In: Logik in der Philosophie, hrsg. v. Wolfgang Spohn, Peter Schroeder-Heister und Erik J. Olsson. Heidelberg: Synchron Wissenschaftsverlag der Autoren 2005, S. 247-276 (Online publiziert mit Genehmigung des Verlags)

PETER SCHROEDER-HEISTER UND PATRIZIO CONTU

Folgerung[1]

1 Einleitung

Wenn man mit einem einzigen Stichwort ausdrücken will, um was es in der Logik geht, so ist es nicht unangemessen, den Begriff der *Folgerung* oder (synonym) den der *Konsequenz* heranzuziehen. Seit Aristoteles ist die Logik vornehmlich eine Theorie des Schließens, d.h. der Gesetze, an die sich folgerichtiges Denken und Argumentieren zu halten hat. Diese Gesetze kann man in Form von Konsequenzen ausdrücken. Eine Konsequenz ist dabei eine Beziehung zwischen bestimmten Aussagen, den *Prämissen*, und einer weiteren Aussage, der *Konklusion*, die besagt, daß man von den Prämissen zur Konklusion übergehen darf. Man spricht auch von *Konsequenz-* oder *Folgerungsrelation*, formal etwa notiert als

$$A_1, \ldots, A_n \Vdash B,$$

wobei $\Vdash$ als Folgerungssymbol[2] fungiert, $A_1, \ldots, A_n$ die Prämissen sind und B die Konklusion ist, zu lesen also als: »B folgt aus $A_1, \ldots, A_n$« oder »zwischen $A_1, \ldots, A_n$ und B besteht eine Konsequenzbeziehung«. Als Grenzfall läßt man prämissenlose Konsequenzen zu (notiert als $\Vdash B$). In diesem Fall geht der Begriff der Konsequenz in den der Wahrheit oder Gültigkeit über: Man darf B behaupten, ohne auf Prämissen zurückgreifen zu müssen. Unter Rückgriff auf die traditionelle terminologische Unterscheidung »kategorisch/hypothetisch« könnte man bei $\Vdash B$ auch von der *kategorischen Wahrheit* von B sprechen, wenn man die Konsequenz $A_1, \ldots, A_n \Vdash B$ als Behauptung der *hypothetischen Wahrheit* von B (relativ zu $A_1, \ldots, A_n$) ansieht.[3]

Mit »Konsequenz« oder »Folgerung« ist dabei in der Logik zunächst einmal die *logische* Konsequenz oder *logische* Folgerung gemeint, d.h. eine Beziehung, die aus *logischen* Gründen besteht, bei der also die *Inhalte* (die *Bedeutung*) von Prämissen und Konklusion keine Rolle spielen. Daß sich eine solche Beziehung definieren läßt, ist eine intuitiv höchst plausible Forderung. Ihre Idee liegt unserer Vorstellung von rationalem Argumentieren und der Einheitlichkeit der Vernunft zugrunde: Verschiedenen inhaltlichen Bereichen sollen kei-

[1] Besonderer Dank gilt Christopher von Bülow für viele hilfreiche Kommentare und Korrekturvorschläge.

[2] Wir benutzen $\Vdash$ anstelle des gebräuchlichen $\vDash$, da man mit $\vDash$ in der Regel den modelltheoretischen Folgerungsbegriff assoziiert, der hier aber nur als einer von zwei alternativen Folgerungsbegriffen verstanden wird.

[3] Die moderne mathematische Logik läßt als weiteren Grenzfall auch unendlich viele Prämissen zu. Darauf kann hier nicht eingegangen werden. Zum Begriff der Unendlichkeit im allgemeinen vgl. jedoch den Beitrag von R. Kahle in diesem Band.

ne verschiedenen, nur für diese Bereiche spezifischen und daher inkompatiblen Argumentationsstandards zukommen. Vielmehr sollen die für verschiedene Bereiche jeweils charakteristischen Standards Spezifikationen eines universellen Konsequenz- und Argumentationsbegriffs sein.

Dies läßt sich im Rahmen einer Theorie der Konsequenz so bewerkstelligen, daß man die Spezifikation des Bereichs, mit dem man sich beschäftigt, zu den Prämissen der Folgerung rechnet, während die Folgerung selbst, d.h. die *Beziehung* zwischen Prämissen und Konklusion, rein logisch und damit universell ist. Man kann es als eine der herausragenden Leistungen der Logiktradition seit Aristoteles ansehen, genau dies erreicht zu haben – Explikationen eines Begriffs von universell-logischer Konsequenz zu liefern, in bezug auf den bereichsspezifische Annahmen als Prämissen fungieren und nicht den Deduktionsrahmen als solchen modifizieren.

Wir haben bewußt im Plural von »Explikationen« geredet, da die genaue Fassung des Begriffs der logischen Konsequenz kontrovers ist. Hierin unterscheidet sich der Konsequenzbegriff nicht von anderen philosophischen Grundbegriffen. Z.B. hat Aristoteles in seiner Definition des Syllogismus in den ersten Analytiken den Begriff der Notwendigkeit herangezogen; G.W. Leibniz hat versucht, logisches Räsonieren als Ableiten in Kalkülen zu fassen; B. Bolzano hat die Variabilität von Satzbestandteilen zur Grundlage seines Begriffs der Ableitbarkeit gemacht; G. Frege, der Begründer der modernen mathematischen Logik, hat erstmals versucht, vollständige Grundgesetze und Grundregeln des logischen Schließens aufzustellen; A. Tarski hat explizit einen Begriff der logischen Konsequenz definiert, der heute als der maßgebliche sogenannte ›semantische‹ Folgerungsbegriff zählt; G. Gentzen hat formale Systeme zur Ableitung von ›Sequenzen‹ vorgeschlagen, die sich als beweistheoretische Behandlung des Folgerungsbegriffs lesen lassen; schließlich haben M. Dummett, D. Prawitz und P. Martin-Löf konstruktive Alternativen zum semantischen Folgerungsbegriff entwickelt. In der Zielsetzung sind sich jedoch alle Konzeptionen einig: Es geht um einen *universellen* logischen Folgerungsbegriff. In der Tat kann man diese Universalität als das Charakteristikum ansehen, das die Logik zu einer übergreifenden und damit philosophischen Disziplin macht.

Wir meinen allerdings, daß die bisher vorliegenden Explikationen des Folgerungsbegriffs noch nicht in zufriedenstellender Weise erlauben, die Universalität des logischen Räsonierens mit bereichsspezifischem (›lokalem‹, ›materialem‹) Räsonieren zu verknüpfen. In den bisherigen Fassungen des logischen Konsequenzbegriffs geht nämlich die Universalität der logischen Folgerung mit einer undifferenzierten Fassung des Begriffs der Prämisse oder Annahme einher. Der Begriff der Prämisse oder Annahme ist es jedoch gerade, der tauglich sein muß, die bereichsspezifischen Inhalte zu vertreten, und diese sind nicht uniform. Für bestimmte inhaltliche Kontexte erweist es sich als notwendig, differenziertere Fassungen des Annahmenbegriffs bereitzustellen, als dies in bisherigen Ansätzen geschieht. Ein wirklich universeller *logischer* Konsequenzbegriff muß also zugleich einen universellen Rahmen liefern, *nichtlogisches* (bereichsspezifisches) Räsonieren in die Prämissenstruktur der Konsequenzbeziehung einzubeziehen.

Dementsprechend verfolgt diese Arbeit zwei Absichten: Einmal geht es um eine Darstellung, wie die Beziehung der logischen Konsequenz als Grundbegriff der Logik bisher definiert worden ist, andererseits um eine Skizze der Art und Weise, wie dieser Begriff nach unserer Meinung weiterentwickelt werden müßte. Für das erste werden zwei ›Standardansätze‹ zur Behandlung des Konsequenzbegriffs beschrieben, und zwar zunächst in Abschnitt 2 der sogenannte ›modelltheoretische‹ Begriff der logischen Folgerungund dann in Abschnitt 3 ein beweistheoretischer Folgerungsbegriff,den man als konstruktive Variante des modelltheoretischen Begriffs ansehen kann. Wer nur einen Einblick in diese Definitionen des Konsequenzbegriffs gewinnen möchte, kann sich mit der Lektüre dieser Darstellung begnügen. Da der modelltheoretische Begriff der logischen Folgerung der bei weitem dominierende ist und in Standardlehrbüchern der Logik dargestellt ist – man nennt ihn auch den ›klassischen‹ Begriff der logischen Folgerung –, fällt seine Darstellung knapper aus als die des beweistheoretischen Begriffs, der aus der konstruktiven Mathematik stammt und noch nicht zum logischen Lehrbuchwissen gehört, es aber verdient, von einem breiteren Publikum zur Kenntnis genommen zu werden.

Es wird sich zeigen, daß beide Begriffe, die von sehr unterschiedlichen Grundannahmen ausgehen, letztlich analoge Unzulänglichkeiten in ihrer Behandlung des Begriffs der Annahme oder Prämisse aufweisen. Unsere in Abschnitt 4 erläuterte zentrale These wird sein, daß die hypothetische Annahme einer Aussage nicht in jedem Fall mit der Annahme der Wahrheit oder der Beweisbarkeit dieser Aussage identifiziert werden kann. Im hypothetischen Räsonieren gibt es plausible Arten, Annahmen zu machen, die von diesem Standardbegriff von Annahme nicht gedeckt sind. Abschnitt 5 behandelt zwei Beispiele: (1) Die Theorie der *definitorischen Reflexion* erlaubt es, Annahmen aufgrund ihrer durch Definition gegebenen Bedeutung einzuführen. (2) Wenn man die *Struktur inhaltlicher Beweise* (etwa in der Mathematik) in der Konsequenzrelation zur Geltung bringen will, ist es sinnvoll, Lemmata als spezielle Annahmen aufzufassen, die die Struktur eines Beweises konstituieren. Insgesamt sollen unsere Überlegungen Verständnis dafür wecken, daß gewisse Aspekte der Konsequenzrelation über Wahrheit und Gültigkeit hinausgehen – es handelt sich um sogenannte ›intensionale‹ Aspekte. Da die von uns behandelten Ansätze in erster Linie auf beweistheoretische Überlegungen zurückgehen, wollen wir zugleich zeigen, daß die traditionelle Trennung von Beweistheorie und Modelltheorie für die Behandlung logischer Grundbegriffe nicht fruchtbar ist.

2 Der modelltheoretische Konsequenzbegriff

Der modelltheoretische Begriff der logischen Konsequenz geht auf A. Tarski zurück, insbesondere auf dessen bahnbrechende Behandlung des Wahrheitsbegriffs für formale Sprachen (1935).[4] Man spricht heute vom ›modelltheoretischen‹ Begriff, weil der Begriff des »Modells« einer Formel an zentraler Stelle in die Definition eingeht und zudem die mathematisch-logische Disziplin, die von Tarskis wahrheitstheoretischer Semantik formaler Sprachen ihren Ausgang genommen hat, »Modelltheorie« heißt.[5] In der Philosophie spricht man häufig auch vom ›semantischen‹ Wahrheits- und Folgerungsbegriff. Dieser auch von Tarski verwendeten Terminologie schließen wir uns hier nicht an, da der im nächsten Abschnitt behandelte beweistheoretische Begriff ebenfalls den Anspruch erhebt, auf semantischen Überlegungen zu beruhen, d.h. auf Überlegungen, die sich auf die Bedeutung von Zeichen beziehen.

Beide Begriffe der Konsequenz, die wir in dieser Arbeit behandeln, setzen voraus, daß die *logische Struktur* von Aussagen, d.h. ihre Zusammensetzung mit Hilfe logischer Zeichen, festliegt. Die grundsätzliche Frage, welche Zeichen als logische Zeichen zu gelten haben und was daher ›logische Form‹ eigentlich ist, soll hier nicht weiter diskutiert werden.[6] Wir gehen, wie üblich, davon aus, daß sich die logische Form einer Aussage A durch eine Formel α einer formalen Sprache darstellen läßt; ein besonders einfacher Fall, den wir hier annehmen wollen, ist die Prädikatenlogik erster Stufe ohne Identität und ohne Funktionszeichen. Die Formel α ist dann zusammengesetzt aus nichtlogischen Zeichen: Gegenstands-, Prädikat- und Relationskonstanten, sowie logischen Zeichen wie »nicht« ($\neg$), »und« ($\&$), »oder« ($\vee$), »wenn ..., dann ...« ($\rightarrow$), »für alle« ($\forall$) und »es gibt« ($\exists$). Hinzu kommen Gegenstandsvariablen, die für die Quantifikation benötigt werden, sowie Hilfszeichen wie Klammern.

