x) < f(x)$. Hence $x \notin \operatorname{gr}\varphi$ showing $(\operatorname{cr}\varphi)^c \subseteq (\operatorname{gr}\varphi)^c$.

(b) Recall from Remark 3.1.2 (b) that the concept of ε-chains not only allows a decomposition of K as in Conley's theorem but also a decomposition of the chain recurrent set $\mathrm{cr}\,\varphi$ into so-called *chain components*. This motivates to find meaningful decompositions also for the generalized recurrent set $\mathrm{gr}\,\varphi$ in the following sections.

The Conley decomposition and the decomposition via $\mathrm{gr}\,\varphi$ may not coincide as can be seen from Example 3.4.10. Here, the generalized recurrent set $\mathrm{gr}\,\varphi$ is strictly contained in the chain recurrent set $\mathrm{cr}\,\varphi$.



In this example, the decomposition of K induced by the generalized recurrent set $\mathrm{gr}\,\varphi$ captures the dynamical behavior of $(K;\varphi)$ even better. While the chain recurrent set coincides with the whole space K and thus Conley's decomposition neglects the dynamics on I, the generalized recurrent set $\mathrm{gr}\,\varphi = H$ consists only of the fixed points of φ. Hence the decomposition via $\mathrm{gr}\,\varphi$ is $K = H \,\dot{\cup}\, I$ reflecting the "down-hill" dynamical behavior on $I = (\mathrm{gr}\,\varphi)^c$.

Apart from this observation, the definition of chain recurrence seems somewhat bulky, while the concept of the generalized recurrent set is very simple. Therefore, the decomposition via $\mathrm{gr}\,\varphi$ may be a more natural approach. At any rate, the generalized recurrent set has the advantage that it can be expressed by functional analytic tools, namely, the Koopman operator and the Lyapunov algebra.

Decompositions via algebras

Each T_φ-invariant subalgebra of $\mathrm{C}(K)$ induces a decomposition of K into disjoint closed sets as described in Chapter 1. So now we consider in more detail the decompositions of K and $\mathrm{gr}\,\varphi$ induced by the relevant subalgebras of $\mathrm{C}(K)$ having been introduced so far.

The decomposition of K by means of the fixed space $\operatorname{fix} T_\varphi$ into *maximal level sets*, denoted here by

$$K = \dot{\bigcup}_{i\in J_1} K_i^{\mathrm{fix}},$$

has been extensively studied in Chapter 2. A decomposition of $\operatorname{gr}\varphi$ is then trivially obtained via

$$\operatorname{gr}\varphi = \dot{\bigcup}_{i\in J_1} \left(K_i^{\mathrm{fix}} \cap \operatorname{gr}\varphi\right).$$

Since by Corollary 3.4.7 each φ-invariant and closed subset of K has non-empty intersection with $\operatorname{gr}\varphi$ the following holds true.

Proposition 3.10.3. *Each maximal level set of* $\operatorname{fix} T_\varphi$ *has non-empty intersection with the generalized recurrent set, i. e.,*

$$K_i^{\mathrm{fix}} \cap \operatorname{gr}\varphi \neq \emptyset$$

for all $i \in J_1$.

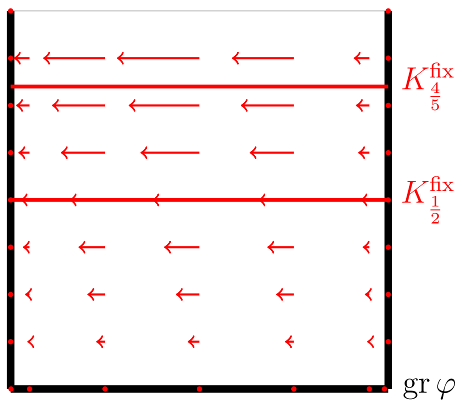
Example 3.10.4. In Example 3.2.14 (c), the decomposition of $K = [0,1]\times[0,1]$ induced by $\operatorname{fix} T_\varphi$ is

$$K = \dot{\bigcup}_{c\in[0,1]} \underbrace{\{(x,c)\colon x\in[0,1]\}}_{=:K_c^{\mathrm{fix}}}.$$

Indeed, for every fixed function $f \in \operatorname{fix} T_\varphi$, clearly $f|_{\{(x,c)\colon x\in[0,1]\}} \equiv const.$ for all $c \in (0,1]$, hence also $f|_{\{(x,0)\colon x\in[0,1]\}} \equiv const.$ by continuity of f. The generalized recurrent set is

$$\operatorname{gr}\varphi = \{(x,y)\colon x\in\{0,1\},\, y\in[0,1]\} \cup \{(x,0)\colon x\in[0,1]\}$$

(see Example 3.4.3 (c)).



