Lindenbaumsätze für deduktive Systeme

Diplomarbeit über

Lindenbaumsätze für deduktive Systeme

von René Gazzari

Mathematisches Institut
Eberhard Karls Universität
Tübingen, April 2010

Danksagung

Ich danke meinen Eltern, die mein Studium geduldig unterstützend ermöglicht haben. Ich danke allen, die mir durch ihr Vertrauen ermöglicht haben, über eine lange Zeit hinweg als studentische Hilfskraft vor Allem im Bereich der mathematischen Logik zu arbeiten; das hat mein Denken geprägt. Hierbei möchte ich namentlich Herrn Prof. Schroeder-Heister nennen. Ihm verdanke ich auch den Hinweis, der schließlich zum Thema dieser Arbeit wurde.

Herrn Prof. Hauck danke ich im besonderen Maß für seine intensive Betreuung meiner Diplomarbeit. Er hat sich auf mein Thema eingelassen und mich in allen Stadien der Arbeit kompetent unterstützt. Er hat meine zahlreichen Entwürfe sachkundig gelesen und sich Zeit genommen, meine Probleme zu durchdenken und sie in zahlreichen Gesprächen mit mir zu diskutieren.

Zu guter Letzt bedanke ich mich bei meinen Erstleserinnen Kathrin Kulmus und Nadja Klein. Sie haben mich mit ihren scharfen Augen vor vielen Fehlern bewahrt.

René Gazzari

Inhaltsverzeichnis

Übersicht über die Arbeit

David W. Miller möchte in seinem Artikel *„Some Restricted Lindenbaum-theorems Equivalent to the Axiom of Choice"* im Wesentlichen die Äquivalenz zweier Varianten des Satzes von Lindenbaum, die im Kontext von deduktiven Systemen formuliert werden, ohne Rückgriff auf das Auswahlaxiom beweisen.

Miller skizziert zunächst, dass beide Varianten des Satzes von Lindenbaum zum Auswahlaxiom (AC) äquivalent sind. Damit ist offenbar auch schon die Äquivalenz beider Varianten untereinander gegeben. Das Wesentliche am Miller'schen Projekt ist damit sein Anspruch, im Äquivalenzbeweis nicht auf das AC zurückzugreifen, sondern die Äquivalenz direkt zu zeigen.

Die eine Richtung ist dabei trivial gegeben; um die andere Richtung zu zeigen, versucht Miller schrittweise mithilfe weiterer Varianten des Satzes zum Ziel zu gelangen. Dabei gelingt es ihm aber nicht, alle benötigten Konsequenzen zu etablieren.

Aufgabenstellung dieser Diplomarbeit ist, das Miller'sche Projekt fortzuführen. Das bedeutet: Es sollen weitere Konsequenzen zwischen den verschiedenen, äquivalenten Varianten des Satzes von Lindenbaum ohne Rückgriff auf das AC bewiesen werden. Die Etablierung dieser Konsequenzen wird durch spezielle Konstruktionen ermöglicht: Aus gegebenen deduktiven Systemen werden derart neue deduktive Systeme konstruiert, dass bei den resultierenden Systemen gezielt bestimmte Eigenschaften erzwungen werden. Zusätzlich dürfen bei diesen Konstruktionen wesentliche Informationen über das ursprüngliche System nicht verloren gehen. Dieses Ziel wird im ersten, ausführlichen Teil dieser Arbeit verfolgt.

Um der Aufgabenstellung zu entsprechen, ist es nötig, Konsequenzoperationen (K-Operationen) und deduktive Systeme einzuführen. Erstere sind spezielle Abbildungen auf der Potenzmenge eines Grundraumes; ein Grundraum zusammen mit einer K-Operation bildet ein deduktives System. In diesem Kontext können dann auch die verschiedenen Varianten des Satzes von Lindenbaum formuliert und das Miller'sche Projekt detailliert vorgestellt werden. Dies erfolgt in den ersten beiden Paragraphen dieser Arbeit.

In den beiden nächsten Paragraphen werden deduktive Systeme im Allgemeinen untersucht: Zunächst wird der Zusammenhang zwischen einer K-Operation und der Menge ihrer Bildpunkte besprochen; dies eröffnet eine weitere Perspektive auf deduktive Systeme und erleichtert damit den Umgang mit diesen. Anschließend werden einige grundlegende Konstruktionsmethoden – wie etwa Schnitt und Vereinigung von deduktiven Systemen – vorgestellt, mithilfe derer neue deduktive Systeme gewonnen werden können.

Nach diesen eher allgemeinen Betrachtungen werden in den darauf folgenden Paragraphen spezielle Konstruktionen untersucht, mithilfe derer das Miller'sche Projekt vorangebracht wird: Die resultierenden Systeme werden, wie oben angedeutet, in Hinblick auf das Miller'sche Projekt untersucht und führen dann jeweils zur Etablierung neuer Konsequenzen zwischen verschiedenen Varianten des Satzes von Lindenbaum.

Im Einzelnen werden in dieser Arbeit die folgenden Typen von Konstruktionen für deduktive Systeme diskutiert:

(1) *Allgemeine Konstruktionen (§4):* Zunächst wird die Einschränkung eines deduktiven Systems auf einen Teilraum vorgestellt; damit kann dann der Schnitt von zwei beliebigen Systemen definiert werden. Anschließend wird die Vereinigung zweier disjunkter Systeme eingeführt, um schließlich den Übergang auf Restklassensysteme zu skizzieren.

(2) *Beschränkte Schnitte (§5):* Beschränkte Schnitte sind ein Spezialfall der Schnitte von deduktiven Systemen bei dem ein gegebenes System mit einem besonders einfachen System geschnitten wird.

(3) *Doppelung (§6):* Bei der Doppelung wird der Grundraum eines deduktiven Systems verdoppelt und darauf eine neue K-Operation definiert, die sich auf der Kopie wie die ursprüngliche verhält.

(4) *Angereicherte Systeme (§7):* Angereicherte Systeme entstehen dadurch, dass dem Grundraum eines gegebenen Systems neue Elemente hinzugefügt werden. Die darauf erklärte K-Operation verhält sich – solange nicht zu viele neue Elemente im Urbild sind – wie die ursprüngliche.

(5) *Charakteristische Systeme (§8):* In charakteristischen Systemen wird – ähnlich zu den bekannten charakteristischen Funktionen – festgestellt, ob eine bestimmte Menge im Bild einer gegebenen K-Operation liegt.

    Miller selbst führt in seinem Artikel einen Spezialfall der charakteristischen Systeme ein; hier wird diese Methode allgemeiner diskutiert.

Im Anhang B dieser Arbeit wird eine weitere spezielle Konstruktionsmethode, die Extremifikation, vorgestellt; diese zeigt zunächst ein ausgezeichnetes Verhalten hinsichtlich der Eigenschaften, die im konstruierten System erzwungen werden sollen. Da aber bei dieser Konstruktion zu viele Informationen über das ursprüngliche System verloren gehen, ist sie im Miller'schen Projekt nicht verwertbar.

Es gelingt zwar in dieser Arbeit mit den oben angedeuteten Konstruktionsmethoden einige neue Konsequenzen zwischen den einzelnen Varianten des Satzes von Lindenbaum zu etablieren und so das Miller'sche Projekt ein gutes Stück voranzubringen. Dennoch konnte das Projekt hier nicht vollendet werden; im Anhang A wird durch eine Diskussion der Struktur von deduktiven Systemen die Schwierigkeit angedeutet, weitere geeignete Konstruktionen zu finden, die eine Vollendung im Sinne Millers ermöglichen könnten.

Im anschließenden zweiten Teil dieser Arbeit wird ergänzend eine Übertragung des Miller'schen Projektes auf Varianten des Satzes von Lindenbaum äquivalent zum Boole'schen Primidealtheorem diskutiert. Dem wird dort eine ausführliche Beschreibung des Vorgehens vorangestellt.

An dieser Stelle wird noch abschließend auf Anhang C verwiesen, in dem die grundsätzliche Problematik, die Aufgabenstellung dieser Arbeit mathematisch präzise zu fassen, diskutiert wird.

Terminologie

Axiomatische Theorien: Bei der Bezeichnung axiomatischer Theorien wird in dieser Arbeit der Terminologie Ulrich Felgners gefolgt:

(1) ZFS*:* ZFS bezeichnet das Axiomensystem der Mengenlehre nach Zermelo, Fraenkel und Skolem; in der Literatur wird hierfür auch die Bezeichnung ZF verwendet. Eine explizite Nennung der Axiome findet sich etwa in [FgM, S. 83].

(2) DPA*:* DPA bezeichnet die Dedekind-Peano Arithmetik; in der Literatur wird hierfür auch PA verwendet. Eine explizite Nennung der Axiome findet sich etwa in [Dl, S. 87].

Mengentheoretische Bezeichnungen: Desweiteren werden in dieser Arbeit die folgenden mengentheoretischen Bezeichnungen und Schreibweisen verwendet:

(1) *Potenzmenge:* Für jede Menge S: $\mathfrak{p}(S) = \{X;\ X \subseteq S\}$

(2) *Ausgezeichnete Teilmengen der Potenzmenge:*
Für jede Kardinalzahl α: $\mathfrak{p}_\alpha(S) = \{X \subseteq S;\ |X| < \alpha\}$

(3) *Spezielle Inklusionen:* Für zwei Mengen X, Y bedeutet die Schreibweise $X \subseteq_{endl} Y$, dass X endliche Teilmenge von Y ist. Es gilt also:

$$X \subseteq_{endl} Y \quad :\Leftrightarrow \quad X \subseteq Y \quad \text{und} \quad |X| \in \mathbb{N}$$

Analog bedeutet für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Schreibweise $X \subseteq_n Y$, dass X höchstens n-elementige Teilmenge von Y ist. Es gilt also:

$$X \subseteq_n Y \quad :\Leftrightarrow \quad X \subseteq Y \quad \text{und} \quad |X| \leq n$$

(4) *Urbildmenge:*
Für jede Abbildung $f : A \to B$: $\mathfrak{Dom}(f) = A$

(5) *Bildmenge:*
Für jede Abbildung $f : A \to B$: $\mathfrak{Im}(f) = \{y \in B;\ \exists x \in A : f(x) = y\}$

(6) *Fixpunktmenge:*
Für jede Abbildung $f : A \to B$: $\mathfrak{Fix}(f) = \{x \in \mathfrak{Im}(f);\ f(x) = x\}$

I Lindenbaumsätze äquivalent zum AC

§1 Deduktive Systeme

In diesem Paragraphen werden die Grundlagen eingeführt, um im nächsten das Miller'sche Projekt und Aufgabenstellung dieser Arbeit diskutieren zu können. Ausgehend von *Konsequenzoperationen* – im Folgenden kürzer *K-Operationen* genannt – und *deduktiven Systemen* werden hier einige, für diese Arbeit *relevante Eigenschaften* deduktiver Systeme und das Konzept der *Saturiertheit* vorgestellt.

1.1 DEF (K-Operation & deduktives System, Tarski): Ist $S \neq \varnothing$ eine nichtleere Menge und $\mathrm{Cn} : \mathfrak{p}(S) \to \mathfrak{p}(S)$ eine Abbildung auf der Potenzmenge $\mathfrak{p}(S)$ von S, dann heißt die Abbildung Cn *K-Operation auf dem Grundraum S*, falls für alle Teilmengen $X \subseteq S$ das Folgende erfüllt ist:

(1) *Reflexivität:* $X \subseteq \mathrm{Cn}(X)$.

(2) *Idempotenz:* $\mathrm{Cn}(X) = \mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(X))$.

(3) *Endliche Reduzierbarkeit:* $\mathrm{Cn}(X) = \bigcup\{\mathrm{Cn}(Y);\ Y \subseteq_{endl} X\}$

Ist die Abbildung Cn eine K-Operation auf dem Grundraum S, dann wird das Paar $\mathcal{S} := \langle S, \mathrm{Cn}\rangle$ *deduktives System* und S *der Grundraum von $\mathcal{S}$* genannt.[1]

Das folgende Kriterium erleichtert den Nachweis einer K-Operation, indem es die etwas unhandliche *endliche Reduzierbarkeit* ersetzt. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird auf diese Ersetzung durchgehend zurückgegriffen.

1.2 Kriterium (K-Operationen): Die Bedingung *endliche Reduzierbarkeit* in obiger Definition läßt sich äquivalent durch die Konjunktion folgender beider Bedingungen ersetzen:

(1) *Monotonie:* $X \subseteq Y \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cn}(X) \subseteq \mathrm{Cn}(Y)$

(2) *Endlichkeit:* $x \in \mathrm{Cn}(X) \quad \Rightarrow \quad$ Es gibt $Y \subseteq_{endl} X$ mit $x \in \mathrm{Cn}(Y)$

Beweis. Es sind zwei Richtungen zu zeigen:

„$\Rightarrow$" Monotonie und Endlichkeit folgen sofort aus endlicher Reduzierbarkeit.

„$\Leftarrow$" Aus Monotonie folgt: $\mathrm{Cn}(X) \supseteq \bigcup\{\mathrm{Cn}(Z);\ Z \subseteq_{endl} X\}$.
Ist hingegen $x \in \mathrm{Cn}(X)$, gibt es mit der Endlichkeit ein $Y \subseteq_{endl} X$ mit $x \in \mathrm{Cn}(Y) \subseteq \bigcup\{\mathrm{Cn}(Z);\ Z \subseteq_{endl} X\}$. Q.E.D.

[1] Vgl. hierzu auch die Axiomatisierung der Menge Cn aller Konsequenzen bei Tarski, etwa [TR1, S. 31]. Tarski fordert dort zusätzlich die Abzählbarkeit des Grundraums S und die Existenz eines widersprüchlichen Elementes $x \in S$. In [TR2, S. 63f] verzichtet Tarski darauf, letzteres als Axiom zu fordern. Dort bezeichnet er oben angeführte Axiome (und die Abzählbarkeit des Grundraumes) als elementare Eigenschaften des Konzepts der Konsequenz, die in allen bekannten formalen Disziplinen erfüllt sind. (Vgl. [TR2, S. 63].)

Millers Projekt setzt notwendigerweise einen beliebigen Grundraum S voraus; entsprechend kann dieser Einschränkung bei Tarski hier nicht gefolgt werden.

Im Gegensatz zu Tarski und Miller wird hier zusätzlich angenommen, dass der Grundraum $S \neq \varnothing$ nichtleer ist. Dies vermeidet die unnötige Betrachtung vieler trivialer Sonderfälle.

Ebenfalls erwähnenswert ist, dass Tarski den Begriff *deduktives System* im Gegensatz zu dieser Arbeit für Teilmengen $X \subseteq S$ des Grundraumes, die $\mathrm{Cn}(X) = X$ erfüllen, definiert. (Vgl. hierzu etwa [TR1, S. 33].)

Beispiel (Klassisches System): Tarski möchte durch die Axiomatisierung deduktiver Systeme das Wesentliche des formalen Schließens fassen.

Ist also $\mathfrak{L}^* \subseteq \mathfrak{L}$ die Menge aller Aussagen einer formalen Sprache $\mathfrak{L}$ der Logik erster Stufe, dann ist die Abbildung

$$\mathrm{Th} : \mathfrak{p}(\mathfrak{L}^*) \to \mathfrak{p}(\mathfrak{L}^*) : \Gamma \mapsto \mathrm{Th}(\Gamma) := \{\phi \in \mathfrak{L}^*;\ \Gamma \vdash \phi\}$$

das zentrale motivierende Beispiel für eine K-Operation.[2] Das deduktive System $\mathcal{S}_c := \langle \mathfrak{L}^\star, \mathrm{Th}\rangle$ wird im Folgenden auch als *klassisches System* bezeichnet.

Beispiele (K-Operation): Es werden weitere Beispiele und ein Gegenbeispiel für K-Operationen gegeben,[3] die im Folgenden immer wieder Verwendung finden. Sei dazu ein nichtleerer Grundraum $S \neq \varnothing$ gegeben.

(1) *Minimale K-Operation:* $\mathrm{Cn}_{\min} : \mathfrak{p}(S) \to \mathfrak{p}(S) : X \mapsto X$.
Offensichtlich ist $\mathrm{Cn}_{\min} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{p}(S)}$.

(2) *Maximale K-Operation:* $\mathrm{Cn}_{\max} : \mathfrak{p}(S) \to \mathfrak{p}(S) : X \mapsto S$.

(3) *Beschränkte K-Operation:* Zu einem beliebigen Grundraum $S \neq \varnothing$ für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Cn}_{S,n} : X \mapsto \begin{cases} X & \text{falls } |X| < n \\ S & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathrm{Cn}_{S,n}$ wird als *beschränkte K-Operation zur Schranke* $n \in \mathbb{N}$ *auf dem Grundraum* S bezeichnet.

(4) *Gegenbeispiel:* Ist der Grundraum S unendlich, dann ist die folgende Abbildung keine (!) K-Operation:

$$f_\omega : X \mapsto \begin{cases} X & \text{falls } |X| \in \mathbb{N} \\ S & \text{sonst} \end{cases}$$

(Ist $s \in S$ beliebiges Element, dann ist sicherlich $s \in S = f_\omega(S \backslash \{s\})$. Für alle endlichen Teilmengen $Y \subseteq_{endl} S\backslash\{s\}$ gilt aber $s \notin Y = f_\omega(Y)$. Damit ist f_ω nicht endlich, also keine K-Operation.)

Sprechweisen der Logik: Die aus der Logik bekannte Begrifflichkeit wird gelegentlich im Kontext deduktiver Systeme verwendet. Sei dazu ein deduktives System $\mathcal{S} := \langle S, \mathrm{Cn}\rangle$, eine Teilmenge $X \subseteq S$ und ein Element $x \in S$ beliebig gegeben.

x heißt *beweisbar aus* X, falls $x \in \mathrm{Cn}(X)$. X heißt *Theorie*, falls $X = \mathrm{Cn}(X)$. Desweiteren heißt X *konsistent* (oder *widerspruchsfrei*), falls $\mathrm{Cn}(X) \neq S$. Ansonsten heißt X *inkonsistent* (oder *widersprüchlich*).

X heißt *vollständig*, falls alle echten Erweiterungen $Y \supsetneq X$ von X widersprüchlich sind. Schließlich heißt X *maximal* (oder *maximal-konsistent*), falls X konsistent und vollständig ist.[4]

[2] Je nach verwendetem Beweis-Kalkül ist der Nachweis, dass Th eine K-Operation ist, eine leichte Übung, auf die hier verzichtet wird. Vgl. hierzu auch die Propositionen zur endlichen Ableitbarkeit und den Strukturregeln der Ableitbarkeit in [SH1, §6].

[3] Der Nachweis, dass die angegebenen Abbildungen tatsächlich K-Operationen sind, besteht aus einfachem Nachrechnen, auf das hier verzichtet wird.

[4] Es lassen sich weitere Begriffe der Logik allgemein auf den Kontext deduktiver Systeme übertragen; vgl. hierzu auch die Definitionen im zweiten Teil dieser Arbeit.

Notation: Zur Lese- und Arbeitserleichterung werden folgende Vereinbarungen getroffen:

(1) *Standardvariablen:* Im Folgenden werden in der Regel K-Operationen durch kleine lateinische Buchstaben f, g und h bezeichnet. Dies betont einerseits deren Funktionalität, andererseits erleichtert es die Bezeichnung mehrerer K-Operationen zur gleichen Zeit.

(2) *Schreibweisen für Argumente:* Ist $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ ein deduktives System, dann werden folgende vereinfachende Schreibweisen verwendet:

Für endliche Mengen $\{x_1, \dots x_n\} \subseteq S$ wird anstelle von $f(\{x_1, \dots x_n\})$ auch $f(x_1, \dots x_n)$ geschrieben. Analog $f(X, x)$ für eine Menge $X \cup \{x\}$, $f(X, Y)$ für zwei Mengen $X, Y \subseteq S$ etc.

Diesen Paragraphen abschließend werden einige (mögliche) Eigenschaften deduktiver Systeme und das Konzept der Saturiertheit vorgestellt. Damit stehen dann genügend Mittel zur Verfügung, das Miller'sche Projekt zu diskutieren.

Sei dazu ein beliebiges deduktives System $\mathcal{S} := \langle S, f \rangle$ gegeben.

1.3 DEF (Relevante Eigenschaften):

(a) *extrem:* f heißt *extrem*, falls für alle $X \subseteq S$ gilt: $f(X) \in \{X, S\}$.

(b) *punkttreu:* f heißt *punkttreu*, falls für alle $x \in S$ gilt: $f(x) = \{x\}$.

(c) *2-kompakt:* f heißt *2-kompakt*, falls für alle $X \subseteq S$ gilt:

$$f(X) = S \quad \Rightarrow \quad \exists Y \subseteq_2 X : f(Y) = S.$$

(d) *gleichbleibend:* f heißt *gleichbleibend*, falls für alle $x, y, z \in S$ gilt:

$$f(x, y) = S = f(y, z) \text{ und } x \neq z \quad \Rightarrow \quad f(x, z) = S.$$

Das System $\mathcal{S}$ hat genau die Eigenschaften, die die zugehörige K-Operation f hat. Systeme, die *alle* oben genannten Eigenschaften haben, werden auch *Dzik-Systeme* genannt.[5]

Gelegentlich werden die oben eingeführten Eigenschaften auch im Kontext beliebiger Abbildungen auf der Potenzmenge eines Grundraums verwendet.

Bemerkungen (Relevante Eigenschaften):

(1) *Relevanz der Eigenschaften:* Das klassische System $\mathcal{S}_c$ hat, wie man sich leicht überzeugen kann, keine der oben genannten Eigenschaften;[6] die relevanten Eigenschaften werden erst durch das Miller'sche Projekt motiviert und gewinnen dort ihre Relevanz für diese Arbeit.

[5] Auch Miller definiert diese Eigenschaften in [ML, S. 187]; bei ihm heißen diese auf englisch: (a) extreme, (b) punctillious, (c) 2-compact und (d) equilateral. Die Gleichschenkligkeit (equilateral) bezieht sich dabei auf und wird motiviert durch verbandwertige Metriken. (Vgl. dazu [ML, S. 188].) Da im Folgenden darauf kein Bezug genommen wird, genügt für die Zwecke dieser Arbeit die leicht verfälschte Übertragung „gleichbleibend“.

[6] Zur Widerlegung von 2-kompakt betrachte die Menge $\{\phi, \psi, \neg\phi \vee \neg\psi\}$, zur Widerlegung von gleichbleibend die Elemente $\phi, \neg\phi \wedge \neg\psi, \psi$, wobei $\phi, \psi \in \mathfrak{L}^*$ kontingente Aussagen sind.

(2) *Kompaktheit:* Analog zur 2-Kompaktheit wird für jede natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ die *k-Kompaktheit* definiert; wird lediglich die Existenz einer endlichen Menge $Y \subseteq_{endl} X$ (mit beliebiger Kardinalität) gefordert, dann heißt f einfach nur *kompakt*.

(3) *Abhängigkeit der Eigenschaften:* Miller zeigt, dass die relevanten Eigenschaften logisch abhängig voneinander sind. Konkret zeigt er: Wenn eine K-Operation sowohl extrem als auch gleichbleibend ist, dann ist sie auch punkttreu oder 2-kompakt.[7]

Das folgende Kriterium erleichtert für extreme Abbildungen den Nachweis, dass diese K-Operationen sind, indem es erlaubt, lediglich Monotonie und Endlichkeit zu prüfen.

1.4 Kriterium (Extreme Abbildungen): Ist $f : \mathfrak{p}(S) \to \mathfrak{p}(S)$ eine extreme Abbildung auf einem nichtleeren Grundraum $S \neq \varnothing$, dann ist f schon reflexiv und idempotent.

Bew. (*Skizze*)*:* Der Beweis erfolgt durch banales Nachrechnen mit trivialen Fallunterscheidungen; darauf wird hier verzichtet. Q.E.D.

Abschließend wird noch das Konzept der Saturiertheit eingeführt.

1.5 DEF (Saturiertheit): Sei wieder $\mathcal{S} := \langle S, f \rangle$ ein beliebiges deduktives System und $x \in S$ beliebiges Element aus dem Grundraum.

(1) *x-Saturiertheit:* Eine Menge $X \subseteq S$ heißt *x-saturiert*, falls das Folgende erfüllt ist:

   (a) $x \notin f(X)$ und
   (b) für jedes $y \in S \backslash X$ gilt: $x \in f(X, y)$

(2) *Saturiertheit:* Eine Menge $X \subseteq S$ heißt *saturiert*, falls es ein $x \in S$ gibt, so dass X schon x-saturiert ist.

(3) *Erlaubt Saturierung:* *Das System* $\mathcal{S}$ *erlaubt Saturierung*, falls für alle Teilmengen $X \subseteq S$ und alle Elemente $x \in S$, die nicht aus X beweisbar sind – also $x \notin f(X)$ – das Folgende gilt:

   Es gibt eine Erweiterung $Y \supseteq X$ von X, so dass Y schon x-saturiert ist.

Bemerkung (Saturiertheit): Im klassischen System $\mathcal{S}_c = \langle \mathfrak{L}^*, \mathrm{Th} \rangle$ sind die saturierten Mengen genau die vollständigen, widerspruchsfreien Theorien. Diese Mengen sind also insbesondere $\perp$-saturiert. In der intuitionistischen Logik gewinnt obige Definition an Stärke. Dort impliziert die Saturiertheit einer Theorie noch nicht ihre Vollständigkeit.

Der klassische Satz von Lindenbaum sagt in der vorgestellten Terminologie aus, dass das System $\mathcal{S}_c$ Saturierung erlaubt und wird zumeist mit der einen oder anderen Variante des Auswahlaxioms (AC) bewiesen.[8]

[7] Vgl. hierzu [ML, S. 188]. Da diese Aussage im weiteren Verlauf der Arbeit nicht verwendet wird, kann hier auf einen Beweis verzichtet werden.

[8] Tatsächlich genügt für einen Beweis das etwas schwächere Boole'sche Primidealtheorem (BP). Vergleiche hierzu auch die Diskussion im zweiten Teil dieser Arbeit.

§2 Das Miller'sche Projekt

In diesem Paragraphen wird das Miller'sche Projekt ausführlich vorgestellt; an einigen Stellen werden dabei die Ideen Millers in leicht abgewandelter Form dargestellt, um so einen besseren Zugang zur Thematik zu bekommen. Insbesondere wird auch eine eigene Notation bei der Bezeichnung der verschiedenen Varianten des Satzes von Lindenbaum verwendet.

Im Anschluss an die Vorstellung des Miller'schen Projekts wird die Aufgabenstellung einer Analyse unterzogen und die Zielsetzung dieser Arbeit entwickelt.

Der Ausgangspunkt der Miller'schen Überlegungen ist der folgende Äquivalenzsatz.[9] Zur Formulierung des Satzes und zu seinem Beweis wird die folgende mengentheoretische Begrifflichkeit benötigt.

2.1 DEF (Auswahl & Vorauswahl): Sei $\mathfrak{I}$ Familie nichtleerer, paarweise disjunkter Mengen.

(1) *Auswahl:* Eine Menge $A \subseteq \bigcup \mathfrak{I}$ heißt *Auswahl auf* $\mathfrak{I}$, falls für alle $M \in \mathfrak{I}$ der Schnitt $A \cap M$ *genau* einelementig ist.

(2) *Vorauswahl:* Gilt für ein $A \subseteq \bigcup \mathfrak{I}$ lediglich, dass die Schnitte *höchstens* einelementig sind, dann wird A als *Vorauswahl* bezeichnet.

2.2 Theorem (Äquivalenzsatz): Die folgenden drei Aussagen sind (in der Mengenlehre ZFS) äquivalent:

(1) *Disjunktes Auswahlaxiom (*d AC*):*

Jede Familie nichtleerer, paarweise disjunkter Mengen hat eine Auswahl.

(2) *Allgemeiner Satz von Lindenbaum:*

Jedes deduktive System erlaubt Saturierung.

(3) *Spezieller Satz von Lindenbaum:*

Jedes Dzik-System erlaubt Saturierung.

Bew. (*Skizze*)*:* Es wird im Kreis geschlossen.[10]

(1) $\Rightarrow$ (2): Es ist zunächst zu zeigen, dass d AC äquivalent zum AC ist.

Damit kann die Konsequenz (1) $\Rightarrow$ (2) etwa durch eine Anwendung des Zornschen Lemmas, ebenfalls äquivalent zum AC, gezeigt werden.

Miller selbst zeigt die Konsequenz mithilfe des Wohlordnungssatzes (WO).

(2) $\Rightarrow$ (3): Triviale Abschwächung der Aussage.

[9] Miller weist in seinem Artikel darauf hin, dass die folgenden Ergebnisse schon länger bekannt sind; die eine Richtung wurde nach Miller unter anderem von Łos, die andere von Dzik bewiesen. Vgl. hierzu Bemerkung von Miller in [ML, S. 185f].

[10] Auf Details in der folgenden Beweisskizze kann, soweit diese für den Verlauf der Arbeit keine Rolle spielen, weitgehend verzichtet werden. Vgl. für einen ausführlicheren Beweis auch Millers Artikel, §2 ([ML, S. 185ff]).

(3) $\Rightarrow$ (1): Von einem trivialen Fall abgesehen wird zu einer beliebigen Familie $\mathfrak{I}$ nichtleerer, paarweise disjunkter Mengen die folgende K-Operation auf dem Grundraum $S := \bigcup \mathfrak{I}$ definiert:

$$\mathrm{Cn} : X \mapsto \begin{cases} X & \text{falls } X \text{ Vorauswahl auf } \mathfrak{I} \text{ ist} \\ S & \text{sonst} \end{cases}$$

Da der triviale Fall ausgeschlossen wurde, kann leicht gezeigt werden, dass Cn eine K-Operation mit den relevanten Eigenschaften (a) – (d) ist und entsprechend $\langle S, \mathrm{Cn} \rangle$ auch ein Dzik-System.

Der spezielle Satz von Lindenbaum (3) garantiert die Existenz einer geeigneten saturierten Erweiterung der leeren Menge $\varnothing \subseteq S$, die schon die gesuchte Auswahl ist. Q.E.D.

Das folgende Korollar wird in der Mengenlehre ZFS ohne AC bewiesen und erlaubt eine einfache Behandlung der (meist endlichen) Sonderfälle, die ansonsten eine aufwändige Einzelbehandlung erfordern würden.

2.3 Korollar (Wohlordenbare Systeme, ZFS**):** Ist $\mathcal{S} = \langle S, \mathrm{Cn} \rangle$ ein deduktives System mit wohlordenbarem Grundraum S, dann erlaubt $\mathcal{S}$ Saturierung. Dies gilt insbesondere für abzählbare und endliche Grundräume S.

Bew. (Skizze):

Wenn S wohlordenbar ist, dann wird das AC nicht für den Beweis der Existenz einer Wohlordnung von S benötigt. Anschließend kann der Beweis analog zu Miller für (1) $\Rightarrow$ (2) im Äquivalenzsatz übernommen werden.[11]

Insbesondere sind alle endlichen und abzählbaren Mengen wohlordenbar.

Q.E.D.

Miller definiert nun eine Reihe weiterer Varianten des Satzes von Lindenbaum, die allesamt äquivalent zum AC sind, wie folgt:

2.4 DEF (Varianten des Satzes von Lindenbaum): Sei $\alpha \subseteq \{a, b, c, d\}$ Menge der in §1 definierten relevanten Eigenschaften. Mit LB α wird die folgende Variante des Satzes von Lindenbaum bezeichnet:

LB α: Jedes deduktive System, das die in α aufgeführten Eigenschaften hat, erlaubt Saturierung.

Sätze der Form LB α (und gelegentlich auch weitere Varianten des Satzes von Lindenbaum) werden im Folgenden auch *Lindenbaumsätze* genannt.

Offensichtlich wird der allgemeine Satz von Lindenbaum in dieser Terminologie durch LB $\varnothing$ und der spezielle Satz von Lindenbaum durch LB *abcd* bezeichnet.[12]

[11] Vgl. hierzu Millers Beweis zu Theorem 2.3 in [ML, S. 185].

[12] Bei der konkreten Bezeichnung der verschiedenen Varianten des Satzes von Lindenbaum werden anstelle von Mengen – wie etwa die Menge $\{a, b, c, d\}$ – zumeist die entsprechenden endlichen Listen verwendet – hier also *abcd*. Dies sollte aber zu keiner Verwirrung führen.

2.5 Korollar (zum Äquivalenzsatz): Für jede Teilmenge $\alpha \subseteq \{a, b, c, d\}$ ist die Variante LB α des Satzes von Lindenbaum äquivalent zum AC. Insbesondere sind damit alle eingeführten Varianten des Satzes von Lindenbaum äquivalent.

Beweis.

Sei $\alpha \subseteq \{a, b, c, d\}$ beliebig. Sowohl die Konsequenz LB $\varnothing \Rightarrow$ LB α als auch die Konsequenz LB $\alpha \Rightarrow$ LB $abcd$ sind triviale Abschwächungen. Mit dem Äquivalenzsatz folgt die Behauptung. Q.E.D.

2.6 Das Miller'sche Projekt: Bisher wurde skizziert, wie die Konsequenz LB $abcd \Rightarrow$ LB $\varnothing$ mit einen Umweg über das AC bewiesen werden kann. Der Beweis hat also (in der Mengenlehre ZFS) die folgende Struktur:

$$\text{ZFS}: \quad \text{LB}\,abcd \quad \Rightarrow \quad \text{d AC} \quad \Rightarrow \quad \text{AC} \quad \Rightarrow \quad \text{Zorn / WO} \quad \Rightarrow \quad \text{LB}\,\varnothing$$

Die wesentliche Idee des Miller'schen Projekts ist, diesen Umweg zu vermeiden und *ohne Rückgriff auf das* AC die Konsequenz LB $abcd \Rightarrow$ LB $\varnothing$ zu zeigen. Dabei erlaubt Miller, die verschiedenen, hier eingeführten Varianten des Satzes von Lindenbaum zu verwenden.

Miller gelingt es in [ML], dieses Problem teilweise zu lösen; seine für dieses Projekt wesentlichen Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

$$\text{ZFS}: \quad \text{LB}\,abcd \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad \text{LB}\,ab \quad \overset{\S 5}{\Rightarrow} \quad \text{LB}\,a \quad \overset{\S 4}{\Rightarrow} \quad \text{LB}\,\varnothing$$

An der mit „?“ markierten Stelle konnte Miller die Lücke nicht schließen. Die anderen Markierungen verweisen auf die einzelnen Paragraphen in [ML].

Bezeichnung (Millersätze): Für beliebige Teilmengen $\alpha, \beta \subseteq \{a, b, c, d\}$ der Menge der relevanten Eigenschaften werden die Sätze der Form LB $\alpha \Rightarrow$ LB β im Folgenden auch *Millersätze* genannt.

2.7 Zielsetzung dieser Arbeit: Wesentliche Aufgabenstellung für diese Arbeit ist die Fortsetzung des Miller'schen Projekts. Dazu werden zunächst allgemein deduktive Systeme und Konstruktionsmethoden von deduktiven Systemen untersucht. Anschließend werden spezielle Konstruktionsmethoden betrachtet und zugehörig eine Reihe von Millersätzen bewiesen.

Ergänzend wird in zweiten Teil dieser Arbeit erkundet, inwieweit sich das Miller'sche Projekt vom AC auf das etwas schwächere Boole'sche Primidealtheorem (BP) übertragen läßt. Dadurch wird ein Bezug zu deduktiven Systemen, die dem klassischen System der Logik zumindest ähneln, hergestellt. Eine ausführliche Diskussion des Vorgehens bei der Übertragung findet sich am Anfang des zweiten Teils dieser Arbeit.

Bevor in den nächsten Paragraphen tatsächlich die Zielsetzung dieser Arbeit verfolgt wird, erfolgt hier eine detaillierte Analyse der Aufgabenstellung. Dies verdeutlicht einerseits die diesem Projekt innewohnende Problematik und klärt andererseits das prinzipielle Vorgehen, das notwendig ist, um dem Projekt gerecht zu werden.

Prinzipielles Vorgehen: Es werden zunächst einige Gedanken zum prinzipiellen Vorgehen in dieser Arbeit notiert.

(1) *Klassifikation von Millersätzen:* Die Millersätze $\mathrm{LB}\,\alpha \Rightarrow \mathrm{LB}\,\beta$ lassen sich wie folgt klassifizieren:

  (a) $\alpha \subseteq \beta$: Millersätze dieser Form sind triviale Abschwächungen und bedürfen keines weiteren Beweises.

  Desweiteren helfen sie nicht, das Miller'sche Projekt voranzubringen, da das Ziel des Projekts im Schließen auf (scheinbar) stärkere Lindenbaumsätze besteht.

  (b) $\alpha \supseteq \beta$: Von dieser Form sind die beiden Millersätze, die Miller selbst bewiesen hat und die für die Zielsetzung des Projektes primär benötigt werden.

  (c) *sonst:* Millersätze dieser Form könnten indirekt zum Gelingen des Projekts beitragen, indem sie eine Lücke zwischen zwei Millersätzen schließen, ohne dabei notwendig mit einem schwächeren Lindenbaumsatz einen (scheinbar) stärkeren zu beweisen.

(2) *Konstruktives Vorgehen:* Um neue Millersätze $\mathrm{LB}\,\alpha \Rightarrow \mathrm{LB}\,\beta$ ohne Rückgriff auf das AC zu etablieren, kann wie folgt konstruktiv vorgegangen werden:

Es wird ein beliebiges deduktives System $\mathcal{S}_\alpha$ mit den Eigenschaften aus α betrachtet; daraus wird vermöge einer Konstruktion K ein neues deduktives System $\mathcal{S}_\beta$ mit allen Eigenschaften aus β erzeugt.

Anschließend wird gezeigt: Falls $\mathcal{S}_\beta$ Saturierung erlaubt, dann auch $\mathcal{S}_\alpha$.

(3) *Triviale Korollare:* Wurde ein Millersatz $\mathrm{LB}\,\alpha \Rightarrow \mathrm{LB}\,\beta$ bewiesen, lassen sich sofort triviale Korollare angeben, indem α beliebig verkürzt oder β beliebig erweitert wird.

Solche Korollare finden lediglich in der Zusammenfassung der Ergebnisse am Ende dieser Arbeit Erwähnung, um dort einige Stellen anzuzeigen, an denen keine weiterern Millersatz gesucht werden müssen.

Problematik des Miller'schen Projekts: Im Folgenden werden einige dem Miller'schen Projekt innewohnende Probleme vorgestellt und der Umgang mit diesen kurz diskutiert.

(1) *Ohne Rückgriff auf das* AC*:* Das Wesentliche am Miller'schen Projekt kristallisiert sich in der Wendung „ohne Rückgriff auf das AC“. Miller selbst bezeichnet die daraus resultierende Aufgabenstellung als „vage, aber mathematisch klar“.[13]

[13] [ML, S. 189]

Um einen Millersatz LB $\alpha \Rightarrow$ LB β zu beweisen, ist es nämlich notwendig, den zum AC äquivalenten Satz LB α als Voraussetzung anzunehmen. Die Verwendung anderer zum AC äquivalenter Sätze – wie etwa AC selbst, WO, d AC, das Lemma von Zorn oder auch unbekannte Varianten des AC – ist im Miller'schen Projekt nicht erlaubt. Es ist also notwendig, logisch-äquivalente Sätze formal zu unterscheiden, um formal entscheiden zu können, ob diese Arbeit den eigenen Anforderungen gerecht wird.

