Die optimale Versteigerungsreihenfolge in sequentiellen Zweitpreisauktionen bei Synergieeffekten

RALF GAMPFER

Eberhard-Karls-Universität Tübingen

E-Mail: ralf@gampfer.de

Dezember 2000

Zusammenfassung

Auktionen, in denen mehrere, *unterschiedliche* Objekte *nacheinander* versteigert werden, sind in der Praxis weit verbreitet. Dabei stellt sich die Frage, in welcher *Reihenfolge* die einzelnen Objekte versteigert werden sollen. Der vorliegende Beitrag untersucht die *optimale Versteigerungsreihenfolge* in sequentiellen Zweitpreisauktionen mit vertikal differenzierten Objekten, in denen die Bieter mehrere Objekte nachfragen und zwischen den Objekten positive oder negative "*Synergieeffekte*" bestehen können. Dabei zeigt sich, dass die Versteigerungsreihenfolge nur im Falle "negativer Synergieeffekte" den erwarteten Erlös des Verkäufers beeinflusst und die Objekte dabei nach fallendem Wert versteigert werden sollten.

JEL-Klassifikation: D44

1 Einleitung

Bei den meisten in der Realität vorkommenden Auktionen wird nicht nur ein einzelnes Objekt versteigert, sondern typischerweise mehrere, *unterschiedliche* Objekte *nacheinander*. Dabei stellt sich die Frage, welchen Einfluß die *Versteigerungsreihenfolge* auf den erwarteten Erlös ausübt und welche optimale Versteigerungsreihenfolge daraus folgt.

Obwohl dieses Problem für die Praxis von großer Bedeutung ist, waren die ersten Beiträge, die sich mit der Versteigerungsreihenfolge in sequentiellen Auktionen auseinandergesetzt haben, überwiegend durch den Versuch motiviert, den sog. "Effekt fallender Preise" zu erklären. Nachdem Weber [1983] zeigte, dass die erwarteten Preise in sequentiellen Auktionen unter Independent-Privat-Value-Model-Annahmen konstant sind und im Falle affiliierter Informationen sogar steigen, aber Ashenfelter [1989] oder Mc Affee und Vincent [1993], u.v.a.m. in der Praxis tendentiell fallende Preise vorfanden, konzentrierte sich ein Großteil der Literatur im Bereich sequentieller Auktionen auf den Versuch, diese "Anomalie" zu erklären. Neben Beiträgen von Mc Affee und Vincent, die den Effekt fallender Preise mit einer besonderen Form von Risikoaversion erklärten oder von der Fehr [1994], der Partizipationskosten als Erklärungsansatz propagierte, gab es eine Reihe von Erklärungsversuchen, die an Webers Annahme identischer Objekte ansetzten. Unter der Annahme nicht identischer Objekte versuchte man dabei die Frage zu beantworten, ob es für den Verkäufer sinnvoll sein könnte, "wertvollere" Objekte zuerst zu versteigern, und deshalb die Preise in der Praxis tendentiell fallen.

Bernhardt und Scoones [1994] nahmen in diesem Zusammenhang an, dass die Wertschätzung der Bieter für die einzelnen Objekte aus Verteilungen mit unterschiedlichen Varianzen stammen und zeigten, dass es in diesem Fall für den Verkäufer sinnvoll ist, das Objekt mit größerer Varianz zuerst zu versteigern. Für den Fall zweier vertikal differenzierter Objekte zeigten Beggs und Graddy [1997], dass der Verkäufer das "wertvollere" Objekt zuerst verkaufen sollte. Während sowohl Bernhardt und Scoones als auch Beggs und Graddy von der -

in der Realität kaum beobachtbaren - Annahme ausgingen, dass jeder Bieter nur ein Objekt nachfragen kann, betrachteten Benoit und Krishna [1999] den Fall, dass der einzelne Bieter im Rahmen seiner Budgetrestriktion mehrere Objekte nachfragen kann. Benoit und Krishna beschränken sich dabei jedoch nur auf den Fall vollständiger Information. Unter der Annahme unvollständiger Information untersuchte Pitchik [1995] den Spezialfall, in dem zwei Objekte an nur zwei Bieter versteigert werden.

Im vorliegenden Beitrag soll unter IPVM-Annahmen ein Modell vorgestellt werden, in dem zwei vertikal differenzierte Objekte in einer sequentiellen Zweitpreisauktion an insgesamt n risikoneutrale Bieter versteigert werden. Dabei soll zugelassen werden, dass die Bieter mehr als nur ein Objekt nachfragen können und dass zwischen den Objekten "Synergieeffekte" bestehen können.[1] Auf Grundlage dieses Modells soll dann der Frage nachgegangen werden, welche Versteigerungsreihenfolge den erwarteten Erlös des Verkäufers maximiert. Dabei wird sich zeigen, dass die Versteigerungsreihenfolge nur im Falle "negativer Synergieeffekte" einen Einfluss auf den erwarteten Erlös des Verkäufers besitzt und es sinnvoll ist, das wertvollere Objekt zuerst zu versteigern.

Der Beitrag ist wie folgt aufgebaut: Abschnitt 2 wird das zugrundeliegende Modell darstellen, bevor es in Abschnitt 3 gelöst wird und die Gleichgewichtsstrategien für unterschiedliche Synergieszenarien bestimmt werden. Darauf aufbauend untersucht Abschnitt 4 die Frage der optimalen Versteigerungsreihenfolge, indem die erwarteten Erlöse des Verkäufer aus beiden Verkaufsreihenfolgen in den einzelnen Szenarien gegenübergestellt werden. Abschnitt 5 fasst die wesentlichen Ergebnisse zusammen.