Then

$$K_c^{\mathrm{fix}} \cap \operatorname{gr}\varphi = \begin{cases} \{(0,c),\ (1,c)\} & \text{for } c \in (0,1], \\ \{(x,0)\colon x \in [0,1]\} & \text{for } c = 0. \end{cases}$$

We now turn to the decomposition of K via the Lyapunov algebra $\mathcal{L}$, denoted by

$$K = \dot{\bigcup}_{i \in J_2} K_i^{\mathcal{L}}.$$

Recall from Lemma 1.2.5 (a) that $x, y \in K_i^{\mathcal{L}}$ for $i \in J_2$ if and only if $f(x) = f(y)$ for all $f \in \mathcal{L}$. Moreover, for each $i \in J_2$ there is some $j \in J_2$ such that $\varphi(K_i^{\mathcal{L}}) \subseteq K_j^{\mathcal{L}}$. Therefore, the following is obtained.

Proposition 3.10.5. *For $i \in J_2$ the following are equivalent.*

(a) $K_i^{\mathcal{L}} \subseteq \operatorname{gr}\varphi$.

(b) $K_i^{\mathcal{L}}$ *is φ-invariant.*

(c) There is some $x \in K_i^{\mathcal{L}}$ such that $\varphi(x) \in K_i^{\mathcal{L}}$.

This shows that there are two possible cases for $K_i^{\mathcal{L}}$, $i \in J_2$.

Proposition 3.10.6. *Each $K_i^{\mathcal{L}}$ is either contained in the generalized recurrent set or has empty intersection with it, i. e.,*

$$K_i^{\mathcal{L}} \subseteq \operatorname{gr}\varphi \text{ or } K_i^{\mathcal{L}} \cap \operatorname{gr}\varphi = \emptyset$$

for all $i \in J_2$.

By $\operatorname{fix} T_\varphi \subseteq \mathcal{L}$, the decomposition of K induced by $\mathcal{L}$ is finer than the one induced by $\operatorname{fix} T_\varphi$ (i. e., for each $i \in J_2$ there is some $j \in J_1$ such that $K_i^{\mathcal{L}} \subseteq K_j^{\mathrm{fix}}$). Since K_j^{fix} is φ-invariant, this yields the following.

Proposition 3.10.7. *If $K_i^{\mathcal{L}} \subseteq K_j^{\mathrm{fix}}$ for $i \in J_2$ and $j \in J_1$, then also $\varphi(K_i^{\mathcal{L}}) \subseteq K_j^{\mathrm{fix}}$.*

Roughly summarized, the quotient dynamics induced by $\mathcal{L}$ can only take place within the equivalence classes induced by $\operatorname{fix} T_\varphi$. Moreover, $\operatorname{gr}\varphi$ consists exactly of the fixed points (if seen as subsets in K) of the quotient dynamics induced by $\mathcal{L}$ (which has already been shown in Proposition 3.7.2). Hence outside of $\operatorname{gr}\varphi$ there are no invariant equivalence classes with respect to $\mathcal{L}$.

Example 3.10.8. Coming back to Example 3.2.14 (c), the decomposition of K induced by $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$ trivially is

$$K = \dot{\bigcup}_{x \in K} K_x,$$

for $K_x := \{x\}$. Hence it is finer than the decomposition induced by $\operatorname{fix} T_\varphi$ (see Example 3.10.4). Moreover, $x \in \operatorname{gr}\varphi$ if and only if $\varphi(x) = x$ if and only if K_x is φ-invariant.

Remark 3.10.9. By considering $(\operatorname{gr}\varphi; \varphi|_{\operatorname{gr}\varphi})$ as a subsystem of $(K; \varphi)$, the different algebras could be obtained for the restricted dynamics $\varphi|_{\operatorname{gr}\varphi}$ inducing further decompositions of $\operatorname{gr}\varphi$.