Die mathematische Intuition nennt hierfür den Kontext, in denen diese Sätze formuliert werden, als Kriterium ihrer Unterscheidung. Im Anhang C dieser Arbeit finden sich Gedanken dazu, wie man sich aus dieser Abhängigkeit von der Intuition lösen und das Kriterium mathematisch präzisieren kann.[14]

(2) *Kontingenz der relevanten Eigenschaften:* Die relevanten Eigenschaften, die ein Dzik-System charakterisieren, sind zufällig erkannt. Möglicherweise lassen sich – wie Miller selbst richtig bemerkt – andere finden, die ein Dzik-System besser charakterisieren.[15] Diese Eigenschaften würden andere Varianten des Satzes von Lindenbaum generieren; möglicherweise ließe sich mithilfe dieser das Miller'sche Projekt leichter vollenden.[16]

Selbst die Anzahl der relevanten Eigenschaften ist zufällig. Hätte Miller lediglich die Eigenschaften (a) und (b) als relevant erkannt, wäre das Miller'sche Projekt an dieser Stelle schon beendet.

Im Anhang A über die Struktur deduktiver Systeme in Abhängigkeit der relevanten Eigenschaften wird unter anderem skizziert, dass diese Eigenschaften durchaus ausgezeichnet gewählt sind, insofern diese genau die im Äquivalenzsatz benötigen deduktiven Systeme charakterisieren.[17] Damit geben diese vier Eigenschaften dieser Arbeit einen sinnvollen Rahmen.[18] Davon unberührt bleibt, dass man eine andere Menge von Eigenschaften finden kann, die genau die Dzik-Systeme beschreiben.

(3) *Kontingenz des Weges:* Ebenfalls merkt Miller an, dass der von ihm eingeschlagene Weg, die Konsequenz LB *abcd* $\Rightarrow$ $LB\varnothing$ zu zeigen, durch die zufällig gewählte Reihenfolge der Eigenschaften bedingt ist.[19]

Dessen eingedenk wird in dieser Arbeit nicht versucht, zu einem bestimmten Millersatz eine geeignete Konstruktionsmethode zu finden. Vielmehr werden allgemein Konstruktionsmethoden für deduktive Systeme diskutiert und daraufhin untersucht, welche (interessanten) Millersätze mithilfe dieser Methoden bewiesen werden können.

[14] An dieser Stelle danke ich Herrn Rainer Lüdecke, der durch sein beharrliches Nachfragen die Problematik zu Bewußtsein brachte.

[15] Der spezielle Satz von Lindenbaum müßte zwar anders formuliert werden; wesentlich für den Beweis des Äquivalenzsatzes ist aber die Verwendung der dort konstruierten K-Operation, nicht die Beschreibung ihrer Eigenschaften.

[16] Vgl. hierzu auch [ML,§8].

[17] Miller selbst stellt fest, dass die Dzik-Systeme genau diejenigen sind, die für den Beweis von d AC benötigt werden. Vgl. hierzu [ML, §6].

[18] Es lassen sich durchaus außerhalb dieses Rahmens weitere Varianten des Satzes von Lindenbaum finden, die äquivalent zum AC sind. So diskutiert Miller in [ML, §7] eine Variante des Satzes von Lindenbaum, der in Dzik-Systemen (scheinbar) die Existenz einer einzigen saturierten Theorie gewährleistet. Er zeigt dort, dass aus dieser Variante LB *abcd* folgt.

[19] Vgl. dazu wieder [ML,§8].

Letzteres hängt wesentlich davon ab, wie sich die diskutierte Konstruktion in Hinsicht auf die relevanten Eigenschaften verhält. Dabei lassen sich prinzipiell zwei Arten von Bezug für das Miller'sche Projekt sinnvoll verwerten:

(a) *Erzeugen neuer Eigenschaften:* Für die Verwertung einer Konstruktionsmethode im Miller'schen Projekt ist wesentlich, dass diese mindestens eine Eigenschaft erzeugt, die das ursprüngliche System nicht hat. Dies sorgt dafür, dass die aus der Konstruktion resultierenden Millersätze nicht trivial sind.

(b) *Erhalt von Eigenschaften:* Im Folgenden wird sich herausstellen, dass neben den neu erzeugten Eigenschaften eine Reihe von Eigenschaften von der Konstruktion unberührt bleiben. Setzt man diese Eigenschaften bei dem ursprünglichen System voraus, dann hat das resultierende System sie auch.

    Je nachdem, ob beim Nachweis, dass sich Saturiertheit aus den resultierenden auf das ursprüngliche überträgt, diese Eigenschaften vorausgesetzt werden, ergeben sich verschiedene Millersätze aus der gleichen Konstruktionsmethode.

    In dieser Arbeit wird einer dieser Millersätze ausführlich bewiesen, die anderen als Korollare skizziert.

Damit wurde das Miller'sche Projekt zu Genüge analysiert, um im Folgenden die Aufgabenstellung zu verfolgen.

§3 Bildmenge einer K-Operation

Bevor in den nächsten Paragraphen, wie angekündigt, Konstruktionsmethoden deduktiver Systeme diskutiert werden, wird in diesem Paragraphen vorbereitend der Zusammenhang zwischen einer K-Operation f und ihrer Bildmenge $\mathfrak{Im}(f)$ besprochen. Dies führt zwar nicht zur Etablierung neuer Millersätze, erweitert aber des Verständnis deduktiver Systeme und schafft neue Begrifflichkeit; dies erleichtert die anschließende Diskussion wesentlich.

Dieser Paragraph ist in mehrere Abschnitte gegliedert:

(1) *Bildmenge einer K-Operation:* Die Bildmenge $\mathfrak{Im}(f)$ einer K-Operation f wird auf ihre Eigenschaften hin untersucht.

(2) *Induzierte Abbildungen:* Umgekehrt wird anschließend versucht, aus bestimmten Teilmengen $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{p}(S)$ der Potenzmenge des Grundraumes eine durch $\mathfrak{M}$ induzierte K-Operation $f_{\mathfrak{M}}$ zu rekonstruieren.

(3) *Korrespondenz:* Die Ergebnisse der ersten beiden Abschnitte werden in einem Korrespondenzsatz zusammengefaßt.

- Bildmenge einer K-Operation -

Die Untersuchung der Bildmenge $\mathfrak{Im}(f)$ vorbereitend wird ein einfacher Hilfssatz für beliebige Abbildungen bewiesen und einige mengentheoretische Begriffe werden eingeführt.

3.1 Hilfssatz (Idempotenz): Ist $f : \mathfrak{Dom}(f) \to \mathfrak{Im}(f)$ eine beliebige Abbildung, dann ist f genau dann idempotent, wenn $\mathfrak{Im}(f) = \mathfrak{Fix}(f)$ gilt.

Beweis. Sei f idempotent gegeben. $\mathfrak{Fix}(f) \subseteq \mathfrak{Im}(f)$ gilt trivial. Sei also umgekehrt $y \in \mathfrak{Im}(f)$ beliebig. Dann gibt es ein Urbild $x \in \mathfrak{Dom}(f)$ mit $f(x) = y$. Aus der Idempotenz folgt: $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$. Also ist $y \in \mathfrak{Fix}(f)$ und es gilt $\mathfrak{Im}(f) = \mathfrak{Fix}(f)$.

Ist umgekehrt f gegeben mit $\mathfrak{Im}(f) = \mathfrak{Fix}(f)$ und $x \in \mathfrak{Dom}(f)$ beliebig, dann gilt $f(x) \in \mathfrak{Im}(f) = \mathfrak{Fix}(f)$. Also ist $f(f(x)) = f(x)$ und f ist idempotent.

Q.E.D.

3.2 DEF ($\cap$-stabil): Eine Teilmenge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{p}(S)$ der Potenzmenge einer Menge S heißt *durchschnittstabil* ($\cap$-stabil), falls für alle nichtleeren Teilmengen $\varnothing \neq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$ das Folgende gilt:[20]

$$\bigcap \mathfrak{X} = \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} X \in \mathfrak{M}$$

[20] In dieser Arbeit wird bevorzugt, den Schnitt über eine Familie von Mengen allgemein aufzufassen und nicht von vornherein auf ein vorgegebenes Universum $\mathfrak{p}(S)$ einzuschränken. Damit muss an dieser Stelle $\mathfrak{X} \neq \varnothing$ gefordert werden, da ansonsten der Schnitt $\bigcap \varnothing$ über die leere Menge die Allklasse V wäre, die insbesondere keine Menge ist. Vgl. hierzu auch Diskussion in [FgM, §8 & §9].

3.3 DEF (Überdeckung): Sei eine Menge S gegeben. Ist $X \subseteq S$ Teilmenge von S und $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{p}(S)$ eine Teilmenge der Potenzmenge von S, dann bezeichnet

$$\mathfrak{M}_X := \{Y \in \mathfrak{M};\ X \subseteq Y\}$$

die *Menge aller Überdeckungen von X durch Mengen aus $\mathfrak{M}$* (oder kürzer die *Überdeckung von X in $\mathfrak{M}$*).

Mit oben eingeführter Begrifflichkeit können die zentralen Eigenschaften der Bildmenge $\mathfrak{Im}(f)$ einer K-Operation f diskutiert werden.[21]

Sei dazu im Folgenden ein deduktives System $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ gegeben.

3.4 Satz (Eigenschaften der Bildmenge): Die Menge $\mathfrak{Im}(f)$ der Bilder der K-Operation f hat die folgenden Eigenschaften:

(1) *Nichtleere:* Die Bildmenge $\mathfrak{Im}(f)$ ist nicht leer. Es gilt: $S \in \mathfrak{Im}(f)$.

(2) *Fixpunktmenge:* Es gilt: $\mathfrak{Im}(f) = \mathfrak{Fix}(f)$

(3) *Schnitteigenschaft:* Das Bild einer Menge $X \subseteq S$ unter der K-Operation f ist der Schnitt über die Überdeckung von X im Bild $\mathfrak{Im}(f)$. Es gilt also:

$$f(X) = \bigcap \mathfrak{Im}(f)_X$$

(4) *$\cap$-Stabilität:* Die Bildmenge $\mathfrak{Im}(f)$ ist $\cap$-stabil.

Beweis. Die einzelnen Aussagen werden überprüft.

(1) *Nichtleere:* Aufgrund der Monotonie von f ist $S = f(S) \in \mathfrak{Im}(f)$.

(2) *Fixpunktmenge:* Folgt sofort, da f idempotent ist, mit obigem Kriterium.

(3) *Schnitteigenschaft:* Sei $X \subseteq S$ beliebig.

Aufgrund der Reflexivität von f ist $X \subseteq f(X)$. Damit ist das Bild $f(X)$ Element der Überdeckung $\mathfrak{Im}(f)_X$ von X. Daraus folgt:

$$\bigcap \mathfrak{Im}(f)_X = f(X) \cap \bigcap \mathfrak{Im}(f)_X \subseteq f(X)$$

Zeige nun die Umkehrung: Betrachte dazu beliebiges $Y \in \mathfrak{Im}(f)_X$.

(a) Aus der Definition der Überdeckung folgt sofort $X \subseteq Y$.

(b) Ebenfalls gilt, dass $Y \in \mathfrak{Im}(f)_X \subseteq \mathfrak{Im}(f)$ ist. Mit (2) gilt dann weiter $Y \in \mathfrak{Im}(f) = \mathfrak{Fix}(f)$ und Y ist ein Fixpunkt von f.

Aus (a) und (b) folgt mit der Monotonie von f:

$$f(X) \subseteq f(Y) = Y$$

[21] Im Folgenden wird unter anderem die Schnitteigenschaft von K-Operationen bewiesen; diese war Tarski schon bekannt. Vgl. dazu etwa [TR2, S. 63].

Da Y beliebig aus der Überdeckung $\mathfrak{Im}(f)_X$ gewählt war, gilt:

$$f(X) \subseteq \bigcap \mathfrak{Im}(f)_X$$

Damit ist aber die geforderte Gleichheit gezeigt.

(4) $\cap$-*stabil:* Sei $\varnothing \neq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Im}(f)$ nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{Im}(f)$. Zu zeigen ist, dass $X := \bigcap \mathfrak{X} \in \mathfrak{Im}(f)$.

Da $X = \bigcap \mathfrak{X}$ ist, gilt für alle $Y \in \mathfrak{X}$: $X \subseteq Y \in \mathfrak{Im}(f)$.

Also ist $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Im}(f)_X$ und mit der Reflexivität von f folgt:

$$X \subseteq f(X) = \bigcap \mathfrak{Im}(f)_X \subseteq \bigcap \mathfrak{X} = X$$

Insbesondere ist also $\bigcap \mathfrak{X} = f(X) \in \mathfrak{Im}(f)$ und $\mathfrak{Im}(f)$ ist $\cap$-stabil.

Q.E.D.

Damit ist die Bildmenge $\mathfrak{Im}(f)$ einer K-Operation f geeignet beschrieben. Ergänzend werden noch einige zentrale Begriffe mit der Bildmenge von f in Bezug gesetzt.

3.5 Kriterium (Zentrale Begriffe): Die folgenden Eigenschaften einer K-Operation f und die Saturiertheit lassen sich wie folgt mithilfe der Bildmenge $\mathfrak{Im}(f)$ charakterisieren:

(1) *Charakterisierung von extrem:* f ist genau dann extrem, wenn für alle nichttrivialen Bildpunkte $S \neq X \in \mathfrak{Im}(f)$ das Folgende gilt:

$$Y \subseteq X \quad \Rightarrow \quad Y \in \mathfrak{Im}(f)$$

(2) *Charakterisierung von punkttreu:* f ist genau dann punkttreu, wenn das Folgende gilt:

$$\{\{x\};\ x \in S\} \subseteq \mathfrak{Im}(f)$$

(3) *Hinreichende Bedingung für gleichbleibend:* f ist gleichbleibend, falls das Folgende gilt:

$$\{\{x, y\};\ x, y \in S\} \subseteq \mathfrak{Im}(f)$$

(4) *Notwendige Bedingung für Saturiertheit:*

Ist $X \subseteq S$ saturiert, dann ist $X \in \mathfrak{Im}(f)$ ein Bildpunkt.

(5) *Hinreichende Bedingung für Saturiertheit:* Sei $X \in \mathfrak{Im}(f)$ gegeben mit $x \notin f(X) = X$ für ein $x \in S$. X ist genau dann x-saturiert, wenn für alle $Y \in \mathfrak{Im}(f)$ gilt:

$$X \subsetneq Y \quad \Rightarrow \quad x \in Y$$

Bew. (*Skizze*): Das Kriterium (4) zeigt Miller in [ML, S. 185]; die restlichen folgen direkt aus den jeweiligen Definitionen. Q.E.D.

- Induzierte Abbildungen -

Die Perspektive des letzten Abschnittes wird im Folgenden umgekehrt. Vorgegebene Teilmengen $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{p}(S)$ der Potenzmenge des Grundraumes induzieren, falls zumindest $S \in \mathfrak{M}$ gilt, Abbildungen auf der Potenzmenge $\mathfrak{p}(S)$; einige davon (nicht alle) sind K-Operationen. Dies wird im Folgenden konkret ausgeführt.

Sei dazu im Folgenden ein nichtleerer Grundraum $S \neq \varnothing$ und eine beliebige Teilmenge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{p}(S)$ der Potenzmenge $\mathfrak{p}(S)$ mit $S \in \mathfrak{M}$ gegeben.

3.6 DEF (Induzierte Abbildung): Die Abbildung

$$f_{\mathfrak{M}} : X \mapsto \bigcap \mathfrak{M}_X = \bigcap \{Y \in \mathfrak{M};\ X \subseteq Y\}$$

heißt die *von $\mathfrak{M}$ induzierte Abbildung.* Die Menge $\mathfrak{M}$ wird auch die *Abbildung f erzeugende Menge* genannt.

Bemerkung (Wohldefiniertheit): Die Abbildung $f_{\mathfrak{M}}$ ist wohldefiniert, da mit $S \in \mathfrak{M}$ für alle Teilmengen $X \subseteq S$ gilt, dass $S \in \mathfrak{M}_X$. Damit wird nicht über die leere Menge geschnitten.

3.7 Satz (Eigenschaften der induzierten Abbildung): Die induzierte Abbildung $f = f_{\mathfrak{M}}$ hat die folgenden Eigenschaften:

(1) *Reflexivität:* Die Abbildung f ist reflexiv.

(2) *Monotonie:* Die Abbildung f ist monoton.

(3) *Idempotenz:* Die Abbildung f ist idempotent. Insbesondere gilt also: $\mathfrak{Im}(f) = \mathfrak{Fix}(f)$.

(4) *Teilmengenbeziehungen:* Es gilt $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{Im}(f)$.

(5) *Gleichheit:* Ist $\mathfrak{M}$ zudem $\cap$-stabil, gilt oben Gleichheit: $\mathfrak{M} = \mathfrak{Im}(f)$.

Beweis. Es ist Mehreres zu prüfen.

(1) *Reflexivität:* Sei $X \subseteq S$ beliebig.

Nach Konstruktion gilt für jedes $Y \in \mathfrak{M}_X$: $X \subseteq Y$. Damit gilt aber auch schon:

$$X \subseteq \bigcap \mathfrak{M}_X = f_{\mathfrak{M}}(X)$$

(2) *Monotonie:* Seien $X, Y \subseteq S$ gegeben mit $X \subseteq Y$.

Damit ist auch $\mathfrak{M}_Y \subseteq \mathfrak{M}_X$. Daraus folgt wiederum:

$$f(X) = \bigcap \mathfrak{M}_X \subseteq \bigcap \mathfrak{M}_Y = f(Y)$$

(3) *Idempotenz:* Es ist lediglich die Idempotenz zu prüfen; die Gleichheit folgt dann direkt aus obigem Kriterium. Sei dazu $X \subseteq S$ beliebig.

Es werden die Überdeckungen von X und $f(X)$ in $\mathfrak{M}$ betrachtet.

Es gilt $f(X) = \bigcap \mathfrak{M}_X$ und damit für jedes $Y \in \mathfrak{M}_X$: $f(X) \subseteq Y$. Also ist $Y \in \mathfrak{M}_{f(X)}$. Das bedeutet aber, dass $\mathfrak{M}_X \subseteq \mathfrak{M}_{f(X)}$ ist.

Ist hingegen $Y \in \mathfrak{M}_{f(X)}$ beliebig, dann gilt nach Konstruktion $f(X) \subseteq Y$. Aus der Reflexivität von f folgt daraus: $X \subseteq f(X) \subseteq Y$. Also ist wieder nach Konstruktion $Y \in \mathfrak{M}_X$ und es gilt $\mathfrak{M}_{f(X)} \subseteq \mathfrak{M}_X$.

Bisher wurde $\mathfrak{M}_X = \mathfrak{M}_{f(X)}$ gezeigt. Daraus folgt aber:

$$f(X) = \bigcap \mathfrak{M}_X = \bigcap \mathfrak{M}_{f(X)} = f(f(X))$$

(4) *Teilmengenbeziehung:* Sei $X \in \mathfrak{M}$ beliebig. Daraus folgt nach Konstruktion, dass $X \in \mathfrak{M}_X$ ist. Damit gilt:

$$f_{\mathfrak{M}}(X) = \bigcap \mathfrak{M}_X = X \cap \bigcap \mathfrak{M}_X \subseteq X$$

Mit der Reflexivität von f folgt sofort, dass $X = f(X) \in \mathfrak{Im}(f)$ ist.

(5) *Gleichheit:* Mit oben nachgewiesener Teilmengenbeziehung ist hier lediglich $\mathfrak{Im}(f) \subseteq \mathfrak{M}$ zu zeigen. Sei dazu $\mathfrak{M}$ $\cap$-stabil und $Y \in \mathfrak{Im}(f)$ beliebig.

Dann gibt es ein $X \subseteq S$ mit $Y = f(X) = \bigcap \mathfrak{M}_X$. Da $\varnothing \neq \mathfrak{M}_X \subseteq \mathfrak{M}$ ist, folgt mit $\cap$-Stabilität: $Y = \bigcap \mathfrak{M}_X \in \mathfrak{M}$. Es ist also $\mathfrak{M} = \mathfrak{Im}(f)$.

Q.E.D.

Bemerkungen:

(1) *Voraussetzung $S \in \mathfrak{M}$:* Die Voraussetzung $S \in \mathfrak{M}$ gewährleistet die Wohldefiniertheit der induzierten Abbildung f und geht insofern wesentlich in den Beweis ein.

(2) *Gleichheit:* Die $\cap$-Stabilität ist wesentlich für $\mathfrak{M} = \mathfrak{Im}(f)$ und gilt im Allgemeinen nicht.

Betrachte dazu $S := \mathbb{N}$ und $\mathfrak{M} := \{\{1,2\},\{2,3\},\mathbb{N}\}$.

Es gilt:

$$f_{\mathfrak{M}}(2) = \bigcap \mathfrak{M} = \{2\} \in \mathfrak{Im}(f) \backslash \mathfrak{M}$$

(3) *Endlichkeit:* Im Allgemeinen ist die induzierte Abbildung f nicht endlich und damit keine K-Operation. Betrachte dazu die Mengen $S := \mathbb{N}$ und $\mathfrak{M} := \mathfrak{p}_{\aleph_0}(\mathbb{N}) \cup \{\mathbb{N}\} = \{X \subseteq \mathbb{N};\ |X| < \infty\} \cup \{\mathbb{N}\}$. Es gilt:

$$f_{\mathfrak{M}} = f_\omega : X \mapsto \begin{cases} X & \text{falls } |X| \in \mathbb{N} \\ S & \text{sonst} \end{cases}$$

f_ω ist nicht endlich und damit keine K-Operation.[22]

3.8 Korollar (Induzierte K-Operationen): Ist die Abbildung $f = f_{\mathfrak{M}}$ endlich, dann ist f eine K-Operation auf dem Grundraum S.

Beweis. Ist die induzierte Abbildung f endlich, dann hat sie mit obigem Satz alle benötigten Eigenschaften und somit ist nichts zu zeigen. Q.E.D.

[22] Vgl. hierzu Beispiele von K-Operationen in §1.

3.9 Korollar (Selbstinduktion): Ist f eine K-Operation, dann wird sie von ihrer eigenen Bildmenge $\mathfrak{Im}(f)$ induziert; es gilt also $f = f_{\mathfrak{Im}(f)}$.

Beweis. Sei f eine K-Operation auf einem Grundraum S. Dann ist die Bildmenge $\mathfrak{Im}(f)$ $\cap$-stabil mit $S \in \mathfrak{Im}(f)$.

Für die induzierte Abbildung $f_{\mathfrak{Im}(f)}$ folgt aufgrund der $\cap$-Stabilität mit obigem Satz, dass $\mathfrak{Im}(f_{\mathfrak{Im}(f)}) = \mathfrak{Im}(f)$ ist. Damit gilt aber für jede Teilmenge $X \subseteq S$ des Grundraumes:

$$f(X) = \bigcap \mathfrak{Im}(f)_X = f_{\mathfrak{Im}(f)}(X)$$

Also ist tatsächlich $f = f_{\mathfrak{Im}(f)}$. Q.E.D.

- Korrespondenz -

Obige Ergebnisse lassen sich als Korrespondenz zwischen K-Operationen f auf einem Grundraum S und geeigneten Teilmengen $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{p}(S)$ der Potenzmenge des Grundraumes zusammenfassen. Dies wird im Folgenden ausformuliert:

3.10 Satz (Korrespondenz): Es gibt eine 1:1 Korrespondenz zwischen den folgenden Mengen:

(1) $\mathfrak{A} := \{\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{p}(S);\ S \in \mathfrak{M},\ \mathfrak{M} \text{ ist } \cap\text{-stabil und } f_{\mathfrak{M}} \text{ endlich}\}$

(2) $\mathfrak{B} := \{f;\ f \text{ ist K-Operation auf } S\}$

Beweis. Betrachte dazu die folgende Abbildung:

$$\Phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} : \mathfrak{M} \mapsto f_{\mathfrak{M}}$$

(1) *Wohldefiniertheit:* Φ ist wohldefiniert, da $f_{\mathfrak{M}}$ eine K-Operation auf dem Grundraum S ist.

(2) *Injektivität:* Sind geeignete Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ verschieden, dann gilt:

$$\mathfrak{Im}(f_{\mathfrak{M}}) = \mathfrak{M} \neq \mathfrak{N} = \mathfrak{Im}(f_{\mathfrak{N}})$$

Also ist auch $f_{\mathfrak{M}} \neq f_{\mathfrak{N}}$ und Φ injektiv.

(3) *Surjektivität:* Für jede K-Operation f gilt $f = f_{\mathfrak{Im}(f)} = \Phi(\mathfrak{Im}(f))$.

Damit besteht tatsächlich die 1:1 Korrespondenz. Q.E.D.

Bemerkung: Ergänzend zum Korrespondenzsatz läßt sich (hier ohne Beweis) festhalten, dass die Abbildung

$$\Psi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} : f \mapsto \mathfrak{Im}(f)$$

die Umkehrabbildung von Φ ist.

§4 Allgemeine Konstruktionen

Nachdem im letzten Paragraphen der Zusammenhang zwischen einer K-Operation f und ihrer Bildmenge $\mathfrak{Im}(f)$ diskutiert wurde, werden in diesem einige allgemeine Konstruktionsmethoden von K-Operationen als erste Anwendung der vorherigen Ergebnisse vorgestellt.

- Einschränkung auf Teilmengen -

Sei im Folgenden ein deduktives System $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ gegeben.

4.1 DEF (Einschränkung auf Teilmengen): Seien $\varnothing \neq X \subseteq S$ nichtleere Teilmenge des Grundraums S und $\mathfrak{M} := \{Y \cap X;\ Y \in \mathfrak{Im}(f)\}$ gegeben. Die induzierte Abbildung

$$f_X := f_{\mathfrak{M}}$$

heißt *Einschränkung der K-Operation f auf X* und das Tupel $\mathcal{S}_X := \langle X, f_X \rangle$ *die Einschränkung des deduktiven Systems $\mathcal{S}$ auf X.*

Bemerkung (Wohldefiniertheit): Mit $S \in \mathfrak{Im}(f)$ ist $X = S \cap X \in \mathfrak{M} \neq \varnothing$; damit ist die Einschränkung f_X wohldefiniert.

4.2 Satz (Einschränkung auf Teilmengen): Die Einschränkung f_X der K-Operation f auf X ist eine K-Operation mit $f_X(Y) = f(Y) \cap X$ für jedes $Y \subseteq X$; entsprechend ist das Tupel $\mathcal{S}_X = \langle X, f_X \rangle$ ein deduktives System. Zudem gilt $\mathfrak{Im}(f_X) = \mathfrak{M}$.

Beweis. $\mathfrak{M}$ ist $\cap$-stabil nach Konstruktion direkt aufgrund der $\cap$-Stabilität von $\mathfrak{Im}(f)$; damit ist mit dem Satz über die Eigenschaften der induzierten Abbildung tatsächlich $\mathfrak{Im}(f_X) = \mathfrak{M}$. Nach Konstruktion gilt weiter für alle $Y \subseteq X$:

$$f_X(Y) = \bigcap \mathfrak{M}_Y = X \cap \bigcap \mathfrak{Im}(f)_Y = f(Y) \cap X$$

Mit dem Korollar über induzierte K-Operationen genügt nun der Nachweis, dass f_X endlich ist: Ist $x \in f_X(Y) = f(Y) \cap X$, dann ist $x \in f(Y)$ und es gibt aufgrund der Endlichkeit von f eine endliche Teilmenge $Z \subseteq_{endl} Y$ von Y mit $x \in f(Z)$. Offenbar ist auch $x \in X$, also auch $x \in f(Z) \cap X = f_X(Z)$.[23] Q.E.D.

- Schnittoperationen -

Seien im Folgenden deduktive Systeme und $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ und $\mathcal{T} = \langle T, g \rangle$ gegeben.

4.3 DEF (Schnittoperation): Seien $R := S \cup T$ die Vereinigung der Grundräume und die Menge $\mathfrak{M} := \mathfrak{Im}(f) \cup \mathfrak{Im}(g) \cup \{R\} \neq \varnothing$ gegeben. Die induzierte Abbildung

$$h := f_{\mathfrak{M}} = f_{\mathfrak{Im}(f) \cup \mathfrak{Im}(g) \cup \{R\}}$$

auf dem Grundraum R wird *Schnittoperation von f und g* genannt, das Tupel $\mathcal{R} := \langle R, h \rangle$ *Schnitt-System von f und g auf dem Grundraum R.*

[23] Miller rechnet in seinem Lemma 8.5 [ML, S. 198] direkt nach, dass die Einschränkung f_X auf eine Teilmenge X eine K-Operation ist.

Falls der gemeinsame Grundraum $S \cap T \neq \varnothing$ nichtleer ist, wird die Einschränkung $h' := h_{(S \cap T)}$ *eingeschränkte Schnittoperation von* f *und* g *auf dem gemeinsamen Grundraum* $S \cap T$ und das Tupel $\mathcal{S}_{f \cap g} = \langle S \cap T, h' \rangle$ *eingeschränktes Schnitt-System von* f *und* g *auf dem gemeinsamen Grundraum* $S \cap T$ genannt.

Bemerkung (Wohldefiniertheit): Nach Konstruktion ist $R \in \mathfrak{M}$ und die induzierte Schnittoperation h wohldefiniert.

4.4 Satz (Schnittoperation): Die Schnittoperation h ist eine K-Operation auf dem Grundraum R; ist $\mathfrak{M}$ zudem $\cap$-stabil, dann ist $\mathfrak{Im}(h) = \mathfrak{M}$.

Beweis.

Aus der $\cap$-Stabilität von $\mathfrak{M}$ folgt sofort $\mathfrak{Im}(h) = \mathfrak{M}$. Damit ist nur noch die Endlichkeit der Schnittoperation h zu zeigen. Dazu werden zunächst die beiden Mengen $\mathfrak{M}_f := \mathfrak{Im}(f) \cup \{R\}$ und $\mathfrak{M}_g := \mathfrak{Im}(g) \cup \{R\}$ betrachtet. Für jede Teilmenge $X \subseteq R$ gilt:

$$h(X) = \bigcap \mathfrak{M}_X = \bigcap (\mathfrak{M}_f)_X \cap \bigcap (\mathfrak{M}_g)_X$$

Sei nun zum Nachweis der Endlichkeit $x \in h(X)$ für eine beliebige Teilmenge $X \subseteq R$ gegeben. Es sind einige Fälle zu unterscheiden:

Ist $X \subseteq S \cap T$, so ist $h(X) = f(X) \cap g(X)$. Insbesondere ist also $x \in f(X)$ und $x \in g(X)$. Dann folgt aus der Endlichkeit von f und g die Existenz zweier endlicher Mengen $Y_f \subseteq_{endl} X$ und $Y_g \subseteq_{endl} X$ mit $x \in f(Y_f)$ und $x \in g(Y_g)$. Aufgrund der Monotonie von f und g gilt für die Menge $Y := Y_f \cup Y_g \subseteq_{endl} X$: $x \in f(Y)$ und $x \in g(Y)$, also $y \in h(Y)$. Damit ist eine geeignete endliche Menge gefunden.

Ist hingegen $X \nsubseteq S$ und $X \nsubseteq T$, so ist $h(X) = R \cap R$. Dann existiert $s \in X \backslash T$ und $t \in X \backslash S$. Für die endliche Menge $Y := \{s, t\} \subseteq_{endl} X$ gilt, dass $Y \nsubseteq S$ und $Y \nsubseteq T$. Damit ist $h(Y) = R \cap R = R$. Jedenfalls ist $x \in R$ und wieder wurde geeignete endliche Menge gefunden.

Die Argumentation in den übrigen Fällen ist eine Kombination der bisherigen Argumente; entsprechend wird hier auf eine Ausführung verzichtet.

Jedenfalls wurde die Endlichkeit von h gezeigt. Q.E.D.

4.5 Korollar (Funktionswerte der Schnittoperation): Die Schnittoperation h hat für jedes $X \subseteq R$ die folgenden Funktionswerte:

(1) falls $X \subseteq S \cap T$: $h(X) = f(X) \cap g(X)$

(2) falls $X \subseteq S \backslash T$: $h(X) = f(X) \cap R = f(X)$

(3) falls $X \subseteq T \backslash S$: $h(X) = R \cap g(X) = g(X)$

(4) sonst: $h(X) = R$

Beweis. Folgt direkt aus der Feststellung $h(X) = \bigcap (\mathfrak{M}_f)_X \cap \bigcap (\mathfrak{M}_g)_X$ im obigen Beweis. Q.E.D.

4.6 Korollar (Eingeschränkte Schnittoperation): Falls $S \cap T \neq \varnothing$ nichtleer ist, ist auch die eingeschränkte Schnittoperation h' eine K-Operation auf dem gemeinsamen Grundraum $S \cap T$.

Insbesondere ist $h' = f \cap g$ der Schnitt beider K-Operationen und falls die Menge $\mathfrak{M}$ $\cap$-stabil ist, dann ist $\mathfrak{Im}(h') = \{X \cap (S \cap T);\ X \in \mathfrak{M}\}$.

Beweis. Falls $\mathfrak{M}$ $\cap$-stabil ist, dann ist $\mathfrak{Im}(h) = \mathfrak{M}$ und es gilt mit dem Satz über Einschränkungen auf Teilmengen:

$$\mathfrak{Im}(h') = \{X \cap (S \cap T);\ X \in \mathfrak{Im}(h)\} = \{X \cap (S \cap T);\ X \in \mathfrak{M}\}$$

Da h eine K-Operation ist, folgt mit dem gleichen Satz, dass h' auch eine ist. Schließlich folgt $h' = f \cap g$ direkt aus dem ersten Korollar zum obigem Satz.

Q.E.D.

- Vereinigungsoperationen -

Es wird zunächst ein wenig mengentheoretische Begrifflichkeit benötigt:

4.7 DEF (Einschränkung von Mengensystemen): Seien X, Y zwei Mengen mit $X \subseteq Y$. Für eine nichtleere Teilmenge $\varnothing \neq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{p}(Y)$ bezeichnet

$$\mathfrak{X}_{|X} := \{Z \cap X;\ Z \in \mathfrak{X}\}$$

die *Einschränkungen der Mengen in $\mathfrak{X}$ auf die Menge X.*

4.8 DEF (Erweiterte Summe): Seien zwei Mengen X, Y gegeben. Für nichtleere Teilmengen $\varnothing \neq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{p}(X)$ und $\varnothing \neq \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{p}(Y)$ bezeichnet

$$\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y} := \{Z_X \cup Z_Y;\ Z_X \in \mathfrak{X},\ Z_Y \in \mathfrak{Y}\} \subseteq \mathfrak{p}(X \cup Y)$$

die *Menge aller Vereinigungen von Elementen aus den Mengen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$* oder auch die *erweiterte Summe der Mengen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$.*

Für den Grenzfall, dass $\mathfrak{X} = \varnothing$ oder $\mathfrak{Y} = \varnothing$ leer sind, wird aus technischen Gründen festgesetzt:

$$\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y} := \varnothing$$

Bemerkung: Die folgenden Zusammenhänge lassen sich festhalten:

(1) Ist $Z = X \cup Y$, dann gilt für nichtleere Teilmengen $\varnothing \neq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{p}(Z)$:

$$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}_{|X} \oplus \mathfrak{X}_{|Y}$$

Gleichheit gilt im Allgemeinen nicht. Betrachte hierzu zwei disjunkte, nichtleere Mengen $X \neq \varnothing \neq Y$ und $\mathfrak{X} := \{X, Y\} \subseteq \mathfrak{p}(X \cup Y)$.

Dann gilt: $\mathfrak{X}_{|X} = \{X, \varnothing\}$ und $\mathfrak{X}_{|Y} = \{Y, \varnothing\}$.

Damit ist $\mathfrak{X}_{|X} \oplus \mathfrak{X}_{|Y} = \{\varnothing, X, Y, X \cup Y\} \neq \mathfrak{X}$

(2) Sind X, Y zwei disjunkte Mengen, dann gilt für nichtleere Teilmengen $\varnothing \neq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{p}(X)$ und $\varnothing \neq \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{p}(Y)$:

$$\mathfrak{X} = (\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y})_{|X} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Y} = (\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y})_{|Y}$$

4.9 Satz (Vereinigungseigenschaft): Sind X, Y zwei disjunkte Mengen, dann gilt für $\varnothing \neq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{p}(X)$, $\varnothing \neq \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{p}(Y)$ und $\mathfrak{M} := \mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y}$ das Folgende:

$$\bigcap \mathfrak{M} = \bigcap \mathfrak{M}|_X \cup \bigcap \mathfrak{M}|_Y$$

Beweis. Es sind zwei Richtungen zu zeigen:

„$\subseteq$“ Sei $x \in \bigcap \mathfrak{X}$. Dann gilt für jedes $Z \in \mathfrak{X}$: $x \in Z$.

Ohne Einschränkung gelte $x \in X$. Damit ist für jedes $Z \in \mathfrak{X}$ mit $Z = X \cup Y$ insbesondere $x \in X$. Es gilt also für jedes $X \in \mathfrak{X}|_X$: $x \in X$.

Daraus folgt aber $x \in \bigcap \mathfrak{X}|_X$, also $x \in \bigcap \mathfrak{X}|_X \cup \bigcap \mathfrak{X}|_Y$.

„$\supseteq$“ Umgekehrte Argumentation wie eben mit analoger Fallunterscheidung.

Q.E.D.

Mit obiger Begrifflichkeit läßt sich die Vereinigungsoperation definieren. Seien dazu im Folgenden zwei deduktive Systeme $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ und $\mathcal{T} = \langle T, g \rangle$ mit disjunkten Grundräumen gegeben.

4.10 DEF (Vereinigungsoperation): Die induzierte Abbildung

$$h := f_{\mathfrak{Im}(f) \oplus \mathfrak{Im}(g)}$$

heißt *Vereinigungsoperation auf dem gemeinsamen Grundraum* $R := S \cup T$. Das Tupel $\mathcal{R} := \langle R, h \rangle$ wird *Vereinigungssystem* genannt.

Bemerkungen:

(1) *Wohldefiniertheit:* Mit $S \in \mathfrak{Im}(f)$ und $T \in \mathfrak{Im}(g)$ folgt direkt nach Konstruktion, dass die Menge $R = S \cup T \in \mathfrak{M}$ ist. Damit ist die induzierte Abbildung h wohldefiniert.

(2) *Eindeutige Darstellbarkeit:* Aufgrund der Disjunktheit der Grundräume S und T lassen sich alle Teilmengen $Z \subseteq R$ eindeutig (!) als disjunkte Vereinigung $Z = X \cup Y$ darstellen, wobei $X = Z \cap S$ und $Y = Z \cap T$ sind.

Diese Darstellung und ihre Eindeutigkeit wird im Folgenden implizit vorausgesetzt und zumeist ohne weitere Erwähnung verwendet.

4.11 Satz (Vereinigungs-Operation): Oben konstruierte Abbildung h ist eine K-Operation auf dem Grundraum $R = S \dot{\cup} T$ mit Bildmenge $\mathfrak{Im}(h) = \mathfrak{M}$. Insbesondere ist: $h = f \cup g$.

Beweis. Es ist Mehreres zu prüfen

(1) $\cap$-*Stabilität:* Sei $\varnothing \neq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M} = \mathfrak{Im}(f) \oplus \mathfrak{Im}(g)$ nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{M}$. Dann gilt:

$$\mathfrak{X}|_S \subseteq \mathfrak{Im}(f) \quad \text{und} \quad \mathfrak{X}|_T \subseteq \mathfrak{Im}(g)$$

Aufgrund der $\cap$-Stabilität von $\mathfrak{Im}(f)$ und $\mathfrak{Im}(g)$ gilt:

$$X := \mathfrak{X}|_S \in \mathfrak{Im}(f) \quad \text{und} \quad Y := \bigcap \mathfrak{X}|_T \in \mathfrak{Im}(g)$$

Damit ist $X \cup Y \in \mathfrak{Im}(f) \oplus \mathfrak{Im}(g) = \mathfrak{M}$ und mit der Vereinigungseigenschaft folgt:

$$\bigcap \mathfrak{X} = \bigcap \mathfrak{X}|_S \cup \bigcap \mathfrak{X}|_T = X \cup Y \in \mathfrak{M}$$

Damit ist $\mathfrak{M}$ $\cap$-stabil und $\mathfrak{Im}(h) = \mathfrak{M}$.