Wenn α die logische Struktur von A wiedergibt, wird die Aussage A als eine Instanz von α in dem Sinne aufgefaßt, daß sie anstelle der bloß syntaktisch spezifizierten nichtlogischen Zeichen von α entsprechende ›inhaltliche‹ nichtlogische Ausdrücke enthält – etwa anstelle einer Gegenstandskonstante a den Namen »Otto«, an Stelle einer Prädikatkonstanten P den Prädikatausdruck »ist blond« usw. Logische Form und nichtlogischen Inhalt einer Aussage könnte man also dadurch unterscheiden, daß man eine Formel α als Repräsentation der logischen Form von A ansieht und eine Instanziierungsfunktion hinzufügt, die den nichtlogischen Zeichen von α nichtlogische Ausdrücke zuordnet derart, daß durch Auswertung dieser Funktion die Formel α in die Aussage A übergeht.

Logische Konsequenz ließe sich dann wie folgt definieren: Eine *Aussage* B folgt logisch aus *Aussagen* $A_1, \ldots, A_n$ (symbolisch: $A_1, \ldots, A_n \Vdash B$), wenn für *Formeln* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$, von denen $A_1, \ldots, A_n, B$ Instanzen darstellen, gilt, daß β aus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ folgt (symbolisch: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Vdash \beta$). Letzteres, d.h. logische Konsequenz für Formeln, würde hinwiederum folgendes bedeuten: Eine *For-*

[4] Die klassische Arbeit ist Tarski 1935, zur Einführung gut lesbar sind Tarski 1944 sowie (speziell für den Folgerungsbegriff) Tarski 1936.

[5] Dieser Terminus wurde von Tarski 1954 eingeführt, vgl. Tarski 1954.

[6] Zur modernen Diskussion des Problems der Logizität vgl. Gabbay 1995 sowie die Literaturhinweise in Schroeder-Heister 1984c.

mel β folgt logisch aus *Formeln* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (symbolisch: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Vdash \beta$), falls für *jede* Instanziierung $A_1, \ldots, A_n, B$ von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ durch *Aussagen* gilt: Falls $A_1, \ldots, A_n$ gelten, so gilt auch B.

Diese Definition ließe sich durch folgende zwei Punkte motivieren:

1. Die logische Konsequenz $A_1, \ldots, A_n \Vdash B$ zwischen Aussagen soll nicht von den inhaltlichen Bestandteilen von $A_1, \ldots, A_n, B$ abhängen, sondern nur von deren logischer Form. Da Formeln die logische Form repräsentieren, ist es sinnvoll, logische Konsequenz direkt für Formeln zu definieren, d.h. die Relation $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Vdash \beta$ als zentralen Gegenstand der Definition anzusehen. Das Problem, wie man von Aussagen $A_1, \ldots, A_n, B$ zu Formeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ kommt, die deren logische Form repräsentieren, bleibt ja, wie erläutert, im Kontext der Konsequenztheorie ausgeklammert.

2. Die Tatsache, daß logische Konsequenz $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Vdash \beta$ inhaltsunabhängig ist, kann man so verstehen, daß für *beliebige* Instanzen $A_1, \ldots, A_n, B$ von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ der Übergang von $A_1, \ldots, A_n$ zu B gerechtfertigt ist. Hier ist nur zu beachten, daß dieser ›Übergang‹ selbst nicht wieder auf der Beziehung der *logischen* Konsequenz aufbaut – sonst wäre die Definition zirkulär. Vielmehr ist hier das inhaltliche »wenn . . . , dann . . .« gemeint, d.h. die inhaltliche Beziehung zwischen $A_1, \ldots, A_n$ und B. Logische Konsequenz besteht dann, wenn inhaltliche Konsequenz besteht für jede beliebige Fassung der inhaltlichen Bestandteile einer Aussage.

Man könnte auch sagen: Zwischen Aussagen besteht logische Konsequenz, wenn inhaltliche Konsequenz besteht bei jedem Austausch der inhaltlichen Bestandteile. Diesen Austausch vollführt man technisch so, daß man zunächst (*Punkt 1*) zu einer Formel übergeht, welche die logische Form ausdrückt, also klar macht, was inhaltlich ist und was nicht, und dann (*Punkt 2*) diese Formel variabel interpretiert.[7]

Die modelltheoretische Definition der logischen Folgerung schließt insofern an *Punkt 1* an, als Folgerungen auf Formelebene interpretiert werden. *Punkt 2* wird von ihr jedoch nicht übernommen, und zwar deshalb, weil der Begriff der Instanziierung von Formeln zu Aussagen problematisch ist. Die Instanziierung von α zu A läßt sich nur sehr schwierig formal beschreiben – es handelt sich hier ja nicht um eine bloße Ersetzung von Zeichen im üblichen Sinn, wie schon das einfache Beispiel der Instanziierung von $P(a)$ zu »Otto ist blond« zeigt. Entscheidend für die Ablehnung dieses Begriffs ist jedoch die Tatsache, daß der Bereich der betrachteten inhaltlichen Aussagen möglicherweise nicht alles ausdrücken kann, was man ausdrücken möchte.

---

[7] Die Idee, daß sich logische Konsequenz über den Austausch inhaltlicher Bestandteile definieren läßt, geht auf B. Bolzano zurück, weshalb man auch vom *Bolzano–Tarskischen* Folgerungsbegriff spricht. Bolzano definiert verschiedene Begriffe, insbesondere »Ableitbarkeit« und »Abfolge«, wobei der Begriff der ›Ableitbarkeit‹ dem modelltheoretisch-semantischen Begriff am nächsten kommt. Vgl. Bolzano 1837, §§ 155, 162, 198–222.

Wenn man im Zusammenhang mit logischer Folgerung von *beliebigen* Instanzen von Formeln spricht (siehe *Punkt 2*), dann sind damit nicht nur diejenigen Aussagen gemeint, die wir zufälligerweise zur Verfügung haben oder bilden können, sondern Aussagen, die alle *möglichen* Interpretationen von nichtlogischen Konstanten, die in den betrachteten Formeln vorkommen, beinhalten. Die Folgerung von »Otto liebt Anna« auf »Anna liebt Otto« als Instanz von $R(a,b) \Vdash R(b,a)$ ist auch dann ungültig, wenn wir in unserer Sprache keinen Gegenstandsnamen außer »Otto« und »Anna« und keinen zweistelligen Relationsausdruck außer »liebt« zur Verfügung haben und Otto und Anna sich wechselseitig lieben. In diesem Fall gilt zwar für alle zur Verfügung stehenden Instanzen A und B von $R(a,b)$ bzw. $R(b,a)$, daß man von A zu B übergehen darf. Die logische Folgerungsbeziehung $R(a,b) \Vdash R(b,a)$ gilt jedoch nicht, weil für eine geeignete andere Relation als »liebt« (für die wir in unserer fiktiven Sprache keinen Ausdruck haben) und für andere Gegenstände als Anna und Otto (für die wir ebenso keine Namen haben) die Vertauschung der Argumente der Relation *nicht* möglich wäre.

Daher befaßt man sich in der modelltheoretischen Semantik nicht mit inhaltlichen Aussagen als Instanziierungen von Formeln, sondern interpretiert Formeln in abstrakten Strukturen von Gegenständen, Eigenschaften und Relationen, die mathematisch spezifiziert werden. Durch die Unterscheidung zwischen einer Formel und ihrer Interpretation in einer Struktur behält man die für logische Begriffe essentielle Unterscheidung zwischen Form und Inhalt bei, ohne auf die Ausdruckskraft der betrachteten Sprache, d.h. den Bereich der zur Verfügung stehenden inhaltlichen Aussagen, Rücksicht nehmen zu müssen. Zu jeder inhaltlichen Aussage A, die Instanz einer Formel α ist, gibt es eine entsprechende Interpretation von α in einer Struktur, die (intuitiv) dasselbe besagt wie A. Umgekehrt muß aber nicht jeder Interpretation von α in einer Struktur eine Instanz A entsprechen – unsere sprachlichen Ausdrucksmittel könnten zu limitiert sein, um die mathematisch spezifizierte Interpretation mit Hilfe einer Aussage der betrachteten Sprache wiederzugeben.

Genauer ist eine Struktur $\mathfrak{M}$ ein (nichtleerer) Gegenstandsbereich M mit ausgezeichneten Gegenständen, Prädikaten und Relationen, die den Gegenstands-, Prädikat- und Relationskonstanten der betrachteten formalen Sprache $\mathcal{L}$ entsprechen. Eine Interpretation $\Im$ von $\mathcal{L}$ ist eine Struktur $\mathfrak{M}$ zusammen mit einer Zuordnung (›Belegung‹), die den freien Variablen Gegenstände aus M zuweist. Die Belegung dient dazu, offenen Formeln einen Wahrheitswert zuweisen zu können, was insbesondere für die Semantik der Quantoren wichtig ist.

Dann definiert man für eine beliebige Formel α, was es heißt, daß sie unter einer Interpretation $\Im$ wahr ist, formal: $\Im \vDash \alpha$. Hierfür sagt man auch, daß $\Im$ ein *Modell* von α ist. Da klar ist, was es heißt, daß ein Gegenstand eine gewisse Eigenschaft hat oder Gegenstände in einer gewissen Relation stehen, ist auch klar, was es heißt, daß eine *atomare*, d.h. logisch nicht zusammengesetzte Formel unter $\Im$ wahr ist: Die Konstanten und Variablen in α werden einfach durch die durch $\Im$ gegebenen Zuordnungen interpretiert. Falls α logisch zusammengesetzt ist, wird $\Im \vDash \alpha$ in rekursiver Weise erklärt, für die Aussagenlogik z. B. wie folgt:

$$\begin{array}{lll} \Im \vDash \neg\alpha & \text{falls} & \textit{nicht } \Im \vDash \alpha; \\ \Im \vDash \alpha \,\&\, \beta & \text{falls} & \Im \vDash \alpha \textit{ und } \Im \vDash \beta; \\ \Im \vDash \alpha \vee \beta & \text{falls} & \Im \vDash \alpha \textit{ oder } \Im \vDash \beta; \\ \Im \vDash \alpha \to \beta & \text{falls} & \textit{wenn } \Im \vDash \alpha, \textit{ dann } \Im \vDash \beta. \end{array}$$

Bei der Behandlung der Quantifikation sind gewisse Aspekte zu beachten, die mit der Deutung der Variablen zusammenhängen. Obwohl sie fundamental für die modelltheoretische Semantik sind, können sie hier nicht behandelt werden. Gute Darstellungen finden sich in fast allen Logiklehrbüchern, z. B. bei Ebbinghaus, Flum und Thomas (1996).

Im Hinblick auf das folgende ist besonderes Augenmerk auf die Deutung der Implikation $\to$ zu richten. Sie wird interpretiert über das metasprachliche »wenn . . . , dann . . .«: Eine Implikation $\alpha \to \beta$ ist unter einer Interpretation $\Im$ wahr, wenn sich unter $\Im$ die Wahrheit der Vorderformel α auf die Hinterformel β überträgt. Man kann also sagen, daß bei einer ›materialen‹ Implikation $\alpha \to \beta$ die Formel α für die Annahme ihrer Wahrheit (unter dieser Interpretation) steht.

Logische Konsequenz wird jetzt als inhaltliche Konsequenz bei allen Interpretationen der betrachteten Formeln in Strukturen verstanden. Das ist die Intention, die aus *Punkt 2* beibehalten wird. Man definiert: β folgt logisch aus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, symbolisch

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Vdash \beta,$$

falls jedes Modell der Prämissen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zugleich ein Modell der Konklusion β ist, d. h. falls unter jeder Interpretation, unter der $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ wahr sind, auch β wahr ist. Falls keine Prämissen vorhanden sind, liegt logische Wahrheit vor: β ist *logisch wahr* oder *allgemeingültig*, falls β unter jeder Interpretation wahr ist.