[1] Synergieeffekte zwischen Objekten treten in der Praxis häufig auf. Werden beispielsweise 2 Bauaufträge ausgeschrieben, dann ist möglicherweise der zweite Bauauftrag für ein Unternehmen weniger wert, wenn es schon die 1. Ausschreibung gewonnen hat und damit die Kapazitäten ausgelastet sind (negative Synergieeffekte), während ein Kunstsammler ein bestimmtes Objekt möglicherweise höher bewerten wird, wenn er bereits ähnliche Objekte ersteigert hat und mit dem nächsten Objekt seine Sammlung komplettieren kann (positive Synergieeffekte).

2 Das Modell

Ausgangspunkt unserer Betrachtung sind zwei aufeinanderfolgende Zweitpreisauktionen, durch die zwei Objekte an insgesamt n risikoneutrale Bieter versteigert werden sollen. Die zwei zu versteigernden Objekte seien vertikal differenziert, d.h. eines der beiden Objekte wird von allen n Bietern gleichermaßen als das eindeutig wertvollere Objekt betrachtet. Um dies modelltechnisch zu erfassen, besitze jeder Bieter i (i=1,...,n; n>2) eine eigene Wertschätzung $k_1 v_i$ für das erste Objekt und eine eigene Wertschätzung $k_2 v_i$ für das zweite Objekt ($k_1, k_2 \in [1, \infty[$), wobei für den Fall, dass das "wertvollere" Objekt zuerst bzw. zuletzt versteigert wird, $k_1 < k_2$ bzw. $k_1 > k_2$ gelte. Ferner seien die einzelnen v_i nur dem jeweiligen Bieter i bekannt und werden als Realisationen der unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen V_i betrachtet, die alle die gleiche Gleichverteilungsfunktion $F(V_i) = V_i$, $v_i \in [0, 1]$ besitzen.

Um der Annahme Rechnung zu tragen, dass zwischen den Objekten unterschiedliche Synergieeffekte bestehen können, sei die Wertschätzung eines Bieters i für beide Objekte zusammen, analog zu Menezes und Monteiro [1999], $\delta(k_1 v_i, k_2 v_i) = \delta(k_1, k_2, v_i)$, eine Funktion in Abhängigkeit von k_1, k_2 und v_i. Für den Fall, dass $\delta(k_1, k_2, v_i) > k_1 v_i + k_2 v_i$ gilt, ist die Wertschätzung von Bieter i für die beiden Objekte zusammen größer als die Summe der Wertschätzungen für die Objekte einzeln, d.h. es liegen positive Synergieeffekte vor. Entsprechend gilt $\delta(k_1, k_2, v_i) < k_1 v_i + k_2 v_i$ im Fall negativer Synergien. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass es sich bei $\delta(k_1, k_2, v_i)$ um eine linear-separierbare Funktion $\delta(k_1, k_2, v_i) = p(k_1 + k_2) v_i$ handelt. Dadurch lassen sich keine, positive oder negative Synergieeffekte durch p gleich 1, größer 1 oder kleiner 1 modellieren.

Zur Vereinfachung der Notation bezeichne $v_{(1)} \geq v_{(2)} \geq ... \geq v_{(n)}$ die Ordnungsstatistiken der n Wertschätzungen. D.h. für ein gegebenes Tupel von Wertschätzungen $v_1, v_2, ..., v_n$ ist $v_{(1)}$ die höchste, $v_{(2)}$ die zweithöchste, usw. Analog bezeichne für Bieter i $y_{(1)} \geq y_{(2)} \geq ... \geq y_{(n-1)}$ die höchste, zweithöchste, usw. Wertschätzung der restlichen (n-1) Gegenspieler.

3 Lösung des Modells

Gemäß dem Rückwärtsinduktionsprinzip werden wir uns zuerst der Gleichgewichtsgebotsfunktion der zweiten Auktion zuwenden, bevor die gleichgewichtige Bietfunktion der ersten Auktion und damit das Bayesianische Gleichgewicht des gesamten Spiels bestimmt werden kann.

Da das Kalkül eines Bieters in der zweiten Auktion dem Kalkül einer einmaligen Zweitpreisauktion entspricht, existiert in der zweiten Auktion eine dominante Strategie für alle Bieter, die darin besteht, die eigene Wertschätzung zu bieten. Damit ergibt sich $b_i^{2*} = \delta(k_1, k_2, v_i) - k_1 v_i$ für den Bieter, der in der ersten Auktion das Objekt gewonnen hat und $b_j^{2*} = k_2 v_j$ für alle anderen Bieter j.

