

**Die relativistische Struktur
der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung
im Medium**

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Erdmann Schiller
aus Berlin

2000

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Februar 2001

Dekan: Prof. Dr. Gerhard J. Wagner

1. Berichterstatter: Prof. Dr. Herbert Müther

2. Berichterstatter: Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Amand Fäßler

Abstract

Brueckner-Hartree-Fock calculations are performed for nuclear matter with an exact treatment of the Pauli exclusion operator and single particle energy in the Bethe-Goldstone equation. The differences in the binding energy, compared to the commonly used approximations, are non-negligible. These differences lead to a larger binding energy around the calculated saturation point.

Furthermore the Dirac structure of the nucleon self-energy in symmetric nuclear matter as well as neutron matter is derived from Dirac-Brueckner-Hartree-Fock calculations. It is demonstrated that the effects of correlations on the effective Nucleon-Nucleon interaction in the nuclear medium can be parametrised in terms of an effective meson exchange. This analysis leads to a very intuitive interpretation of correlation effects and also provides an efficient parametrisation of the effective interaction to be used in relativistic structure calculations for finite nuclei.

Zusammenfassung

Brueckner-Hartree-Fock Rechnungen werden in Kernmaterie unter Berücksichtigung des exakten Pauli-Operators und der Einteilchenenergie in der Bethe-Goldstone Gleichung durchgeführt. Die Unterschiede in der Bindungsenergie sind im Unterschied zu den normalerweise verwendeten Näherungen nicht vernachlässigbar. Diese Unterschiede bedingen eine größere Bindungsenergie im Bereich des berechneten Sättigungspunktes.

Weiterhin wird die Dirac Struktur der Selbstenergie des Nukleons sowohl in symmetrischer Kernmaterie als auch in Neutronenmaterie im Rahmen der Dirac-Brueckner-Hartree-Fock Näherung bestimmt. Es wird gezeigt, daß die in der effektiven Wechselwirkung im nuklearen Medium enthaltenen Korrelationseffekte durch ein effektives Ein-Meson-Austausch Modell parametrisiert werden können. Diese Analyse ergibt eine natürliche Interpretation der Korrelationseffekte und führt auf eine einfache Parametrisierung der effektiven Wechselwirkung zur Verwendung in relativistischen Kernstrukturrechnungen in endlichen Kernen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Brueckner-Hartree-Fock	7
2.1	Goldstone Entwicklung	7
2.2	Feynman-Diagramme	13
2.3	Linked-Cluster Entwicklung nach Goldstone	19
2.4	Hartree-Fock Verfahren	20
2.5	Bethe-Goldstone Gleichung	22
2.5.1	Numerisches Lösungsverfahren	24
	Antisymmetrisierte Wellenfunktion	25
	Darstellung	26
	Matrixgleichung	28
2.5.2	Konventionelle Näherungen	31
2.6	Ergebnisse	32
3	Nukleon-Nukleon Wechselwirkung	39
3.1	Eigenschaften der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung	39
3.1.1	Lagrange-Dichte	41
3.1.2	Mesonen	44
3.1.3	Zwei-Nukleonen System	47

4 Dirac-Brueckner-Hartree-Fock	55
4.1 Die Selbstenergie in der Hartree-Fock Näherung	58
4.2 Dirac-Brueckner-Hartree-Fock	60
4.3 Technische Details	63
4.3.1 Lorentz-Transformation	63
4.3.2 Pauli-Operator	64
4.3.3 Partialwellenentwicklung	65
4.3.4 Operator-Struktur	67
4.3.5 Äquivalenztheorem	69
4.4 Ergebnisse	71
4.4.1 Validierung $G = V + \Delta G$	71
4.4.2 Bindungsenergie in Kernmaterie	80
4.4.3 Neutronenmaterie	86
4.4.4 Parametrisierung und Anwendung	88
5 Zusammenfassung und Ausblick	97
A Notation	100
B Selbstenergiebeiträge	102
C Parametrisierung Bonn Potentiale	105
Literaturverzeichnis	109

Abbildungsverzeichnis

2.1	Greensfunktion zu unterschiedlichen Zeiten	16
2.2	Greensfunktion zu gleichen Zeiten	16
2.3	Vertex	17
2.4	Feynman-Diagramm Beispiel 1	18
2.5	Feynman-Diagramm Beispiel 2	18
2.6	Zur Definition der G-Matrix	23
2.7	Kontinuierliche Wahl	34
2.8	Konventionelle Wahl	35
2.9	Einteilchenspektrum	36
2.10	Vergleich Bindungsenergie	37
3.1	Ein-Bosonen-Austausch	42
4.1	Selbstenergie π -Meson	72
4.2	Selbstenergie η -Meson	74
4.3	Selbstenergie ρ -Meson	76
4.4	Vergleich Selbstenergie von V und G	77
4.5	Bindungsenergie Kernmaterie	81
4.6	Vergleich M^* in Kernmaterie	85
4.7	Vergleich M^* in Neutronenmaterie	87

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

4.8	Energie pro Nukleon in Neutronenmaterie	88
4.9	Operator Amplituden	89
4.10	Kopplungskonstanten Parametrisierung	91
4.11	Ergebnisse Neutronenmaterie aus Parametrisierung	96

Tabellenverzeichnis

2.1	Kombinationen der erhaltenen Quantenzahlen	28
3.1	Übersicht Mesonen	45
3.2	Parameter der relativistischen Potentiale	54
4.1	Ergebnisse für Bonn A	82
4.2	Ergebnisse für Bonn B	83
4.3	Ergebnisse für Bonn C	84
4.4	Parameter Pseudo-Mesonen Bonn A	92
4.5	Parameter Pseudo-Mesonen Bonn B	93
4.6	Parameter Pseudo-Mesonen Bonn C	94
4.7	Isospin-Parameter	95
B.1	Isospin-Parameter	104
C.1	Parameter Mesonen Bonn A	106
C.2	Parameter Mesonen Bonn B	107
C.3	Parameter Mesonen Bonn C	108

Kapitel 1

Einleitung

Eine der großen Herausforderungen in der theoretischen Kernphysik besteht in dem Versuch, die grundlegenden Eigenschaften von nuklearen Systemen allein ausgehend von einer realistischen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung zu beschreiben. Ein solches Vorgehen kann typischerweise in zwei Schritte unterteilt werden. In einem ersten Schritt wird ein Modell gewählt, innerhalb dessen die reine Nukleon-Nukleon Wechselwirkung beschrieben wird. Für die Wahl eines solchen Modells kann man sich beispielsweise von der Quantenchromodynamik leiten lassen [1] oder ein Ein-Bosonen-Austausch Modell, d.h. ein Meson-Austausch Modell benutzen [2], und gelangt so zu einer mikroskopischen Beschreibung der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung. Aber auch ein rein phänomenologischer Ansatz, unter Verwendung von Zwei-Teilchen Spin-Isospin Operatoren, jeweils multipliziert mit einem lokalen Potential, kann als ein solches Modell verwendet werden [3]. All diese Modelle werden dann als eine realistische Beschreibung der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung betrachtet, wenn sie in der Lage sind, durch geeignete Wahl der Modellparameter, die Nukleon-Nukleon Streuphasen für Energien unterhalb der Pion-Schwelle exakt zu beschreiben. Außerdem reproduzieren solche realistischen Potentiale auch die Energie und andere Observablen des Deuterons.

In einem zweiten Schritt gilt es dann, das Vielteilchenproblem aus A wechselwirkenden Nukleonen unter Verwendung einer realistischen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung zu lösen. Die einfachste Lösung dieses Vielteilchenproblems wechselwirkender Fermionen stellt die mittlere Feld oder Hartree-Fock Näherung dar. In dieser Näherung können sehr gut die Grundzustandseigenschaften von Kernen be-

schrieben werden, sofern man phänomenologische Potentiale benutzt, die gerade so angepasst wurden, um eben diese Daten zu beschreiben. Diese Potentiale sind jedoch nicht in der Lage, in gleicher Weise die Daten der Nukleon-Nukleon Streuung zu beschreiben. Solche Potentiale werden somit nicht als realistische Potentiale bezeichnet. Andererseits ergibt sich unter Verwendung realistischer Potentiale, daß die Hartree-Fock Näherung vollkommen unzureichend ist. Sie führt zu ungebundenen Systemen [4].

Das Versagen der Hartree-Fock Näherung unter Verwendung realistischer Potentiale hat dazu geführt, daß verschiedenste Techniken entwickelt wurden, um Korrelationseffekte, über die reine Hartree-Fock Näherung hinaus, zu berücksichtigen. Hierzu zählen beispielsweise die Brueckner Loch-Linien Entwicklung [5, 6], die „coupled cluster“ bzw. „exponential S“ Methode [7, 8], selbstkonsistente Berechnung der Greens-Funktionen [9], Variationsmethoden unter Verwendung korrelierter Basisfunktionen [10, 11], sowie neuerliche Entwicklungen unter Anwendung von Quantum Monte-Carlo Techniken [12, 13].

Neben der Berücksichtigung von Korrelationseffekten zeigt sich jedoch auch, daß eine relativistische Behandlung des Vielteilchenproblems ein notwendiger Baustein ist, um eine verbesserte Beschreibung der Grundzustandseigenschaften von nuklearen Systemen zu erhalten. Von besonderer Bedeutung ist hierbei die relativistische Struktur der Selbstenergie des Nukleons im Medium.

Im Rahmen der Brueckner Theorie, wie sie in dieser Arbeit auch Verwendung findet, werden die Zweiteilchen Korrelationseffekte durch Bestimmung einer effektiven Zweiteilchen-Wechselwirkung, der G -Matrix, berücksichtigt. Die G -Matrix entspricht der T -Matrix der freien Nukleon-Nukleon Streuung. Sie trägt dem Medium jedoch Rechnung durch Berücksichtigung von Pauli- und Dispersions-Effekten. Die G -Matrix ergibt sich als Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung. Im Fall einer relativistischen Beschreibung entspricht diese Gleichung der auf drei Dimensionen reduzierten Bethe-Salpeter Gleichung in Form der Blankenbecler-Sugar oder der Thompson Gleichung [2]. In der Brueckner-Hartree-Fock Näherung ergibt sich dann die Selbstenergie des Nukleons bzw. das Einteilchenpotential durch Verwendung der G -Matrix.

Berücksichtigt man die über die Hartree-Fock Näherung hinausgehenden Korrelationseffekte in einer nichtrelativistischen Beschreibung im Rahmen der Brueckner-Theorie oder anderen Näherungen zur Lösung des Vielteilchenproblems, so erhält

man für die Sättigungseigenschaften von Kernmaterie, aber auch für die Bindungsenergie und Radien von Kernen [4] Ergebnisse, die in relativ guter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten stehen. Es zeigt sich allerdings, daß die theoretischen Werte auf der sogenannten Coester-Linie [14] liegen. Sie liefern entweder eine zu geringe Bindungsenergie oder aber eine zu große Sättigungsdichte bzw. einen zu kleinen Radius im Fall von endlichen Kernen, im Vergleich zu den experimentellen Werten.

Eine Möglichkeit, die Coester-Linie zu verlassen, besteht in der Einführung von Drei-Teilchen Kräften, die gerade so gewählt werden, daß die Grundzustandseigenschaften von Kernmaterie reproduziert werden [15]. Damit ergibt sich allerdings die Sättigungseigenschaft per Definition, und weniger als Lösung des Vielteilchenproblems. Eine andere Möglichkeit ist gegeben durch die Berücksichtigung von relativistischen Effekten. Dieser Weg beruht auf den Untersuchungen, die durch die phänomenologische Beschreibung von nuklearen Systemen im Rahmen des Walecka Modells [16] motiviert sind. Die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung wird in diesem Modell durch den Austausch eines skalaren σ , und eines vektoriellen Mesons, ω , beschrieben. Berechnet man in diesem Modell in der Hartree Näherung die Selbstenergie Σ des Nukleons, so findet man, daß der Austausch des ω -Mesons eine Komponente Σ^0 liefert, die sich unter der Lorentz-Transformation wie die zeitartige Komponente eines Vektors transformiert. Der Austausch des σ -Mesons liefert eine Komponente Σ^S , die sich als Skalar transformiert. Verwendet man diese Komponenten der Selbstenergie in der Dirac-Gleichung für ein Nukleon im System der Kernmaterie, so erhält man Einteilchenenergien, die in der Größenordnung des empirischen Wertes von ca. -50 MeV liegen. Dieser relativ kleine Wert ergibt sich jedoch aus einer starken Aufhebung zwischen der repulsiven (Σ^0) und attraktiven (Σ^S) Komponente der Selbstenergie. Der attraktive Teil Σ^S führt weiterhin zu einem Dirac-Spinor für das Nukleon im Medium, dessen kleine Komponente im Vergleich zum Spinor eines freien Nukleons, wesentlich größer ist. Diese Eigenschaft wird durch die Angabe einer effektiven Dirac-Masse M^* für das Nukleon beschrieben. Im Bereich der Sättigungsdichte von Kernmaterie liegt M^* bei rund 600 MeV. Damit ist der Dirac-Spinor im Medium verschieden von dem Spinor für das freie Nukleon. Dieser Spinor für das Nukleon im Medium muß dann verwendet werden, um die Matrixelemente des Mesonen-Austausch Modells der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung zu berechnen. Man erhält damit eine Dichteabhängigkeit der Wechselwirkung, die wiederum die berechneten Sättigungseigenschaften beeinflussen.

Auch auf dem Meson-Austausch Modell basierende, realistische Nukleon-Nukleon Wechselwirkungen liefern große Beiträge zur Selbstenergie durch den Austausch von skalaren und vektoriellen Mesonen. Für solche Potentiale V lassen sich die Komponenten der Selbstenergie in der Hartree bzw. Hartree-Fock Näherung einfach bestimmen. Verwendet man jedoch solche realistischen Potentiale, so müssen nach der vorangegangenen Diskussion Korrelationen über die reine Hartree-Fock Näherung hinaus berücksichtigt werden, indem die Selbstenergie durch die G -Matrix bestimmt wird, anstatt durch die reine Nukleon-Nukleon Wechselwirkung. Solche relativistischen Rechnungen werden als Dirac-Brueckner-Hartree-Fock bzw. einfach als relativistisches Brueckner-Hartree-Fock Verfahren bezeichnet [17, 18, 19, 20]. Die G -Matrix ergibt sich aus solchen Rechnungen jedoch aus der Lösung einer nichtrelativistisch reduzierten Streugleichung, d.h. es werden Matrixelemente nur für Teilchenzustände bestimmt, so daß die relativistische Struktur der effektiven Wechselwirkung nicht vollständig berücksichtigt wird. Daraus ergibt sich, daß ebenso die Dirac-Struktur der Selbstenergie Σ nicht unmittelbar bestimmt werden kann.

Verschiedene Näherungsverfahren wurden deshalb entwickelt, um die Dirac- Struktur der Nukleon Selbstenergie Σ innerhalb des Dirac-Brueckner-Hartree-Fock Verfahrens zu bestimmen. Ein vergleichsweise einfaches Verfahren wurde von Brockmann und Machleidt [18] vorgeschlagen. Unter der Annahme, daß die dominierenden Komponenten der Selbstenergie Σ^S und Σ^0 nicht vom Impuls des Nukleons abhängen, können diese aus der Analyse der Einteilchenenergie bestimmt werden. Dieses Verfahren läßt sich im Fall der Kernmaterie sehr gut verwenden. Es zeigt sich allerdings, daß dies im Fall der Neutronenmaterie nicht mehr zutrifft [21].

Ein anderes Verfahren, die sogenannte Projektions-Methode, versucht direkt die antisymmetrischen G -Matrixelemente durch einen vollständigen Satz von Lorentz-invarianten Operatoren zu analysieren. Durch diesen Ansatz für die relativistische Struktur der effektiven Wechselwirkung G kann die Dirac-Struktur der Selbstenergie des Nukleons direkt bestimmt werden, und damit ebenfalls die Dichteabhängigkeit der Dirac-Spinoren [22, 23]. Allerdings hängt dieses Verfahren von der Wahl der Operatoren ab, so daß diese möglichst geeignet zu wählen sind. Ein wohlbekanntes Beispiel für diese Abhängigkeit von der Wahl der verwendeten Operatoren ist der Ein-Pion-Austausch. Dieser ergibt identische Matrixelemente für zu positiver Energie gehörende Dirac- Spinoren, sowohl im Fall der pseudoskalaren als auch der pseudovektoriellen Kopplung. Die Fock-Beiträge zur skalaren und vektoriellen

Komponente der Selbstenergie sind für diese Kopplungen jedoch vollkommen unterschiedlich [16, 24, 25]. Ein weiteres Beispiel ist der Ein-Rho-Meson Austausch, der in dieser Arbeit ebenfalls diskutiert werden soll.

Um die durch Verwendung des Projektionsverfahren bedingten Unstimmigkeiten bestmöglichst zu vermeiden, wird in dieser Arbeit die G -Matrix in die beiden Anteile der reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung V und den die Korrelationseffekte enthaltenden Restwechselwirkungsanteil ΔG aufgespalten. Die Dirac-Struktur der Selbstenergie für V ist wohlbekannt, so daß die Projektions-Methode nur auf den Restwechselwirkungsteil angewandt zu werden braucht. Es zeigt sich, daß die über die sich aus V ergebenden Anteile der Selbstenergie hinausgehenden Beiträge sehr gut durch den Austausch einiger weniger effektiver Mesonen mit hoher Masse, entsprechend der kurzen Reichweite der Korrelationseffekte, und dichteabhängigen Kopplungskonstanten beschrieben werden kann. Man erhält somit eine einfache Beschreibung der Effekte der Nukleon-Nukleon Korrelationen. Ähnliche Ansätze wurden bereits von Boersma und Malfliet [23] und Elsenhans et al.[26] verfolgt. Aufgrund der besonders einfachen Struktur der Parametrisierung ist die hier bestimmte Parametrisierung geeigneter für Untersuchungen in endlichen Kernen [27, 28].

Im Anschluß an diese Einführung wird in Kapitel 2 zuerst, neben einer Motivation der störungstheoretischen Grundlagen der Brueckner-Hartree-Fock Theorie, detailliert auf die Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung eingegangen werden, wie sie in dieser Arbeit Verwendung findet. Hierbei steht im Vordergrund, die üblicherweise verwendeten Näherungen genauer zu untersuchen. Dies betrifft den winkelgemittelten Pauli-Operator als auch die Parametrisierung der in die Rechnung eingehenden Einteilchenenergie. Zum Vergleich werden die Ergebnisse für die Bindungsenergie in Kernmaterie unter Benutzung des winkelgemittelten und des exakten Pauli-Operators gegenübergestellt. Neben der Verwendung des exakten Pauli-Operators wird in einem weiteren Schritt ebenfalls die exakte Einteilchenenergie in die selbstkonsistenten Rechnungen mit einbezogen und deren Einfluß auf den Verlauf der Einteilchenenergie im Vergleich zur parametrisierten Form als auch auf die Bindungsenergie diskutiert.

Die in dieser Arbeit verwendeten, auf dem Ein-Boson-Austausch Modell beruhenden Bonn Potentiale werden in Kapitel 3 ausführlich besprochen. Ferner wird die Herleitung der Streugleichung für die freie Nukleon-Nukleon Streuung, ausgehend von der Bethe-Salpeter Gleichung, skizziert. Dies dient als Grundlage für die sich

anschließende Erörterung des in dieser Arbeit verwendeten relativistischen bzw. Dirac-Brueckner-Hartree-Fock Verfahrens in Kapitel 4.

In dieser Arbeit wird besonderes Augenmerk auf die korrekte Verwendung der Projektions-Methode zur Bestimmung der Operator-Struktur der effektiven Wechselwirkung, der G -Matrix, gelegt. In diesem Zusammenhang wird ausführlich die Nichteindeutigkeit bei der Wahl der Operatoren diskutiert. Hierzu dient nicht nur als Beispiel die bekannte Unstimmigkeit beim Ein-Pion Austausch, sondern ebenfalls der Austausch des η - als auch des ρ -Mesons. Dies führt auf das in dieser Arbeit verwendete Verfahren, die Projektions-Methode nur auf den Restwechselwirkungsteil der G -Matrix anzuwenden. Ein weiterer Punkt ist der Vergleich des Projektions-Verfahrens mit der Analyse der Einteilchenenergie nach Brockmann und Machleidt, zur Bestimmung der Komponenten der Selbstenergie. Hierzu werden beide Verfahren in Kernmaterie und Neutronenmaterie angewandt.

Die sich aus dem Projektions-Verfahren ergebende Operator-Struktur der effektiven Zweiteilchen-Wechselwirkung im Medium wird genauer diskutiert, da sie den Ausgangspunkt für die Parametrisierung der G -Matrix darstellt. Die Parametrisierung wird dann auf das System der Neutronenmaterie angewandt und es können so einfache Aussagen zu der Asymmetrie-Abhängigkeit der effektiven Wechselwirkung gemacht werden.

Zu guter Letzt werden in Kapitel 5 die wichtigsten Punkte noch einmal kurz zusammengefasst und ein Ausblick auf zukünftige Anwendungen der in dieser Arbeit dargelegten Ergebnisse gemacht.

Kapitel 2

Brueckner-Hartree-Fock

Die auf der Goldstone Entwicklung für die Grundzustandsenergie basierende Brueckner-Hartree-Fock Theorie soll im Folgenden nicht vollständig abgeleitet werden; vielmehr soll der störungstheoretische Zugang zur Goldstone Entwicklung motiviert und am Schluß die Bethe-Goldstone Gleichung an den Ihr gebührenden Platz oben an gestellt werden, aus der sich die effektive Zweiteilchenwechselwirkung im Medium, die G -Matrix, ergibt.

2.1 Goldstone Entwicklung

Ohne uns zugleich auf das System Kernmaterie zu konzentrieren, betrachten wir zu Beginn ein System aus A identischen Nukleonen, daß durch den nicht explizit von der Zeit abhängigen Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^A t_i + \sum_{i<j}^A v_{ij} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (2.1)$$

beschrieben werden soll. Der erste Summand bezeichnet die Summe über die kinetische Energie aller Teilchen, der zweite die Summe über die Zweiteilchenwechselwirkung v_{ij} zwischen den Nukleonen, wobei die Zweiteilchenwechselwirkung für eine realistische Nukleon-Nukleon Wechselwirkung steht, auf die weiter unten eingegangen werden soll.

Die Aufspaltung des Hamilton-Operators \hat{H} in die beiden Anteile \hat{H}_0 und \hat{V} erfolgt gemäß

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \sum_{i=1}^A (t_i + u_i) \\ \hat{V} &= \sum_{i<j}^A v_{ij} - \sum_{i=1}^A u_i\end{aligned}\quad (2.2)$$

wobei das Einteilchenpotential $U = \sum u_i$ zur besseren Handhabung der Störentwicklung eingeführt wurde, und da der Hamilton-Operator Gl.(2.1) nicht von U abhängt, sollte ebenso das Endergebnis von der speziellen Wahl von U unabhängig sein.

Zur Durchführung der Störentwicklung wird \hat{H}_0 als das ungestörte Problem betrachtet, daß exakt lösbar ist, und der Restwechselwirkungsanteil \hat{V} wird schließlich in einer Störentwicklung behandelt, wobei versucht wird, durch geeignete Wahl des Einteilchenpotentials U , die Konvergenz der Störentwicklung günstig zu beeinflussen.

Da der Hamilton-Operator Gl.(2.1) als nicht explizit von der Zeit abhängig vorausgesetzt wurde, ergibt sich, daß im Schrödinger-Bild die gesamte Zeitabhängigkeit von den Zuständen getragen wird, die selbstverständlich der Schrödinger-Gleichung genügen müssen

$$i\partial_t |\Psi_S(t)\rangle = \hat{H} |\Psi_S(t)\rangle. \quad (2.3)$$

Hier wurde das Planck'sche Wirkungsquantum \hbar gleich 1 gesetzt und im Folgenden soll immer gelten $\hbar = c = 1$.

Um zu anderen Darstellungen außer dem Schrödinger-Bild zu gelangen, betrachten wir zuerst eine allgemeine, unitäre Transformation bezüglich der Zeit mit

$$\begin{aligned}|\Psi_u(t')\rangle &= \hat{U}(t', t) |\Psi(t)\rangle \\ \hat{O}_u(t') &= \hat{U}(t', t) \hat{O} U^*(t', t)\end{aligned}\quad (2.4)$$

wobei \hat{O} einen beliebigen Operator und $\hat{U}(t', t)$ den Zeitentwicklungsoperator bezeichnet, der unitär ist sowie folgende wichtige Eigenschaften besitzt

$$\begin{aligned}\hat{U}^*(t, t_0) &= \hat{U}^{-1}(t, t_0) \\ \hat{U}(t_1, t_2) \hat{U}(t_2, t_3) &= \hat{U}(t_1, t_3) \\ \hat{U}(t_0, t) &= \hat{U}^{-1}(t, t_0)\end{aligned}\quad (2.5)$$

die man durch Anwendung der Gl.(2.3) auf (2.4) bestimmt. Ferner genügt der Zeitentwicklungsoperator der Differentialgleichung

$$i\partial_t \hat{U}(t, t_0) = \hat{H} \hat{U}(t, t_0) \quad (2.6)$$

aus der u.a. $\hat{U}(t', t)$ bestimmt werden kann.

Mittels der Transformation Gl.(2.4) bleiben die uns interessierenden Übergangsmatrixelemente

$$\begin{aligned} \langle \Psi_u(t') | \hat{O}_u(t') | \Psi_u(t') \rangle &= \langle \Psi(t) | \underbrace{U^*(t', t) U(t', t)}_{=1} O \underbrace{U^*(t', t) U(t', t)}_{=1} | \Psi(t) \rangle \\ &= \langle \Psi(t) | \hat{O} | \Psi(t) \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

invariant. Durch geeignete Wahl des Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t', t)$ gelangt man also zu anderen Darstellungen.

Im sogenannten Wechselwirkungs-Bild wird die durch \hat{H}_0 induzierte Zeitevolution von unserem Zustand separiert, indem man einen Wechselwirkungs-zustand $|\Psi_I(t)\rangle$ einführt durch

$$|\Psi_I(t)\rangle = e^{i\hat{H}_0 t} |\Psi_S(t)\rangle \quad (2.8)$$

Entsprechend ergibt sich für die Operatoren im Wechselwirkungsbild

$$\hat{V}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{V}_S e^{-i\hat{H}_0 t} \quad (2.9)$$

Unter Verwendung der Schrödinger-Gleichung (2.3) ergibt sich als Bewegungsgleichung für den oben eingeführten Wechselwirkungs-zustand Gl.(2.8) im Wechselwirkungsbild

$$i\partial_t |\Psi_I(t)\rangle = V_I(t) |\Psi_I(t)\rangle \quad (2.10)$$

Ebenso erhält man für den Wechselwirkungsoperator eine Gleichung vom Heisenbergtyp

$$\partial_t V_I(t) = i[\hat{H}_0, \hat{V}_I] \quad (2.11)$$

Anstatt wie oben kann man natürlich auch folgende unitäre Transformation durchführen

$$|\Psi_H\rangle = e^{iHt} |\Psi_S(t)\rangle \quad (2.12)$$

$$O_H(t) = e^{iHt} O_S e^{-iHt} \quad (2.13)$$

und gelangt so zum Heisenberg-Bild. In ihm wird die Zeitevolution, im Gegensatz zum Schrödinger-Bild, von den Operatoren getragen und die Zustandsvektoren bleiben zeitlich konstant.