Offensichtlich besteht eine logische Konsequenz

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Vdash \beta$$

genau dann, wenn

$$\alpha_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \alpha_n \to \beta$$

logisch wahr ist. Damit sind logische Wahrheit und logische Konsequenz wechselseitig aufeinander zurückführbar. Beide werden definiert unter Rückgriff auf den Begriff der Wahrheit unter einer Interpretation, d. h. auf den Begriff der materialen (d. h. bereichsspezifischen, nicht-formalen) Wahrheit.

Von der höheren Warte der logischen Konsequenz kann man jetzt die materiale Wahrheit durch ausgezeichnete Annahmen charakterisieren. Sei z. B. Γ eine Menge von Formeln, deren Elemente insgesamt nur unter der Interpretation $\Im$ gelten. Dann gilt eine Formel α unter $\Im$ genau dann, wenn sie *logisch* aus Γ folgt:

$$\Im \vDash \alpha \quad \text{genau dann, wenn} \quad \Gamma \Vdash \alpha.$$

Allerdings ist schon in einfachen Logiken nicht immer gesichert, daß sich *jede* Interpretation (oder jede Menge von Interpretationen) durch eine endliche Formelmenge charakterisieren läßt.

Man kann es als Aufgabe der *axiomatischen Methode* in den Wissenschaften ansehen, Mengen Γ von Formeln zu finden, die den Gegenstandsbereich, mit dem man sich beschäftigt, charakterisieren. Diese Menge Γ würde man dann als Menge von *Axiomen* bezeichnen.[8] Dann hat man tatsächlich die bereichsspezifische Wahrheit oder bereichsspezifische Folgerung (= Wahrheit einer Implikation) auf das Konzept

Logische Konsequenz + Annahmen,

d.h. auf die Idee einer

universellen Logik, angewendet auf inhaltliche Axiome,

zurückgeführt, wie in der Einleitung hervorgehoben. Logisches Räsonieren ist nicht nur eine abstrakte Verallgemeinerung von inhaltlichem Räsonieren. Umgekehrt läßt sich inhaltliches Räsonieren als Spezialisierung von logischem Räsonieren auffassen, was eine Rechtfertigung der formalen Logik als eines universellen Rahmenwerks darstellt.

3 Der beweistheoretische Konsequenzbegriff

Der modelltheoretische Konsequenzbegriff dominiert die Diskussion um den Begriff der logischen Folgerung. Beweistheoretische Ansätze zum Folgerungsbegriff sind meist gar nicht bekannt. Im vieldiskutierten Buch zur logischen Folgerung von Etchemendy (1990) werden sie z.B. nicht erwähnt. Das mag daran liegen, daß »Beweistheorie« häufig mit dem Studium von Beweisen in formalen Systemen identifiziert wird, d.h. als Theorie von syntaktisch spezifizierten Strukturen verstanden wird, die mit Semantik nichts zu tun hat. Vom modelltheoretischen Standpunkt erhalten formale Systeme ihre Rechtfertigung über sogenannte ›Vollständigkeitssätze‹, d.h. über Theoreme, die besagen, daß Konsequenz im modelltheoretischen Sinne gleichwertig ist mit Ableitbarkeit in einem bestimmten Kalkül. Obwohl die Beweistheorie sich in der Tat vornehmlich mit formalen Systemen beschäftigt, wird diese Auffassung der Sachlage nicht gerecht. Aus den Resultaten über syntaktisch spezifizierte Beweisstrukturen lassen sich Ideen über ›inhaltliche‹ Beweise gewinnen, wenn man sie in geeigneter Weise interpretiert. Dies gilt insbesondere für denjenigen Zweig der Beweistheorie, der Strukturen von Beweisen zum Gegenstand seiner Untersuchungen macht. Im Bereich dieser ›allgemeinen Beweistheorie‹ (vgl. Prawitz 1973, Prawitz 1974), die in der durch D. Prawitz und P. Martin-Löf geprägten schwedischen Tradition der Beweistheorie begründet wurde, werden formale Beweise als Repräsentanten von Beweisen im

[8] Hier erweist sich unsere Ignorierung des Falles unendlicher Annahmenmengen (siehe Fußnote 3) als eine Übersimplifizierung, da Theorien, die nicht endlich (sondern z.B. nur durch Axiomen*schemata*) axiomatisierbar sind, große Bedeutung haben.

inhaltlichen Sinne verstanden. Solche inhaltlich verstandenen Beweise sind, jedenfalls in deduktiven Wissenschaften wie der Mathematik, von grundlegender Bedeutung, indem sie die Einsicht in die Gültigkeit von Theoremen vermitteln. Beweise haben eine zentrale erkenntnistheoretische Funktion.

Im Rahmen dieser an inhaltlichen Beweisen orientierten Position hat Prawitz eine auf dem Beweisbegriff beruhende Semantik einschließlich einer Definition des Begriffs der logischen Konsequenz entwickelt. Man kann sie entsprechend der erkenntnistheoretischen Bedeutung des Beweisbegriffs als eine erkenntnistheoretisch orientierte Semantik ansehen. Anders als in der modelltheoretischen Semantik, in der man, lax gesprochen, den Begriff der Konsequenz auf die Idee zurückführt, daß sich Wahrheit von den Prämissen auf die Konklusion überträgt, führt man ihn in der *beweistheoretischen Semantik*, wieder lax gesprochen, auf die Idee zurück, daß sich Beweisbarkeit von den Prämissen auf die Konklusion überträgt. Eine logische Konsequenz erlaubt es, eine Begründung (um die es sich bei einem Beweis ja handelt) der Konklusion zu gewinnen, falls Begründungen für die Prämissen vorliegen. Wenn man nicht von vornherein Semantik in Opposition zur Erkenntnistheorie versteht, kann man diesem Ansatz den semantischen Gehalt nicht absprechen. In diesem Abschnitt sollen grundsätzliche Aspekte von Prawitz' Ansatz skizziert werden.[9] Um ihn verständlich werden zu lassen, ist es dabei zunächst notwendig, einerseits auf den sprachphilosophischen Hintergrund, der weitgehend von M. Dummett entwickelt worden ist, andererseits auf den mathematischen Hintergrund, die Beweistheorie G. Gentzens, in ihren grundsätzlichen Aspekten einzugehen. Für einen weiterführenden Überblick zur beweistheoretischen Semantik sei auf den Sammelband Kahle und Schroeder-Heister 2005 verwiesen.

3.1 Verifikationismus und Konstruktivismus: Dummetts sprachphilosophischer Ansatz

Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, bildet der Begriff der Wahrheit einer Formel unter einer Interpretation den Baustein der modelltheoretischen Definition der logischen Konsequenz. Der philosophische Hintergrund dieses Ansatzes ist die weitverbreitete These, daß die Bedeutung einer Aussage durch ihre *Wahrheitsbedingungen* gegeben ist. Die von Dummett immer wieder vorgebrachte Gegenposition ist die auf einer Gebrauchstheorie der Bedeutung (»meaning as use«) basierende These, daß die Bedingungen, die die *Behauptung* einer Aussage rechtfertigen, zentraler sind als die abstrakten Wahrheitsbedingungen. Für Dummett machen diese *Behauptbarkeitsbedingungen* die Bedeutung einer Aussage aus; Wahrheit hat – semantisch gesehen – allenfalls einen abgeleiteten Status.

Um eine Aussage zu Recht behaupten zu können, muß man sie nach Dummett *verifiziert* haben. Anders als der Verifikationismus der zwanziger und

[9] Wir wählen Prawitz' Ansatz deshalb aus, weil es sich um die formal am besten ausgearbeitete Theorie handelt, die sich als unmittelbarer Konkurrent zu Tarskis Konzeption versteht.

dreißiger Jahre des 20. Jahrhunderts (L. Wittgenstein, Logischer Empirismus) benutzt Dummett sein Verifikationskriterium allerdings nicht als Kriterium für die Sinnhaftigkeit von Aussagen. Vielmehr stellt es für ihn das zentrale Hilfsmittel zur Kritik der klassischen Logik dar, insbesondere des *tertium non datur* bzw. des *Bivalenzprinzips*, d.h. der Annahme, daß jede Aussage entweder wahr oder falsch ist. Diese Kritik ist der Hauptpunkt der Zurückweisung der auf der klassischen Logik aufbauenden Wahrheitsbedingungen-Semantiken und damit vor allem der modelltheoretischen Semantik. Dummett argumentiert etwa wie folgt. Bei unentscheidbaren Aussagen, insbesondere solchen, die über unendliche Gegenstandsbereiche reden, kann die Wahrheitsbedingungen-Semantik nicht angeben, worin für einen Sprecher die *Kenntnis der Bedeutung* der Aussage besteht. Man kann zwar sowohl ein Verifikationsverfahren für die Wahrheit als auch eines für die Falschheit der Aussage angeben, aber die Kenntnis dieses *Paares* von Bedingungen garantiert kein Verfahren, die Wahrheit oder Falschheit der Aussage festzustellen, da es keine Entscheidungsmöglichkeit zwischen den Komponenten dieses Paares gibt. Dem Sprecher trotzdem ein entsprechendes Bedeutungswissen zuzuschreiben gemäß der Annahme der klassischen Logik, wonach eine solche Aussage an und für sich (d.h. unabhängig von unserem Wissen) entweder wahr oder falsch ist, bedeutet, ihm Wissen zuzuschreiben, das keine Verifikations- oder Falsifikationsmöglichkeit beinhaltet, von dem man also nicht sagen kann, worin es besteht. Die Konsequenz kann nach Dummett nur darin bestehen, die klassische Logik aufzugeben und mit ihr die Idee von Wahrheitsbedingungen als Bedeutungsträgern.[10]

Als Alternative, die den erkenntnistheoretischen Aspekten des Räsonierens eher gerecht wird, schlägt Dummett die konstruktive oder intuitionistische Logik vor. In der intuitionistischen Theorie, die auf Überlegungen von L. E. J. Brouwer in den zwanziger Jahren zurückgeht und deren logische Formulierung von A. Heyting in den dreißiger Jahren unternommen wurde, spielt der Begriff des Beweises, oder abstrakter: der »Konstruktion«, eine zentrale Rolle. Das *tertium non datur* wird nicht mehr als allgemeingültig angesehen, da man, um über einen Beweis von »A oder $\neg A$« zu verfügen, entweder über einen Beweis von A oder über einen Beweis von $\neg A$ verfügen müßte, was bei unentscheidbaren Aussagen nicht der Fall ist. Entsprechend darf man nur dann die Existenz eines Objekts behaupten, wenn man über ein Verfahren verfügt, ein solches Objekt auch wirklich aufzuweisen. Eine beweistheoretische Semantik wird also nicht einfach eine zur modelltheoretischen Semantik alternative Semantik sein, die zu denselben logischen Gesetzen führt wie diese, sondern sie wird eine alternative Semantikkonzeption sein, die überdies noch *andere logische Gesetze* mit sich bringt. Die philosophische Semantik entscheidet also auch darüber, welche Logik akzeptabel ist und welche nicht. Diese

10 Das ist nur eine sehr grobe Skizze. Dummetts teilweise sehr umfängliche Überlegungen finden sich in Dummett 1978, Dummett 1991, Dummett 1993, Dummett 1977; eine programmatische Darstellung basierend auf einer verwandten Konzeption stammt von Tennant (1997). Einen weiteren Überblick liefert Hinzen (1998). Für eine detaillierte Kritik vgl. Contu 1995.

Eigenschaft macht die Diskussion über die Semantik für die Logik zugleich zu einer Diskussion über die ›richtige‹ Logik.

3.2 Natürliches Schließen: Gentzens und Prawitz' Beweistheorie

Die Ausarbeitung der beweistheoretischen Semantik stützt sich auf Gentzens beweistheoretische Ansätze, insbesondere auf den ›Kalkül des natürlichen Schließens‹ in der von Gentzen entwickelten Form.[11] Gleichzeitig hat der Gentzensche Formalismus umgekehrt Anregungen zur Entwicklung der philosophischen Hintergrundtheorie gegeben. Der 1934 in seinen »Untersuchungen über das logische Schließen« (Gentzen 1934/35) formulierte Kalkül hat zwei fundamentale Charakteristika: Erstens ist er ein *Annahmenkalkül* in dem Sinne, daß er nicht nur – wie jeder andere Kalkül auch – erlaubt, beliebige Formeln als Annahmen einzuführen, sondern daß es bei der Anwendung gewisser Regeln auch möglich ist, Annahmen wieder zu beseitigen. Zweitens haben seine Grundregeln eine bestimmte Systematik: Mit jedem logischen Zeichen ist ein Paar von Regeln (oder Regelmengen) assoziiert. Die *Einführungsregeln* erlauben es, zu einer Formel mit dem jeweiligen Zeichen als Hauptzeichen überzugehen, d.h. sie zu behaupten; die *Beseitigungsregeln* erlauben es, aus einer Formel mit diesem Zeichen als Hauptzeichen Konsequenzen zu ziehen.