Betrachten wir nun die erste Auktion. Da sich das Gleichgewicht als Schnittpunkt der Reaktionsfunktionen ergibt, soll die Bedingung erster Ordnung für Bieter i hergeleitet und unter Ausnutzen der Symmetrieeigenschaften das Gleichgewichtsgebot bestimmt werden. Hierzu muß zunächst der erwartete Nutzen des Bieters i in Abhängigkeit des eigenen Gebotes x bestimmt werden. Er ergibt sich für den Fall, dass Bieter i die Wertschätzungen $k_1 v$ und $k_2 v$ besitzt und alle Gegenspieler die gleiche Gebotsfunktion $b(\cdot)$ verwenden, als:

$$\begin{aligned} U_i^e(x) = \quad & E[\chi_{x>b(y_1)} \left\{ k_1 v - b(y_{(1)}) + (\delta(k_1, k_2, v) - k_1 v - k_2 y_{(1)})^+ \right\} \\ & + \chi_{x<b(y_1)} (k_2 v - max \left\{ \delta(k_1, k_2, y_{(1)}) - k_1 y_{(1)}, k_2 y_{(2)} \right\})^+] \quad . \end{aligned}$$

Dabei stellt die erste Zeile den erwarteten Nutzen aus einem Sieg in der ersten Auktion mit der damit verbundenen Möglichkeit, auch die zweite Auktion zu gewinnen, dar, während die zweite Zeile den erwarteten Nutzen aus einem Sieg der zweiten Auktion, ohne Sieg in der ersten Auktion, beschreibt. Der Ausdruck $\chi_{x>b(y_1)}$ bedeutet, dass der nachfolgende Klammerausdruck nur dann Gültigkeit besitzt, wenn die indizierte Bedingung erfüllt ist. Ansonsten ist der Klammerausdruck null. In der ersten Zeile bedeutet das, dass der Klammerausdruck (erwarteter Nutzen aus dem Sieg der ersten Auktion) tatsächlich nur dann in die Berechnung der erwarteten Nutzen eingeht, wenn x das höchste Gebot darstellt.

Unter der Annahme, dass es sich bei der Bietfunktion der Gegenspieler von i ($b^1(v_{j,j\neq i})$) um eine streng monotone, stetige Funktion handelt (die folglich bijektiv und damit invertierbar ist), lässt sich mit Hilfe der Umkehrfunktion $\sigma(x)$ jedem x des Bieters i genau eine Wertschätzung ω zuordnen.[2] Damit läßt sich der erwartete Nutzen des Bieters i auch in Abhängigkeit einer Wertschätzung $\omega = \sigma(x)$ darstellen als:

$$\begin{aligned} U_i^e(\omega = \sigma(x)) = \quad & E[\chi_{\sigma(x)>y_1}\left\{k_1 v - b^1(y_{(1)}) + (\delta(k_1,k_2,v) - k_1 v - k_2 y_{(1)})^+\right\} \\ & + \chi_{\sigma(x)<y_1}(k_2 v - max\left\{\delta(k_1,k_2,y_{(1)}) - k_1 y_{(1)}, k_2 y_{(2)}\right\})^+] \quad . \end{aligned}$$

In Integralschreibweise ergibt sich:

$$\begin{aligned} U_i^e(\cdot) = \quad & \int_0^{\sigma(x)}\left\{k_1 v - b^1(z) + (\delta(k_1,k_2,v) - k_1 v - k_2 z)^+\right\}(n-1)F(z)^{n-2}f(z)dz + \\ & \int_{\sigma(x)<z}(n-1)(n-2)\int_0^z (k_2 v - max\{\delta(k_1,k_2,z) - k_1 z, k_2 y\})^+ F(y)^{n-3}f(y)dyf(z)dz \ . \end{aligned}$$

Hieraus läßt sich die Bedingung erster Ordnung für Bieter i als

$$\begin{aligned} 0 = \quad & \left\{k_1 v - b^1(\sigma(x)) + (\delta(k_1,k_2,v) - k_1 v - k_2\sigma(x))^+\right\}(n-1)F(\sigma(x))^{n-2}f(\sigma(x)) - \\ & (n-1)(n-2)\int_0^{\sigma(x)}(k_2 v - max\{\delta(k_1,k_2,\sigma(x)) - k_1\sigma(x), k_2 y\})^+ F(y)^{n-3}f(y)dyf(\sigma(x)) \end{aligned}$$

bestimmen. Da in einem symmetrischen Gleichgewicht alle Bieter die gleiche Bietfunktion $b^*(v)$ in Abhängigkeit von ihrem eigenen Signal benutzen, muß $\sigma^*(x) = v$ gelten. Daraus folgt

$$\begin{aligned} & \left\{k_1 v - b^{1*}(v) + (\delta(k_1,k_2,v) - k_1 v - k_2 v)^+\right\}F(v)^{n-2} \\ & = (n-2)\int_0^v (k_2 v - max\{\delta(k_1,k_2,v) - k_1 v, k_2 y\})^+ F(y)^{n-3}f(y)dy \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

[2]Die Tatsache, dass es sich bei den gefundenen GG-Strategien tatsächlich um streng monoton wachsende Funktionen handelt, lässt sich anhand der Gleichungen (3),(4) und (5) leicht nachrechnen.

Aus Gleichung (2) lässt sich unmittelbar die gleichgewichtige Bietfunktion $b^{1*}(v)$ berechnen:[3]

$$\begin{aligned} b^{1*}(v) = \quad & k_1 v + (\delta(k_1,k_2,v) - k_1 v - k_2 v)^+ \\ & - \tfrac{(n-2)}{F(v)^{n-2}} \int_0^v (k_2 v - max\,\{\delta(k_1,k_2,v) - k_1 v, k_2 y\})^+ F(y)^{n-3} f(y) dy \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Diese Bietfunktion lässt sich unter den 3 alternativen Synergieszenarien teilweise erheblich vereinfachen.