(2) $h = f \cup g$: Es ist nur noch festzuhalten, dass für jedes $Z = X \cup Y \subseteq R$ gilt:

$$\mathfrak{M}_Z|_f = \mathfrak{Im}(f)_X \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_Z|_g = \mathfrak{Im}(g)_Y$$

Der Rest folgt direkt aus obiger Argumentation:

$$h(X \cup Y) = \bigcap \mathfrak{M}_Z = \bigcap \mathfrak{M}_Z|_f \cup \bigcap \mathfrak{M}_Z|_g$$

$$= \bigcap \mathfrak{Im}(f)_X \cup \bigcap \mathfrak{Im}(g)_Y = f(X) \cup g(Y)$$

(3) *Endlichkeit:* Sei $x \in h(X \cup Y) = f(X) \cup g(Y)$ für eine Menge $X \cup Y \subseteq R$.

Aufgrund der Disjunktheit von S und T ist entweder $x \in S$ oder $x \in T$. Ohne Einschränkung gelte $x \in S$.

Damit ist zunächst $x \in f(X)$ und es gibt eine endliche Menge $X' \subseteq_{endl} X$ mit $x \in f(X') \subseteq f'(X) \cup g(\varnothing) = h(X)$.

Da $X' \subseteq X \subseteq X \cup Y$ ist, wurde eine geeignete endliche Menge gefunden.

Q.E.D.

- Restklassen-Systeme -

Als letzte allgemeine Konstruktionsmethode wird, der Vollständigkeit halber, der Übergang auf den Restklassenraum vorgestellt. Hierbei steht die Diskussion über den Zusammenhang einer K-Operation f mit ihrem Bild $\mathfrak{Im}(f)$ weitgehend im Hintergrund; zumeist wird ein direkter Zugang bevorzugt.

Desweiteren ist anzumerken, dass beim Übergang auf Restklassenstrukturen Informationen verloren gehen; entsprechend hoffnungslos scheint es, mithilfe der Saturiertheit einer Menge im Restklassensystem auf Saturiertheit im ursprünglichen System zu schließen.

Damit geben sich die Restklassensysteme für das Miller'sche Projekt ungeeignet und dementsprechend wird hier diese Methode lediglich skizziert, nicht aber im Detail besprochen.

Sei im Folgenden ein beliebiges deduktives System $\langle S, f \rangle$ und eine Äquivalenzrelation $\sim \subseteq S \times S$ gegeben.

4.12 Konstruktion (Restklassenraum):

(1) $\overline{x} = \{y \in S;\ x \sim y\}$ bezeichnet die Äquivalenzklasse eines Elementes $x \in S$ bezüglich $\sim$ und $\overline{X} = \{\overline{x};\ x \in X\}$ die entsprechende Erweiterung auf Teilmengen $X \subseteq S$.

Die Menge $\overline{S} = {}^{S}/_{\sim}$ wird dann *Restklassenraum* oder auch *Restklassenmenge* genannt.

(2) $\Phi : S \to \overline{S} : x \mapsto \overline{x}$ bezeichnet die kanonische surjektive Abbildung in die Menge aller Äquivalenzklassen. Kanonisch wird Φ für Teilmengen $X \subseteq S$ erweitert:

$$\Phi(X) := \{\Phi(x);\ x \in X\} = \{\overline{x};\ x \in X\} = \overline{X} \subseteq \overline{S}$$

4.13 Konstruktion (Restklassen-Operation): Für jede Teilmenge $\overline{X} \subseteq \overline{S}$ ist die Abbildung $f' : \mathfrak{p}(\overline{S}) \to \mathfrak{p}(\overline{S})$ wie folgt definiert:

$$f'(\overline{X}) := \Phi\big(f(\Phi^{-1}(\overline{X}))\big)$$

f' wird als *Restklassen-Operation* bezeichnet, das Tupel $\mathcal{S}' = \langle \overline{S}, f' \rangle$ als *Restklassen-System*.

4.14 Satz (Eigenschaften von f'): Oben definierte Restklassen-Operation f' ist reflexiv, monoton und endlich.

Bemerkung: Die Restklassen-Operation f' ist im Allgemeinen keine K-Operation auf der Restklassenmenge $\overline{S}$, da sie im Allgemeinen nicht idempotent ist. Dies zu belegen, genügt ein Beispiel:

Auf dem Grundraum $S := \{1, 2, 3, 4\}$ wird durch die Menge $\mathfrak{M} := \{\{1, 2\}, S\}$ eine K-Operation $f := f_{\mathfrak{M}}$ induziert. Die Relation $\sim \subseteq S \times S$ sei die kleinste Äquivalenzrelation auf S, so dass $2 \sim 3$ gilt.

Dann gilt für die wie oben definierte induzierte Abbildung f':

(1) $f'(\overline{1}) = \Phi\big(f(\Phi^{-1}(\overline{1}))\big) = \Phi\big(f(1)\big) = \Phi\big(\{1, 2\}\big) = \{\overline{1}, \overline{2}\}$

(2) Da $2 \sim 3$ ist $\Phi^{-1}(\overline{1}, \overline{2}) = \{1, 2, 3\}$. Damit gilt:
$f'(f'(\overline{1})) = f'(\overline{1}, \overline{2}) = \Phi\big(f(\Phi^{-1}(\overline{1}, \overline{2}))\big) = \Phi\big(f(1, 2, 3)\big)$
$= \Phi\big(S\big) = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\} \neq \{\overline{1}, \overline{2}\} = f'(\overline{1})$

Damit ist die Abbildung f' tatsächlich nicht idempotent und dementsprechend auch keine K-Operation.

In diesem Beispiel wurde ausgenutzt, dass sich das Bild $f(1) = \{1, 2\}$ nicht mit der Äquivalenzrelation $\sim$ verträgt. Dies kann behoben werden. Es muss gefordert werden, dass sich einige (nicht alle) Bilder von f mit $\sim$ vertragen.

4.15 DEF (Verträglichkeit):

(1) *Verträglichkeit von Mengen:* Eine Menge $X \subseteq S$ heißt *mit der Äquivalenzrelation $\sim$ verträglich*, falls $X = \Phi^{-1}(\Phi(X))$ ist.

(2) *Verträglichkeit von Abbildungen:* Die K-Operation f heißt *mit der Äquivalenzrelation $\sim$ verträglich*, falls für alle Teilmengen $X \subseteq S$ gilt:

$$X = \Phi^{-1}(\Phi(X)) \quad \Rightarrow \quad f(X) = \Phi^{-1}(\Phi(f(X)))$$

Bemerkung (Verträglichkeit): Tatsächlich wurde bei der Verträglichkeit nicht (!) gefordert, dass jedes Bild von f sich mit der Relation $\sim$ verträgt; es müssen lediglich die Bilder von verträglichen Mengen unter der K-Operation f verträglich sein.

Das folgende Kriterium erleichtert den Nachweis der Verträglichkeit von Äquivalenzrelationen und K-Operationen:

4.16 Kriterium (Verträglichkeit extremer K-Operationen): Ist f eine extreme K-Operation auf S, dann ist f mit jeder Äquivalenzrelation $\sim \subseteq S \times S$ verträglich.

Der folgende Satz stellt fest, dass beim Übergang auf den Restklassenraum aus verträglichen K-Operationen erneut K-Operationen entstehen:

4.17 Satz (Restklassen-Operation): Sei $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ eine K-Operation und $\sim \subseteq S \times S$ eine Äquivalenzrelation auf S die sich mit f verträgt.

Dann ist die oben definierte Restklassen-Operation f' eine K-Operation auf $\overline{S}$ und damit $\mathcal{S}' = \langle \overline{S}, f' \rangle$ ein deduktives System.

Bew. (*Skizze*)*:* Es ist hier lediglich noch die Idempotenz zu prüfen. Erneut wird auf diese einfache Rechnung hier verzichtet. Q.E.D.

Bemerkung (Bild der Restklassen-Operation): Ist f eine mit $\sim$ verträgliche K-Operation, dann hat die Restklassen-Operation f' die folgende Bildmenge:

$$\mathfrak{Im}(f') = \{\Phi(X);\ X \in \mathfrak{Im}(f) \text{ ist mit } \sim \text{ verträglich}\}$$

Bisher wurde ein deduktives System $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ betrachtet und durch den Übergang auf die Restklassenmenge ein neues deduktives System $\mathcal{S}' = \langle \overline{S}, f' \rangle$ konstruiert.

Umgekehrt induziert auch jede K-Operation f' auf $\overline{S}$ ein deduktives System auf dem ursprünglichen Raum. Dies wird hier ergänzend festgehalten. Sei dazu eine nichtleere Menge $S \neq \varnothing$, eine Äquivalenzrelation $\sim \subseteq S \times S$ und ein deduktives System $\mathcal{S}' = \langle \overline{S}, f' \rangle$ auf der Restklassenmenge $\overline{S}$ gegeben und die Abbildung $\Phi : S \to \overline{S}$ wie eben definiert.

4.18 Konstruktion (Rückinduzierte Operation): Für alle Teilmengen $X \subseteq S$ ist die Abbildung $f : \mathfrak{p}(S) \to \mathfrak{p}(S)$ wie folgt definiert:

$$X \mapsto \Phi^{-1}(f'(\overline{X}))$$

f wird als *rückinduzierte Operation* und das Tupel $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ als *rückinduziertes System* bezeichnet.

4.19 Satz (Rückinduzierte Operation): Oben definierte rückinduzierte Operation f ist eine K-Operation auf dem Grundraum S und damit $\mathcal{S} = \langle S, f\rangle$ ein deduktives System.

Beweis. Lediglich der Nachweis der Endlichkeit ist erwähnenswert:

Sei dazu $X \subseteq S$ beliebig und $x \in f(X)$ ein beliebiges, aus X beweisbares Element. Zu zeigen ist die Existenz einer endlichen Menge $Y \subseteq_{endl} X$ mit $x \in f(Y)$.

Jedenfalls ist $\overline{x} \in \Phi(f(X)) = \Phi(\Phi^{-1}(f'(\overline{X}))) = f'(\overline{X})$.

Damit existiert eine endliche Menge $\overline{Y} \subseteq_{endl} \overline{X}$ mit $\overline{x} \in f'(\overline{Y})$.

Im Allgemeinen ist $\Phi^{-1}(\overline{Y})$ nicht endlich. Es existiert aber eine endliche Menge $Z \subseteq \Phi^{-1}(Y)$ mit $Z \subseteq X$ und $\overline{Z} = \overline{Y}$. (Wähle aus jeder Äquivalenzklasse $\overline{y} \in \overline{Y}$ ein Element $z \in \overline{y} \cap X$ aus.)

Da $\overline{Y} = \overline{Z}$, ist $\overline{x} \in f'(\overline{Z})$ und $x \in \Phi^{-1}(f'(\overline{Z})) = f(Z)$.

Damit wurde eine geeignete endliche Menge gefunden und $\langle S, f\rangle$ ist tatsächlich ein deduktives System. Q.E.D.

Bemerkungen:

(1) *Bildmenge:* Die rückinduzierte Operation f hat die folgende Bildmenge:

$$\mathfrak{Im}(f) = \Phi^{-1}(\mathfrak{Im}(f')) = \{\Phi^{-1}(\overline{X}) \subseteq S;\ \overline{X} \in \mathfrak{Im}(f')\}$$

Es läßt sich leicht überprüfen: Ist f die rückinduzierte Operation zu f', dann ist f zunächst mit $\sim$ verträglich. Ist dann weiter f'' die Restklassen-Operation zu f, dann gilt $f' = f''$.

(2) *Auswahl:* Im Beweis der Endlichkeit findet eine Auswahl statt. Diese erfordert aber nicht das AC, da lediglich eine Auswahlfunktion auf einer endlichen (!) Familie nichtleerer Mengen benötigt wird. Deren Existenz ist aber in ZFS beweisbar.

(3) *Informationsverlust:* An dieser Stelle ist weiterhin bemerkenswert, dass im Beweis der Endlichkeit tatsächlich eine Auswahl stattfinden muss. Bei der kanonischen Richtung, in der die Restklassen-Operationen auf dem Restklassenraum konstruiert werden, ist keine Auswahl nötig; dort erfolgt der Nachweis, dass Restklassen-Operationen tatsächlich K-Operationen sind, direkt und ohne Auswahl.

Dies korrespondiert mit der Tatsache, dass mit dem Übergang auf den Restklassenraum immer ein Informationsverlust verbunden ist.

§5 Beschränkte Schnitte

In diesem Paragraphen wird eine spezielle Klasse von Schnittoperationen[24] betrachtet: die *beschränkten Schnitte*. Dabei handelt es sich um den Schnitt einer beliebigen K-Operation mit einer beschränkten K-Operation.

Es werden zunächst die relevanten Eigenschaften der beschränkten Schnitte und die Saturiertheit in den resultierenden Systemen untersucht, um schließlich neue Millersätze zu etablieren.

Sei dazu im Folgenden ein deduktives System $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ gegeben.

Zunächst werden hier die beschränkten K-Operationen adäquat als induzierte Abbildung eingeführt, da diese bisher lediglich erwähnt wurden.[25]

5.1 Konstruktion (Beschränkte K-Operation): Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ seien erzeugende Menge und beschränkte K-Operation wie folgt definiert:

(1) *Erzeugende Menge:* $\mathfrak{M}_n := \mathfrak{p}_n(S) \cup \{S\} = \{X \subseteq S;\ |X| < n\} \cup \{S\}$.

(2) *Beschränkte K-Operation:* Die Abbildung $g_n := f_{\mathfrak{M}_n}$ heißt *beschränkte K-Operation zur Schranke n auf dem Grundraum S.*

5.2 Hilfssatz (Beschränkte K-Operation): Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die beschränkte K-Operation g_n eine K-Operation auf dem Grundraum S mit Bild $\mathfrak{Im}(g_n) = \mathfrak{p}_n(S) \cup \{S\}$; ferner stimmen die g_n mit den in §1 eingeführten beschränkten K-Operationen $\mathrm{Cn}_{S,n}$ überein. Es gilt also:

$$g_n = \mathrm{Cn}_{S,n} : X \mapsto \begin{cases} X & \text{falls } |X| < n \\ S & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis. Es ist Mehreres zu prüfen:

(1) *$\cap$-Stabilität:* Offenbar ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathfrak{M}_n$ $\cap$-stabil; entsprechend ist $\mathfrak{Im}(g_n) = \mathfrak{M}_n$.

(2) *Endlichkeit:* Sei dazu $X \subseteq S$ gegeben mit $g_n(X) = S$.

Ohne Einschränkung ist X (und damit auch S) unendlich. Dann existieren n paarweise verschiedene Elemente $x_0, \dots x_{n-1} \in X$ und offenbar ist die Menge $Y := \{x_0, \dots x_{n-1}\} \subseteq_{endl} X$ endliche Teilmenge von X.

Nach Konstruktion der erzeugenden Menge ist $\mathfrak{Im}(g_n)_Y = \{S\}$, da $|Y| = n$ gilt. Also ist $g_n(Y) = \bigcap \mathfrak{Im}(g_n)_Y = S$ und eine geeignete endliche Menge wurde gefunden.

Damit ist g_n tatsächlich eine K-Operation.[26]

(3) *Gleichheit:* Die hier definierten beschränkten K-Operationen g_n stimmen offensichtlich mit den $\mathrm{Cn}_{S,n}$ aus §1 überein. Q.E.D.

---

[24] Vgl. hierzu §4 über allgemeine Konstruktionen.
[25] Vgl. hierzu Beispiele von K-Operationen in §1.
[26] Zur Konstruktion der Menge Y mussten endlich viele Elemente aus der Menge X ausgewählt werden; dafür wird das AC nicht benötigt.

Mithilfe der beschränkten K-Operation g_n wird nun der beschränkte Schnitt f_n von g_n und f eingeführt:

5.3 Konstruktion (Beschränkter Schnitt): Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ wird die Abbildung

$$f_n := f_{\mathfrak{Im}(f) \cup \mathfrak{Im}(g_n)}$$

als *beschränkter Schnitt von* f *zur Schranke* n genannt, das Tupel $\mathcal{S}_n := \langle S, f_n \rangle$ *beschränktes Schnitt-System zur Schranke* n.

5.4 Satz (Beschränkter Schnitt): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist der beschränkte Schnitt f_n eine K-Operation auf S mit $\mathfrak{Im}(f_n) = \mathfrak{Im}(f) \cup \mathfrak{Im}(g_n)$, dementsprechend $\mathcal{S}_n$ ein deduktives System. Desweiteren ist der beschränkte Schnitt $f_n = f \cap g_n$ der Schnitt der ursprünglichen K-Operation f mit der beschränkten K-Operation g_n. Es gilt also:

$$f_n : X \mapsto \begin{cases} X & \text{falls } |X| < n \\ f(X) & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis.

Da f und g_n denselben Grundraum haben, gilt:

$$\mathfrak{Im}(f) \cup \mathfrak{Im}(g_n) = \mathfrak{Im}(f) \cup \mathfrak{Im}(g_n) \cup \{S \cup S\}$$

Aus den Sätzen über Schnittoperationen und eingeschränkte Schnittoperationen folgt, dass f_n eine K-Operation auf S ist. Desweiteren folgt aus den gleichen Sätzen, dass $f_n = f \cap g_n$ ist. Da $\mathfrak{Im}(f)$ $\cap$-stabil ist, ist es auch $\mathfrak{Im}(f) \cup \mathfrak{Im}(g_n)$. (Ist nämlich für $\varnothing \neq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Im}(f) \cup \mathfrak{Im}(g_n)$ der Schnitt $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{p}_n(S) \neq \varnothing$, dann ist $\bigcap \mathfrak{X} \in \mathfrak{Im}(g_n)$; ansonsten ist $\bigcap \mathfrak{X} \in \mathfrak{Im}(f)$.) Damit ist $\mathfrak{Im}(f_n) = \mathfrak{Im}(f) \cup \mathfrak{Im}(g_n)$.

Weiter gilt für alle Mengen $X \subseteq S$ mit $|X| \geq n$, dass $g_n(X) = S$ ist. Daraus folgt für diese Mengen:

$$f_n(X) = f(X) \cap g_n(X) = f(X) \cap S = f(X)$$

Für Mengen $X \subseteq S$ mit $|X| < n$ gilt hingegen, da $X \subseteq f(X)$ ist:

$$f_n(X) = f(X) \cap g_n(X) = f(X) \cap X = X$$

Q.E.D.

Im Folgenden werden die relevanten Eigenschaften des beschränkten Schnittes untersucht.

Vereinfachung: Ist $n = 0$, dann ist $f = f_n$. Damit ändern sich die relevanten Eigenschaften nicht und f_0 ist für das Miller'sche Projekt nicht verwendbar.

Desweiteren folgt aus $n \geq |S|$, dass $\mathfrak{Im}(f_n) = \mathfrak{p}(S)$ und $f_n = \mathrm{Id}$ ist. Die Identität Id erlaubt trivialerweise Saturierung; entsprechend kann die Saturiertheit in $\mathcal{S}_n$ nicht in Bezug zur Saturiertheit in $\mathcal{S}$ gesetzt werden und erneut ist f_n nicht für das Miller'sche Projekt verwendbar.

Es wird also im Folgenden angenommen, dass $0 < n < |S|$ gilt.

Tabelle (Eigenschaften von f_n): Falls $0 < n < |S|$ ist, hat der beschränkte Schnitt f_n in Abhängigkeit von der Schranke n die folgenden relevanten Eigenschaften:

Eigenschaften	$n = 1$	$n = 2$	$n \geq 3$
a: extrem	falls f extrem	falls f extrem	falls f extrem
b: punkttreu	f punkttreu	immer	immer
c: 2-kompakt	f 2-kompakt	f 2-kompakt	nie
d: gleichbleibend	f gleichbleibend	f gleichbleibend	immer

5.5 Satz (Relevante Eigenschaften von f_n): Der beschränkte Schnitt f_n hat die in obiger Tabelle beschriebenen relevanten Eigenschaften.

Beweis. Die einzelnen Aussagen werden gezeigt.

(1) *extrem:* Sei f extreme K-Operation.

Dann gilt für jedes $X \subseteq S$, dass $f(X) \in \{X, S\}$. Da auch g_n extrem ist, gilt dasselbe für $g_n(X)$. Damit ist auch $f_n(X) = f(X) \cap g(X) \in \{X, S\}$.

Damit ist aber f_n extrem.

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht: Ist f_n extrem, dann ist dennoch f im Allgemeinen nicht extrem.

Betrachte dazu die auf $\mathbb{N}$ induzierte Abbildung $f := f_{\{\{1\},\mathbb{N}\}}$. f ist eine K-Operation und, da $f(\varnothing) = \{1\}$ ist, insbesondere nicht extrem. Dennoch ist der beschränkte Schnitt f_n für jedes $0 \neq n \in \mathbb{N}$ extrem.

(2) *punkttreu:* Falls $n \geq 2$, dann ist offenbar

$$\{\{x\};\ x \in S\} \subseteq \mathfrak{p}_n(S) \subseteq \mathfrak{Im}(f_n)$$

und f_n damit trivialerweise punkttreu.

Falls hingegen $n = 1$ ist, dann gilt genau dann $\{\{x\};\ x \in S\} \subseteq \mathfrak{Im}(f_0)$, wenn $\{\{x\};\ x \in S\} \subseteq \mathfrak{Im}(f)$ ist. (Nach Voraussetzung ist $|S| > n$ und $\mathfrak{p}_1(S) = \{\varnothing, S\}$.)

(3) *2-kompakt:* Jedenfalls gilt nach Voraussetzung $|S| > n \geq 1$.

Falls $n \geq 3$ ist, dann ist zunächst $f_n(S) = S$; da $2 < n$ ist, gilt aber für jede höchstens 2-elementige Teilmenge $X \subseteq_2 S$, dass $g_n(X) = X \neq S$.

Also ist $f_n(X) = f(X) \cap X = X \neq S$ und f_n nicht 2-kompakt.

Ansonsten ist $n \leq 2$. Es ist nun zu zeigen, dass f genau dann 2-kompakt ist, wenn es auch f_n ist.

„$\Rightarrow$“ Sei zunächst f 2-kompakt und es gelte für eine Teilmenge $X \subseteq S$, dass $S = f_n(X) = f(X) \cap g_n(X)$. Daraus folgt, dass $f(X) = g_n(X) = S$ ist. Insbesondere gilt damit $|X| \geq n$. (Sonst wäre $g_n(X) = X \neq S$ und auch $f_n(X) \neq S$).

Da f 2-kompakt ist, gibt es eine höchstens 2-elementige Teilmenge $Z \subseteq_2 X$ mit $f(Z) = S$. Da $|X| \geq 2$ ist, folgt daraus die Existenz einer genau 2-elementigen Erweiterung Y von Z mit $Z \subseteq Y \subseteq X$.

Aufgrund der Monotonie von f gilt $S = f(Z) \subseteq f(Y) \subseteq S$.

Daraus folgt: $f_n(Y) = f(Y) \cap g_n(Y) = S \cap S = S$.

Damit wurde eine geeignete höchstens 2-elementige Teilmenge $Y \subseteq_2 X$ gefunden und f_n ist 2-kompakt.

„$\Leftarrow$“ Ist umgekehrt f nicht 2-kompakt, dann gibt es eine Menge $X \subseteq S$ mit $f(X) = S$ und für alle höchstens 2-elementigen Teilmengen $Y \subseteq_2 X$ von X gilt, dass $f(Y) \neq S$. Insbesondere folgt daraus, dass $|X| \geq 3$ ist. (Sonst wäre $X \subseteq_2 X$ mit $f(X) = S$ gegeben.)

Damit ist $f_n(X) = f(X) \cap g_n(X) = S \cap S = S$.

Weiterhin gilt nach Wahl von X für jede höchstens 2-elementige Teilmenge $Y \subseteq_2 X$ wie schon festgestellt $f(Y) \neq S$.

Daraus folgt sofort $f_n(Y) = f(X) \cap g_n(X) \neq S$ und f_n ist nicht 2-kompakt.

(4) *gleichbleibend:* Sei zunächst $n \leq 2$.

Für alle 2-elementigen Mengen $\{x, y\} \subseteq S$ gilt mit dem Satz zu beschränkten Schnitten: $f_n(x, y) = f(x, y)$.

Falls f nicht gleichbleibend ist, dann gibt es $x, y, z \in S$ mit $x \neq z$ und $f(x, y) = S = f(y, z)$ und $f(x, z) \neq S$. Insbesondere folgt daraus, dass $x \neq y$ (sonst $S \neq f(x, z) = f(y, z) = S$) und analog $y \neq z$. Damit gilt aber mit obiger Bemerkung $f_n(x, y) = f(x, y) = S = f(y, z) = f_n(y, z)$ und $f_n(x, z) \neq S$ und f_n ist ebenfalls nicht gleichbleibend.

Ist umgekehrt f_n nicht gleichbleibend, dann gibt es wie oben $x, y, z \in S$. Aus $f_n(x, y) = S = f_n(y, z)$ folgt sofort $f(x, y) = S = f(y, z)$. Da weiter $x \neq z$ gilt ebenfalls $f(x, z) = f_n(x, z) \neq S$ und f ist ebenfalls nicht gleichbleibend.

Ist weiter $n \geq 3$, dann gilt für alle $x, y \in S$:

$$f_n(x, y) = g_n(x, y) = \{x, y\} \neq S$$

Damit ist f_n trivialerweise gleichbleibend. Q.E.D.

Bemerkungen:

(1) *k-Kompaktheit:* Mit einem analogen Beweis wie bei der 2-Kompaktheit (und denselben Voraussetzungen für den Grundraum) läßt sich für alle natürlichen Zahlen $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \geq n$ zeigen:

Genau dann ist f_n k-kompakt, wenn f k-kompakt ist.

Ist hingegen die Schranke $n > k$, dann ist f_n keinesfalls k-kompakt.

(2) *Miller'sches Projekt:* Aus obigem Satz folgt, dass im Allgemeinen der beschränkten Schnitt f_1 zur Schranke $n = 1$ keine neuen Eigenschaften gegenüber der ursprünglichen K-Operation f hat. Dementsprechend ist diese Konstruktion für das Miller'sche Projekt nicht verwertbar.

Die Betrachtung beschränkter Schnitte zu einer Schranke $n > 3$ ist im Miller'schen Projekt redundant, da diese Schnitte dieselben relevanten Eigenschaften haben, wie der beschränkte Schnitt f_3 zur Schranke $n = 3$.

(3) *Punkttreuer Schnitt:* Der beschränkte Schnitt f_2 zur Schranke $n = 2$ hat die kennzeichnende Eigenschaft, jedenfalls punkttreu zu sein. Entsprechend wird im Folgenden f_2 auch als *punkttreuer Schnitt* f_p bezeichnet.

(4) *Gleichbleibender Schnitt:* Der beschränkte Schnitt f_3 zur Schranke $n = 3$ hat die kennzeichnende Eigenschaft, jedenfalls (trivial) gleichbleibend zu sein, mit der sie sich vom punkttreuen Schnitt abhebt. Entsprechend wird im Folgenden f_3 auch als *gleichbleibender Schnitt* f_g bezeichnet.

5.6 Satz (Saturiertheit in beschränkten Schnitt-Systemen): Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebige Schranke, $x \in S$ beliebiges Element. Eine Menge $X \subseteq S$ mit $|X| \geq n$ ist genau dann bezüglich $\mathcal{S}$ x-saturiert, wenn X bezüglich $\mathcal{S}_n$ x-saturiert ist.

Beweis. Mit dem Satz über beschränkte Schnitte gilt für alle $X \subseteq S$ mit $|X| \geq n$: $f_n(X) = f(X)$. Daraus folgt sofort die Behauptung. Q.E.D.

Im Folgenden werden die bisherigen Ergebnisse dieses Paragraphen verwendet, um einige Millersätze zu beweisen. Dazu wird zunächst der punkttreue und anschließend der gleichbleibende Schnitt verwendet.

Mit dem Korollar über wohlordenbare Systeme (§2) wird ab hier ohne Einschränkung angenommen werden, dass die betrachteten Systeme zumindest unendlich sind, also einen unendlichen Grundraum S haben.

5.7 Satz (LB $b \Rightarrow$ LB $\varnothing$): Falls alle punkttreuen Systeme Saturierung erlauben, dann erlauben dies schon alle deduktiven Systeme.

Beweis. Sei $\mathcal{S} := \langle S, \mathrm{Cn} \rangle$ beliebiges deduktives System. Zu zeigen ist unter Voraussetzung von LB b, dass $\mathcal{S}$ Saturierung erlaubt.

Sei dazu $X \subseteq S$ und $x \notin f(X)$ gegeben. Zunächst wird $|X| \geq 2$ vorausgesetzt.

Der punkttreue Schnitt $f_p = f \cap g_2$ ist eine K-Operation auf S und $\mathcal{S}_p = \langle S, f_p \rangle$ punkttreues System. Da $x \notin f(X)$ ist, gilt ebenfalls $x \notin f_p(X) = f(X) \cap g_2(X)$. Aus LB b folgt die Existenz einer x-saturierten Erweiterung $Y \supseteq X$ von X bezüglich $\mathcal{S}_p$.

Da $|X| \geq 2$ ist, ist auch $|Y| \geq 2$. Mit obigem Satz über Saturiertheit in beschränkten Schnitt-Systemen folgt, dass Y auch x-saturiert ist bezüglich $\mathcal{S}$. Damit wurde eine geeignete Erweiterung gefunden.

Falls nun $|X| = 1$ ist, dann gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder gilt für jedes $y \in S \backslash X$: $x \in f(X, y)$. Dann ist aber X schon x-saturiert bezüglich $\mathcal{S}$ und es ist nichts zu zeigen. Andernfalls gibt es ein $y \in S \backslash X$ mit $x \notin f(X, y)$. Dann ist aber $|X \cup \{y\}| = 2 \geq 2$, und mit obiger Argumentation hat $X \cup \{y\}$ eine x-saturierte Erweiterung $Y \supseteq X \cup \{y\} \supset X$.

Falls schließlich $|X| = 0$ ist, dann ist analog zu eben die Menge X entweder schon selbst x-saturiert oder besitzt eine 1-elementige Erweiterung Z, die ihrerseits eine x-saturierte Erweiterung Y besitzt.

Jedenfalls erlaubt das System $\mathcal{S}$ also Saturierung. Q.E.D.

5.8 Korollar (zu $\mathrm{LB}\,b \Rightarrow \mathrm{LB}\,\varnothing$**):** Für alle Teilmengen $\alpha \subseteq \{a, c, d\}$ gilt der Millersatz $\mathrm{LB}\,b\,\alpha \;\Rightarrow\; \mathrm{LB}\,\alpha$.

Beweis. Sei $\alpha \subseteq \{a, c, d\}$ beliebige Teilmenge und $\mathcal{S} = \langle S, f\rangle$ beliebiges deduktives System mit allen Eigenschaften aus α. Dann hat der punkttreue Schnitt f_p von f mit dem Satz über die relevanten Eigenschaften von f_n zusätzlich zur Punkttreue ebenfalls alle Eigenschaften aus α. Aus $\mathrm{LB}\,b\,\alpha$ folgt mit analoger Argumentation wie oben $\mathrm{LB}\,\alpha$. Q.E.D.

Bemerkung: Miller hat den hier bewiesenen Millersatz $\mathrm{LB}\,ab \Rightarrow \mathrm{LB}\,a$ mit anderen Methoden gezeigt; er hat das System $\mathcal{S}$ auf eine geeignete Teilmenge des Grundraumes eingeschränkt, sodass die Einschränkung punkttreu geworden ist.[27]

5.9 Satz ($\mathrm{LB}\,bd \Rightarrow \mathrm{LB}\,\varnothing$)**:** Falls alle punkttreuen und gleichbleibenden Systeme Saturierung erlauben, dann schon alle deduktiven Systeme.

Beweis. Sei $\mathcal{S} := \langle S, \mathrm{Cn}\rangle$ ein beliebiges deduktives System. Zu zeigen ist unter Voraussetzung von $\mathrm{LB}\,bd$, dass $\mathcal{S}$ Saturierung erlaubt.

Sei dazu $X \subseteq S$ und $x \notin f(X)$ gegeben. Zunächst wird $|X| \geq 3$ vorausgesetzt.

Der gleichbleibende Schnitt $f_g = f \cap g_3$ ist eine K-Operation auf S und entsprechend $\mathcal{S}_g = \langle S, f_p\rangle$ punkttreues und gleichbleibendes System. Da $x \notin f(X)$ ist, gilt ebenfalls $x \notin f_g(X) = f(X) \cap g_3(X)$. Aus $\mathrm{LB}\,bd$ folgt die Existenz einer x-saturierten Erweiterung $Y \supseteq X$ von X bezüglich $\mathcal{S}_g$.

Da $|X| \geq 3$ ist, ist auch $|Y| \geq 3$. Mit obigem Satz über Saturiertheit in beschränkten Schnitt-Systemen folgt, dass Y auch x-saturiert ist bezüglich $\mathcal{S}$. Damit wurde eine geeignete Erweiterung gefunden.

Analog zur Argumentation im vorherigen Satz ist wieder jede Teilmenge $X \subseteq S$ mit $|X| = 2$ entweder schon x-saturiert bezüglich $\mathcal{S}$ oder es läßt sich eine 3-elementige Erweiterung $X' \subseteq S$ finden mit $x \notin f(X')$.

Mit bisheriger Argumentation hat X' und damit auch X eine x-saturierte Erweiterung Y bezüglich $\mathcal{S}_g$ und damit auch bezüglich $\mathcal{S}$ hat. Anschließend folgt dies für alle 1-elementigen $X \subseteq S$ und schließlich für die leere Menge.

Jedenfalls erlaubt das System $\mathcal{S}$ Saturierung. Q.E.D.

5.10 Korollar (zu $\mathrm{LB}\,bd \Rightarrow \mathrm{LB}\,\varnothing$**):** Es gilt der Millersatz $\mathrm{LB}\,abd \Rightarrow \mathrm{LB}\,a$

Beweis. Setzt man voraus, dass das System $\mathcal{S} = \langle S, f\rangle$ extrem ist, dann ist der gleichbleibende Schnitt f_g von f zusätzlich extrem. Dann folgt aus $\mathrm{LB}\,abd$ mit analoger Argumentation zu eben $\mathrm{LB}\,a$. Q.E.D.

[27] Vgl. hierzu [ML, §5].

§6 Doppelung

In diesem Paragraphen wird die Konstruktionsmethode der *Doppelung* vorgestellt. Zentrale Idee dieser Konstruktion ist, ein deduktives System $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ als isomorphe, disjunkte Kopie seiner selbst zu verdoppeln und anschließend beide Systeme als Schnittsystem geeignet zu vereinen. Anschließend wird das resultierende deduktive System auf seine relevanten Eigenschaften und Saturiertheit hin untersucht; abschließend werden neue Millersätze etabliert.

Sei dazu im Folgenden ein deduktives System $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ gegeben.

6.1 Konstruktion (Disjunkte Kopie des Systems): Zum deduktiven System $\mathcal{S}$ läßt sich wie folgt eine disjunkte, isomorphe Kopie $\mathcal{S}'$ konstruieren:

(1) *Kopie des Grundraums:* Die Menge S' sei isomorphe, disjunkte Kopie des Grundraumes S und $\Phi : S \to S'$ die entsprechende Bijektion zwischen beiden Grundräumen S und S'.[28]

(2) *Kopie der Bildmenge:* Die Menge $\mathfrak{M} := \{\Phi(X);\ X \in \mathfrak{Im}(f)\}$ sei die isomorphe Kopie der Bildmenge der K-Operation f.

(3) *Kopie der K-Operation:* Die induzierte Abbildung $f' := f_{\mathfrak{M}}$ sei die Kopie der ursprünglichen K-Operation f auf dem Grundraum S'

(4) *Kopie des Systems:* Das Tupel $\mathcal{S}' := \langle S', f' \rangle$ wird *disjunkte Kopie des deduktiven Systems* $\mathcal{S}$ genannt.

Bemerkung: Durch ein direktes Nachrechnen läßt sich das Folgende leicht überprüfen: f' ist eine K-Operation auf S', entsprechend ist $\mathcal{S}'$ ein deduktives System. Weiterhin gilt für alle $X \subseteq S$: $\Phi(f(X)) = f'(\Phi(X))$; also für jede Teilmenge $X' \subseteq S'$: $f'(X') = \Phi(f(\Phi^{-1}(X')))$.

Damit ist zunächst $\mathfrak{M} = \mathfrak{Im}(f')$ und weiter sind $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}'$ isomorphe Systeme und haben insbesondere dieselben relevanten Eigenschaften.

6.2 Konstruktion (Gedoppeltes System): Mithilfe der isomorphen Kopie von $\mathcal{S}$ läßt sich das gedoppelte System wie folgt einführen:

(1) *Erweiterter Grundraum:* $T := S \,\dot{\cup}\, S'$.

(2) *Erzeugende Menge:* $\mathfrak{N} := \mathfrak{Im}(f) \cup \mathfrak{Im}(f') \cup \{\varnothing, T\}$.

(3) *Gedoppeltes System:* Die induzierte Abbildung $f_d := f_{\mathfrak{M}}$ wird *gedoppelte Operation zu* f genannt, das Tupel $\mathcal{S}_d := \langle T, f_d \rangle$ *gedoppeltes System zu* $\mathcal{S}$.

Bemerkungen:

(1) *Leere Menge:* Im Gegensatz zur Definition der Schnittoperation wird in $\mathfrak{N}$ die leere Menge $\varnothing$ in die erzeugende Menge hinzugenommen. Aus der Disjunktheit von S und S' folgt, dass $f_{\mathfrak{N}\setminus\{\varnothing\}}(\varnothing) = \varnothing = f_{\mathfrak{N}}(\varnothing)$ ist. Damit erzeugen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}\setminus\{\varnothing\}$ dieselben Abbildungen und f_d ist tatsächlich die Schnittoperation zu f und f'

[28] Die Existenz einer solchen Menge samt Bijektion ist ohne AC beweisbar!

(2) *$\cap$-Stabilität:* Aus der Disjunktheit der Grundräume S und S' folgt mit der $\cap$-Stabilität von $\mathfrak{Im}(f)$ und $\mathfrak{Im}(f')$, dass für nichtleere Teilmengen $\varnothing \neq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$ der Schnitt $\bigcap \mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Im}(f)$, $\mathfrak{Im}(f')$ oder in der Menge $\{T, \varnothing\}$ liegt. Damit ist durch die Hinzunahme der leeren Menge in $\mathfrak{N}$ diese offenbar $\cap$-stabil und es gilt $\mathfrak{Im}(f_d) = \mathfrak{N}$.

Damit wurde das gedoppelte System $\mathcal{S}_d$ eingeführt und es werden nun seine relevanten Eigenschaften und die Saturiertheit untersucht. Es wird zur Vermeidung von Sonderfällen, die eine aufwendigere Formulierung erfordern und kaum Erkenntnisgewinn bringen, angenommen, dass $|S| > 1$ ist.

6.3 Satz (Relevante Eigenschaften von f_d): Die gedoppelte Operation f_d zur K-Operation f ist genau dann extrem, wenn $f = \mathrm{Id}$ ist, genau dann punkttreu, wenn es f ist, jedenfalls 2-kompakt und keinesfalls gleichbleibend.