Betrachtet man den Zeitpunkt $t = 0$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} |\Psi_H\rangle &= |\Psi_I(0)\rangle = |\Psi_S(0)\rangle \\ O_H(0) &= O_I(0) = O_S \end{aligned} \quad (2.14)$$

daß heißt, die drei Bilder stimmen zu diesem Zeitpunkt miteinander überein.

Kommen wir aber zur formalen Lösung von Gl.(2.10) zurück, indem wir den Wechselwirkungszustand Gl.(2.8) noch einmal mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}_I(t', t)$ schreiben als

$$|\Psi_I(t)\rangle = \hat{U}_I(t, t_0)|\Psi_I(t_0)\rangle. \quad (2.15)$$

wobei der Zeitentwicklungsoperator gemäß Gl.(2.6) der Gleichung

$$i\partial_t \hat{U}_I(t, t_0) = \hat{V}_I \hat{U}_I(t, t_0) \quad (2.16)$$

genügt.

Formale Integration der Gleichung (2.16) liefert [29]

$$U_I(t, t_0) = \bar{T} \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t dt' V_I(t') \right\} \quad (2.17)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots dt_k \bar{T} [V_I(t_1) \dots V_I(t_k)] \quad (2.18)$$

wobei durch

$$\bar{T} (V_I(t_1), V_I(t_2)) = \begin{cases} V_I(t_1)V_I(t_2) & \text{falls } t_1 \geq t_2 \\ V_I(t_2)V_I(t_1) & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.19)$$

der Zeitordnungsoperator \bar{T} definiert ist.

Andererseits gilt natürlich wegen obiger Definition Gl.(2.8)

$$|\Psi_I(t)\rangle = e^{iH_0 t} |\Psi_S(t)\rangle \quad (2.20)$$

$$= e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} |\Psi_S(t_0)\rangle \quad (2.21)$$

$$= e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0} |\Psi_I(t_0)\rangle \quad (2.22)$$

und man erhält als alternative Darstellung des Zeitentwicklungsoperators

$$\implies U_I(t, t_0) = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0} \quad (2.23)$$

Allerdings ist die Darstellung des Zeitentwicklungsoperators Gl.(2.18) für die Störentwicklung geeigneter.

Um eine Störentwicklung für Gl.(2.1) zu erhalten, nimmt man an, daß die Störung V für Zeiten im Unendlichen $t = \pm\infty$ „ausgeschaltet“ ist, und diese für Zeiten $t \approx 0$ adiabatisch eingeschaltet werden kann. Um dies zu erreichen, betrachten wir folgenden Hamilton-Operator:

$$\hat{H}_\varepsilon = \hat{H}_0 + e^{-\varepsilon|t|} \hat{V}, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.24)$$

der sich von Gl.(2.1) durch Einführung einer expliziten Zeitabhängigkeit unterscheidet.

Der Parameter ε ist eine kleine positive Zahl, die im adiabatischen Limes infinitesimal klein wird. Mit Hilfe des Hamilton-Operators Gl.(2.24) erhält man nun die gleichen Eigenzustände für $t \rightarrow \pm\infty$ wie für den ungestörten Hamilton-Operator \hat{H}_0 , die dann mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}_{I,\varepsilon}(t', t)$ derart propagiert werden sollen, daß sie in Eigenzustände von \hat{H} für Zeiten $t \approx 0$ übergehen.

Für den Wechselwirkungszustand ergibt sich somit

$$|\Psi_{I,\varepsilon}(t)\rangle = U_{I,\varepsilon}(t, t_0) |\Psi_{I,\varepsilon}(t_0)\rangle \quad (2.25)$$

wobei nun der Zeitentwicklungsoperator gegeben ist durch

$$\begin{aligned} U_{I,\varepsilon}(t, t_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots dt_k e^{-\varepsilon(|t_1| + \dots + |t_k|)} \overleftarrow{T} [V_I(t_1) \dots V_I(t_k)] \\ &= \overleftarrow{T} \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t dt' e^{-\varepsilon|t'|} V_I(t') \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Für den Grenzfall $t \rightarrow \pm\infty$ erhalten wir für den Wechselwirkungszustand

$$|\Psi_{I,\varepsilon}(t_0)\rangle = e^{iH_0 t_0} |\Psi_S(t_0)\rangle = |\Phi_0\rangle \quad (2.27)$$

wobei $|\Phi_0\rangle$ den Grundzustand von \hat{H}_0 bezeichnen soll mit

$$H_0 |\Phi_0\rangle = E_0 |\Phi_0\rangle \quad (2.28)$$

Entsprechend ergibt sich für $t = 0$

$$|\Psi_H\rangle = |\Psi_{I,\varepsilon}(0)\rangle = U_{I,\varepsilon}(0, -\infty)|\Phi_0\rangle \quad (2.29)$$

womit wir nun in der Lage sind, durch Eigenzustände zum freien Hamilton-Operator unsere Eigenzustände zum voll wechselwirkenden Hamilton-Operator darzustellen. Das man im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ durch Gl.(2.29) tatsächlich einen exakten Eigenzustand zu \hat{H} erhält, ist Aussage des [30]

Theorem von Gell-Mann und Low :

Existiert in jeder Ordnung Störungstheorie die Größe

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{U_\varepsilon(0, \pm\infty)|\Phi_0\rangle}{\langle\Phi_0|U_\varepsilon(0, \pm\infty)|\Phi_0\rangle} \equiv \frac{|\Psi_0\rangle}{\langle\Phi_0|\Psi_0\rangle} \quad (2.30)$$

so ist sie ein Eigenzustand zu \hat{H}

$$\hat{H} \frac{|\Psi_0\rangle}{\langle\Phi_0|\Psi_0\rangle} = E \frac{|\Psi_0\rangle}{\langle\Phi_0|\Psi_0\rangle} \quad (2.31)$$

Dieses Resultat ist Ausdruck dafür, daß unser explizit zeitabhängig konstruierter Hamilton-Operator nur schwach für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen \hat{H} konvergiert.

Anstatt das Theorem weiter zu diskutieren, nutzen wir es gleich, indem wir von links mit $\langle\Phi_0|$ an Gl.(2.31) multiplizieren und erhalten nach einer kleinen Umformung

$$\Delta E = E - E_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\langle\Phi_0|VU_\varepsilon(0, -\infty)|\Phi_0\rangle}{\langle\Phi_0|\Psi_0\rangle} \quad (2.32)$$

als Änderung unserer freien Grundzustandsenergie durch Einschalten einer Wechselwirkung \hat{V} .

Eine alternative Darstellung zu Gl.(2.32) ergibt sich aus Betrachtung der Größe

$$i\partial_t \ln \langle\Phi_0|U_\varepsilon(t, -\infty)|\Phi_0\rangle|_{t=0} \quad (2.33)$$

Mit $i\partial_t U(t, t') = V_I(t)U(t, t')$ erhält man dann

$$\begin{aligned} i\partial_t \ln \langle\Phi_0|U_\varepsilon(t, -\infty)|\Phi_0\rangle|_{t=0} &= \\ \frac{\langle\Phi_0|e^{-\varepsilon|t|}V_I(t)U_\varepsilon(t, -\infty)|\Phi_0\rangle|_{t=0}}{\langle\Phi_0|U_\varepsilon(t, -\infty)|\Phi_0\rangle} &= \\ \frac{\langle\Phi_0|V_I(0)U_\varepsilon(0, -\infty)|\Phi_0\rangle}{\langle\Phi_0|U_\varepsilon(0, -\infty)|\Phi_0\rangle} & \end{aligned} \quad (2.34)$$

und schlußendlich

$$\Delta E = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \partial_t \ln \langle \Phi_0 | U_\varepsilon(t, -\infty) | \Phi_0 \rangle |_{t=0} \quad (2.35)$$

2.2 Feynman-Diagramme

Verwenden wir obigen Ausdruck für die Energieverschiebung, so ergibt sich als Störentwicklung

$$\begin{aligned} \Delta E &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \partial_t \ln \langle \Phi_0 | U_\varepsilon(t, -\infty) | \Phi_0 \rangle |_{t=0} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \partial_t \ln \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int_{-\infty}^t dt_1 \dots dt_k e^{\varepsilon(|t_1| + \dots + |t_k|)} \right. \\ &\quad \left. \langle \Phi_0 | T[V_I(t_1) \dots V_I(t_k)] | \Phi_0 \rangle \right\} |_{t=0} \end{aligned} \quad (2.36)$$

und es verbleibt nur noch die Auswertung des Grundzustandserwartungswertes des zeitgeordneten Produkts.

Schreiben wir die Zweiteilchenwechselwirkung in [31] Besetzungszahldarstellung

$$\begin{aligned} V_I(t) &= \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \langle ij | V | lk \rangle a_i^+(t) a_j^+(t) a_k^-(t) a_l^-(t) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{ijkl} \langle ij | V | lk - kl \rangle a_i^+(t) a_j^+(t) a_k^-(t) a_l^-(t) \end{aligned} \quad (2.37)$$

so verbleiben lediglich Terme der Form

$$\begin{aligned} &\langle ij | V | kl \rangle \langle i' j' | V | k' l' \rangle \dots \langle \Phi_0 | T[c_i^+(t_1) c_j^+(t_1) c_k^-(t_1) c_l^-(t_1) \\ &\quad c_{i'}^+(t_1) c_{j'}^+(t_1) c_{k'}^-(t_1) c_{l'}^-(t_1) \dots] | \Phi_0 \rangle \end{aligned} \quad (2.38)$$

Die Potentialmatrixelemente $\langle ij | V | kl \rangle$ können als bekannt vorausgesetzt werden, da die mit i, j, k, l bezeichneten Zustände gerade die Eigenzustände des freien Systems sind. Die verbleibenden Grundzustandserwartungswerte der zeitgeordneten Produkte von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren werden mit Hilfe des Wick'schen Theorems ausgewertet.

Dieses besagt, daß das zeitgeordnete Produkt von Operatoren geschrieben werden kann als Summe über das reine normalgeordnete Produkt, über normalgeordnete

Produkte mit einer, zwei und mehr Kontraktionen und den vollständig kontrahierten Normalprodukten

$$\begin{aligned}
 T[UVW \dots XYZ] &= N[UVW \dots XYZ] \\
 &+ (-)^\alpha \underline{UV} N[\cancel{U} \cancel{V} W \dots XYZ] + \dots \\
 &+ (-)^{\alpha+\alpha'} \underline{UV} \underline{WX} N[\cancel{U} \cancel{V} \cancel{W} \dots \cancel{X} YZ] + \dots \\
 &+ \dots \\
 &+ \text{maximale Anzahl vollständig kontrahierter Terme}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

α gibt hierbei die Anzahl der Zweiervertauschungen an, um die einzelnen Operatoren direkt nebeneinander anordnen zu können.

Das Normalprodukt ist definiert durch die Vorschrift, daß bei Darstellung der Operatoren durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, die Vernichter alle rechts und die Erzeuger alle links stehen, so daß der Vakuumerwartungswert eines normalgeordneten Produkts immer identisch gleich Null ist

$$\langle 0|N[AB]|0\rangle = 0. \tag{2.40}$$

Die Kontraktion zweier Operatoren ist definiert als Differenz zwischen zeitgeordnetem und normalgeordnetem Produkt der Operatoren

$$\underline{AB} = T[AB] - N[AB] \tag{2.41}$$

wobei die Kontraktion selber eine komplexe Zahl ist.

Hieraus ergibt sich, daß der Grundzustandserwartungswert eines zeitgeordneten Produkts gleich der Summe über alle möglichen, vollständig kontrahierten Terme ist.

Die verbliebenen Kontraktionen stellen schließlich nichts anderes dar als die Einzelteilchen-Greensfunktion [32]

$$\begin{aligned}
 iG^0(kt_k, lt_l) &= \langle \Phi_0|T[c_k(t_k)c_l^+(t_l)]|\Phi_0\rangle \\
 &= \begin{cases} \langle \Phi_0|T[a_k(t_k)a_l^+(t_l)]|\Phi_0\rangle & \varepsilon_k, \varepsilon_l > \varepsilon_F \\ \langle \Phi_0|T[b_k^+(t_k)b_l(t_l)]|\Phi_0\rangle & \varepsilon_k, \varepsilon_l \leq \varepsilon_F \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 &= \delta_{kl} e^{-i\varepsilon_k(t_k-t_l)} (\Theta(t_k-t_l)\Theta(k-k_F) - \Theta(t_l-t_k)\Theta(k_F-k))
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

hier in der Impulsdarstellung. Anstatt des reinen Vakuumzustands haben wir hier den Grundzustand des N-Teilchensystems geschrieben, der gerade dadurch ausgezeichnet ist, daß alle Zustände bis zum Fermi-Niveau besetzt sind. Hierfür ergibt sich, da nur fermionische Systeme betrachtet werden, für die Erzeuger c_i^+ und Vernichter c_i der Einteilchenzustände zu H_0 die Interpretation als Teilchen- und Lochoperatoren, indem man definiert

$$\left. \begin{array}{l} \text{Teilchenerzeuger} \quad a_i^+ \equiv c_i^+ \\ \text{Teilchenvernichter} \quad a_i \equiv c_i \end{array} \right\} \text{für } \varepsilon_i > \varepsilon_F \quad (2.43)$$

und

$$\left. \begin{array}{l} \text{Locherzeuger} \quad b_i^+ \equiv c_i \\ \text{Lochvernichter} \quad b_i \equiv c_i^+ \end{array} \right\} \text{für } \varepsilon_i \leq \varepsilon_F \quad (2.44)$$

Somit beschreibt obige Greensfunktion für $t_k > t_l$ die Propagation eines Teilchens oberhalb des Fermi-Sees und für $t_k < t_l$ die Propagation eines Loches im Fermisee.

Insgesamt ergibt sich nun für die anfangs beschriebene Störreihe Gl.(2.36) die allgemeine Form des n-ten Terms

$$\frac{(-i)^n}{n!2^n} \left\{ \sum_{ijkl} \dots \right\} \int d^n t e^{-\varepsilon(|t_1|+\dots)} \sum (\pm) \underbrace{\langle V \rangle \dots \langle V \rangle}_{n \text{ Faktoren}} \underbrace{(iG^{(0)}) \dots (iG^{(0)})}_{2n \text{ Faktoren}} \quad (2.45)$$

wobei die Summe über alle vollständig kontrahierten Terme läuft und das Produkt der n Matrixelemente in jedem Summanden gleich ist. Eine besondere Veranschaulichung erhält man durch die Feynman-Graphen mittels folgender Regeln [31], die eine eindeutige Beziehung zwischen graphischer Darstellung und formalem Ausdruck darstellen:

1. Man denke sich eine Zeitachse mit wachsendem t von unten nach oben.

2. Für die Greensfunktion $G(\lambda't', \lambda t)$ zu unterschiedlichen Zeitargumenten zeichne man

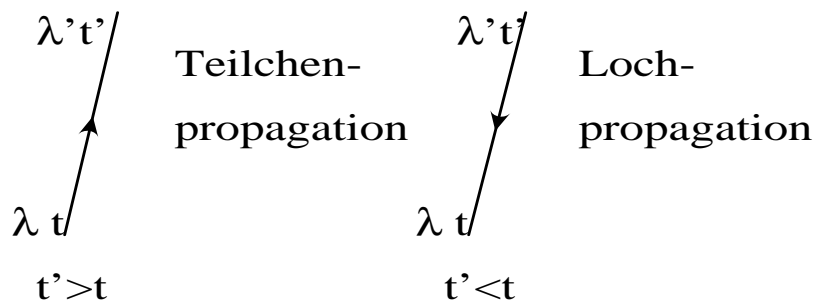


Abbildung 2.1: Greensfunktion zu unterschiedlichen Zeiten

und für gleiche Zeitargumente $t' = t$

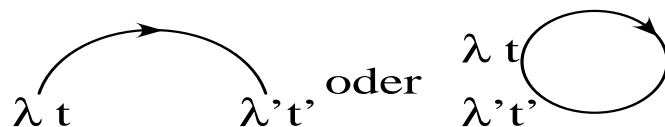


Abbildung 2.2: Greensfunktion zu gleichen Zeiten

3. Die Wechselwirkungsmatrixelemente werden durch eine geschlängelte Linie dargestellt, die Endpunkte bezeichnet man als Vertices. Diese sind Anfangs- und Endpunkte der G^0 -Linien und werden entsprechend indiziert.

$$\langle ij|V|kl\rangle = \text{Diagram}$$

Abbildung 2.3: Vertex

4. Über alle an den Vertices auftretenden Indizes wird summiert bzw. integriert. Für die Zeitintegration ist der Faktor $e^{-\varepsilon|t|}$ zu berücksichtigen.
5. Als Vorfaktor eines Terms n-ter Ordnung erhält man

$$\frac{(i)^n}{n!2^n}$$

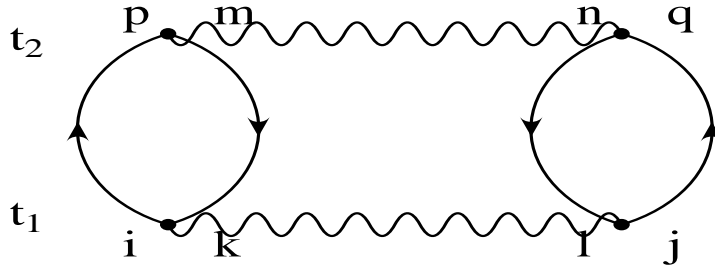
6. Das Vorzeichen eines Terms ergibt sich aus der Anzahl l der Loops (geschlossene G^0 -Linien)

$$(-1)^l$$

Zur Illustration der Regeln seien zwei Beispiele gegeben :

1. Graph zweiter Ordnung

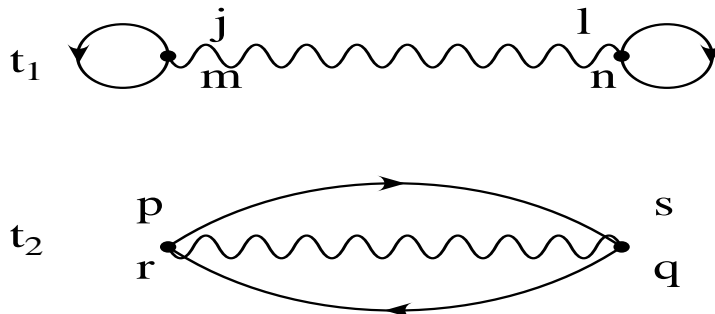
Abbildung 2.4: Feynman-Diagramm Beispiel 1



$$\begin{aligned}
 &= (-)^2 \frac{i^2}{2^2 2!} \sum_{ijkl} \sum_{mnpq} \int_{-\infty}^0 dt_2 \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{\varepsilon(|t_1|+|t_2|)} \langle ij|V|kl\rangle \langle mn|V|pq\rangle \\
 &\quad G_0(kt_1, mt_2) G_0(pt_2, it_1) G_0(qt_2, jt_1) G_0(lt_1, nt_2)
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

2. Unzusammenhängender Graph

Abbildung 2.5: Feynman-Diagramm Beispiel 2



$$\begin{aligned}
 &= (-)^3 \frac{(i)^2}{2!2^2} \sum_{jkmn} \sum_{pqrs} \int dt_1 \int dt_2 e^{-\varepsilon(|t_1|+|t_2|)} \\
 &\quad \langle jk|V|mn\rangle \langle pq|V|rs\rangle G^{(0)}(mt_1, jt_1^+) G^{(0)}(nt_1, kt_1^+) \\
 &\quad \quad \quad G^{(0)}(st_2, pt_2^+) G^{(0)}(rt_2, qt_2^+) \\
 &= \frac{1}{8} \left\{ \sum_{jkmn} \int dt_1 e^{-\varepsilon|t_1|} \langle jk|V|mn\rangle G^{(0)}(mt_1, jt_1^+) G^{(0)}(nt_1, kt_1^+) \right\} \\
 &\quad \left\{ \sum_{pqrs} \int dt_2 e^{-\varepsilon|t_2|} \langle pq|V|rs\rangle G^{(0)}(st_2, pt_2^+) G^{(0)}(rt_2, qt_2^+) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Am Beispiel zwei sieht man, daß offensichtlich unzusammenhängende Graphen in Anteile faktorisieren, die zu zusammenhängende Untergraphen gehören. Hierzu wird im nächsten Kapitel noch einmal kurz darauf eingegangen werden.

2.3 Linked-Cluster Entwicklung nach Goldstone

Wir wenden uns noch einmal dem Ausdruck Gl.(2.32) für die Änderung der Grundzustandsenergie bei Einschalten einer Wechselwirkung zu.

Schreiben wir wieder die dort auftretenden Operatoren in Besetzungszahldarstellung, so erhalten wir analog zu oben die Grundzustandserwartungswerte als zeitgeordnete Produkte in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, die wir wiederum mit Hilfe des Wick'schen Theorems auswerten und die entsprechenden Terme der Störreihe mit Hilfe von Feynman-Diagrammen graphisch darstellen können.

Es zeigt sich nun, daß die in der Entwicklung auftretenden Terme im Goldstone Sinne unterteilt werden können in verbundene und unverbundene Diagramme, vgl. Abb.2.4 bzw.2.5.

Es läßt sich nun der Beitrag in jeder Ordnung der Störentwicklung in

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} \langle \Phi_0 | V U_\varepsilon(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} \langle \Phi_0 | \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots dt_k \bar{T} [V V_I(t_1) \dots V_I(t_k)] | \Phi_0 \rangle
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

umschreiben [32] zu

$$\sum_{\nu=0}^k \langle \Phi_0 | \overrightarrow{T} [V V_I(t_1) \dots V_I(t_\nu)] | \Phi_0 \rangle_C \langle \Phi_0 | \overrightarrow{T} [V_I(t_{\nu+1}) \dots V_I(t_k)] | \Phi_0 \rangle \binom{\nu}{k} \quad (2.49)$$

wobei der Index im ersten Term für *connected*, also für ein verbundenes Diagramm steht. Führt man die Summation aus, so faktorisiert der Zähler in Gl.(2.48) in einen Anteil, der nur noch verbundene Diagramme enthält und einen Anteil, der gleich der Vakuumamplitude im Nenner von Gl.(2.48) ist und sich somit herauskürzt. Anschließendes Ausführen der verbliebenen Zeitintegration liefert dann als Ergebnis

$$E - E_0 = \Delta E = \frac{\langle \Phi_0 | V | \Psi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} = \langle \Phi_0 | V \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{E_0 - H_0} V \right)^n | \Phi_0 \rangle_C \quad (2.50)$$

D.h., bei der oben angegebenen Entwicklung der Störreihe mit Hilfe von Feynman-Diagrammen braucht man für die einzelnen Terme nur verbundene Diagramme zu betrachten. Gerade dies ist die Aussage des Goldstone Theorems [33].

Interessant an Gl.(2.50) ist weiterhin, daß die zeitabhängige Störentwicklung im Endergebnis wieder ein zeitunabhängiges Ergebnis liefert, so wie es ja auch sein sollte, nachdem wir von einem explizit zeitunabhängigen Hamilton-Operator ausgegangen sind.

2.4 Hartree-Fock Verfahren

Ausgangspunkt für die bisherigen Ausführungen war der Hamilton-Operator Gl.(2.1)

$$\hat{H} = \underbrace{\sum_i (t_i + u_i)}_{\hat{H}_0} + \underbrace{\sum_{i<j} v_{ij} - \sum_i u_i}_{\hat{V}} \quad (2.51)$$

mit den in Kapitel 2.1 eingeführten Bezeichnungen. Hierfür haben wir formal abgeleitet, wie z.B. die Grundzustandsenergie des Systems prinzipiell bestimmt werden kann Gl.(2.50).

Offen gelassen wurde bisher die Wahl des Einteilchenpotentials U , daß ja gerade eingeführt wurde, um die Konvergenzeigenschaften der Störentwicklung günstig zu beeinflussen.

Ein guter Startpunkt ist, daß Einteilchenpotential in der Hartree-Fock Näherung

$$\langle r|U|m\rangle = \sum_n \langle rn|\tilde{V}|rn - nr\rangle = \sum_n \langle rn|\tilde{V}|rn\rangle_A \quad (2.52)$$

zu wählen, also als Summe über die antisymmetrisierten Matrixelemente der Zweiteilchenwechselwirkung \tilde{V} . Für die Goldstone-Entwicklung Gl.(2.50) bedeutet dies, daß sich für die Änderung der Grundzustandsenergie in niedrigster Ordnung der Störentwicklung ($n = 0$)

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2} \sum_{m,n} \langle mn|\hat{V}|mn\rangle_A \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,n} \langle mn|\tilde{V}|mn\rangle_A - \sum_n \langle n|U|n\rangle \end{aligned} \quad (2.53)$$

ergibt, wobei die Summe über alle nicht angeregten Einteilchenzustände läuft und die Einteilchenzustände gerade die zu H_0 gehörigen Eigenfunktionen

$$\hat{H}_0|n\rangle = (T + U)|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (2.54)$$

darstellen. Gl.(2.54) und Gl.(2.52) stellen gerade die Hartree-Fock Selbstkonsistenz-Gleichungen dar.

Es ergibt sich somit für die Grundzustandsenergie des Systems

$$\begin{aligned} E = E_0 + \Delta E &= \sum_n \langle n|(T + U)|n\rangle + \frac{1}{2} \sum_{m,n} \langle mn|\hat{V}|mn - nm\rangle \\ &= \sum_n \langle n|T|n\rangle + \frac{1}{2} \sum_{m,n} \langle mn|\tilde{V}|mn - nm\rangle \\ &= \sum_n \langle n|T|n\rangle + \frac{1}{2} \sum_n \langle n|\hat{U}|n\rangle \end{aligned} \quad (2.55)$$

wobei beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile gerade von der speziellen Wahl des Einteilchenpotentials Gl.(2.52) Gebrauch gemacht wurde.

Wie man sieht, ist daß Ergebnis für die Grundzustandsenergie formal unabhängig vom Einteilchenpotential U , andererseits ergibt sich aufgrund des Selbstkonsistenzverfahrens, daß natürlich bei der Bestimmung der Einteilchenzustände Gl.(2.54) gerade das Einteilchenpotential U eingeht.