1. Keinerlei Synergieeffekte:

Für den Fall, dass keinerlei Synergieeffekte vorhanden sind, gilt $\delta(k_1,k_2,v) = k_1 v + k_2 y$. Damit ist der Klammerausdruck $(\delta(k_1,k_2,v) - k_1 v - k_2 v)^+$ gleich null. Analog ist auch der Integrand $(k_2 v - max\,\{\delta(k_1,k_2,v) - k_1 v, k_2 y\})^+$ gleich null. Damit ergibt sich die gleichgewichtige Bietfunktion für den Fall, dass keinerlei Synergieeffekte vorhanden sind, als:

$$b^{1*}(v) = k_1 v \quad . \tag{3}$$

Offensichtlich gibt Bieter i in der ersten Auktion ein Gebot ab, das genau seiner Wertschätzung für dieses Objekt alleine betrachtet entspricht.

2. Positive Synergieeffekte:

Im Falle positiver Synergieeffekte gilt $\delta(k_1,k_2,v) > k_1 v + k_2 y$. Somit ist der Klammerausdruck $(\delta(k_1,k_2,v) - k_1 v - k_2 v)^+$ positiv. Der Integrand wäre wegen $\delta(k_1,k_2,v) - k_1 v > k_2 v$ kleiner als null und fällt deshalb auch bei positiven Synergieeffekten weg. Das führt zu dem Gleichgewichtsgebot:

$$b^{1*}(v) = \delta(k_1,k_2,v) - k_2 v \quad . \tag{4}$$

Die Bieter bieten folglich im Falle positiver Synergieeffekte mehr, als ihnen das erste Objekt alleine betrachtet wert ist $(\delta(k_1,k_2,v) - k_2 v > k_1 v)$. Dies ist damit zu erklären, dass ein

[3] Zur Überprüfung der Bedingung zweiter Ordnung betrachte Abschnitt 1 des Anhangs.

Bieter, wenn er die erste Auktion gewonnen hat, aufgrund der positiven Synergieeffekte im Gleichgewicht sicher sein kann, auch die zweite Auktion zu gewinnen[4]. Deshalb bietet er den Wert, den der erste Auktionsgegenstand hätte, wenn er den zweiten Auktionsgegenstand bereits besitzen würde, nämlich $b_i^{1*}(v_i) = \delta(k_1, k_2, v_i) - k_1 v_i$.

3. Negative Synergieeffekte:

Im Falle negativer Synergieeffekte gilt $\delta(k_1, k_2, v) < k_1 v + k_2 y$. Damit ist der Klammerausdruck $(\delta(k_1, k_2, v) - k_1 v - k_2 v)^+$ kleiner als null, so dass dieser wie im ersten Fall verschwindet. Im Integranden ist aufgrund der negativen Synergieeffekte $k_2 v$ immer größer als $\delta(k_1, k_2, v) - k_1 v$. Da auch $k_2 v \geq k_2 y$ für alle $y \in [0, v]$ gilt, ist der gesamte Integrand immer positiv. Folglich lassen sich die beiden Summanden einzeln integrieren und es resultiert das Gleichgewichtsgebot:

$$b^{1*}(v) = (k_1 - k_2)v + \frac{(n-2)}{F(v)^{n-2}} \int_0^v max\left\{\delta(k_1, k_2, v) - k_1 v, k_2 y\right\} F(y)^{n-3} f(y) dy \quad . \tag{5}$$

Im Gegensatz zu den Gleichgewichtsgeboten in den beiden anderen Fällen lässt sich das Gleichgewichtsgebot in diesem Fall aufgrund seiner Komplexität nicht ohne weiteres interpretieren.

Für den Sonderfall $k_1 = k_2 = 1$ fällt das von uns betrachtete Modell mit dem Modell von Menezes und Monteiro (1999) zusammen. Die gleichgewichtige Bietfunktion (3) lässt sich dann schreiben als:

$$b^{1*}(v) = \frac{(n-2)}{F(v)^{n-2}} \int_0^v max\left\{\delta(v) - v, y\right\} F(y)^{n-3} f(y) dy \quad . \tag{6}$$

[4]Im Gleichgewicht gewinnt ein Bieter i nur dann die erste Auktion, wenn $v_i > y_{(1)}$ gilt. Da aufgrund positiver Synergieeffekte $b_i^{2*}(v_i) = \delta(k_1, k_2, v_i) - k_1 v_i > k_2 v_i > k_2 y_{(1)} = b_j^{2*}(y_{(1)})$ gilt, ist automatisch das Gebot des Siegers der ersten Auktion in der zweiten Auktion ($b_i^{2*}(v_i)$) größer als das höchste Gebot der anderen Bieter ($b_{(1)}^{2*}(y_{(1)})$).

4 Vergleich der beiden Versteigerungsreihenfolgen

Im Folgenden soll nun die Frage geklärt werden, ob es für den Verkäufer unter den getroffenen Annahmen sinnvoll ist, das "wertvollere" Objekt zuerst oder zuletzt zu versteigern. Da die Wertschätzung eines Bieters i für den ersten bzw. zweiten Auktionsgegenstand mit $k_1 v_i$ bzw. $k_2 v_i$ bezeichnet wurde, lassen sich die unterschiedlichen Versteigerungsreihenfolgen zweier Objekte mit der Wertschätzung av_i und bv_i (a>b) einfach dadurch darstellen, dass in dem Fall, in dem das "wertvollere" Objekt zuerst versteigert wird, $k_1 = a$ und $k_2 = b$ gesetzt werden, während im Fall, in dem das "wertvollere" Objekt zuletzt versteigert wird, $k_1 = b$ und $k_2 = a$ gelten. In den nächsten Unterabschnitten sollen die beiden Versteigerungsreihenfolgen anhand ihres erwarteten Erlöses für den Verkäufer für die drei unterschiedlichen Synergieszenarien miteinander verglichen werden.

