Funktoren zwischen Kategorien von Vektorräumen

Hans Strasburger

§ 1 Einleitung

Bei der Klassifikation natürlicher Vektorbündel über differenzierbaren Mannigfaltigkeiten – ein von J.W. Milnor gestelltes Problem – stieß D.B.A. Epstein auf die Frage, wie die Funktoren zwischen Kategorien endlich dimensionaler Vektorräume aussehen. Zusammen mit M. Kneser konnte er in [2] die Struktur vollständig klären für den Fall, daß die verwendeten Grundkörper von der Charakteristik Null sind. Bei der ersten Bearbeitung des Problems benötigte Epstein noch zusätzliche Voraussetzungen über die Funktoren, daß sie nämlich in einem gewissen Sinn "rational" oder "stetig" sind [1]. Schon mit diesem Hilfsmittel gelang ihm dennoch die Klassifikation der natürlichen Vektorbündel [3].

Obgleich in [2] die Ergebnisse aus [1] qualitativ verbessert wurden, möchte ich eine Besprechung der ersten Arbeit vorziehen, da sie einen tieferen Einblick in die Mathematik dieser Funktoren vermittelt.

Sei $\underline{V}(K)$ die Kategorie der endlich dimensionalen Vektorräume über dem Körper K, mit K-linearen Abbildungen als Morphismen. Wählt man sich in den Vektorräumen einer Kategorie Basen, so sind die Morphismen gegeben durch Matrizen von Körper-Elementen. Sind K und L zwei Körper, so vermittelt ein Funktor

$$F: \underline{V}(K) \to \underline{V}(L)$$

für jeden Vektorraum $V \in \underline{V}(K)$ einen Homomorphismus der Matrizen-Halbgruppen

$$F: \mathrm{Hom}_K(V, V) \to \mathrm{Hom}_L(FV,FV).$$

Insbesondere erhält man eine Darstellung der Gruppe GL(V,K) der regulären Endomorphismen von V. Die klassischen Ergebnisse aus der Darstellungstheorie der GL(V) und der symmetrischen Gruppen liefern wichtige Aufschlüsse über die Funktoren. Die erwähnten Eigenschaften "rational" oder "stetig" der Funktoren spielen dabei eine entscheidende Rolle [4: Kap. III-V].

Um die Ergebnisse formulieren zu können, benötigen wir einige Definitionen.

<u>1.0 Definitionen :</u>

<u>1.0.1:</u> Seien K, L Körper, C ein fester Vektorraum über L. Wir haben den <u>konstanten Funktor von V(K) nach V(L)</u>, der jedem K-Vektorraum den festen Raum C zuordnet und jedem Morphismus – auch einem 0-Morphismus aus $\underline{V}(K)$ - die identische

Abbildung $1_C \in \underline{V}(L)$. Für $\dim_L C=n$ sprechen wir vom <u>konstanten Funktor der Dimension n</u>.

<u>1.0.2:</u> Sei $K \subseteq L$, seien V, V' Vektorräume der Dimension n bzw. n' über K, und seien W, W' Vektorräume von der Dimension m, m' über L. Eine Funktion

$$\phi: \mathrm{Hom}_K(V,V') \to \mathrm{Hom}_L(W,W')$$

heißt <u>polynomisch</u> bzw. <u>rational</u>, wenn es $m \cdot m'$ Polynome bzw. rationale Funktionen q_{ij}, $i= 1,\text{–},m$, $j=1, \text{–},m'$, über L in jeweils $n \cdot n'$ Variablen gibt, sodaß

$$((a_{kl})) = \begin{pmatrix} q_{11}(a_{11},\text{-},a_{nn'}) & \cdots & q_{1m'}(a_{11},\text{-},a_{nn'}) \\ \vdots & & \vdots \\ q_{m1}(a_{11},\text{-},a_{nn'}) & \cdots & q_{mm'}(a_{11},\text{-},a_{nn'}) \end{pmatrix}$$

gilt für alle Matrizen $(a_{kl}) \in \mathrm{Hom}_K(V,V')$.

<u>1.0.3:</u> Hat der Grundkörper die Charakteristik Null und ist auf ihm eine Norm erklärt, so definiert man als Norm $||—||$ einer Matrix $A= (a_{ij})$ mit Koeffizienten a_{ij} aus diesem Körper:

$$||A|| = +\sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$$

Wenn wir im folgenden normierte Körper benötigen, beschränken wir uns im Hinblick auf den Satz von Pontrjagin [14: S.59] auf die Grundkörper $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ der reellen oder komplexen Zahlen.