Als Beispiel seien die Grundregeln für die Implikation genannt:

$$\to\text{-Einführung}\ \frac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta} \qquad\qquad \to\text{-Beseitigung}\ \frac{\alpha \to \beta \quad \alpha}{\beta}$$

Die Regel der Implikationseinführung erlaubt es, die Formel $\alpha \to \beta$ einzuführen, wenn man β aus der Annahme α bewiesen hat. Die eckigen Klammern um die Annahme α bedeuten dabei, daß diese Annahme beim Übergang zu $\alpha \to \beta$ eliminiert werden kann, so daß die Deduktion danach nicht mehr von der Annahme α abhängt. Die Regel der Implikationsbeseitigung ist in der Logik sonst unter der Bezeichnung *modus ponens* geläufig.

Die Idee hinter der Implikationseinführung könnte man als ›deduktive Deutung‹ der Implikation auffassen: Einen Beweis für »wenn α, dann β« zu haben, wird darauf zurückgeführt, einen Beweis für β unter der Annahme α zu haben. Dies wird, wie wir im folgenden sehen werden, als semantische Idee benutzt. Sie unterscheidet sich grundsätzlich von der Deutung der Implikation in der modelltheoretischen Semantik, wo diese einfach durch das wahrheitsfunktionale »wenn ... dann« interpretiert wird. Die beweistheoretische Semantik beansprucht in der Tat, daß die Deutung »es liegt ein Beweis von β

[11] Der historisch erste, unabhängig von Gentzen entwickelte Formalismus des natürlichen Schließens stammt von S. Jaśkowski (1934), an den insbesondere lineare Varianten wie diejenige von F. B. Fitch (1952) anknüpfen.

unter der Annahme α vor« informativer ist als die Deutung »wenn α wahr ist, dann ist auch β wahr«.

Diese Überlegungen zeigen, welch zentrale Bedeutung die »wenn ... dann«-Verknüpfung hat. Sie ist nicht nur für alle Überlegungen, die den Begriff der Annahme betreffen, grundlegend, sondern auch für Überlegungen zum Begriff des konstruktiven Räsonierens. An der Deutung der Implikation $\alpha \to \beta$ zeigt sich, was man unter einem *konstruktiven* Übergang von α nach β verstehen will. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da weiterführende Überlegungen zeigen, daß der Begriff des »wenn ... dann« eng mit dem Funktionsbegriff, insbesondere mit dem Begriff der *konstruktiven* Funktion verknüpft ist.[12]

Nicht nur der Formalismus des natürlichen Schließens selbst, sondern vor allem auch gewisse Umformungsprozeduren für Beweise in diesem Kalkül sind für die beweistheoretische Semantik grundlegend geworden. Es handelt sich hier um Prozeduren, die die Grundlage der erstmals von Prawitz (1965) bewiesenen Normalisierungseigenschaften für Beweise darstellen. Im vorliegenden Kontext muß uns nur interessieren, daß es sich um Verfahren handelt, Beweise zu vereinfachen und ›Umwege‹ in Beweisen auszuschalten. Einen solchen Umweg stellt die Anwendung einer Beseitigungsregel im unmittelbaren Anschluß an die Anwendung einer Einführungsregel dar. Diese Situation sei wieder am Beispiel der Implikation erläutert. Eine Implikationseinführung, gefolgt von einer Implikationsbeseitigung, sieht wie folgt aus:

$$\to\text{-Bes.}\ \dfrac{\to\text{-Einf.}\ \dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta} \qquad\qquad \begin{matrix}| \\ \alpha\end{matrix}}{\beta}$$

Offensichtlich kann man beide Deduktionsschritte vermeiden, indem man den rechten Beweis von α benutzt, um die Annahme α im Beweis der Prämisse der Implikationseinführung (links oben in eckigen Klammern) einzulösen. Das Ergebnis ist folgender Beweis ohne Implikationsregeln:

$$\begin{matrix} | \\ \alpha \\ \vdots \\ \beta \end{matrix}$$

Diese und entsprechende Reduktionen für die anderen logischen Zeichen, die ursprünglich von Prawitz als technische Hilfsmittel zum Nachweis von Normalisierungseigenschaften entwickelt wurden, werden in der beweistheoretischen Semantik als formaler Ausdruck der Tatsache verstanden, daß Beseitigungsregeln ›Umkehrungen‹ der Einführungsregeln sind, d.h. daß man

[12] Das ergibt sich sowohl aus der Formalisierung konstruktiver Semantik als auch aus der Kodierung von Beweisen durch Lambda-Terme. Vgl. hierzu Troelstra und Schwichtenberg 1996.

durch Anwendung einer Beseitigungsregel das zurückerhält, was man vor Anwendung der entsprechenden Einführungsregel zur Verfügung hatte. Diese ›Harmonie‹ von Einführungs- und Beseitigungsregeln nutzt man aus, um Einführungsregeln als genuine Bedeutungsregeln und Beseitigungsregeln als daraus semantisch gerechtfertigte Konsequenzen anzusehen. Gentzen selbst hatte schon entsprechende Ideen geäußert,[13] die aber erst durch Prawitz' Reduktionen explizit gemacht worden sind.

Insbesondere hat Prawitz die Unterscheidung zwischen Beweisen, die Einführungsregeln im letzten Schritt verwenden und in diesem Sinne semantisch zentral sind, und Beweisen, die dies nicht tun, aber sich grundsätzlich in solche Beweise umformen lassen, wenn man geeignete Reduktionsprozeduren anwendet, als Präzisierung von Dummetts Unterscheidung zwischen ›kanonischen‹ und ›nichtkanonischen‹ Beweisen aufgefaßt. Bei Dummett waren *kanonische* Beweise solche, die entsprechend der Bedeutung der bewiesenen Aussage geführt werden, und *nichtkanonische* Beweise solche, die man auf kanonische Beweise zurückführen kann.[14] Genau diese Eigenschaften haben Beweise mit Einführungs- bzw. Beseitigungsregeln im letzten Schritt. Es läßt sich tatsächlich in der Theorie des natürlichen Schließens zeigen, daß annahmenfreie Beweise, die keine Einführungsregel im letzten Schritt verwenden, sich mit Hilfe von Umformungen der oben genannten Art in (annahmenfreie) Beweise umformen lassen, die eine Einführungsregel im letzten Schritt verwenden, die also die bewiesene Behauptung ›entsprechend ihrer Bedeutung‹ einführen. Diese Umformbarkeit annahmenfreier Beweise in solche, die eine Einführungsregel im letzten Schritt verwenden, ist grundlegend für die beweistheoretische Definition der Konsequenzrelation.[15]

3.3 Beweistheoretische Konsequenz

Auf dem beschriebenen Hintergrund haben sowohl Dummett als auch Prawitz Definitionen der logischen Konsequenz vorgeschlagen. Da sie sehr eng miteinander verwandt sind und Prawitz' Version präziser ausgearbeitet ist, skizzieren wir hier letztere.[16]

---

13 Vgl. Gentzen 1934/35, 186 f.

14 Daß man nichtkanonische auf kanonische Beweise zurückführen kann, formuliert Dummett als ›Fundamentalannahme‹ (›fundamental assumption‹) (Dummett 1991, 254 und Ch. 12 [265–79]).

15 Als Einführungen in die Beweistheorie einschließlich der Theorie des natürlichen Schließens seien neben den Originalabhandlungen von Gentzen (1934/35) und Prawitz (1965) das Lehrbuch von Troelstra und Schwichtenberg (1996) sowie, speziell für das natürliche Schließen, die Monographie von Negri und v. Plato (2001) empfohlen.

16 Wir orientieren uns an Prawitz 1985. Eine ausführlichere Darstellung ist Prawitz 1973. Einen guten Überblick bieten Prawitz 1974 und Prawitz 2005. Eine detaillierte Ausarbeitung des Begriffs der beweistheoretischen Gültigkeit findet sich bei Schroeder-Heister (2005). Die Behandlung der damit eng verwandten Ansätze Martin-Löfs würde den Rahmen dieser Abhandlung sprengen. Man vergleiche dazu das Buch von Sommaruga (2000), die Darstellung bei Hinzen (1998) sowie Martin-Löfs bedeutungstheoretische Artikel 1996, 1995, 1998.

Die Intention hinter der beweistheoretischen Definition der Konsequenzrelation besteht nicht nur darin, eine konstruktive Definition zu liefern, die zu einer anderen Logik als der klassischen führt, sondern auch darin, eine Analyse von Konsequenz zu liefern, die grundsätzlich mehr Information beinhaltet als die modelltheoretische Definition. Nach letzterer liegt logische Konsequenz vor, wenn alle Modelle der Prämissen auch Modelle der Konklusion sind. In welcher Weise Prämissen und Konklusion verknüpft sind, wird nicht gesagt. Nach Prawitz liefert die modelltheoretische Definition somit eine *black box*, von der man nur weiß, daß man etwas Wahres herausbekommt, wenn man etwas Wahres hineingibt. In der auf R. Carnap zurückgehenden Terminologie könnte man sagen, daß man sich bei der modelltheoretischen Definition nur für die *Extension* der Konsequenzrelation interessiert, d.h. dafür, *daß* eine bestimmte Relation zwischen Prämissen und Konklusion besteht, nicht jedoch für die *Intension* dieser Beziehung, d.h. dafür, *wie* diese Beziehung zustandekommt, welcher Art die Verknüpfung ist, usw. Zu einer solchen intensionalen Auffassung gelangt Prawitz, indem er von einer logischen Konsequenz verlangt, daß mit ihr zugleich eine *Rechtfertigungsprozedur* gegeben ist, die die semantische Verknüpfung zwischen Prämissen und Konklusion gewährleistet. Genauer handelt es sich um eine *Menge* von Rechtfertigungsprozeduren, die in geeigneter Weise je nach Kontext interagieren. Eine solche Menge sei im folgenden *Rechtfertigung* genannt. Als Rechtfertigungen hat Prawitz Umformungsverfahren für Beweise des natürlichen Schließens von der oben beschriebenen Art im Sinn, die jetzt aber inhaltlich verstanden werden. Er benutzt den Terminus »Argument« für einen Beweis im inhaltlichen Sinn. Ein *Argument* ist also eine baumartige Beweisstruktur wie im natürlichen Schließen mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ als offenen Annahmen und β als Endformel. In diese baumartige Argumentstruktur, auf die sich Rechtfertigungsprozeduren beziehen, können auch vorgegebene Argumente für atomare Formeln eingehen. Diese sind Analoga zu Interpretationen in der modelltheoretischen Semantik, insofern sie die Gültigkeit von atomaren Formeln festlegen. Wenn man diese Argumente als *atomares System* bezeichnet, dann lautet der Begriff, den Prawitz definiert, wie folgt:

($*$) *Das Argument* Π, *das von* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *zu* β *führt, ist gültig relativ zu einer Rechtfertigung* $\mathcal{J}$ *und relativ zu einem atomaren System* $\mathcal{S}$.

Hat man ($*$) einmal definiert, dann ergibt sich wie in der modelltheoretischen Semantik *logische* Gültigkeit dadurch, daß man über *alle* atomaren Systeme quantifiziert:

- *Das Argument* Π, *das von* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *zu* β *führt, ist* logisch *gültig relativ zu einer Rechtfertigung* $\mathcal{J}$, *wenn* ($*$) *für* jedes *atomare System* $\mathcal{S}$ *gilt.*

Will man von *logischer Konsequenz* unabhängig von einem spezifischen komplexen Argument reden, das von den Prämissen zur Konklusion führt, betrachtet man einfach das Argument, das nur aus einem einzigen Schritt besteht, nämlich dem direkten Übergang von den Prämissen zur Konklusion.