Beweis. Es sind mehrere Eigenschaften zu prüfen:

(1) *extrem:* Es gelte $f \neq \mathrm{Id}$.

Jedenfalls gilt mit dem Korollar über die Funktionswerte von Schnittoperationen (§4) für alle $X \subseteq S \backslash S'$, dass $f_d(X) = f(X) \neq T$.

Falls $\varnothing \subseteq S$ einzige Teilmenge $X \subseteq S$ ist mit $f(X) \neq X$, dann ist für jedes $s \in S$ die Menge $\{s\} \in \mathfrak{Im}(f)$ im Bild von f. Da nach Voraussetzung $|S| > 1$ ist, gilt:

$$f(\varnothing) = \bigcap \mathfrak{Im}(f)_\varnothing \subseteq \bigcap \{\{s\};\ s \in S\} = \varnothing$$

Das ist ein WIDERSPRUCH; entsprechend gibt es eine Menge $\varnothing \neq X \subseteq S$ mit $X \neq f(X) = f_d(X)$. Damit ist aber $f_d(X) \notin \{X, T\}$ und f_d ist nicht extrem.

Ist hingegen $f = \mathrm{Id}_{\mathfrak{p}(S)}$, dann ist auch $f' = \mathrm{Id}_{\mathfrak{p}(S')}$ und mit oben erwähntem Korollar über die Funktionswerte folgt direkt, dass f_d extrem ist.

(2) *punkttreu:* Genau dann, wenn die ursprüngliche K-Operation f punkttreu ist, ist die Menge $\{\{x\};\ x \in S\} \subseteq \mathfrak{Im}(f) \subseteq \mathfrak{N}$. Genau in diesem Fall ist auch die Menge $\{\{x'\};\ x' \in S'\} = \{\Phi(\{x\});\ x \in S\} \subseteq \mathfrak{N}$.

Damit ist also f_d genau dann punkttreu, wenn es f schon ist.

(3) *2-kompakt:* Mit oben erwähntem Korollar ist genau dann $f_d(X) = T$, wenn sowohl $X \nsubseteq S$ als auch $X \nsubseteq S'$. Dann aber existieren zwei Elemente $x \in S \cap X \neq \varnothing$ und $x' \in S' \cap X \neq \varnothing$. Für die Menge $Y := \{x, x'\} \subseteq_2 X$ gilt $f(Y) = T$.

Damit wurde eine geeignete höchstens 2-elementige Menge gefunden und f_d ist tatsächlich 2-kompakt.

(4) *gleichbleibend:* Da nach Voraussetzung $|S| > 1$ ist, gibt es zwei Elemente $x, z \in S$ mit $x \neq z$ und ein Element $y \in S'$. Es gilt wieder mit demselben Korollar:

$$f_d(x, y) = T = f_d(y, z) \quad \text{und} \quad f_d(x, z) \subseteq S \quad \text{also} \quad f_d(x, z) \neq T$$

Damit ist f_d nicht gleichbleibend. Q.E.D.

Weiterhin wird das Korollar über die Funktionswerte von Schnittoperationen (§4) verwendet; es wird darauf verzichtet, dies jedesmal explizit zu erwähnen.

6.4 Satz (Saturiertheit in gedoppelten Systemen): Eine nichtleere Teilmenge $\varnothing \neq X \subseteq S$ ist für ein Element $x \in S$ genau dann bezüglich $\mathcal{S}$ x-saturiert, wenn X bezüglich $\mathcal{S}_d$ x-saturiert ist.

Beweis. Sei $x \in S$ und $X \subseteq S$ beliebig.

„$\Rightarrow$“ Sei X x-saturiert bezüglich $\mathcal{S}$.
Dann ist zunächst $x \notin f(X) = f_d(X)$.
Desweiteren gilt für jedes $y \in S \backslash X$: $x \in f(X, y) = f_d(X, y)$.
Ist hingegen $y \in T \backslash S$, dann gilt ebenfalls: $x \in T = f_d(X, y)$.
Damit ist X bezüglich $\mathcal{S}_d$ x-saturiert.

„$\Leftarrow$“ Die Umkehrung folgt genauso direkt. Q.E.D.

Die Ergebnisse des Paragraphen werden zur Etablierung neuer Millersätze verwendet.

6.5 Satz (LB $c \Rightarrow$ LB $\varnothing$): Wenn jedes 2-kompakte deduktive System Saturierung erlaubt, dann schon jedes deduktive System.

Beweis. Zunächst wird wieder ohne Einschränkung angenommen, dass $|S| > 1$ ist. (Deduktive Systeme mit 1-elementigem Grundraum erlauben trivialerweise Saturierung.)

Sei nun $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ beliebiges deduktives System, $X \subseteq S$ und $x \notin f(X)$ gegeben. Zu zeigen ist bezüglich $\mathcal{S}$ die Existenz einer x-saturierten Erweiterung $Y \supseteq X$.

Ohne Einschränkung kann angenommen werden, dass $X \neq \varnothing$ ist. (Falls $\varnothing$ nicht x-saturiert ist, dann gibt es $z \in S$ mit $x \notin f(z)$; jede Erweiterung von $\{z\}$ ist auch eine Erweiterung von $\varnothing$.)

Die Doppelung f_d ist 2-kompaktes deduktives System und es gilt ebenfalls: $x \notin f(X) = f_d(X)$. Nach Voraussetzung existiert bezüglich $\mathcal{S}_d$ eine x-saturierte Erweiterung Y von X.

Angenommen, dass $Y \nsubseteq S$ ist. Dann gibt es $y \in S' \cap Y$. Da $\varnothing \neq X \subseteq Y$, gibt es zudem $z \in S \cap Y$. Damit ist $x \in T = f_d(z, y) \subseteq f_d(Y)$ und Y ist nicht x-saturiert bezüglich $\mathcal{S}_d$. Widerspruch

Also ist $Y \subseteq S$ und da $\varnothing \neq X \subseteq Y$ ist, folgt mit dem Satz über die Saturiertheit in gedoppelten Systemen, dass Y bezüglich $\mathcal{S}$ x-saturiert ist.

Damit wurde geeignete saturierte Erweiterung Y von X gefunden. Q.E.D.

6.6 Korollar (zu LB $c \Rightarrow$ LB $\varnothing$): Es gilt der Millersatz LB $bc \Rightarrow$ LB b.

Beweis. Wird im obigem Satz vorausgesetzt, dass f punkttreu ist, dann ist es auch die Doppelung f_d. Der Beweis erfolgt analog. Q.E.D.

§7 Angereicherte Systeme

In diesem Paragraphen wird das Konzept der *Anreicherung eines deduktiven Systems* untersucht. Dabei wird der Grundraum eines deduktiven Systemes um neue Elemente erweitert, anschließend eine geeignete K-Operation aus der ursprünglichen konstruiert. Zunächst wird dieses Konzept hier allgemein diskutiert; anschließend werden einige spezielle Anreicherungen verwendet, um neue Millersätze zu beweisen.

Sei dazu im Folgenden ein deduktives System $\mathcal{S} := \langle S, f \rangle$ gegeben.

7.1 Konstruktion (Angereicherter Grundraum): Sei M eine Menge, die disjunkt zum Grundraum S ist ($S \cap M = \varnothing$). Dann heißt $T := S \cup M$ der *mit M angereicherte Grundraum zu S.*

Bemerkungen:

(1) *Existenz disjunkter Mengen:* Im Folgenden wird sich zeigen, dass die konkrete Wahl der Menge M unerheblich, lediglich deren Größe entscheidend ist. Dennoch wird benötigt, dass solche Mengen existieren.

Dies ist aber gegeben: Zu jeder Menge M ist

$$M' := M \times \{S\} = \{\langle m, S \rangle;\ m \in M\}$$

eine zu S disjunkte Menge gleicher Größe.

(2) *Eindeutige Darstellbarkeit:* Es wird an dieser Stelle an die eindeutige Darstellbarkeit von Teilmengen $Z = X \cup Y \subseteq T$ mit $X \subseteq S$ und $Y \subseteq M$ erinnert.

Im Folgenden wird zu der ursprünglichen K-Operation f eine ganze Klasse neuer K-Operationen auf dem angereicherten Grundraum $T = S \cup M$ eingeführt. Diese K-Operationen eignen sich zur Prüfung, wie viele neue Elemente in einer Menge enthalten sind. Dazu wird für jede dieser K-Operationen eine natürliche Schranke $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben; erreicht die Anzahl der neuen Elemente in einer Menge diese Schranke, dann wird sie auf T, ansonsten im Wesentlichen wie unter der ursprünglichen K-Operation abgebildet. Durch Letzteres wird es möglich, eine Korrespondenz zwischen den saturierten Mengen beider Systeme herzustellen.

Sei im Folgenden eine Menge M, disjunkt zu S, und eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Sei desweiteren $T = S \cup M$ der angereicherte Grundraum.

7.2 Konstruktion (Angereicherte K-Operation $f_{M,n}$): Die Abbildung $f_{M,n} : \mathfrak{p}(T) \to \mathfrak{p}(T)$ ist wie folgt definiert:

$$f_{M,n} : X \cup N \mapsto \begin{cases} T & \text{falls } |N| \geq n \\ f(X) \cup N & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Abbildung $f_{M,n}$ wird die *bezüglich der Menge M zur Schranke n angereicherte K-Operation von f* genannt; das System $\mathcal{S}_{M,n} = \langle T, f_{M,n} \rangle$ wird entsprechend *angereichertes System* genannt.

Bemerkungen (Konstruktion von $f_{M,n}$):

(1) *Wohldefiniertheit:* Da die Darstellung $X \cup N \subseteq T$ mit obiger Bemerkung zur Darstellbarkeit eindeutig ist, ist die Abbildung $f_{M,n}$ wohldefiniert.

(2) *Notation:* Sind M und n durch den Kontext bestimmt, wird anstelle von $f_{M,n}$ auch f' geschrieben; $\mathcal{S}'$ analog.

(3) *Bildmenge:* $\mathfrak{Im}(f_{M,n}) = (\mathfrak{Im}(f) \oplus \mathfrak{p}_n(M)) \cup \{T\} := \mathfrak{M}$.

Mit dem Nachweis, dass $f_{M,n}$ eine K-Operation ist, folgt die $\cap$-Stabilität von $\mathfrak{M}$ und $f_{M,n} = f_{\mathfrak{M}}$.

Sonderfälle: Oben eingeführte Konstruktion der Anreicherung erlaubt die Unterscheidung einiger Sonderfälle; diese werden die folgenden Untersuchungen einschränken und somit erleichtern:

(1) $n = 0$: $f_{M,0} = \mathrm{Cn}_{\max} : X \cup N \mapsto T$.[29]

Die Abbildung $f_{M,0}$ ist trivialerweise eine K-Operation auf dem Grundraum T. Aus $\mathfrak{Im}(f) \oplus \mathfrak{p}_0(M) = \mathfrak{Im}(f) \oplus \varnothing = \varnothing$ folgt obige Charakterisierung der Bildmenge.[30]

Offenbar läßt $\mathrm{Cn}_{\max}$ keinen Rückschluß auf die Saturiertheit bezüglich $\mathcal{S}$ zu; entsprechend ist diese Anreicherung für das Miller'sche Projekt nicht verwertbar.

(2) $n \neq 0$ *und* $M = \varnothing$: $f_{\varnothing,n} : X \cup \varnothing \mapsto f(X) \cup \varnothing = f(X)$.

Die Abbildungen $f_{\varnothing,n}$ und f stimmen überein; zunächst ist damit $f_{\varnothing,n}$ tatsächlich eine K-Operation. Mit $\mathfrak{Im}(f) \oplus \mathfrak{p}_n(\varnothing) = \mathfrak{Im}(f) \oplus \{\varnothing\} = \mathfrak{Im}(f)$ und $T = S \cup \varnothing = S$ folgt erneut obige Charakterisierung des Bildes.

Desweiteren ist diese Anreicherung wieder im Miller'schen Projekt nicht verwertbar, da die resultierenden deduktiven Systeme gegenüber den ursprünglichen neue relevante Eigenschaften benötigen.

(3) $0 < n \leq |M|$: Der typische Fall der Anreicherung. In obiger Konstruktion der Anreicherung besteht die Fallunterscheidung aus zwei disjunkten Fällen, die beide eintreten können. Von der Adäquatheit der Charakterisierung der Bildmenge kann man sich leicht überzeugen; in diesem Fall ist nachzuweisen, dass die Anreicherung eine K-Operation ist.

(4) $0 < |M| < n$: $f_{M,n} : X \cup N \mapsto f(X) \cup N = f(X) \cup \mathrm{Id}_{\mathfrak{p}(M)}(N)$.

Mit $T \in \mathfrak{Im}(f) \oplus \mathfrak{p}(M) = \mathfrak{Im}(f) \oplus \mathfrak{p}_n(M)$ folgt obige Charakterisierung der Bildmenge leicht. Erneut ist nachzuweisen, dass $f_{M,n}$ eine K-Operation ist. Dann ist sie aber eine Vereinigungsoperation, wie sie in §4 eingeführt wurde; es gilt dann also $f_{M,n} = f \cup \mathrm{Id}_{\mathfrak{p}(M)}$.

Wie der typische Fall wird diese K-Operation auch für die Zwecke des Miller'schen Projekts untersucht; hierbei genügt offensichtlich die Betrachtung der Schranke $n = |M| + 1$.

Jedenfalls gilt hier mit $M \neq \varnothing$, dass $n \geq 2$ ist.

[29] Vgl. hierzu auch Beispiele von K-Operationen in §1.

[30] In der Definition der erweiterten Summe, §4, wurde für beliebige $\mathfrak{X}$ festgelegt: $\mathfrak{X} \oplus \varnothing = \varnothing$.

Notation: Im typischen Fall $0 < n \leq |M|$ wird sich weisen, dass die Eigenschaften des angereicherten Systems lediglich von der Schranke n abhängen und es irrelevant ist, ob und wieviel größer die Menge M ist. Entsprechend werden im Folgenden Anreicherungem mit $0 < n \leq |M|$ durch f_n bezeichnet.

Der Fall $n = |M| + 1$ wird gesondert untersucht; hier werden die angereicherten K-Operationen durch f_n^+ bezeichnet; analog die resultierenden Systeme.

7.3 Satz (K-Operation): Für $0 < n \leq |M|$ ist die angereicherte K-Operation $f' := f_{M,n}$ eine K-Operation auf $T = S \cup M$ und damit $\mathcal{S}' := \langle T, f' \rangle$ ein deduktives System mit $\mathfrak{Im}(f_{n,M}) = \mathfrak{M}$ wie oben angegeben.

Beweis. Es sind 4 Eigenschaften zu prüfen.

(1) *Reflexivität:* Sei $X \cup N \subseteq T$ gegeben.
Falls $|N| \geq n$, dann ist offenbar $X \cup N \subseteq T = f'(X \cup N)$.
Ansonsten ist $|N| < n$. Mit der Reflexivität von f gilt:

$$X \cup N \subseteq f(X) \cup N = f'(X \cup N)$$

(2) *Idempotenz:* Sei wieder $X \cup N \subseteq T$.
Falls $|N| \geq n$ gilt mit $|M| > n$:

$$f'(f'(X \cup N)) = f'(T) = f'(S \cup M) = T = f'(X \cup N)$$

Ansonsten ist $|N| < n$ und es gilt mit der Idempotenz von f:

$$\begin{aligned} f'(f'(X \cup N)) &= f'(f(X) \cup N) \\ &= f(f(X)) \cup N = f(X) \cup N = f'(X \cup N) \end{aligned}$$

(3) *Monotonie:* Sei $X \cup N \subseteq Y \cup L \subseteq T$ gegeben.
Falls $|L| \geq n$ ist, dann gilt: $f'(X \cup N) \subseteq T = f'(Y \cup L)$
Ansonsten ist $|L| < n$. Insbesondere gilt $X \subseteq Y$ und $N \subseteq L$. Aus letzterem folgt sofort $|N| < n$. Damit gilt mit der Monotonie von f:

$$f'(X \cup N) = f(X) \cup N \subseteq f(Y) \cup L = f'(Y \cup L)$$

(4) *Endlichkeit:* Sei $X \cup N \subseteq T$ und $x \in f'(X \cup N)$ gegeben.
Falls $|N| \geq n$, dann existiert eine Menge $L \subseteq N$ mit $|L| = n$.[31]
Damit gilt: $L \subseteq_{endl} X \cup N$ und $x \in T = f'(\varnothing \cup L) = f'(L)$.
Ansonsten ist $|N| < n$ und damit $f'(X \cup N) = f(X) \cup N$.

1. Fall ($x \in f(X)$): Aufgrund der Endlichkeit von f gibt es eine endliche Menge $Y \subseteq_{endl} X \subseteq X \cup N$ mit $x \in f(Y) = f'(Y)$.
2. Fall ($x \notin f(X)$): Es gilt dann $x \in N$. Damit ist aber $N \subseteq_{endl} X \cup N$ mit $x \in f(\varnothing) \cup N = f'(N)$.

Jedenfalls wurde eine geeignete endliche Menge gefunden.

f' ist also K-Operation und $\mathcal{S}' = \langle T, f' \rangle$ deduktives System. Q.E.D.

[31] Zum Beweis der Existenz von L muss man endlich viele Elemente aus N auswählen. Für diese Auswahl wird aber nicht das AC benötigt.

7.4 Korollar (K-Operation): Für $n = |M| + 1 \geq 2$ ist $f' := f_{M,n}$ eine K-Operation auf $T = S \cup M$ und damit $\mathcal{S}' := \langle T, f' \rangle$ ein deduktives System mit $\mathfrak{Im}(f_{n,M}) = \mathfrak{M}$ wie oben angegeben. Insbesondere sind damit alle angereicherten Systeme deduktive Systeme.

Beweis. Man kann obigen Beweis analog übernehmen, wenn man sich auf die Betrachtung der Fälle $|N| < n$ beschränkt. Q.E.D.

Bemerkung (Isomorphie angereicherter Systeme): Gibt es zwischen zwei Mengen M, L eine Bijektion ϕ und gilt zudem $S \cap (M \cup L) = \varnothing$, dann sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die angereicherten Systeme $\langle S \cup M, f_{M,n} \rangle$ und $\langle S \cup L, f_{L,n} \rangle$ isomorph. (Sei dazu $\psi : S \cup M \to S \cup L$ wie folgt definiert:

$$\psi : x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \in S \\ \phi(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachte nun die durch ψ auf die Potenzmengen kanonisch induzierte Bijektion; diese ist offenbar ein Isomorphismus.) Das bedeutet, dass die konkrete Wahl der Menge M vernachlässigbar ist. Es kommt also lediglich auf die Wahl von n und die Größe von M an.

Im Folgenden werden die relevanten Eigenschaften und die Saturiertheit angereicherter Systeme untersucht; dazu werden die beiden ersten Sonderfälle $n = 0$ und $M = \varnothing$ ausgeschlossen.

Tabelle (Relevante Eigenschaften von $f_{M,n}$): Die relevanten Eigenschaften angereicherter K-Operationen $f_{M,n}$ werden in folgender Tabelle zusammengefaßt.

Dabei bezieht sich die erste Spalte auf den 4. Sonderfall mit $n = |M| + 1$, die restlichen drei Spalten auf den typischen Fall in Abhängigkeit der Schranke n.

Eigenschaften	f_n^+	$n = 1$	$n = 2$	$n \geq 3$
a: extrem	$f = \mathrm{Id}$	$f = \mathrm{Id}$	$f = \mathrm{Id}$	$f = \mathrm{Id}$
b: punkttreu	$f(\varnothing) = \varnothing$ & f pt.	nie	$f(\varnothing) = \varnothing$ & f pt.	$f(\varnothing) = \varnothing$ & f pt.
c: 2-kompakt	manchmal	immer	immer	nie
d: gleichbleibend	manchmal	$\lvert S\rvert = 1$	immer	immer

Hierbei steht *pt.* abkürzend für *punkttreu*, der Eintrag *manchmal* wird im folgenden Satz präzisiert.

7.5 Satz (Relevante Eigenschaften von f_n^+): Für jedes $0 < n \in \mathbb{N}$ hat $f' := f_n^+$ die in obiger Tabelle angegebenen relevanten Eigenschaften.

Insbesondere ist f' genau dann 2-kompakt, wenn $f = \mathrm{Cn}_{\max}$ und $|M| \leq 2$ oder wenn f 1-kompakt und $|M| = 1$. f' ist genau dann nicht gleichbleibend, falls $n = 2$ ist und es $x, y \in S$ gibt mit $x \neq y$ und $f(x) = S = f(y)$.

Beweis. Es ist $f'(X \cup N) = f(X) \cup N$ und mit $M \neq \varnothing$ auch $S \neq T$ und $n \geq 2$. Es sind mehrere Eigenschaften zu überprüfen:

(1) *extrem:* Es sei zunächst $f \neq \mathrm{Id}$. Damit gibt es ein $X \subseteq S$ mit $f(X) \neq X$ und es gilt, dass $f'(X) = f(X) \cup \varnothing \in \mathfrak{p}(S) \backslash \{X\}$.

Damit ist $f'(X) \notin \{X, T\}$ und f' nicht extrem.

Ist hingegen $f = \mathrm{Id}$, also für jedes $X \subseteq S$ $f(X) = X$, dann ist auch $f'(X \cup N) = f(X) \cup \mathrm{Id}(N) = X \cup N$ und f' ist tatsächlich extrem.

Damit wurde hier gezeigt, dass f' genau dann extrem ist, wenn f die Identität ist.

(2) *punkttreu:* Für jedes $x \in S$ gilt: $f'(x) = f(x) \cup \varnothing = f(x)$.

Für jedes $m \in M$ gilt: $f'(m) = f(\varnothing) \cup \{m\}$

Mit $M \neq \varnothing$ folgt oben behauptete Äquivalenz.

(3) *2-kompakt:* Jedenfalls folgt sofort für jede Menge $X \cup N \subseteq T$ aus dem Gelten von $T = f'(X \cup N) = f(X) \cup N$, dass $f(X) = S$ und $N = M$ ist.

Damit rechnet man leicht oben angegebene Bedingungen nach.

(4) *gleichbleibend:* Es sei $n = 2$, also $M = \{m\}$ für ein geeignetes m. Weiter seien $x, y \in S$ mit $x \neq y$ und $f(x) = S = f(y)$ gegeben.

Dann ist $f'(x, n) = f(x) \cup \{n\} = T = f'(n, y)$, aber $f'(x, y) = S \cup \varnothing \neq T$ und damit f' nicht gleichbleibend.

Andernfalls ist f' (in jedem Unterfall) trivial gleichbleibend; auf das Nachrechnen wird hier verzichtet. Q.E.D.

7.6 Satz (Relevante Eigenschaften von f_n): Die angereicherte K-Operation f_n hat die in obiger Tabelle angegebenen relevanten Eigenschaften.

Beweis.

(1) *extrem:* Sei zunächst $f = \mathrm{Id}$ und $X \cup N \subseteq T$ beliebig.

Falls $|N| < n$, dann ist $f_n(X \cup N) = f(X) \cup N = X \cup N$. Ansonsten ist $f_n(X \cup N) = T$ und f_n ist offenbar extrem.

Ist umgekehrt $f \neq \mathrm{Id}$, dann gibt es $X \subseteq S$ mit $f(X) \neq X$. Da $|\varnothing| = 0 < n$ ist und $f(X) \subseteq S \neq T$ gilt, ist $f_n(X \cup \varnothing) = f(X) \cup \varnothing \notin \{X, T\}$. Damit ist f_n nicht extrem.

(2) *punkttreu:* Sei zunächst $n = 1$. Da nach Voraussetzung $|M| > 0$ ist, gibt es es ein $m \in M$. Da $n = 1 \geq |\{m\}|$ ist, gilt:

$$f_1(m) = f_1(\varnothing \cup \{m\}) = T \neq \{m\}$$

Damit ist f_n für $n = 1$ nicht punkttreu.

Ansonsten ist $n \geq 2$ und es sind zwei Richtungen zu zeigen:

„$\Rightarrow$“ (Kontraposition) Es genügt zu zeigen: Wenn eine der Bedingungen nicht gilt, dann ist f_n nicht punkttreu.

Sei $\varnothing \neq f(\varnothing) \subseteq S$. Jedenfalls gibt es ein $m \in M$ und es gilt:

$$f_n(m) = f_n(\varnothing \cup \{m\}) \overset{(\star)}{=} f(\varnothing) \cup \{m\} \neq \{m\}$$

Bei $(\star)$ gilt Gleichheit, da $|\{m\}| < 2 \leq n$; die Ungleichheit, da $M \cap S = \varnothing$. Damit ist f_n nicht punkttreu.

Ist f wiederum nicht punkttreu, dann gibt es ein $s \in S$ mit $f(s) \neq \{s\}$. Aus $f_n(s) = f(s) \cup \varnothing = f(s)$ folgt wieder, dass f_n nicht punkttreu ist.

„$\Leftarrow$“ Es gelte nun, dass f punkttreu und $f(\varnothing) = \varnothing$ ist.

Für $s \in S \subset T$ gilt: $f_n(s) = f(s) \cup \varnothing = \{s\}$.

Für $m \in M \subset T$ gilt: $f_n(m) = f(\varnothing) \cup \{m\} = \{m\}$.

Damit ist f_n punkttreu.

(3) *2-kompakt:* Da $|M| \geq n$ ist, gilt $f_n(X \cup N) = T$ genau dann, wenn $|N| \geq n$ ist. Für $n \leq 2$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(a) $|N| \leq 2$*:* Dann ist $N \subseteq_2 X \cup N$ geeignete Menge mit $f_n(N) = T$.

(b) $|N| > 2$*:* In diesem Fall besitzt N eine genau 2-elementige Teilmenge $L \subseteq_2 N \subseteq X \cup N$ mit $f_n(L) = T$. Wieder wurde geeignete Menge gefunden

Jedenfalls ist f_n 2-kompakt.

Sei also $n \geq 3$. Genau dann ist $f_n(X \cup N) = T$, wenn $|N| \geq 3$. Damit gibt es keine höchstens 2-elementige Teilmenge $X \cup N \subseteq_2 T$ mit $f_n(X \cup N) = T$. Da $f_n(T) = T$ ist, kann f_n nicht 2-kompakt sein.

(4) *gleichbleibend:* Wieder folgt aus $f_n(X \cup N) = T$ sofort $|N| \geq n$.

Falls $n \geq 3$ ist, dann gibt es keine zwei $x, y \in T$ mit $f_n(x, y) = T$. Also ist f_n trivialerweise gleichbleibend.

Falls $n = 2$ ist, dann folgt aus $f_2(x, y) = T$ sofort, dass $x, y \in M$ und $x \neq y$ ist. Gibt es nun $z \in T$ mit $f_2(y, z) = T$, dann ist weiter $z \in M$ und aus $x \neq z$ folgt weiter $f_2(x, z) = T$. Damit ist f_2 gleichbleibend.

Falls nun $n = 1$ ist, dann gilt das Folgende:

Falls $|S| > 1$, dann gibt es $s, t \in S$ mit $s \neq t$ und $m \in M$. Dann gilt: $f_1(s, m) = T = f_1(m, t)$ aber $f_1(s, t) = f(s, t) \neq T$. Damit ist f_1 nicht gleichbleibend.

Sei nun $|S| = 1$, also $S = \{s\}$. Es gelte $f_1(x, y) = T = f_1(y, z)$ mit $x \neq z$. Wäre $f_1(x, z) \neq T$, dann wäre $x, z \in \{s\}$, also $x = z$. Das kann aber nicht sein. Also ist tatsächlich $f_1(x, z) = T$ und f_1 gleichbleibend. Q.E.D.

Bemerkung (Punkttreue): Die Eigenschaft *punkttreu* überträgt sich aus dem ursprünglichen System bei der Anreicherung lediglich dann, wenn zusätzlich $f(\varnothing) = \varnothing$ gilt. Dies ist aber keine Einschränkung:

In punkttreuen Systemen folgt aus $f(\varnothing) \neq \varnothing$ sofort mit der Monotonie, dass für alle $s \in S$ schon $f(\varnothing) = \{s\}$ gilt. Das bedeutet aber, dass $S = \{s\}$ einelementig ist. Dieses System erlaubt aber trivialerweise Saturierung.

Also kann an entsprechender Stelle im Folgenden angenommen werden, dass punkttreue Systeme mindestens 2-elementig sind.

Im Folgenden wird die Saturiertheit in $\mathcal{S}' = \langle S \cup M, f' \rangle$ für $f' = f_n$ beziehungsweise $f' = f_n^+$ untersucht. Weiterhin werden die ersten beiden Sonderfälle ausgeschlossen; es wird also angenommen, dass $n \neq 0$ und $M \neq \varnothing$ gilt.

Dadurch, dass der dritte ($n \leq |M|$) und vierte Fall ($n > |M|$) gemeinsam untersucht werden, ergeben sich etwas komplizierter zu lesende Bedingungen für die Saturiertheit. Dies vereinfacht sich bei der Betrachtung konkreter deduktiver Systeme radikal.

Bei der folgenden Untersuchung der Saturiertheit im deduktiven System $\mathcal{S}'$ werden zur Vereinfachung der Argumentation zwei Fälle unterschieden: Zuerst wird m-Saturiertheit in Bezug auf neue Elemente $m \in M$ diskutiert; anschließend die x-Saturiertheit in Bezug auf Elemente $x \in S$ aus dem ursprünglichen Grundraum.

7.7 Satz (m-Saturiertheit): Sei $m \in M$ beliebig. Eine Menge $X \cup N \subseteq T$ ist genau dann m-saturiert (bzgl. $\mathcal{S}'$), wenn $m \notin N$, $|N| < n$ und $X = S$ ist und zusätzlich $|N| = n - 1$ oder $M \backslash N$ einelementig ist.

Beweis. Es sind zwei Richtungen zu zeigen.

„$\Rightarrow$“ Sei $X \cup N \subseteq T$ für ein $m \in M$ schon m-saturiert.

Aufgrund der Saturiertheit ist $m \notin f'(X \cup N)$. Damit ist $f'(X \cup N) \neq T$, also $|N| < n$. Mit der Reflexivität von f' folgt ebenfalls $m \notin N$.

Angenommen, dass $X \neq S$. Damit gibt es ein Element $y \in S \backslash X$. Aufgrund der Disjunktheit von M und S folgt sofort, dass $y \notin (X \cup N)$ ist.

Da $f(X, y) \subseteq S$ ist, folgt:

$$m \notin f(X, y) \cup N = f'(X \cup \{y\} \cup N) = f'(X \cup N, y)$$

Das ist aber ein WIDERSPRUCH zur m-Saturiertheit von $X \cup N$. Also ist doch $X = S$.

Es sei nun $|N| \neq n - 1$, also $|N| < n - 1$.

Dann gilt für jedes $y \in M \backslash N$ zunächst $y \notin f(X) \cup N = f'(X \cup N)$ und mit der m-Saturiertheit auch:

$$m \in f'(X \cup N, y) = f(X) \cup N \cup \{y\} = S \cup N \cup \{y\}$$

Da $m \notin S \cup N$, folgt daraus, dass $m \in \{y\}$. Da dies für alle $y \in M \backslash N$ gilt, folgt daraus schon $M = N \cup \{m\}$.

„$\Leftarrow$“ Sei $X \cup N \subseteq T$ mit den angegebenen Eigenschaften gegeben.

Da $|N| < n$ und $m \notin N$ ist, ist $m \notin f(X) \cup N = f'(X \cup N) \neq T$. Aus der Reflexivität von f' folgt insbesondere auch $m \notin N \subseteq X \cup N$.

Sei $y \notin X \cup N$ beliebig. Da $X = S$ ist, folgt $y \in M \backslash N$.

Falls nun $|N| = n - 1$ ist, dann ist $f'(X \cup N, y) = T$, da $|N \cup \{y\}| = n$.

Ansonsten ist nach Voraussetzung $M = N \cup \{m\}$. Daraus folgt aber sofort $y = m$. Da desweiteren $X = S$ ist, gilt wieder:

$$f'(X \cup N, y) = f(S) \cup (N \cup \{m\}) = S \cup M = T$$

Jedenfalls ist $m \in T = f'(X \cup N, y)$. Q.E.D.

7.8 Korollar: Ist eine Menge $X \cup N$ für ein $m \in M$ m-saturiert, dann ist $X \cup N$ schon maximal-konsistent.

Beweis. Falls $X \cup N$ m-saturiert ist für ein $m \in M$, dann haben X und N die im obigen Satz angegebenen Eigenschaften. Im Beweis der Rückrichtung im obigen Satz wurde ferner die m-Saturiertheit von $X \cup N$ dadurch nachgewiesen, dass für jedes $y \in T \backslash (X \cup N)$ gezeigt wurde, dass $f'(X \cup N, y) = T$ ist. Damit ist $X \cup N$ insbesondere maximal. (Die Konsistenz ist durch die Saturiertheit sofort gegeben.) Q.E.D.

7.9 Satz (x-Saturiertheit): Sei $x \in S$ beliebig. Eine Menge $X \cup N \subseteq T$ ist genau dann x-saturiert (bezgl. $\mathcal{S}'$), wenn X schon x-saturiert bezüglich $\mathcal{S}$ ist und zudem gilt: Es ist $|N| = n - 1$ oder es ist $|N| < n - 1$ und $N = M$.

Beweis. Es sind zwei Richtungen zu zeigen.

„$\Rightarrow$" Sei $X \cup N \subseteq T$ x-saturiert.

Aus der Saturiertheit von $X \cup N$ folgt, dass $x \notin f'(X \cup N)$. Damit ist $f'(X \cup N) \neq T$, $|N| < n$ und $f'(X \cup N) = f(X) \cup N$. Da $x \in S$ ist, gilt zudem $x \notin f(X)$.

Angenommen, dass X bezüglich $\mathcal{S}$ nicht x-saturiert ist. Dann gibt es ein $y \in S \backslash X$ mit $x \notin f(X, y)$. Da S und M disjunkt sind, ist $y \notin N$. Daraus folgt weiter $x \notin f(X, y) \cup N = f'(X \cup \{y\} \cup N) = f'(X \cup N, y)$

Das ist aber ein WIDERSPRUCH zur x-Saturiertheit von $X \cup N$ und damit X ist bezüglich $\mathcal{S}$ doch x-saturiert.

Falls $|N| \neq n - 1$ ist, dann ist jedenfalls $|N| < n - 1$.

Angenommen nun, dass $N \neq M$ wäre. Dann gäbe es ein $y \in M \backslash N$. Damit wäre $y \notin X \cup N$ und $|N \cup \{y\}| < n$.

Dann wäre auch $x \notin f(X) \cup N \cup \{y\} = f'(X \cup N, y)$. Das kann aber aufgrund der Saturiertheit von $X \cup N$ nicht sein. Also ist doch $N = M$.

„$\Leftarrow$" Sei $X \cup N \subseteq T$ mit den angegebenen Eigenschaften gegeben.

Jedenfalls ist $|N| < n$ und damit $f'(X \cup N) = f(X) \cup N$.

Da X bezüglich $\mathcal{S}$ x-saturiert ist, ist $x \notin f(X)$. Insbesondere ist damit $x \notin f(X) \cup N = f'(X \cup N)$.

Sei nun $y \in T \backslash (X \cup N)$ beliebig.

Falls $y \in S$ ist, dann ist auch $y \notin X$. Aufgrund der x-Saturiertheit von X bezüglich $\mathcal{S}_1$ ist $x \in f(X, y) \subseteq f(X, y) \cup N = f'(X \cup N, y)$.

Ist hingegen $y \notin S$, dann ist $y \in M$. Insbesondere ist auch $y \notin N$ und damit $N \neq M$. Damit ist $|N| = n - 1$ und somit auch $|N \cup \{y\}| = n$. Daraus folgt, dass $x \in T = f(X \cup N, y)$.

Jedenfalls ist $x \in f'(X \cup N, y)$ und damit ist $X \cup N$ bezüglich $\mathcal{S}'$ schon x-saturiert. Q.E.D.

Bemerkung (Implizite Voraussetzung): In beiden Sätzen zur Saturiertheit geht implizit die Bedingung $n > 0$ durch Klauseln wie etwa $|N| = n-1$ ein. Das ist auch zu erwarten, da durch die K-Operation $f_{M,0} = \mathrm{Cn}_{\max} : Y \mapsto T$ alle Teilmengen Y auf T abgebildet werden und es somit trivialerweise keine saturierten Mengen gibt.

Die bisherigen Ergebnisse in diesem Paragraphen erlauben, neue Millersätze zu beweisen. Da die angereicherten Systeme zur Schranke $n = 2$ die meisten Eigenschaften haben, werden eben diese hierfür verwendet.

7.10 Satz (LB $cd \Rightarrow$ LB $\varnothing$)**:** Falls alle deduktiven Systeme mit den Eigenschaften 2-kompakt und gleichbleibend Saturierung erlauben, dann auch schon alle deduktiven Systeme.

Beweis. Sei $\mathcal{S} := \langle S, f \rangle$ beliebiges deduktives System, $X \subseteq S$ beliebige Teilmenge und $x \in S$ ein beliebiges nicht aus X beweisbares Element ($x \notin f(X)$). Zu zeigen ist die Existenz einer x-saturierten Erweiterung Y von X.

Betrachte dazu ein zur Schranke $n = 2$ angereichertes System $\mathcal{S}' = \langle S \cup M, f_2 \rangle$ mit geeigneter Menge M. Nach dem Satz über die relevanten Eigenschaften von f_n ist die angereicherte K-Operation f_2 und damit das System $\mathcal{S}'$ 2-kompakt und gleichbleibend.

Es gilt: $x \notin f(X) \cup \varnothing = f'(X)$. Mit LB cd folgt die Existenz einer (bzgl. des Systems $\mathcal{S}'$) x-saturierten Erweiterung $Y \cup N$ von X. Da $x \in S$, folgt mit dem Satz über x-Saturiertheit, dass Y bezgl. $\mathcal{S}$ x-saturiert ist.

Ebenfalls ist klar, dass $X \subseteq Y = (Y \cup N) \cap S$ ist, da $X \subseteq S$ und $X \subseteq Y \cup N$. Damit ist Y die gesuchte x-saturierte Erweiterung von X. Da x und X beliebig gewählt waren, erlaubt $\mathcal{S}$ Saturierung, da $\mathcal{S}$ beliebig gewählt war, ist die Behauptung gezeigt. Q.E.D.

7.11 Korollar (zu LB $cd \Rightarrow$ LB $\varnothing$)**:** Es gilt der Millersatz LB $bcd \Rightarrow$ LB b.

Beweis. Sei $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ punkttreues deduktives System. Ohne Einschränkung kann – wie bemerkt – angenommen werden, dass $f(\varnothing) = \varnothing$ gilt. Damit ist die angereicherte K-Operation f_2, konstruiert wie oben, mit dem Satz über die relevanten Eigenschaften von f_n zusätzlich punkttreu. Obiger Satz kann nun analog unter Verwendung von LB bcd übernommen werden. Q.E.D.

Bemerkung (Weitere Korollare): Insbesondere aus der Anreicherung zur Schranke $n = 3$ könnten hier analog zu oben zwei weitere Millersätze explizit bewiesen werden; auf dies wird hier verzichtet, da die resultierenden Millersätze triviale Korollare der hier bewiesenen sind, die aus der Verkürzung des Antezedens LB cd auf LB d, beziehungsweise LB bcd auf LB bd, entstehen.[32]

[32] Vgl. hierzu §2, Bemerkungen zum prinzipiellen Vorgehen.

§8 Charakteristische Systeme

In diesem Paragraphen werden *charakteristische Systeme* diskutiert. Ähnlich zu den bekannten charakteristischen Funktionen wird in diesen Systemen auf gewisse Art beschrieben, ob eine endliche Menge im Bild einer vorgegebenen K-Operation liegt.