<u>1.0.4:</u> Sind K und L gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so ist die <u>Stetigkeit</u> einer Funktion

$$\phi: \mathrm{Hom}_K(V,V') \to \mathrm{Hom}_L(W, W')$$

bezüglich dieser Norm $||—||$ definiert.

<u>1.0.5:</u> Damit ist auch erklärt, was man unter einer stetigen, rationalen oder polynomischen Darstellung über dem Körper L

$$\phi: GL(V) \to \mathrm{Hom}_L(W,W')$$

der allgemeinen linearen Gruppe versteht.

Die Struktur dieser drei Klassen von Darstellungen ist nun genau bekannt, es ist deshalb zweckmäßig, die Begriffsbildung auf Funktoren zu übertragen:

<u>1.0.6:</u> Ist $K \subseteq L$, so heißt ein <u>Funktor</u>

$$F: \underline{V}(K) \to \underline{V}(L)$$

polynomisch bzw. rational, wenn die durch ihn induzierten Abbildungen der Morphismenmengen

$$F: \mathrm{Hom}_K(V,W) \to \mathrm{Hom}_L(FV,FW)$$

polynomisch bzw. rational sind für alle Paare (V,W) von Vektorräumen aus $\underline{V}(K)$.

Sind K und L gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so heißt der Funktor stetig, wenn die induzierten Morphismen-Abbildungen stetig sind.

Die durch F induzierte Darstellung der GL (V), $V \in \underline{V}(K)$, hat dann jeweils die entsprechenden dieser drei Eigenschaften des Funktors.

1.0.7: Ein Funktor F: $\underline{V}(K) \to \underline{V}(L)$ heißt Subfunktor von G: $\underline{V}(K) \to \underline{V}(L)$, wenn, für alle $V \in \underline{V}(K)$, FV Unterraum von GV ist, und, für alle Morphismen f aus $\underline{V}(K)$, Ff übereinstimmt mit der Restriktion von Gf auf FV.

Ein Subfunktor eines rationalen, polynomischen oder stetigen Funktors hat selbst die entsprechende Eigenschaft.

1.0.8: Ein Funktor heißt irreduzibel, wenn 0 und F die einzigen Subfunktoren sind.

F ist zum Beispiel irreduzibel, wenn für alle $V \in \underline{V}(K)$ die induzierte Darstellung der GL (V) irreduzibel ist, denn gäbe es einen echten nichttrivialen Subfunktor F' von F, so auch einen Vektorraum $V \in \underline{V}(K)$, sodaß F'V echter nichttrivialer Unterraum von FV wäre, der unter allen Morphismen $F'g = Fg \mid_{F'V}$ invariant bliebe.

1.1 Klassische Darstellungstheorie der GL(V)

Ich möchte das Vorgehen der klassischen Darstellungstheorie der GL(V) kurz skizzieren, weil es ein Licht auf die Methode der vorliegenden kategoriellen Untersuchungen wirft:

Für zwei natürliche Zahlen n und f gibt es einen Vektorraum über K, auf dem man GL(n,K) und die symmetrische Gruppe S(f) gemeinsam darstellen kann, so daß sich die Darstellungen zentralisieren, nämlich das Tensorprodukt von f Exemplaren des Standard-Raums V der Dimension n über K, genannt: f-te Tensorpotenz $\otimes^f_K V$. Dabei stellt man GL kanonisch dar: Für $A \in GL(n,K)$ operiert das f-fache Kronecker-Produkt $\otimes^f_K A$ auf $\otimes^f V$. S(f) stellt man durch Permutation der Faktoren dar, d.h. ist $\sigma \in S(f)$, so wirkt σ auf einem typischen Element:

$$\sigma: v_1 \otimes \ldots \otimes v_f \to v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(f)}.$$

Die Darstellungen der S(f) sind bekannt nach zwei Sitzungsberichten von Frobenius 1900 und 1903. A. Young hatte die Theorie unabhängig entwickelt. Nach ihm

werden die verwendeten Young-Diagramme benannt (eine gute Darstellung findet man in v. d. Waerden [13]).

Die irreduziblen Bestandteile der Darstellungen der GL kann man nun berechnen, da sie sich mit den Darstellungen der Symmetrischen Gruppen zentralisieren [4].