4.1 Keinerlei Synergieeffekte

Falls keine Synergieeffekte vorhanden sind, geben alle Bieter in der ersten Auktion ein Gebot von $b_i^{1*}(v_i) = k_1 v_i$ und in der zweiten Auktion ein Gebot von $b_i^{2*}(v_i) = k_2 v_i$ ab. Damit entspricht das Gebot eines jeden Bieters der Wertschätzung, die dieser Bieter für das jeweilige Objekt alleine genommen besitzt.

Derjenige Bieter mit dem höchsten Signal ($v_{(1)}$) gewinnt in beiden Auktionen und zahlt jeweils das Gebot des zweithöchsten Bieters ($b_{(2)}^{1*}(v_{(2)}) = k_1 v_{(2)}$ bzw. $b_{(2)}^{2*}(v_{(2)}) = k_2 v_{(2)}$). Der erwartete Erlös des Verkäufers aus beiden Auktionen, der sich aus dem erwarteten Erlös der ersten und zweiten Auktion zusammensetzt, lässt sich deshalb schreiben als:

$$ER = E[k_1 v_{(2)}] + E[k_2 v_{(2)}]. \tag{7}$$

Wie leicht zu erkennen ist, besitzt in diesem Fall die Versteigerungsreihenfolge keinen Einfluss auf den erwarteten Erlös des Verkäufers. Unabhängig davon, ob $(k_1, k_2) = (a, b)$ mit $a > b$

oder $(k_1, k_2) = (b, a)$ gilt, ist der erwartete Erlös für den Verkäufer gleich.

4.2 Positive Synergieeffekte

Im Fall positiver Synergieeffekte geben alle Bieter in der ersten Auktion ein Gebot von $b_i^{1*}(v_i) = \delta(k_1, k_2, v_i) - k_2 v_i$ ab. In der zweiten Auktion gibt der Sieger der ersten Auktion ein Gebot von $b_{(1)}^{2*}(v_{(1)}) = \delta(k_1, k_2, v_{(1)}) - k_1 v_{(1)}$ ab, während alle anderen Bieter $b_i^{2*}(v_i) = k_2 v_i$ bieten.

Auch hier gewinnt der Bieter mit dem höchsten Signal beide Auktionen und zahlt jeweils das Gebot des Bieters mit dem zweithöchsten Signal $(b_{(2)}^{1*}(v_{(2)}) = \delta(k_1, k_2, v_{(2)}) - k_2 v_{(2)}$ bzw. $b_{(2)}^{2*}(v_{(2)}) = k_2 v_{(2)}))$. Damit ergibt sich für den Verkäufer ein erwarteter Erlös von $ER = E[\delta(k_2, k_2, v_{(2)}) - k_2 v_{(2)})] + E[k_2 v_{(2)}] = E[\delta(k_2, k_2, v_{(2)})] - E[k_2 v_{(2)}] + E[k_2 v_{(2)}] = E[\delta(k_2, k_2, v_{(2)})]$. Dabei lässt sich erkennen, dass es für den Verkäufer auch im Falle positiver Synergieeffekte keine Rolle spielt, ob das "wertvollere" Objekt zuerst oder zuletzt versteigert wird.

4.3 Negative Synergieeffekte

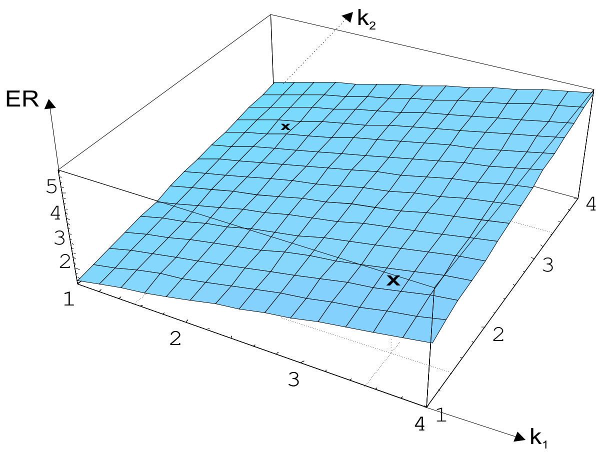
Im Falle negativer Synergieeffekte geben, wie in Abschnitt 3 gezeigt, alle Bieter ein Gebot von $b_i^{1*}(v) = (k_1 - k_2)v + \frac{(n-2)}{F(v)^{n-2}} \int_0^v max\left\{\delta(k_1, k_2, v) - k_1 v, k_2 y\right\} F(y)^{n-3} f(y) dy$ ab. Analog zum Fall positiver Synergieeffekte bietet der Sieger der ersten Auktion in der zweiten Auktion $b_{(1)}^{2*}(v_{(1)}) = \delta(k_1, k_2, v_{(1)}) - k_1 v_{(1)}$, während die restlichen Teilnehmer $b_i^{2*}(v_i) = k_2 v_i$ bieten. Im Gegensatz zum Fall positiver Synergieeffekte gewinnt jedoch hier der Bieter mit dem höchsten Signal nicht notwendigerweise beide Auktionen, da bei der zweiten Auktion durchaus $\delta(k_1, k_2, v_{(1)}) - k_1 v_{(1)} < k_2 v_{(2)}$ gelten kann. Der Verkäufer würde dann in der zweiten Auktion statt der Wertschätzung des Bieters mit dem zweithöchsten Signal $(k_2 v_2)$ einen Preis in Höhe von $\delta(k_1, k_2, v_{(1)}) - k_1 v_{(1)}$ bzw. für den Fall, dass $\delta(k_1, k_2, v_{(1)}) - k_1 v_{(1)} < k_2 v_{(3)}$ gilt, sogar nur die Wertschätzung des dritthöchsten Bieter erhalten. Aus diesem Grund ergibt sich der erwartete Erlös für den Verkäufer als:

$$\begin{aligned} ER = \quad & E[b_2^{1*}(v_{(2)})] + E[max\{k_2 v_{(3)}, min\{k_2 v_{(2)}, \delta(k_1, k_2, v_{(1)}) - k_1 v_{(1)}\}\}] \\ \Leftrightarrow ER = \quad & E[(k_1 - k_2)v_{(2)} + \tfrac{(n-2)}{F(v_{(2)})^{n-2}} \int_0^{v_{(2)}} max\left\{\delta(\cdot, v_{(2)}) - k_1 v_{(2)}, k_2 y\right\} F(y)^{n-3} f(y) dy] + \\ & \tfrac{n!}{(n-3)!} \int_0^1 \int_0^z \int_0^y max\{k_2 x, min\{k_2 y, \delta(\cdot, z) - k_1 z\}\} F(x)^{n-3} f(x) dx f(y) dy f(z) dz \ . \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Annahme, dass die v_i´s über dem Intervall $[0,1]$ unabhängig und identisch gleichverteilt seien und dass es sich bei $\delta(k_1, k_2, v)$ um eine lineare Funktion der Form $\delta(k_1, k_2, v) = p(k_1 + k_2)v$, $p \in]0;1[$ handelt, wobei $k_2 \geq \frac{(1-p)k_1}{p}$ gelte, damit die Wertschätzung für beide Objekte zusammen stets größer null ist, lässt sich der erwartete Erlös des Verkäufers schreiben als:

$$ER = \quad \tfrac{n-1}{n+1} k_1 + \tfrac{n-3}{n+1} k_2 + k_2 (p \tfrac{k_1 + k_2}{k_2} - \tfrac{k_1}{k_2})^{n-1} - \tfrac{n-1}{n+1} k_2 (p \tfrac{k_1 + k_2}{k_2} - \tfrac{k_1}{k_2})^n \ .$$

Die nachstehende Abbildung zeigt den erwarteten Erlös des Verkäufers in Abhängigkeit von k_1 und k_2 für den Fall p=0,8 und n=10. Wie leicht zu erkennen ist, fällt der Graph des erwarteten



Erlöses von "rechts oben" nach "links unten" ab. Somit ist in diesem Fallbeispiel der erwartete Erlös einer Verkaufsreihenfolge, in der das "wertvollere" Objekt zuerst versteigert wird, bspw. $((k_1, k_2) = (7,3))$ größer als der erwartete Erlös für den Fall, dass das "wertvollere" Objekt zuletzt versteigert wird $((k_1, k_2) = (3,7))$.

Um die Frage, welche Verkaufsreihenfolge zu einem höheren erwarteten Erlös führt, allgemein zu beantworten, soll für den Fall, dass das "wertvollere" Objekt zuerst bzw. zuletzt versteigert wird, k_1 bzw. k_2 auf 1 normiert werden. Damit lässt sich jede Konstellation (k_1, k_2) durch $(k, 1)$ bzw. $(1, k)$ beschreiben. Der erwartete Erlös ergibt sich dann für den Fall, dass das "wertvollere" Objekt zuerst bzw. zuletzt versteigert wird, als:

$$\begin{aligned} ER(k,1) = &\quad \tfrac{n-1}{n+1}k + \tfrac{n-3}{n+1} + (p\tfrac{k+1}{1} - \tfrac{k}{1})^{n-1} - \tfrac{n-1}{n+1}(p\tfrac{k+1}{1} - \tfrac{k}{1})^{n} \quad \text{bzw.} \\ ER(1,k) = &\quad \tfrac{n-1}{n+1} + \tfrac{n-3}{n+1}k + k(p\tfrac{1+k}{k} - \tfrac{1}{k})^{n-1} - \tfrac{n-1}{n+1}k(p\tfrac{1+k}{k} - \tfrac{1}{k})^{n} \quad . \end{aligned}$$

Auf Grundlage dieser Normierung lässt sich zeigen, dass $ER(k,1) \geq ER(1,k)$ gilt.[5] Damit ist im Falle negativer Synergieeffekte unter den getroffenen Annahmen der erwartete Erlös des Verkäufers größer, wenn er das "wertvollere" Objekt zuerst versteigert.