Take for example the fixed space $\operatorname{fix} T_{\varphi|_{\operatorname{gr}\varphi}}$ associated with the restricted dynamics (cf. Chapter 1, p. 56). Then the decomposition of $\operatorname{gr}\varphi$ induced by $\operatorname{fix} T_{\varphi|_{\operatorname{gr}\varphi}}$ is clearly finer than the decomposition of $\operatorname{gr}\varphi$ induced by $\operatorname{fix} T_\varphi$. Moreover, the decomposition of $\operatorname{gr}\varphi$ induced by $\mathcal{L}$ lies in between these decompositions since

$$\{f|_{\operatorname{gr}\varphi} \colon f \in \operatorname{fix} T_\varphi\} \subseteq \{f|_{\operatorname{gr}\varphi} \colon f \in \mathcal{L}\} \subseteq \operatorname{fix} T_{\varphi|_{\operatorname{gr}\varphi}}.$$

Decomposition via an extended Lyapunov function

Having discussed decompositions of K and $\operatorname{gr}\varphi$ induced by the subalgebras $\operatorname{fix} T_\varphi$ and $\mathcal{L}$ of $\mathrm{C}(K)$ we now turn to decompositions related to extended Lyapunov functions.

A decomposition of K into parts on which each extended Lyapunov function is continuous is obtained as follows. Take $x \in K$ and define

$$S_x := \{y \in K \colon \omega(y) \cap \omega(x) \neq \emptyset\}.$$

Clearly, $(S_x)_{x\in K}$ is a cover of K. Consider the equivalence relation $\sim$ on K generated by $(S_x)_{x\in K}$ (cf. Definition 2.2.3), i. e., $x \sim y$ for $x, y \in K$ if there exist $k \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_k \in K$ such that $x_1 = x$, $x_k = y$ and $S_{x_i} \cap S_{x_{i+1}} \neq \emptyset$ for $i = 1, ..., k-1$. For a complete set of representatives $S \subseteq K$ consider the decomposition

$$K = \dot{\bigcup}_{x\in S} \underbrace{\pi^{-1}([x])}_{=:K_x},$$

where $\pi\colon K \to K/{\sim}$ denotes the canonical projection.

Proposition 3.10.10. *For $x \in K$ the following assertions hold true.*

(a) Each K_x is φ-invariant.

(b) For the generalized recurrent set we have

$$K_x \cap \operatorname{gr}\varphi \neq \emptyset.$$

(c) For every $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ the corresponding extended Lyapunov function h_f is continuous on K_x.

Proof. By

$$\omega(\varphi(x)) = \omega(x)$$

the φ-invariance of K_x for each $x \in K$ is seen.

Assertion (b) follows from

$$\omega(x) \subseteq K_x$$

for all $x \in K$.

Now take $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$ and its extended Lyapunov function h_f. Recall that

$$f|_{\omega(x)} \equiv const.$$

for each $x \in K$ by Lemma 3.2.10. Hence for $y \in K_x$, $x \in K$, we have $f(y') = f(x') =: c$ for all $x' \in \omega(x)$ and $y' \in \omega(y)$ by definition of K_x. This yields

$$h_f(y) = f(y) - \lim_{n\to\infty} f(\varphi^n(y)) = f(y) - c$$

for all $y \in K_x$, hence $h|_{K_x}$ is continuous. $\square$

Example 3.10.11. Take once more the dynamical long line on $[0, \infty]$ (cf. Example 3.2.14 (b)). Here,

$$\omega(x) = \begin{cases} \{n\} & \text{for } x \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{N}_0, \\ \{\infty\} & \text{for } x = \infty \end{cases}$$

yielding

$$S_x = K_x = \begin{cases} [n, n+1) & \text{for } x \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{N}_0, \\ \{\infty\} & \text{for } x = \infty \end{cases}$$

and the decomposition

$$K = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}_0} [n, n+1) \,\dot{\cup}\, \{\infty\}.$$

Hence h_f is continuous on $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, for each $f \in \operatorname{subfix} T_\varphi$. This is in accordance with Example 3.9.14.

Bibliography

The list below contains the bibliography of Part II, the "Fuge".

[1] E. Akin & J. Auslander, *Generalized recurrence, compactifications, and the Lyapunov topology,* Studia Math. **201**(1) (2010), 49–63.

[2] E. Akin & J. Wiseman, *Chain recurrence for general spaces,* arXiv:1707.09601 (2017).

[3] J. M. Alongi & G. S. Nelson, *Recurrence and topology.* Vol. 85. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2007.