Aber selbst dann bleibt im Unterschied zur modelltheoretischen Semantik die Relativierung auf eine Rechtfertigung $\mathcal{J}$ bestehen. Die Relativierung auf diese Rechtfertigung macht beweistheoretische Konsequenz zu einem intensionalen Begriff. Man kann zwar auch davon sprechen, daß β aus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ folgt (*simpliciter*), aber das heißt dann einfach, daß es eine Rechtfertigung $\mathcal{J}$ *gibt*, für die $(*)$ gilt.

Kern der beweistheoretischen Semantik ist also die Definition von $(*)$. Dies definiert man nun nicht direkt, sondern so, daß man die Definition von $(*)$ in die Definition der Gültigkeit eines *annahmenfreien* Arguments einbettet. Die Gültigkeit eines annahmenfreien Arguments ist zwar *prima facie* ein Spezialfall von $(*)$, umgekehrt wird jedoch die Gültigkeit eines annahmenfreien Arguments für eine Implikation auf die Gültigkeit eines Arguments mit Annahmen, d.h. auf $(*)$, zurückgeführt.

Ein *annahmenfreies* Argument Π für β heißt nun *gültig* relativ zu $\mathcal{J}$ und $\mathcal{S}$, falls Π mit Hilfe der Prozeduren $\mathcal{J}$ in ein Argument Π' für β überführt werden kann, das kanonisch ist. Π' heißt dabei *kanonisch*, falls folgendes gilt:

- *Wenn β atomar ist, dann ist Π' ein atomares Argument aus $\mathcal{S}$.*
- *Wenn β logisch komplex ist, dann wendet Π' im letzten Schritt eine Einführungsregel an, wobei die unmittelbaren Teilargumente, auf die die Regel angewendet wird, selbst schon gültig sind.*

Ein Argument aus den *Annahmen* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ für β heißt *gültig* relativ zu $\mathcal{J}$ und $\mathcal{S}$, falls folgendes gilt: Wenn man die Annahmen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ durch *annahmenfreie* Argumente für diese Annahmen ersetzt, die selbst gültig relativ zu $\mathcal{J}$ und $\mathcal{S}$ sind, so erhält man ein annahmenfreies Argument Π' für β, das gültig relativ zu $\mathcal{J}$ und $\mathcal{S}$ ist.[17] Die Eigenschaft $(*)$ besteht also dann, wenn das Argument Π gültige annahmenfreie Argumente für die Annahmen in gültige annahmenfreie Argumente für die Endformel überführt.

Die Einführungsregeln für logische Zeichen gehen wesentlich in diese Definition ein. Sie haben die Funktion von ›Bedeutungsregeln‹. Beseitigungsregeln haben selbst keine semantische Funktion in der Definition der Gültigkeit eines Arguments oder der logischen Konsequenz. Vielmehr stellen sie Muster für gültige Argumente dar, die sich mit der auf Einführungsregeln basierenden Semantik rechtfertigen lassen. Das Schema der Implikations-Beseitigungsregel (oder *modus ponens*)

$$\frac{\alpha \to \beta \quad \alpha}{\beta}$$

stellt ein solches logisch gültiges Argument dar. Nimmt man nämlich an, es seien gültige annahmenfreie Argumente für die Prämissen $\alpha \to \beta$ und α gege-

[17] Für eine weiterführende Diskussion dieser Definition siehe Schroeder-Heister 2005. Für Überlegungen zur semantischen Vollständigkeit siehe Schroeder-Heister 1985.

ben, so bedeutet das für die Prämisse $\alpha \to \beta$ insbesondere, daß ein Argument für $\alpha \to \beta$ vorliegt, das im letzten Schritt die $\to$-Einführungsregel anwendet:

$$\frac{\begin{array}{c}[\alpha] \\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}$$

Da zudem nach Definition das unmittelbare Teilargument hiervon, nämlich das Argument von α zu β,

$$\begin{array}{c}\alpha \\ \vdots \\ \beta\end{array}$$

selbst gültig ist, bedeutet dies, daß wir ein gültiges annahmenfreies Argument für β erhalten, wenn wir die Annahme α durch das (nach Definition vorhandene) gültige annahmenfreie Argument für α ersetzen. Die Rechtfertigung $\mathcal{J}$ besteht hier in den soeben verbal gegebenen Umformungsinstruktionen. Man erkennt leicht, daß sich dahinter das im vorigen Teilabschnitt beschriebene Reduktionsverfahren verbirgt, das Anwendungen von Einführungsregeln gefolgt von Anwendungen von Beseitigungsregeln eliminiert. (Da dieses Verfahren völlig unabhängig von atomaren Systemen ist, liegt tatsächlich *logische* Konsequenz vor.)

Wie weit Prawitz seiner Motivation, einen intensionalen Konsequenzbegriff zu liefern, wirklich gerecht wird, ist noch Gegenstand von Diskussionen. Es ließe sich z. B. einwenden, daß in Rechtfertigungen $\mathcal{J}$ für übliche prädikatenlogische Argumente gerade der Gehalt der Beseitigungsregeln eingeht, die man semantisch rechtfertigen will (vgl. Contu 1995, Contu 2005). Auf diese Probleme kann hier nicht eingegangen werden, ebensowenig wie im vorhergehenden Abschnitt auf kritische Aspekte der modelltheoretischen Definition. Unsere Darstellung sollte zeigen, daß es substantielle beweistheoretische Ansätze zur Definition der Konsequenz gibt und daß modelltheoretische und beweistheoretische Ansätze im Aufbau ihrer Definitionen trotz verschiedener Ausgangspunkte auch gewisse Verwandtschaften aufweisen.

4 *Annahmen:* Das Dogma der Standardsemantik

Daß Annahmen im alltäglichen und wissenschaftlichen Räsonieren eine fundamentale Rolle spielen, ist eine Platitüde. Wir behaupten häufig nicht einfach Aussagen oder beweisen sie, sondern tun dies hypothetisch, d. h. unter Annahmen. Die Widerlegung einer Aussage besteht z. B. meist darin, daß wir unter der Annahme dieser Aussage einen Widerspruch zu anderen Aussagen erhalten. Wenn wir mit *kategorischem Räsonieren* das Behaupten und Beweisen von Aussagen ohne Annahmen bezeichnen und mit *hypothetischem Räsonieren* das Behaupten und Beweisen unter Annahmen, so muß das hypothetische Räsonieren als der allgemeine Fall angesehen werden, während das kategorische Räsonieren ein Spezial- oder Grenzfall ist, nämlich hypothetisches Räsonieren bei leeren Prämissen. Dem trägt die *Standardsemantik* – damit soll im folgenden sowohl die modelltheoretische als auch die beweistheoretische Semantik der im vorigen skizzierten Art gemeint sein – dadurch Rechnung, daß sie mit dem Begriff der Konsequenz ein Konzept bereitstellt, auf dem das hypothetische Räsonieren aufbauen kann.

Nun geht es der Standardsemantik in erster Linie um *logische* Folgerung, d.h. um eine Konsequenzrelation, die unabhängig von Inhalten besteht. Wie in der Einleitung erläutert, entspricht dies der Idee einer universellen Logik, in bezug auf welche die für bestimmte Bereiche spezifischen Inhalte als Annahmen repräsentiert werden. Hierin sind sich beide Varianten der Standardsemantik einig, auch wenn die universelle Logik in der modelltheoretischen Semantik die klassische und in der beweistheoretischen Semantik die intuitionistische Logik ist, in der z.B. das *tertium non datur* nicht uneingeschränkt gilt. Nach dieser zentralen Idee gibt es keine genuin inhaltliche Konsequenz, sondern nur logische Konsequenz relativ zu gewissen Inhalten. Wenn man z.B. aus einer hypothetisch angenommenen empirischen Theorie Voraussagen ableitet – etwa zum Zwecke der Prüfung der Theorie –, so unternimmt man dies in der Regel unter bestimmten Hintergrundannahmen, d.h. in einem bestimmten inhaltlichen Rahmen. Dieser inhaltliche Rahmen stellt nach dem bisherigen selbst eine Annahme dar. Der Schluß von der Hypothese H auf die Behauptung A im inhaltlichen Rahmen R ist also als logische Konsequenz aus den beiden Annahmen H und R auf A aufzufassen, symbolisch

$$H, R \Vdash A,$$

und nicht etwa als genuin inhaltliche Konsequenz von H auf A, was man dann etwa als

$$H \Vdash_R A$$

symbolisieren müßte – mit »$\Vdash_R$« als einer Art inhaltlicher Konsequenzbeziehung.

Die Sicht von hypothetischem Räsonieren als logischem Räsonieren unter Hinzunahme von Annahmen führt jedoch zu Überlegungen, die den Rahmen der Standardsemantik sprengen. Im wissenschaftstheoretischen Beispiel von Theorie H und Hintergrundannahmen R sind H und R ja gerade *nicht* gleichberechtigt. Die Hintergrundhypothese R wird *nicht* zur Disposition gestellt, wenn man über die Akzeptanz der Theorie H diskutiert. Sollte sich dieser Unterschied in der Behandlung der beiden Annahmen H und R nicht in der formalen Theorie widerspiegeln, die man benutzt, um das Räsonieren zu beschreiben?

Wir wollen im folgenden die Annahmen R als *Rahmenhypothesen* bezeichnen, d.h. als die Hypothesen, die den jeweils betrachteten Kontext oder Argumentationsrahmen charakterisieren, und die Annahmen H als *lokale* Hypothesen, d.h. als Hypothesen, die man im jeweiligen Kontext macht. Als Vertreter der Standardsemantik würde man jetzt etwa wie folgt argumentieren: Die Unterscheidung zwischen Rahmenhypothesen und lokalen Hypothesen ist eine *pragmatische* Unterscheidung, die nichts mit der Bedeutung dieser Annahmen und erst recht nichts mit dem benutzten Folgerungsbegriff zu tun hat. Logische Konsequenz im universellen Sinne bleibt das Standardwerkzeug des Räsonierens.

Die Standardsemantik könnte gerade hier auf das wissenschaftstheoretische Beispiel von Theorie und Hintergrundannahmen verweisen. In der Wissenschaftstheorie wird die Unterscheidung zwischen Theorie und Hintergrundannahmen nicht als Unterscheidung gehandelt, die semantisch begründet ist, sondern eben als pragmatische Unterscheidung, für deren Rechtfertigung (wenn man überhaupt eine Rechtfertigung geben möchte) nicht-semantische Faktoren diverser Art maßgeblich sind.

Dieses Argument erscheint uns jedoch nicht schlüssig. Selbst wenn die Unterscheidung von zwei Sorten von Annahmen nicht-semantischer Natur ist, wie im wissenschaftstheoretischen Beispiel, so wollen wir doch die Möglichkeit haben, beide Arten von Annahmen beim Schließen in verschiedener Weise zu behandeln. Die Theorie der Konsequenz sollte die Möglichkeit dazu bereitstellen, welche Gründe auch immer für eine solche Unterscheidung sprechen. Man könnte sich vorstellen, daß es im wissenschaftstheoretischen Beispiel möglich ist, Formalismen für eine Widerlegungslogik zu entwickeln, bei der z. B. scheiternde Voraussagen nur auf die lokalen Hypothesen und nicht auf die Rahmenhypothesen durchschlagen.

Unsere These zur Erweiterung der Standardsemantik ist also, daß man deduktive Rahmenwerke entwickeln sollte, die mit verschiedenen Sorten von Annahmen in verschiedener Weise umgehen. Dies spricht nicht gegen die Universalität der Logik. Im Gegenteil fordert dies eine noch universellere Logik, universeller in dem Sinne, daß sie komplexere Annahmenstrukturen zuläßt.