Zunächst werden charakteristische Systeme allgemein behandelt; daran anschließend werden mithilfe von Spezialfällen weitere Millersätze bewiesen. Insbesondere erweist sich Millers Konstruktion für den Satz LB $a \Rightarrow$ LB $\varnothing$ im Wesentlichen als Spezialfall dieser Konstruktion.

Sei im Folgenden ein deduktives System $S = \langle S, f \rangle$ und eine endliche Teilmenge $M \subseteq_{endl} S$ des Grundraums gegeben.

Bei der Konstruktion des charakteristischen Systems bleibt der Grundraum S unverändert erhalten; dementsprechend muss hier lediglich die charakteristische K-Operation f_M bezüglich der Menge M als induzierte Abbildung konstruiert werden.

8.1 Konstruktion (Charakteristische K-Operation f_M):

(1) *Erzeugende Menge:* $\mathfrak{M} := \{X \subseteq S;\ M \not\subseteq f(X)\} \cup \{S\}$

(2) *Induzierte Abbildung:* $f_M := f_{\mathfrak{M}}$

Die induzierte Abbildung f_M wird *charakteristische K-Operation zu f bezüglich M* und das Tupel $\mathcal{S}_M = \langle S, f_M \rangle$ *charakteristisches System zu $\mathcal{S}$ bezüglich M* genannt; die Menge M auch *charakterisierte Menge.*[33]

8.2 Satz (K-Operation): Die charakteristische K-Operation f_M ist eine K-Operation mit $\mathfrak{Im}(f_M) = \mathfrak{M}$, entsprechend $\mathcal{S}_M$ ein deduktives System. Insbesondere gilt für alle $X \subseteq S$:

$$f_M(X) = \begin{cases} S & \text{falls } M \subseteq f(X) \\ X & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis. Es ist Mehreres zu prüfen:

(1) $\cap$-*Stabilität:* Sei $\varnothing \neq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$ nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{M}$.

Ohne Einschränkung sei $S \notin \mathfrak{X}$. Da $\varnothing \neq \mathfrak{X}$, gibt es ein $X \in \mathfrak{X}$. Da nach Voraussetzung $X \neq S$ ist, gilt $M \not\subseteq f(X)$. Weiter folgt aus $X \in \mathfrak{X}$, dass $\bigcap \mathfrak{X} \subseteq X$ gilt. Mit der Monotonie von f folgt $f(\bigcap \mathfrak{X}) \subseteq f(X)$. Damit ist $M \not\subseteq f(\bigcap \mathfrak{X})$, also $\bigcap \mathfrak{X} \in \mathfrak{M}$.

Damit ist $\mathfrak{M}$ $\cap$-stabil und $\mathfrak{Im}(f) = \mathfrak{M}$.

[33] Induzierte Abbildungen und charakteristische K-Operationen werden ähnlich notiert; da erstere Teilmengen der Potenzmenge und zweitere Teilmengen des Grundraumes als Index haben, sollte dennoch eine Verwechselung im Folgenden ausgeschlossen sein.

(2) *Funktionswerte:* Angegebene Gleichheit ist zu prüfen:

Es gilt $X \subseteq f_M(X) = \bigcap \mathfrak{M}_X$.

Falls $M \not\subseteq f(X)$, dann ist jedenfalls $X \in \mathfrak{M}_X$. Es gilt also $f_M(X) \subseteq X$, und damit $f_M(X) = X$.

Ansonsten ist $M \subseteq f(X)$, also $X \notin \mathfrak{M} \backslash \{S\}$. Weiter gilt für alle $Y \supseteq X$ mit der Monotonie von f ebenfalls $M \subseteq f(Y)$ und wieder $Y \notin \mathfrak{M} \backslash \{S\}$.

Daraus folgt aber $\mathfrak{M}_X = \{S\}$ und damit $f_M(X) = S$.

(3) *Endlichkeit:* Sei $X \subseteq S$ und $x \in f'(X)$ gegeben.

Falls $M \subseteq f(X)$, dann gibt es aufgrund der Endlichkeit von f für jedes $m \in M$ eine endliche Teilmengen $Y_m \subseteq_{endl} X$ mit $m \in f(Y_m)$.

Betrachte $Y := \bigcup_{m \in M} Y_m$. Als endliche Vereinigung endlicher Teilmengen ist $Y \subseteq_{endl} X$. Aufgrund der Monotonie von f gilt für jedes $m \in M$: $m \in f(Y)$. Also ist $M \subseteq f(Y)$ und es gilt $x \in S = f'(Y)$.

Ansonsten ist $M \not\subseteq f(X)$. Damit ist aber $x \in f'(X) = X$. Weiter gilt $x \in \{x\} \subseteq_{endl} X$ und mit der Reflexivität von f' auch schon $x \in f'(x)$ und es wurde erneut eine geeignete endliche Teilmenge gefunden.

Insgesamt wurde die Behauptung gezeigt. Q.E.D.

Bemerkungen:

(1) *Trivialer Sonderfall:* Ist $M = \varnothing$, dann ist offenbar $f_M = \mathrm{Cn}_{\max}$.

(2) *Endlichkeit:* Im obigen Beweis der Endlichkeit wurde nicht (!) vorausgesetzt, dass $M \neq \varnothing$ gilt; in diesem Fall ist $\bigcup_{m \in \varnothing} Y_m$ die leere Vereinigung und damit gleich der leeren Menge.

(3) *Notation:* Ist die Menge M aus dem Kontext ersichtlich, dann wird anstelle von f_M wie gewohnt oft nur f' geschrieben.

(4) *Miller:* Miller selbst verwendet in [ML, §4] bei leicht anderer Schreibweise charakteristische K-Operationen bezüglich 1-elementiger Mengen $M = \{x\}$ zur Etablierung des Millersatzes LB $a \Rightarrow$ LB $\varnothing$.

Seine Notationsweise – er prüft in der Definition der charakteristischen K-Operation f' die Elementschaft $x \in f(X)$ anstelle der Teilmengenbeziehung $\{x\} \subseteq f(X)$ – führt nicht direkt zu der hier vorgestellten Verallgemeinerung auf beliebige endliche Teilmengen.

8.3 Diskussion (Endlichkeit und Eindeutigkeit von M): Im Folgenden werden einige Eigenschaften der charakterisierten Menge M diskutiert:

(1) *Endlichkeit von M:* Die Endlichkeit von M geht in den Beweis der Endlichkeit der charakteristischen K-Operation f_M im Allgemeinen wesentlich ein.

Wäre allgemeiner in obiger Konstruktion die Verwendung unendlicher Teilmengen $M \subseteq S$ erlaubt, dann würden dabei Abbildungen entstehen, die ihrerseits im Allgemeinen nicht mehr endlich wären.

Betrachte dazu: Für die Menge $\mathbb{G} := \{2n;\ n \in \mathbb{N}\}$ aller geraden Zahlen sei die Abbildung ϕ auf $\mathfrak{p}(\mathbb{N})$ zur K-Operation $\mathrm{Id} : \mathfrak{p}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{p}(\mathbb{N})$ wie folgt definiert:

$$\phi : X \mapsto \begin{cases} \mathbb{N} & \text{falls } \mathbb{G} \subseteq \mathrm{Id}(X) \\ X & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $1 \in \mathbb{N} = \phi(\mathbb{G})$. Dennoch gibt es keine endliche Menge $X \subseteq_{endl} \mathbb{G}$ mit $1 \in X = \phi(X)$. Also ist ϕ nicht endlich und keine K-Operation.

(2) *Möglichkeit der Unendlichkeit:* Andererseits folgt aus der Unendlichkeit von M nicht notwendig, dass die resultierende Abbildung keine K-Operation ist.[34] Betrachte dazu die beschränkte K-Operation zur Schranke 2 auf dem Grundraum $\mathbb{N}$:

$$f := \mathrm{Cn}_{\mathbb{N},2} : X \mapsto \begin{cases} X & \text{falls } |X| < 2 \\ \mathbb{N} & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $M = \mathbb{G}$ ist die resultierende Abbildung ψ wie folgt definiert:

$$\psi : X \mapsto \begin{cases} \mathbb{N} & \text{falls } \mathbb{G} \subseteq f(X) \\ X & \text{sonst} \end{cases}$$

Offensichtlich gilt $\mathbb{G} \subseteq f(X)$ genau dann, wenn $f(X) = \mathbb{N}$ ist. Entsprechend ist damit $\psi = f$ und doch eine K-Operation.

(3) *Eindeutigkeit von M:* Im obigen Beispiel wurde schon angedeutet: Aus der resultierenden Abbildung kann man im Allgemeinen die Menge M nicht rekonstruieren. (Nimmt man wie eben $f = \mathrm{Cn}_{\mathbb{N},2}$ als ursprüngliche K-Operation, dann sind für $M = \{1, 2\}$ und $N = \{1, 2, 3\} \neq M$ die resultierenden Abbildungen f_N und f_M gleich.)

Die fehlende Eindeutigkeit von M wird insbesondere bei der Charakterisierung der 2-Kompaktheit Schwierigkeiten bereiten.

Im Folgenden werden wieder die relevanten Eigenschaften von f_M untersucht. Das Gelten der Eigenschaften *2-kompakt* und *gleichbleibend* läßt sich dabei nicht einfach charakterisieren; entsprechend bleiben beide Eigenschaften im folgenden Satz zunächst unerwähnt.

Daran anschließend wird zunächst das Gelten der Eigenschaft *gleichbleibend* diskutiert. Dann wird weiter die (reine) Kompaktheit besprochen, um schließlich Bedingungen anzugeben, die für natürliche Zahlen $l \in \mathbb{N}$ die l-Kompaktheit einer charakteristischen K-Operation beschreiben.

8.4 Satz (Relevante Eigenschaften von f_M): Sei $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$ wie eben gegeben. Dann ist f' extrem. Falls $|S| = 1$ ist, ist f' punkttreu; ist hingegen $|S| > 1$, dann ist f' genau dann punkttreu, wenn $|M| > 1$ ist.

Beweis. Es sind drei Eigenschaften zu prüfen:

(1) *extrem:* Nach Konstruktion banal.

[34] Die Unendlichkeit von M würde im obigen Beweis für die Endlichkeit der induzierten Abbildung dazu führen, dass die Menge $Y = \bigcup_{m \in M} Y_m$ eine unendliche Vereinigung endlicher Mengen wäre; auch diese kann aber immer noch endlich sein.

(2) *punkttreu:* Jede beliebige K-Operation über einem 1-elementigen Grundraum $S = \{s\}$ ist aufgrund der Monotonie punkttreu.

Sei also $|S| > 1$. Wenn auch $|M| > 1$ ist, dann gilt für jedes $x \in S$ schon $M \not\subseteq \{x\}$. Damit ist $f'(x) = \{x\}$ und f' punkttreu.

Ist hingegen $|M| \leq 1$, dann gibt es ein $x \in S$ mit $M \subseteq \{x\}$. Damit ist für dieses x schon $f(x) = S \neq \{x\}$ und f' ist nicht punkttreu. Die letzte Ungleichheit gilt, da nach Voraussetzung $|S| > 1$ ist. Q.E.D.

8.5 Diskussion (Gleichbleibend): Falls $|S| \leq 2$ oder $M = \varnothing$ gilt, dann ist f' trivialerweise gleichbleibend; ansonsten im Allgemeinen weder gleichbleibend noch nicht gleichbleibend.

Wenn $|S| \leq 2$ ist, dann gilt für alle $x, z \in S$ mit $x \neq z$ aufgrund der Monotonie von f', dass $f'(x,z) = S = \{x, z\}$ und f' ist trivial gleichbleibend. Ist weiter $M = \varnothing$, dann ist $f' = \mathrm{Cn}_{\max}$ und wieder trivial gleichbleibend.

Ansonsten betrachte die folgenden Beispiele:

(1) *Ursprüngliche K-Operation:* $f := \mathrm{Cn}_{\mathbb{N},2}$

(2) *Charakterisierte Menge:* $M := \{1, 2, 3\}$

Für alle $x, z \in \mathbb{N}$ mit $x \neq z$ gilt, dass $f(x,z) = \mathbb{N}$. Also ist $M \subseteq f(x,z)$. Damit ist $f'(x,z) = f_M(x,z) = S$ und f' trivial gleichbleibend.

Ferner betrachte:

(1) *Erzeugende Menge:* $\mathfrak{M} := \{\{1, 2\}, \mathbb{N}\}$

(2) *Charakterisierte Menge:* $M := \{0\}$

Es gilt für $f := f_{\mathfrak{M}}$: $f(1,0) = S = f(0,2)$ und $f(1,2) = \{1,2\}$.

Damit gilt für $f' := f_M$: $f'(1,0) = S = f'(0,2)$, da $M \subseteq S$ ist, und weiter $f'(1,2) = \{1,2\} \neq S$, da $M \not\subseteq f(1,2)$ ist. Damit ist f' nicht gleichbleibend.

Etwas allgemeiner läßt sich zeigen: Wenn die Menge

$$\mathfrak{X} = \{X \in \mathfrak{Im}(f);\ \exists Y \subseteq S : (|Y| = 2 \wedge f(Y) = X)\}$$

mindestens 2-elementig ist, dann gibt es ein $x \in S$ so, dass die charakteristische Funktion $f' := f_{\{x\}}$ bezüglich der Menge $\{x\}$ nicht gleichbleibend ist.

Erfüllt nämlich $\mathfrak{X}$ oben genannte Voraussetzungen, dann gibt es $X, Y \in \mathfrak{X}$ mit $X \neq Y$. Ohne Einschränkung gibt es $x \in X \backslash Y$ und $a, b \in S$ mit $a \neq b$ und $x \notin Y = f(a,b)$.

Weiterhin gilt aufgrund der Reflexivität von f auch $x \in f(a,x) \cap f(x,b)$. Damit ist $f'(a,x) = S = f'(x,b)$ und $f'(a,b) = \{a,b\} \neq S$.

Also ist f' nicht gleichbleibend.

Sicher lassen sich die Bedingungen für das Gelten von *gleichbleibend* weiter erkunden; jedenfalls ist aber klar, dass dies lediglich in Sonderfällen der Fall ist. Entsprechend wird für die Belange des Miller'schen Projekts im Folgenden angenommen, dass die charakteristische K-Operation f' nicht gleichbleibend ist.

Im Folgenden wird wie oben angekündigt die Kompaktheit der charakteristischen K-Operationen diskutiert.

8.6 Satz (Kompaktheit von f_M): Sei $\mathcal{S} = \langle S, f\rangle$ wie eben gegeben und $\mathcal{S}' := \langle S, f_M\rangle$ charakteristisches System bezüglich einer endlichen Menge M. Dann ist $\mathcal{S}'$ kompakt.

Beweis. Sei $X \subseteq S$ mit $f'(X) = S$. Zu zeigen ist die Existenz einer endlichen Teilmenge $Y \subseteq_{endl} X$ mit $f'(Y) = S$.

Nach Konstruktion ist klar, dass $X = S$ ist oder $M \subseteq f(X)$ gilt. Damit gilt jedenfalls, dass $M \subseteq f(X)$ ist. Weiter gibt es aufgrund der Endlichkeit von f für jedes $m \in M$ ein endliches $Y_m \subseteq X$ mit $m \in f(Y_m)$. $Y := \bigcup_{m\in M} Y_m \subseteq_{endl} X$ ist als endliche Vereinigung endlicher Mengen endlich. Aufgrund der Monotonie ist jedes $m \in M$ in $f(Y_m) \subseteq f(Y)$. Da also $M \subseteq f(Y)$ ist, gilt $f'(Y) = S$ und Y ist die gesuchte Menge. Q.E.D.

Bemerkung (k-Kompaktheit): Im obigem Beweis wird eine erste Schwierigkeit deutlich, für ein $k \in \mathbb{N}$ die k-Kompaktheit von f' zu charakterisieren: Selbst wenn k-Kompaktheit für f angenommen wird, kann die Größe der einzelnen endlichen Y_m nicht beschränkt werden, da die Existenz der Y_m durch die Endlichkeit garantiert wird. Dieses Problem kann gelöst werden, indem man stärkere Anforderungen an die ursprüngliche K-Operation f stellt.

8.7 Satz (l-Kompaktheit von f_M): Sei $\mathcal{S} = \langle S, f\rangle$ wie eben gegeben und $\mathcal{S}' := \langle S, f_M\rangle$ charakteristisches System bezüglich einer endlichen Menge M. Falls das deduktive System $\mathcal{S}$ extrem und für ein $k \in \mathbb{N}$ auch k-kompakt ist, dann ist das charakteristische System $\mathcal{S}'$ l-kompakt, wobei $l = \max\{k, |M|\}$ ist. Insbesondere ist für $l = 2 = |M|$ das resultierende System 2-kompakt.

Beweis. Sei $X \subseteq S$ mit $f'(X) = S$. Zu zeigen ist die Existenz einer höchstens l-elementigen Teilmenge $Y \subseteq_l X$ mit $f'(Y) = S$.

Wie eben ist klar, dass $M \subseteq f(X)$.

Falls $f(X) = X$ ist, dann ist sofort $M \subseteq X$. Es gilt aufgrund der Reflexivität von f ebenfalls $M \subseteq f(M)$, also $f'(M) = S$. Die Menge M ist zudem höchstens l-elementig.

Andernfalls ist $f(X) \neq X$. Da f extrem ist, ist $f(X) = S$. Da f zusätzlich k-kompakt ist, existiert eine höchstens k-elementige und damit auch höchstens l-elementige Teilmenge $Y \subseteq_l X$ mit $f(Y) = S$. Mit $M \subseteq S = f(Y)$ folgt $f'(Y) = S$.

Jedenfalls wurde geeignete Menge gefunden und f' ist l-kompakt. Q.E.D.

Bemerkung (Notwendige Bedingungen): Es wurden im obigen Satz lediglich hinreichende Bedingungen für die l-Kompaktheit angegeben. Diese sind aber nicht notwendig.

Betrachte dazu etwa die folgende K-Operation auf dem Grundraum $\mathbb{N}$:

$$f : X \mapsto \begin{cases} \{0\} & \text{falls } X \in \{\varnothing, \{0\}\} \\ \mathbb{N} & \text{sonst} \end{cases}$$

Es läßt sich leicht prüfen, dass f eine nichtextreme, 2-kompakte K-Operation ist.

Betrachte nun für $M = \{0,1,2\}$ mit $|M| > 2$ die charakteristische K-Operation f_M. Da $M \subseteq f(X)$ genau dann gilt, wenn $f(X) = \mathbb{N}$ ist, unterscheiden sich f und f_M nur bei $X = \varnothing$. Daraus folgt leicht, dass f_M 2-kompakt ist.

Im obigen Beweis sind die angegebenen Eigenschaften dennoch unverzichtbar, da sie wesentlich in die Argumentation eingegangen sind. Damit ist nicht anzunehmen, dass obiges Ergebnis verbessert werden kann. Da aufgrund der Argumentationsweise beim Beweis von Millersätzen hinreichende Bedingungen genügen, wird an dieser Stelle darauf verzichtet, notwendige Bedingungen zu suchen.

Im nächsten Schritt wird die Saturiertheit in charakteristischen Systemen näher betrachtet.

8.8 Satz (Saturiertheit): Sei $\mathcal{S} = \langle S, f\rangle$ wie eben, eine Teilmenge $X \subseteq S$ von S, eine endliche Teilmenge $M \subseteq_{endl} S$ und ein Element $x \in S$ gegeben. Falls $M \backslash \{x\} \subseteq X$ ist, dann gilt das Folgende:

Die Menge X ist bezüglich $\mathcal{S}$ genau dann x-saturiert, wenn X in Bezug auf das System $\mathcal{S}' := \langle S, f'\rangle$ x-saturiert für $f' = f_{M \cup \{x\}}$.

Beweis. Es sind zwei Richtungen zu zeigen.

„$\Rightarrow$“ Sei X bezüglich $\mathcal{S}$ x-saturiert.

Dann gilt zunächst $x \notin f(X)$ und mit der Reflexivität von f insbesondere $x \notin X$. Damit ist $M \cup \{x\} \not\subseteq X$ und es gilt $x \notin X = f'(X)$.

Sei nun $y \in S\backslash X$ beliebig. Da X in Bezug auf $\mathcal{S}$ x-saturiert ist, gilt $x \in f(X, y)$.

Da $M\backslash\{x\} \subseteq X \subseteq f(X)$ ist, gilt zudem, dass $M \cup \{x\} \subseteq f(X, y)$. Also ist $x \in S = f'(X, y)$ und X ist x-saturiert bezüglich $\mathcal{S}'$.

„$\Leftarrow$“ Sei nun X bezüglich $\mathcal{S}'$ x-saturiert. Dann gilt zunächst $x \notin f'(X)$.

Da f' extrem ist, folgt $X = f'(X) \neq S$. Damit ist $M \cup \{x\} \not\subseteq f(X)$. Aus $M\backslash\{x\} \subseteq X \subseteq f(X)$, folgt sofort $x \notin f(X)$.

Sei $y \in S\backslash X$. Da X bezüglich $\mathcal{S}'$ x-saturiert ist, gilt $x \in f'(X, y)$.

Falls $x = y$, ist trivial $x \in f(X, y)$. Sei also $x \neq y$.

Damit ist aber $X \cup \{y\} \neq f'(X, y)$. Da f' extrem ist, folgt daraus, dass $f'(X, y) = S$. Also ist nach Konstruktion $M \cup \{x\} \subseteq f(X, y)$.

Wieder ist $x \in f(X, y)$ und X ist bezüglich $\mathcal{S}$ schon x-saturiert. Q.E.D.

Die bisherigen Ergebnisse erlauben die Etablierung weiterer Millersätze. Dazu werden charakteristische Systeme bezüglich 2-elementiger Mengen verwendet.

8.9 Satz (LB ab $\Rightarrow$ LB $\varnothing$): Falls jedes deduktive System, das extrem und punkttreu ist, Saturierung erlaubt, dann erlaubt schon jedes deduktive System Saturierung.

Beweis. Sei $\mathcal{S} := \langle S, f\rangle$ beliebiges deduktives System. Zu zeigen ist, dass $\mathcal{S}$ unter Voraussetzung von LB ab Saturierung erlaubt.

Falls $S = \{s\}$ einelementig ist, dann erlaubt $\mathcal{S}$ mit dem Satz über wohlordenbare Systeme (§2) Saturierung. Sei also ohne Einschränkung $|S| > 1$.

Sei nun $X \subseteq S$ und $x \notin f(X)$ gegeben. Zu zeigen ist in Bezug auf $\mathcal{S}$ die Existenz einer x-saturierten Erweiterung Y von X.

Zunächst wird vorausgesetzt, dass die Menge $X \neq \varnothing$ nicht leer ist. $(\star)$

Dann gibt es ein $a \in X$. Aufgrund der Reflexivität von f ist $x \notin X$ und damit $x \neq a$. Es wird das charakteristische System $\mathcal{S}' := \langle S, f_M \rangle$ bezüglich der zweielementigen Menge $M = \{x, a\}$ betrachtet. Damit ist nach dem Satz über die relevanten Eigenschaften $f' = f_M$ extrem und, da $|S| > 1$ und $|M| > 1$ gilt, auch punkttreu.

Aus $x \notin f(X)$ folgt $M \not\subseteq f(X)$. Also ist $x \notin X = f'(X)$.

Aus LB ab folgt bezüglich S' die Existenz einer x-saturierten Erweiterung Y von X. Da die Menge $N := \{a\} \subseteq X$ und $f' = f_{N \cup \{x\}}$ ist, folgt mit dem Satz über Saturierung, dass Y schon bezüglich $\mathcal{S}$ x-saturiert ist.

Bei $(\star)$ wurde vorausgesetzt, dass $X \neq \varnothing$ nicht leer ist. Sei nun $X = \varnothing$.

Falls es ein $a \in S$ gibt, so dass $x \notin f(a)$, dann gibt es, wie schon oben gezeigt, bezüglich $\mathcal{S}$ eine x-saturierte Erweiterung $Y \supseteq \{a\}$ von $\{a\}$. Offensichtlich ist $Y \supseteq \varnothing = X$ auch eine Erweiterung von X.

Gilt hingegen für jedes $a \in S$, dass $x \in f(a)$, dann ist offensichtlich die leere Menge $X = \varnothing$ selbst bezüglich $\mathcal{S}$ schon x-saturiert und es ist nichts mehr zu zeigen.

In jedem Fall wurde eine geeignete x-saturierte Erweiterung Y von X gefunden und die Behauptung gezeigt. Q.E.D.

Das folgende Korollar wurde schon mithilfe des punkttreuen Schnittes bewiesen:

8.10 Korollar (zu LB $ab \Rightarrow$ LB $\varnothing$**):** Es gilt der Millersatz LB $abc \Rightarrow$ LB ac

Beweis. Es wird vorausgesetzt, dass die ursprüngliche K-Operation f extrem und 2-kompakt ist. Mit obigem Satz über l-Kompaktheit ist dann die charakteristische K-Operatiomn f_M, wie oben konstruiert, schon l-kompakt zur Zahl $l = \max\{k, |M|\} = 2$, also 2-kompakt. Weiterhin ist f_M immer noch extrem und punkttreu.

Damit kann anstelle von LB ac der Lindenbaumsatz LB abc als Voraussetzung verwendet werden. Im Übrigen verläuft der Beweis analog. Q.E.D.

Bemerkung (Charakteristische Systeme bei Miller): Miller verwendet in [ML] wie schon erwähnt charakteristische K-Operationen bezüglich 1-elementiger Mengen $M = \{x\}$. Der Satz über die relevanten Eigenschaften zeigt, dass damit f_M bis auf einen trivialen Fall lediglich extrem ist. Entsprechend konnte Miller in [ML] mit dieser Methode nur die Konsequenz LB $a \Rightarrow$ LB $\varnothing$ zeigen.

Damit sind, wie der Satz über die relevanten Eigenschaften und die anschließende Diskussion zeigt, auch alle Millersätze (bis auf triviale Korollare) bewiesen worden, die durch die Anreicherung gezeigt werden können.

II Lindenbaumsätze äquivalent zum BP

Übertragung des Projekts

Wie im ersten Paragraphen angemerkt wurde, entsteht das motivierende Beispiel für deduktive Systeme aus dem Begriff der Ableitbarkeit (Beweisbarkeit) in der klassischen Logik. Der Saturiertheit von Teilmengen des Grundraums entspricht dort die Vollständigkeit widerspruchsfreier Theorien. Der Beweis des klassischen Modellexistenzsatzes, zentraler Bestandteil des Vollständigkeitssatz nach Gödel und Henkin, benötigt wesentlich den *klassischen Satz von Lindenbaum* (k LB):

Klassischer Satz von Lindenbaum (k LB): Jede widerspruchsfreie Aussagenmenge einer formalen Sprache erster Stufe läßt sich zu einer vollständigen, widerspruchsfreien Theorie erweitern.

Zum Beweis von k LB wird zumeist das AC in der einen oder anderen Variante bemüht. Jedoch genügt an dieser Stelle aufgrund der Struktur einer formalen Sprache das etwas schwächere Boole'sche Primidealtheorem (BP):

Boole'sches Primidealtheorem (BP): Jede Boole'sche Algebra besitzt ein Primideal.

Tatsächlich sind k LB und BP sogar äquivalent.[35] Diese Äquivalenz motiviert, das Miller'sche Projekt in Bezug zum BP zu setzen und Varianten des Satzes von Lindenbaum, die lediglich zum BP äquivalent sind, zu betrachten. Da Theorien nicht den Idealen, sondern den zu diesen dualen Filtern entsprechen, ist es einfacher, mit der folgenden zum BP äquivalenten Variante des Ultrafiltertheorems (UT) zu arbeiten:[36]

Ultrafiltertheorem (UT): Ist $U <_{\mathfrak{F}} \mathfrak{B}$ ein echter Filter in einer Boole'schen Algebra $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ und $x \in B \backslash U$ ein Element außerhalb des Filters U, dann gibt es einen Ultrafilter $\mathfrak{U}$ mit $x \notin \mathfrak{U} \supseteq U$.

Ziel: Es wird im Folgenden untersucht, inwieweit sich das Miller'sche Projekt sinnvoll vom AC auf das BP übertragen läßt. Dem entsprechend werden also Varianten des Satzes von Lindenbaum gesucht, die äquivalent zum BP sind. Damit einhergehend werden Klassen von deduktiven Systemen gefunden, in denen diese Varianten gültig sind.

Vorgehen: Zunächst wird der klassische Äquivalenzbeweis von k LB und UT betrachtet; daraus resultiert sofort eine leicht speziellere Variante von k LB. Ergänzend wird anschließend noch eine aussagenlogische Variante von k LB diskutiert. In den darauf folgenden Paragraphen wird geprüft, wieweit man das deduktive System der klassischen Logik verallgemeinern kann, so dass das BP genügt, um die Existenz saturierter Erweiterungen zu zeigen.

[35] Der kanonische Beweis dieser Äquivalenz wird im folgenden Paragraphen skizziert.

[36] Der Beweis der Äquivalenz von UT und BP involviert die Dualität der Begriffe Ideal und Filter, Primideal und Ultrafilter und gelingt durch Betrachtung von geeigneten Faktoralgebren. Auf eine Ausführung des Beweises wird hier verzichtet.

§9 Klassisches System

Aufgrund der Äquivalenz von BP und k LB ist die Betrachtung des klassischen deduktiven Systems der natürliche Ausgangspunkt, um das Miller'sche Projekt vom AC auf das BP zu übertragen.

Entsprechend werden in diesem Paragraphen das *klassische System* und der kanonische Äquivalenzbeweis von UT und k LB kurz skizziert. Den Paragraphen abschließend wird eine erste, neue Variante des Satzes von Lindenbaum äquivalent zum BP vorgestellt.

9.1 Klassisches deduktives System: Das deduktive System der klassischen Logik wird eingeführt:

(1) *Grundraum:* Die Menge $\mathfrak{L}^\star = \{\phi \in \mathfrak{L};\ \mathrm{Fr}(\phi) = \varnothing\}$ aller Aussagen einer formalen Sprache $\mathfrak{L}$ erster Stufe ist der Grundraum des klassischen deduktiven Systems.[37]

(2) *Ableitbarkeit:* Es wird der Begriff der Ableitbarkeit (Beweisbarkeit), gegeben durch einen vollständigen Kalkül, vorausgesetzt. Hierfür sind als Beispiel der Felgner-Kalkül oder der Kalkül des Natürlichen Schließens nach Gentzen in der einen oder anderen Variante zu nennen.[38]

(3) *K-Operation:* Die Abbildung

$$\mathrm{Th} : \mathfrak{p}(\mathfrak{L}^\star) \to \mathfrak{p}(\mathfrak{L}^\star) : \Gamma \mapsto \{\phi \in \mathfrak{L}^\star;\ \Gamma \vdash \phi\}$$

ist eine K-Operation auf dem Grundraum $\mathfrak{L}^\star$.

(4) *Deduktives System:* Das Tupel $\mathcal{S}_c = \langle \mathfrak{L}^\star, \mathrm{Th}\rangle$ wird *klassisches deduktives System zur formalen Sprache* $\mathfrak{L}$ genannt.

Vorbemerkung: Die Formulierung von k LB weicht leicht von den anderen vorgestellten Varianten des Satzes von Lindenbaum ab; kanonisch wäre die Aussage, dass das klassische System Saturierung erlaubt.

Das macht aber keinen Unterschied: im klassischen System $\mathcal{S}_c$ fallen die Begriffe Saturiertheit und Maximalkonsistenz zusammen, desweiteren kann man die Erweiterung Γ einer Theorie T mit $\phi \notin T$ ohne Probleme so wählen, dass weiterhin $\phi \notin \Gamma$ gilt, falls es denn überhaupt maximalkonsistente Erweiterungen gibt.[39]

Der Formulierung vom k LB entsprechend wird im Folgenden lediglich die Existenz eines Ultrafilters über jedem echten Filter benötigt. Dies folgt aber offensichtlich aus der hier vorgestellten Variante des UT.

[37] Nimmt man als Grundraum die gesamte Sprache $\mathfrak{L}$, dann wird der Nachweis, dass der deduktive Abschluss idempotent ist, zumindest problematisch.

[38] Vgl. zum Felgner-Kalkül [FgL,§6 und §12] und zum Kalkül des Natürlichen Schließens etwa [SH1, §6 und §11].

[39] Ist $\phi \notin T$, dann ist $T \cup \{\neg\phi\}$ konsistent. Erweitert man diese Menge, dann ist $\neg\phi$ in der Erweiterung und aufgrund ihrer Konsistenz ϕ selbst nicht enthalten.

9.2 Theorem (UT $\Rightarrow$ k LB): Falls sich jeder echte Filter in einer Boole'schen Algebra zu einem Ultrafilter erweitern läßt, dann besitzt jede widerspruchsfreie Aussagenmenge eine widerspruchsfreie, vollständige Erweiterung.

Bew. (Skizze):

Sei $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}^\star$ widerspruchsfreie Aussagenmenge in einer formalen Sprache $\mathfrak{L}$ erster Stufe. Die Existenz einer widerspruchsfreien, vollständigen Erweiterung wird in mehreren Schritten nachgewiesen:

(1) *Lindenbaum-Algebra:* Die Relation

$$\sim := \{\langle \phi, \psi \rangle \in \mathfrak{L}^\star \times \mathfrak{L}^\star;\ \vdash \phi \leftrightarrow \psi\} \subseteq \mathfrak{L}^\star \times \mathfrak{L}^\star$$

ist eine Äquivalenzrelation. Das Tupel

$$\mathfrak{B} := \langle {}^{\mathfrak{L}^\star}/_{\sim}, \sqcap, \sqcup, -, [\bot], [\top] \rangle$$

ist eine Boole'sche Algebra, falls die Operationen für alle $\phi, \psi \in \mathfrak{L}^\star$ wie folgt definiert sind:

(a) *Schnitt:* $[\phi] \sqcap [\psi] := [\phi \wedge \psi]$

(b) *Vereinigung:* $[\phi] \sqcup [\psi] := [\phi \vee \psi]$

(c) *Komplement:* $-[\phi] := [\neg \phi]$

$\mathfrak{B}$ wird als *Lindenbaum-Algebra* bezeichnet.

Auf $\mathfrak{B}$ läßt sich kanonisch eine Halbordnung definieren:

$$[\phi] \leq [\psi] \quad :\Leftrightarrow \quad \mathrm{Th}(\psi) \subseteq \mathrm{Th}(\phi)$$

Dabei ist die Umkehrung der Inklusion zu beachten: Je größer die resultierende Theorie, umso kleiner die Restklasse; damit ist *das Wahre* ($[\top]$) größtes Element der Lindenbaum-Algebra, *das Falsche* ($[\bot]$) das kleinste.

Sei zudem $\Phi : \mathfrak{L}^\star \to {}^{\mathfrak{L}^\star}/_{\sim} : \phi \mapsto [\phi]$ der kanonische Epimorphismus.

(2) *Existenz eines Ultrafilters:* Γ ist widerspruchsfreie Aussagenmenge, entsprechend $T := \mathrm{Th}(\Gamma)$ eine widerspruchsfreie Theorie. Das Bild $\Phi(T)$ von T unter dem kanonischen Epimorphismus ist ein echter Filter auf $\mathfrak{B}$.

Aus dem UT folgt die Existenz eines Ultrafilters $\Phi(T) \leq_{\mathfrak{F}} \mathfrak{U}$ in der Lindenbaum-Algebra $\mathfrak{B}$.

(3) *Vollständige Erweiterung:* Das Urbild $\Delta := \Phi^{-1}(\mathfrak{U})$ des Ultrafilters ist eine vollständige, widerspruchsfreie Theorie. Zudem gilt nach Konstruktion $\Gamma \subseteq \Delta$.

Q.E.D.

Bemerkung (Alternativer Beweis): Obiger Beweis kann variiert werden, indem man anstelle von $\sim$ die Relation $\sim_\Gamma := \{\langle \phi, \psi \rangle \in \mathfrak{L}^\star \times \mathfrak{L}^\star;\ \Gamma \vdash \phi \leftrightarrow \psi\}$ zur Partitionierung des Grundraums verwendet. Damit betrachtet man im Beweis zwar die kleinere Lindenbaum-Algebra bezüglich Γ; im Wesentlichen ändert sich aber nichts im Beweis.

9.3 Theorem (k LB $\Rightarrow$ UT): Besitzt jede widerspruchsfreie Aussagenmenge eine widerspruchsfreie, vollständige Erweiterung, dann läßt sich auch in jeder Boole'schen Algebra jeder echte Filter zu einem Ultrafilter erweitern.

Bew. (Skizze):

Sei eine Boole'sche Algebra $\mathfrak{B} = \langle B, \sqcap, \sqcup, -, 0, 1\rangle$ und ein beliebiger, echter Filter $\mathcal{F} <_{\mathfrak{F}} \mathfrak{B}$ gegeben. Der Beweis wird in seinen wesentlichen Schritten skizziert:

(1) *Geeignete Sprache:* Es wird eine formale Sprache $\mathfrak{L}$ betrachtet, die genau die folgenden nichtlogischen Zeichen besitzt:

   (a) Für jedes Element $b \in B$ eine Individuen-Konstante $\dot{c}_b$.

   (b) Die beiden 2-stelligen Funktionszeichen $\sqcap$ und $\sqcup$ und das 1-stellige Funktionszeichen $-$.

   (c) Das 1-stellige Prädikatzeichen $\dot{F}$.

   Damit kann in der formalen Sprache $\mathfrak{L}$ über die Elemente der Boole'schen Algebra $\mathfrak{B}$ und einen Filter $\mathcal{F}$ gesprochen werden.

(2) *Repräsentation von $\mathfrak{B}$:* Δ_B enthält genau die folgenden Axiome:

   (a) für alle $a, b \in B$ mit $a \neq b$: $\dot{c}_a \neq \dot{c}_b$

   (b) für alle $a, b \in B$: $\dot{c}_a \sqcap \dot{c}_b = \dot{c}_{a \sqcap b}$

   (c) für alle $a, b \in B$: $\dot{c}_a \sqcup \dot{c}_b = \dot{c}_{a \sqcup b}$

   (d) für alle $a \in B$: $-\dot{c}_a = \dot{c}_{-a}$

(3) *Definition eines Filters:* Δ_F enthält genau die folgenden Axiome:

   (a) $\forall x, y : (\dot{F}(x) \wedge \dot{F}(y) \rightarrow \dot{F}(x \sqcap y))$

   (b) $\forall x, y : (\dot{F}(x) \wedge x \sqcap y = x \rightarrow \dot{F}(y))$

   Das naheliegende Axiom $\Phi_{F1} :\simeq \dot{F}(\dot{c}_1)$ wird hier nicht benötigt, da im Folgenden der konkret gewählte Filter $\mathcal{F}$ betrachtet wird. Die Repräsentation von $\mathcal{F}$ erzwingt die Gültigkeit von Φ_{F1}.

(4) *Repräsentation des Filters $\mathcal{F}$:* $\Delta := \{\dot{F}(\dot{c}_a);\ a \in \mathcal{F} \subseteq B\}$.

(5) *Widerspruchsfreiheit:* Die Aussagenmenge $\Gamma := \Delta_B \cup \Delta_F \cup \Delta \subseteq \mathfrak{L}$ ist erfüllbar, da die Struktur $\mathfrak{B}$ zusammen mit dem Filter $\mathcal{F}$ ein Modell von Γ ist. Also ist Γ widerspruchsfrei.

(6) *Anwendung* k LB*:* k LB gewährleistet die Existenz einer widerspruchsfreien, vollständigen Theorie T mit $\Gamma \subseteq T$.