5 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde die optimale Versteigerungsreihenfolge für den Fall zweier vertikal differenzierter Objekte, die in zwei aufeinanderfolgenden Zweitpreisauktionen versteigert werden, abgeleitet. Hierbei wurde angenommen, dass die Bieter nicht nur ein Objekt, sondern mehrere Objekte nachfragen können und dass zwischen den Objekten unterschiedliche Synergieeffekte bestehen können. Nachdem die Gleichgewichtsgebote bestimmt wurden, konnte gezeigt werden, dass sowohl in dem Fall, in dem keinerlei Synergien vorliegen, als auch im Fall positiver Synergien die Versteigerungsreihenfolge - unabhängig von der unterstellten Verteilungsfunktion - keinen Einfluß auf die Höhe des erwarteten Erlöses für den Verkäufer besitzt. Nur im Falle negativer Synergien geht von der Versteigerungsreihenfolge eine Wirkung auf den erwarteten Erlös des Verkäufers aus und es lässt sich zeigen, dass es unter der üblichen Annahme gleichverteilter Wertschätzungen für den Verkäufer sinnvoll ist, das "wertvollere" Objekt zuerst zu versteigern.

[5]Dieses Ergebniss lässt sich unmittelbar aus der Differenz $ER(k,1) - ER(1,k)$ berechnen. Vergleiche hierzu Abschnitt 2 des Anhangs.

Anhang 1

Gültigkeit der hinreichenden Optimalitätsbedingung

Um sicherzustellen, dass auch die Bedingung zweiter Ordnung für das Vorliegen eines Maximums erfüllt ist, soll im Folgenden das Vorzeichen der ersten Ableitung um $b^*(v)$ untersucht werden. Hierzu werde (3) in die erste Ableitung aus (1) eingesetzt. Dabei ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\{k_1 v - k_1\sigma(x) + (\delta(\cdot, v) - k_1 v - k_2\sigma(x))^+ - (\delta(\cdot, \sigma(x)) - k_1\sigma(x) - k_2\sigma(x))^+\}\, F(\sigma(x))^{n-2} \\
&+(n-2)\int_0^{\sigma(x)} \quad [+(k_2 v - max\,\{\delta(\cdot, \sigma(x)) - k_1\sigma(x), k_2 y\})^+ \\
&\qquad\qquad -(k_2\sigma(x) - max\,\{\delta(\cdot, \sigma(x)) - k_1\sigma(x), k_2 y\})^+] \quad F(y)^{n-3} f(y)dy \quad .
\end{aligned}$$

Da die Bietfunktion $b^*(v)$ aus der Bedingung erster Ordnung (1) unter Verwendung von $\sigma(x) = v$ hergeleitet wurde, muss die erste Ableitung an der Stelle $\sigma(x) = v$ den Wert null annehmen. Für $\sigma(x) < v$ gilt $k_1 v - k_1\sigma(x) > 0$ und $(\delta(\cdot, v) - k_1 v - k_2\sigma(x))^+ - (\delta(\cdot, \sigma(x)) - k_1\sigma(x) > 0$. Damit ist die erste Zeile der Ableitung positiv. Im Integranden sind drei Konstellationen denkbar: Falls $max\,\{\delta(\cdot, \sigma(x))\} > v$ gilt, sind beide Summanden null, falls $max\,\{\delta(\cdot, \sigma(x))\} < \sigma(x)$ gilt, lässt sich der Integrand schreiben als $(k_2 v - k_2\sigma(x))$ und falls $\sigma(x) < max\,\{\delta(\cdot, \sigma(x))\} < v$ gilt, ergibt sich der Integrand als $(k_2 v - max\,\{\delta(\cdot, \sigma(x)) - k_1\sigma(x), k_2 y\})^+$. In allen Fällen ist die erste Ableitung für $\sigma(x) < v$ positiv. Entsprechend gilt für $\sigma(x) > v$: $k_1 v - k_1\sigma(x) < 0$ und $(\delta(\cdot, v) - k_1 v - k_2\sigma(x))^+ - (\delta(\cdot, \sigma(x)) - k_1\sigma(x) < 0$. Damit ist die erste Zeile der Ableitung nun negativ. Analog zu oben können im Integranden drei Konstellationen auftreten. Falls $max\,\{\delta(\cdot, \sigma(x))\} > \sigma(x)$, nimmt der Integrand den Wert null an; für $max\,\{\delta(\cdot, \sigma(x))\} < v$ lässt sich der Integrand vereinfachen zu $(k_2 v - k_2\sigma(x))$ und für den Fall, dass v$< max\,\{\delta(\cdot, \sigma(x))\} <$ $\sigma(x)$ gilt, lässt sich der Integrand schreiben als $-(k_2\sigma(x) - max\,\{\delta(\cdot, \sigma(x)) - k_1\sigma(x), k_2 y\})^+$. Wie leicht zu erkennen ist, nimmt der Integrand für $\sigma(x) > v$ nur negative Werte an, so dass die gesamte Ableitung in diesem Fall negativ ist. Da die Ableitung für $\sigma(x) < v$ nur positive Werte und für $\sigma(x) > v$ nur negative Werte annimmt, ist die Bedingung 2. Ordnung erfüllt.