Worin liegt der Grund für die beschränkte Weise, in der die Standardsemantik Annahmen erlaubt? Nach unserer Ansicht liegt er in einem zentralen Dogma begründet, das man das *Dogma vom begrifflichen Primat des Kategorischen über das Hypothetische* bezeichnen könnte. Wenn wir modelltheoretisch die Wahrheit einer Aussage als *kategorische* Wahrheit bezeichnen im Gegensatz zur Folgerung als *hypothetischer* Wahrheit, oder entsprechend beweistheoretisch einen annahmenfreien Beweis als *kategorischen* Beweis im Gegensatz zu einem Argument aus Annahmen als *hypothetischen* Beweis, so kann man sagen:

- *In der Standardsemantik stehen Annahmen für kategorische Wahrheiten bzw. für kategorische Beweise.*

Dies hat zur Folge, daß *hypothetische* Wahrheit bzw. *hypothetische* Beweise letztlich eine begrifflich sekundäre Rolle spielen. Sie besagen nämlich einfach, daß sich der jeweilige kategorische Begriff von den Prämissen auf die Konklusion überträgt. In beiden Arten von Semantik drückt der hypothetische Begriff die *Konservierung* des kategorischen Begriffs aus:

- *Konsequenz, d.h. hypothetische Wahrheit bzw. hypothetische Beweisbarkeit, bedeutet Übertragbarkeit von kategorischer Wahrheit bzw. kategorischer Beweisbarkeit von den Prämissen auf die Konklusion.*

Nach der modelltheoretischen Konzeption steht eine Annahme α also für die Annahme, daß sie (kategorisch) wahr ist, nach der beweistheoretischen Konzeption für die Annahme, daß sie (kategorisch) beweisbar ist. In beiden Konzeptionen gilt: Der Nachweis der Wahrheit einer Annahme α macht α als Hypothese überflüssig. In der Standardsemantik gibt es keine genuin hypothetischen Beziehungen, d.h. Beziehungen, die nicht als Konservierung des Kategorischen definiert sind. Solche Beziehungen würden eine andere Annahmenkonzeption erfordern.

Prima facie ist das Annahmendogma plausibel. Was sonst soll man mit einer Hypothese annehmen als die Tatsache, daß sie wahr ist bzw. bewiesen werden kann? Das Problem ist nun nicht, daß wir bestreiten, daß Annahmen immer auch Annahmen der Wahrheit bzw. der Beweisbarkeit sind, sondern daß dies häufig nicht alles ist. Annahmen haben vielfach einen informativeren Gehalt, der über ihre bloße Wahrheit bzw. Beweisbarkeit hinausgeht. Dieser informativere Gehalt würde sich darin äußern, daß sie durch den Nachweis ihrer Wahrheit bzw. Beweisbarkeit nicht einfach eliminiert (›weggeschnitten‹, ›eingelöst‹) werden können. Bei der Unterscheidung zwischen lokalen Hypothesen H und Rahmenhypothesen R in einer Folgerungsbeziehung

$$H, R \Vdash A$$

wird man H als Hypothese auffassen wollen, die in der Tat im Sinne der Standardsemantik nicht mehr als ihre kategorische Wahrheit bzw. Beweisbarkeit postuliert, d.h. die durch den Beweis ihrer Wahrheit (im betreffenden Kontext) eingelöst wird. Wenn man also

$$R \Vdash H$$

zeigen könnte, würde sich ergeben:

$$R \Vdash A.$$

Mit dem Kontext R verhält es sich jedoch anders. Hier wird man nicht unbedingt sagen wollen, daß er durch den Beweis seiner kategorischen Wahrheit (etwa in einem anderen Kontext) eingelöst wird. Man wird von ihm vielmehr sagen wollen, daß er mehr ›Information‹ liefert als gerade die Annahme, daß er wahr oder beweisbar ist.

Diese Argumentation ist in erster Linie ein Appell an die Intuitionen der Leserin und des Lesers. Der folgende Abschnitt liefert Beispiele für Zusammenhänge, in denen man Annahmen einen informativeren Sinn zuspricht, als dies die Standardsemantik erlaubt. Das könnte die aufgrund der bisherigen abstrakten Darstellung möglicherweise noch sehr rudimentären Intuitionen vertiefen. Beide Beispiele versuchen, *intensionale* Konzepte von Annahmen zu entwickeln, die einen größeren Informationsgehalt haben als die bloß *extensionale* Annahme ihrer Wahrheit bzw. Beweisbarkeit. Als Ergebnis erhält man ein sehr viel differenzierteres Bild von Konsequenz, bei dem verschiedene Arten von Annahmen in verschiedener Weise behandelt werden können.[18]

Formal würde sich der informativere Gehalt, den Annahmen haben, darin zeigen, daß für die entsprechende Konsequenzrelation die *Schnitteigenschaft* nicht mehr uneingeschränkt gilt. Damit meint man im einfachsten Fall die *Transitivität der Konsequenzrelation* in dem Sinne, daß, falls B Konsequenz von A ist und C Konsequenz von B, auch C Konsequenz von A ist. Das ist trivial, wenn mit »Konsequenz« die Konservierung von kategorischer Wahrheit oder Beweisbarkeit gemeint ist. Es ist jedoch keineswegs trivial in den ins Auge gefaßten Erweiterungen, da in der Konsequenzrelation zwischen B und C die Prämisse B Informationen enthalten könnte, die A nicht besitzt, auch wenn B Konsequenz aus A ist.

Insgesamt plädieren wir also für eine erweiterte Konsequenzrelation

$$H, R \Vdash A,$$

bei der zwar für lokale Annahmen H die Standardsemantik gilt, nicht jedoch für Rahmenhypothesen R. Ganz allgemein müßte man je nach intendiertem Gegenstandsbereich noch sehr viel komplexere Annahmenstrukturen zulassen.

Die Idee, daß die Standardsemantik nicht ausreichend ist, ist keineswegs neu. Ihre Erweiterung kann man auch so charakterisieren, daß man andere Begriffe von Implikation entwickelt, die über die übliche (von B. Russell »material« genannte) Implikation hinausgehen, da sich ja die Konsequenz von $A_1, \ldots, A_n$ auf B als die Wahrheit der Implikation $A_1 \& \ldots \& A_n \rightarrow B$ auffassen läßt. Die Theorien der *strikten Implikation* und die davon ausgehende Entwicklung der *Modallogik*[19] geben dafür ein Beispiel ab. Andere Beispiele sind *Relevanzlogik*[20] sowie Theorien von *Konditionalsätzen*.[21] Ganz allgemein ist die in neuerer Zeit entwickelte *substrukturelle Logik* ein Versuch, die Idee komplexer Annahmenstrukturen formal zu erfassen (vgl. Došen und Schroeder-Heister 1993, Paoli 2002, Restall 2000, Schroeder-Heister 1991b). In mancher Hinsicht überlappen sich deren Überlegungen mit unseren Thesen zur Konsequenz und zum Annahmenbegriff. Das gilt auch für nichtmonotone Logiken,[22] die ebenfalls besondere Aktualität besitzen.

---

18 Die Zweiteilung *kategorisch–hypothetisch* wird damit gleichermaßen fragwürdig, da man jetzt verschiedene Weisen der Hypothetizität bzw. Kategorizität unterscheiden kann. Im vorigen Absatz war implizit davon schon die Rede im Sinne der kategorischen Wahrheit in einem Kontext.

19 Hughes und Cresswell 1996 ist eines der Standardlehrbücher, das auch historische Referenzen enthält.

20 Vgl. den einführenden Überblick von Fuhrmann (1995) mit Hinweisen auf weiterführende Literatur.

21 Vgl. den Handbuchartikel Nute und Cross 2001.

22 Vgl. als Überblick die Beiträge in Gabbay et al. 1994.

5 Beispiele für erweiterte Konsequenzbegriffe

Charakteristisch für die beiden folgenden Beispiele ist ihre beweistheoretische Natur. Sie beruhen auf Versuchen, die Nachteile der üblichen beweistheoretischen Semantik zu überwinden bzw. diese Semantik zu erweitern. Sie sind jedoch für den modelltheoretischen Kontext grundsätzlich genauso wesentlich, will man intensionale Aspekte der Konsequenz einbeziehen. Ein Desiderat bestünde darin, ihnen echte modelltheoretische Fassungen zu geben.

Im ersten Beispiel geht es um definitionstheoretische Zusammenhänge. In der Theorie der *definitorischen Reflexion* erweist es sich als sinnvoll, Annahmen unter Rückgriff auf Definitionen aufzustellen. Aus diesen Annahmen sind Konsequenzen herleitbar, die sich mit der Standardsemantik aus der bloßen Annahme ihrer Wahrheit oder Beweisbarkeit nicht in jedem Fall ergeben. Es handelt sich um die Annahme einer Aussage oder Formel aufgrund ihrer definitorisch gegebenen Bedeutung. Dieses Konzept liegt schon in formal ausgearbeiteter Form vor und zeigt, was man gewinnt, wenn man zusätzliche Regeln der *Annahmeneinführung* erlaubt, die auf definitionstheoretischen Prinzipien beruhen. Nebenbei demonstriert es den philosophischen Ertrag der Auseinandersetzung mit Ideen, die in der Informatik, hier: der Theorie der Logikprogrammierung, entwickelt worden sind.

Im zweiten Fall geht es um die durch inhaltliche Beweise gegebene Information. Es ist offenbar, daß die Art, wie ein mathematischer Beweis mit Hilfe von Lemmata geführt wird, mehr Information liefert als nur die Tatsache, daß das behauptete Theorem wahr ist. Insofern hat es Sinn, die Idee der Annahme einer Aussage *als Lemma* in Betracht zu ziehen, die mehr besagt als die Annahme, daß das Lemma gilt. Der Beweis des Lemmas macht dieses nicht überflüssig, da es eine spezifische Rolle in der Struktur des Gesamtbeweises spielt. Diese Idee, den informativen Gehalt von Beweisen durch die besondere Art der Annahmeneinführung zu behandeln, ist formal noch nicht weit ausgearbeitet, scheint uns als Erweiterung des Annahmenbegriffs aber so plausibel zu sein, daß wir sie zur Diskussion stellen möchten.

5.1 Definitionen und Annahmen: Definitorische Reflexion

Die Theorie der definitorischen Reflexion geht ursprünglich auf Ideen von Hallnäs (1991) zurück[23] und wurde später in verschiedenen logischen Kontexten weiterentwickelt.[24] Die philosophische Idee hinter dieser Theorie besteht darin, daß Definitionen, wenn man sie so allgemein faßt, daß sie nicht nur explizite Definitionen im üblichen Sinne, sondern auch induktive Definitionen umfassen, sich invertieren lassen und so zu logischen Systemen mit komplexeren Annahmenbegriffen Anlaß geben.

[23] Vgl. auch Hallnäs 2005. Einen Vorläufer bilden Theorien allgemeiner Formen von Beseitigungsregeln für logische Zeichen, vgl. Schroeder-Heister 1981, Schroeder-Heister 1984a, Schroeder-Heister 1984b.

[24] Vor allem im Bereich der Logikprogrammierung, vgl. Hallnäs und Schroeder-Heister 1991, Schroeder-Heister 1991a, Schroeder-Heister 1993.

Bei einer normalen *Explizitdefinition* wird im einfachsten Fall ein Prädikat P mit Hilfe einer Formel α definiert. Man erwartet dann, daß man P in jedem Kontext durch α ersetzen kann, hat doch P aufgrund der Definition dieselbe Bedeutung wie α. Explizitdefinitionen dieser Art sind also *Abkürzungen*. Das *einfache* P steht für das *komplexe* α. So steht das einfache Prädikat »Junggeselle« für die komplexere (nämlich zwei Prädikate umfassende) Aussageform »unverheirateter Mann«.