[4] J. Auslander, *Generalized recurrence in dynamical systems.,* Contrib. Differ. Equations **3** (1964), 65–74.

[5] J. Auslander & P. Seibert, *Prolongations and stability in dynamical systems,* Ann. Inst. Fourier **2** (1964), 237–268.

[6] J. Banks et al., *On Devaney's definition of chaos,* Amer. Math. Mon. **99**(4) (1992), 332–334.

[7] L. Barreira & C. Valls, *Ordinary differential equations: Qualitative theory.* Vol. 137. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2012,

[8] A. Bátkai, M. Kramar Fijavž & A. Rhandi, *Positive operator semigroups. From finite to infinite dimensions.* Vol. 257. Basel: Birkhäuser/Springer, 2017.

[9] N. P. Bhatia & G. P. Szegö, *Dynamical systems: Stability theory and applications.* Vol. 35. Springer, 1967.

[10] X. Chen & J. Duan, *State space decomposition for non-autonomous dynamical systems,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **141**(5) (2011), 957–974.

[11] C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index.* Vol. 38. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 1978.

[12] C. Conley, *The gradient structure of a flow: I,* Ergodic Theory Dynam. Systems **8**(Charles Conley Memorial Issue) (1988).

[13] R. Derndinger, R. Nagel & G. Palm, "Ergodic theory in the perspective of functional analysis". unpublished. 1987.

[14] P. Diamond, P. Kloeden & A. Pokrovskij, *The minimal center of attraction of measurable systems and their discretizations,* J. Math. Anal. Appl. **200**(1) (1996), 207–223.

[15] J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis. Enlarged and corrected printing.* Academic Press, 1969.

[16] C. Ding, *Chain prolongation and chain stability,* Nonlinear Anal. **68** (2008), 2719–2726.

[17] J. Dugundji, *Topology.* Allyn and Bacon, 1966.

[18] N. Edeko, *On the isomorphism problem for non-minimal transformations with discrete spectrum,* Discrete Contin. Dyn. Syst. **39**(10) (2019).

[19] N. Edeko, *On equicontinuous factors of flows on locally path-connected compact spaces,* Ergodic Theory Dynam. Systems (2020), 1–18.

[20] T. Eisner, B. Farkas, M. Haase & R. Nagel, *Operator theoretic aspects of ergodic theory.* Springer, 2015.

[21] A. Fathi & P. Pageault, *Aubry-Mather theory for homeomorphisms,* Ergodic Theory Dynam. Systems **35**(4) (2015), 1187–1207.

[22] T. Fisher & B. Hasselblatt, *Hyperbolic flows.* Berlin: European Mathematical Society (EMS), 2019,

[23] S. Frick, K. E. Petersen & S. Shields, *Dynamical properties of some adic systems with arbitrary orderings,* Ergodic Theory Dynam. Systems **37** (2017), 2131–2162.

[24] F. Hausdorff, *Set theory.* AMS/Chelsea Series. Chelsea Publ., 1991.

[25] P. Hermle, *Die Kategorisierung der Gelfandschen Darstellungstheorie.* BA thesis, Universität Tübingen. 2019.

[26] H. Hilmy, *Sur les centres d'attraction minimaux des systèmes dynamiques,* Compos. Math. **3** (1936), 227–238.

[27] M. Hurley, *Chain recurrence and attraction in non-compact spaces,* Ergodic Theory Dynam. Systems **11**(4) (1991), 709–729.

[28] G. M. KELLY, *A unified treatment of transfinite constructions for free algebras, free monoids, colimits, associated sheaves, and so on,* Bull. Austral. Math. Soc. **22** (1980), 1–83.

[29] B. O. KOOPMAN, *Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space,* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **17** (1931), 315–318.

[30] H. KREIDLER, *The primitive spectrum of a semigroup of Markov operators,* Positivity **24**(2) (2020), 287–312.

[31] V. KÜHNER, "Koopmanism for attractors in dynamical systems". PhD thesis. Universität Tübingen, 2020.

[32] K. KÜSTER, "The Koopman linearization of dynamical systems". MA thesis. Universität Tübingen, 2015.

[33] K. KÜSTER, *Decompositions of dynamical systems induced by the Koopman operator,* Anal. Math. **47**(1) (2021), 149–173.

[34] J. LA SALLE & S. LEFSCHETZ, *Stability by Liapunov's direct method. With applications.* Vol. 4. Elsevier, Amsterdam, 1961.