1.2 Beispiele

1.2.a: Die Tatsache, daß sich die beschriebenen Darstellungen zentralisieren, kann man kategoriell so ausdrücken:

Sei $\otimes^f$: $\underline{V}(K) \to \underline{V}(L)$ der Funktor, der definiert ist durch

$$V \to \otimes^f_K V \otimes_K L \qquad \text{für } V \in \underline{V}(K)$$

$$g \to \otimes^f_K g \otimes_K 1_L \qquad \text{für } g\colon V \to W \in \underline{V}(K)$$

(Für f=0 sei $\otimes^f$ der konstante Funktor der Dimension 1.) Sei der Gruppenring LS(f) dargestellt wie oben, d. h. für

$$\sum_{\sigma \varepsilon S(f)} \alpha_\sigma \cdot \sigma \quad \varepsilon LS(f)$$

gelte

$$\alpha\colon\ v_1 \otimes \ldots \otimes v_f \longmapsto \sum_{\sigma \varepsilon S(f)} v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(f)} \otimes \alpha_\sigma$$

Dann bewirkt α eine natürliche Transformation des Funktors $\otimes^f$ in sich, da

$$\begin{tikzcd}
\otimes^f V \otimes_K L \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\otimes^f g \otimes 1_L"] & \otimes^f V \otimes_K L \arrow[d, "\otimes^f g \otimes 1_L"] \\
\otimes^f W \otimes_K L \arrow[r, "\alpha_W"] & \otimes^f W \otimes_K L
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist für alle $g\colon V \to W \in \underline{V}(K)$.

Restringiert man $\otimes^f g \otimes^1 L$ auf $\mathrm{Im}(\alpha V)$, so gilt

$$\otimes^f g \otimes 1\colon\ \mathrm{Im}(\alpha_V) \longrightarrow \mathrm{Im}(\alpha_W),$$

d.h., der Funktor $\mathrm{Im}\alpha$: $\underline{V}(K) \to \underline{V}(L)$ mit

$$V \to \mathrm{Im}(\alpha_V)$$

$$g \to \otimes^f g \otimes^1 |\mathrm{Im}\,(\alpha_V)$$

ist Subfunktor von $\otimes^f$ mit der epimorphen natürlichen Transformation

$$\alpha\colon \otimes^f \to \mathrm{Im}\alpha.$$

$\otimes^f$ ist ein natürlich polynomischer Funktor (sogar "homogen" vom Grad f", d.h. die Koeffizienten der Matrizen $\otimes^f A$ sind Monome, einfache Potenzprodukte der Koeffizienten von A vom Grad f, und zwar kommen alle möglichen Potenzprodukte vor), ebenso $\mathrm{Im}\alpha$ als Subfunktor und direkte Summen von $\otimes^{fi}$ oder $\mathrm{Im}\alpha_i$. Daß dies für Körper der Charakteristik Null bereits alle möglichen polynomischen, ja sogar alle möglichen rationalen oder stetigen Funktoren sind, wird im Hauptsatz 1. 7 bewiesen.

<u>1.2.b:</u> Sei θ: $K \to L_1$ eine Körper-Einbettung (d. i. ein Körper-Monomorphismus), wobei L_1 eine endliche Körper-Erweiterung von L ist. Vermittels θ ist L_1 ein (K,L)-Modul. Wir haben einen Funktor F: $\underline{V}(K) \to \underline{V}(L)$, der V abbildet auf $V \otimes_K L_1$. Insbesondere erhalten wir einen nichtstetigen Funktor $\underline{V}(\mathbb{R}) \to \underline{V}(\mathbb{R})$, wenn wir eine nichtstetige Körper-Einbettung θ: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ verwenden.

Adjungiert man zu L sämtliche Eigenwerte der Bilder von diagonalisierbaren Endomorphismen, dann erhält man einen Oberkörper L_1 von L, sodaß der Funktor

$$\underline{V}(K) \xrightarrow{F} \underline{V}(L) \xrightarrow{\otimes^1} \underline{V}(L_1)$$

zerfällt. Wir können definieren:

<u>1.3.3 Definition:</u> Der kleinste Körper L_1, sodaß der Funktor $\otimes^1 \circ F$ zerfällt, heißt <u>Zerfällungskörper</u> (splitting-field) von F.

In der vorliegenden Arbeit wird meist über dem Zerfällungskörper gearbeitet.

<u>1.4</u> <u>Diagonal-Funktoren</u>

<u>1.4.1 Definition:</u> Ein Funktor F heißt Diagonal-Funktor, wenn die Bilder Ff aller diagonalisierbaren Endomorphismen f ebenfalls diagonalisierbar sind. Hier ist der bekannte Satz von Interesse [13]:

<u>1.4.2 Satz:</u> Ein Endomorphismus g ist genau dann diagonalisierbar, wenn alle Eigenwerte im Körper liegen und für jeden Eigenwert c mit der Vielfachheit k gilt:

$$\mathrm{Rang}\,(g - cE) = n - k.$$

Jeder Diagonalfunktor ist also insbesondere zerfallend. Beispiel 1. 2.b zeigt, daß nicht jeder Funktor diagonal ist, selbst wenn man den Körper erweitert; Beispiel 1.2.c zeigt, daß nicht jeder Funktor zerfällt.