2.5 Bethe-Goldstone Gleichung

Verwendet man die eben beschriebene Näherung zur Bestimmung der Grundzustandsenergie unter Verwendung einer realistischen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung, so erhält man [34] z.B. für das System Kernmaterie positive Energien von einigen 10 MeV/Nukleon bis zu 100 MeV/Nukleon und mehr, je nach verwendeter realistischer Wechselwirkung. Dies ist ganz offensichtlich im Gegensatz zu dem erwarteten Wert von ca. -16 MeV/Nukleon. Der Grund für dieses Mißverhältnis ist wohlbekannt. Ein typisches, die freie Nukleon-Nukleon Wechselwirkung beschreibendes, und damit realistisches Potential, zeichnet sich zum einen gerade durch seine kurzreichweitige Attraktion, zum anderen durch eine starke Repulsion am Kernort aus. Benutzt man ein solches Potential in obiger Hartree-Fock Näherung, so berechnet man Matrixelemente dieser realistischen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung mit unkorrelierten Zweiteilchenzuständen. Diese zeichnen sich aber gerade für kleine Relativabstände, für die die Wechselwirkung sehr repulsiv ist, durch nicht verschwindende Beiträge aus, so daß sich insgesamt von den Potentialmatrixelementen positive Beiträge zur Bindungsenergie ergeben.

Es ist damit unerlässlich, Korrelationen, über die reine Hartree-Fock Näherung hinaus, konsistent zu berücksichtigen.

Für die Relativwellenfunktion zweier Nukleonen bedeutet dies, daß eine korrelierte Zweiteilchenwellenfunktion, im Vergleich zur unkorrelierten, eine kleine bis verschwindende Aufenthaltswahrscheinlichkeit liefern sollte, wenn der Relativabstand der beiden Nukleonen so klein ist, daß der repulsive Anteil des Potentials überwiegt, und eine größere in den Bereichen, in denen der attraktive Anteil des Potentials vorherrscht.

Eine Möglichkeit, die insbesondere durch die kurzreichweitigen, stark repulsiven Anteile der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung induzierten Korrelationen zu berücksichtigen, besteht in der Einführung einer effektiven Wechselwirkung, der G -Matrix, die Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung ist [35]

$$G = V + V \frac{Q}{\omega - H_0 + i\eta} G \quad (2.56)$$

und die Streuung zweier Nukleonen im Medium, wie in Abb.(2.6) dargestellt, beschreibt.

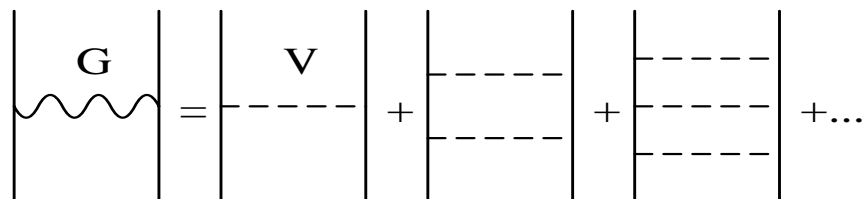


Abbildung 2.6: Zur Definition der G-Matrix

Die Bethe-Goldstone Gleichung ist ähnlich der Lippmann-Schwinger Gleichung

$$T = V + V \frac{1}{E - H_0 + i\eta} T \quad (2.57)$$

die die Streuung zweier Teilchen im Vakuum beschreibt. Ein Unterschied zur Lippmann-Schwinger Gleichung ist die Einführung des Pauli-Operators Q zur Berücksichtigung des Pauli-Prinzips, indem nur Streuzustände für die beiden wechselwirkenden Nukleonen oberhalb des Fermi-Sees erlaubt sind. Für den Pauli-Operator Q ergibt sich damit

$$\hat{Q}|\mu\nu\rangle = \begin{cases} 1 & e_\mu \text{ und } e_\nu > e_F \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} |\mu\nu\rangle \quad (2.58)$$

mit den Eigenzuständen Gl.(2.54) zum Hamilton-Operator \hat{H}_0 . Ferner ist die im Energienenner von Gl.(2.56) auftretende Energie nicht die reine kinetische Energie, sondern die bezüglich des Vielteilchensystems definierte Energie, wie weiter unten angegeben.

Die sich aus der Bethe-Goldstone Gleichung ergebende G -Matrix ist also als effektive Zweiteilchenwechselwirkung zu verstehen, die, auf den unkorrelierten Zweiteilchenzustand $|\Phi\rangle$ angewandt, das gleiche Ergebnis liefert, wie die Anwendung der reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung beschreibenden Operators V auf die korrelierte Wellenfunktion $|\Psi\rangle$.

$$V|\Psi\rangle = G|\Phi\rangle \quad (2.59)$$

so daß die Berücksichtigung von Korrelationen vollständig von der G -Matrix erfasst wird.

Ersetzen wir nun die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung \tilde{V} in Gl.(2.52) mit der effektiven Wechselwirkung G , so erhalten wir die Einteilchenenergie in der Brueckner-Hartree-Fock (BHF) Näherung

$$\epsilon_k = \frac{k^2}{2M} + \sum_{\alpha < F} \langle k\alpha | G(\omega = \epsilon_k^{BHF} + \epsilon_\alpha^{BHF}) | k\alpha \rangle_A \quad (2.60)$$

Die hier eingehende Definition der Startenergie ω ergibt sich nach dem Theorem von Bethe, Brandow und Petschek [36].

Unmittelbar einsichtig ist, daß sich bei dieser Wahl der Startenergie ein Selbstkonsistenz-Verfahren ergibt. Zur Berechnung der Einteilchenenergie muß einerseits die G -Matrix bekannt sein, andererseits geht die Einteilchenenergie aber gerade wieder über die Startenergie in die Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung, und damit in die Bestimmung der G -Matrix, ein.

2.5.1 Numerisches Lösungsverfahren

In den folgenden Abschnitten werden einige technische Details zur exakten Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung erläutert, wie sie im Rahmen dieser Arbeit implementiert und benutzt wurden. Dies betrifft hauptsächlich die Darstellung der Bethe-Goldstone Gleichung in einer Partialwellenbasis sowie Lösung derselben mit Hilfe der Matrixinversion's-Methode [37].

Ferner wird an entsprechender Stelle angegeben, welche Näherungen üblicherweise benutzt werden, um den numerischen Aufwand für die Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung zu verringern.

Zweckmäßigerweise wird zur Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung zu den Variablen Schwerpunktsimpuls \vec{K} , der im System der Kernmaterie eine Erhaltungsgröße ist, und Relativimpuls \vec{k} übergegangen, die hier definiert werden als

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \\ \text{und } \vec{k} &= \frac{1}{2}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \end{aligned} \quad (2.61)$$

wobei \vec{k}_1, \vec{k}_2 die Einteilchenimpulse bezeichnen.

Antisymmetrisierte Wellenfunktion

Ausgehend von den Einteilchenwellenfunktionen

$$|\vec{k}_1; s_1, m_{s_1}, t_1, m_{t_1}\rangle \text{ und } |\vec{k}_2; s_2, m_{s_2}, t_2, m_{t_2}\rangle \quad (2.62)$$

mit den Einteilchen-Impulsen $\vec{k}_i, i = 1, 2$ sowie den Spin- und Isospin-Quantenzahlen s_i, t_i ergibt sich für die antisymmetrisierte Zweiteilchen-Wellenfunktion nach Übergang zu den Variablen Schwerpunktsimpuls \vec{K} und Relativimpuls \vec{k} in einer Partialwellenentwicklung

$$\begin{aligned} & |\vec{k}; s_1, m_{s_1}, t_1, m_{t_1}, s_2, m_{s_2}, t_2, m_{t_2}\rangle_A = \\ & |\vec{k}; s_1, m_{s_1}, t_1, m_{t_1}, s_2, m_{s_2}, t_2, m_{t_2}\rangle - |-\vec{k}; s_2, m_{s_2}, t_2, m_{t_2}, s_1, m_{s_1}, t_1, m_{t_1}\rangle = \\ & \sum_{\substack{LM_L \\ SM_S \\ TM_T \\ JM_J}} (1 - (-)^{S+T+L}) \langle TM_T | t_1, m_{t_1}, t_2, m_{t_2} \rangle \langle SM_S | s_1, m_{s_1}, s_2, m_{s_2} \rangle \\ & \quad \times \langle JM_J | LM_L SM_S \rangle |k; (LS) JM_J TM_T \rangle Y_{L, M_L}(\hat{k}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Hierbei wurde die Abhängigkeit vom Schwerpunktsimpuls \vec{K} unterdrückt und die Kopplung des Drehimpulses, der Spins und Isospins zum Gesamtdrehimpuls J und Gesamtisospin T mittels der Clebsch-Gordan Koeffizienten durchgeführt.

Ferner wurde bei der Antisymmetrisierung von den Symmetrieeigenschaften der Clebsch-Gordan Koeffizienten

$$\begin{aligned} \langle SM_S | s_2, m_{s_2}, s_1, m_{s_1} \rangle &= (-)^{s_1+s_2-S} \langle SM_S | s_1, m_{s_1}, s_2, m_{s_2} \rangle \\ (s_1 = s_2 = \frac{1}{2}) &= (-)^{S+1} \langle SM_S | s_1, m_{s_1}, s_2, m_{s_2} \rangle \end{aligned} \quad (2.64)$$

Gebrauch gemacht, dargestellt am Beispiel des Spins; gleiches gilt natürlich ebenso für den Isospin. Weiterhin ergibt sich

$$\begin{aligned} |-\vec{k}\rangle &= \sum_{LM_L} \langle LM_L | -\vec{k} \rangle |k; LM_L\rangle \\ &= \sum_{LM_L} (-)^L \langle LM_L | \vec{k} \rangle |k; LM_L\rangle \end{aligned} \quad (2.65)$$

aus den Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen

$$\langle LM_L | \hat{k} \rangle = Y_{LM_L}(\hat{k}) = (-)^L Y_{LM_L}(-\hat{k}). \quad (2.66)$$

Somit erhält man aus der Antisymmetrisierung die Auswahl-Regel

$$L + S + T = \text{ungerade} \quad (2.67)$$

Für die weiter unten benutzte $|(LS)J\rangle$ -Basis ergibt sich unmittelbar

$$|k(LS)JM_JTM_T\rangle = \sum_{M_S M_L} \langle SM_S LM_L | JM_J \rangle |k; LM_L SM_S TM_T\rangle \quad (2.68)$$

Darstellung

Üblicherweise wird die Bethe-Goldstone Gleichung in einer Partialwellenentwicklung, $|(LS)J\rangle$ -Basis Gl.(2.68), dargestellt und in eine Matrix-Gleichung überführt, die dann mit gängigen Methoden gelöst werden kann.

Hierzu ist es erforderlich, die Abhängigkeit der auftretenden Übergangsmatrixelemente von den verschiedenen Quantenzahlen zu bestimmen [38]. Wie eingangs bereits erwähnt, stellt der Schwerpunktsimpuls \vec{K} eine Erhaltungsgröße dar, so daß dieser in der Wellenfunktion der Einfachheit halber nicht weiter angegeben wird.

Ferner werden die Isospin-Quantenzahlen unterdrückt, da die in der Bethe-Goldstone Gleichung auftretenden Operatoren in diesen diagonal sind.

Gehen wir von der Bethe-Goldstone Gleichung (2.56) aus, so gilt für die Potentialmatrixelemente

$$\langle k'(L'S')J'M'_J | V | k(LS)JM_J \rangle = \langle k'(L'S)J | V | k(LS)J \rangle \delta_{S'S} \delta_{J'J} \delta_{M'_J M_J} \quad (2.69)$$

Weiterhin ist der in der Bethe-Goldstone Gleichung auftretende Propagator diagonal in allen Quantenzahlen

$$\begin{aligned} & \langle k'(L'S')J'M'_J | \frac{1}{\omega - E(K, k) + i\varepsilon} | k(LS)JM_J \rangle \\ &= (2\pi)^3 \frac{\delta(k' - k)}{k^2} \frac{1}{\omega - E(K, k) + i\varepsilon} \delta_{S'S} \delta_{L'L} \delta_{J'J} \delta_{M'_J M_J} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Für den Pauli-Operator ergibt sich

$$\begin{aligned} & \langle k'(L'S')J'M'_J | Q(K, k) | k(LS)JM_J \rangle \\ &= (2\pi)^3 \frac{\delta(k' - k)}{k^2} \langle (L'S)J' | Q(K, k) | (LS)J \rangle \delta_{S'S} \delta_{M'_J M_J} \end{aligned} \quad (2.71)$$

wobei nur Matrixelemente mit der gleichen Parität $(-)^L$ auftreten.

Um einen expliziten Ausdruck für den Pauli-Operator zu erhalten, entkoppelt man den Bahndrehimpuls und den Spin Gl.(2.68)

$$\begin{aligned} \langle (L'S)J' | Q(K, k) | (LS)J \rangle = \\ \sum_{M_S M_L} \langle LM_L S M_S | J M_J \rangle \langle J' M_J | L' M_L S M_S \rangle \langle L' M_L | Q(K, k) | L M_L \rangle \end{aligned} \quad (2.72)$$

und erhält schließlich

$$\begin{aligned} \langle L' M_L | Q(K, k) | L M_L \rangle \\ = \int d\hat{k} Y_{L' M_L}^*(\hat{k}) Y_{L M_L}(\hat{k}) \Theta(|\vec{P} + \vec{k}| - k_F) \Theta(|\vec{P} - \vec{k}| - k_F) \end{aligned} \quad (2.73)$$

als expliziten Ausdruck für den Pauli-Operator.

Faßt man nun alle Terme zusammen, so ergibt sich für die Bethe-Goldstone Gleichung in der Partialwellenentwicklung

$$\begin{aligned} \langle k' (L'S)J' | G^{TM_J}(K, \omega) | k (LS)J \rangle = \langle k' (L'S)J | V^T | k (LS)J \rangle \delta_{J'J} \\ + \int \frac{dk'' k''^2}{2\pi^2} \sum_{L'' J'' L'''} \langle k' (L'S)J' | V^T | k'' (L''S)J'' \rangle G_0(K, k'') \\ \times \langle (L'''S)J' | Q(K, k'') | (L''S)J'' \rangle \langle (L''S)J'' k'' | G^{TM_J}(K, \omega) | k (LS)J \rangle \end{aligned} \quad (2.74)$$

wobei $G_0(K, k'')$ für den Propagator

$$\frac{1}{\omega - E(K, k'') + i\varepsilon} \quad (2.75)$$

steht und der Isospin T der Vollständigkeit halber wieder eingeführt wurde.

Die in Gl.(2.74) erhaltenen Quantenzahlen sind neben dem Spin S , der Isospin T und die Parität $\pi = (-)^L$, für die insgesamt vier Kombinationen, Tab.2.1, möglich sind, wobei sich die Parität unmittelbar aus der Auswahlregel Gl.(2.67) ergibt. Für vorgegebenen Schwerpunktsimpuls K , Startenergie ω und Projektionsquantenzahl M_J ist somit für jede Dichte mit Fermi-Impuls k_f ein Satz von vier Gleichungen zu lösen.

	T	S	π
i	0	0	-1
ii	0	1	+1
iii	1	0	+1
iv	1	1	-1

Tabelle 2.1: Kombinationen der erhaltenen Quantenzahlen

Matrixgleichung

Zur numerischen Berechnung der Bethe-Goldstone Gleichung (2.74) bedient man sich der Methode der Matrix-Inversion, die im Folgenden kurz skizziert werden soll.

Hierzu wird die Gl.(2.74) zuerst umgeschrieben, indem man zum einen das Integral über den Relativimpuls k'' diskretisiert

$$\int_0^\infty dk'' f(k'') \rightarrow \sum_{i=1}^N u_i \cdot f(k_i) \quad (2.76)$$

Hierbei ist f die zu integrierende Funktion an der Stelle k_i , und die u_i stellen geeignete Integrationsgewichte dar. N bezeichnet die Anzahl der Stützstellen und ist hinreichend groß zu wählen. Zur Bestimmung der Integrationspunkte und -stützstellen wird in dieser Arbeit die Methode von Gauss-Legendre [39] benutzt.

Zum anderen wird dem komplexen Energienenner Rechnung getragen, indem dieser mit der symbolischen Identität [32] umgeschrieben wird zu

$$\frac{1}{\omega - E(K, k) + i\varepsilon} = \frac{P}{\omega - E(K, k)} - i\pi\delta(\omega - E(K, k)) \quad (2.77)$$

Die δ -Funktion auf der rechten Seite kann vereinfacht werden zu

$$\delta(\omega - E(K, k)) = \left. \frac{\partial E}{\partial k} \right|_{k=k_s}^{-1} \delta(k - k_s) \quad (2.78)$$

wobei mit k_s die einfache Nullstelle des Nenners bezeichnet sei.

Mit „P“ im ersten Term auf der rechten Seite ist gemeint, daß bei der auszuführenden Integration der Cauchy-Hauptwert des Integrals zu bestimmen ist. Dies kann

jedoch umgangen werden, indem man die Singularität des Integranden an der Polstelle k_s durch Subtraktion des Zählers an der Polstelle aufhebt

$$P \int_0^\infty dk'' \frac{f(k'')}{\omega - E(K, k'')} = \int_0^\infty dk'' \frac{f(k'') - f(k_s)}{\omega - E(K, k'')} \quad (2.79)$$

wobei gelten muß

$$P \int_0^\infty dk'' \frac{1}{\omega - E(K, k'')} = 0 \quad (2.80)$$

Die Erfüllung dieser Bedingung ist für die weiter unten zu besprechende Parametrisierung von $E(K, k)$ exakt; wird $E(K, k)$ nicht in einer parametrisierten Form verwendet, so kann dies numerisch bestätigt werden.

Fassen wir nun die beiden Schritte, Diskretisierung des Integrals und Aufspaltung in Real- und Imaginärteil zusammen, und führen für eine kompaktere Darstellung für die relevanten Quantenzahlen Multiindizes

$$i = (L'S)J' ; j = (L'''S)J' ; l = (L''S)J'' ; j_0 = (LS)J \quad (2.81)$$

ein, so läßt sich die Bethe-Goldstone Gleichung schreiben als

$$\begin{aligned} \langle k'i|G|kj_0 \rangle &= \langle k'i|V|kj_0 \rangle \delta_{J'J} \\ &+ \sum_{lj} \sum_{n=1}^N u_n k_n^2 \langle k'i|V|k_n j \rangle G_0(k_n) \langle j|Q(k_n)|l \rangle \langle k_n l|G|kj_0 \rangle \\ &- i\pi k_s^2 \left| \frac{\partial E}{\partial k} \right|_{k=k_s}^{-1} \langle k'i|V|k_s j \rangle \langle j|Q(k_s)|l \rangle \langle k_s l|G|kj_0 \rangle \end{aligned} \quad (2.82)$$

wobei zur einfacheren Handhabung die Variablen Schwerpunktsimpuls K , Isospin T und die Startenergie ω unterdrückt wurden.

Im nächsten Schritt wird die Polstelle k_s zu den Stützstellen k_i hinzugefügt

$$k_{N+1} = k_s \quad (2.83)$$

sowie die Integrationsgewichte umdefiniert zu

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &= u_n k_n^2 G_0(k_n) ; n = 1 \dots N \\ \tilde{u}_{N+1} &= -k_s^2 \left\{ \sum_{n=1}^N u_n G_0(k_n) + i\pi \left| \frac{\partial E}{\partial k} \right|_{k=k_s}^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (2.84)$$

einschließlich der Behandlung des Hauptwertintegrals Gl.(2.79). Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle k'i|G|kj_0\rangle &= \langle k'i|V|kj_0\rangle\delta_{J'J} + \\ &\sum_{lj} \sum_{n=1}^{N+1} \tilde{u}_n \langle k'i|V|k_nj\rangle \langle j|Q(k_n)|l\rangle \langle k_nl|G|kj_0\rangle \end{aligned} \quad (2.85)$$

als weiter vereinfachte Darstellung von Gl.(2.82).

Um nun zu einer Matrixgleichung zu gelangen, wird auch der Impuls $k' \rightarrow k_m$; $m = 1 \dots N + 1$ diskretisiert, mit den gleichen Werten wie die bisherigen Stützstellen k_i ; $i = 1 \dots N + 1$.

Damit erhält man nach einer weiteren kleinen Umformung

$$\begin{aligned} \langle k_m i|V|kj_0\rangle\delta_{J'J} = \\ \sum_{lj} \sum_{n=1}^{N+1} \{\delta_{m,n}\delta_{i,l} - \tilde{u}_n \langle k_m i|V|k_nj\rangle \langle j|Q(k_n)|l\rangle\} \langle k_nl|G|kj_0\rangle \end{aligned} \quad (2.86)$$

Faßen wir jetzt noch die Multiindizes mit den auftretenden Impulsen zu neuen Indizes

$$\begin{aligned} M &\equiv (k_m, i) \\ N &\equiv (k_n, l) \end{aligned} \quad (2.87)$$

zusammen und führen zur weiteren Verdeutlichung die Abkürzungen

$$\begin{aligned} V_M &\equiv \langle k_m i|V|kj_0\rangle\delta_{J'J} \\ F_{MN} &\equiv \delta_{m,n}\delta_{i,l} - \tilde{u}_n \sum_j \langle k_m i|V|k_nj\rangle \langle j|Q(k_n)|l\rangle \\ G_N &\equiv \langle k_n l|G|kj_0\rangle \end{aligned} \quad (2.88)$$

ein, so wird die Matrixstruktur der Bethe-Goldstone Gleichung Gl.(2.74) offensichtlich

$$V_M = \sum_N F_{MN} G_N \quad (2.89)$$

Nach Inversion der Matrix

$$[F] \rightarrow [F^{-1}] \quad (2.90)$$

läßt sich die G -Matrix

$$G_N = \sum_M [F^{-1}]_{MN} V_M \quad (2.91)$$

vollständig aus der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung berechnen.

2.5.2 Konventionelle Näherungen

Die Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung unter Verwendung des exakten Pauli-Operators ist durch dessen komplizierte Tensor-Struktur mit einem gewissen numerischen Aufwand verbunden, der wesentlich verringert werden kann durch Verwendung des sogenannten winkelgemittelten Pauli-Operators [37]

$$\bar{Q}(K, k'') = \begin{cases} 0 & k'' \leq \sqrt{k_F^2 - K^2} \\ \frac{K^2 + k''^2 - k_F^2}{2Kk''} & \sqrt{k_F^2 - K^2} < k'' \leq k_F + K \\ 1 & k'' \geq k_F + K \end{cases} \quad (2.92)$$

Verwendet man den winkelgemittelten Pauli-Operator, so ergibt sich für die Bethe-Goldstone Gleichung

$$G_{L'L}^{JST}(K, k', k) = V_{L'L}^{JST}(k', k) + \sum_{L''} \int_0^\infty dk'' k''^2 V_{L'L''}^{JST}(k', k'') \frac{\bar{Q}(K, k'')}{\omega - E(K, k'') + i\varepsilon} G_{L''L}^{JST}(K, k'', k) \quad (2.93)$$

wobei zur Abkürzung

$$G_{L'L}^{JST}(K, k', k) \equiv \langle k'(L'S)J | G^T(K, \omega) | k(LS)J \rangle \quad (2.94)$$

eingeführt wurde. Analoges gilt für das Potential V . Der Gesamtdrehimpuls J stellt hier eine Erhaltungsgröße dar, so daß die in Gl.(2.74) vorhandenen Kopplungen zwischen Matrixelementen mit verschiedenem Gesamtdrehimpuls J nicht auftreten, woraus sich eine wesentliche Reduzierung des numerischen Aufwandes ergibt.

Eine weitere Näherung betrifft die im Nenner der Bethe-Goldstone Gleichung auftretende Einteilchenenergie,

$$\varepsilon(q) = \frac{q^2}{2m} + \int_{p \leq k_f} d^3p \langle \vec{q}\vec{p} | G(\omega = \varepsilon_q + \varepsilon_p) | \vec{q}\vec{p} \rangle \quad (2.95)$$

$$\approx \frac{q^2}{2m^*} + U \quad (2.96)$$

die man üblicherweise durch Einführung einer effektiven Masse m^* und eines konstanten Potentialparameters U parametrisiert. Unterschieden wird hier noch zwischen der sogenannten „kontinuierlichen“ bzw. „konventionellen“ Wahl, daß heißt

im ersten Fall benutzt man die Parametrisierung der Einteilchenenergie sowohl für $q \leq k_f$ als auch für $q > k_f$.

Im zweiten Fall wird die Einteilchenenergie für Zustände oberhalb der Fermi-Kante einfach gleich der kinetischen Energie dieser Zustände gesetzt, was offensichtlich den unschönen Nebeneffekt hat, daß direkt an der Fermi-Kante ein Sprung im Einteilchenspektrum auftritt.

Das sich an der Gleichung (2.95) unmittelbar abzulesende Selbstkonsistenzproblem, Bestimmung des Einteilchenspektrums durch die effektive Wechselwirkung, die wiederum selbst von der Einteilchenenergie abhängt, wird durch die Parametrisierung Gl.(2.96) vereinfacht, indem $\varepsilon(q)$ nur für zwei geeignete Werte von q berechnet werden muß, um die beiden Konstanten m^* und U zu bestimmen, im Gegensatz zur exakten Bestimmung für alle q .

2.6 Ergebnisse

Aus den sich aus der Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung (2.74), unter Berücksichtigung des exakten Pauli-Operators Gl.(2.73), ergebenden Matrixelementen bestimmt sich die Bindungsenergie pro Nukleon [40] gemäß

$$\begin{aligned}
E/A &= \frac{3}{5} \frac{k_f^2}{2M} + \frac{6}{k_f^3} \sum_{\substack{T,S,M_J,L',L \\ J',J,M_L,M_S}} (2T+1) \int k^2 dk \int K^2 dK \int d\Omega \\
&\times \langle k(LS)J | G^{TM_J}(K, \omega) | k(L'S)J' \rangle \\
&\times \langle L'M_L S M_S | J' M_J \rangle \langle L M_L S M_S | J M_J \rangle Y_{L'M_L'}(\Omega) Y_{LM_L}(\Omega) \\
&\times \Theta(k_f - |\vec{K} + \vec{k}|) \Theta(k_f - |\vec{K} - \vec{k}|) \quad (2.97)
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet Ω den Winkel zwischen dem Relativimpuls \vec{k} und dem Schwerpunktsimpuls \vec{K} . Für die Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung wird die Kopplung zwischen den Partialwellen bis $J, J' \leq 6$ berücksichtigt. Für Drehimpulse oberhalb 6 wird für die G -Matrix die Born-Approximation benutzt, d.h. die G -Matrix wird einfach durch das Potential ersetzt und es werden Partialwellen bis $J = 15$ berücksichtigt.