[35] K. LANDSMAN, *Foundations of quantum theory: From classical concepts to operator algebras.* Fundamental Theories of Physics. Springer, 2017.

[36] A. M. LYAPUNOV, *The general problem of the stability of motion,* Int. J. Control **55**(3) (1992), 531–534.

[37] R. MAÑÉ, *Ergodic theory and differentiable dynamics.* Vol. 8. Springer, 1987.

[38] R. P. MCGEHEE & T. WIANDT, *Conley decomposition for closed relations,* J. Difference Equ. Appl. **12**(1) (2006), 1–47.

[39] J. MILNOR, *On the concept of attractor,* Commun. Math. Phys. **99** (1985), 177–195.

[40] K. MISCHAIKOW, M. MROZEK & P. ZGLICZYŃSKI, eds., *Conley index theory.* Vol. 47. Warszawa: Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, 1999.

[41] B. van MUNSTER, *The Hausdorff quotient.* BA thesis, Universiteit Leiden. 2014.

[42] D. E. NORTON, *The Conley decomposition theorem for maps: A metric approach,* Comment. Math. Univ. St. Pauli **44**(2) (1995), 151–173.

[43] D. E. Norton, *The fundamental theorem of dynamical systems,* Comment. Math. Univ. Carolin. **36**(3) (1995), 585–597.

[44] M. S. Osborne, *Hausdorffization and such,* Amer. Math. Monthly **121** (2014), 727–733.

[45] K. E. Petersen, *Ergodic theory.* Cambridge University Press, 1989.

[46] H. H. Schaefer, *Invariant ideals of positive operators in* $\mathrm{C}(X)$*. I,* Illinois J. Math. **11**(4) (1967), 703–715.

[47] H. H. Schaefer, *Banach lattices and positive operators.* Springer, 1974.

[48] K. Sigmund, *On minimal centers of attraction and generic points,* J. Reine Angew. Math. **295** (1977), 72–79.

[49] R. Sine, *Geometric theory of a single Markov operator,* Pac. J. Math. **27** (1968), 155–166.

[50] T. Ura, *Sur le courant extérieur à une région invariante,* Funkcial. Ekvac. **2** (1959), 105–143.

[51] J. de Vries, *Topological dynamical systems: An introduction to the dynamics of continuous mappings.* De Gruyter, 2014.

[52] J. Wiseman, *The generalized recurrent set and strong chain recurrence,* Ergodic Theory Dynam. Systems **38**(2) (2018), 788–800.

Zusammenfassung in deutscher Sprache

Bernard Osgood Koopman veröffentlichte 1931 in Koopman [29] die Beobachtung, dass einem dynamischen System eine Gruppe von linearen unitären Operatoren zugeordnet werden kann. Heute hat sich um diese Methodik eine ganze Theorie entwickelt, die oft als »Koopmanismus« bezeichnet wird. Die Idee dahinter ist einfach, aber weitreichend: Zu einem dynamischen System $(K;\varphi)$ bestehend aus einem *Zustandsraum* K und einer *Dynamik*

$$\varphi\colon K \to K$$

darauf, wird die Zuordnung

$$f \mapsto f \circ \varphi$$

von *Observablen* f definiert, also geeigneten reell- oder komplexwertigen Funktionen auf K, die in einem *Observablenraum* zusammengefasst sind. Im Folgenden werden *topologische dynamische Systeme* betrachtet, bei denen K kompakt und φ stetig ist. Der sich in natürlicher Weise ergebende Observablenraum ist dann der Raum $\mathrm{C}(K)$ der stetigen reell- oder komplexwertigen Funktionen auf K, und für den *Koopmanoperator* ergibt sich

$$\begin{aligned} T_\varphi\colon \mathrm{C}(K) &\to \mathrm{C}(K),\\ f &\mapsto f \circ \varphi. \end{aligned}$$

Das Zusammenspiel von $(K;\varphi)$ und dem *Koopmansystem* $(\mathrm{C}(K);T_\varphi)$ ist insofern interessant, als der Koopmanoperator *linear* ist, unabhängig von der Struktur des unterliegenden dynamischen Systems. Dynamische Eigenschaften bleiben beim Übergang zum Koopmansystem in dem Sinne erhalten, dass die entsprechenden Kategorien von topologischen dynamischen Systemen bzw. Koopmansystemen *antiäquivalent* sind. Aus dieser Antiäquivalenz ergibt sich außerdem, dass sich Teilsysteme eines Koopmansystems und Quotientensysteme des unterliegenden dynamischen Systems entsprechen. Diese Korrespondenz ist das Leitmotiv der vorliegenden Dissertation.