Nun können die Hauptergebnisse der Arbeit formuliert werden:

1.5 Satz:

Sei K ein unendlicher Körper, F: $\underline{V}(K) \to \underline{V}(L)$ ein nicht-konstanter Diagonal-Funktor. Dann gibt es eine Körper-Einbettung von K in L (d.h. einen Körper-Monomorphismus). Insbesondere haben K und L die gleiche Charakteristik.

1.5.1 Definitionen: Sei $\underline{V}(K)^n = \underline{V}(K) \times \ldots \times \underline{V}(K)$ (n Exemplare) und $\underline{V}(K)^0$ die Kategorie mit einem Objekt (K als Vektorraum über sich selbst) und einem Morphismus (1_K).

$$\Delta: \underline{V}(K) \to \underline{V}(K)^n$$

bezeichnet die Diagonale, d.h.

$$V \xrightarrow{\Delta} (V, \ldots, V)$$

$$F \xrightarrow{\Delta} (f, \ldots, f)$$

Ein Funktor F heißt direkte Summe von Subfunktoren F_α, wenn für alle $V \in \underline{V}(K)$ gilt:

$$FV \cong \bigoplus_\alpha F_\alpha V,$$

und für alle $f \in \underline{V}(K)$ gilt:

$$Ff \cong \bigoplus_\alpha F_\alpha f,$$

wobei

$$\begin{tikzcd} FV \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "Ff"] & \bigoplus_\alpha F_\alpha V \arrow[d, "\bigoplus_\alpha F_\alpha f"] \\ FW \arrow[r, "\cong"] & \bigoplus_\alpha F_\alpha W \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

1.6 Satz:

Sei F: $\underline{V}(K) \to \underline{V}(L)$ Diagonal-Funktor, wobei charK = charL = 0. Dann zerfällt F in eine direkte Summe von Funktoren F_α: $\underline{V}(K) \to \underline{V}(L)$, und für jedes F_α gibt es einen in allen Variablen additiven Funktor G_α: $\underline{V}(K)^{n(\alpha)} \to \underline{V}(L)$, sodaß F direkter Summand ist des zusammengesetzten Funktors

$$\underline{V}(K) \xrightarrow{\Delta} \underline{V}(K)^{n(\alpha)} \xrightarrow{G_\alpha} \underline{V}(L).$$

Explizit ist also $F_\alpha V$ direkter Summand von $G_\alpha(V, \ldots, V)$.

1.7 Satz:

Seien $K \subseteq L$ Körper der Charakteristik Null und $F: \underline{V}(K) \to \underline{V}(L)$ ein rationaler oder stetiger Funktor, wobei im zweiten Fall $K = \mathbb{R}$. Dann ist F diagonal (und deshalb zerfallend), und man kann 1.6 auf F anwenden. Es gilt sogar das folgende allgemeinere Ergebnis:

(i) F ist direkte Summe irreduzibler Subfunktoren F_β.

(ii) Zu einem irreduziblen Funktor F' gibt es eine natürliche Zahl n und ein primitives Idempotent $\alpha \in \mathbb{Q}S(n)$, sodaß $F' \cong \mathrm{Im}\alpha$.
(Ein primitives Idempotent ist ein Idempotent, das nicht als Summe zweier nicht verschwindender orthogonaler Idempotente ausgedrückt werden kann [4: S.57].)

(iii) Sind $\alpha \in \mathbb{Q}S(n)$ und $\beta \in \mathbb{Q}S(m)$ primitive Idempotente, dann ist $\mathrm{Im}\alpha \cong \mathrm{Im}\beta$ genau dann, wenn n=m und die Links-$\mathbb{Q}S(n)$-Moduln $\mathbb{Q}S(n)\alpha$ und $\mathbb{Q}S(n)\beta$ isomorph sind.

1.8 Bemerkung:

Die direkten Summen in 1.7 und 1.8 sind nicht notwendig endlich. Betrachte zum Beispiel den Funktor, der jedem Vektorraum E seine Tensoralgebra $\bigoplus_{i=0}^{\infty} E^i$ zuordnet [10: S. 422]. Andererseits ist aber wegen den endlichen Dimensionen der in Frage stehen den Vektorräume jede Funktor-Summe lokal endlich, d. h. ist $F \cong \bigoplus_\alpha F_\alpha$, dann ist für jedes $V \in \underline{V}(K)$: $F_\alpha V = 0$ für fast alle α.