Nicht alle Definitionen sind jedoch von dieser simplen Art. Häufig beschreibt man einen Bereich durch gewisse Regeln, ohne daß dies sogleich die formale Gestalt einer Explizitdefinition hat. Wenn man Hunde, Katzen und Meerschweinchen als »Haustiere« definiert, könnte man dies als Liste von drei Regeln (nicht von Behauptungen!) verstehen: Jeder Hund ist ein Haustier, jede Katze ist ein Haustier, jedes Meerschweinchen ist ein Haustier. Zu einer *Definition* wird eine solche Liste von Regeln jedoch erst dann, wenn man zudem noch feststellt: Nichts sonst ist ein Haustier. Andernfalls wäre ja nicht festgelegt, was ein Haustier ist, man könnte beliebige neue Klauseln hinzufügen. Diese Bedingung: »Nichts sonst ist ein Haustier«, bezeichnet man auch als *Abschlußeigenschaft* der durch die Regeln gegebenen Definition. Sie erlaubt es, aus der definierten Eigenschaft »Haustier« selbst wieder Konsequenzen zu ziehen. Wenn wir z. B. wissen oder annehmen, daß Hunde Säugetiere sind, ferner, daß Katzen Säugetiere sind, und schließlich, daß Meerschweinchen Säugetiere sind, dann können wir daraus schließen, daß Haustiere Säugetiere sind. Dies ist ein einfacher Fall von definitorischer Reflexion: Wir reflektieren auf die Bedeutung von »Haustier«, indem wir uns klar machen, daß es nur drei Möglichkeiten gibt, den Begriff »ist ein Haustier« zu generieren (nämlich aus »ist ein Hund«, »ist eine Katze« und »ist ein Meerschweinchen«). Da für *alle* diese drei Optionen dasselbe gilt, nämlich daß ein Säugetier vorliegt, gilt dies auch für den Begriff »Haustier« insgesamt. In gewisser Weise erlaubt definitorische Reflexion also, Definitionen, die durch Regeln gegeben sind, umzukehren: Während die ursprüngliche Definition es gestattet, vom Begriff »Hund« zum Begriff »Haustier« überzugehen – und entsprechend für »Katze« und »Meerschweinchen« –, ermöglicht es definitorische Reflexion umgekehrt, aus dem definierten Begriff »Haustier« etwas zu erschließen, nämlich alles das, was man sowohl aus dem Begriff »Hund«, als auch aus dem Begriff »Katze«, als auch aus dem Begriff »Meerschweinchen« erschließen kann. Bezeichnet man »Haustier« als das *Definiendum* der drei definitorischen Regeln und »Hund«, »Katze« sowie »Meerschweinchen« als deren *Definientia*, so kann man sagen, daß die definitorische Reflexion es erlaubt, aus dem Definiendum alles das zu deduzieren, was man aus *jedem* Definiens deduzieren kann.

Allgemein besagt das Prinzip der definitorischen Reflexion im einfachsten Fall[25] folgendes: Die atomare Formel p sei definiert durch die (möglicherweise komplexen) Formeln $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ in dem Sinne, daß *jede* der Formeln $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$

[25] Damit ist hier der aussagenlogische Fall ohne Gegenstandsvariablen gemeint.

es für sich erlaubt, zu p überzugehen. D.h. wir haben das definitorische Regelsystem

$$\begin{array}{rcl} p & \Leftarrow & \gamma_1 \\ & \vdots & \\ p & \Leftarrow & \gamma_n \end{array}$$

wobei man traditionell den Regelpfeil $\Rightarrow$ in umgekehrter Richtung schreibt, um das Definiendum auf der linken Seite zu haben. Dann kann man aus dem Definiendum p alles das deduzieren, was man aus allen Definientia $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ jeweils für sich deduzieren kann; formal:

Wenn $\gamma_1 \Vdash \alpha$, $\gamma_2 \Vdash \alpha$, ... und $\gamma_n \Vdash \alpha$ gilt, dann gilt auch $p \Vdash \alpha$.

Aus p gewinnen wir alles zurück, was allen Definientia von p gemeinsam ist.

Die Idee der definitorischen Reflexion erlaubt es, aus einer definierten Formel aufgrund einer vorliegenden Definition etwas zu deduzieren, sie liefert also einen neuen Begriff von Annahme, der über die Annahmenkonzeption im Standardbegriff der Konsequenz hinausgeht. Wenn man eine Formel aufgrund ihrer Definition annimmt, dann kann man aus ihr etwas deduzieren, was man ohne die Definition nicht könnte. Man könnte jetzt argumentieren, das sei bei Definitionen immer so. Definitionen seien selbst Annahmen, die es erlauben, neue Behauptungen zu deduzieren, die ein definiertes Zeichen betreffen. Die oben skizzierte regelbasierte Definitionsform lasse sich auf normale Explizitdefinitionen zurückführen, die man dann als normale Annahmen verwenden könne. Statt im obigen Beispiel »Haustier« durch drei Regeln zu definieren, könnte man es explizit durch die Disjunktion »Hund oder Katze oder Meerschweinchen« definieren, oder entsprechend in der obigen Formalisierung p durch die Disjunktion $\gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_n$.

In diesen einfachen Fällen ist dies in der Tat möglich, in komplexeren Fällen jedoch nicht mehr ohne besonderen Aufwand. Definieren wir etwa in der Mathematik die natürlichen Zahlen durch die beiden Regeln

- 0 *ist eine natürliche Zahl,*
- *wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ist der Nachfolger von n eine natürliche Zahl,*

dann können wir mit definitorischer Reflexion z. B. erschließen, daß 0 keinen Vorgänger hat oder daß der Vorgänger einer von 0 verschiedenen natürlichen Zahl eine natürliche Zahl ist. Diese Schlüsse können wir ohne definitorische Reflexion nicht durchführen, es sei denn, wir nehmen Prinzipien an, die über den unmittelbaren Gehalt der Regeln hinausgehen (in diesem Fall das mathematische Induktionsprinzip).

Es gibt jedoch Fälle, in denen auch eine solche Reduktion nachweislich nicht mehr durchführbar ist. Die Idee der definitorischen Reflexion ermöglicht es nämlich, auch zirkuläre und nicht-fundierte Kontexte zu behandeln, d. h. Kontexte, in denen die verwendeten Definitionsregeln zirkulär sind oder in einen unendlichen definitorischen Regreß führen – etwas, was man in der üblichen Definitionstheorie von vornherein auszuschließen versucht. Solche Kontexte sind aus der philosophischen Diskussion der *semantischen Antinomien* geläufig, z. B. aus der Lügnerantinomie (»Diese Behauptung ist falsch«). Eine solche Antinomie könnte man vereinfacht durch die definitorische Regel für eine atomare Aussage p konstruieren, die besagt, daß sie selbst falsch ist, d. h. durch eine Definition von p durch *nicht-*p:

$$p \ \Leftarrow\ \neg p.$$

Diese Idee kann man formal in einem Kontext behandeln, der selbst nicht widersprüchlich ist. Es kann jedoch gezeigt werden, daß in einem solchen Kontext grundsätzliche Eigenschaften der üblichen Theorie von deduktiven Annahmen verlorengehen, insbesondere die Schnitteigenschaft: Es gilt nicht mehr, daß man aus der Gültigkeit von p und der Gültigkeit der Konsequenz $p \Vdash \neg p$ auf $\neg p$ schließen und so einen Widerspruch konstruieren kann (vgl. Schroeder-Heister 1992). Dies ist, wie am Ende des vorigen Abschnitts bemerkt, genau die Eigenschaft, die über die klassische Konsequenzdefinition hinausgeht. Man erhält so eine interessante Theorie semantischer und anderer Zirkularitäten, die neue Aspekte in diesem Feld eröffnet.[26]

Hiergegen könnte man argumentieren, daß Definitionen von vornherein nicht-zirkulär und wohlfundiert sein müßten, was ja offensichtlich bei der Definition einer Aussage durch ihre eigene Negation nicht der Fall sei. Die Diskussion der semantischen Antinomien hat jedoch gezeigt, daß eine Definition von Nichtzirkularität und Nichtfundiertheit mit enormen Schwierigkeiten belastet ist, da nicht in jedem Fall die Situation so klar ist wie in unserem trivialen Beispiel. Das läßt es fruchtbar erscheinen, keine *Vorab-Restriktionen* bei Definitionen einzuführen, sondern beliebige Regelsysteme als definitorische Systeme zuzulassen und dann *nachträglich* zu untersuchen, welche Eigenschaften sie haben. Dieses Verfahren entspricht etwa der Definition eines Algorithmus oder eines Computerprogramms, bei der man *prüft*, ob er bzw. es terminiert. Der Entwurf einer Programmiersprache, bei der man *von vornherein* Nichttermination ausschließen will, bei der also Nichttermination ein vom Compiler zu entdeckender Fehler ist, ist aussichtslos und auch nicht in jedem Fall anzustreben.[27]

Der Begriff der definitorischen Reflexion ist im übrigen eng verwandt mit Ideen aus der Künstlichen Intelligenz und der Theorie der Logikprogrammierung, Begriffe von *Negation* einzuführen, die sich nicht nur konstruktiv im mathematischen Sinn verstehen lassen, sondern auch grundsätzlich maschinell implementierbar sind. Ein Beispiel ist die ›closed world assumption‹, die auf der Annahme aufbaut, daß durch bestimmte Regeln und Fakten eine Welt komplett definiert wird und daß daher *falsch* ist, was in dieser so definierten

[26] Für weitere Diskussionen zum Annahmenbegriff im Zusammenhang mit Definitionen und Zirkularitäten vgl. Schroeder-Heister 2004.

[27] Auf weitere Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden, insbesondere nicht auf informatikbezogene Aspekte (vgl. hierzu Aronsson et al. 1990).

Welt nicht gilt. Standardbeispiel ist die Behauptung, daß es *keine* Flugverbindung von A nach B gibt, aufgrund der Tatsache, daß ein bestimmtes Verzeichnis keine solche Verbindung aufweist, d.h. aufgrund der Annahme, daß dieses Verzeichnis die ›Welt‹ komplett beschreibt (vgl. Reiter 1978).

In diesem und in anderen Fällen ist es dabei häufig so, daß man Wege finden kann, das betrachtete Phänomen so zu modellieren, daß man mit der Konsequenz im Standardsinne auskommt. Diese Modellierung würde dann aber nicht mehr den intendierten Sinn dessen, was man beschreiben will, wiedergeben, d.h. seiner inhaltlichen (intensionalen) Funktion gerecht werden. Um wieder eine Analogie aus der Informatik anzuführen: Grundsätzlich kann jeder beliebige Algorithmus in einer universellen Turingmaschine implementiert werden. Das macht es jedoch nicht überflüssig, Programmiersprachen mit einer Vielzahl von Ausdrucksmöglichkeiten zu entwerfen, und zwar nicht nur, um es dem Programmierer leichter zu machen, sondern auch, um die Inhalte von Algorithmen klarer zum Ausdruck zu bringen.

5.2 Lemmata und Annahmen: Die Struktur inhaltlicher Beweise

In der Mathematik ist der Beweis eines Theorems oft mindestens so interessant wie das Theorem selbst. Jedenfalls beinhaltet der Beweis eines Theorems mehr Information als nur den Nachweis, daß die behauptete Aussage wahr ist. Daher ist es sinnvoll, bei der logischen Formalisierung mathematischer Beweise auch zu versuchen, diesen Aspekt zu berücksichtigen.

Dabei ist es keineswegs klar, daß dies überhaupt gelingen kann. Z.B. läßt sich die *Fruchtbarkeit* der Beweisidee, sicherlich ein fundamentaler Aspekt eines Beweises, schwierig formal fassen. In jedem Fall handelt es sich nicht um eine Eigenschaft der Konsequenzrelation, geht es hier doch um Aspekte, die die Verwendbarkeit auch in anderen Deduktionskontexten betreffen. Ähnliche skeptische Überlegungen betreffen die verwendete *Beweisstrategie*, die man etwa in heuristischen Zusammenhängen behandeln müßte. Das kann aber nicht heißen, daß sich überhaupt keine *intensionalen* Aspekte, wie man sie nennen müßte, in formalen Kodifizierungen von Beweisen und in der Struktur der verwendeten Konsequenzrelation fassen ließen.

Die *Relevanzlogik* behandelt z.B. schon solche Aspekte, die man als intensional bezeichnen könnte. Wenn man sich in dieser Logik dafür interessiert, ob eine Annahme wirklich in einem Beweis verwendet wurde, also als Annahme ›relevant‹ ist für die behauptete Aussage, so ist das eine Information, die schon mehr aussagt als nur die Wahrheit der Behauptung unter einer Bedingung, da bei der Konsequenzrelation der Standardsemantik eine solche Bedingung auch leer sein kann.

Wir meinen jedoch in bezug auf unsere Überlegungen zum Annahmenbegriff, daß man auch in der Lage sein sollte, darüber hinausgehende Informationen über die Struktur von Beweisen in die Konsequenzrelation einzubeziehen. Ein wichtiger Aspekt eines Beweises ist seine Zusammensetzung aus *Lemmata*, d.h. der Weg, den er benutzt, um auf dem Umweg über Hilfsbehauptungen zur Behauptung des Theorems zu gelangen. Wäre es nicht möglich, zumindest die Tatsache, daß in den Beweis eines Theorems bestimmte Lemmata eingehen, formal in der Konsequenzrelation zu fassen? Das wäre ein Teil der Beweisinformation, der über das hinausginge, was relevanzlogisch zu fassen wäre. Relevanzlogisch interessiert man sich ja nur für das, was für die *Wahrheit* des Theorems essentiell ist, nicht für das, was man beim Beweis als *Zwischenschritt* benutzt.