Die Arbeit besteht aus zwei Teilen, dem »Präludium« und der »Fuge«. Das Präludium ist eine historische Hinführung, die biographische Aspekte der an der Entstehung der Ergodentheorie beteiligten Persönlichkeiten beleuchtet. Darüber hinaus wird die Entwicklung des »Koopmanismus« kurz skizziert.

Die Fuge ist der mathematische Teil, also der Hauptteil der Dissertation und besteht aus drei Kapiteln. In Kapitel 1 werden die Hauptakteure dieser Arbeit – topologische dynamische Systeme und Koopmansysteme –, ihre grundlegenden Eigenschaften und erste Beispiele vorgestellt. Die Antiäquivalenz der Kategorie $\mathbf{CTop}$ der topologischen dynamischen Systeme und der Kategorie $\mathbf{C^*_{com,1}}$ der kommutativen unitalen C^*-Algebren und der Algebrahomomorphismen zwischen ihnen wird mittels des passenden volltreuen, wesentlich surjektiven kontravarianten Funktors gezeigt. In Abschnitt 1.2 gehen wir auf das Zusammenspiel von Sub- und Quotientensystemen ein und geben einige Beispiele wichtiger Koopman-Teilsysteme.

Kapitel 2 widmet sich dem einfachsten Koopman-Teilsystem, nämlich dem Fixraum $\operatorname{fix} T_\varphi$ eines Koopmanoperators T_φ, und dem dazugehörigen Quotientensystem von $(K;\varphi)$. Ziel ist es, die durch den Fixraum induzierte Zerlegung von K, d. h. das Quotientensystem, dynamisch zu beschreiben. Zunächst werden Eigenschaften der gewünschten Äquivalenzrelation aufgeführt (siehe Lemma 2.1.3) und die Strategie skizziert, wie der richtige Hausdorff-Quotientenraum mittels einer *Hausdorffizierung* konstruiert werden kann. Abgeschlossene *Orbits* sind Schlüsselobjekte in dieser Konstruktion, aber nicht ausreichend, wie aus Beispiel 2.2.1 ersichtlich wird. Daher folgt in Definition 2.2.7 die Konstruktion von *approximierenden Orbits* und *Superorbits*, die aber ebenfalls nicht hinreichend sind, wie Beispiel 2.2.11 deutlich macht. Es stellt sich heraus, dass die dynamische Beschreibung des Fixfaktors eine transfinite Hierarchie von Äquivalenzrelationen erfordert. Dazu führen wir *Superorbits vom Grad* γ für eine beliebige Ordinalzahl γ in Definition 2.3.1 ein. Diese liefern dann in Theorem 2.3.6 das gewünschte Ergebnis: Die durch $\operatorname{fix} T_\varphi$ induzierte Zerlegung von K kann durch Superorbits vom Grad γ für ein bestimmtes γ beschrieben werden.

Insbesondere erhält man durch diese Zerlegung in Theorem 2.3.8 eine dynamische Eigenschaft, die einen eindimensionalen Fixraum charakterisiert. Damit ist diese Eigenschaft ein Analogon zu »Ergodizität« in maßerhaltenden dynamischen Systemen.

In Abschnitt 2.4 wird das Konzept der *Lyapunovstabilität* mit Hilfe der Superorbits verallgemeinert und gezeigt, dass $\operatorname{fix} T_\varphi$ die feinste Zerlegung von K in *absolut lyapunovstabile* Teilmengen induziert (siehe Theorem 2.4.7).

In Kapitel 3 führen wir ein neues Koopman-Teilsystem ein: Die *Lyapunov-Algebra*, erzeugt von sogenannten *Lyapunovfunktionen*, also T_φ-subinvarianten Funktionen. In Abschnitt 3.1 geht es um verschiedene dynamische Konzepte von Rekurrenz und Attraktivität, die später benötigt werden, und deren Zusammenhänge. Abschnitt 3.2 widmet sich der Untersuchung des Subfixkegels $\operatorname{subfix} T_\varphi$, der aus allen positiven Subfixfunktionen (d. h. Lyapunvovfunktionen) besteht, und der darüber definierten Lyapunovalgebra $\mathcal{L}$. In Beispiel 3.2.14–3.2.16 findet sich eine Liste von Beispielen für die Fälle $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$, $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi$ und $\operatorname{fix} T_\varphi \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathrm{C}(K)$.