1.9 Bemerkung:

In einer abelschen Kategorie gelten die üblichen Sätze über irreduzible oder einfache Objekte. So ist z. B. für nicht-isomorphe einfache Objekte A und B: Hom(A,B)=0 und Hom(A,A) ein Divisionsring (Schursches Lemma [4]); ist ein Objekt direkte Summe irreduzibler Unterobjekte, so ist jedes Unterobjekt direkte Summe einer Teilmenge der irreduziblen Unterobjekte. In unserem Fall sind die Kategorien $\underline{V}(K)$ und die Kategorie der Funktoren von $\underline{V}(K)$ nach $\underline{V}(L)$ abelsch. Sind zwei Zerlegungen $\bigoplus_\alpha F_\alpha$ und $\bigoplus_\beta F_\beta$ von F in irreduzible Subfunktoren gegeben, so gibt es deshalb für jedes α ein β mit $F_\alpha \cong F_\beta$ und die Anzahl der isomorphen F_α in einer gegebenen Isomorphieklasse ist die gleiche in jeder Zerlegung. Insbesondere ist solch eine Anzahl endlich, da für einen Vektorraum V, dessen Bild $F_\alpha V$ nicht

verschwindet, auch alle isomorphen Bilder $F_\beta V$ nicht verschwinden, der Unterraum

$\bigoplus_{F_\beta \cong F_\alpha} F_\beta V$ von FV aber endlich-dimensional ist.

1. 10 Überblick:

Betrachtet man zu einem gegebenen zerfallenden Funktor F: $\underline{V}(K) \to \underline{V}(L)$ für jeden Vektorraum $V \in \underline{V}(K)$ die durch F induzierte Darstellung der abelschen Gruppe der Skalar-Multiplikationen, so induzieren die bekannten Zerlegungen der Räume FV in Gewichts-Räume unter dieser Darstellung eine Zerlegung des Funktors in eine direkte Summe von Gewichts-Funktoren [10: Theorem II.7, S. 43]. Unter einem Gewicht eines Funktors versteht man dabei eine Abbildung α: K $\to$ L, die jedem Körper Element $\mu \in K$ einen Eigenwert des Funktorbildes $F(\mu V)$ der Skalar-Multiplikation von μ auf V zuordnet. (Die Definition ist – wie sich zeigt – unabhängig von der Wahl von V.) In §3 wird dies näher ausgeführt.

Die §§4 und 5 der Arbeit klären die Struktur dieser Gewichte für rationale, stetige und diagonale Funktoren. Dieser Teil der Arbeit ist es, der in der Fortsetzungsarbeit verbessert wurde, es stellte sich nämlich heraus, daß die Struktur der Gewichte schon festliegt, wenn die Grundkörper die Charakteristik Null haben, ohne die einschränkenden Voraussetzungen über die Funktoren [2].

Die in der Zerlegung eines Funktors auftretenden Gewichts-Funktoren sind "homogen" (Definition in 6.3). In §6 wird gezeigt, wie sie sich in einen zusammengesetzten Funktor

$$\underline{V}(K) \xrightarrow{\Delta} \underline{V}(K)^n \xrightarrow{G} \underline{V}(L)$$

einbetten lassen. Dabei bedeutet Δ die Diagonale, G ist additiv in jeder Variablen. Die Ergebnisse des Paragraphen sind in 1.6 zusammengefaßt.

in §7 wird abschließend 1.6 zum Hauptsatz 1.7 verschärft.

Der erwähnte Funktor G entsteht aus "Deviations-Funktoren" $F^{(n)}$, dabei wird eine Konstruktion von Eilenberg und MacLane auf Funktoren übertragen [6]. Hiermit beschäftigt sich §3.

In §2 des Artikels gab Epstein Hinweise für weitere Forschungen. Im Hinblick auf [2] wird er überflüssig.

In meinen Nummerierungen halte ich mich sehr eng an die Vorlage [1], um das Nachschlagen zu erleichtern.

Literatur (nur Originalarbeiten)

[1] D.B.A. Epstein: Group Representations and Functors. Am. Journ. Math. 1969, 395-414.

[2] D.B.A. Epstein and M. Kneser: Functors between categories of vector spaces. Springer Lecture Notes 99 {Category Theory, Homology Theory and their Applications III, Battelle Institute Conference 1968, 154-170.

[3] D.B.A. Epstein: Natural vector bundles. Ibid., 171-195.

[6] Eilenberg and MacLane: On the Groups H(π,n), II. Annals Math. 60 (1954), 75-83.