Anhang 2

Herleitung der optimalen Versteigerungsreihenfolge bei negativen Synergien

$$ER(k,1) - ER(1,k)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tfrac{n-1}{n+1}k + \tfrac{n-3}{n+1} + (p\tfrac{k+1}{1} - \tfrac{k}{1})^{n-1} - \tfrac{n-1}{n+1}(p\tfrac{k+1}{1} - \tfrac{k}{1})^{n}$$
$$-(\tfrac{n-1}{n+1} + \tfrac{n-3}{n+1}k + k(p\tfrac{1+k}{k} - \tfrac{1}{k})^{n-1} - \tfrac{n-1}{n+1}k(p\tfrac{1+k}{k} - \tfrac{1}{k})^{n})$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tfrac{n-1}{n+1}k - \tfrac{n-3}{n+1}k + \tfrac{n-3}{n+1} - \tfrac{n-1}{n+1}$$
$$+(p\tfrac{k+1}{1} - \tfrac{k}{1})^{n-1} - \tfrac{n-1}{n+1}(p\tfrac{k+1}{1} - \tfrac{k}{1})^{n} - (k(p\tfrac{1+k}{k} - \tfrac{1}{k})^{n-1} - \tfrac{n-1}{n+1}k(p\tfrac{1+k}{k} - \tfrac{1}{k})^{n})$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tfrac{2}{n+1}k - \tfrac{2}{n+1}$$
$$-\tfrac{n-1}{n+1}(p\tfrac{k+1}{1} - \tfrac{k}{1})^{n} + \tfrac{n-1}{n+1}k(p\tfrac{1+k}{k} - \tfrac{1}{k})^{n}$$
$$+(p\tfrac{k+1}{1} - \tfrac{k}{1})^{n-1} - (k(p\tfrac{1+k}{k} - \tfrac{1}{k})^{n-1}$$

Wegen k>1 ist der Ausdruck in der ersten Zeile der letzten Ungleichung immer größer null. Wie sich leicht nachrechnen lässt, gilt darüberhinaus $p\frac{1+k}{k} - \frac{1}{k} \geq p\frac{k+1}{1} - \frac{k}{1}$, so dass der Ausdruck in der zweiten Zeile auch größer als null ist. Aus dem gleichen Grund ist der Ausdruck in der dritten Zeile negativ. Da sich sowohl $p\frac{1+k}{k} - \frac{1}{k}$ als auch $p\frac{k+1}{1} - \frac{k}{1}$ zwischen null und eins bewegen, ist jedoch der Ausdruck in der dritten Zeile betragsmäßig größer als der in der Zweiten, so dass die beiden letzten Zeilen in ihrer Summe negativ sind. Der Betrag dieses negativen Ausdrucks wird umso größer je größer die Ausdrücke $p\frac{1+k}{k} - \frac{1}{k}$ und $p\frac{k+1}{1} - \frac{k}{1}$ sind. Im Extremfall, in dem die beiden Ausdrücke den Wert 1 annehmen, ergibt sich:

$$\Longrightarrow \quad \tfrac{2}{n+1}(k-1) - \tfrac{n-1}{n+1} + \tfrac{n-1}{n+1}k + 1 - k$$
$$\Longleftrightarrow \quad \tfrac{2}{n+1}(k-1) - \tfrac{2}{n+1}(k-1) \qquad = 0 \ .$$

Folglich gilt $\quad ER(k,1) - ER(1,k) \geq 0, \quad$ und damit $\quad ER(k,1) \geq ER(1,k).$

6 Literaturverzeichnis

Armstrong, M., 2000, Optimal Multi-Object Auctions, Review of Economic Studies 67, 455-481.

Ashenfelter, O., 1989, How Auctions Work for Wine and Art, Journal of Economic Perspectives 3, 23-36.

Beggs, A. und K. Graddy, 1997, Declining Values and the Afternoon Effect: Evidence from Art Auctions, Rand Journal of Economics, 28, 544-565.

Benoit, J. P. und V. Krishna, 1999, Multiple Object Auctions with Budget Constraint Bidders, Working Paper, New York University and Pennsylvania State University.

Bernhardt, D. und D. Scoones, 1994, A Note to Sequential Auctions, American Economic Review, 84, 653-657.

Branco, F., 1997, Sequential Auctions with Synergies: An Example, Economics Letters 54, 159-163.

Chakraborty, A., Gupta, N. und R. Harbaugh, 2000, First Impression in a Sequential Auction, Working Paper, City University of New York.

Gandal, N., 1997, Sequential Auction of Interdependent Objects: Israely Cable Television Licenses, Journal of Industrial Economics, 45(3), 227-244.

Jeitschko, T.D. und E. Wolfstetter, 2000, Scale Economies and the Dynamics of Recurring Auctions, Working-Paper, Humbold-Universität zu Berlin.

Katzman, B., 1999, A Two Stage Sequential Auction with Multi-Unit Demand, Journal of Economic Theory 86, 77-99.

Mc Affee, R.P. und D. Vincent, 1993, The Declining Price Anomaly, Journal of Economic Theory, 43, 1-19.

Menezes, F.M. und Monteiro, 1999, Synergies and Price Trends in Sequential Auctions, Working Paper, Australian National University.

Milgrom, P.R. und Weber, R.J., 1982, A Theory of Auctions and Competitive Bidding II, Mimeo, Stanford University and Northwestern University.

Pitchik, C, 1995, Budget-Constrained Sequential Auctions with Incomplete Information, mimeo, University of Toronto, 1995.

Vickrey, W., 1961, Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders, Journal of Finance, 16,8-37.

von der Fehr, N.H.M., 1994, Predatory Bidding in Sequential Auctions, Oxford Economic Papers, 46, 345-365.

Weber, R., 1983, Multi-Object Auctions, in Auctions, Bidding and Contracting: Uses and Theory, edited by R. Engelbrecht-Wiggans, M. Shubik and R.M. Stark, New York University Press, 165-194.

Wolfstetter, E., 1999, Topics in Microeconomics, Industrial Organization, Auctions and Incentives, Cambidge University Press.