(7) *Existenz des Ultrafilters:* Die Menge $\mathfrak{U} := \{b \in B;\ \dot{F}(\dot{c}_b) \in T\} \subseteq B$ ist ein Ultrafilter mit $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{U}$.

Insgesamt wurde das UT gezeigt. Q.E.D.

An dieser Stelle läßt sich sofort eine neue Variante des Satzes von Lindenbaum finden, die äquivalent zum UT ist.

Spezieller klassischer Satz von Lindenbaum (sk LB): Ist $\mathfrak{L}$ eine formale Sprache erster Stufe, in der neben (mindestens 2) Konstantenzeichen genau ein 1-stelliges Relationszeichen, sowie zwei 2-stellige und ein 1-stelliges Funktionszeichen als nichtlogisches Zeichen vorkommen, dann läßt sich jede widerspruchsfreie Aussagenmenge in $\mathfrak{L}^*$ zu einer vollständigen, widerspruchsfreien Theorie erweitern.

9.4 Korollar (zu k LB $\Leftrightarrow$ UT): Es gilt sk LB $\Leftrightarrow$ UT.

Beweis. Im obigen Beweis wurde die Existenz von Ultrafiltern lediglich mithilfe von Sprachen nachgewiesen, die den Anforderungen von sk LB genügen. Dementsprechend kann im obigen Beweis sk LB anstelle von k LB verwendet werden.

Damit folgt aus sk LB schon UT, daraus wiederum k LB und als Spezialisierung folgt daraus schließlich wieder sk LB und die Äquivalenz ist gezeigt. Q.E.D.

Bemerkung (sk LB): Im Beweis k LB $\Rightarrow$ UT wurde eine (recht) reichhaltige Sprache mit Funktionszeichen für Schnitt, Vereinigung und Komplement gewählt, um die Boole'sche Algebra zu repräsentieren; diese Zeichen haben direkt die Formulierung des sk LB vorgegeben. Es ist möglich, die Zahl der nichtlogischen Zeichen zu reduzieren. Damit würde man eine scheinbar noch speziellere Variante des Satzes von Lindenbaum finden.

Wesentlich werden im obigen Beweis aber die folgenden nichtlogischen Zeichen benötigt: das 1-stellige Funktionszeichen $\dot{F}$ und die Individuenkonstanten $\dot{c}_b$ für jedes Element $b \in B$ der Boole'schen Algebra. Dies kann auch in anderen speziellen Varianten von k LB nicht vermieden werden, insofern sie von der gleichen Art sind, wie die hier vorgestellte Variante sk LB.

Die Frage, wie man Boole'sche Algebren am Besten beschreiben kann, erinnert an die Diskussion Millers, in der er erwähnt, dass Dzik-Systeme möglicherweise durch eine andere Menge relevanter Eigenschaften geeigneter charakterisiert werden können.[40] Hier wie dort ändert sich nichts an seiner grundlegenden Idee: Man formuliert eine spezielle Variante des Satzes von Lindenbaum, die an die tatsächlichen Verhältnisse im Äquivalenzbeweis angepaßt ist.

Im folgenden Paragraphen wird eine leicht andere Variante des Satzes von Lindenbaum vorgestellt, in der tatsächlich die Boole'sche Algebra samt Filter auf eine andere Art wie hier repräsentiert und nicht nur die Beschreibung der Algebra optimiert wird.

[40]Vgl. hierzu auch die Bemerkungen zur Kontingenz der relevanten Eigenschaften in §2.

§10 Exkurs: Aussagenlogik

In diesem Paragraphen soll angedeutet werden, dass es auch andersartige deduktive Systeme geben kann, die dennoch zum BP äquivalent sind. Es wird dazu ein Lindenbaumsatz äquivalent zum BP für ein aussagenlogisches System formuliert.

Anpassung der Aussagenlogik: Damit der Äquivalenzbeweis zum BP gelingen kann, müssen die Möglichkeiten der klassischen Aussagenlogik – dort ist nämlich die Sprache abzählbar und die erforderliche Variante des Satzes von Lindenbaum ohne BP beweisbar – erweitert werden. Anstelle der Klausel für abzählbar vielen Aussagevariablen A_n ($n \in \mathbb{N}$) im Alphabet soll gelten:

(1) Für eine beliebige, nichtleere Indexmenge $M \neq \varnothing$ ist für jedes $m \in M$ das Symbol A_m eine Aussagevariable.

Es wird angenommen, dass die Sprache über der vollständigen Junktorenmenge $\{\rightarrow, \bot\}$ aufgebaut wird; die anderen Junktoren in $\{\bot, \top, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\}$ werden als (die bekannten) Abkürzungen verstanden. Die weiteren Definitionen der Aussagenlogik werden analog den neuen Verhältnissen angepaßt. Die resultierende Sprache wird im Folgenden mit $\mathfrak{L}_M$ bezeichnet.

Der deduktive Abschluss $\mathrm{Cn}_{AL}(\Gamma) = \{\phi \in \mathfrak{L}_M;\ \Gamma \vdash \phi\}$ ist eine K-Operation; das Tupel $\mathcal{S}_{AL} = \langle \mathfrak{L}_M, \mathrm{Cn}_{AL} \rangle$ wird als *aussagenlogisches System* bezeichnet.

Die meisten Sätze der klassischen Aussagenlogik lassen sich unbesehen übernehmen. Insbesondere die Existenz maximalkonsistenter Erweiterungen kann hier aber ohne weitere Voraussetzung nicht mehr bewiesen werden, da sich im Allgemeinen die Sprache $\mathfrak{L}_M$ nicht mehr wohlordnen läßt.

Diese Wohlordenbarkeit der Sprache ist zusammen mit der Abzählbarkeit der Aussagevariablen verlorengegangen. Konsequenz davon ist, dass – wie im Folgenden skizziert wird – zumindest das BP zum Beweis des folgenden Satzes benötigt wird:

Aussagenlogischer Satz von Lindenbaum ($\mathrm{LB_{AL}}$): Jede widerspruchsfreie Aussagenmenge läßt sich zu einer maximalkonsistenten erweitern.

Bemerkung (UT $\Rightarrow$ $\mathrm{LB_{AL}}$): Der Beweis, dass aus BP schon $\mathrm{LB_{AL}}$ folgt, erfolgt in voller Analogie zum klassischen Fall vermöge UT: es wird eine Lindenbaumalgebra konstruiert, in der Theorien und maximalkonsistente Theorien mit Filtern und Ultrafiltern in Bezug gesetzt werden. Es wird darauf verzichtet, dies hier auszuführen.

Die Umkehrung obiger Aussage kann nur gelingen, falls eine beliebige Boole'sche Algebra $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ und ein beliebiger echter Filter $\mathcal{F} <_{\mathfrak{F}} \mathfrak{B}$ in einem aussagenlogischen System zur einer geeigneten Sprache $\mathfrak{L}_M$ repräsentiert wird. Sei dazu eine Boole'sche Algebra $\mathfrak{B}$ und ein echter Filter $\mathcal{F}$ gegeben.

Repräsentation (Boole'sche Algebra):

(1) *Geeignete Sprache:* Es wird die aussagenlogische Sprache $\mathfrak{L}_B$ betrachtet.

(2) *Repräsentation der Boole'schen Algebra:* Genau die folgenden Axiome seien in der Menge Δ_B enthalten:

(a) Für $0, 1 \in B$: $A_1 \leftrightarrow \top$ und $A_0 \leftrightarrow \bot$.

(b) Für alle $a, b \in B$: $A_{a \sqcap b} \leftrightarrow A_a \wedge A_b$ und $A_{a \sqcup b} \leftrightarrow A_a \vee A_b$

(c) Für alle $a, b \in B$ mit $b = -a$: $A_b \leftrightarrow \neg A_a$.

(3) *Repräsentation des Filters:* Genau die folgenden Axiome seien in der Menge Δ_F enthalten:

(a) Für jedes $a \in \mathcal{F}$ das Axiom A_a.

Bemerkung: Anstatt – wie im klassischen Fall – den Filter durch Eigenschaften eines 1-stelligen Prädikates zu axiomatisieren, muss hier direkter vorgegangen und der Filter direkt durch den boole'schen Aufbau der Sprache repräsentiert werden.

10.1 Satz ($\text{LB}_{\text{AL}} \Rightarrow \text{UT}$)**:** Aus dem aussagenlogischen Lindenbaumsatz folgt das Ultrafiltertheorem.

Bew. (*Skizze*)*:* Seien eine beliebige Boole'sche Algebra $\mathcal{B} = \langle B, \ldots \rangle$ und ein beliebiger echter Filter $F <_{\mathfrak{F}} \mathfrak{B}$ gegeben und wie oben in der Sprache $\mathfrak{L}_B$ repräsentiert.

Zu zeigen ist die Existenz eines geeigneten Ultrafilters $\mathfrak{U} \supseteq F$.

(1) *Repräsentation des Filters:* Es sei $T := \text{Cn}_{AL}(\Delta_B, \Delta_F)$. Damit ist T eine Theorie mit

$$A_a \in T \quad \Leftrightarrow \quad a \in F$$

(2) *Anwendung von* LB_{AL}*:* Nach dem Nachweis, dass T widerspruchsfrei ist, folgt mit LB_{AL} die Existenz einer maximalkonsistenten Erweiterung Γ von T.

(3) *Repräsentation der Theorie:* Die Menge $\mathfrak{U} := \{a \in B;\ A_a \in \Gamma\}$ ist ein Ultrafilter, der F erweitert.

Insgesamt wurde die Behauptung gezeigt. Q.E.D.

Bemerkung (Eingliederung in den klassischen Fall): Insofern 0-stellige Prädikatszeichen in einer formalen Sprache erster Stufe zugelassen sind, kann die aussagenlogische Variante LB_{AL} des Satzes von Lindenbaum als Spezialfall des k LB aufgefaßt werden.

Es fällt aber in diesem Fall dennoch schwer, zu entscheiden, ob LB_{AL} oder sk LB spezieller ist. Entsprechend wurden hier im Gegensatz zum eigentlichen Miller'schen Projekt zumindest zwei Varianten des Satzes von Lindenbaum gefunden, die nebeneinander stehen.

Bemerkung (Vorgehen): Das Vorgehen hier steht bisher in Analogie zum Vorgehen im Miller'schen Projekt: In [ML] betrachtet Miller den Beweis für LB $\varnothing \Rightarrow$ AC und gewinnt eine scheinbar schwächere Variante des Satzes von Lindenbaum, indem er die Aussage des Satzes auf die zum Beweis benötigten deduktiven Systeme einschränkt. Auf dieselbe Art wurden hier sogar zwei spezielle Varianten gefunden.

Im Folgenden wird umgekehrt vorgegangen. Es wird eine möglichst allgemeine Variante von k LB gesucht, so dass dennoch das UT zum Beweis dieses Satzes verwendet werden kann.

Das hat zur Folge, dass im Wesentlichen die relevanten Eigenschaften eines deduktiven Systems identifiziert werden müssen, die die Konstruktion einer Boole'schen Algebra und die Übertragung des Beweises zulassen. Dies wird in den nächsten beiden Paragraphen schrittweise durchgeführt.

§11 Konstruktion einer Boole'schen Algebra

In diesem Paragraphen wird wie angekündigt versucht, schrittweise aus einem beliebigen deduktiven System eine Boole'sche Algebra zu konstruieren. Im Verlauf dieser Konstruktion werden Einschränkungen an das System notwendig; diese Einschränkungen entsprechen den relevanten Eigenschaften, die Systeme äquivalent zum BP haben müssen.

Dieses Vorgehen – beliebige Systeme immer weiter einzuschränken – führt recht natürlich zu den gesuchten relevanten Eigenschaften. Zudem verdeutlicht es diejenigen Stellen, an denen diese Eigenschaften wesentlich in den Beweis eingehen und zeigt dort deren Relevanz.

Sei also im Folgenden ein beliebiges (!) deduktives System $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ gegeben.

In einem ersten Schritt wird ein geeignetes Universum für die Boole'sche Algebra konstruiert; dies geschieht – wie schon im klassischen Fall – mithilfe einer geeigneten Partitionierung des Grundraums S.

11.1 DEF (Logische Äquivalenz):

(1) Die *logische Äquivalenz* $\sim \subseteq S \times S$ ist wie folgt für alle Elemente $x, y \in S$ definiert:

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad y \in f(x) \text{ und } x \in f(y)$$

(2) Sei $A \subseteq S$ beliebige Teilmenge des Grundraums. Die *logische Äquivalenz* $\sim_A \subseteq S \times S$ *bezüglich der Menge* A ist wie folgt für alle Elemente $x, y \in S$ definiert:

$$x \sim_A y \quad :\Leftrightarrow \quad y \in f(A, x) \text{ und } x \in f(A, y)$$

Bemerkungen (Logische Äquivalenz):

(1) *Bezeichnung:* Die Bezeichnung als logische Äquivalenz ist der Tatsache geschuldet, dass die Relationen Verallgemeinerungen dieser Begrifflichkeit aus dem klassischen System sind. Die Bezeichnung als Äquivalenz wird im folgenden Satz gerechtfertigt.

(2) *Konservativität:* Die logische Äquivalenz ist der Spezialfall der logischen Äquivalenz bezüglich der Menge $A := \varnothing \subseteq S$. (Offenbar gilt für alle $x \in S$: $f(x) = f(\varnothing, x)$.)

11.2 Satz (Logische Äquivalenz): Zwei Elemente $x, y \in S$ sind bezüglich einer Menge $A \subseteq S$ genau dann logisch äquivalent, wenn das Folgende gilt:

$$f(A, x) = f(A, x, y) = f(A, y)$$

Insbesondere ist damit die logische Äquivalenz eine Äquivalenzrelation.

Beweis.

„$\Leftarrow$" Aufgrund der Reflexivität von f folgt sofort $x \sim_A y$.

„⇒“ Sei $x \sim_A y$. Es gilt zunächst $y \in f(A, x) = \bigcap \mathfrak{Im}(f)_{A,x}$.
Damit gilt für jedes $Z \in \mathfrak{Im}(f)_{A,x}$, dass $y \in Z$.
Daraus folgt aber $\mathfrak{Im}(f)_{A,x} \subseteq \mathfrak{Im}(f)_{A,x,y}$.
Umgekehrt gilt trivial, dass $\mathfrak{Im}(f)_{A,x,y} \subseteq \mathfrak{Im}(f)_{A,x}$.
Damit ist $f(A, x) = f(A, x, y)$. Analog gilt $f(A, x, y) = f(A, y)$.

Aus obiger Charakterisierung der logischen Äquivalenz folgt, dass diese eine Äquivalenzrelation ist, da die Gleichheit schon eine ist. Q.E.D.

Mithilfe der logischen Äquivalenz läßt sich der Grundraum partitionieren und eine partielle Ordnung auf der resultierenden Menge konstruieren.

Es wird hierbei – wie schon im klassischen Beweis – zur besseren Anschaulichkeit $A = \varnothing$ vorausgesetzt.

11.3 Konstruktion (Restklassenraum):

(1) *Restklasse:* $[x] := \{y \in S;\ x \sim y\}$ heißt *Restklasse* von x. x selbst wird der *Repräsentant* der Restklasse $[x]$ genannt.

(Ist $A \neq \varnothing$ wird $[x]_A$ geschrieben.)

(2) *Restklassenraum:* $B := \{[x];\ x \in S\}$ ist die Menge aller Restklassen bezüglich der logischen Äquivalenz.

(3) *Partielle Ordnung:* $[x] \leq [y] \quad :\Leftrightarrow \quad f(y) \subseteq f(x)$

Bemerkungen:

(1) *Halbordnung:* $\leq$ ist jedenfalls reflexiv und transitiv. Auf B ist $\leq$ nach Konstruktion zudem antisymmetrisch. Entsprechend ist $\mathfrak{B} = \langle B, \leq \rangle$ eine partielle Ordnung.

(Auf S hingegen ist $\leq$ im Allgemeinen nur asymmetrisch. Entsprechend ist hier – wie auch schon in der klassischen Logik – der Übergang zu Restklassen notwendig.)

(2) *Umkehrung der Inklusion:* Zu beachten ist die Umkehrung der Inklusion bei der Definition der partiellen Ordnung. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass *das Wahre* in der resultierenden Boole'schen Algebra das größte Element sein soll. Je kleiner die Menge aller Konsequenzen eines Elementes ist, umso näher ist ein Element an der Allgemeingültigkeit und umso größer ist es.

Im Folgenden muss, um eine Boole'sche Algebra zu gewinnen, die partielle Ordnung schrittweise mit einer geeigneten Struktur versehen werden: Zunächst wird die Existenz eines größten und eines kleinsten Elementes – also von 1 und 0 – diskutiert; anschließend die Existenz von Infimum und Supremum je zweier Elemente, mithilfe derer Schnitt und Vereinigung definiert werden kann. Daraus resultiert ein Verband mit 0 und 1. Um tatsächlich zu einer Boole'schen Algebra zu gelangen, werden weiter die Distributivität und die Existenz einer Negation benötigt.

11.4 Diskussion (Größtes und kleinstes Element): Die Bildmenge $\mathfrak{Im}(f)$ besitzt das kleinste Element $f(\varnothing) = \bigcap \mathfrak{Im}(f)_\varnothing = \bigcap \mathfrak{Im}(f)$ und außerdem das größte Element $S = f(S)$. Haben zwei Elemente $x, y \in S$ diese beiden Mengen als Bild, dann sind ihre Restklassen offenbar größtes und kleinstes Element[41] von B bezüglich $\leq$. Dies ist im Allgemeinen nicht gegeben; betrachte dazu ein punkttreues System auf hinreichend großem Grundraum.

Dies motiviert zu folgenden Definitionen:

(1) *tautologisch:* Ein Element $x \in S$ heißt *tautologisch* oder *Tautologie*, falls $f(x) = f(\varnothing)$.

(2) *kontradiktorisch:* Ein Element $x \in S$ heißt *kontradiktorisch* oder *Kontradiktion*, falls $f(x) = f(S) = S$.

(3) *punktextrem:* Eine K-Operation f heißt *punktextrem*, falls es sowohl eine Tautologie $x \in S$ als auch eine Kontradiktion $y \in S$ gibt.

Ist die K-Operation f also punktextrem, dann hat offenbar $\mathfrak{B}$ ein größtes Element (Menge der Tautologien) und ein kleinstes Element (Menge der Kontradiktionen).

Die Umkehrung gilt nicht:

Die Menge $\mathfrak{M} := \{\{0, n\};\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{N}\}$ induziert eine K-Operation $g := f_\mathfrak{M}$ auf den Grundraum $\mathbb{N}$. Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $g(0) = \{0\} \subseteq \{0, n\} = g(n)$. Also ist das Element $[0] \in B$ zwar größtes Element bezüglich $\leq$, aber offenbar nicht tautologisch. Entsprechend ist g nicht punktextrem.

Aus der Existenz eines kleinsten Elementes $[x] \in B$ folgt jedoch, dass der Repräsentant $x \in S$ kontradiktorisch ist: Es gilt dann nämlich für alle $y \in S$, dass $y \in f(y) \subseteq f(x)$. Also gilt schon $f(x) = S$ und x ist eine Kontradiktion.

Jedenfalls läßt sich die Eigenschaft punktextrem echt verallgemeinern:

(1) *pseudotautologisch:* Ein Element $x \in S$ heißt *pseudotautologisch* oder *Pseudotautologie*, falls für alle $y \in S$ gilt: $f(x) \subseteq f(y)$.

(2) *pseudopunktextrem:* Eine K-Operation f heißt *pseudopunktextrem*, falls es eine Pseudotautologie $x \in S$ und eine Kontradiktion $y \in S$ gibt.

Mit obigen Überlegungen ist hier klar, dass f genau dann pseudopunktextrem ist, wenn in $\mathfrak{B}$ ein kleinstes und ein größtes Element existieren.

[41] Aufgrund der Umkehrung der Inklusion bei der Defiition der partiellen Ordnung in genau dieser Reihenfolge!

11.5 Konstruktion (Ausgezeichnete Elemente): Sei die K-Operation f pseudopunktextrem. Bezeichne dann:

(1) *Größtes Element:* $1 := \{x \in S;\ x \text{ ist Pseudotautologie}\}$

(2) *Kleinstes Element:* $0 := \{x \in S;\ x \text{ ist Kontradiktion}\}$

$0, 1 \in B$ sind bei pseudopunktextremen K-Operationen f wohldefiniert.

11.6 Diskussion (Infimum): Damit $\mathfrak{B}$ ein Verband ist, muss zu je zwei Elementen $a, b \in B$ das Infimum $c = \inf(a, b) \in B$ existieren. Damit läßt sich dann auch ein Schnitt auf $\mathfrak{B}$ definieren.

Zu je zwei Elementen $x, y \in S$ im Grundraum gibt es eine kleinste Bildmenge $X \in \mathfrak{Im}(f)$, die sowohl über $f(x)$ als auch über $f(y)$ liegt, nämlich $X = f(x, y)$.

Wieder ist die Existenz eines Elementes $z \in S$ mit $f(z) = f(x, y)$ im Allgemeinen nicht gegeben. (Zum Nachweis genügt dasselbe punkttreue Beispiel wie in obiger Diskussion.)

Dies motiviert zur folgenden Definition:

(1) *Konjunktion:* Ein Element $z \in S$ heißt *Konjunktion* von zwei Elementen $x, y \in S$, falls $f(z) = f(x, y)$.

(2) *Erlaubt Konjunktion:* Eine K-Operation f *erlaubt Konjunktion*, falls zu je zwei Elementen $x, y \in S$ eine Konjunktion $z \in S$ existiert.

Erlaubt eine K-Operation f Konjunktion, dann existiert zu je zwei Elementen $[x], [y] \in B$ das Infimum $[z] = \inf([x], [y]) \in B$.

Die Umkehrung gilt jedoch nicht:

Die Menge $\mathfrak{M} := \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \mathbb{N}\}$ induziert eine K-Operation $g := f_{\mathfrak{M}}$ auf den Grundraum $\mathbb{N}$. Es gilt, $g(2) = \{0, 1, 2\} \neq g(0, 1)$. Dennoch ist $[2] = \inf([0], [1])$.

Dies erlaubt wieder, die Definitionen zu verallgemeinern:

(1) *Allgemeine Konjunktion:* Ein Element $z \in S$ heißt *allgemeine Konjunktion* von zwei Elementen $x, y \in S$, falls $f(x, y) \subseteq f(z)$ und für alle $z' \in S$ gilt, dass aus $f(x, y) \subseteq f(z')$ schon $f(z) \subseteq f(z')$ folgt.

(2) *Erlaubt allgemeine Konjunktion:* Eine K-Operation f *erlaubt allgemeine Konjunktion*, falls zu je zwei Elementen $x, y \in S$ eine allgemeine Konjunktion $z \in S$ existiert.

Falls z eine allgemeine Konjunktion von x und y ist, dann ist der Repräsentant $[z] = \inf([x], [y])$ schon das Infimum von $[x]$ und $[y]$; umgekehrt ist schon jeder Repräsentant z eines Infimums $[z] = \inf([x], [y])$ nach Konstruktion (zumindest) eine allgemeine Konjunktion der Repräsentanten x und y.

(In einen ausführlichen Nachweis letzterer Behauptung geht wesentlich die Aussage des Satzes über die logische Äquivalenz ein: Für je zwei Repräsentanten $x, x' \in [x]$ einer Restklasse $[x]$ gilt $f(x) = f(x')$.)

11.7 Konstruktion (Schnitt): Falls f (zumindest) allgemeine Konjunktion erlaubt, wird der Schnitt in $\mathfrak{B}$ wie folgt definiert:

$$[x] \sqcap [y] := \inf([x],[y]) = \{z \in S;\ z \text{ ist allgemeine Konjunktion von } x \text{ und } y\}$$

Letztere Gleichheit gilt, da nach Voraussetzung allgemeine Konjunktionen $z \in S$ existieren und diese nach Konstruktion unter f dasselbe Bild haben, also in einer Äquivalenzklasse liegen.[42]

11.8 Diskussion (Supremum): Damit $\mathfrak{B}$ zum Verband wird, ist ebenfalls die Existenz des Supremums $\sup(a,b) \in B$ von je zwei Elementen $a, b \in B$ notwendig. Damit kann wie im dualen Fall des Infimums auch die Vereinigung zweier Elemente definiert werden.

Sind zwei Elemente $x, y \in S$ gegeben, dann existiert aufgrund der $\cap$-Stabilität von der Bildmenge $\mathfrak{Im}(f)$ eine maximale Menge $X = f(x) \cap f(y)$ unterhalb $f(x)$ und $f(y)$. Erneut ist die Existenz eines Elementes $z \in S$ im Allgemeinen nicht gegeben, so dass $f(z) = f(x) \cap f(y)$ gilt. (Wieder genügt ein hinreichend großes punkttreues System.)

Analog zu eben wird definiert:

(1) *Disjunktion:* Ein Element $z \in S$ heißt *Disjunktion* von zwei Elementen $x, y \in S$, falls $f(z) = f(x) \cap f(y)$.

(2) *Erlaubt Disjunktion:* Eine K-Operation f *erlaubt Disjunktion*, falls zu je zwei Elementen $x, y \in S$ eine Disjunktion $z \in S$ existiert.

Falls die K-Operation f Disjunktion erlaubt, dann gibt es zu allen $x, y \in S$ ein $z \in S$, so dass $[z] = \sup([x],[y])$ das Supremum von $[x]$ und $[y]$ ist.

Hier gilt sogar die Umkehrung:

Sei $z \in S$ derart, dass $[z] = \sup([x],[y])$.

Damit ist $[z] \geq [x],[y]$, also $f(z) \subseteq f(x), f(y)$ und damit $f(z) \subseteq f(x) \cap f(y)$.

Gilt hier keine Gleichheit, dann gibt es $z' \in (f(x) \cap f(y)) \backslash f(z)$. Jedenfalls ist $z' \notin f(z)$, also gilt insbesondere $z' \in f(z') \not\subseteq f(z)$, also $[z'] \not\geq [z]$.

Da weiter $z' \in f(x) \cap f(y) \subseteq f(x)$ ist, folgt mit Monotonie und Idempotenz von f, dass $f(z') \subseteq f(f(x)) = f(x)$ gilt; analog auch $f(z') \subseteq f(y)$. Damit $[z'] \geq [x],[y]$.

Daraus folgt $[z'] \geq \sup([x],[y]) = [z]$. Das ist ein WIDERSPRUCH zu $[z'] \not\geq [z]$.

Es gilt also $f(z) = f(x) \cap f(y)$ und z ist eine Disjunktion von x und y.

Weiter läßt sich festhalten: die Disjunktion läßt sich (im Gegensatz zur Konjunktion) nicht weiter verallgemeinern. $\mathfrak{B}$ besitzt also genau dann ein Supremum zu je zwei Elementen, wenn f Disjunktion erlaubt.

[42] Wieder wird der Satz über die logische Äquivalenz verwendet.

11.9 Konstruktion (Vereinigung): Erlaubt f Disjunktion, dann wird die Vereinigung in $\mathfrak{B}$ wie folgt definiert:

$$[x] \sqcup [y] := \sup([x],[y]) = \{z \in S;\ z \text{ ist Disjunktion von } x \text{ und } y\}$$

Letztere Gleichheit gilt (wie auch schon bei der Vereinigung), da nach Voraussetzung eine Disjunktion existiert und alle Disjunktionen in derselben Restklasse liegen.

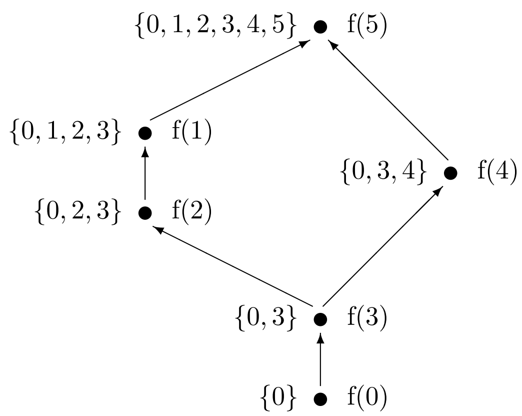
Zwischenbemerkung: Es wurden relevante Eigenschaften dafür gefunden, dass $\mathfrak{B}$ ein Verband mit 0 und 1 ist. Es wurden zum Teil spezielle Eigenschaften gefunden, die die Verhältnisse aus der klassischen Logik widerspiegeln, zum Teil konnten diese soweit verallgemeinert werden, dass auch deduktive Systeme, die echt allgemeiner als das klassische System sind, diese erfüllen können.

Weitere Eigenschaften werden benötigt, damit aus $\mathfrak{B}$ tatsächlich eine Boole'sche Algebra wird: die oben definierten Verknüpfungen Schnitt und Vereinigung müssen distributiv sein und zu jedem Element muss das Komplement existieren.

Bisher wurden die Eigenschaften eines Verbandes unabhängig voneinander rein auf Grundlage der logischen Äquivalenz diskutiert. Dies ist im Folgenden nicht mehr möglich: Zur Diskussion von Distributivität wird Schnitt und Vereinigung und der Negation zudem 0 und 1 benötigt.

11.10 Diskussion (Distributivität): $\mathfrak{B}$ ist im Allgemeinen nicht distributiv, selbst wenn man die stärkeren der bisher erarbeiteten relevanten Eigenschaften voraussetzt. Dazu genügt das folgende Beispiel:[43]

Die Menge $\mathfrak{M} :=$



induziert auf $S = \{0,1,2,3,4,5\}$ eine K-Operation $f := f_{\mathfrak{M}}$. f ist punktextrem, erlaubt Konjunktion und Disjunktion. Damit induziert f – wie bisher diskutiert – einen Verband $\mathfrak{B}$ mit 0 und 1.[44]

[43]Die Erkenntnis, wie Verbände aussehen, die nicht distributiv sind, verdanke ich einer Übungsaufgabe aus der Vorlesung Mathematische Logik II bei Herrn Schroeder-Heister.

[44]Aufgrund der Umkehrung der Inklusion bei der Definition der partiellen Ordnung auf $\mathfrak{B}$ steht der resultierende Verband kopfüber zum obigem Schaubild.

Der induzierte Verband ist aber nicht distributiv. Es gilt nämlich:

(1) $([2] \sqcap [4]) \sqcup [1] = [5] \sqcup [1] = [1]$

(2) $([2] \sqcup [1]) \sqcap ([4] \sqcap [1]) = [2] \sqcap [3] = [2] \neq [1]$

Analog gilt auch das andere Distributivgesetz nicht. Dies motiviert zu folgender Definition für K-Operationen f, die allgemeine Konjunktion und Disjunktion erlauben:

(1) *Erlaubt Distributivität:* *f erlaubt Distributivität*, falls im resultierenden Verband beide Distributivgesetze gelten.

11.11 Diskussion (Komplement): Als letzte Eigenschaft zur Konstruktion einer Boole'schen Algebra wird ein Komplement benötigt. Das Komplement $-a$ eines Elementes $a \in B$ ist dadurch bestimmt, dass der Schnitt von a und $-a$ das kleinste Element und die Vereinigung das größte des Verbandes ist.

Das korrespondiert mit der klassischen Charakterisierung der Negation: die Konjunktion von Formel und Negation ist kontradiktorisch und deren Disjunktion tautologisch.

Erneut gibt es Gegenbeispiele. In der intuitionistischen Logik gilt für kontingente Formeln $\phi \in \mathfrak{L}$: $\nvdash_i \phi \vee \neg\phi$. Also ist im Allgemeinen $\phi \vee \neg\phi$ keine Tautologie.[45] Dies hat zur Folge, dass der durch die intuitionistische Logik induzierte Verband zwar 0 und 1 besitzt und distributiv ist, aber kein Komplement hat.[46]

Dies motiviert zur folgenden Definition für K-Operationen f, die allgemeine Konjunktion und Disjunktion erlauben und zudem pseudopunktextrem sind. Bezeichne dabei mit $\top$ eine Pseudotautologie und mit $\perp$ eine Kontradiktion von f:

(1) *Negation:* Ein Element $y \in S$ heißt *Negation* von einem Element $x \in S$, falls $\top$ eine Disjunktion von x und y ist und falls $\perp$ eine allgemeine Konjunktion von x und y ist.

(2) *Erlaubt Negation:* Eine K-Operation f *erlaubt Negation*, falls zu jedem Element $x \in S$ eine Negation $y \in S$ existiert.

Damit wird das Komplement in $\mathfrak{B}$ wie folgt konstruiert:

11.12 Konstruktion (Komplement): Erlaubt f Negation, dann wird das Komplement für $\mathfrak{B}$ wie folgt definiert:

$$-[x] := \{y \in S;\ y \text{ ist Negation von } x\}$$

Da mindestens ein Komplement nach Voraussetzung existiert und alle Komplemente in derselben Äquivalenzklasse liegen,[47] ist das Komplement wohldefiniert.

[45] Vgl. hierzu etwa [DL, S. 165] zusammen mit der Vollständigkeit der Kripke-Semantik.
[46] Zur Distributivität der intuitionistischen Logik vgl. etwa [Dl, S. 156].
[47] Es läßt sich nachweisen, dass das Komplement, wenn es denn existiert, eindeutig ist.

11.13 DEF (Allgemeine logische Systeme): Sei $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ ein deduktives System.

(1) *Allgemeines logisches System:* Ist f pseudopunktextrem und erlaubt f allgemeine Konjunktion, Disjunktion, Distributivität und Negation, dann wird f *allgemeines logisches System* genannt.

(2) *Logisches System:* Ist f punktextrem und erlaubt f Konjunktion, Disjunktion, Distributivität und Negation, dann wird f *logisches System* genannt.

Bemerkungen:

(1) *Allgemeine Eigenschaften:* Nach Konstruktion ist klar, dass die oben eingeführten allgemeinen Eigenschaften die speziellen konservativ erweitern. Das bedeutet: jede Tautologie ist eine Pseudotautologie und jede Konjunktion auch eine allgemeine Konjunktion.

Insbesondere ist damit jedes logische System ein allgemeines logisches System.

(2) *Induzierte Boole'sche Algebra:* Die Boole'sche Algebra $\mathfrak{B}$, wie in der Diskussion sukzessive konstruiert, wird die *von der K-Operation f induzierte Boole'sche Algebra* genannt.

Aus bisheriger Diskussion ist klar, dass eine K-Operation f genau dann eine Boole'sche Algebra induziert, wenn f ein allgemeines logisches System ist.

(3) *Klassisches System:* Das klassische System ist ein logisches System im obigen Sinne; die von ihm induzierte Boole'sche Algebra ist die im letzten Paragraphen konstruierte Lindenbaumalgebra.

Den Paragraphen abschließend werden einige grundlegende Eigenschaften (allgemeiner) logischer Systeme diskutiert.

11.14 Satz (Kompaktheit): Allgemeine logische Systeme sind kompakt.

Beweis. Sei $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ allgemeines logisches System, $X \subseteq S$ widersprüchlich, also $f(X) = S$. Es gibt eine Kontradiktion $\perp \in S = f(X)$. Mit der Endlichkeit von f gibt es eine endliche Teilmenge $Y \subseteq_{endl} X$ mit $\perp \in f(Y)$. Mit Monotonie von f gilt $S = f(\perp) \subseteq f(f(Y)) = f(Y)$ und es wurde geeignete endliche Teilmenge gefunden, die widersprüchlich ist. Q.E.D.

Bemerkung (Kompaktheit): Die Aussage des obigen Satzes läßt sich verbessern: Im Beweis wurde lediglich verwendet, dass eine Kontradiktion $\perp \in S$ existiert. So induziert – wie oben bemerkt – die intuitionistische Logik keine Boole'sche Algebra, da die intuitionistische Logik keine Negation im Sinne dieser Arbeit erlaubt. Dennoch ist sie kompakt.

Desweiteren soll hier die Verallgemeinerung der Konjunktion in (allgemeinen) logischen Systemen auf endlich viele Konjunkte diskutiert werden; dies erleichtert im folgenden Paragraphen die Diskussion. Der folgende Hilfssatz weist eine leichte Verstärkung der Idempotenz nach; dies erleichtert die Diskussion der Konjunktion.

11.15 Hilfssatz (Starke Fixpunkteigenschaft): In beliebigen deduktiven Systemen $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ gilt für jede Menge $X \subseteq S$ und jedes Element $x \in S$: $f(X, x) = f(f(X), x)$.

Beweis. Es sind zwei Richtungen zu zeigen:

„$\Rightarrow$" Es gilt $X \subseteq f(X)$, also $X \cup \{x\} \subseteq f(X) \cup \{x\}$.
Mit Monotonie gilt auch $f(X, x) \subseteq f(f(X), x)$.

„$\Leftarrow$" Umgekehrt ist zunächst mit Monotonie $f(X) \subseteq f(X, x)$ und weiter mit Reflexivität $x \in f(X, x)$; also $f(X) \cup \{x\} \subseteq f(X, x)$. Mit Monotonie und Idempotenz folgt: $f(f(X), x) \subseteq f(f(X, x)) = f(X, x)$. Q.E.D.

11.16 Diskussion (Endliche Konjunktionen): Mit obigem Hilfssatz läßt sich in logischen Systemen die Konjunktion zweier Elemente auf endlich viele induktiv verallgemeinern: Jedes Element y mit $f(x) = f(y)$ ist Konjunktion eines einzigen Elementes x; ist z' eine Konjunktion von n Elementen $x_0, \dots x_{n-1}$ und z eine Konjunktion von z' und x_n, dann ist z auch eine Konjunktion von $x_0, \dots x_n$. Weiterhin gilt für z: $f(z) = f(x_0, \dots x_n)$.

Mit Induktionsvoraussetzung gilt nämlich $f(z') = f(x_0, \dots x_{n-1})$ und damit:

$$f(z) = f(z', x_n) = f(f(z'), x_n) = f(f(x_0, \dots x_{n-1}), x_n) = f(x_0, \dots x_n)$$

Ähnlich könnte an dieser Stelle die Verallgemeinerung der Konjunktion in beliebigen allgemeinen Systemen eingeführt werden. Diese Diskussion müßte aber die etwas sperrigere Definition der allgemeinen Konjunktion samt Minimalitätsbedingung berücksichtigen.

Dies wird hier mit einem Verweis auf die induzierte Boole'sche Algebra und den dort herrschenden Gesetzmäßigkeiten vermieden: Dort existiert zu endlich vielen Elementen $[x_0], \dots [x_{n-1}]$ der Schnitt $[z] = \bigsqcap_{k \in n} [x_k]$. Weiterhin gilt dort $[z] \leq [x_0], \dots [x_{n-1}]$. Aus Ersterem folgt die Existenz einer allgemeinen Konjunktion z endlich vieler Elemente im deduktiven System und es gilt mit Zweiterem für jedes $k \in n$: $f(x_k) \subseteq f(z)$. Daraus folgt mit Reflexivität $x_0, \dots x_{n-1} \in f(z)$ und weiter mit Monotonie und Idempotenz:

$$f(x_0, \dots x_{n-1}) \subseteq f(f(z)) = f(z)$$

Gleichheit gilt hier offenbar im Allgemeinen lediglich in logischen Systemen.

§12 Theorien und Filter

Im letzten Paragraphen wurden aus allgemeinen logischen Systemen Boole'sche Algebren konstruiert. Damit das UT nun verwendet werden kann, um Varianten des Satzes von Lindenbaum zu beweisen, müssen darüber hinaus Theorien und Filter in Beziehung zueinander gesetzt werden.

In diesem Paragraphen wird diskutiert, unter welchen Umständen dies möglich ist. Dabei soll eine möglichst allgemeine Variante von k LB gefunden werden, die aus dem UT noch bewiesen werden kann.