Der nächste Abschnitt behandelt (T_φ-invariante) Ideale in $\mathrm{C}(K)$, die über den Subfixkegel erhalten werden. Dabei erweist sich das von allen Subfixfunktionen erzeugte *Lyapunovideal* (siehe Definition 3.3.5) als das für unsere Zwecke am besten geeignete invariante Ideal. In Theorem 3.3.8 zeigen wir dann, dass es im metrischen Fall immer eine *strikte Lyapunovfunktion* gibt, die dieses Ideal erzeugt. Abschnitt 3.4 ist eine ausführliche Behandlung des Träger des Lyapunovideals, der *verallgemeinerten rekurrenten Menge* $\operatorname{gr} \varphi$, die für zeitkontinuierliche dynamische Systeme auf AUSLANDER [4] zurückgeht. Wir identifizieren die Menge $\operatorname{gr} \varphi$ in einer Reihe von Beispielen und vergleichen sie mit den in Abschnitt 3.1 eingeführten Mengen. Außerdem werden Attraktivitätseigenschaften von $\operatorname{gr} \varphi$ wie ihre punktweise Attraktivität (siehe Proposition 3.4.17) diskutiert.

In den folgenden Abschnitten untersuchen wir getrennt voneinander die Fälle $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi$, $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$ und den Fall dazwischen. Notwendige und hinreichende Bedingungen für $\mathcal{L} = \operatorname{fix} T_\varphi$, insbesondere für den eindimensionalen Fall, werden diskutiert. Für den Fall $\mathcal{L} = \mathrm{C}(K)$ wird das Langzeitverhalten von φ in Proposition 3.6.1 und in Corollary 3.6.2 beschrieben und dass $\operatorname{gr} \varphi$ mit den Fixpunkten von φ zusammenfällt. Für den allgemeinen Fall vergleichen wir die Lyapunovalgebra und die verallgemeinerte Rekurrenzmenge mit ihren zur Quotientendynamik gehörigen Analoga (siehe Proposition 3.7.1 und Proposition 3.7.2). Der Fall, in dem $\mathcal{L}$ die Kodimension 1 in $\mathrm{C}(K)$ hat, wird untersucht und es stellt sich die Frage, ob die Lyapunovalgebra immer die Punkte des Komplements $(\operatorname{gr} \varphi)^c$ trennt. In Theorem 3.7.10 zeigen wir, dass die Lyapunov-Algebra mit $\operatorname{subfix} T_\varphi - \operatorname{subfix} T_\varphi$ zusammenfällt, genau dann wenn die verallgemeinerte Rekurrenzmenge absorbierend ist.

Der nächste Abschnitt befasst sich mit Algebren, die durch eine einzelne Lyapunovfunktion erzeugt werden, und wird durch eine Reihe von Beispielen illustriert. In Abschnitt 3.9 führen wir *erweiterte Lyapunovfunktionen* ein. Diese (im Allgemeinen unstetigen) Funktionen bieten eine weitere Möglichkeit, das Lyapunovideal bzw. die verallgemeinerte Rekurrenzmenge zu erhalten. Besonders interessant sind die Stetigkeitseigenschaften solcher Funktionen. In Theorem 3.9.7 zeigen wir, dass die Stetigkeit einer bestimmten erweiterten Lyapunovfunktion äquivalent zur gleichmäßigen Attraktivität der verallgemeinerten Rekurrenzmenge ist. Wir konstruieren eine größere T_φ-invariante Banachalgebra an Hand einer erweiterten Lyapunov-Funktion und untersuchen diese in Beispielen.

In Abschnitt 3.10 geht es um Zerlegungen. Die berühmte Conleyzerlegung wird eingeführt und eine alternative Zerlegung von K mit Hilfe der verallgemeinerten Rekurrenzmenge vorgeschlagen. Außerdem diskutieren wir kurz die durch die Lyapunovalgebra induzierten Zerlegungen von K und $\operatorname{gr}\varphi$ und vergleichen diese mit den vom Fixraum induzierten Zerlegungen (siehe S. 149 ff). Zuletzt wird eine Zerlegung von K in Teile, auf denen jede erweiterte Lyapunovfunktion stetig ist, beschrieben, siehe S. 152.