Verwendet man anstatt des exakten Pauli-Operators den winkelgemittelten Gl.(2.92) als Näherung, so sind die G -Matrixelemente diagonal in den Drehimpulsquantenzahlen ($J = J'$) und unabhängig von der Projektionsquantenzahl M_J . Für die Bindungsenergie pro Nukleon ergibt sich dann einfach

$$E/A = \frac{3}{5} \frac{k_f^2}{2M} + \frac{6}{k_f^3} \sum_{T,S,L,J} (2T+1)(2J+1) \int_0^{k_f} k^2 dk \left[\int_0^{k_f-k} K^2 dK + \int_{k_f-k}^{\sqrt{k_f^2-k^2}} K^2 dK 2 \frac{k_f^2 - K^2 - k^2}{Kk} \right] \langle kLJ | G^{TS}(K, \omega) | kLJ \rangle \quad (2.98)$$

als Ergebnis, das hier in der üblichen Form angegeben wurde, wie man es beispielsweise in [37] findet.

Um nun einen Unterschied zwischen Verwendung des exakten Pauli-Operators und dem Winkelgemittelten auszumachen, wurden in dieser Arbeit die Rechnungen für verschiedene realistische Potentiale durchgeführt. Ferner wurde für die Einteilchenenergie die Parametrisierung Gl.(2.96) verwendet, sowohl in dem kontinuierlichen als auch in dem konventionellen Fall.

Die Ergebnisse für die Bindungsenergie pro Nukleon sind in den Abbildungen 2.7 und 2.8 dargestellt. Zu jeder Dichte und Nukleon-Nukleon Wechselwirkung wurde ein selbstkonsistentes Einteilchenspektrum, unter Verwendung der Parametrisierung Gl.(2.96), bestimmt. Die Bindungsenergie pro Nukleon wurde dann sowohl unter Verwendung des winkelgemittelten Pauli-Operators (gestrichelte Linie) als auch des exakten Pauli-Operators (durchgezogene Linie) berechnet. In Abb.2.7 sind die Ergebnisse für den kontinuierlichen Fall, in Abb.2.8 für den konventionellen Fall angegeben.

Anhand der beiden Abbildungen läßt sich allgemein feststellen, daß die Verwendung des exakten Pauli-Operators mehr Bindungsenergie liefert als im Fall des winkelgemittelten Pauli-Operators, unabhängig von der verwendeten Nukleon-Nukleon Wechselwirkung. Dieses Mehr an Bindungsenergie erscheint im Bereich der Sättigungsdichte am größten, während für Dichten oberhalb als auch unterhalb der Sättigungsdichte die Unterschiede zwischen exaktem und winkelgemitteltem Pauli-Operator kleiner werden.

Die maximalen Unterschiede im Bereich der Sättigungsdichte sind in der Größenordnung von etwa 0.5 MeV im kontinuierlichen Fall, und etwas kleiner im konventionellen Fall, d.h. der Effekt des exakten Pauli-Operators ist im kontinuierlichen

Fall größer als im konventionellen. Dies ist auch verständlich, da gerade der kontinuierliche Fall stärker abhängig von einer genaueren Behandlung der Zustände im Bereich der Fermi-Kante, während dies im konventionellen Fall durch den Sprung im Einteilchenspektrum an der Fermi-Kante gerade nicht zutrifft.

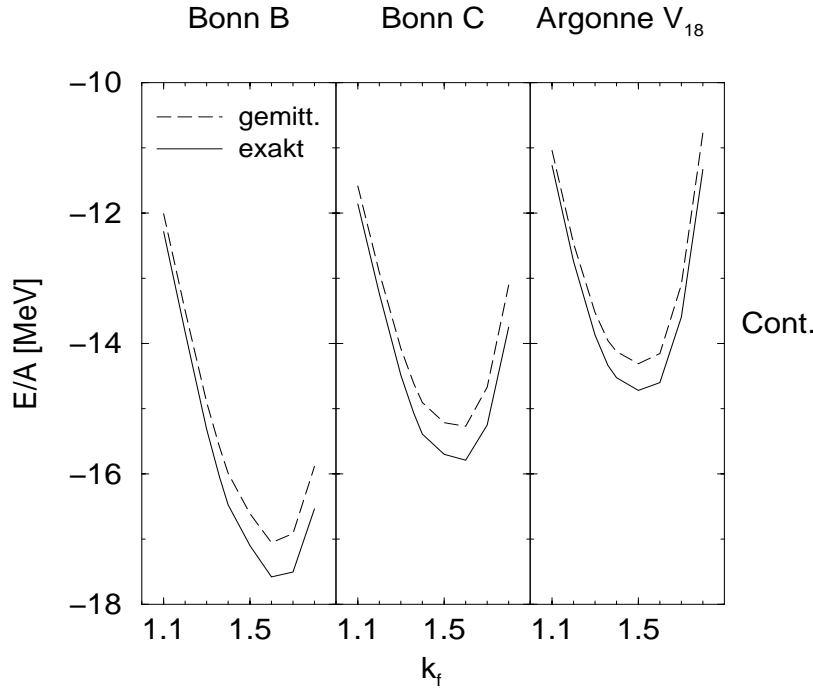


Abbildung 2.7: Kontinuierliche Wahl

Berechnete Bindungsenergie pro Nukleon für Kernmaterie in Abhängigkeit vom Fermi-Impuls k_f , unter Verwendung der kontinuierlichen Wahl für die Einteilchenenergie. Die durchgezogenen Linien stellen die Ergebnisse unter Verwendung des exakten Pauli-Operators dar, die gestrichelten für den winkelgemittelten. Als realistische Nukleon-Nukleon Potentiale wurden die Bonn Potentiale B und C [2] sowie der Neutron-Proton Teil des Argonne V_{18} Potentials [41] verwendet.

Damit läßt sich feststellen, daß in absoluten Werten der Unterschied in der Bindungsenergie, unter Verwendung des winkelgemittelten und des exakten Pauli-Operators, relativ klein ist. Dies ist in Übereinstimmung mit älteren Untersuchungen [38, 42], in denen der Einfluß des exakten Pauli-Operators allein auf die G -

Matrixelemente bestimmt wurde. Andererseits ist der Unterschied aber auch nicht vernachlässigbar, insbesondere im Bereich der Sättigungsdichte, so daß es notwendig ist, gerade für genauere und über die reine Brueckner-Hartree-Fock Näherung hinausgehende Rechnungen eben diese Effekte durch den exakten Pauli-Operator adäquat zu berücksichtigen.

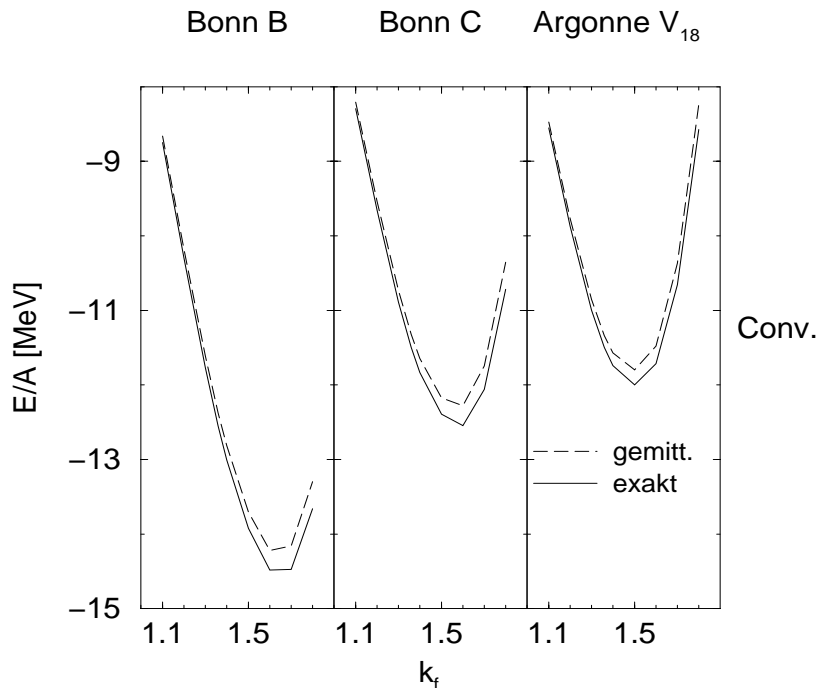


Abbildung 2.8: Konventionelle Wahl

Berechnete Bindungsenergie pro Nukleon für Kernmaterie in Abhängigkeit vom Fermi-Impuls k_f , unter Verwendung der konventionellen Wahl für die Einteilchenenergie. Die durchgezogenen Linien stellen die Ergebnisse unter Verwendung des exakten Pauli-Operators dar, die gestrichelten für den winkelgemittelten. Als realistische Nukleon-Nukleon Potentiale wurden die Bonn Potentiale B und C [2] sowie der Neutron-Proton Teil des Argonne V_{18} Potentials [41] verwendet.

Neben der Berücksichtigung des exakten Pauli-Operators ist es ebenso angebracht, die Parametrisierung der Einteilchenenergie in der Form Gl.(2.96) aufzugeben und stattdessen die exakte Einteilchenenergie Gl.(2.95) in der Bethe-Goldstone Glei-

chung zu verwenden.

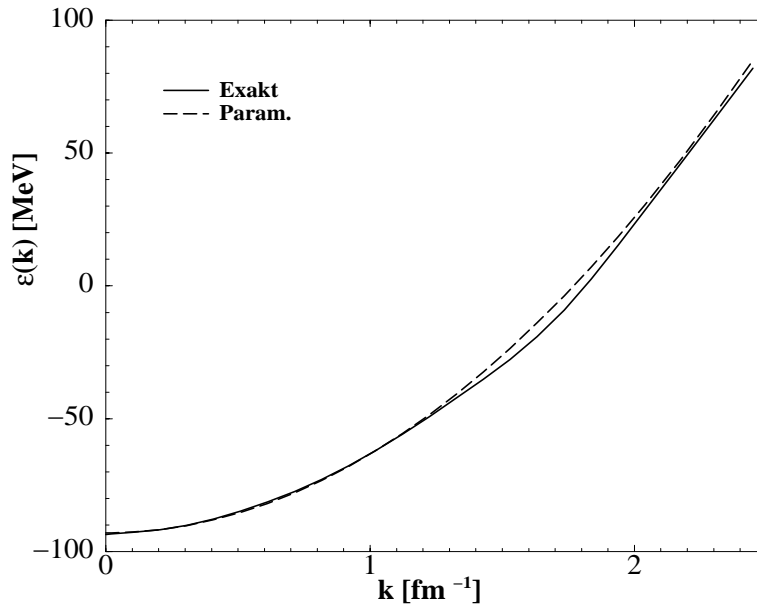


Abbildung 2.9: Einteilchenspektrum

Einteilchenspektrum $\varepsilon(k)$ für Kernmaterie für die Dichte mit $k_f = 1.36 \text{ fm}^{-1}$ in Abhängigkeit vom Einteilchenimpuls k am Beispiel des Potentials Bonn C. Die gestrichelte Linie stellt die Parametrisierung (kontinuierliche Wahl) dar Gl.(2.96), die durchgezogene Linie das exakte Ergebnis Gl.(2.95) für die Einteilchenenergie.

In Abb.2.9 ist unter Verwendung des Potentials Bonn C die Einteilchenenergie $\varepsilon(k)$ dargestellt, in Abhängigkeit vom Einteilchenimpuls k bei der Dichte mit dem Fermi-Impuls $k_f = 1.36 \text{ fm}^{-1}$ in Kernmaterie. Die durchgezogene Linie stellt die exakte Einteilchenenergie $\varepsilon(k)$ dar Gl.(2.95), wie sie sich aus einer selbstkonsistenten Rechnung unter Berücksichtigung des exakten Pauli-Operators ergibt. Ihr gegenüber gestellt ist die Einteilchenenergie in der parametrisierten Form Gl.(2.96).

Wie sich aus der Abbildung 2.9 ergibt, stimmt die parametrisierte Form für Impulse unterhalb des Fermi-Impulses gut mit dem exakten Verlauf der Einteilchenenergie überein. Für Impulse um und insbesondere oberhalb des Fermi-Impulses k_f wird jedoch die Einteilchenenergie durch die Parametrisierung überschätzt. Dies ist auch

verständlich, da oberhalb der Fermi-Kante die G -Matrix komplex wird und damit auch die Einteilchenenergie. Die durch die Polstruktur bedingten Korrelationseffekte führen dann dazu, daß oberhalb der Fermi-Kante die Einteilchenenergie weniger repulsiv, also attraktiver ist, im Vergleich zum Verlauf der parametrisierten Form.

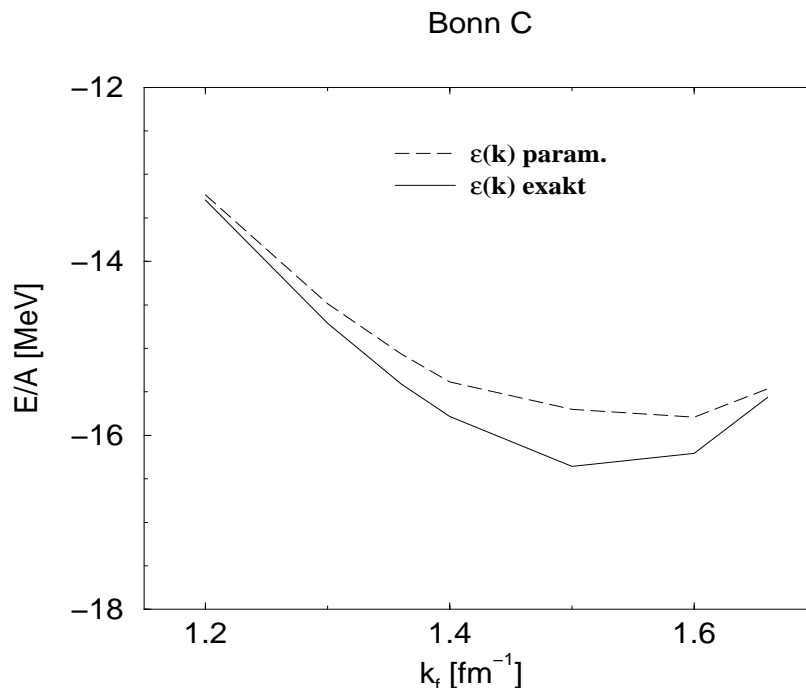


Abbildung 2.10: Vergleich Bindungsenergie

Berechnete Bindungsenergie pro Nukleon für Kernmaterie in Abhängigkeit vom Fermi-Impuls k_f am Beispiel des Potentials Bonn C. Vergleich der Ergebnisse unter Verwendung der parametrisierten Form (kontinuierliche Wahl) der Einteilchenenergie (gestrichelte Linie) und der exakten Einteilchenenergie (durchgezogene Linie), wie sie in Abb.2.9 dargestellt sind.

Dieser Unterschied zwischen der Parametrisierung und dem exakten Verlauf der Einteilchenenergie wirkt sich auch auf die Berechnung der Bindungsenergie aus. Diese ist in Abb.2.10 in Abhängigkeit von der Dichte dargestellt. Die oben angesprochenen Korrelationseffekte führen bei der Berechnung der Bindungsenergie unter Verwendung der exakten Einteilchenenergie zu einer stärkeren Bindung (durchgezogene Linie) im Bereich der Sättigungsdichte, verglichen zu der berech-

neten Bindungsenergie unter Verwendung der parametrisierten Form der Einteilchenenergie (gestrichelte Linie), wie sie bereits in Abb.2.7 angegeben wurde. Diese zusätzliche attraktive Komponente zur Bindungsenergie nimmt zu kleineren, aber auch zu größeren Dichten ab.

Betrachten wir wiederum allein die Bindungsenergie, so ist der maximale Unterschied zwischen der Verwendung der parametrisierten und der exakten Einteilchenenergie im Bereich der berechneten Sättigungsdichte in der Größenordnung von rund 0.6-0.7 MeV. Berücksichtigen wir ferner noch die Verwendung des exakten Pauli-Operators, so machen die Näherungen rund 1 MeV Unterschied in der Bindungsenergie aus. Damit läßt sich noch einmal die bereits oben getroffene Aussage unterstreichen. Die durch die Näherungen bedingten Abweichungen bei der Bindungsenergie sind relativ klein, berücksichtigt man die erhebliche Vereinfachung des numerischen Aufwandes bei Verwendung des winkelgemittelten Pauli-Operators und der Parametrisierung der Einteilchenenergie. Andererseits, wie ebenso am Beispiel der Einteilchenenergie zu sehen ist, erscheint es dennoch unerlässlich, für genauere Rechnungen konsequent auf die üblicherweise verwendeten Näherungen zu verzichten.

Kapitel 3

Nukleon-Nukleon Wechselwirkung

Ausgangspunkt der vorangegangenen Überlegungen und wesentlicher Bestandteil der Bethe-Goldstone Gleichung, aus der sich die effektive Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen im Medium ergibt, ist die freie Nukleon-Nukleon Wechselwirkung. Auf diese soll von daher in den folgenden Abschnitten etwas genauer eingegangen werden, wobei als Beispiel die in dieser Arbeit benutzten, auf dem Mesonen-Austausch Modell beruhenden Bonn-Potentiale dienen sollen. Dies erfolgt insbesondere auch im Hinblick auf die weiter unten zu erörternde Dirac-Struktur der effektiven Wechselwirkung, der relativistischen G -Matrix.

3.1 Eigenschaften der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung

Durch die verschiedensten Untersuchungen an nuklearen Systemen weiß man heute, daß die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung, im Gegensatz beispielsweise zur Langreichweitigkeit der elektro-magnetischen Wechselwirkung, von kurzer Reichweite ist. Man kann den Bereich, in dem die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen von Bedeutung ist, unterteilen in den

1. langreichweitigen Bereich für $r \geq 2$ fm

2. intermediären Bereich für $0.5 \text{ fm} \leq r \leq 2 \text{ fm}$
3. kurzreichweitigen Bereich bzw. *Core* für $r < 0.5 \text{ fm}$

wobei hier r den mittleren Abstand zweier Nukleonen bezeichnet. Der kurzreichweitige Teil ist gekennzeichnet durch ein stark repulsives Verhalten, das sozusagen die Nukleonen auf einen Mindestabstand hält; hingegen ist im intermediären Bereich die Wechselwirkung attraktiv. Im langreichweitigen Bereich verliert die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung ihre Bedeutung.

Von ihrer Struktur her ist die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung nicht allein zentralsymmetrisch, sondern enthält neben nicht-zentralen, sogenannten tensoriellen Anteilen auch Beiträge von der Spin-Bahn, Spin-Spin und Isospin Wechselwirkung.

In Analogie zur Quantenelektrodynamik, in der die Wechselwirkung zweier Elektronen durch Photonen vermittelt wird, entwickelte Yukawa 1935 das Modell vom Mesonenaustausch unter Nukleonen.

Ausgehend von der klassischen Feldtheorie führte er das Meson als massives Austauscheteilchen ein, das als Feldgleichung der Klein-Gordon Gleichung zu genügen hat

$$(\square + m^2)\varphi(x) = g\bar{\Psi}(x)\Psi(x) \quad (3.1)$$

wobei hier das Nukleonenfeld die Quelle des Mesonenfeldes mit der Stärke g ist. Unter der Annahme eines unendlich schweren, im Ursprung fixierten Nukleons, geht die Klein-Gordon Gleichung (3.1) über in

$$(-\Delta + m^2)\varphi(r) = g\delta^{(3)}(r) \quad (3.2)$$

deren Lösung das „Yukawa-Potential“ ergibt

$$\varphi(r) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \quad (3.3)$$

Aufgrund der Exponentialform hat es eine endliche Reichweite für Massen ungleich Null. Läßt man die Masse gegen Null gehen, so erhält man das bekannte Coulomb-Potential

$$V(r) = \frac{g}{4\pi} \frac{1}{r} \quad (3.4)$$

Motiviert durch den einfachen Ansatz im Rahmen einer klassischen Feldtheorie und durch die Entdeckung des von Yukawa vorausgesagten π -Meson und nachfolgend vieler anderer Mesonen, sollte eine Beschreibung von Nukleonensystemen, ähnlich der Quantenelektrodynamik, als Quantenfeldtheorie prinzipiell möglich sein.

Ursprünglich glaubte man, daß die Mesonentheorie, analog zur Quantenelektrodynamik, die Theorie der „starken Wechselwirkung“ ist, und eine Störentwicklung nach der Kopplungskonstanten ebenfalls möglich sein sollte, die in der Quantenelektrodynamik in einfacher Weise nach der Sommerfeld'schen Feinstrukturkonstanten $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$ durchgeführt werden kann und die einzelnen Störterme eine besonders anschauliche Interpretation mittels Feynman Diagrammen erhalten. Aufgrund der Substruktur der Nukleonen und Mesonen weiß man jedoch heute, daß die Mesonentheorie in ihrer Form keine fundamentale Wechselwirkung darstellt. Vielmehr stellt sie erfolgreich eine effektive Beschreibung von Nukleonensystemen dar, die sich aus der fundamentaleren Theorie, der Quantenchromodynamik, als Grenzfall für den in der Kernphysik typischen Niederenergiebereich ergeben sollte.

Die in der Mesonentheorie auftretenden Kopplungskonstanten sind im Vergleich zur QED wesentlich größer, typischerweise in der Größenordnung von 10, so daß eine Entwicklung nach der Kopplungskonstanten auf den ersten Blick nicht unbedingt sinnvoll erscheint. Nichtsdestotrotz ist eine Beschreibung der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung in Störtermen und der graphischen Veranschaulichung mit Hilfe der Feynman Diagramme erfolgreich [16].

3.1.1 Lagrange-Dichte

In niedrigster Ordnung der Störentwicklung erhalten wir als Beitrag zur Nukleon-Nukleon Wechselwirkung das Diagramm Abb.3.1 des Ein-Bosonen-Austauschs [2].

Es beschreibt die Streuung zweier Nukleonen im Impuls-Schwerpunktsystem durch den Austausch eines Mesons. Entsprechend den Feynman-Regeln ergibt sich hierfür als Beitrag für die Streuamplitude [43]

$$V_\alpha(q', q) = \bar{u}_1(q')\Gamma_1 u_1(q) \frac{P_\alpha}{(q' - q)_\nu^2 - m_\alpha^2} \bar{u}_2(-q')\Gamma_2 u_2(-q) \quad (3.5)$$

wobei hier $\frac{P_\alpha}{(q' - q)_\nu^2 - m_\alpha^2}$ für den Meson-Propagator steht. Für P_α ergibt sich für Vektor-Mesonen $P_\nu = -g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / m_\nu^2$ und für skalare und pseudoskalare Mesonen $P_s = 1$. Γ_i stellt den Vertex der Meson-Nukleon Wechselwirkung dar, der sich

aus dem Wechselwirkungsanteil der Lagrange-Dichte ergibt. So erhält man

$$\begin{aligned}
 \Gamma_s &= \sqrt{4\pi}g_s && \text{Skalar-Meson} \\
 \Gamma_{ps} &= i\sqrt{4\pi}g_{ps}\gamma^5 && \text{Pseudoskalar-Meson} \\
 \Gamma_v &= \sqrt{4\pi}[g_v\gamma^\mu + \frac{f_v}{2M}i\sigma^{\mu\nu}k_\nu] && \text{Vektor-Meson} \\
 \Gamma_{pv} &= i\sqrt{4\pi}\frac{f_{pv}}{m_\pi}\gamma^\mu\gamma^5k_\mu && \text{Pseudovektor-Meson}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

u_i und \bar{u}_i sind Dirac-Spinoren und stellen die ein- bzw. auslaufenden Nukleonen dar. Der Einfachheit halber sind Spin-Indizes unterdrückt.

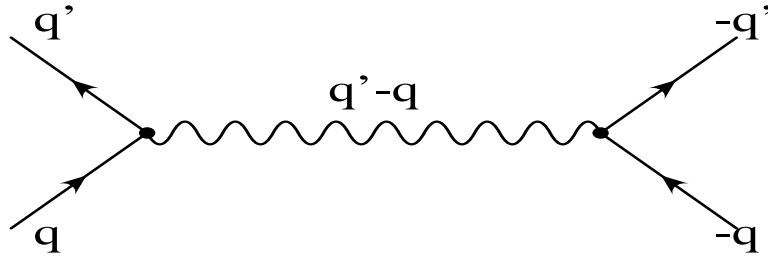


Abbildung 3.1: Ein-Bosonen-Austausch

Summiert man nun alle von den einzelnen Mesonen kommenden Beiträge der Streuamplitude auf, so definiert dies gerade das Ein-Bosonen-Austausch-Potential (One Boson Exchange Potential)

$$V_{OBEP} = \sum_{\alpha} V_{\alpha}^{OBE} \tag{3.7}$$

Um auf die entsprechenden Ausdrücke für den uns interessierenden Wechselwirkungsanteil des Hamilton-Operators zu kommen, geht man von der das System beschreibenden Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$ aus, die eine Funktion der Nukleon- und Meson-Felder ist. \mathcal{L}_0 beschreibt hier die freien Felder, \mathcal{L}_{int} den Wechselwirkungsanteil. Mittels den Euler-Lagrange Gleichungen

$$\partial_{\mu} \frac{\delta \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \varphi_{\alpha})} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha}} = 0 \tag{3.8}$$

die sich aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int dx^4 \mathcal{L} = 0 \quad (3.9)$$

ergeben, erhält man die Bewegungsgleichungen für die Felder, per Legendre-Transformation die Hamilton-Dichte

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha} \pi_{\alpha} \dot{\varphi}_{\alpha} - \mathcal{L} \quad (3.10)$$

mit dem konjugierten Impuls

$$\pi_{\alpha} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\varphi}_{\alpha}} \quad (3.11)$$

aus der sich der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \int d^3x \mathcal{H}(x, t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} \quad (3.12)$$

ergibt. Der uns interessierende Wechselwirkungsanteil des Hamilton-Operators bestimmt sich dann einfach zu

$$\hat{H}_{int} = - \int d^3x \left(\mathcal{L}_{int} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_{(\mu)}^{(\alpha)})} \partial_0 \varphi_{(\mu)}^{(\alpha)} \right) \quad (3.13)$$

Der Lagrange-Formalismus bietet zum einen den Vorteil, daß in ihm keine Raum-Zeit Koordinate bevorzugt wird, zum anderen wird in ihm mit Hilfe des Noether-Theorems die Beziehung zwischen Invarianz unter Symmetrieoperationen und Erhaltungsgrößen deutlich.

Andererseits sind wir natürlich an der zeitlichen Entwicklung des Systems interessiert und vollziehen somit den Übergang zum Hamilton-Formalismus.

Der Lagrange-Dichteanteil der freien Felder ist gegeben [16] durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \bar{\Psi}(i \not{\partial} - M)\Psi + \frac{1}{2}(\partial_{\mu} \varphi_{(s)} \partial^{\mu} \varphi_{(s)} - m_s^2 \varphi_{(s)}^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_v^2 \varphi_{(v)}^{\mu} \varphi_{\mu}^{(v)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial_{\mu} \varphi_{(ps)} \partial^{\mu} \varphi_{(ps)} - m_{ps}^2 \varphi_{(ps)}^2) \end{aligned} \quad (3.14)$$

mit

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \varphi_{\nu}^{(v)} - \partial_{\nu} \varphi_{\mu}^{(v)} \quad (3.15)$$

Etwaige Wechselwirkungen elektromagnetischer Natur werden unterdrückt, da wir nur an der reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung interessiert sind.