Sei dazu im Folgenden ein allgemeines logisches System $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ und die induzierte Boole'sche Algebra $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ mit $B := {}^{S}/_{\sim}$ gegeben.

12.1 DEF (Kanonische Abbildungen): Es lassen sich die folgenden kanonischen Abbildungen ausmachen:

(1) *Grundraum:* Die Abbildung $\Phi : S \to B : x \mapsto [x]$ ist der *kanonische Epimorphismus* auf dem Grundraum S in die Boole'sche Algebra $\mathfrak{B}$.

(2) *Potenzmenge:* Die Abbildung $\Phi : \mathfrak{p}(S) \to \mathfrak{p}(B) : X \mapsto \{[x];\ x \in X\}$ ist die *kanonische Erweiterung des kanonischen Epimorphismus* auf die Potenzmengen.

Bemerkung (Wohldefiniertheit): Beide Abbildungen sind wohldefiniert, die Verwendung des gleichen Buchstaben, um beide Abbildungen zu bezeichnen, ist unproblematisch.

In den folgenden Sätzen wird konkret der Bezug zwischen Theorien und Filtern untersucht. Nach einem Hilfssatz über die Verträglichkeit von Theorien mit dem kanonischen Epimorphismus werden in einem ersten Satz die Bilder von Theorien behandelt, im darauf folgenden Satz dann die Urbilder von Filter.

12.2 Hilfssatz (Verträglichkeit von Theorien mit Φ): Ist $F = \Phi(T)$ Bild einer Theorie $T \in \mathfrak{Im}(f)$ und $a \in F$ ein Element von F, dann ist für jedes $x \in \Phi^{-1}(a)$ schon $x \in T$.

Beweis. Sei $a \in F = \Phi(T)$. Dann gibt es ein $x \in T$ mit $[x] = \Phi(x) = a$. Sei nun $y \in [x]$ beliebig. Es gilt damit $x \sim y$, also $f(x) = f(y)$. Mit Reflexivität und Monotonie von f folgt: $y \in f(y) = f(x) \subseteq f(T) = T$. Die letzte Gleichheit gilt, da $T \in \mathfrak{Im}(f)$ eine Theorie ist. Q.E.D.

Bemerkung (Verträglichkeit): Aus obigem Satz folgt insbesondere, dass sich die K-Operation f mit der logischen Äquivalenz $\sim$ im Sinne der Konstruktion von Restklassensystemen verträgt. Damit könnte auf der Boole'schen Algebra jedenfalls eine Restklassenoperation f' definiert werden.[48] Dies wird hier aber nicht weiter verfolgt.

[48] Vgl. hierzu die Konstruktion von Restklassensystemen in §4.

Damit können nun die Bilder von Theorien in der induzierten Boole'schen Algebra diskutiert werden.

12.3 Satz (Bilder von Theorien): Ist das System $\mathcal{S}$ logisch, $T \in \mathfrak{Im}(f)$ eine Theorie, dann ist $F := \Phi(T)$ ein Filter von $\mathfrak{B}$. Ist zudem T maximal widerspruchsfrei, dann ist F sogar ein Ultrafilter. Für allgemeine logische Systeme $\mathcal{S}' = \langle S, f' \rangle$ gilt obige Aussage im Allgemeinen nicht; lediglich die Abgeschlossenheit nach oben kann gezeigt werden.

Beweis. Sei $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ logisches System. Es ist Mehreres zu prüfen:

(1) *Nichtleere (es gilt* $1 \in F$*):*

Da f punktextrem ist, gibt es eine Tautologie $\top \in S$. Für jede Teilmenge $X \subseteq S$ gilt damit: $f(\top) = f(\varnothing) \subseteq f(X)$.

Also ist $\top \in f(\top) \subseteq f(T) = T$ und $1 = [\top] \in \Phi(T) = F$.

Gibt es in $\mathcal{S}'$ lediglich Pseudotautologien, dann ist $f'(\varnothing) = \varnothing$. Damit ist $\varnothing$ einerseits eine Theorie, andererseits gilt $1 \notin \varnothing = \Phi(\varnothing)$.

(2) *Endliche Schnitte (ist* $a, b \in F$*, dann auch* $a \sqcap b \in F$*):*

Seien also $[x], [y] \in \Phi(T)$. Mit obigem Hilfssatz sind $x, y \in T$. Da f die Konjunktion erlaubt, gibt es z mit $f(z) = f(x, y)$. Da $\{x, y\} \subseteq T$ ist, folgt aus Reflexivität und Monotonie $z \in f(z) = f(x, y) \subseteq f(T) = T$.

Also gilt auch $[x] \sqcap [y] = [z] \in \Phi(T)$.

Gibt es in $\mathcal{S}'$ für zwei Elemente $x, y \in S$ lediglich eine allgemeine Konjunktion $z \in S$, die keine Konjunktion ist, dann gilt sofort $f'(z) \supsetneq f'(x, y)$. Damit gilt für die Theorie $T = f'(x, y)$ zunächst $[x], [y] \in \Phi(T)$, aber mit $z \notin T$ gilt $[z] \notin \Phi(T)$.

(3) *Abgeschlossenheit nach oben (ist* $a \in F$ *und* $b \geq a$*, dann ist* $b \in F$*):*

Sei also $[x] \in \Phi(T)$, $[y] \geq [x]$. Dann ist wieder $x \in T$ und $f(y) \subseteq f(x)$. Aus der Reflexivität von f folgt $y \in f(y) \subseteq f(x) \subseteq f(T) = T$.

Also ist tatsächlich $[y] = \Phi(y) \in \Phi(T)$.

Alle Eigenschaften, die hier in die Argumentation eingingen, gelten auch in beliebigen allgemeinen logischen Systemen; entsprechend gilt die Abgeschlossenheit nach oben auch in allgemeinen Systemen $\mathcal{S}'$.

(4) *Ultrafilter (für alle* $a \in B$ *gilt, dass entweder* $a \in F$ *oder* $-a \in F$*):*

Sei T maximal und widerspruchsfrei. Es gilt also: $T \neq S$ und für alle $x \in S \backslash T$ ist $f(T, x) = S$. Zunächst ist klar, dass es kein $[x] \in B$ gibt, so dass $[x], -[x] \in F$ ist. Sonst gäbe es $x, y \in T$ so, dass y eine Negation von x ist. Damit wäre deren Konjunktion eine Kontradiktion $\perp$ und es würde gelten:

$$S = f(\perp) = f(x, y) \subseteq f(T) = T \neq S$$

Sei nun $[x] \in B \backslash F$ beliebig, also $x \in S \backslash T$. Hier ist für eine Negation y von x zu zeigen, dass $y \in T$ ist. Wäre x eine Kontradiktion, dann wäre y eine Tautologie und damit trivialerweise Element von T. Sei also ohne Einschränkung x keine Kontradiktion.

Jedenfalls gilt aufgrund der Maximalität von T, dass $f(T,x) = S$ ist. Aus der Kompaktheit von f folgt die Existenz endlich vieler Elemente $x_1, \dots x_n \in T$ mit $f(x_1, \dots x_n, x) = S$. Da x keine Kontradiktion ist, ist $n \geq 1$. Damit gibt es auch eine Konjunktion z von $x_1, \dots x_n$ und es gilt: $z \in f(z) = f(x_1, \dots x_n) \subseteq f(T) = T$. Also $z \in T$ und damit $[z] \in \Phi(T) = F$.

Weiterhin gilt $x_1, \dots x_n, x \in f(z,x)$. Damit ist mit Monotonie von f schon $S = f(x_1, \dots x_n, x) \subseteq f(f(z,x)) = f(z,x)$. Also ist $f(z,x) = S = f(\perp)$ für eine Kontradiktion $\perp$ und es gilt $[z] \sqcap [x] = 0$. Daraus folgt aber, dass $-[x] \geq [z]$ ist. Aus der Abgeschlossenheit nach oben folgt weiter $-[x] \in F$.

Ist schließlich $-[x] \notin F$ für ein $[x] \in B$, dann folgt mit obiger Argumentation $-(-[x]) \in F$ und aus $-(-[x]) = [x]$ schon $[x] \in F$.

Damit wurde gezeigt, dass F ein Ultrafilter ist.

Für allgemeine Systeme $\mathcal{S}'$ läßt sich festhalten: Da die Bilder von Theorien im Allgemeinen nicht unter endlichen Schnitten abgeschlossen sind, läßt sich leicht ein allgemeines System konstruieren, in dem durch die Hinzunahme der allgemeinen Konjunktion die Theorie widersprüchlich wird.

Q.E.D.

12.4 Satz (Urbilder von Filtern): Ist $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ allgemeines logisches System und $\mathcal{F} \leq_{\mathfrak{F}} \mathfrak{B}$ ein Filter mit $[x] \notin \mathcal{F}$, dann gilt für $T := \Phi^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq S$ das Folgende:

(1) Zunächst ist $x \notin T$. Ist $\perp \in S$ eine Kontradiktion, dann ist $\perp \notin T$, und ist schließlich $\top \in S$ eine Pseudotautologie, dann gilt $\top \in T$.

(2) T ist eine Theorie; ist zusätzlich $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter, dann ist T maximalkonsistent und damit insbesondere x-saturiert.

Beweis.

(1) *Erste Behauptung:* Offenbar gelten die Behauptungen in (1).

(2) *Urbild ist Theorie:* Angenommen, dass T keine Theorie ist.

Dann gibt es ein Element $s \in f(T) \backslash T$. Aufgrund der Endlichkeit von f gibt es endliches $V = \{v_1, \dots v_n\} \subseteq_{endl} U$ mit $s \in f(V)$. Ohne Einschränkung kann angenommen werden, dass $V \neq \varnothing$ nichtleer ist.

Jedenfalls ist $\Phi(V) \subseteq \mathcal{F}$, damit gibt es auch, da Filter unter endlichen Schnitten abgeschlossen sind, ein $v \in S$ mit

$$[v] = [v_1] \sqcap \dots [v_n] \in \mathcal{F}$$

Es gilt, dass $s \in f(v_1, \dots v_n) \subseteq f(v)$,[49] also $f(s) \subseteq f(f(v)) = f(v)$. Damit ist $[s] \geq [v]$. Da Filter nach oben abgeschlossen sind, folgt hieraus $[s] \in \mathcal{F}$. Das ist aber ein WIDERSPRUCH zu $s \notin T$.

Also ist T tatsächlich eine Theorie.

[49] Vgl. hierzu auch die Diskussion über endliche Konjunktionen im letzten Paragraphen.

(3) *Maximalkonsistenz des Urbildes:* Sei $\mathcal{F}$ zusätzlich ein Ultrafilter.

Klar ist bisher, dass T eine Theorie ist mit $x \notin T = f(T)$. Insbesondere ist damit $T \neq S$ widerspruchsfrei.

Sei nun $y \notin T$ beliebiges Element. Dann ist $[y] \notin \mathcal{F}$, und da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, gibt es eine Negation $v \in S$ von y mit $[v] = -[y] \in \mathcal{F}$. Somit ist zunächst $v \in T$ und damit $f(T, y) \supseteq f(y, v) = S$.

Also ist jede echte Erweiterung von T widersprüchlich und T ist tatsächlich vollständig. Da zudem $x \notin T$ ist, ist T auch x-saturiert. Q.E.D.

Zwischenbemerkung: Im Folgenden soll mithilfe des UT gezeigt werden, dass in (möglichst vielen) allgemeinen logischen Systemen saturierte Erweiterungen existieren. Im klassischen Fall wurde das Bild einer Theorie betrachtet; dieses Bild war ein Filter, der zu einem geeigneten Ultrafilter erweitert werden konnte. Dieses Vorgehen versagt in allgemeinen Systemen, da hier die Bilder von Theorien im Allgemeinen keine Filter sind.

Man kann dieses Problem in den Griff bekommen, wenn es im allgemeinen logischen System *relativ wenige* Theorien gibt, deren Bild kein Filter ist. Dabei bedeutet „relativ wenig“, dass man die Menge aller Problemstellen (mit einer beliebigen Ordinalzahl) (transfinit) wohlordnen kann. Dies geht in den folgenden Erweiterungssatz ein; vorher werden noch einige Definitionen benötigt:

12.5 DEF (Problemstellen und geeignete Systeme):

(1) *Problemstelle:* Eine Menge $X \in \mathfrak{Im}(f)$ aus dem Bild der K-Operation f heißt *Problemstelle*, falls $\Phi(X)$ kein Filter von $\mathfrak{B}$ ist.

Bezeichne mit $P_{\mathcal{S}} := \{X \in \mathfrak{Im}(f);\ X \text{ ist Problemstelle}\}$ die *Menge aller Problemstellen von* $\mathcal{S}$.

(2) *Geeignetes System:* Ein allgemeines logisches System $\mathcal{S}$ wird als *geeignetes System* bezeichnet, falls sich die Menge $P_{\mathcal{S}}$ aller Problemstellen wohlordnen läßt, es also eine Ordinalzahl $\alpha \in \Omega$ gibt mit:

$$P_{\mathcal{S}} = \{X_\beta;\ \beta \in \alpha\}$$

(3) *Geeignete Erweiterung:* Ist $\mathcal{S}$ ein geeignetes System, $X \subseteq S$ Teilmenge und $x \notin f(X)$. Dann heißt eine Menge Y *geeignete Erweiterung von* X, falls $X \subseteq Y \in \mathfrak{Im}(f)$ ist, so dass $x \notin Y$ ist und zudem für alle Problemstellen Z echt über Y schon $x \in Z$ gilt. Letzteres formal:

$$\forall Z \in (P_{\mathcal{S}})_Y : \big(x \notin Z \to Z = Y\big)$$

Bemerkungen:

(1) *Logische Systeme:* Ein allgemeines System $\mathcal{S}$ ist genau dann logisch, wenn $P_{\mathcal{S}} = \varnothing$ gilt.

(2) *Geeignete Erweiterungen:* Es wurde bei der Definition einer geeigneten Erweiterung Y nicht gefordert, dass Y selbst eine Problemstelle ist. Weiter

folgt daraus, dass Y eine geeignete Erweiterung ist, im Allgemeinen noch nicht, dass Y auch saturiert ist.

Dennoch ermöglichen geeignete Erweiterungen, wie im Folgenden gezeigt wird, die Existenz saturierter Erweiterungen in geeigneten Systemen mithilfe des UT zu beweisen.

Es werden noch die beiden Varianten des Satzes von Lindenbaum eingeführt, die im Folgenden diskutiert werden:

Satz von Lindenbaum für logische Systeme (l LB): Jedes logische System erlaubt Saturierung.

Satz von Lindenbaum für geeignete Systeme (g LB): Jedes geeignete System erlaubt Saturierung.

Bevor die beiden Varianten des Satzes von Lindenbaum mithilfe des UT bewiesen werden, muss zunächst die Existenz geeigneter Erweiterungen in geeigneten Systemen gezeigt werden. Der Beweis dieses Existenzsatzes wird durch den folgenden Hilfssatz erleichtert, in dem gezeigt wird, dass die Vereinigung einer linear geordneten Menge von Theorien erneut eine Theorie ist.[50]

12.6 Hilfssatz (Vereinigung linear geordneter Theorien): Sei $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ beliebiges deduktives System, $\varnothing \neq M := \{X_i;\ i \in I\} \subseteq \mathfrak{Im}(f)$ eine nichtleere Menge von Theorien zu einer beliebigen Indexmenge I.

Falls M durch die Mengeninklusion linear geordnet wird, dann ist

$$X := \bigcup M = \bigcup_{i \in I} X_i \in \mathfrak{Im}(f)$$

eine Theorie. Gilt zudem für ein Element $x \in S$ des Grundraumes, dass für jeden Index $i \in I$ $x \notin X_i$, dann ist auch $x \notin X = f(X)$.

Beweis. Ohne Einschränkung kann hier angenommen werden, dass $X \neq \varnothing$. (Sonst wäre für jeden Index $i \in I$ $X_i = \varnothing$ und die Behauptung gilt trivial.)

Sei $y \in f(X)$ ein aus X beweisbares Element. Aufgrund der Endlichkeit von f gibt es endlich viele Elemente $x_1, \dots x_n \in X$ mit $y \in f(x_1, \dots x_n)$. (Mit $X \neq \varnothing$ kann hier aufgrund der Monotonie von f tatsächlich $n \geq 1$ angenommen werden.) Nach Konstruktion von X gibt es $Y_1, \dots Y_n \in M$ mit $x_k \in Y_k$ für jedes $k \in \{1, \dots n\}$. Da die Elemente von M linear geordnet sind, erreicht man durch Umnummerierung, dass für $1 \leq k \leq l \leq n$ gilt, dass $Y_k \subseteq Y_l$ ist. Damit gilt, dass $x_1, \dots x_n \in Y_n$ sind.

Aufgrund der Monotonie von f ist $y \in f(x_1, \dots x_x) \subseteq Y_n \subseteq X$. Damit ist $X = f(X)$ eine Theorie. Ist zudem für jeden Index $i \in I$ $x \notin X_i$, dann ist nach Konstruktion $x \notin X = f(X)$. Q.E.D.

[50] Der folgende Hilfssatz, formuliert für die klassische Logik, erfreute mich aufgrund seiner Schönheit lange Jahre als immer wiederkehrende Übungsaufgabe in meinen Tutorien; hier endlich habe ich einen Ort gefunden, wo er zudem noch nützlich wird.

12.7 Satz (Existenz geeigneter Erweiterungen): Sei $\mathcal{S} = \langle S, f\rangle$ ein geeignetes System, $X \subseteq S$ eine Teilmenge des Grundraumes und $x \in S$ ein Element mit $x \notin f(X)$. Dann gibt es eine geeignete Erweiterung Y von X.

Beweis. Ohne Einschränkung kann angenommen werden, dass $P_{\mathcal{S}} \neq \varnothing$ ist. (Sonst ist $Y := f(X)$ trivialerweise geeignete Erweiterung.)

Da $\mathcal{S}$ geeignet ist, läßt sich $P_{\mathcal{S}}$ wohlordnen. Damit gibt es also eine Ordinalzahl $\varnothing \neq \alpha \in \Omega$ mit: $P_{\mathcal{S}} = \{X_\beta;\ \beta \in \alpha\}$. Konstruiere entlang α wie folgt rekursiv:

$\beta = \varnothing$: Setze $Y_\varnothing := \begin{cases} X_\varnothing & \text{falls } x \notin X_\varnothing \text{ und } f(X) \subseteq X_\varnothing \\ f(X) & \text{sonst} \end{cases}$.

β Nachfolgerzahl: Dann ist $\beta = \gamma \cup \{\gamma\}$ für eine Ordinalzahl $\gamma \in \Omega$.

Setze $Y_\beta := \begin{cases} X_\beta & \text{falls } x \notin X_\beta \text{ und } Y_\gamma \subseteq X_\beta \\ Y_\gamma & \text{sonst} \end{cases}$.

β Limeszahl: Dann ist $\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} \gamma$. Setze zunächst hilfsweise $Z := \bigcup_{\gamma<\beta} Y_\gamma$.

Mit obigem Hilfssatz gilt $x \notin Z = f(Z)$ und für alle $\gamma < \beta$ ist $Y_\beta \subseteq Z$.

Setze $Y_\beta := \begin{cases} X_\beta & \text{falls } x \notin X_\beta \text{ und } Z \subseteq X_\beta \\ Z & \text{sonst} \end{cases}$.

Falls nun α keine Limeszahl ist, gibt es eine Ordinalzahl γ mit $\alpha = \gamma \cup \{\gamma\}$. Setze dann $Y := Y_\gamma$. Ansonsten setze $Y := \bigcup_{\gamma<\alpha} Y_\gamma$.

Analog zur Argumentation im Limesschritt ist nach Konstruktion (falls α keine Limeszahl ist) oder mit obigem Hilfssatz (sonst) klar, dass $X \subseteq f(X) \subseteq Y$ eine Theorie ist mit $x \notin Y = f(Y)$. Weiterhin kann es nach Konstruktion keine Problemstelle $Z \in (P_{\mathcal{S}})_Y$ geben mit $x \notin Z \neq Y$. Damit ist Y eine geeignete Erweiterung von X. Q.E.D.

Mit dem Existenzsatz sind nun genügend Mittel vorhanden, die Äquivalenz von g LB und UT zu zeigen. Da aus g LB insbesondere der speziellere Satz k LB trivial und aus diesem wiederum UT folgt, genügt es also, die Umkehrung zu zeigen.

12.8 Satz (UT $\Rightarrow$ g LB)**:** Sei $\mathcal{S} = \langle S, f\rangle$ geeignetes System, $X \subseteq S$ Teilmenge des Grundraums mit $x \notin T := f(X)$ für ein Element $x \in S$. Falls UT gilt, dann gibt es eine x-saturierte Erweiterung Y von X.

Beweis.

Betrachte $F := \bigcap\{\mathcal{F} \leq_{\mathfrak{F}} \mathfrak{B};\ \Phi(T) \subseteq \mathcal{F}\}$, den Schnitt aller Filter über dem kanonischen Bild von T in $\mathfrak{B}$. Jedenfalls ist F ein Filter von $\mathfrak{B}$.[51]

Falls nun $[x] \notin F$, dann gibt es mit UT einen Ultrafiter $U \leq \mathfrak{B}$ mit $[x] \notin U$ und $\Phi(T) \subseteq F \subseteq U$. Nach dem Satz über Urbilder von Filtern ist $Y := \Phi^{-1}(U)$ eine x-saturierte Erweiterung von X.

Ansonsten ist $[x] \in F$; insbesondere ist damit $[x]$ in allen Filtern über $\Phi(T)$; damit ist für jede Theorie $Z \in \mathfrak{Im}(f)_T$, die keine Problemstelle ist, $x \notin Z$.

[51] F ist nicht notwendigerweise ein echter Filter. Falls T keine Problemstelle ist, dann gilt $F = \Phi(T)$, ansonsten ist lediglich $\Phi(T) \subseteq F$.

Weiterhin besitzt T eine geeignete Erweiterung Y wie oben im Satz konstruiert mit $x \notin Y = f(Y)$.

Für jedes $Y \neq Z \in \mathfrak{Im}(f)_Y$ gilt, dass Z entweder eine Problemstelle ist mit $x \notin Z$ (da Y geeignete Erweiterung ist), oder Z keine Problemstelle ist und wieder $x \notin Z$ gilt (da Z insbesondere echt über T liegt).

Damit ist aber Y x-saturierte Erweiterung von X und $\mathcal{S}$ erlaubt Saturierung.

Q.E.D.

12.9 Korollar (zu UT $\Rightarrow$ g LB): Es gilt l LB $\Leftrightarrow$ UT.

Beweis. l LB folgt aus g LB. Aus ersterem folgt weiter k LB und dann UT. Schließlich folgt aus UT wieder g LB und die Äquivalenz ist im Ringschluss gezeigt. Q.E.D.

Bemerkungen:

(1) *Verwendung des* AC*:* Im obigen Beweis geht das AC nicht ein, insofern nicht gefordert wird, dass jedes allgemeine System geeignet ist. Insbesondere wird auch keine Wohlordnung des Grundraumes S oder deren Potenzmenge $\mathfrak{p}(S)$ gefordert.

(2) *Schönheit:* An dieser Stelle mag eingewandt werden, dass die Variante g LB des Satzes von Lindenbaum aufgrund der vorausgesetzten Wohlordenbarkeit der Problemstellen nicht schön ist; die Aussage über logische Systeme viel natürlicher erscheint.

Das ist zwar richtig, wird aber dem Projekt nicht gerecht. Hier sollen Grenzen gefunden werden, innerhalb derer Lindenbaumsätze äquivalent zum BP formuliert werden können.

(3) *Bezug zur klassischen Logik:* Die Sätze und Beweise in diesem Paragraphen erfolgten – soweit sie logische Systeme betreffen – in voller Analogie zum klassischen Fall. Dies deutet darauf hin, dass das klassische System durchaus ausgezeichnet ist.

Abschließende Bemerkung: In den letzten Paragraphen wurden einige Lindenbaumsätze äquivalent zum BP gefunden. Dies wurde jeweils mit Rückgriff auf das BP in Form des UT zumindest skizziert.

Im Sinne des Miller'schen Projekts könnten nun für diese Äquivalenzen direkte Beweise ohne Rückgriff auf das BP gesucht werden. Darauf wird hier verzichtet.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Erster Teil: Im ersten Teil dieser Arbeit wurden deduktive Systeme zunächst allgemein eingeführt und untersucht. Desweiteren wurden einige allgemeine Konstruktionsmethoden für deduktive Systeme vorgestellt. Daran anschließend wurden spezielle Konstruktionsmethoden diskutiert, mithilfe derer in dieser Arbeit neue Millersätze bewiesen werden konnten.

Vollendung des Miller'schen Projekts: Es gelang in dieser Arbeit nicht, das Miller'sche Projekt zu vollenden. In Anhang A wird die Struktur deduktiver Systeme in Abhängigkeit der relevanten Eigenschaften und in Anhang B eine weitere Konstruktionsmethode diskutiert; diese Untersuchungen können einen Einblick in die Schwierigkeiten geben, geeignete Konstruktionen für deduktive Systeme mit vielen relevanten Eigenschaften anzugeben und so das Miller'sche Projekt tatsächlich zu vollenden.

Bewiesene Millersätze: Im Folgenden werden, nach Konstruktionsmethode sortiert, die in dieser Arbeit bewiesenen nichttrivialen Millersätze aufgeführt:

(1) *Beschränkte Schnitte:*

- (Punkttreuer Schnitt) Für alle $\alpha \subseteq \{a, c, d\}$: $\mathrm{LB}\, b\,\alpha \Rightarrow \mathrm{LB}\,\varnothing$
  Den Spezialfall $\mathrm{LB}\, ab \Rightarrow \mathrm{LB}\, a$ zeigt Miller auf anderem Weg.
- (Gleichbleibender Schnitt): $\mathrm{LB}\, bd \Rightarrow \mathrm{LB}\,\varnothing$, $\mathrm{LB}\, abd \Rightarrow \mathrm{LB}\, a$

(2) *Doppelung:* $\mathrm{LB}\, c \Rightarrow \mathrm{LB}\,\varnothing$, $\mathrm{LB}\, bc \Rightarrow \mathrm{LB}\, b$

(3) *Angereicherte Systeme:* $\mathrm{LB}\, cd \Rightarrow \mathrm{LB}\,\varnothing$, $\mathrm{LB}\, bcd \Rightarrow \mathrm{LB}\, b$
Nicht explizit ausgeführt: $\mathrm{LB}\, d \Rightarrow \mathrm{LB}\,\varnothing$, $\mathrm{LB}\, bd \Rightarrow \mathrm{LB}\, b$
(Die letzten beiden Millersätze sind auch triviale Korollare der ersten beiden durch Anreicherung bewiesenen.)

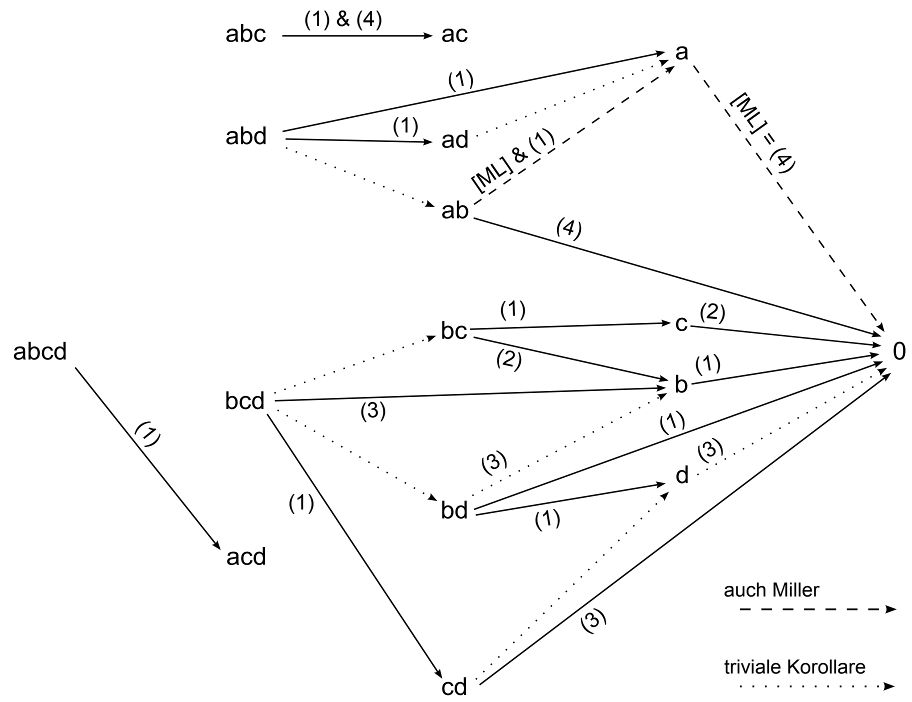
(4) *Charakteristische Systeme:* $\mathrm{LB}\, ab \Rightarrow \mathrm{LB}\,\varnothing$, $\mathrm{LB}\, abc \Rightarrow \mathrm{LB}\, ac$
Desweiteren resultiert aus dieser Methode $\mathrm{LB}\, a \Rightarrow \mathrm{LB}\,\varnothing$; dieser Spezialfall charakteristischer Systeme wurde aber schon von Miller selbst gefunden.

Die Übersicht auf der nächsten Seite illustriert oben genannte Ergebnisse. Dabei werden Lindenbaumsätze $\mathrm{LB}\,\alpha$ ($\alpha \neq \varnothing$) durch die Angabe der Elemente von α und der allgemeine Satz von Lindenbaum $\mathrm{LB}\,\varnothing$ wird durch die Angabe von 0 angedeutet.

Durchgezogene Pfeile verweisen auf Millersätze, die in dieser Arbeit bewiesen wurden; gestrichelte Pfeile auf Millersätze, die auch von Miller bewiesen wurden. Desweiteren werden einige – der Übersichtlichkeit halber nicht alle – triviale Korollare von stärkeren, hier bewiesenen Millersätzen durch gepunktete Pfeile eingezeichnet, um anzudeuten, wo keine weiteren Untersuchungen für das Miller'sche Projekt benötigt werden.

Die Zahlen an den Pfeilen beziehen sich auf obige Aufzählung der bewiesenen Millersätze.

Übersicht (Bewiesene Millersätze):



Zweiter Teil: Im zweiten Teil dieser Arbeit wurde diskutiert, wie das Miller'sche Projekt auf Lindenbaumsätze äquivalent zum BP übertragen werden kann.

Ausgehend vom klassischen Satz von Lindenbaum (k LB) wurden zunächst zwei spezielle Varianten sk LB und $\mathrm{LB}_{\mathrm{AL}}$ auf analogem Weg wie bei Miller dadurch gefunden, dass lediglich diejenigen Systeme im Lindenbaumsatz genannt werden, die zum Beweis des BP tatsächlich benötigt werden.

In einem weiteren Schritt wurde die klassische Variante k LB weiter verallgemeinert, indem relevante Eigenschaften eines deduktiven Systems identifiziert wurden, die zur Konstruktion einer induzierten Boole'schen Algebra benötigt werden. Hierbei wurden die logischen Systeme und noch allgemeiner die geeigneten Systeme gefunden; es wurde skizziert, dass die entsprechenden Varianten l LB und g LB des Satzes von Lindenbaum zum BP äquivalent sind.

Diese Art der Verallgemeinerung kann sich bei Miller für das AC nicht finden, da er sein Projekt schon bei der allgemeinsten Variante des Satzes für Lindenbaum beginnt.

Ausblicke: Die Ergebnisse dieser Arbeit abrundend werden einige Ausblicke darauf gegeben, in welcher Richtung die Gedanken an dieser Stelle weitergehen können:

(1) *Ausarbeitung der Problematik:* Es wurde angedeutet, dass die Wendung „ohne Rückgriff auf das AC“, auf die das Miller'sche Projekt und diese Arbeit im Wesentlichen beruhen, mathematisch problematisch ist. In Anhang C wird eine Möglichkeit skizziert, dieses Kriterium mathematisch zu präzisieren.

Diese Skizze bedarf einer weiteren Ausarbeitung. Möglicherweise läßt sich auch ein anderer Ansatz in der Logik finden, dieses Kriterium geeignet zu interpretieren.

(2) *Weitere Konstruktionsmethoden:* Diese Arbeit zeichnet sich im Hauptteil durch die Einführung von Methoden aus, mithilfe derer aus deduktiven Systemen neue konstruiert werden können. Erst in einem zweiten Schritt wurden die resultierenden Systeme auf ihre Tauglichkeit für das Miller'sche Projekt untersucht.

Dies kann beliebig fortgesetzt werden; insbesondere können – wie etwa die Konstruktion von Restklassen-Systemen – weitere Methoden um ihrer selbst Willen gefunden werden, die sich nicht im Miller'schen Projekt verwenden lassen.

Weiter ist es möglich, diese Konstruktionsmethoden daraufhin zu untersuchen, ob sie zum Beweis neuer Millersätze verwendet werden können und so gegebenenfalls das Miller'sche Projekt zu vollenden.

(3) *Vollendung der Übertragung:* In dieser Arbeit wurden lediglich einige Varianten von Lindenbaumsätzen äquivalent zum BP vorgestellt. Auf eine direkte Ausführung der Äquivalenzbeweise im Sinne des Miller'schen Projektes wurde hier verzichtet.

(4) *Erweiterung der Übertragung:* Es ist sicher möglich, weitere Varianten des Satzes von Lindenbaum zu suchen, die äquivalent zum BP sind. Hierfür könnten bekannte Varianten des BP betrachtet und aus diesen Kontexten neue deduktive Systeme analog zum Vorgehen im zweiten Teil konstruiert werden.

(5) *Bezüge zu anderen Kontexten:* Durch die Allgemeinheit der Definition deduktiver Systeme lassen sich solche in den unterschiedlichsten Kontexten ausmachen: So ist etwa ein Vektorraum zusammen mit der Abbildung, die einer Menge von Vektoren deren Erzeugnis zuordnet, ein deduktives System. Diese Kontexte können untereinander in Bezug gesetzt und Ergebnisse aus den einzelnen Gebieten für die anderen fruchtbar gemacht werden.

III Anhang

Anhang A: Struktursätze

Bei der Suche nach weiteren Millersätzen wurde die Struktur von deduktiven Systemen in Abhängigkeit von den relevanten Eigenschaften näher untersucht. Dabei gelang nebenbei die Klassifikation aller Dzik-Systeme.[52] In diesem Anhang werden die Ergebnisse dieser Betrachtungen zusammengestellt.

- Gleichbleibende Systeme -

Zunächst wird ein kurzer Blick auf die Eigenschaft *gleichbleibend* geworfen. Sei dazu ein beliebiges (!) deduktives System $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ gegeben.

1.1 DEF (Grundlegende Relation): Die *grundlegende Relation* $\sim_\mathcal{S}$ *auf dem Grundraum* S *bezüglich der K-Operation* f ist wie folgt definiert:

$$\sim_\mathcal{S} := \{\langle x, y\rangle;\ x = y \vee f(x, y) = S\} \subseteq S \times S$$

Falls die grundlegende Relation $\sim_\mathcal{S}$ eine Äquivalenzrelation ist, dann wird für jedes $x \in S$ mit $[x]_\mathcal{S} = \{y \in S;\ x \sim_\mathcal{S} y\}$ die Äquivalenzklasse von x bezüglich $\sim_\mathcal{S}$ bezeichnet.

Notation: Ist aus dem Kontext der Bezug auf das deduktive System $\mathcal{S}$ klar, wird auch anstelle von $\sim_\mathcal{S}$ lediglich $\sim$ geschrieben; falls $\sim_\mathcal{S}$ Äquivalenzrelation ist, dann analog auch $[x]$ anstelle von $[x]_\mathcal{S}$.

1.2 Satz (Grundlegende Relation): Die grundlegende Relation $\sim$ ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn die K-Operation f gleichbleibend ist.[53]

Beweis.

Die grundlegende Relation ist nach Konstruktion reflexiv und nach Definition einer K-Operation symmetrisch. Es ist lediglich Transitivität zu prüfen:

„$\Rightarrow$" Offenbar folgt für alle $x, y, z \in S$ aus $f(x, y) = S = f(y, z)$ und $x \neq z$ sofort $x \sim y \sim z$. Aus der Transitivität folgt $x \sim z$ und da $x \neq z$ ist, gilt auch schon $f(x, z) = S$. Damit ist f gleichbleibend.

„$\Leftarrow$" Ist umgekehrt $\sim$ nicht transitiv, dann gibt es $x, y, z \in S$ mit $x \sim y \sim z$ so, dass $x \not\sim z$. Jedenfalls ist dann $x \neq y \neq z$. Daraus folgt sofort $f(x, z) \neq S$ und $f(x, y) = S = f(y, z)$ und f ist nicht gleichbleibend. Q.E.D.

[52] Auch Miller klassifiziert in [ML, §6] Dzik-Systeme. Dabei nimmt er eine leicht andere Perspektive als hier ein und zeigt die Klassifizierung direkt. Der hier gewählte Zugang ist aufschlussreicher, da sich der Klassifikation sukzessive durch Betrachtung schwächerer Systeme, mit weniger relevanten Eigenschaften, genähert wurde; das Wirken der verschiedenen relevanten Eigenschaften wird dabei deutlicher.

[53] Miller formuliert in [ML, §6] diesen einfachen Satz ebenfalls, führt dort aber den Beweis nicht aus.

Die folgende mengentheoretische Definition hilft bei der Diskussion gleichbleibender Systeme; ihre eigentliche Stärke entfaltet sie aber erst in Systemen, die zusätzlich die Eigenschaften punkttreu und 2-kompakt besitzen.

1.3 DEF (Trivialer & exakter Schnitt): Sei $\sim \subseteq S \times S$ Äquivalenzrelation auf einer nichtleeren Menge S und $X \subseteq S$ beliebige Teilmenge.

(1) *Trivialer Schnitt:* Die Menge X *schneidet die Relation* $\sim$ genau dann *trivial*, wenn für alle $x \in S$ der Schnitt $X \cap [x]$ höchstens 1-elementig ist.

(2) *Exakter Schnitt:* Die Menge X *schneidet die Relation* $\sim$ genau dann *exakt*, wenn für alle $x \in S$ der Schnitt $X \cap [x]$ genau 1-elementig ist.

Bemerkung: Eine Menge X schneidet die grundlegende Relation $\sim$ in gleichbleibenden Systemen genau dann exakt (bzw. trivial), wenn X eine Auswahl (bzw. Vorauswahl) auf der Partitionierung $\{[x];\ x \in S\}$ des Grundraumes S bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$ ist.[54]

- *bcd*-Systeme -

Im Folgenden wird angenommen, dass das disktutierte System $\mathcal{S}$ punkttreu, 2-kompakt und gleichbleibend ist und einen nichttrivialen Grundraum S mit $|S| \geq 2$ besitzt.

1.4 Satz (Widersprüchliche Mengen): Eine Menge $X \subseteq S$ ist genau dann widersprüchlich, wenn X die grundlegende Relation $\sim$ nicht trivial schneidet.

Beweis. Es sind zwei Richtungen zu prüfen:

„$\Rightarrow$“ Gilt für eine Teilmenge $X \subseteq S$ des Grundraums, dass $f(X) = S$, dann gibt es aufgrund der 2-Kompaktheit Elemente $x, y \in X$ mit $f(x, y) = S$. Aus Punkttreue und $|S| \geq 2$ folgt $f(x) = \{x\} \neq S$. Also ist $x \neq y$ und damit$[x] = [y]$ nicht triviale Äquivalenzklasse. Da $\{x, y\} \subseteq X \cap [x]$ ist, schneidet X die Relation $\sim$ nicht trivial.