Die Aufgabenstellung läßt sich genauer wie folgt beschreiben. Nehmen wir an, das bewiesene Theorem lasse sich als Konsequenzbehauptung formulieren:

$$A \Vdash B,$$

in Worten etwa:

»Gegeben A. Dann gilt B.«

Nehmen wir ferner an, im Beweis dieses Theorems werde das Lemma L benutzt. Dann gilt natürlich:

$$A, L \Vdash B.$$

Für die Gültigkeit im Standardsinne ist L jedoch irrelevant, da L als Lemma nur einen Zwischenschritt auf dem Weg von A nach B darstellt. Wollen wir L im Rahmen einer informativeren Konsequenzrelation behandeln, dann muß L als Annahme eine andere Funktion haben als A, das ja im Gegensatz zu L als Annahme des Theorems für die Wahrheit von B relevant sein soll.

Das bedeutet, daß eine Konsequenzrelation mit zwei Sorten von Annahmen erforderlich wird: ›normale‹ Annahmen (wie A), die für die Wahrheit der Behauptung relevant sind, und ›Lemma-Annahmen‹ (wie L), die nicht für die Wahrheit, aber für die Beweisstruktur entscheidend sind. Für Lemma-Annahmen wird in dieser ›zweisortigen‹ Konsequenzrelation Schnitt (Transitivität) im allgemeinen scheitern: Obwohl wir

$$A, L \Vdash B$$

sowie

$$A \Vdash L$$

haben (da das Lemma aus den Annahmen des Theorems beweisbar sein soll), wollen wir daraus *nicht* wie in der Standardsemantik (und übrigens auch in vielen nichtmonotonen Logiken)

$$A \Vdash B$$

gewinnen. Der Gehalt von Lemma-Annahmen kann etwa so ausgedrückt werden: »wesentlich im Beweis benutzt, obwohl selbst beweisbar«.

Auf weitere Probleme, die sich aus der Präzisierung einer derartigen zweisortigen Konsequenzbeziehung ergeben, kann hier nicht eingegangen werden. Es sei jedoch zum Abschluß noch darauf hingewiesen, daß sich für die Behandlung von *Explizitdefinitionen* verwandte Überlegungen anstellen lassen. Wir meinen hier Explizitdefinitionen in der einfachen Form, in der sie üblicherweise als Abkürzungen verwendet werden. Explizitdefinitionen wird man wie Lemmata häufig als wesentlich für einen Beweis ansehen, obwohl sie als Abkürzungen natürlich eliminierbar sein müssen. Definitorische Begriffsbildungen können *produktiv* (oder auch nicht-produktiv) sein, selbst wenn man im Prinzip die Freiheit hat, Begriffe so zu definieren, wie man möchte. Explizitdefinitionen fungieren nun in einer Konsequenzrelation wie Annahmen. Hat man es bei der Definition mit einer produktiven Begriffsbildung zu tun und will man diese Information in einer Konsequenzrelation zum Ausdruck bringen, so wird man die Definition nicht eliminieren wollen, indem man Definiendum durch Definiens ersetzt. Denn durch eine solche Ersetzung geht Information verloren, und zwar nicht nur in dem Sinne, daß die Definition als Annahme verschwindet, sondern auch dadurch, daß aufgrund der Ersetzung das Theorem selbst eine andere Formulierung erhält.

Der Begriff der Konsequenz eröffnet also ein weites Feld, das durch die Standardsemantik trotz ihrer fundamentalen Leistungen bei weitem nicht erschöpft wird. Sinnvolle Überlegungen zur Erweiterung des Annahmenbegriffs führen über das hinaus, was in gegenwärtigen alternativen Logiken behandelt wird. Die Einbeziehung beweistheoretischer Gesichtspunkte erweist sich bei diesen Erweiterungen als besonders erfolgversprechend.

Literaturverzeichnis

Aronsson, M., L.-H. Eriksson, A. Gäredal, L. Hallnäs und P. Olin. 1990. »The Programming Language GCLA: A Definitional Approach to Logic Programming.« *New Generation Computing* 4:381–404.

Bolzano, B. 1837. *Wissenschaftslehre II*. Sulzbach. Repr. der 2. Aufl. Aalen 1970.

Contu, P. 1995. La filosofia della logica in Dummett e Prawitz. Diss. Florenz.

———. 2005. The Justification of the Logical Laws Revisited. In Kahle und Schroeder-Heister 2005. Frühere Fassung als Forschungsbericht Nr. 29 der Forschergruppe *Logik in der Philosophie*, Konstanz/Tübingen.

Došen, K., und P. Schroeder-Heister (Hg.). 1993. *Substructural Logics*. Oxford.

Dummett, M. 1978. *Truth and other Enigmas*. London.

———. 1991. *The Logical Basis of Metaphysics*. London.

———. 1993. *The Seas of Language*. Oxford.

——— (mit R. Minio). 1977. *Elements of Intuitionism*. Oxford.

Ebbinghaus, H.-D., J. Flum und W. Thomas. 1996. *Einführung in die mathematische Logik*, 4. Aufl. Heidelberg.

Etchemendy, J. 1990. *The Concept of Logical Consequence*. Cambridge.

Fitch, F. B. 1952. *Symbolic Logic: An Introduction*. New York.

Fuhrmann, A. 1995. »Relevanzlogik.« In *Enzyklopädie Logik und Wissenschaftstheorie*, Bd. 3, hg. v. J. Mittelstraß, 575–77. Stuttgart.

Gabbay, D. (Hg.). 1995. *What is a Logical System?* Oxford.

———, et al. (Hg.). 1994. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, Vol. 3: Nonmonotonic Reasoning and Uncertain Reasoning. Oxford.

Gentzen, G. 1934/35. »Untersuchungen über das logische Schließen.« *Mathematische Zeitschrift* 39: 176–210, 405–31.

Hallnäs, L. 1991. »Partial Inductive Definitions.« *Theoretical Computer Science* 87:115–42.

———. 2005. »On the Proof-Theoretic Foundation of General Definition Theory.« In Kahle und Schroeder-Heister 2005.

———, und P. Schroeder-Heister. 1991. »A Proof-Theoretic Approach to Logic Programming II. Programs as Definitions.« *Journal of Logic and Computation* 1:635–60.

Hinzen, W. 1998. *The Semantic Foundations of Anti-Realism*. Berlin.

Hughes, G. E., und M. J. Cresswell. 1996. *A New Introduction to Modal Logic*. London.

Jaśkowski, S. 1934. »On the Rules of Suppositions in Formal Logic.« *Studia Logica* 1:5–32. Nachdr. in *Polish Logic 1920–39*, hg. v. S. McCall, Oxford 1967, 232–58.

Kahle, R., und P. Schroeder-Heister (Hg.). 2005. *Proof-Theoretic Semantics*, Themenheft von *Synthese*.

Martin-Löf, P. 1995. »Verificationism Then and Now.« In *The Foundational Debate: Complexity and Constructivity in Mathematics and Physics*, hg. v. W. DePauli-Schimanovich et al., 187–96. Dordrecht.

———. 1996. »On the Meanings of the Logical Constants and the Justifications of the Logical Laws.« *Nordic Journal of Philosophical Logic* 1:11–60 (zirkulierte als Manuskript seit 1983).

———. 1998. »Truth and Knowability: On the Principles C and K of Michael Dummett.« In *Truth in Mathematics*, hg. v. H. G. Dales and G. Oliveri, 105–14. Oxford.

Negri, S., und J. von Plato. 2001. *Structural Proof Theory*. Cambridge.

Nute, D., und C. Cross. 2001. »Conditional Logic.« In *Handbook of Philosophical Logic* (Second Edition), Vol. 4, hg. v. D. Gabbay und F. Guenthner, 1–98. Dordrecht.

Paoli, F. 2002. *Substructural Logics: A Primer*. Dordrecht.

Prawitz, D. 1965. *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. Stockholm.

———. 1973. »Towards a Foundation of a General Proof Theory.« In *Logic, Methodology, and Philosophy of Science* IV, hg. v. P. Suppes et al., 225–50. Amsterdam.

———. 1974. »On the Idea of a General Proof Theory.« *Synthese* 27:63–77.

———. 1985. »Remarks on some Approaches to the Concept of Logical Consequence.« *Synthese* 62:152–71.

———. 2005. »Meaning Approached via Proofs.« In Kahle und Schroeder-Heister 2005.

Reiter, R. 1978. »On Closed World Databases.« In *Logic and Data Bases*, hg. v. H. Gallaire und J. Minker, 119–40. New York.

Restall, G. 2000. *An Introduction to Substructural Logics*. London.

Schroeder-Heister, P. 1981. Untersuchungen zur regellogischen Deutung von Aussagenverknüpfungen. Diss. Bonn (über die Homepage des Autors herunterladbar).

———. 1984a. »A Natural Extension of Natural Deduction.« *Journal of Symbolic Logic* 49:1284–1300.

———. 1984b. »Generalized Rules for Quantifiers and the Completeness of the Intuitionistic Operators $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\bot$, $\forall$, $\exists$.« In *Computation and Proof Theory*, hg. v. M. M. Richter et al., 399–426. Berlin.

———. 1984c. »Popper's Theory of Deductive Inference and the Concept of a Logical Constant.« *History and Philosophy of Logic* 5:79–110.

———. 1985. »Proof-Theoretic Validity and the Completeness of Intuitionistic Logic.« In *Foundations of Logic and Linguistics*, hg. v. G. Dorn und P. Weingartner, 43–87. New York.

———. 1991a. »Hypothetical Reasoning and Definitional Reflection in Logic Programming.« In *Extensions of Logic Programming*, hg. v. P. Schroeder-Heister, 327–40. Berlin.

———. 1991b. »Structural Frameworks, Substructural Logics, and the Role of Elimination Inferences.« In *Logical Frameworks*, hg. v. G. Huet und G. Plotkin, 385–403. Cambridge.

———. 1992. »Cut Elimination in Logics with Definitional Reflection.« In *Nonclassical Logics and Information Processing*, hg. v. D. Pearce und H. Wansing, 146–71. Berlin.

———. 1993. »Rules of Definitional Reflection.« In *8th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (Montreal 1993)*, 222–32. Los Alamitos.

———. 2004. »On the Notion of *Assumption* in Logical Systems.« In *Philosophie und/als Wissenschaft: Ausgewählte Sektionsvorträge des 5. Internationalen Kongresses der Gesellschaft für Analytische Philosophie, Bielefeld, 22.–26. September 2003 = Philosophy – Science – Scientific Philosophy: Selected Papers Contributed to the Sections of the 5th International Congress of the Society for Analytical Philosophy, Bielefeld, 22–26 September 2003*, hg. v. R. Bluhm und C. Nimtz, Paderborn.

———. 2005. »Validity Concepts in Proof-Theoretic Semantics.« In Kahle und Schroeder-Heister 2005.

Sommaruga, G. 2000. *History and Philosophy of Constructive Type Theory*. Dordrecht.

Tarski, A. 1935. »Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen.« *Studia Philosophica* 1:261–405. Neudr. in *Logik-Texte*, hg. v. K. Berka und L. Kreiser, 445–546, Berlin 1971.

———. 1936. »Über den Begriff der logischen Folgerung.« *Actes du congrès international de philosophie scientifique* 7:1–11. Gekürzter Neudr. in *Logik-Texte*, hg. v. K. Berka und L. Kreiser, 404–13, Berlin 1971. Kritische engl. Übersetzung aus dem Polnischen mit Auflistung und Diskussion der Differenzen zwischen polnischer und deutscher Fassung von M. Stroińska und D. Hitchcock: »On the Concept of Following Logically«, *History and Philosophy of Logic* 23 (2002), 155–96.

———. 1944. »The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics.« *Philosophy and Phenomenological Research* 4:341–71. Dt. in *Zur Philosophie der idealen Sprache*, hg. v. J. Sinnreich, 53–100, München 1972.

———. 1954. »Contributions to the Theory of Models, I–II.« *Indagationes Mathematicae* 16:572–88.

Tennant, N. 1997. *The Taming of the True*. Oxford.

Troelstra, A. S., und H. Schwichtenberg. 1996. *Basic Proof Theory*. Cambridge. 2. Aufl. 2000.