Für den wechselwirkenden Lagrange-Dichte Anteil \mathcal{L}_{int} wählt man typischerweise

$$\mathcal{L}_{ps} = -g_{ps} \bar{\Psi} i \gamma_5 \Psi \varphi^{(ps)} \quad (3.16)$$

$$\mathcal{L}_s = +g_s \bar{\Psi} \Psi \varphi^{(s)} \quad (3.17)$$

$$\mathcal{L}_v = -g_v \bar{\Psi} i \gamma^\mu \Psi \varphi_\mu^{(v)} - \frac{f_v}{4M} \bar{\Psi} \sigma^{\mu\nu} \Psi (\partial_\mu \varphi_\nu^{(v)} - \partial_\nu \varphi_\mu^{(v)}) \quad (3.18)$$

Hierbei ist Ψ der Nukleon Dirac-Spinor und $\varphi^{(ps)}$, $\varphi^{(s)}$, $\varphi^{(v)}$ sind die pseudoskalar-, skalar- und Vektor-Meson Felder. Spin- und Isospin-Indizes werden wie immer der Einfachheit halber nicht angegeben. Zur Berücksichtigung des Isospins hat man nur φ durch $\varphi \cdot \tau$ zu ersetzen, wobei τ der Isospin-Operator ist und nichts anderes als die bekannten Pauli-Matrizen darstellt.

Für den pseudoskalaren Anteil, insbesondere für Kernmaterierechnungen, benutzt man stattdessen die Pseudovektor- bzw. Gradientenkopplung [16]

$$\mathcal{L}_{pv} = -\frac{f_{pv}}{m_\pi} \bar{\Psi} i \gamma^5 \gamma^\mu \Psi \partial_\mu \varphi^{(ps)} \quad (3.19)$$

Diese beiden Kopplungen liefern für On-Shell Nukleonen identische Ergebnisse, sofern man $f_{pv} = (m_\pi/2M)g_{ps}$ setzt, wie weiter unten im Rahmen des Äquivalenztheorems noch genauer diskutiert wird, weisen jedoch ein unterschiedliches Off-Shell Verhalten auf. So zeigt sich, daß die Propagation der Off-Shell Nukleonen in der Kernmaterie bei der pseudoskalaren und pseudovektoriellen Kopplung sehr unterschiedliche Ergebnisse liefert. Die Selbstenergie der Nukleonen, die ja für diese Propagation relevant ist, entwickelt im Fall der pseudoskalaren Kopplung eine starke Mischung zwischen Nukleonen und Antinukleonen. Diese Mischung ist im Fall der pseudovektoriellen Kopplung unterdrückt, vgl. Kap.4.4.1.

3.1.2 Mesonen

In Tab.3.1 ist eine Auswahl der bekannten Mesonen bis zu Massen von 1 GeV dargestellt.

Um schon die wesentlichsten Eigenschaften der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung zu erfassen, sind hauptsächlich das π -, ρ - und ω -Meson von Bedeutung. Letztere

sind Spin-1 Teilchen, das π -Meson hat Spin 0. Das ω -Meson ist ein isoskalares Meson, hat also Isospin 0, daß π - und ρ -Meson sind Isovektor-Mesonen, haben also Isospin gleich 1. Entsprechend identifiziert man das π -Meson mit der oben angegebenen Pseudoskalar-Kopplung bzw. Pseudovektor-Kopplung, daß ρ - und ω -Meson mit der Vektor-Kopplung, wobei wie oben angegeben, der Isospin des ρ - und π -Mesons zu berücksichtigen ist.

Name	J^P	I	Masse (MeV)
π^\pm	0^-	1	139.57
π^0	0^-	1	134.96
η	0^-	0	548.8
ρ	1^-	1	769
ω	1^-	0	782.6
δ	0^+	1	983

Tabelle 3.1: Übersicht Mesonen
Notation: Spin, J ;Parität, P ;Isospin, I

Für die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung bedeutet dies [2], daß das π -Meson, als leichtestes Meson, für den langreichweitigen Teil der Wechselwirkung verantwortlich ist. Ferner erhält man aufgrund der Kopplung auch Tensorkräfte. Das ρ -Meson liefert ebenso Beiträge zur Tensorkraft, aufgrund seiner deutlich schwereren Masse aber nur für kurze Abstände und kompensiert ein Teil der durch das π -Meson induzierten tensoriellen Wechselwirkung. Das ω -Meson als schweres Meson, ist verantwortlich für die starke Repulsion bei kurzen Abständen und liefert ferner Beiträge zur Spin-Bahn Wechselwirkung. Was nicht im Rahmen eines Ein-Bosonen-Austausch Modells mit beobachtbaren Mesonen erklärt werden kann, ist die Attraktion im intermediären Bereich. Hierfür wäre ein skalares, isoskalares Meson mit einer ungefähren Masse um die 500 MeV notwendig, das aber in der Natur nicht beobachtet wird. Es kann jedoch gezeigt werden, daß diese Attraktion im wesentlichen aus den irreduziblen 2π -Austauschtermen resultiert. Das sind gerade die 2π -Austauschterme, die nicht durch die Lösung der Lippmann-Schwinger Gleichung generiert werden. Hierzu zählen sowohl die „cross-boxed“ Diagramme, aber auch 2π -Austauschterme mit internen $N\Delta$ - oder $\Delta\Delta$ - Zuständen. Diese Beiträge werden durch den Austausch eines skalaren Mesons recht gut parametrisiert [44].

Das δ -Meson, als skalares Isektor-Meson, liefert insgesamt wegen seiner großen Masse und der damit verbundenen Kurzreichweitigkeit als auch seiner kleinen Kopplungskonstanten wegen nur einen kleinen Beitrag zum Ein-Bosonen-Austausch Potential. Dieser ergibt einen Beitrag zur isospinabhängigen Zentralkraft, der dazu dient, Korrekturen an den beiden S-Streuwellen anzubringen.

Ebenso wie das π -Meson ist das η -Meson ein pseudoskalares (pseudovektorielles) Meson, allerdings mit Isospin 0 und liefert somit Beiträge zur isospinunabhängigen Tensorkraft. Aufgrund seiner kleinen Kopplungskonstanten und der gegenüber dem π -Meson fast viermal größeren Masse, sind die Beiträge aber so gering, daß das η -Meson für die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung eigentlich keine wichtige Rolle spielt.

Insgesamt kann man bis hierher schon einmal festhalten, welche Punkte wichtig sind in der Beschreibung einer Nukleon-Nukleon Wechselwirkung im Rahmen eines Ein-Bosonen-Austausch Modells :

Dies ist zum einen die Kopplung der Mesonen, die bestimmt, von welcher Art die Meson-Beiträge zum Potential sind, also zentrale, tensorielle, Spin-Bahn, usw. Beiträge. Ferner die Masse der Mesonen, die die Reichweite der Wechselwirkung bestimmt. Zuletzt das Verhältnisquadrat von Kopplungskonstante und Masse

$$\left(\frac{g_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 \tag{3.20}$$

das uns ein Maß dafür liefert, wie groß die einzelnen Beiträge der Mesonen überhaupt sind.

Betrachten wir zum Beispiel das η -Meson, so würde es aufgrund seiner Masse Beiträge zur Nukleon-Nukleon Wechselwirkung im intermediären Bereich liefern, aufgrund seines pseudoskalaren Charakters, ohne jetzt den Isospin betrachten zu wollen, von der gleichen Art wie das π -Meson. Sieht man sich jetzt nun das Verhältnis $(g_\alpha/m_\alpha)^2$ für das η - und das π -Meson an, so ist wegen der größeren Masse und der wesentlich kleineren Kopplungskonstanten des η -Mesons gegenüber dem π -Meson sicherlich das obige Verhältnis für das π -Meson wesentlich größer als für das η -Meson, so daß die vom π -Meson stammenden Beiträge zum Potential stärker ins Gewicht fallen als die Beiträge vom η -Meson.

Mesonen mit Massen größer als der in Tab. 3.1 angegebenen Mesonen werden im Rahmen eines Ein-Bosonen-Austausch Modells nicht betrachtet. Aufgrund der

großen Masse würden sie Beiträge zur Nukleon-Nukleon Wechselwirkung im kurzreichweitigen Bereich liefern. Dieser aber wird geprägt durch die starke Repulsion, die das ω -Meson liefert und derartige zusätzliche Beiträge überlagert.

Ferner werden noch die Formfaktoren

$$\left(\frac{\Lambda_\alpha^2 - m_\alpha}{\Lambda_\alpha^2 + (\vec{q} - \vec{q}')^2} \right)^{n_\alpha} \quad (3.21)$$

berücksichtigt, die jedem Meson-Nukleon Vertex hinzugefügt werden; Λ_α bezeichnet hier den Cutoff-Parameter. Die Formfaktoren sind in einer Mesonentheorie der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung unerlässlich, da sie die innere Struktur der Nukleonen quasi verbergen und die Theorie in der Störentwicklung überhaupt endlich machen. Typischerweise liegen die Cutoff-Parameter in einem Bereich von 1,2–2 GeV, so daß hier die Berücksichtigung schwerer Mesonen im Rahmen des Ein-Bosonen-Austausch Modells keinen Sinn macht.

Ein weiterer Punkt betrifft das π -Meson. Wie in Tab. 3.1 ersichtlich, müßten wir das π^+ , π^- und π^0 unterscheiden. Das π^0 , als elektrisch neutrales Meson, hat gegenüber den ladungstragenden Mesonen π^+ und π^- eine etwas kleinere Masse. Im Rahmen des Ein-Bosonen-Austausch Modells, in dem wir nur an der reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung interessiert sind, werden die drei, in ihrer elektrischen Ladung verschiedenen Mesonen durch ein einzelnes π -Meson mit einer gemittelten Masse ersetzt.

Um nun letztendlich ein Ein-Bosonen-Austausch Potential angeben zu können, müssen die in dem Modell auftretenden Parameter bestimmt werden. Dies erreicht man dadurch, indem man die Parameter so einstellt, daß die bekannten Ergebnisse aus Streuexperimenten bestmöglichst reproduziert werden. Hierzu zählen beispielsweise Ergebnisse aus der π N-Streuung oder NN-Streuung. Ebenso reproduziert werden müssen die Eigenschaften des einfachsten, gebundenen Nukleonensystems, dem Deuteron.

Auf die für all dies erforderliche relativistische Beschreibung der Zwei-Teilchen Streuung wird im folgenden Kapitel eingegangen.

3.1.3 Zwei-Nukleonen System

Stellt die Lippmann-Schwinger Gleichung die adäquate Beschreibung der Zwei-Teilchen Streuung im nichtrelativistischen Fall dar, so ist dies in einer relativisti-

schen, kovarianten Formulierung die Bethe-Salpeter Gleichung [45]

$$\mathcal{M} = \mathcal{V} + \mathcal{V}\mathcal{G}\mathcal{M} \quad (3.22)$$

hier in Operatorform dargestellt. \mathcal{M} ist die invariante Übergangsamplitude für die Zwei-Nukleon Streuung, \mathcal{V} die Summe über alle zusammenhängenden, Zwei-Teilchen irreduziblen Diagrammen und \mathcal{G} bezeichnet den relativistischen Zwei-Nukleon Propagator.

Die Bethe-Salpeter Gleichung stellt eine vierdimensionale Integralgleichung dar, die im Allgemeinen nicht einfach zu lösen ist. Es hat sich nun gezeigt, daß sogenannte dreidimensionale, kovariante Reduktionen der Bethe-Salpeter Gleichung zum einen technisch einfacher zu handhaben sind, zum anderen liefern diese Rechnungen, im Vergleich zur vollständigen Behandlung des Problems, ähnliche Resultate.

Um die Reduktion der Bethe-Salpeter Gleichung durchzuführen, spaltet man typischerweise Gl.(3.22) in zwei gekoppelte Gleichungen [22] auf

$$\mathcal{M} = \mathcal{W} + \mathcal{W}g\mathcal{M} \quad (3.23)$$

$$\mathcal{W} = \mathcal{V} + \mathcal{V}(\mathcal{G} - g)\mathcal{W} \quad (3.24)$$

wobei hier g ein kovarianter, drei-dimensionaler Propagator ist.

Unter der Annahme, daß der zweite Term auf der rechten Seite von Gl.(3.24) klein ist, wird dieser vernachlässigt und man erhält somit eine wesentliche Vereinfachung seines ursprünglichen Problems in der Form

$$\mathcal{M} = \mathcal{V} + \mathcal{V}g_{Red}\mathcal{M} \quad (3.25)$$

Bezeichnet man mit q, q', k den Relativimpuls im Anfangs-, Intermediär- und End-Zustand, mit P den totalen Viererimpuls, so erhält man ausführlich für die Bethe-Salpeter Gleichung in einem beliebigen Bezugssystem

$$\mathcal{M}(q', q|P) = \mathcal{V}(q', q|P) + \int d^4k \mathcal{V}(q', k|P)\mathcal{G}(k|P)\mathcal{M}(k, q|P) \quad (3.26)$$

mit dem Zweiteilchen-Propagator in LeiterNäherung

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(k|P) &= \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\mathcal{P} + \vec{k} - M + i\varepsilon)^{(1)}} \frac{1}{(\mathcal{P} - \vec{k} - M + i\varepsilon)^{(2)}} \\
 &= \frac{i}{(2\pi)^4} \left[\frac{\mathcal{P} + \vec{k} + M}{(P + k)^2 - M^2 + i\varepsilon} \right]^{(1)} \left[\frac{\mathcal{P} - \vec{k} + M}{(P - k)^2 - M^2 + i\varepsilon} \right]^{(2)}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Für die Reduktion von vier auf drei Dimensionen wird die zeitartige Komponente in einer kovarianten Art und Weise fixiert, und somit kann die Integration über die zeitartige Komponente ausgeführt werden. Da diese Fixierung nicht einheitlich ist, gibt es natürlich eine Unmenge an Möglichkeiten, so daß man durch zusätzliche Forderungen die Geeignetste auszuwählen hat, je nach Verwendungsweise.

Ein typisches Beispiel ist die Reduktion nach Blanckenbecker und Sugar [46]. Man erhält hier für den kovarianten, drei-dimensionalen Propagator

$$g_{Red} = g_{BbS}(\vec{k}|\vec{P}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{M^2}{E_{\vec{P}+\vec{k}}} \frac{\Lambda_+^{(1)}(\vec{P} + \vec{k})\Lambda_+^{(2)}(\vec{P} - \vec{k})}{E_{\vec{P}+\vec{q}}^2 - E_{\vec{P}+\vec{k}}^2 + i\varepsilon} \delta(k_0) \tag{3.28}$$

$\Lambda_+^{(i)}(\vec{k}) = \left(\frac{\gamma^0 E_k - \vec{\gamma} \vec{k} + M}{2M} \right)^{(i)}$ bezeichnet den Projektionsoperator auf positive Energie für das i .te Nukleon zum Einteilchen-Impuls \vec{p} und $E_p = (M^2 + \vec{p}^2)^{\frac{1}{2}}$, das heißt virtuelle Anti-Nukleon Beiträge werden unterdrückt. Ferner wurde eine Winkel-mittelung für $(\vec{P} + \vec{k})^2 \approx \vec{P}^2 + \vec{k}^2$ verwendet.

Damit ergibt sich für die reduzierte Bethe-Salpeter Gleichung (3.26) mit der Ersetzung von G durch g_{Red} aus Gl.(3.28)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(\vec{q}', \vec{q}|\vec{P}) &= \mathcal{V}(\vec{q}', \vec{q}|\vec{P}) + \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{V}(\vec{q}', \vec{k}|\vec{P}) \frac{M^2}{E_{\vec{P}+\vec{k}}} \\
 &\quad \frac{\Lambda_+^{(1)}(\vec{P} + \vec{k})\Lambda_+^{(2)}(\vec{P} - \vec{k})}{E_{\vec{P}+\vec{q}}^2 - E_{\vec{P}+\vec{k}}^2 + i\varepsilon} \mathcal{M}(\vec{k}, \vec{q}|\vec{P})
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

wobei hier die Nukleonen in den Zwischenzuständen symmetrisch off-shell sind.

Nimmt man nun Matrixelemente von Gl.(3.29) mit Spinoren positiver Energie und ersetzt $\mathcal{V} \rightarrow V_{OBEP}$ mit dem Ein-Mesonen-Austausch Potential, so erhält man in

einem beliebigen Bezugssystem für die Streuamplitude

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\vec{q}', \vec{q} | \vec{P}) &= V(\vec{q}', \vec{q}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(\vec{q}', \vec{k}) \frac{M^2}{E_{\vec{P}+\vec{k}}} \\ &\times \frac{1}{E_{\vec{P}+\vec{q}}^2 - E_{\vec{P}+\vec{k}}^2 + i\varepsilon} \mathcal{T}(\vec{k}, \vec{q} | \vec{P}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

wobei als Abkürzung für die Matrixelemente des Potentials

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(\vec{P} + \vec{q}') \bar{u}_2(\vec{P} - \vec{q}') V_{OBE}(\vec{q}', \vec{q} | \vec{P}) u_1(\vec{P} + \vec{q}) u_2(\vec{P} - \vec{q}) = \\ \bar{u}_1(\vec{q}') \bar{u}_2(-\vec{q}') V_{OBE}(\vec{q}', \vec{q}) u_1(\vec{q}) u_2(-\vec{q}) \equiv \\ V(\vec{q}', \vec{q}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

benutzt wurde, da diese ein Lorentz-Skalar bilden. Analoges gilt für die Streuamplitude \mathcal{T} .

Üblicherweise wird die Streugleichung (3.30) im Schwerpunktsystem ($\vec{P} = 0$) gelöst, so daß sich

$$\mathcal{T}(\vec{q}', \vec{q}) = V(\vec{q}', \vec{q}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(\vec{q}', \vec{k}) \frac{M^2}{E_k} \frac{1}{\vec{q}^2 - \vec{k}^2 + i\varepsilon} \mathcal{T}(\vec{k}, \vec{q}) \quad (3.32)$$

ergibt.

Führt man die folgenden Definitionen

$$\hat{\mathcal{T}}(\vec{q}', \vec{q}) = \left(\frac{M}{E_{q'}}\right)^{1/2} \mathcal{T}(\vec{q}', \vec{q}) \left(\frac{M}{E_q}\right)^{1/2} \quad (3.33)$$

und

$$\hat{V}(\vec{q}', \vec{q}) = \left(\frac{M}{E_{q'}}\right)^{1/2} V(\vec{q}', \vec{q}) \left(\frac{M}{E_q}\right)^{1/2} \quad (3.34)$$

ein, so läßt sich obiger Ausdruck für die Streuamplitude noch umformen zu

$$\hat{\mathcal{T}}(\vec{q}', \vec{q}) = \hat{V}(\vec{q}', \vec{q}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hat{V}(\vec{q}', \vec{k}) \frac{M}{\vec{q}^2 - \vec{k}^2 + i\varepsilon} \hat{\mathcal{T}}(\vec{k}, \vec{q}) \quad (3.35)$$

was genau der nichtrelativistischen Lippmann-Schwinger Gleichung entspricht und unter „minimaler Relativität“ bekannt ist. Der letzte Ausdruck für die Streuamplitude hat den Vorteil, daß man die aus der nichtrelativistischen Kernphysik bekannten Methoden zur Untersuchung der Nukleonsysteme ohne große Änderungen anwenden kann.

Eine andere, häufig benutzte Wahl für den dreidimensionalen Propagator ist die Reduktion nach Thompson [47], wie sie auch in dieser Arbeit Verwendung findet. Hier ist der dreidimensionale, kovariante Propagator gegeben durch

$$g_{Red} = g_{Th}(\vec{k}|\vec{P}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{M^2}{2E_k E_{\vec{P}+\vec{k}}} \frac{\Lambda_+^{(1)}(\vec{P} + \vec{k}) \Lambda_+^{(2)}(\vec{P} - \vec{k})}{E_q - E_k + i\varepsilon} \delta(k_0) \quad (3.36)$$

was unmittelbar auf die entsprechende Streugleichung in einem beliebigen Bezugssystem

$$\mathcal{T}(\vec{q}', \vec{q}|\vec{P}) = V(\vec{q}', \vec{q}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(\vec{q}', \vec{k}) \frac{M^2}{2E_{\vec{k}} E_{\vec{P}+\vec{k}}} \frac{1}{E_q - E_k + i\varepsilon} \mathcal{T}(\vec{k}, \vec{q}|\vec{P}) \quad (3.37)$$

führt, wobei analog zu oben die Winkelmittelung $(\vec{P} + \vec{k})^2 \approx \vec{P}^2 + \vec{k}^2$ benutzt wurde.

Beim Übergang zum Schwerpunktsystem der beiden wechselwirkenden Nukleonen ($\vec{P} = 0$) ergibt sich entsprechend

$$\mathcal{T}(\vec{q}', \vec{q}) = V(\vec{q}', \vec{q}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(\vec{q}', \vec{k}) \frac{M^2}{2E_k^2} \frac{1}{E_q - E_k + i\varepsilon} \mathcal{T}(\vec{k}, \vec{q}) \quad (3.38)$$

als Streugleichung.

Analog zu oben ist es üblich, die Größen

$$\check{T}(\vec{q}', \vec{q}) = \frac{M}{E_{q'}} \mathcal{T}(\vec{q}', \vec{q}) \frac{M}{E_q} \quad (3.39)$$

und

$$\check{V}(\vec{q}', \vec{q}) = \frac{M}{E_{q'}} \mathcal{V}(\vec{q}', \vec{q}) \frac{M}{E_q} \quad (3.40)$$

zu definieren. Damit geht die Gleichung (3.38) über in

$$\check{T}(\vec{q}', \vec{q}) = \check{V}(\vec{q}', \vec{q}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \check{V}(\vec{q}', \vec{k}) \frac{1}{2E_q - 2E_k + i\varepsilon} \check{T}(\vec{k}, \vec{q}) \quad (3.41)$$

eine zur Lippmann-Schwinger Gleichung analoge Gleichung mit relativistischen Energien im Propagator.

Man beachte, daß die Streuamplituden \hat{T} in Gl.(3.35) und \check{T} in Gl.(3.41) der nichtrelativistischen T -Matrix entsprechen. Im Gegensatz dazu sind die Streuamplituden in Gl.(3.32) und Gl.(3.38) kovariant.

Die Streuamplituden \mathcal{T} sind mit der Streumatrix S durch

$$\langle p'_1 p'_2 | S | p_1 p_2 \rangle = \langle p'_1 p'_2 | p_1 p_2 \rangle - 2\pi i \delta^{(4)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \frac{M^2}{E_q^2} \mathcal{T}(\vec{q}', \vec{q}) \quad (3.42)$$

verknüpft. p_i und p'_i ($i = 1, 2$) bezeichnen die Vierer-Impulse im Anfangs- und Endzustand der beiden wechselwirkenden Nukleonen, wobei als Normierung $\langle p' | p \rangle = \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p})$ Anwendung findet.

Zur Analyse der Streuphasen, und damit zur Bestimmung der freien Parameter im Ein-Bosonen-Austausch Potential, wird die Streugleichung, wobei wir uns im Folgenden auf die Thompson-Gleichung (3.38) beschränken, in eine Streugleichung für die reelle R -Matrix transformiert, die durch

$$T = R - i\pi R \delta(E - H_0) T \quad (3.43)$$

definiert ist.

Analog zu den Definitionen in Gl.(3.39) und Gl.(3.40) ergibt sich für die reelle \check{R} -Matrix als Bestimmungsgleichung im Schwerpunktssystem ($\vec{P} = 0$)

$$\check{R}(\vec{q}', \vec{q}) = \check{V}(\vec{q}', \vec{q}) + \mathcal{P} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \check{V}(\vec{q}', \vec{p}) \frac{1}{2E_q - 2E_p} \check{R}(\vec{p}, \vec{q}) \quad (3.44)$$

wobei \mathcal{P} den Hauptwert des Integrals bezeichnet.

Diese Gleichung wird mit Hilfe der Matrixinversion in einer $|(LS)J\rangle$ -Basis gelöst, und man erhält als Ergebnis die Matrixelemente $\check{R}_{L'L}^{JS} \equiv \langle (L'S)J | \check{R} | (LS)J \rangle$.

Die Streuphasen stellen eine Parametrisierung der unitären S -Matrix dar, die für den ungekoppelten Fall, d.h. wenn gilt $L = L' = J$, durch

$$S_J = e^{2i\delta_J} \quad (3.45)$$

gegeben sind. Unter Verwendung der on-shell \check{R} -Matrix ergibt sich dann für den Spin-Singulett:

$$\tan {}^0\delta^J(E_{\text{Lab}}) = -\frac{\pi}{2} q E_q \check{R}_{LL}^{J0}(\vec{q}, \vec{q}) \quad (3.46)$$

sowie den

Spin-Triplett, ungekoppelt:

$$\tan {}^1\delta^J(E_{\text{Lab}}) = -\frac{\pi}{2} q E_q \check{R}_{LL}^{J1}(\vec{q}, \vec{q}) \quad (3.47)$$

als Beziehung zwischen Streuphasen und \check{R} -Matrix.

Für die gekoppelten Matrixelemente, d.h. für $S = 1$, $L, L' = J \pm 1$, ist eine unitäre Transformation notwendig, um die gekoppelten 2×2 -Untermatrixen der \check{R} -Matrix zu diagonalisieren. Zusätzlich zu den zwei Streuphasen erhält man einen Mischungsparameter ε_J . Unter Verwendung der Streuphasen-Konvention nach Blatt und Biedenharn [48] ergibt sich als Beziehung zwischen Streuphasen sowie Mischungsparameter und der on-shell \check{R} -Matrix für den gekoppelten Fall ($S=1$):

$$\tan \delta_{\mp}^J(E_{\text{Lab}}) = -\frac{\pi}{4} q E_q \left[\check{R}_{--}^J + \check{R}_{++}^J \pm \frac{\check{R}_{--}^J - \check{R}_{++}^J}{\cos 2\varepsilon_J} \right] \quad (3.48)$$

$$\tan 2\varepsilon_J(E_{\text{Lab}}) = \frac{2\check{R}_{+-}^J}{\check{R}_{--}^J - \check{R}_{++}^J} \quad (3.49)$$

wobei der Index \pm an den \check{R} -Matrixelementen als Abkürzung für $+ \equiv J + 1$ und $- \equiv J - 1$ steht. Für \check{R} -Matrixelemente in den vorangegangenen Formeln wurde deren Argument (q, q) unterdrückt, wobei q den Relativimpuls im Schwerpunktsystem bezeichnet und mit E_{Lab} über

$$E_{\text{Lab}} = \frac{2q^2}{M} \quad (3.50)$$

verknüpft ist [49].