„$\Leftarrow$“ Schneidet hingegen die Menge X die Relation $\sim$ nicht trivial, dann gibt es $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $x \sim y$. Daraus folgt nach Definition der grundlegenden Relation, dass $f(x, y) = S$ gilt, und mit der Monotonie von f sofort auch $f(X) = S$. Q.E.D.

1.5 Korollar (Nichttriviale Äquivalenzklasse): Es gibt eine nichttriviale Restklasse $[x] \neq \{x\}$ bezüglich der grundlegenden Relation $\sim$.

Beweis.

Jedenfalls ist $f(S) = S$ und mit obigem Satz schneidet S die grundlegende Relation $\sim$ nicht trivial. Das bedeutet aber insbesondere, dass es eine nichttriviale Äquivalenzklasse $[x] \neq \{x\}$ geben muss. Q.E.D.

[54] Vgl. hierzu auch die Definitionen von Vorauswahl und Auswahl in §2.

1.6 Korollar (Größe der Bildpunkte): Die Kardinalität widerspruchsfreier Theorien $X \in \mathfrak{Im}(f)$ ist durch die Anzahl der Äquivalenzklassen bezüglich der grundlegenden Relation $\sim$ beschränkt.

Bew. (*Skizze*): Folgt direkt aus dem Schubfachprinzip. Q.E.D.

1.7 Satz (Maximalkonsistenz): Eine Menge $X \subseteq S$ ist genau dann maximalkonsistent, wenn X die grundlegende Relation $\sim$ exakt schneidet. Insbesondere gilt für maximalkonsistente Mengen X: $f(X) = X$.

Beweis. Schneidet eine Menge X die grundlegende Relation $\sim$ exakt, dann ist zunächst $f(X) \neq S$. Für jedes $x \in S \backslash X$ schneidet $X \cup \{x\}$ die Relation $\sim$ nicht mehr trivial und es ist $f(X, x) = S$. Damit ist X maximalkonsistent.

Schneidet umgekehrt X die Relation $\sim$ nicht exakt, dann ist entweder $f(X) = S$, X nicht konsistent, oder es gibt ein $x \in S$ so, dass $X \cup \{x\}$ die Relation $\sim$ trivial schneidet. Dann wäre $f(X, x) \neq S$ und X selbst nicht vollständig. Jedenfalls ist X dann nicht maximalkonsistent.

Wäre schließlich $f(X) \neq X$, dann wäre $f(X)$ echte Erweiterung von X und würde $\sim$ nicht trivial schneiden. Also wäre $f(X) = f(f(X)) = S$, was aber ein WIDERSPRUCH zur Konsistenz von X ist. Q.E.D.

1.8 Satz (Saturiertheit): Sei $x \in S$ ein Element mit nichttrivialer Restklasse $[x] \neq \{x\}$. Dann ist eine Menge $X \subseteq S$ genau dann x-saturiert, wenn $x \notin X$ gilt und X die grundlegende Relation $\sim$ exakt schneidet.

Beweis.

„$\Rightarrow$" Sei X x-saturiert. Jedenfalls ist $x \notin f(X) \neq S$. Damit ist insbesondere $x \notin X$ und weiter schneidet X die grundlegende Relation $\sim$ zumindest trivial. (Sonst wäre $x \in S = f(X)$.)

Angenommen, X schneidet $\sim$ nicht exakt.

Falls $[x] \cap X = \varnothing$ gilt, dann gibt es ein $z \in [x] \backslash \{x\}$. Weiterhin ist aufgrund der Saturiertheit von X $x \in f(X, z)$. Damit schneidet $f(X, z)$ $\sim$ nicht trivial und es gilt $S = f(f(X, z)) = f(X, z)$. Damit schneidet auch $X \cup \{z\}$ die Relation $\sim$ nicht trivial. Das kann aber nicht sein.

Ansonsten ist $[x] \cap X \neq \varnothing$; es gibt also $z \in X \cap [x]$ mit $x \neq z$. (Sonst wäre $x \in X \subseteq f(X)$.) Weiter gibt es, da X die Relation $\sim$ nicht exakt schneidet, ein $y \in S$ mit $X \cap [y] = \varnothing$. Es gilt zudem $[y] \neq [x]$.

Wie eben ist aufgrund der x-Saturiertheit $x \in f(X, y)$ und damit gilt schon $S = f(f(X, y)) = f(X, y)$. Damit schneidet wieder $X \cup \{y\}$ die Relation $\sim$ nicht trivial und das kann wieder nicht sein.

Damit schneidet X die Relation $\sim$ tatsächlich exakt.

„$\Leftarrow$" Es sei $x \notin X$ und X schneide $\sim$ exakt.

Da X die Relation $\sim$ exakt schneidet, ist X maximalkonsistent und es gilt $x \notin X = f(X)$. Für jedes $y \in S \backslash X$ ist $X \cup \{y\}$ widersprüchlich, also $x \in S = f(X, y)$. Q.E.D.

Bemerkung (Triviale Restklasse): Obiges Ergebnis läßt sich nicht auf Elemente $x \in S$ mit trivialer Restklasse $[x] = \{x\}$ übertragen. Da nämlich $[x] = \{x\}$ ist, muss für eine x-saturierte Menge X gelten: $X \cap [x] = \varnothing$. Also schneidet X die grundlegende Relation $\sim$ lediglich trivial und nicht exakt. Insbesondere ist damit X nicht maximalkonsistent. Es lassen sich sogar leicht Beispiele konstruieren, dass auch $X \cup \{x\}$ nicht maximalkonsistent ist:

Betrachte hierfür zu $\mathfrak{M} := \{\{n\};\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{N}\backslash\{0\}, \mathbb{N}\backslash\{1\}, \mathbb{N}\}$ die induzierte Abbildung $f := f_{\mathfrak{M}}$. Es läßt sich leicht nachrechnen, dass $\langle \mathbb{N}, f\rangle$ ein *bcd*-System ist.[55] Für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ ist $[n] = \{n\}$ trivial und für jedes $n \neq m \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\{m\}$ n-saturiert. Die Menge $\{m, n\}$ ist nicht einmal eine Theorie und damit insbesondere nicht maximalkonsistent.

- Dzik-Systeme -

Es werden im Folgenden Dzik-Systeme betrachtet. Wie bemerkt diskutiert auch Miller in [ML, §6] die Klassifikation dieser Systeme; entsprechend finden sich die meisten der folgenden Aussagen auch dort.

1.9 Satz (Klassifikation von Dzik-Systemen): Sei $\mathcal{S} = \langle S, f\rangle$ deduktives System mit $|S| \geq 2$. Dann ist $\mathcal{S}$ genau dann ein Dzik-System, wenn das Folgende erfüllt ist:

(1) Die grundlegende Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation,

(2) es gibt eine nichttriviale Restklasse $[x] \neq \{x\}$ bezüglich $\sim$ und

(3) für alle $X \subseteq S$ gilt: $f(X) = \begin{cases} X & \text{falls } X \text{ trivial} \sim \text{schneidet} \\ S & \text{sonst} \end{cases}$

Beweis. Es sind zwei Richtungen zu zeigen; es wird verwendet, dass Dzik-Systeme insbesondere auch *bcd*-Systeme sind:

„$\Rightarrow$“ Mit obigem Abschnitt über *bcd*-Systeme ist hier lediglich zu zeigen, dass für alle $X \subseteq S$ mit $f(X) \neq S$ schon $f(X) = X$ gilt. Da aber Dzik-Systeme extrem sind, folgt dies sofort.

„$\Leftarrow$“ Nach Konstruktion ist klar, dass f extrem ist. Wohldefiniertheit und die restlichen Eigenschaften folgen mit obigem Abschnitt. Q.E.D.

Bemerkung (*bcd*-Systeme): *bcd*-Systeme lassen sich eindeutig einem Dzik-System zuordnen, nämlich dem Dzik-System mit derselben grundlegenden Relation. Die Umkehrung gilt nicht.[56] Es gilt sogar, dass das *bcd*-System und das zugehörige Dzik-System dieselben maximalkonsistenten Mengen besitzen. Diese Korrespondenz erstreckt sich nicht auf die saturierten Mengen, wie im Folgenden festgehalten wird.

[55] Insbesondere folgt aus $f(X) = \mathbb{N}$ sofort $\{0,1\} \subseteq_{endl} X$ mit $f(0,1) = \mathbb{N}$; damit ist f schon 2-kompakt.

[56] Es gibt *bcd*-Systeme, die keine Dzik-Systeme sind!

Die einfache Struktur von Dzik-Systemen ermöglicht, die saturierten Mengen zu identifizieren.

Sei dazu im Folgenden ein Dzik-System $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ gegeben.

1.10 Korollar (Saturiertheit): Sei $x \in S$ beliebiges Element und $X \subseteq S$ eine Menge mit $x \notin X$. Dann gilt das Folgende:

(1) Falls $[x] = \{x\}$ triviale Restklasse ist, dann ist X genau dann x-saturiert, wenn $X \cup \{x\}$ die grundlegende Relation $\sim$ exakt schneidet.

Insbesondere ist dann $X \cup \{x\}$ maximal-konsistent.

(2) Ansonsten ist X genau dann x-saturiert, wenn X selbst die grundlegende Relation $\sim$ exakt schneidet.

Insbesondere ist dann X maximal-konsistent.

Beweis. Mit obiger Klassifikation von Dzik-Systemen trivial. Q.E.D.

Die Untersuchung von Dzik-Systemen in diesem Abschnitt wird mit einer Bemerkung zu Permutationen auf dem Grundraum S abgeschlossen:

1.11 DEF (Permutationen): Sei $\sim \subseteq S \times S$ eine Äquivalenzrelation auf einer nichtleeren Menge S, $\Pi := \{\pi : S \to S;\ \pi \text{ ist bijektiv}\}$ die Menge aller Permutationen auf S.

(1) *$\sim$-Verträglichkeit:* Eine Permutation $\pi : S \to S \in \Pi$ heißt *$\sim$-verträglich*, falls sie die Relation $\sim$ erhält, also für alle $x \in S$ gilt: $\pi(x) \in [x]$.

(2) *X-Stabilität:* Eine Permutation $\pi : S \to S \in \Pi$ heißt *X-stabil* für ein Menge $X \subseteq S$, falls die Einschränkung $\pi|_X = \mathrm{Id}$ die Identität ist.

Ist $X = \{x\}$ dabei einelementig, wird π auch als x-stabil bezeichnet.

(3) *Permutationsmenge:* $\Pi_{\sim,X} := \{\pi \in \Pi;\ \pi \text{ ist } \sim\text{-verträglich \& } X\text{-stabil}\}$ ist die *Menge aller $\sim$-verträglichen und X-stabilen Permutationen.*

Analog zu oben bezeichnet $\Pi_{\sim,x} := \Pi_{\sim,\{x\}}$

1.12 Satz (Klassifikation saturierter Mengen): Sei $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ beliebiges Dzik-System, $X \subseteq S$ x-saturiert für ein $x \in S$ und $\sim$ die grundlegende Relation. Dann gilt:

$$\{Y \subseteq S;\ Y \text{ ist } x\text{-saturiert}\} = \{\pi(X);\ \pi \in \Pi_{\sim,x}\}$$

Beweis. Folgt direkt aus obigem Korollar zur Saturiertheit. Q.E.D.

- *abd*-Systeme -

Deduktive Systeme mit lediglich den relevanten Eigenschaften extrem, punkttreu und gleichbleibend sind – wie schon die *bcd*-Systeme – echt allgemeiner als Dzik-Systeme. Dennoch lassen sie sich recht einfach klassifizieren:

Sei dazu ein *abd*-System $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ mit $|S| > 2$ gegeben.

Grundlegende Relation: Es ist möglich, dass die grundlegende Relation $\sim$ nur triviale Restklassen besitzt. Die Identität $\mathrm{Id}_{\mathfrak{p}(S)}$ ist ein Beispiel hierfür. Damit lassen sich zwei Typen von *abd*-Systemen unterscheiden, je nachdem, ob es eine nichttriviale Restklasse gibt oder nicht.

Ist $\mathcal{S}$ ein *abd*-System, so dass alle Restklassen trivial sind, dann läßt sich $\mathcal{S}$ der Identität $\mathrm{Id}_{\mathfrak{p}(S)}$ zuordnen; andernfalls gibt es ein Dzik-System $\mathcal{S}' = \langle S, f' \rangle$ mit gleicher grundlegender Relation und f läßt sich f' zuordnen.

Wie der folgende Satz zeigt, ist diese Zuordnung kanonisch:

1.13 Satz (Zuordnung): Ist $\mathcal{S}' = \langle S, f' \rangle$ das wie oben zugeordnete System zu $\mathcal{S}$, dann gilt für alle $S \neq X \subset S$ das Folgende:

(1) Ist $f(X) \neq f'(X)$, dann ist $f(X) = S$.
Weiter gilt dann für alle $Y \supseteq X$: $f(Y) = S$.

(2) Ist $f(X) = f'(X)$, dann gilt für alle $Y \subseteq X$: $f(Y) = f'(Y)$.

Bew. (*Skizze*): Beide Aussagen folgen sofort aus der Tatsache, dass f und f' extreme K-Operationen sind. (Für die zweite Aussage bei (1) wird die Monotonie von f benötigt.) Q.E.D.

Bemerkung (Zuordnung): Damit wird deutlich, dass *abd*-Systeme und zugeordnete Systeme sich von unten her (ein Stück weit) nicht unterscheiden. Sobald sie sich unterscheiden, werden die Mengen widersprüchlich (in Bezug auf die *abd*-Systeme).

Damit ist auch klar, dass sich keine Korrespondenz zwischen *abd*-Systemen und den zugehörigen Systemen hinsichtlich Maximalkonsistenz und Saturiertheit etablieren läßt; damit kann diese Zuordnung nicht – zumindest nicht direkt – für das Miller'sche Projekt fruchtbar gemacht werden.

Anhang B: Extremifikation

In diesem Anhang wird eine weitere Konstruktionsmethode für deduktive Systeme, die *Extremifikation*, vorgestellt. Dabei werden aus kompakten Systemen extreme Systeme mit denselben relevanten Eigenschaften konstruiert.

Dennoch ist die Extremifikation (bisher) nicht für das Miller'sche Projekt verwertbar, da im Allgemeinen keine Möglichkeit gefunden wurde, die Saturiertheit im extremifizierten System mit der im ursprünglichen in Bezug zu setzen.

Sei dazu ein beliebiges (!) deduktives System $\mathcal{S} = \langle S, f \rangle$ gegeben.

Bemerkung (Grundraum): Der Grundraum bleibt bei der Extremifikation unverändert; dementsprechend genügt es hier, die extremifizierte K-Operation als induzierte Abbildung einzuführen.

2.1 Konstruktion (Extremifizierte Abbildung): Aus der Bildmenge $\mathfrak{Im}(f)$ wird eine neue Teilmenge $\mathfrak{M}$ der Potenzmenge $\mathfrak{p}(S)$ des Grundraumes konstruiert:

$$\mathfrak{M} := \{Z \in \mathfrak{p}(S);\ \exists Y \in \mathfrak{Im}(f) : \big(Y \neq S \wedge Z \subseteq Y\big)\} \cup \{S\}$$

Die induzierte Abbildung $f_e := f_{\mathfrak{M}}$ heißt *extremifizierte Abbildung von* f, das Tupel $\mathcal{S}_e = \langle S, f_e \rangle$ *extremifiziertes System.*

Der folgende Hilfssatz erleichtert die weitere Diskussion der extremifizierten Abbildung f_e; insbesondere auch die Prüfung, ob sie eine K-Operation ist.

2.2 Hilfssatz (Eigenschaften von f_e): Die erzeugende Menge $\mathfrak{M}$ ist $\cap$-stabil, also ist $\mathfrak{Im}(f_e) = \mathfrak{M}$. Weiterhin ist die extremifizierte Abbildung f_e extrem und es gilt genau dann $f_e(X) = S$, wenn $f(X) = S$ ist.

Beweis. Es ist Mehreres zu zeigen:

(1) $\mathfrak{M}$ *ist* $\cap$*-stabil:* Sei $\varnothing \neq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$ nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{M}$.

Ohne Einschränkung sei $S \notin \mathfrak{X}$. (Dies ändert nichts am Schnitt, außer im Fall $\mathfrak{X} = \{S\}$; dann ist aber nichts zu zeigen.) Dann gibt es für alle $X \in \mathfrak{X}$ nach Konstruktion ein $S \neq Y_X \in \mathfrak{Im}(f)$ mit $X \subseteq Y_X$. Damit gilt:

$$\bigcap \mathfrak{X} \subseteq \bigcap \{Y_X;\ X \in \mathfrak{X}\} =: X$$

Aufgrund der $\cap$-Stabilität von $\mathfrak{Im}(f)$ ist $S \neq X \in \mathfrak{Im}(f)$. Daraus folgt, da $\bigcap \mathfrak{X} \subseteq X$ ist, nach Konstruktion: $\bigcap \mathfrak{X} \in \mathfrak{M}$.

(2) f_e *ist extrem:* Da $\mathfrak{M}$ $\cap$-stabil ist, gilt: $\mathfrak{Im}(f_e) = \mathfrak{M}$. Weiterhin gilt offenbar für alle $X \in \mathfrak{M}$ und $Y \subseteq X$, dass $Y \in \mathfrak{M}$. Damit ist aber f_e tatsächlich extrem.[57]

[57] Vgl. hierzu das Kriterium für zentrale Begriffe, Charakterisierung von extrem, §3.

(3) *Äquivalenz:* Zunächst gilt $f(S) = S = f_e(S)$.

Sei also ohne Einschränkung $X \neq S$. Dann gilt $f_e(X) = S$ genau dann, wenn $X \notin \mathfrak{M}$. Das aber gilt genau dann, wenn $X \notin \mathfrak{Im}(f)$ und für alle Mengen Y mit $X \subseteq Y \neq S$ gilt, dass $Y \notin \mathfrak{Im}(f)$. Das ist aber genau dann der Fall, wenn $f(X) = S$. Q.E.D.

2.3 Korollar (Maximalkonsistenz): Falls f_e eine K-Operation ist, dann haben f und f_e dieselben maximalkonsistenten Mengen.[58]

Beweis. Die Behauptung folgt sofort daraus, dass $f(X) = S$ genau dann gilt, wenn $f_e(X) = S$ gilt. Q.E.D.

2.4 Satz (K-Operation): Falls die K-Operation f kompakt ist, dann ist die extremifizierte Abbildung f_e ebenfalls eine K-Operation mit $\mathfrak{Im}(f) = \mathfrak{M}$ und entsprechend $\mathcal{S}_e = \langle S, f_e \rangle$ ein deduktives System.

Beweis. Zu zeigen ist hier lediglich noch die Endlichkeit von f_e.

Sei dazu $X \subseteq S$ und $x \in f_e(X)$ gegeben.

Falls $f_e(X) = S$ gilt, dann ist mit obigem Hilfssatz $f(X) = S$. Aufgrund der Kompaktheit von f gibt es endliches $Y \subseteq_{endl} X$ mit $f(Y) = S$. Erneut gilt mit obigem Hilfssatz, dass $x \in S = f_e(Y)$.

Ansonsten ist $S \neq f_e(X)$. Da f_e extrem ist, gilt $f_e(X) = X$. Also ist $x \in X$. Damit gilt aber $\{x\} \subseteq_{endl} X$ und aufgrund der Reflexivität von induzierten Abbildungen ist $x \in f_e(x)$.

Jedenfalls wurde geeignete endliche Menge gefunden und f_e ist tatsächlich endlich. Q.E.D.

Bemerkung (Kompaktheit): Es wurde im obigen Satz die Kompaktheit der K-Operation f vorausgesetzt. Im Miller'schen Projekt ist diese Eigenschaft zunächst nicht relevant. Dort werden aber (unter anderem) 2-kompakte deduktive Systeme betrachtet. Aus 2-Kompaktheit folgt insbesondere auch schon Kompaktheit. Um also im Rahmen des Miller'schen Projektes die Extremifikation sinnvoll zu diskutieren, wird im Folgenden vorausgesetzt, dass die betrachteten K-Operationen f zumindest 2-kompakt sind.

2.5 Satz (Relevante Eigenschaften von f_e): Die extremifizierte Abbildung f_e von f ist extrem. Falls $|S| > 1$ ist, ist sie ist genau dann punkttreu, falls für alle $x \in S$ $f(x) \neq S$ gilt, jedenfalls 2-kompakt und, falls f gleichbleibend ist, auch gleichbleibend.

Beweis. Es sind mehrere Aussagen zu prüfen:

(1) *extrem:* Wurde im obigen Hilfsatz gezeigt.

[58] Die Einschränkung, dass f_e eine K-Operation ist, muss gemacht werden, da Maximalkonsistenz lediglich im Kontext deduktiver Systeme definiert wurde.

(2) *punkttreu:* Sei $|S| > 1$. Falls es ein $x \in S$ gibt mit $f(x) = S$, dann ist auch $f_e(x) = S$ und f_e nicht punkttreu.

Ansonsten gilt für jedes $x \in S$: $\{x\} \subseteq f(x) \neq S$ und damit $\{x\} \in \mathfrak{Im}(f_e)$. Damit ist $f_e(x) = \{x\}$ und f_e punkttreu.

(3) *2-kompakt:* Nach Voraussetzung ist f 2-kompakt.

Sei $X \subseteq S$ mit $f_e(X) = S$. Mit obigem Hilfssatz folgt, dass $f(X) = S$.

Damit gibt es höchstens 2-elementige Teilmenge $Y \subseteq_2 X$ mit $f(Y) = S$. Wieder folgt mit obigem Hilfssatz $f_e(Y) = S$.

Damit ist f_e ebenfalls 2-kompakt.

(4) *gleichbleibend:* Da mit obigem Hilfssatz $f_e(X) = S$ genau dann gilt, wenn $f(X) = S$ ist, ist auch f_e genau dann gleichbleibend, wenn es auch f ist. Q.E.D.

Bemerkungen:

(1) *Punkttreue:* Insbesondere folgt aus der Punkttreue von f, dass auch f_e punkttreu ist.

(2) *bcd-Systeme:* In Anhang A über die Struktursätze wurde angemerkt, dass die *bcd*-Systeme sich eindeutig einem Dzik-System zuordnen lassen vermöge der grundlegenden Relation. Hier kann dies konkretisiert werden: Ist $\mathcal{S}$ ein *bcd*-System, dann ist $\mathcal{S}_e$ das korrespondierende Dzik-System.

(3) *Saturiertheit:* Wie es schon für den Fall der *bcd*-Systeme festgehalten wurde, konnte keine Methode gefunden werden, aus der Saturiertheit im extremifizierten System auf die Saturiertheit im ursprünglichen zu schließen. Damit konnte die Extremifikation nicht im Miller'schen Projekt verwertet werden.

Anhang C: Problematik des Rückgriffs

Schon eingangs wurde festgestellt, dass Miller in seinem Projekt bereits bewiesene Sätze erneut und diesmal „ohne Rückgriff auf das AC“ zeigen möchte. Es wurde ebenfalls schon angedeutet, dass diese Wendung – das Wesentliche des Miller'schen Projektes – problematisch ist. In diesem Anhang soll diese Problematik skizziert und ein Weg angedeutet werden, wie ein formales Kriterium zur Entscheidung dieser Problematik entwickelt werden kann.

- Ausgangspunkt -

Wie von Miller festgestellt gibt es zwei prinzipiell unterschiedliche Weisen, den Millersatz $\mathrm{LB}\,abcd \Rightarrow \mathrm{LB}\,\varnothing$ zu zeigen. Der klassische Umweg über das AC:

$$\mathrm{ZFS}: \quad \mathrm{LB}\,abcd \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d\,AC} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{AC} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{WO} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{LB}\,\varnothing \quad (\star)$$

Oder ein Weg, wie Miller ihn beschreiten möchte. Etwa:

$$\mathrm{ZFS}: \quad \mathrm{LB}\,abcd \quad\Rightarrow\quad \mathrm{LB}\,bcd \quad\Rightarrow\quad \mathrm{LB}\,cd \quad\Rightarrow\quad \mathrm{LB}\,\varnothing \quad (\star\star)$$

Aufgrund seines Vorgehens ist klar, dass Miller in [ML] eine Lösung sucht, wie sie bei $(\star\star)$ gegeben ist, und dies im Gegensatz zu einer Lösung wie bei $(\star)$. Als Unterscheidungsmerkmal zwischen beiden Beweisvarianten nennt Miller den „Rückgriff auf das AC“.

Intuitiv erscheint es auch klar, dass sich beide Varianten unter diesem Kriterium unterscheiden. Offensichtlich findet in $(\star)$ ein Rückgriff auf das AC statt, wohingegen in $(\star\star)$ ausschließlich im Kontext deduktiver Systeme mit Lindenbaumsätzen argumentiert wird.

- Problematisierung -

Sofort lassen sich zwei prinzipielle Probleme mit dieser naiven[59] mathematischen Intuition ausmachen:

(1) Ein Beweis wie in $(\star)$, der aber direkt die Konsequenz $\mathrm{d\,AC} \Rightarrow \mathrm{WO}$ zeigt, würde auf eine explizite Verwendung des AC verzichten, wäre aber nicht im Sinne Millers.

Analog wäre ein Beweis wie in $(\star\star)$, bei dem aber zwischendurch eine im Sinne Millers nicht geeignete (und vielleicht bisher noch unbekannte) Variante des AC bewiesen und verwendet wird, nicht akzeptabel.

(2) In $(\star\star)$ geht das AC logisch insofern ein, dass jeder einzelne Satz, der als Voraussetzung bei der Etablierung der Konsequenzen verwendet wird, für sich schon äquivalent zum AC ist.

[59] Das Wort „naiv“ wird hier analog zur Verwendung in „naive Mengenlehre“ gebraucht; insbesondere also nicht pejorativ. Vgl. dazu [FgM, S. 1]. Ein naiver Zugang ist gerechtfertigt, solange er nicht zu logischen Problemen führt. Dann aber muss dieser reflektiert und mit tiefergehenden Reflexionen gestützt werden.

Es ist also eine tragfähige Unterscheidung der beiden Beweisvarianten und der darin vorkommenden Sätzen zu finden, die zudem die Miller'schen Intuition hinsichtlich des Rückgriffes auf das AC unterstützt.

- Vagheit -

Miller selbst nennt den Rückgriff auf das AC ein vages Kriterium.[60] Das erscheint zumindest philosophisch fragwürdig.

Das klassische Beispiel von Vagheitsproblemen ist das Soritenparadoxon: Dabei wird zunächst festgehalten, dass jeder *einige Sandkörner* von einem ganzen *Haufen von Sandkörnern* unterscheiden kann. Anschließend wird argumentiert, dass durch Hinzulegen eines einzelnen Sandkorns niemals aus einem Nicht-Haufen ein Haufen entstehen kann. Jeder Versuch, zwischen beiden Extremen eine klare Grenze zu ziehen, scheitert. Daraus wird geschlossen, dass es keine klare Grenze zwischen den klar unterschiedenen Begriffen Sandkörner und Sandhaufen gibt.

Ganz im Gegensatz dazu erscheint das hier diskutierte Problem. Die mathematische Intuition spricht eindeutig für eine scharfe Grenze. Man kann das AC nicht nur ein wenig, ein wenig mehr oder zu sehr verwenden. Entweder findet ein Rückgriff statt, oder eben nicht.

Beim Rückgriff auf das AC liegt die im klassischen Soritenparadoxon gegebene, klare Unterscheidung der beiden Extreme im Dunkeln. Intuitiv wird hier erkannt, dass sich die beiden Beweisvarianten wesentlich unterscheiden; es kann aber (bisher) nicht präzisiert werden, worin diese Unterscheidung begründet ist. Entsprechend wird in dieser Arbeit darauf verzichtet, die hier diskutierte Problematik vage zu nennen.

- Präzisierung der Unterscheidung -

Oben vorgestellte Beweisvarianten unterscheiden sich, insofern das AC in der Beweisvariante ($\star$) sowohl als Antezedens als auch als Sukzedens einer der oben genannten, direkten Konsequenzen vorkommt. Beides passiert in ($\star\star$) nicht.

Die Wendung „Rückgriff" spricht dafür, dass diejenige Konsequenz, die das AC als Voraussetzung hat, wesentlich verhindert, dass die Variante ($\star$) im Sinne des Miller'schen Projektes akzeptabel ist.

Damit wäre eine Konsequenz, in der das AC aus einer Variante des Satzes von Lindenbaum bewiesen wird, im Miller'schen Projekt erlaubt. Da das AC aber nicht weiter verwendet werden dürfte, wäre eine solche Beweisvariante sicherlich derart verkürzbar, dass diese Konsequenz nicht mehr darin vorkäme.[61]

Weiterhin muss hier noch hinzugefügt werden, dass es für das Miller'sche Projekt unwesentlich ist, ob tatsächlich das AC selbst als Voraussetzung einer Konsequenz dient. Vielmehr ist im Sinne Millers wesentlich, ob als Voraussetzung eine Variante des Satzes von Lindenbaum verwendet wird. Falls ja, dann findet im

[60] Vgl. dazu [ML,§8].

[61] Hätte man an dieser Stelle ein Kriterium, um die erlaubten Konsequenzen zu bestimmen, dann könnte man damit auch sogleich die nützlichen Konsequenzen finden. Man muss das Kriterium dann lediglich auf das Sukzedens anwenden!

Sinne von Miller kein Rückgriff auf das AC statt. Wird hingegen irgendeine andere Variante des AC verwendet (das Lemma von Zorn, WO, AC oder eine gänzlich unbekannte), dann findet ein Rückgriff statt.

Damit müßte die Anforderung „ohne Rückgriff auf das AC“ präziser „nur mit Rückgriff auf Lindenbaumsätze“ lauten. Es bleibt an dieser Stelle noch anzumerken, dass aufgrund der Tatsache, dass alle diskutierten Sätze äquivalent zum AC und in der Mengenlehre nicht beweisbar sind, ein solcher Rückgriff auf eine Voraussetzung jedenfalls notwendig ist.

- Reduktion auf Sätze -

Es ist also zu prüfen, ob in den einzelnen Teilbeweisen als Voraussetzung ein Lindenbaumsatz oder eine andere Variante des AC eingeht. Hier deutet sich an, dass das Problem mithilfe der Gödelisierung der Mengenlehre ZFS gelöst werden könnte, indem nämlich eine einstellige Formel $\Phi_{\text{Miller}} \in \mathfrak{L}_{\text{DPA}}$ in der Sprache der Arithmetik angegeben wird, die die Intuition Millers in der Arithmetik DPA repräsentiert. Das bedeutet:

(1) Falls $\mathfrak{D}$ ein Beweis ist, der den Miller'schen Intuitionen genügt, dann gilt:
$\text{DPA} \vdash \Phi_{\text{Miller}}(\ulcorner\mathfrak{D}\urcorner)$.

(2) Anderenfalls gilt: $\text{DPA} \vdash \neg\Phi_{\text{Miller}}(\ulcorner\mathfrak{D}\urcorner)$.

Dabei ist $\ulcorner\mathfrak{D}\urcorner$ die Gödelnummer des Beweises $\mathfrak{D}$. Auf eine konkrete Ausführung dieser Gödelisierung kann hier verzichtet werden.

Welche Sätze überhaupt – insbesondere solche, die zum AC äquivalent sind, oder auch solche, die nicht in der Mengenlehre beweisbar sind – in einen Beweis eingehen, läßt sich beweistheoretisch recht einfach fassen. Damit reduziert sich das Problem darauf, eine tragfähige Unterscheidung logisch äquivalenter Sätze zu finden, die sich hinsichtlich ihres Kontexts unterscheiden.

Dann wäre es mathematisch beweisbar, ob ein vorgegebener Beweis $\mathfrak{D}$ den Intuitionen hinsichtlich des Rückgriffs auf das AC und damit Millers Anforderungen genügt.

- Syntaktische Unterscheidung -

Im Folgenden wird das syntaktische Vorgehen weiter diskutiert. Es wird ein repräsentierbares Kriterium gesucht, um Lindenbaumsätze von anderen zu unterscheiden, damit die Definition eines einstelligen Prädikates, wie oben angedeutet, gelingen kann.

Dazu wird zunächst ein sehr einfaches Kriterium vorgestellt; anschließend wird diskutiert, wie man aus diesem zu einem angemessenen gelangen kann. Auf eine konkrete Ausführung dieser Erweiterungen wird hier verzichtet.

3.1 Kriterium (Lindenbaumsatz): Eine Aussage ϕ ist genau dann ein Lindenbaumsatz, wenn ϕ syntaktisch gleich mit einer Variante LB α ist, wobei $\alpha \subseteq \{a, b, c, d\}$ eine geeignete Teilmenge ist.

Es ist offenbar, das mit diesem Kriterium die Beweisvariante ($\star$) ausgeschlossen werden kann, und alle Millersätze, die Miller beweist beziehungsweise die in dieser Arbeit bewiesen wurden, diesem Kriterium genügen.

Weiter läßt sich festhalten, dass dieses Kriterium ohne Probleme in der Sprache der Arithmetik repräsentiert werden kann.

- Erweiterung des Kriteriums -

Im Folgenden wird obiges Kriterium analysiert und aufgezeigt, welche Probleme mindestens noch zu lösen sind, um ein adäquates Kriterium zu erhalten.

(1) *Gebundene Umbenennung:* Varianten des Satzes von Lindenbaum, die aus den oben aufgelisteten durch gebundene Umbenennung hervorgehen, dürfen sicher auch im Miller'schen Projekt verwendet werden. (Derartige Varianten wurden wohl auch bei Miller und in dieser Arbeit verwendet.)

Diese Erweiterung des vorgelegten Kriteriums ist aber relativ einfach.

(2) *Logische Varianten:* Zu jedem der oben festgelegten Sätze gibt es logisch äquivalente Varianten. Einige davon – etwa LB $\varnothing \vee$LB $\varnothing$ oder auch ein Satz der Form „*Jedes deduktive System, das extrem oder punkttreu ist, erlaubt Saturierung*“ – müßten vom obigen Kriterium ebenfalls erfaßt werden.

Diese Erweiterung sollte durch gegeignete rekursive Aufzählung der erlaubten Varianten lösbar sein.

Andere logische Varianten sind hingegen problematisch: Die Verwendung von LB $\varnothing \vee$ AC wäre sicher nur dann im Miller'schen Projekt erlaubt, wenn im Beweis tatsächlich lediglich auf die erste Hälfte der Disjunktion zurückgegriffen wurde. In diesem Fall kann man den Satz ersetzen durch einen Satz, der gänzlich im Kontext deduktiver Systeme formuliert wird.

Hier könnten Normalformen der vorgelegten Beweise verwendet werden.

(3) *Unbekannte Varianten:* Verschärfen läßt sich das Problem der Unbekannten durch den Hinweis auf weitere, bisher nicht entdeckte Varianten des Satzes von Lindenbaum. Die im §2 diskutierte Zufälligkeit der relevanten Eigenschaften hat schon einen Ausblick darauf gegeben, dass mit weiteren Varianten des Satzes von Lindenbaum zu rechnen ist. Die Verwendung dieser neuen Lindenbaumsätze wäre nicht mehr durch dieses Kriterium gedeckt, aber immer noch im Sinne Millers.

Dieses Problem könnte dadurch gelöst werden, dass man beliebige relevante Eigenschaften bei der Beschreibung des deduktiven Systems zuläßt und zusätzlich auf Äquivalenz zum AC prüft.

(4) *Neue Satzformen:* Desweiteren sind unbekannte Varianten des Satzes von Lindenbaum problematisch, die eine andere Satzstruktur haben als die bisherigen. Miller selbst diskutiert in [ML] eine weitere Variante LB_0 des Satzes von Lindenbaum, in der lediglich die Existenz einer saturierten Menge gewährleistet wird. Dieser Satz hat eine andere Form als die bisher eingeführten Varianten. Dennoch ist sie zum AC äquivalent und damit im Miller'schen Projekt verwendbar.

Mit dem letzten Punkt deutet sich an, dass das hier vorgelegte Kriterium (samt allen Erweiterungen) ein vorläufiges bleiben wird, welches neuen Erkenntnissen immer wieder angepaßt werden muss.

Die umgangssprachliche Beschreibung kann hier nur präzisierend interpretiert werden. So kann es nur Ziel sein, eine möglichst große Klasse von Sätzen zu definieren, die dem Kriterium „*ein Lindenbaumsatz zu sein*“ genügen.

- Logische Unterscheidung -

Abschließend soll auf eine weitere Methode der Unterscheidung verschiedener, in der Mengenlehre äquivalenter Sätze aufmerksam gemacht werden: die Untersuchung echter Fragmente der Mengenlehre. Ziel wäre dabei, zumindest ein Fragment zu finden, in dem die Äquivalenz der Sätze nicht mehr bewiesen werden kann.[62]

Daraus könnte eine mathematisch tragfähige Unterscheidung von in der Mengenlehre äquivalenten Sätzen resultieren. Dennoch kann auf diese Weise nicht garantiert werden, dass die Problematik des Miller'schen Projektes gelöst wird.

Es müßte zunächst ein Fragment gefunden werden, in der alle (!) im Miller'schen Projekt erlaubten Sätze von den verbotenen unterschieden werden können. Der Nachweis, dass in diesem Fragment alle im Projekt erlaubten Sätze von den verbotenen unterschieden werden können, setzt an dieser Stelle schon das Wissen voraus, welche Sätze erlaubt und welche verboten sind. Damit wird genau das Kriterium vorausgesetzt, welches gerade gesucht wird.

- Zusammenfassung -

Es wurde skizziert, wie rein syntaktisch ein Kriterium gefunden werden kann, Lindenbaumsätze vorläufig von anderen Sätzen zu unterscheiden. Es wurden einige technische Schwierigkeiten genannt und Ideen zur Lösung vorgeschlagen. Weiter wurde angedeutet, dass mit dieser syntaktischen Unterscheidung der Sätze ein formales Kriterium entwickelt werden kann, im Sinne des Miller'schen Projekts geeignete Beweisvarianten von ungeeigneten zu unterscheiden. Auf eine tiefergehende, formale Ausführung der Skizze wird hier verzichtet, da diese Ideen genügend Raum für eine eigenständige Arbeit bieten.

[62]Den Hinweis auf diese Methode verdanke ich Herrn Reinhard Kahle.

Literaturverzeichnis

In dieser Arbeit wurde die folgende Literatur verwendet:

[TR1] Alfred Tarski: On Some Fundamental Concepts of Metamathematics
in: Alfred Tarski, *Logic, Semantic, Metamathematics*, Oxford, At the Clarendon Press, 1956, S. 30–37

[TR2] Alfred Tarski: Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences
in: Alfred Tarski, *Logic, Semantic, Metamathematics*, Oxford, At the Clarendon Press, 1956, S. 60–109

[ML] David W. Miller: Some Lindenbaum Theorems Equivalent to the Axiom of Choice
Logica Universalis **1**, 2007, S. 183–199

[FgM] Ulrich Felgner: *Vorlesungen über Mengenlehre*,
unveröffentlichtes Vorlesungsmanuskript, Universität Tübingen, 2004

[FgL] Ulrich Felgner: *Vorlesung über Mathematische Logik*,
unveröffentlichtes Vorlesungsmanuskript, Universität Tübingen, 1998/99

[SH1] Peter Schroeder-Heister: *Mathematische Logik I*,
unveröffentlichtes Vorlesungsmanuskript, Universität Tübingen, 2008/09

[Dl] Dirk van Dalen: *Logic and Structure*,
Berlin, Springer-Verlag, 2004

[JC1] Thomas Jech: *The Axiom of Choice*,
Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1973

[JC2] Thomas Jech: *Set Theorie*,
Berlin, Springer-Verlag, 2002

Erklärung

Hiermit erkläre ich, René Gazzari, dass ich die Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Tübingen, 14. April 2010

René Gazzari