In Tabelle (3.2) sind als Beispiel die sich aus der Streuphasenanalyse unter Verwendung der Thompson-Streugleichung ergebenden Parameter für relativistische Ein-Bosonen-Austausch Potentiale dargestellt. Diese Potentiale werden als Bonn A, B, C bezeichnet und finden in dieser Arbeit Anwendung.

Tabelle 3.2: Parameter der relativistischen Potentiale (Tab. aus Ref.[49])

Mesonenparameter	Potential A		Potential B		Potential C		
	m_α (MeV)	$g_\alpha^2/4\pi$	Λ_α (GeV)	$g_\alpha^2/4\pi$	Λ_α (GeV)	$g_\alpha^2/4\pi$	Λ_α (GeV)
π	138.03	14.9	1.05	14.6	1.2	14.6	1.3
η	548.8	7	1.5	5	1.5	3	1.5
ρ	769	0.99	1.3	0.95	1.3	0.95	1.3
ω	782.6	20	1.5	20	1.5	20	1.5
δ	983	0.7709	2.0	3.1155	1.5	5.0742	1.5
σ	550	8.3141	2.0	8.0769	2.0	8.0279	1.8
<i>Deuteron</i>							
$-\epsilon_d$ (MeV)		2.22459		2.22468		2.22450	[2.224575(9)]
P_D (%)		4.47		5.10		5.53	[—]
Q_d (fm ²)		0.274 ^a		0.279 ^a		0.283 ^a	[0.2860(15)]
μ_d (μ_N)		0.8543 ^a		0.8507 ^a		0.8482 ^a	0.857406(1)]
A_S (fm ^{-1/2})		0.8984		0.8968		0.8971	[0.8846(8)]
D/S		0.0255		0.0257		0.0260	[0.0264(12)]
<i>Niederenergiestreuung</i>							
a_{np} (fm)		-23.752		-23.747		-23.740	[-23.748(10)]
r_{np} (fm)		2.69		2.67		2.66	[2.75(5)]
a_t (fm)		5.482		5.474		5.475	[5.419(7)]
r_t (fm)		1.829		1.819		1.821	[1.754(8)]

Die Mesonenparameter definieren die Potentiale. Das Deuteron und die Niederenergiestreuparameter sind Vorhersagen dieser Potentiale. Die experimentellen Werte sind in den eckigen Klammern gegeben. Notationen und Referenzen der empirischen Werte sind in Tabelle 4.2 in Ref.[2] aufgeführt.

Es werden jeweils folgende Parameter verwendet: $f_\rho/g_\rho = 6.1$ und $f_\omega/g_\omega = 0.0$.

^a Mesonenaustauschströme sind nicht berücksichtigt.

Kapitel 4

Dirac-Brueckner-Hartree-Fock

In einer relativistischen Beschreibung wird die Bewegung eines Nukleons in Kernmaterie durch die Dirac-Gleichung

$$(\not{k} - M - \Sigma(k))u(\vec{k}) = 0 \quad (4.1)$$

beschrieben. Hierbei bezeichnet $\not{k} = \gamma^\mu k_\mu$, wobei k_μ der Viererimpuls des Nukleons ist und M die Nukleonmasse. Um die Effekte des Mediums auf das Nukleon zu berücksichtigen, wird der Selbstenergie-Operator $\Sigma(k)$ eingeführt. Unter Berücksichtigung der Translations- und Rotations-Invarianz, Paritätserhaltung und Invarianz unter Zeitumkehr ergibt sich als allgemeinste Form für die Dirac-Struktur der Selbstenergie als 4×4 -Matrix im Ruhesystem der Kernmaterie [50]

$$\Sigma(k) = \Sigma^s(k) - \gamma^0 \Sigma^0(k) + \vec{\gamma} \cdot \vec{k} \Sigma^v(k) \quad (4.2)$$

wobei die Größen Σ^s , Σ^0 , Σ^v einfach skalare Funktionen sind, die für on-shell Nukleonen ($k^0 = E(\vec{k})$) nur vom Absolutbetrag des Dreier-Impulses $k \equiv |\vec{k}|$ bei gegebener Dichte abhängen.

Bei gegebener Selbstenergie ergeben sich die Komponenten der Selbstenergie in einfacher Art und Weise durch Spurbildung in der Gestalt

$$\Sigma^s(k) = \frac{1}{4} \text{Tr}[\Sigma(k)], \quad \Sigma^0(k) = -\frac{1}{4} \text{Tr}[\gamma^0 \Sigma(k)], \quad \Sigma^v(k) = -\frac{1}{4} \text{Tr}[\vec{\gamma} \cdot \hat{k} \Sigma(k)] \quad (4.3)$$

Setzen wir den Ausdruck für die Selbstenergie Gl.(4.2) in die Dirac-Gleichung (4.1) ein, so ergibt sich nach einer kleinen Umformung

$$(\vec{\gamma} \cdot \vec{k}(1 + \Sigma^v) + M + \Sigma^s)u(\vec{k}, s) = \gamma^0(E_k + \Sigma^0)u(\vec{k}, s) \quad (4.4)$$

Schlußendlich wird noch durch den Ausdruck $(1 + \Sigma^v)$ dividiert, so daß anhand der Gruppierung der einzelnen Ausdrücke schon ersichtlich ist, daß es sich anbietet, folgende effektive Größen einzuführen

$$\begin{aligned} M^*(\vec{k}) &= \frac{M + \Sigma^s}{1 + \Sigma^v} \\ E^*(\vec{k}) &= \frac{E_k + \Sigma^0}{1 + \Sigma^v} \end{aligned} \quad (4.5)$$

sowie formal $\vec{k}^* = \vec{k}$ zu setzen. Die Impulsabhängigkeit der einzelnen Komponenten der Selbstenergie wird im Folgenden der Einfachheit halber nicht mit angegeben.

Für die Dirac-Gleichung ergibt sich dann mit obigen Definitionen

$$(\not{k}^* - M^*)u(\vec{k}) = 0 \quad (4.6)$$

was genau identisch ist zu der freien Dirac-Gleichung. Als Lösung ergibt sich unmittelbar

$$u(\vec{k}) = \sqrt{\frac{E_k^* + M^*}{2M^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}^*}{(E_k^* + M^*)} \end{pmatrix} \chi_s \chi_\tau \quad (4.7)$$

mit der Massenschalenbedingung $E^*(\vec{k})^2 = M^*(\vec{k})^2 + \vec{k}^2$ im Medium und der kovarianten Normierung

$$\bar{u}u = 1, \quad u^+u = \frac{E^*(k)}{M^*(k)} \quad (4.8)$$

Die Pauli-Spinoren χ_s und χ_τ beschreiben die Spin- und Isospinfreiheitsgrade des Systems und werden der Einfachheit halber beim Nukleon-Spinor $u(\vec{k})$ nicht explizit mit angegeben.

Diese Normierung weicht von der normalerweise für Nukleonen in einer relativistischen Vielteilchentheorie gewählten Normierung

$$\bar{w}w = \frac{M^*(k)}{E^*(k)}, \quad w^+w = 1 \quad (4.9)$$

ab, wobei sich der einfache Zusammenhang $w \equiv \sqrt{M^*/E^*} \times u$ zwischen den Spinoren unterschiedlicher Normierung ergibt. Im Folgenden werden, soweit nicht anders angegeben, Spinoren mit der Normierung aus Gl.(4.8) verwendet, was im wesentlichen dazu führt, daß in manchen Ausdrücken die Faktoren M^*/E^* explizit auftauchen.

Über die Matrixelemente der Selbstenergie wird für gewöhnlich das Einteilchenpotential

$$U(k) \equiv \frac{M^*}{E_k^*} \langle k | \Sigma | k \rangle = \frac{M^* \Sigma^s + k k^* \Sigma^v}{E_k^*} - \Sigma^0 \quad (4.10)$$

in Analogie zur nichtrelativistischen Vielteilchentheorie definiert, ebenso wie die kinetische Einteilchenenergie

$$T(k) \equiv \frac{M^*}{E_k^*} \langle k | \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + M | k \rangle = \frac{k k^* + M M^*}{E_k^*} \quad (4.11)$$

so daß sich die aus der Dirac-Gleichung (4.1) ergebende Einteilchenenergie schreiben läßt als

$$\varepsilon(k) \equiv \frac{M^*}{E_k^*} \langle k | \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + M | k \rangle + \frac{M^*}{E_k^*} \langle k | \Sigma | k \rangle = T(k) + U(k) \quad (4.12)$$

Für die Bindungsenergie, also die Energie pro Nukleon, ergibt sich mit den eben eingeführten Größen

$$\frac{E_B}{A} = \frac{1}{\rho_B} \sum_{k < k_f} T(k) + \frac{1}{2\rho_B} \sum_{k < k_f} U(k) \quad (4.13)$$

$k = \{k, m_s, m_\tau\}$ bezeichnet hier die Zustände mit Impuls k und den Spin- und Isospinquantenzahlen m_s und m_τ , so daß sich ausgeschrieben für die symbolische Summation

$$\sum_{k < k_f} = \sum_{m_s, m_\tau} \int_0^{k_f} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \quad (4.14)$$

ergibt. k_f entspricht dem Fermi-Impuls, der über

$$\rho_b = \sum_{k < k_f} \frac{M^*}{E_k^*} \langle k | \gamma^0 | k \rangle = \frac{\delta}{3\pi^2} k_f^3 \quad (4.15)$$

mit der Baryondichte ρ_b verknüpft ist. Analog zur Baryondichte wird die skalare Dichte

$$\rho_s = \sum_{k < k_f} \frac{M^*}{E_k^*} \langle k | k \rangle = \frac{\delta}{\pi^2} \int_0^{k_f} k^2 dk \frac{M^*}{E_k^*} \quad (4.16)$$

definiert. Der Faktor δ in der Baryondichte und skalaren Dichte bezeichnet die Isospin-Entartung und ist für Kernmaterie $\delta = 2$, für Neutronenmaterie $\delta = 1$.

4.1 Die Selbstenergie in der Hartree-Fock Näherung

Die Selbstenergie Σ zum Einteilchenimpuls k ihrerseits kann in der Hartree-Fock Näherung mit der effektiven Zweiteilchen-Wechselwirkung im Medium, der relativistischen G -Matrix, über

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\alpha\beta}(k) &= -i \int_{\vec{p} \leq k_f} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{g}_{\tau\sigma}(p) \{G(k, p; k, p)_{\alpha\sigma; \beta\tau} - G(k, p; p, k)_{\alpha\sigma; \tau\beta}\} \\
&= -i \int_{\vec{p} \leq k_f} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{g}_{\tau\sigma}(p) G^A(k, p; k, p)_{\alpha\sigma; \beta\tau} \\
&= -i \int_{\vec{p} \leq k_f} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\tilde{g}(p) G^A(k, p; k, p)]_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

verknüpft werden. Hierbei bezeichnet

$$\tilde{g}_{\tau\sigma}(p) = \frac{i\pi}{E^*(p)} (\not{p}^* + M^*)_{\tau\sigma} \delta(p^0 - E(p)) \Theta(k_f - |\vec{p}|) \tag{4.18}$$

den Dirac-Propagator, der die on-shell Propagation der Nukleonen mit dem Einteilchenimpuls p im Fermi-See im Ruhesystem der Kernmaterie beschreibt. Dieser ergibt sich unter Verwendung des relativistischen Formalismus der Green'schen Funktionen, wie in der Arbeit von Horowitz und Serot [22] näher beschrieben wird.

Gleichung (4.17) stellt eine Operator-Gleichung für die Selbstenergie dar, so daß zur Bestimmung der Dirac-Struktur der Selbstenergie mit Hilfe von Gl.(4.3) die Operator-Struktur der effektiven Zweiteilchen-Wechselwirkung bekannt sein muß. Wie weiter unten besprochen wird, trifft dies jedoch für die G -Matrix nicht unmittelbar zu.

Verwenden wir vorerst für die in der Gl.(4.17) auftretende G -Matrix die oben angegebene, auf dem Ein-Bosonen-Austausch basierende Zweiteilchenwechselwirkung

$$V(k'p', kp) = \sum_{\alpha} \frac{P_{\alpha}}{(q' - q)^2 - m^2} \Gamma_{\alpha}(q) \otimes \Gamma_{\alpha}(-q) \tag{4.19}$$

wobei $q = k' - k$ dem Viererimpulsübertrag entspricht und α die Summe über die verwendeten Mesonen, so kann unmittelbar aufgrund der vorgegebenen Operator-Struktur die Selbstenergie berechnet und die Komponenten derselben bestimmt werden.

Bestimmen wir ferner die Matrixelemente von Gl.(4.17), so erhalten wir das Einteilchenpotential in der Hartree-Fock Näherung

$$U(k) = \frac{M^*}{E_k^*} \langle k | \Sigma | k \rangle = \sum_{p < k_f} \frac{M^{*2}}{E_k^* E_p^*} \langle kp | V | kp - pk \rangle \quad (4.20)$$

als Summation über die antisymmetrischen Potentialmatrixelemente.

Üblicherweise ist Gl.(4.20) Ausgangspunkt für die Definition des Hartree-Fock Potentials über eine effektive Zweiteilchen-Wechselwirkung, analog zum nichtrelativistischen Fall. Durch den für die Berechnung der Operator-Struktur der Selbstenergie benutzten Propagator Gl.(4.18) wird an dieser Stelle also gewährleistet, daß man das gleiche Ergebnis für das Einteilchenpotential erhält.

Als Beispiel für die Beiträge zur Selbstenergie soll an dieser Stelle auf das Walecka-Modell eingegangen werden. In diesem Modell werden nur die Hartree-Beiträge zur Selbstenergie vom σ - und ω -Meson berücksichtigt, d.h. in Gl.(4.19) läuft die Summe nur über $\alpha = \{\sigma, \omega\}$ und Fock-Beiträge werden vernachlässigt. Dieses Modell wird allgemein als Dirac-Hartree (DH) Näherung der Selbstenergie bezeichnet. Unter Berücksichtigung der Fock-Beiträge ergibt sich dann die Dirac-Hartree-Fock (DHF) Näherung der Selbstenergie, wobei allgemein auch andere Mesonen ausser dem σ - und ω -Meson berücksichtigt werden. Für die Komponenten der Selbstenergie ergibt sich in diesem Modell

$$\Sigma^s = -\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \rho_s \quad , \quad \Sigma^v = -\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_b \quad (4.21)$$

mit der oben eingeführten skalaren Dichte ρ_s und Baryondichte ρ_b . Mit $(g_i/m_i)^2$ wird das Verhältnisquadrat von Kopplungskonstante zur Masse des Mesons bezeichnet. Für die Mesonenmasse werden meist die empirischen Werte benutzt, so daß nur noch die Kopplungskonstanten geeignet gewählt werden müssen, u.a. derart, daß der Sättigungspunkt von Kernmaterie reproduziert wird. Zu Σ^v liefern nur die Fock-Terme Beiträge, so daß hier $\Sigma^v = 0$ gilt.

Typischerweise liegen die Selbstenergiebeiträge Σ^s und Σ^v am Sättigungspunkt in der Größenordnung von ungefähr -300 bis -400 MeV, im Vergleich zu einer typischen Tiefe des Potentials von ca. -50 MeV. D.h. die relativ großen Beiträge heben sich im Mittel zum größten Teil auf. Anhand der Gl.(4.10) sieht man ferner, daß der skalare Anteil der Wechselwirkung, also das σ -Meson, Attraktion zum Einteilchenpotential liefert, der vektorielle Anteil der Wechselwirkung, also das

ω -Meson, Repulsion. Ferner ist interessant zu bemerken, daß aufgrund der Impulsunabhängigkeit der Selbstenergie-Beiträge die gesamte Impulsabhängigkeit des Einteilchenpotentials von dem Faktor M^*/E_k^* herrührt.

Im Gegensatz zur DH-Näherung sind die Komponenten der Selbstenergie in der DHF-Näherung abhängig vom Impuls, und nicht mehr von ganz so einfacher Gestalt wie in Gl.(4.21), so daß für die expliziten Ausdrücke für die verschiedenen Austausch-Mesonen auf [16] verwiesen sei.

Auch in der DHF-Näherung dominieren die vom σ - und ω -Meson herrührenden skalaren und vektoriellen Anteile der Selbstenergie, wobei jetzt aber über die Fock-Terme das σ -Meson Beiträge liefert zu Σ^0 , ebenso wie das ω -Meson Beiträge zu Σ^s liefert. Die von den Fock-Beiträgen stammende Impulsabhängigkeit ist im Vergleich zur DH-Näherung in der Größenordnung von ungefähr 10%, so daß die Annahme $\Sigma^s, \Sigma^0 = \text{const.}$ teilweise für qualitative Aussagen in einem ersten Schritt gerechtfertigt erscheint. Nichtsdestoweniger ist es im Allgemeinen erforderlich, die Fock-Terme richtig zu berücksichtigen, und damit auch die geringe Impulsabhängigkeit.

4.2 Dirac-Brueckner-Hartree-Fock

Ziel der Dirac-Brueckner-Hartree-Fock (DBHF) Näherung ist es, die sich bereits aus dem einfachen Walechka Modell ergebenden relativistischen Effekte in einer mikroskopischen Beschreibung des Vielteilchenproblems mit einzubeziehen, wobei als Ausgangspunkt eine realistische Nukleon-Nukleon Wechselwirkung dient, wie sie in Kap.3 beschrieben wurde, und von der ausgehend eine effektive Nukleon-Nukleon Wechselwirkung im Medium, die G -Matrix, abgeleitet wird.

Die G -Matrix ergibt sich aus der relativistischen Bethe-Goldstone Gleichung [49]

$$G(\vec{q}', \vec{q} | \vec{P}, \omega) = V(\vec{q}', \vec{q}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(\vec{q}', \vec{k}) \frac{M^{*2}}{E_{\vec{P}+\vec{k}}^{*2}} \frac{\bar{Q}(\vec{k}, \vec{P})}{\omega - 2E_{\vec{P}+\vec{k}}^*} G(\vec{k}, \vec{q} | \vec{P}, \omega) \quad (4.22)$$

die in der hier angegebenen Form das Pendant zur Thompson Gleichung (3.37) als dreidimensional reduzierte Streugleichung unter Berücksichtigung von Pauli- und Medium Effekten darstellt und im Ruhesystem der Kernmaterie angegeben ist. Hierbei steht $\vec{P} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ für den Schwerpunktsimpuls, $\vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$ für den Relativimpuls im Anfangszustand, \vec{k}, \vec{q}' für den Relativimpuls im Zwischen- bzw.

Endzustand zweier wechselwirkender Nukleonen im Medium. Der winkelgemittelte Pauli-Operator \bar{Q} berücksichtigt, daß als Zwischenzustände nur Zustände oberhalb der Fermi-Kante zulässig sind. Die Startenergie ist durch $\omega = 2E_{\vec{p}+\vec{q}}^*$ gegeben. Zur Vereinfachung sind Spin- bzw. Helizitäts- und Isospin-Indizes sowie die k_f -Abhängigkeit nicht explizit angegeben.

Im Gegensatz zur Thompson Gleichung bzw. konventionellen BHF-Näherung werden für die Berechnung der Matrixelemente nicht die Spinoren der freien Dirac-Gleichung verwendet, sondern die durch Einführung der Selbstenergie modifizierten Spinoren aus Gl.(4.1), was unmittelbar das Auftreten der effektiven Größen M^* und E^* in Gl.(4.22) erklärt.

Andererseits ist zur Bestimmung der effektiven Größen die Kenntnis der G -Matrix, genauer, die Operator-Struktur der G -Matrix erforderlich, um gemäß Gl.(4.17) die Komponenten der Selbstenergie bestimmen zu können, die wiederum in die Lösung der Dirac-Gleichung eingehen, deren Spinoren zur Berechnung der G -Matrix benötigt werden, was unmittelbar auf ein Selbstkonsistenzproblem führt.

Die Bestimmung der Operator-Struktur der G -Matrix ist jedoch weder trivial noch eindeutig, so daß von Brockmann und Machleidt [18] eine einfache Parametrisierung des Einteilchenpotentials vorgeschlagen wurde, um daraus die Selbstenergie zu bestimmen. Das Einteilchenpotential ist analog zu Gl.(4.20)

$$U(k) = \frac{M^*}{E_k^*} \text{Re} \langle k | \Sigma | k \rangle = \text{Re} \sum_{p < k_f} \frac{M^{*2}}{E_k^* E_p^*} \langle kp | G | kp - pk \rangle \quad (4.23)$$

als Summe über die antisymmetrischen G -Matrixelemente definiert. Da in der DBHF-Näherung die G -Matrix, und damit die Selbstenergie, für $k > k_f$ komplexwertig ist, wird das Einteilchenpotential über den Realteil definiert. Dieses Potential wird nun durch ein Hartree-Potential

$$U(k) = \frac{M^*}{E_k^*} \langle k | U_s - \gamma^0 U_0 | k \rangle = \frac{M^*}{E_k^*} U_s - U_0 \quad (4.24)$$

mit den Konstanten U_s und U_0 parametrisiert, unter der Annahme, daß die Impulsabhängigkeit der Selbstenergie schwach ist, und deshalb vernachlässigt werden kann. Durch DHF-Rechnungen, aber auch durch andere, genauere Untersuchungen [26, 27, 23], ist bekannt, daß die Impulsabhängigkeit der Selbstenergie relativ gering ist, so daß die Annahme der Impulsunabhängigkeit gerechtfertigt erscheint.

Unter dieser Annahme können in einfacher Weise die beiden Konstanten U_s und U_0 bestimmt werden, wobei $M^* = M + U_s$ die effektive Masse für den nächsten Iterationsschritt darstellt. Dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis die effektive Masse M^* konvergiert.

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung der Selbstenergie, wie sie in dieser Arbeit verwendet wird und auch noch detaillierter beschrieben werden soll, besteht darin, für die G -Matrix in geeigneter Weise einen Ansatz für die Operator-Struktur zu wählen, um dann gemäß Gl.(4.17) die Selbstenergie direkt berechnen zu können, und damit insgesamt die Dirac-Struktur der Nukleon Selbstenergie Gl.(4.2).

Als Ansatz wählt man gewöhnlich eine Entwicklung nach einem vollständigen Satz von Zweiteilchen-Operatoren

$$\hat{G} = \sum_m \Gamma^m \kappa_m^{(1)} \otimes \kappa_m^{(2)} \quad (4.25)$$

bestehend aus den 16 linear unabhängigen Dirac-Matrizen

$$\kappa_m = \{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma^5, \gamma^5\} \quad (4.26)$$

wobei hier $\kappa_m^{(i)}$ bedeutet, daß der Dirac-Operator κ_m auf den Spinor des Nukleons i anzuwenden ist. Die Impulsabhängigkeit als auch die Dichteabhängigkeit des Operators \hat{G} und der skalaren Amplitudenfunktionen Γ^m wurden vorerst unterdrückt.

Zur Bestimmung der Operator-Struktur der G -Matrix wird üblicherweise die Bethe-Goldstone Gleichung nicht im Ruhesystem der Kernmaterie gelöst, sondern im Schwerpunktsystem der beiden wechselwirkenden Nukleonen. Im Schwerpunktsystem ($\vec{P} = 0$) ergibt sich für die Bethe-Goldstone Gleichung [19, 22]

$$G(\vec{q}', \vec{q}|s^*) = V(\vec{q}', \vec{q}) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V(\vec{q}', \vec{k}) \frac{M^{*2}}{E_k^{*2}} \frac{\overline{Q}(|\vec{k}|, |\vec{P}|, s^*)}{\sqrt{s^*} - 2E_k^*} G(\vec{k}, \vec{q}|s^*) \quad (4.27)$$

Hier bezeichnet $s^* \equiv 4P_\nu^{*2} = 4(P^{0*} - \vec{P}^2) = 4E_q^{*2}$ die invariante effektive Masse, die die Rolle der Startenergie ω in Gl.(4.22) einnimmt. Man beachte, daß hier der Vierer-Schwerpunktsimpuls als $P_\nu = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)_\nu$ definiert ist. \vec{q}' , \vec{q} und \vec{k} bezeichnen die Relativimpulse im End-, Anfangs- und Zwischenzustand. \overline{Q} bezeichnet den winkelmittelten Pauli-Operator, der weiter unten angegeben wird.

Eine wesentliche und wichtige Vereinfachung bei der Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung ergibt sich aus der Annahme, daß die in der Bethe-Goldstone Gleichung

eingehende Selbstenergie nicht vom Impuls abhängt, d.h. man setzt

$$\Sigma(k) \approx \Sigma^s - \gamma^0 \Sigma^0 = (M^* - M) - \gamma^0 \Sigma^0 \quad (4.28)$$

mit Σ^s und Σ^0 als Konstanten, wobei diese üblicherweise an der Fermi-Kante gewählt werden, so daß z.B. für die effektive Masse $M^* \equiv M^*(k = k_f)$ gilt.

Andererseits soll aus der G -Matrix aber gerade die Impulsabhängigkeit bestimmt werden, d.h. die in die Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung eingehende Annahme über die schwache Impulsabhängigkeit der Selbstenergie muß im Nachhinein wieder verifiziert werden.

4.3 Technische Details

4.3.1 Lorentz-Transformation

Um die Operator-Struktur der G -Matrix im Ruhesystem der Kernmaterie aus der Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung im Schwerpunktsystem der beiden wechselwirkenden Nukleonen zu erhalten, muß diese Größe entsprechend Lorentz transformiert werden.

Die Lorentz-Transformation für einen beliebigen, im Ruhesystem der Kernmaterie definierten Vierer-Vektor a^μ in das Schwerpunktsystem ist gegeben durch [51]

$$\vec{a}_c = \vec{a} + \vec{\beta} \gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{\beta} \cdot \vec{a} - a^0 \right) \quad (4.29)$$

$$a_c^0 = \gamma(a^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{a}) \quad (4.30)$$

mit den Boost-Parametern

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{P}}{P^{0*}} = \frac{\vec{P}}{\sqrt{s^*/4 + \vec{P}^2}} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{4P^{0*}}{\sqrt{s^*}} = \frac{\sqrt{s^* + 4\vec{P}^2}}{\sqrt{s^*}} \quad (4.31)$$

wobei a_c^μ den resultierenden Vektor im Schwerpunktsystem bezeichnet, und $P^{*\nu}$ den Vierer-Schwerpunktsimpuls im Ruhesystem der Kernmaterie. $s^* = 4P_\nu^{*2} = 4(P_0^{*2} - \vec{P}^2)$ ist die bereits oben eingeführte invariante effektive Masse.

Wendet man die Lorentz-Transformation auf die Nukleonen im Eingangszustand mit den Einteilchenimpulsen im Ruhesystem der Kernmaterie $\vec{p}_1 = \vec{P} + \vec{q}$ und

$\vec{p}_2 = \vec{P} - \vec{q}$ an, so erhält man in der Tat im Schwerpunktsystem $\vec{p}_{1c} = -\vec{p}_{2c} = \vec{q}_c$, wobei \vec{q}_c den Relativimpuls im Schwerpunktsystem bezeichnet. Analoges gilt für die Nukleonen im Endzustand.

Im Fall, daß die Teilchen on-shell sind, es gilt also $(p_1^{*0}) = E^*(p_1) = \sqrt{p_1^2 + M^{*2}}$, so folgt aus (4.30), daß ebenso gilt $(p_{1c}^{*0}) = E^*(p_c) = \sqrt{p_c^2 + M^{*2}}$. Damit kann der Relativimpuls im Schwerpunktsystem in besonders einfacher Art und Weise aus der invarianten effektiven Masse

$$\begin{aligned} s^* &= 4(P_0^{*2} - \vec{P}^2) = 4P_{0c}^{*2} \\ &= (E^*(q_c) + E^*(-q_c))^2 \\ &= 4(\vec{q}_c^2 + M^{*2}) \end{aligned} \quad (4.32)$$

zu

$$q_c \equiv |\vec{q}_c| = \sqrt{\frac{1}{4}s^* - M^{*2}} \quad (4.33)$$

bestimmt werden.

4.3.2 Pauli-Operator

Für den winkelgemittelten Pauli-Operator ergibt sich im Schwerpunktsystem [22]

$$\overline{Q}(|\vec{k}|, |\vec{P}|, s^*) = \begin{cases} 0 & k < k_- \\ \frac{\gamma E_k^* - E_f^*}{\beta \gamma k} & k_- \leq k < k_+ \\ 1 & k \geq k_+ \end{cases} \quad (4.34)$$

wobei mit $E_f^* = \sqrt{k_f^2 + M^{*2}}$ die Fermi-Energie bezeichnet wird und mit

$$k_- = \sqrt{k_f^2 - \beta^2 E_f^{*2}} \quad \text{und} \quad k_+ = \gamma(\beta E_f + k_f) \quad (4.35)$$

die Größen für die Impuls-Intervalle in (4.34). Die in \overline{Q} angegebene Abhängigkeit von dem im Ruhesystem der Kernmaterie definierten Schwerpunktsimpuls soll nur die Abhängigkeit von den oben definierten Boost-Parametern β und γ verdeutlichen.

Im Vergleich zu Gl.(4.34) wird in [19] für den Impuls-Bereich $k_- \leq k < k_+$ der etwas komplizierter aussehende Ausdruck

$$\left\{ 2k \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right\}^{-1} \left\{ \frac{-2\beta E_f^*}{\gamma} + \left[\left(\frac{2\beta E_f^*}{\gamma} \right)^2 + 4 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) (\beta^2 E_f^{*2} + k^2 - k_f^2) \right]^{1/2} \right\} \quad (4.36)$$

angegeben. Dies ist jedoch genau das gleiche wie in Gl.(4.34), wie sich leicht zeigen läßt.

Unter Verwendung von $1 - 1/\gamma^2 = \beta^2$ läßt sich der Ausdruck Gl.(4.36) umschreiben zu

$$\{2k\beta\}^{-1} \left\{ \frac{-2E_f^*}{\gamma} + \left[\left(\frac{2E_f^*}{\gamma} \right)^2 + 4(\beta^2 E_f^{*2} - E_f^{*2} + E_k^{*2}) \right]^{1/2} \right\} \quad (4.37)$$

wobei $k^2 = E_k^{*2} - M^{*2}$ und $k_f^2 = E_f^{*2} - M^{*2}$ benutzt wurde. Der Ausdruck vereinfacht sich mit

$$\beta^2 E_f^{*2} - E_f^{*2} = -\frac{E_f^{*2}}{\gamma^2} \quad (4.38)$$

nach einer weiteren kleinen Umformung zu

$$\frac{\gamma E_k^* - E_f^*}{k\beta\gamma} \quad (4.39)$$

was genau der vorangegangenen Behauptung entspricht.

4.3.3 Partialwellenentwicklung

Die Bethe-Goldstone Gleichung (4.27) wird, ebenso wie in Kap. 2.5.1 beschrieben, in einer Partialwellenbasis entwickelt und mit Hilfe der Matrixinversion gelöst.

Für die Partialwellenentwicklung geht man gewöhnlich von den Matrixelementen in der Ebenen-Welle Helizitätsdarstellung $|\vec{q}\lambda_1\lambda_2\rangle$ aus, wobei die Helizität λ_i des Teilchens i als Eigenwert zum Helizitätsoperator $\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i/|\vec{p}_i|$ mit den Eigenwerten $\pm\frac{1}{2}$ definiert ist. Bezeichnet

$$\langle \vec{q}'\lambda'_1\lambda'_2 | G | \lambda_1\lambda_2\vec{q} \rangle \quad (4.40)$$

ein solches Matrixelement in der $|\vec{q}\lambda_1\lambda_2\rangle$ -Basis, so ergibt sich für das Matrixelement in der Drehimpuls-Basis $|JM\lambda_1\lambda_2\rangle$ [52]

$$\langle \lambda'_1\lambda'_2 | G^J(q', q) | \lambda_1\lambda_2 \rangle = 2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos\vartheta) d_{\lambda,\lambda'}^J(\vartheta) \langle \vec{q}'\lambda'_1\lambda'_2 | G | \lambda_1\lambda_2\vec{q} \rangle \quad (4.41)$$

wobei zur Abkürzung $\lambda \equiv \lambda_1 - \lambda_2$ und $\lambda' \equiv \lambda'_1 - \lambda'_2$ benutzt wurde. ϑ bezeichnet den Winkel zwischen \vec{q} und \vec{q}' , und q', q bezeichnen die Beträge der Relativimpulse. $d_{m,m'}^J(\vartheta)$ sind die üblichen reduzierten Drehmatrizen [53]. Die Umkehrtransformation ist gegeben durch

$$\langle \vec{q}'\lambda'_1\lambda'_2 | G | \lambda_1\lambda_2\vec{q} \rangle = \sum_J \frac{(2J+1)}{4\pi} d_{\lambda,\lambda'}^J(\vartheta) \langle \lambda'_1\lambda'_2 | G^J(q', q) | \lambda_1\lambda_2 \rangle \quad (4.42)$$

Die Anzahl der insgesamt unabhängigen Matrixelemente $\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | G^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$ ergibt sich zum einen aus der Beschränkung, daß nur zu positiver Energie gehörende Zustände betrachtet werden, d.h. Antinukleon-Zustände werden nicht berücksichtigt, zum anderen aus der Berücksichtigung der

1) Paritätserhaltung

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | G^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \langle -\lambda'_1 - \lambda'_2 | G^J(q', q) | -\lambda_1 - \lambda_2 \rangle$$

2) Erhaltung des Gesamtspins

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | G^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \langle \lambda'_2 \lambda'_1 | G^J(q', q) | \lambda_2 - \lambda_1 \rangle$$

3) Zeitumkehrinvarianz

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | G^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \langle \lambda_1 \lambda_2 | G^J(q, q') | \lambda'_1 \lambda'_2 \rangle$$

Hieraus ergibt sich, daß von den $4 \times 4 = 16$ möglichen Matrixelementen insgesamt nur 6 linear unabhängig sind. Diese werden üblicherweise gewählt zu [52]

$$\begin{aligned} G_1^J &= \langle ++ | G(q', q) | ++ \rangle & G_2^J &= \langle ++ | G(q', q) | -- \rangle \\ G_3^J &= \langle +- | G(q', q) | +- \rangle & G_4^J &= \langle +- | G(q', q) | -+ \rangle \\ G_5^J &= \langle ++ | G(q', q) | +- \rangle & G_6^J &= \langle +- | G(q', q) | ++ \rangle \end{aligned} \quad (4.43)$$

wobei $G_i^J = G_i^J(q', q)$ bedeuten soll. \pm steht für die Helizität $\pm \frac{1}{2}$. Aufgrund der Zeitumkehrinvarianz gilt weiterhin

$$G_6^J(q', q) = G_5^J(q, q') \quad (4.44)$$

so daß die Anzahl der linear unabhängigen Matrixelemente im on-shell Fall, d.h. $q = q'$ und damit $G_6^J(q^2) = G_5^J(q^2)$, auf letztendlich 5 reduziert wird.

Die G -Matrix ergibt sich dann in der gewohnten $|JMLS\rangle$ -Darstellung aus der G -Matrix in der $|JM\lambda_1\lambda_2\rangle$ -Basis gemäß der Transformation

$$\begin{aligned} \langle L'SJ | G(q', q) | LSJ \rangle &= \\ &\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2} \langle L'SJ | JM\lambda'_1\lambda'_2 \rangle \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | G^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \langle JM\lambda_1\lambda_2 | LSJ \rangle \end{aligned} \quad (4.45)$$

mit der Transformations-Matrix

$$\langle JMLS | JM\lambda_1\lambda_2 \rangle = \sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}} C(LSJ; 0\lambda) C(s_1 s_2 S; \lambda_1, -\lambda_2), \quad \lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \quad (4.46)$$

wobei mit

$$C(j_1 j_2 j; m_1 m_2) \delta_{m, m_1 + m_2} = \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle \quad (4.47)$$

die Clebsch-Gordan Koeffizienten bezeichnet sind.

Nach der Partialwellenentwicklung ergibt sich für die Bethe-Goldstone Gleichung (4.27)

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | G^J(q', q | s^*) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle + \\ &\sum_{h_1, h_2} \int_0^\infty dk k^2 \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V^J(q', k) | h_1, h_2 \rangle \frac{M^{*2} \bar{Q}(|\vec{k}|, |\vec{P}|, s^*)}{E_{\vec{k}}^{*2} \sqrt{s^* - 2E_{\vec{k}}^*}} \\ &\times \langle h_1 h_2 | G(k, q | s^*) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \end{aligned} \quad (4.48)$$

als System gekoppelter Integralgleichungen in der Partialwellen-Helizitätsdarstellung $|JM\lambda_1\lambda_2\rangle$. Diese können durch geeignete Linearkombinationen der Helizitätsamplituden teilweise entkoppelt werden, wie in [52] ausführlich dargestellt, so daß man je eine ungekoppelte Gleichung für den Spin-Singulett ($S = 0; L, L' = J$) und den ungekoppelten Spin-Triplett ($S = 1; L, L' = J$) Fall erhält, sowie vier gekoppelte Gleichungen für den gekoppelten Triplett Fall. Ein vollkommen formal äquivalentes Gleichungssystem erhält man, wenn man unter Anwendung der Transformation Gl.(4.45) die Bethe-Goldstone Gleichung anstatt in der $|JM\lambda_1\lambda_2\rangle$ -Basis gleich in der $|LSJ\rangle$ -Basis angibt.

4.3.4 Operator-Struktur

Um die Dirac-Struktur der Nukleon Selbstenergie bestimmen zu können, ist es gemäß Gleichung (4.17) erforderlich, die Operator Struktur der effektiven Wechselwirkung, der G -Matrix, für den Fall der on-shell Streuung im Ruhesystem der Kernmaterie zu kennen. Daraus ergibt sich, daß bei der Bestimmung der Operator-Struktur der G -Matrix im Schwerpunktsystem ($\vec{P} = 0$) der beiden wechselwirkenden Nukleonen nur Matrixelemente benötigt werden, für die der Streuwinkel ϑ zwischen den Relativimpulsen \vec{q}' und \vec{q} auf $\vartheta = 0$ eingeschränkt ist, und somit nur der Betrag des Relativimpulses $q = |\vec{q}|$ im Folgenden als Argument betrachtet werden muß. Ferner ergibt sich aus der vorangegangenen Diskussion, daß insgesamt nur fünf Helizitäts-Matrixelemente linear unabhängig sind.

Die exakte Operator-Struktur der G -Matrix ist jedoch als solches im Allgemeinen nicht bestimmbar, so daß hierzu, wie bereits in Gl.(4.25) und (4.26) angegeben, ein hierfür geeigneter Ansatz gewählt wird.

Gehen wir für den Moment von der in Gl.(4.25) angegebenen Operator-Entwicklung

$$\begin{aligned}
 \hat{G} &= \sum_{m=S,V,T,A,PS} \Gamma^m \kappa_m^{(1)} \otimes \kappa_m^{(2)} \\
 &= \Gamma^S 1^{(1)} 1^{(2)} + \Gamma^V \gamma_\mu^{(1)} \gamma^{(2)\mu} + \Gamma^T \sigma_{\mu\nu}^{(1)} \sigma^{(2)\mu\nu} \\
 &= +\Gamma^A \gamma_\mu^{(1)} \gamma_5^{(1)} \gamma^{(2)\mu} \gamma_5^{(2)} + \Gamma^{PS} \gamma_5^{(1)} \gamma_5^{(2)}
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

für die G -Matrix aus, wobei im Folgenden der Einfachheit halber die Abhängigkeit vom Isospin unterdrückt wird, so ergibt sich für die fünf Helizitätsmatrixelemente der G -Matrix in der Operator-Entwicklung

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \hat{G}(q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle_A = \sum_{m=S,V,T,A,PS} \Gamma_D^m(q) \langle | \kappa_m^{(1)} \kappa_m^{(2)} | \rangle_D - \Gamma_X^m(q) \langle | \kappa_m^{(1)} \kappa_m^{(2)} | \rangle_X \tag{4.50}$$

Der Index A an dem G -Matrixelement soll an dieser Stelle noch einmal besonders verdeutlichen, daß wir als Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung antisymmetrische Matrixelemente erhalten, und dies natürlich auch bei der Operator-Entwicklung berücksichtigen müssen. Demnach folgt für den Ausdruck auf der rechten Seite, daß sich dieser gerade als Summe aus dem direkten „D“ und dem Austausch- „X“ Matrixelement zusammensetzen muß.

Der Ausdruck in Gl.(4.50) kann unter Verwendung der Fierz-Transformation [54]

$$(\bar{u}_1 \kappa_m u_2) (\bar{u}_3 \kappa_m u_4) = \sum_{n=S,V,T,A,PS} F_{m,n} (\bar{u}_1 \kappa_n u_4) (\bar{u}_3 \kappa_n u_2) \tag{4.51}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 F_{mn} &= \frac{1}{4} \text{Tr}(\kappa_n \kappa_m \kappa_n \kappa_m) \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ -12 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ 4 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\tag{4.53}$$

die Fierz-Transformationsmatrix ist, noch weiter vereinfacht werden.

Verwendet man die Fierz-Transformation für Gl.(4.50), so ergibt sich

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \hat{G}(q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle_A = \sum_{m=S,V,T,A,PS} \Gamma_A^m(q) \langle \bar{q} \lambda'_1 \lambda'_2 | \kappa_m^{(1)} \kappa_m^{(2)} | \lambda_1 \lambda_2 \bar{q} \rangle_D \tag{4.54}$$

d.h. das antisymmetrische G -Matrixelement läßt sich einfach darstellen als Summe über die „direkten“ Operator-Matrixelemente, jeweils multipliziert mit einer skalaren Amplitudenfunktion Γ_A^m , die die Antisymmetrie richtig berücksichtigt, und über

$$\Gamma_A^m(q) = \Gamma_D^m(q) - \sum_{n=S,V,T,A,PS} F_{nm} \Gamma_X^n(q) \quad (4.55)$$

mit dem „direkten“ und „Austausch“- Amplituden verknüpft ist.

Die Gleichung (4.54) stellt insgesamt eine Matrixgleichung dar, die durch Inversion der 5×5 -Matrix

$$\langle \vec{q} \lambda'_1 \lambda'_2 | \kappa_m^{(1)} \kappa_m^{(2)} | \lambda_1 \lambda_2 \vec{q} \rangle_D \quad (4.56)$$

invertiert und nach den Operator-Amplituden Γ_A^m aufgelöst werden kann [22].

Verwendet man nun die Darstellung in Gl.(4.54) zur Bestimmung der Dirac-Struktur der Nukleon Selbstenergie (4.17), so ergibt sich aus der Auswertung der Ausdrücke

$$\kappa_m^{(1)} \text{Tr}[(\not{p}^* + M^*) \kappa_m^{(2)}] \quad (4.57)$$

unter der Beachtung der Regeln zur Spurbildung von Dirac-Matrizen [55], daß der Ausdruck Gl.(4.57) nur Werte ungleich Null liefert für $\kappa_m = 1$ bzw. $\kappa_m = \gamma^\mu$. Damit ergibt sich in einfacher Weise für die Komponenten der Selbstenergie

$$\begin{aligned} \Sigma^s(k_1) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{k_f} d^3 \vec{k}_2 \frac{M^*}{E^*} \Gamma_A^S(q) \\ \Sigma^0(k_1) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{k_f} d^3 \vec{k}_2 \Gamma_A^V(q) \\ \Sigma^v(k_1) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{k_f} d^3 \vec{k}_2 \frac{k_2^*}{E^*} \Gamma_A^V(q) \end{aligned} \quad (4.58)$$

wobei $k_{i,i=1,2}$ die Einteilchenimpulse sind, aus denen sich mittels Gl.(4.33) der Relativimpuls $q \equiv q(k_1, k_2)$ im Schwerpunktsystem ergibt, von denen die Operator-Amplituden Γ_A^m abhängen. Interessant an Gl.(4.58) ist, daß zur Bestimmung der Selbstenergie letztendlich nur die skalare Γ_A^S und die vektorielle Γ_A^V Operator-Amplitude benötigt werden.

4.3.5 Äquivalenztheorem

Im Folgenden soll nicht in aller Vollständigkeit auf das sogenannte Äquivalenztheorem [50] eingegangen werden. Vielmehr soll der Inhalt des Äquivalenztheorems am prominentesten Beispiel, der Kopplung des π -Mesons, kurz erläutert werden.

Wir betrachten hierzu das Matrixelement

$$\frac{f_\pi}{m_\pi} \bar{u}_f (\not{p}_f - \not{p}_i) i\gamma^5 u_i \quad (4.59)$$

wie es im Potentialmatrixelement Gl.(3.5) für ein pseudovektoriell wechselwirkendes π -Meson auftritt.

Für den on-shell Fall können wir die Dirac-Gleichung anwenden und der Ausdruck Gl.(4.59) läßt sich einfach umschreiben zu

$$\begin{aligned} \frac{f_\pi}{m_\pi} (\bar{u}_f M i\gamma^5 u_i + \bar{u}_f i\gamma^5 M u_i) &= \\ \frac{f_\pi}{m_\pi} 2M \bar{u}_f i\gamma^5 u_i & \end{aligned} \quad (4.60)$$

d.h. man erhält für das Matrixelement genau das gleiche Resultat, wie für ein pseudoskalar wechselwirkendes π -Meson, wenn die Kopplungskonstanten die Relation

$$\frac{g_{ps}}{2M} = \frac{f_{pv}}{m_\pi} \quad (4.61)$$

erfüllen.

Damit ist die (triviale) Aussage des Äquivalenztheorems schon umschrieben. Für die Darstellung der Matrixelemente, wie hier an diesem einfachen Beispiel gezeigt, ist die Operator-Struktur, pseudoskalar oder pseudovektoriell, irrelevant, da diese wie in der Gl.(4.60) beschrieben, äquivalent sind.

Andererseits ist aber unmittelbar ersichtlich, daß der Operator der pseudovektoriellen Kopplung nicht nur ungleich dem Operator der pseudoskalaren Kopplung ist, sondern, daß er, aufgrund der expliziten Impulsabhängigkeit, auch nicht durch geeignete Linearkombinationen der Dirac-Matrizen Gl.(4.26) dargestellt werden kann. Ebenso existiert für diesen auch keine geeignete Fierz-Transformation Gl.(4.51).

Diese Nichteindeutigkeit der Operatoren ist, solange eine geeignete Äquivalenzbeziehung existiert, für die Darstellung von Matrixelementen unbedeutend. Für die Bestimmung der Komponenten der Selbstenergie Gl.(4.17) indes, in die gerade die Operator-Struktur eingeht, ist jedoch das Äquivalenztheorem als solches nicht anwendbar und das Ergebnis kann sehr wohl von der genauen Wahl der Operatoren abhängen.

Um dieses Problem der Nichteindeutigkeit der Operator-Entwicklung, wie es bereits auftritt, wenn die effektive Wechselwirkung, die G -Matrix, durch die reine Nukleon-Nukleon Wechselwirkung ersetzt wird, bestmöglichst zu vermeiden, ist es angebracht, die G -Matrix in zwei Anteile aufzuspalten

$$G = V + \Delta G \quad (4.62)$$

Der erste Anteil ist gerade die reine Nukleon-Nukleon Wechselwirkung, deren Operator-Struktur bekannt ist, so daß die Komponenten der Selbstenergie explizit bestimmt werden können. Der zweite Anteil bezeichnet den Restwechselwirkungsanteil und nur für diesen wird die Operator-Entwicklung Gl.(4.54) verwendet. Das dies gerechtfertigt ist, soll weiter unten genauer besprochen werden.

4.4 Ergebnisse

In den folgenden Abschnitten wird zum einen ausführlich auf die Bedeutung der Aufspaltung der effektiven Wechselwirkung, der G -Matrix, in die beiden Anteile der reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung V und den Restwechselwirkungsanteil ΔG , eingegangen.

Zum anderen werden die Ergebnisse angegeben und diskutiert, die sich aus der selbstkonsistenten Dirac-Brueckner-Hartree-Fock Rechnung in Kernmaterie und Neutronenmaterie ergeben. Ferner wird eine einfache Möglichkeit der Parametrisierung der G -Matrix besprochen.

4.4.1 Validierung $G = V + \Delta G$

Wie oben schon diskutiert, ist die Operator-Entwicklung Gl.(4.54) abhängig von der Wahl der kovarianten Operatoren Gl.(4.26) und damit nicht eindeutig. Um diese Nicht-Eindeutigkeit besonders zu veranschaulichen, werden im Folgenden verschiedene Komponenten der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung diskutiert, wobei hier als Beispiel das Bonn B Potential Tab. 3.2 dienen soll.

Betrachten wir als erstes Beispiel den π -Meson Austausch, wie er im Bonn B Potential mit einer pseudovektoriellen π -N Kopplung definiert ist. Wie bereits in Kap.4.3.5 besprochen, sind die Matrixelemente der pseudovektoriellen Kopplung

mit der pseudoskalaren äquivalent, so daß sich in der Operatorentwicklung für die Matrixelemente V_π große Beiträge der Lorentz-Invarianten skalaren und vektoriellen Operator-Amplituden Γ_A^S und Γ_A^V ergeben, die von den Fock-Beiträgen des pseudoskalaren Operators stammen. Integrieren wir diese Amplituden wie in Gl.(4.58) angegeben, so ergeben sich ebenso große skalare (Σ^S) und vektorielle (Σ^0) Komponenten der Selbstenergie.

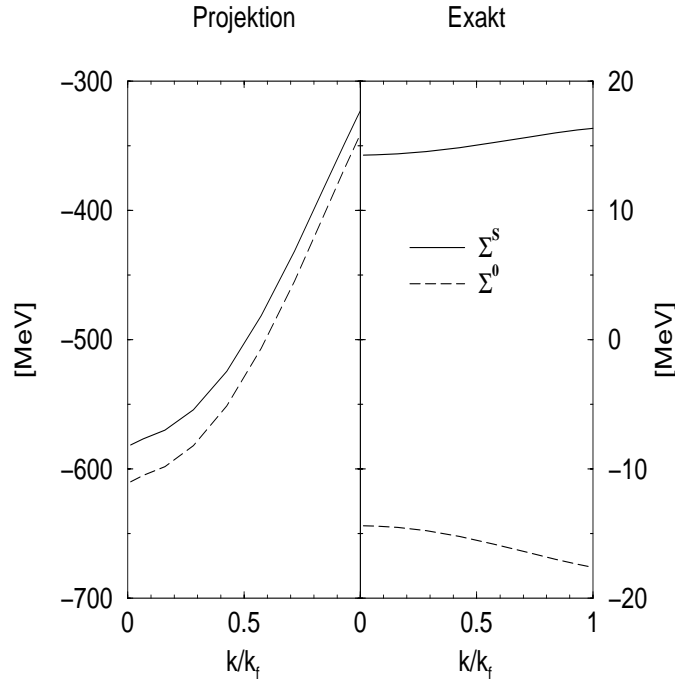


Abbildung 4.1: Selbstenergie π -Meson

Beiträge vom π -Austausch zu der skalaren (Σ^S) und vektoriellen (Σ^0) Komponente der Selbstenergie in Kernmaterie bei Sättigungsdichte $k_f = 1.36 \text{ fm}^{-1}$ in Abhängigkeit vom Einteilchenimpuls in Einheiten von k_f . *Projektion* bezeichnet die Beiträge, wie sie sich aus dem Projektionsverfahren ergeben (pseudoskalar), *Exakt* die Beiträge, wie sie sich direkt aus dem Bonn B Potential berechnen (pseudo-vektor). Man beachte insbesondere die unterschiedliche Energieskalierung auf beiden Seiten.

Diese Komponenten der Selbstenergie sind auf der linken Seite der Abb.4.1 dargestellt. Sie wurden für Kernmaterie bei der Sättigungsdichte ($k_f = 1.36 \text{ fm}^{-1}$)

berechnet und sind in Abhängigkeit des Einteilchenimpulses k in Einheiten des Fermi-Impulses k_f angegeben. Zwei Dinge sind an dieser Abbildung besonders beachtenswert. Zum einen, daß sich für die Komponenten der Selbstenergie in absoluten Zahlen Beträge ergeben, die bis zu 600 MeV betragen. Dies allein würde schon bedeuten, daß die effektive Masse M^* des Nukleons im Medium etwa 300 MeV betragen würde. Zum anderen die starke Abhängigkeit vom Einteilchenimpuls k , sowohl der skalaren als auch der vektoriellen Komponente der Selbstenergie Σ^S und Σ^0 . Andererseits ist wegen der starken Aufhebung zwischen der skalaren und vektoriellen Komponente der Beitrag zur Einteilchenenergie

$$\varepsilon(k) = \sqrt{M^{*2} + \vec{k}^2} - \Sigma^0(k) - M \quad (4.63)$$

verhältnismäßig klein.

Ein vollkommen anderes Bild ergibt sich, wenn man die Komponenten der Selbstenergie direkt für die pseudovektorielle Kopplung berechnet. Diese sind zum Vergleich in dem rechten Teil der Abb.4.1 dargestellt. Zum einen hat die skalare Komponente der Selbstenergie ein umgekehrtes Vorzeichen und liegt, ebenso wie die vektorielle Komponente der Selbstenergie, vom Betrag in der Größenordnung um die 15 MeV. Zum anderen haben die Komponenten der Selbstenergie eine relativ kleine Abhängigkeit vom Einteilchenimpuls k .

Damit ist offensichtlich, daß die Dirac-Struktur der Selbstenergie für die pseudoskalare und pseudovektorielle Kopplung vollkommen verschieden voneinander sind. Andererseits ergibt sich aufgrund der Äquivalenz der Matrixelemente aber, daß die Einteilchenenergie Gl.(4.63) identisch ist.

Diese Diskrepanz zwischen diesen beiden Kopplungen im Falle des π -Meson Austausches ist lange bekannt [2] und erklärt sich einfach durch die Äquivalenz der Matrixelemente für Spinoren, die zu den Lösungen der Dirac-Gleichung positiver Energie gehören. Diese Äquivalenz besteht jedoch nicht mehr, wenn man auch Matrixelemente zwischen zu positiver und negativer Energie gehörende Spinoren betrachten würde. Andererseits werden aber nur Matrixelemente von ersteren Spinoren betrachtet und unter Benutzung des Operator-Ansatzes analysiert, so daß sich im Falle des π -Mesons immer ein Ergebnis für eine pseudoskalare Kopplung ergibt, die gerade zu diesen großen Komponenten der Selbstenergie führt. Diese entsprechen jedoch nicht im entferntesten den Beiträgen, die eine pseudovektorielle Kopplung liefert, wie sie durch die ursprüngliche Nukleon-Nukleon Wechselwirkung gegeben ist.

Ein weiteres Beispiel, bei dem es zu einer solchen Unstimmigkeit kommt, ist der Austausch des η -Mesons, daß ebenfalls in den Bonn Potentialen mit einer pseudovektoriellen Kopplung definiert ist. Die Komponenten der Selbstenergie, wie sie sich aus dem Operator-Ansatz ergeben, sind im linken Teil der Abb.4.2 dargestellt, und im Vergleich dazu wieder im rechten Teil die Beiträge, die sich aus der direkten Berechnung für die pseudovektorielle Kopplung ergeben.

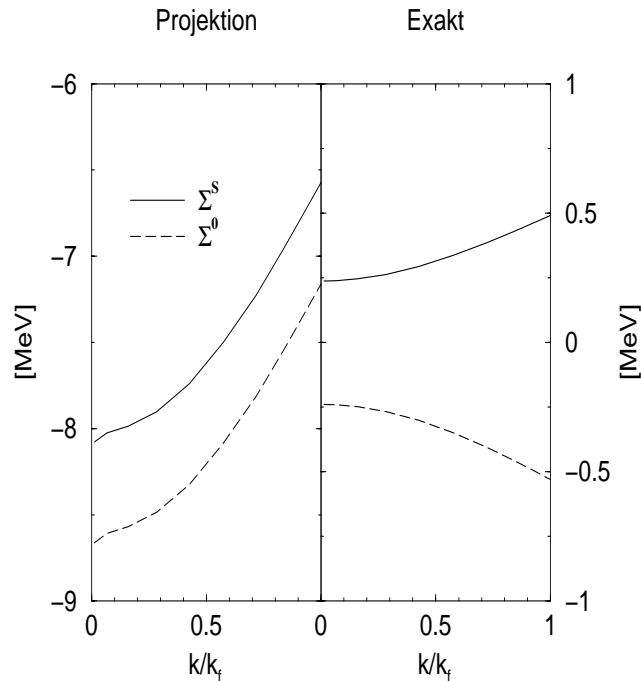


Abbildung 4.2: Selbstenergie η -Meson

Beiträge vom η -Meson zur skalaren und vektoriellen Komponente der Selbstenergie in Kernmaterie. Vgl. Abb.4.1 für weitere Einzelheiten. Man beachte ebenfalls die unterschiedliche Skala für die Energie

Ebenso wie im Falle des π -Mesons ergibt sich die offensichtliche Diskrepanz zwischen dem Ergebnis unter Anwendung des Projektions-Formalismus und der direkten Berechnung.

Der wesentliche Unterschied zwischen dem π - und dem η -Meson jedoch besteht in den absoluten Beträgen, die sie letztendlich zu den Komponenten der Selbstenergie beitragen. Diese Unterschiede ergeben sich einfach aufgrund der bereits in

Kap.3.1.2 geführten Diskussion. Zum einen ist das η -Meson, im Gegensatz zum π -Meson, kein isovektorielles, sondern ein isoskalares Meson, so daß sich die Fock-Beiträge zu den Komponenten der Selbstenergie aufgrund der unterschiedlichen Isospin-Struktur um einen Faktor drei unterscheiden.

Wesentlich bedeutsamer ist jedoch der Unterschied der Kopplungskonstanten und der Massen, wie sie sich aus Tab.3.2 ergeben. So hat das η -Meson gegenüber dem π -Meson eine um den Faktor drei kleinere Kopplungskonstante, andererseits eine viermal so große Masse. Betrachtet man nun einfach das Verhältnis $(g_\alpha/m_\alpha)_{\alpha=\pi,\eta}^2$, so ist dieses für das π -Meson ungefähr vierzigmal größer als für das η -Meson, was einfach die Wichtigkeit des π -Mesons gegenüber dem η -Meson unterstreicht. Vergleicht man dies nun mit aus den in Abb.4.1 und 4.2 ersichtlichen Werten, so ist der Beitrag des π -Mesons zu den Komponenten der Selbstenergie nicht ganz in dieser Größenordnung Vielfaches der Beiträge des η -Mesons, aber immer noch ein merkliches Vielfaches dieser Beiträge. Der Grund hierfür liegt darin, daß die zu den Komponenten der Selbstenergie beitragenden Fock-Terme nicht direkt mit dem Verhältnisquadrat aus Kopplungskonstante und Masse des Mesons skalieren. Nichtsdestotrotz stellt dieses Verhältnis einen guten Parameter dar, um vorab die Wichtigkeit der einzelnen Mesonen zu klassifizieren.

Als letztes Beispiel sei das ρ -Meson angeführt. Der ρ -Meson Austausch im Bonn B Potential enthält neben der Vektor-Kopplung auch eine starke Tensor-Kopplung (Pauli-Kopplung) für die ρ -N Wechselwirkung. Ebenso wie die pseudovektorielle Kopplung kann diese nicht vollständig durch den Operator-Ansatz dargestellt werden. Ferner fehlt für diese Kopplung auch eine einfache Äquivalenzbeziehung wie im Falle der pseudoskalaren- und pseudovektoriellen Kopplung, so daß eine direkte Gegenüberstellung von verschiedenen Kopplungen nicht möglich ist, die vielleicht die Diskussion etwas erleichtern könnte.

Die Ergebnisse, die der ρ -Meson Austausch zu den Komponenten der Selbstenergie liefert, sind in der Abb.4.3 dargestellt. Die Beiträge, die sich aus der Anwendung des Projektions-Formalismus ergeben, sind auf der linken Seite angegeben, und die aus der direkten Berechnung auf der rechten Seite.

Auch im Fall des ρ -Mesons liefert der Operator-Ansatz ein anderes Ergebnis als die direkte Berechnung. Während die Abhängigkeit vom Einteilchenimpuls k noch relativ ähnlich ist, so sind doch die absoluten Beträge bemerkenswert unterschiedlich, in der Art, daß der Operator-Ansatz in etwa um 40 MeV größere Beiträge

liefert als die direkte Berechnung.

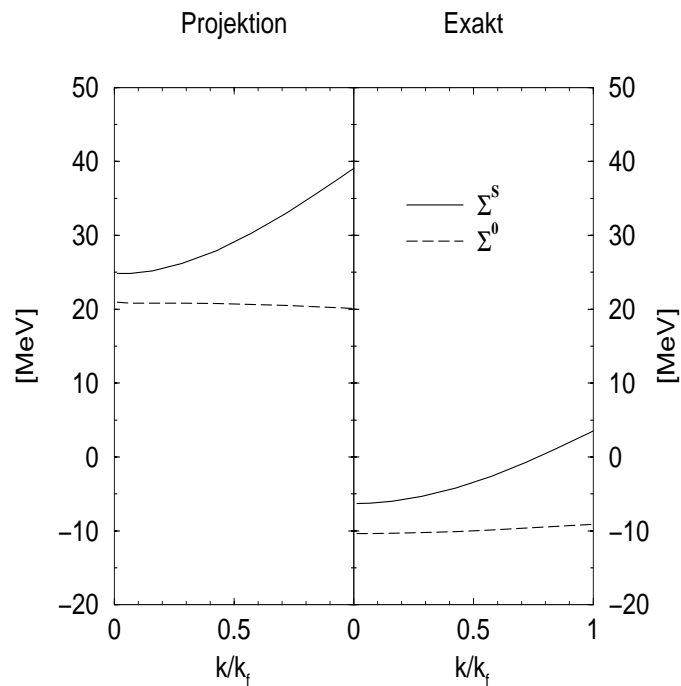


Abbildung 4.3: Selbstenergie ρ -Meson

Beiträge vom ρ -Meson zur skalaren und vektoriellen Komponente der Selbstenergie in Kernmaterie. Vgl. Abb.4.1 für weitere Einzelheiten.

Aus den drei vorgenannten Beispielen ergibt sich nun einfach, daß der in Gl.(4.54) angegebene Operator-Ansatz zur Bestimmung der Komponenten der Selbstenergie, zumindestens für die reine Nukleon-Nukleon Wechselwirkung, ungenügend ist. Die in den Bonn Potentials verwendeten restlichen Mesonen, daß σ -, ω - und δ -Meson, werden zwar richtig beschrieben, hier stimmt der Ansatz mit den Kopplungen der Mesonen ja exakt überein, aber insbesondere die Dominanz des π -Mesons führt zu Komponenten der Selbstenergie, die mit dem exakten Ergebnis in keinsten Weise im Einklang stehen.

Aus diesem Grund ist es ratsam, die effektive Wechselwirkung G in die beiden Anteile der reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung V und den Restwechselwirkungsterm ΔG aufzuspalten Gl.(4.62), um die sich aus dem Projektionsformalismus ergebenden Unstimmigkeiten bestmöglichst zu minimieren. Zumin-

destens die, die sich allein aufgrund der Anwendung des Operator-Ansatzes auf die reine Nukleon-Nukleon Wechselwirkung ergeben.

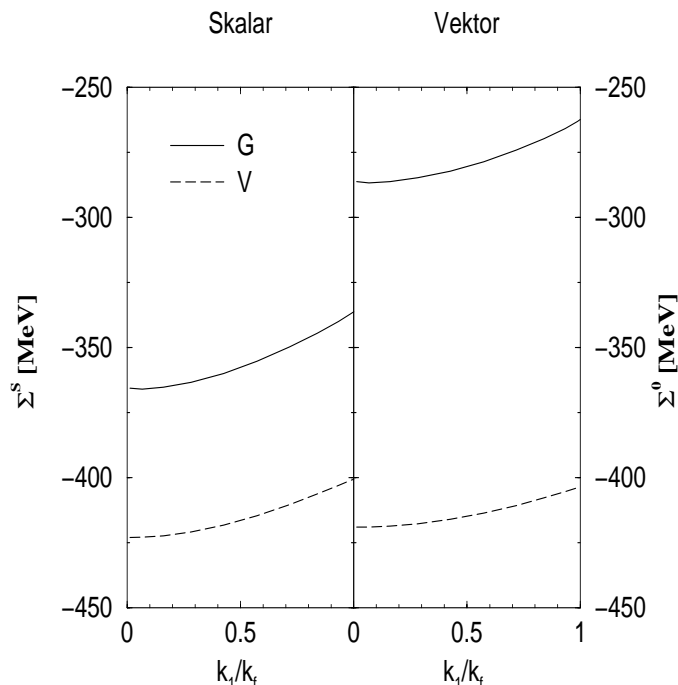


Abbildung 4.4: Vergleich Selbstenergie von V und G

Skalare (Σ^S , linke Seite) und vektorielle (Σ^0 , rechte Seite) Komponente der Nukleon Selbstenergie in Kernmaterie bei $k_f = 1.36 \text{ fm}^{-1}$ in Abhängigkeit vom Einteilchenimpuls in Einheiten k_f . Beiträge der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung V (Bonn B, gestrichelte Linie) im Vergleich zur G -Matrix (durchgezogene Linie)

Für die reine Nukleon-Nukleon Wechselwirkung werden also die Komponenten der Selbstenergie direkt berechnet, da für sie die explizite Operatorstruktur trivialerweise bekannt ist. Für den Restwechselwirkungsterm ΔG , der gerade die durch Korrelationen verursachten Effekte enthält, die über die reine Hartree-Fock Näherung hinausgehen, wird hingegen der Operator-Ansatz zur Analyse und anschließenden Bestimmung der Komponenten der Selbstenergie benutzt. Die Selbstenergie für die G -Matrix ergibt sich dann einfach, indem man zu letzteren noch die exakten Beiträge, die vom Potential V kommen, hinzuaddiert. Es verbleibt allerdings noch zu prüfen, ob hierdurch tatsächlich ein annehmbares Ergebnis erzielt

wird.

Um das hier verwendete Vorgehen besser zu veranschaulichen und die Diskussion zu erleichtern, sind in Abb.4.4 die Komponenten der Selbstenergie, in Abhängigkeit des Einteilchenimpulses k und bei fest gewählter Dichte $k_f = 1.36 \text{ fm}^{-1}$, dargestellt.

Im linken Teil der Abbildung ist der skalare Anteil (Σ^S), im rechten Teil der vektorielle Anteil (Σ^0) der Selbstenergie in Abhängigkeit vom Einteilchenimpuls k dargestellt. Die gestrichelten Linien geben die Beiträge an, die sich direkt vom Potential ergeben, wobei hier wieder das Bonn B Potential gewählt wurde. Die durchgezogenen Linien stellen die Anteile der Selbstenergie dar, die sich für die G -Matrix ergeben.

Die Beiträge zur Selbstenergie, wie sie sich für das Potential ergeben, setzen sich aus den zuvor schon besprochenen Beiträgen des π -, η - und ρ -Meson zusammen, die ungefähr in der Größenordnung von $+20 \text{ MeV}$ für die skalare, und -20 MeV für die vektorielle Selbstenergie liegen. Hinzukommen die Beiträge des σ -, ω - und δ - Mesons.

Der Beitrag des δ -Mesons zu den Komponenten der Selbstenergie ist aufgrund der kleinen Kopplungskonstante und der großen Masse relativ klein. Er läßt sich beispielsweise aus den Werten für das η -Meson für die pseudoskalare Kopplung aus Abb.4.2 abschätzen, analog zum oben durchgeführten Vergleich zwischen dem π - und η -Meson. Da das δ -Meson ein Isovektor-Meson ist, liefert es im System der Kernmaterie nur Fock-Beiträge zu der Selbstenergie, die um den Faktor drei größer sind, als sie für ein vergleichbares isoskalares Meson wären, und, bis auf das Vorzeichen für die skalare Selbstenergie, mit den Fock-Beiträgen eines pseudoskalaren Mesons übereinstimmen. Setzt man noch das Verhältnis $(g_\alpha/m_\alpha)_{\alpha=\delta,\eta}^2$ für das δ - und η -Meson in Relation, so ergibt sich vom Betrag her ein Beitrag des δ -Mesons von ungefähr 6 MeV zu den Komponenten der Selbstenergie, d.h. die verschiedenen Mesonen des betrachteten Bonn Potentials liefern in der Summe einen Beitrag zu den Komponenten der Selbstenergie, der in etwa 30 MeV beträgt, ohne das σ - und ω -Meson bisher berücksichtigt zu haben.

Vergleichen wir dies nun mit den Werten für das Potential V in Abb.4.4, die in der Größenordnung von -420 MeV bis -400 MeV liegen, so wird an dieser Stelle noch einmal besonders deutlich, daß das σ - und ω - Meson bekanntermaßen nicht nur die größten, sondern die dominierenden Beiträge zu den Komponenten der Selbst-

energie liefern [16], was einfach auf die Hartree-Beiträge Gl.(4.21) zurückzuführen ist. Interessant ist auch zu sehen, daß die skalare und vektorielle Selbstenergie relativ ähnlich sind, was dazu führt, daß das Einteilchenpotential zu positiven Werten tendiert und man damit keine Bindungsenergie für das System Kernmaterie erhält, wenn keine Korrelationen berücksichtigt werden, die über die reine Hartree-Fock Näherung hinausgehen, unter Benutzung von realistischen Nukleon-Nukleon Wechselwirkungen.

Durch Berücksichtigung der in ΔG enthaltenen Korrelationseffekte erhält man die in Abb.4.4 durchgezogenen Linien für die G -Matrix. Zuerst sind zwei Punkte augenfällig. Zum einen reduzieren die in ΔG berücksichtigten Korrelationseffekte vom Betrag her sowohl den skalaren als auch den vektoriellen Anteil der Selbstenergie der reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung, wobei eine stärkere Reduktion des vektoriellen Anteils erfolgt als für den skalaren Anteil. Dies kann in dem Sinne verstanden werden, vgl. auch Diskussion Kap.2.5, daß die kurzreichweitigen Korrelationen zu einer Verringerung der Relativwellenfunktion bei kurzen Abständen der beiden wechselwirkenden Nukleonen führt. Durch diese Reduktion der Wellenfunktion wird aber auch der Effekt des σ - als auch des ω -Austausches verringert. Berücksichtigen wir nun, daß das ω -Meson aufgrund seiner größeren Masse ($m_\omega = 783$ MeV) eine kürzere Reichweite hat als das σ -Meson ($m_\sigma = 550$ MeV), so ist die Reduktion der kurzreichweitigen Anteile der Relativwellenfunktion für das ω -Meson bedeutender als für das σ -Meson. Andererseits liefert das ω -Meson für die vektorielle Selbstenergie Σ^0 den dominierenden Beitrag, das σ -Meson entsprechend für die skalare Selbstenergie Σ^S . Dies erklärt somit, daß die vektorielle Komponente der Selbstenergie Σ^0 durch den Restwechselwirkungsterm ΔG stärker reduziert wird als es für die skalare Komponente Σ^S der Fall ist. Diese unterschiedliche Ausprägung der Korrelationseffekte auf die Komponenten der Selbstenergie der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung führt somit zu einem attraktiven Einteilchenpotential und, infolgedessen, zu Bindungsenergie in Kernmaterie.

Der zweite Punkt ist die Impulsabhängigkeit der Komponenten der Selbstenergie. Wie sich aus der Abb.4.4 ergibt, führt der Restwechselwirkungsterm ΔG zu einer nahezu konstanten Verschiebung, so daß die Impulsabhängigkeit der Komponenten der Selbstenergie vollständig durch die freie Nukleon-Nukleon Wechselwirkung gegeben ist. Dieses Ergebnis für die Impulsabhängigkeit kann nun auch mitbenutzt werden, um die Sinnhaftigkeit des Operatoransatzes allein für den Restwechselwirkungsterm ΔG zu begründen.

Wie oben ausführlich diskutiert wurde, liefert insbesondere der π -Austausch für die Helizitätsmatrixelemente der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung V , und damit der effektiven Wechselwirkung G , die dominierenden Beiträge. Dies ergibt sich schon aus der Betrachtung des Verhältnisses $(g_\alpha/m_\alpha)^2$, daß für $\alpha = \pi$ in etwa um den Faktor 20 bis 25 größer ist als für das σ - und ω -Meson. Diese Dominanz des π -Austausches führt dann letztlich auf die in Abb.4.1 aufgezeigte Diskrepanz für die Komponenten der Selbstenergie, unter Anwendung des Operatoransatzes, und insbesondere zu einer starken Impulsabhängigkeit. Eben eine solche starke Impulsabhängigkeit wurde beispielsweise in [24] beobachtet, die mit der vorangegangenen Erläuterung aber nun mehr als verständlich ist.

Andererseits wurde aber noch einmal gezeigt, daß unter Benutzung der „richtigen“ Operator-Struktur der einzelnen Mesonen zur Berechnung der Komponenten der Selbstenergie, allein für die reine Nukleon-Nukleon Wechselwirkung, die Beiträge vom σ - und ω -Meson dominieren.

Analysieren wir nun nur den Restwechselwirkungsanteil ΔG mit Hilfe des Operator-Ansatzes, so wird gerade dieser vom π -Austausch dominierende Beitrag vermieden. Ferner ergibt sich aus dem oben durchgeführten Vergleich zwischen dem Operator-Ansatz und der exakten Berechnung der Komponenten der Selbstenergie für die verschiedenen Kopplungen, daß zumindestens eine starke Impulsabhängigkeit ein Indiz ist, daß der Operator-Ansatz nicht ausreichend die eigentliche, und letztlich unbekannte Operator-Struktur möglichst gut beschreibt. Aber eine solche starke Impulsabhängigkeit kann in Abb.4.4 nicht festgestellt werden, so daß dieses Vorgehen, die G -Matrix in

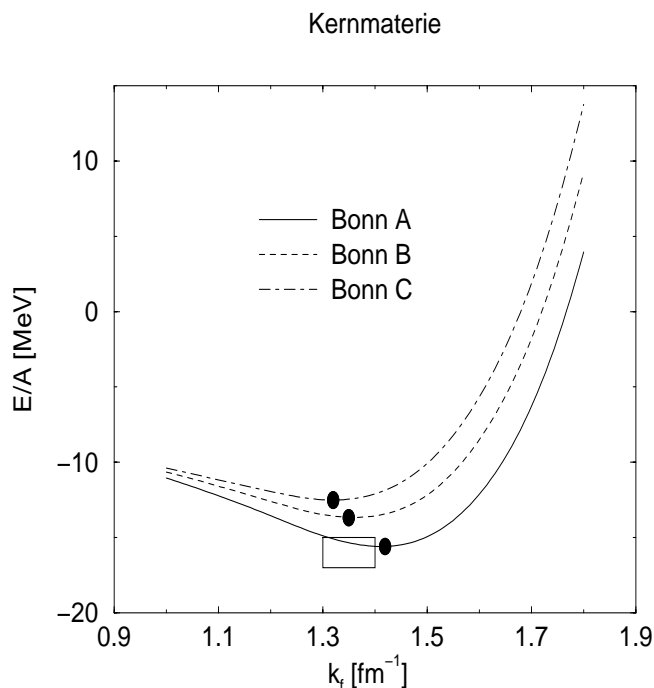
$$G = V + \Delta G \tag{4.64}$$

aufzuspalten, und den Operator-Ansatz nur für den Restwechselwirkungsanteil ΔG zu verwenden, als gerechtfertigt erscheint.

4.4.2 Bindungsenergie in Kernmaterie

Nach der ausführlichen Diskussion über die Anwendung des Projektions-Verfahrens bzw. Verwendung eines Operator-Ansatzes für den Restwechselwirkungsanteil ΔG können nun die Gleichungen des Dirac-Brueckner-Hartree-Fock Verfahrens selbstkonsistent gelöst werden.

Als Ergebnis ergeben sich die Grundzustandseigenschaften wie sie in der Abb.4.5 und in den folgenden Tabellen 4.1, 4.2 und 4.3 dargestellt sind.



Bindungsenergie pro Nukleon in Abhängigkeit von dem Fermi-Impuls k_f für die Potentiale Bonn A, B, C. Der offene Kasten stellt den Sättigungsbereich dar. Die Punkte auf den Linien geben den Sättigungspunkt für die Potentiale wieder.

In Abb.4.5 ist die Bindungsenergie pro Nukleon in Abhängigkeit vom Fermi-Impuls k_f für die verschiedenen Potentiale Bonn A, B und C dargestellt. Der Punkt auf den Kurven gibt jeweils den Sättigungspunkt für die Zustandsgleichungen an. Durch den eingezeichneten Kasten in der Abbildung ist der Sättigungsbereich für Kernmaterie dargestellt.

Die in der Abb.4.5 eingezeichneten Kurven ergeben sich aus den in den Tab.4.1, 4.2 und 4.3 angegebenen Werten. In diesen Tabellen ist die effektive Masse $M^* \equiv M^*(k = k_f)$ an der Fermi-Kante angegeben, sowie das Verhältnis zwischen der effektiven Masse und der Masse des Nukleons.

Neben der Bindungsenergie pro Nukleon E/A sind auch noch die verschiedenen

Beiträge angegeben, aus der sich die Bindungsenergie zusammensetzt. Dies ist zum einen die kinetische Energie, sowie die Beiträge, die zum einen von dem Potential V , zum anderen von dem Restwechselwirkungsanteil ΔG stammen, vgl. Gl(4.13).

Bonn A						
k_f [fm ⁻¹]	M^* [MeV]	M^*/M	E/A [MeV]	$E(\text{kin})$ [MeV]	$E(V)$ [MeV]	$E(\Delta G)$ [MeV]
1.00	766.123	0.816	-11.05	11.75	-5.45	-17.35
1.10	723.369	0.770	-12.23	13.68	-5.18	-20.73
1.20	675.877	0.720	-13.55	15.27	-3.50	-25.32
1.30	624.957	0.666	-14.88	16.12	0.58	-31.59
1.36	592.843	0.631	-15.42	15.99	4.82	-36.24
1.40	571.106	0.608	-15.58	15.55	8.64	-39.77
1.50	515.882	0.549	-14.96	12.60	22.91	-50.46
1.60	460.332	0.490	-12.13	5.90	46.52	-64.55
1.70	406.423	0.433	-6.31	-6.02	83.04	-83.33
1.80	356.702	0.380	3.96	23.98	135.24	-107.30

Tabelle 4.1: Ergebnisse für Bonn A

Ergebnistabelle für die effektive Masse $M^* \equiv M^*(k_f)$ an der Fermi-Kante und deren Verhältnis mit der Nukleonmasse M , die Bindungsenergie pro Nukleon und deren Aufspaltung in die kinetische ($E(\text{kin})$), Hartree-Fock ($E(V)$) und Restwechselwirkungs- ($E(\Delta G)$) Energie.

Anhand der in den Tabellen dargestellten Werte läßt sich noch einmal verdeutlichen, was es bedeutet, Korrelationen über die reine Hartree-Fock Näherung hinaus unter Verwendung von realistischen Nukleon-Nukleon Wechselwirkungen zu berücksichtigen. Nehmen wir hierzu beispielsweise die in Tab.4.1 angegebenen Werte, wie sie sich unter Verwendung des Potentials Bonn A ergeben. Bei der Sättigungsdichte $k_f = 1.36 \text{ fm}^{-1}$ ergibt sich ein Wert für die Energie pro Nukleon von ungefähr +20 MeV, ohne Berücksichtigung von Korrelationen, d.h. man erhält kein gebundenes System. Dies ist, wie in Kap.2.5 erläutert, auf den stark repulsiven Anteil der reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung zurückzuführen. Werden Kor-

relationen über die reine Hartree-Fock Näherung hinaus berücksichtigt, so ergibt sich ein zusätzlicher Beitrag zur Energie pro Nukleon von ca. -36 MeV und erst damit erhält man den angegebenen Betrag von rund -16 MeV Bindungsenergie.

Bonn B						
k_f [fm $^{-1}$]	M^* [MeV]	M^*/M	E/A [MeV]	$E(\text{kin})$ [MeV]	$E(V)$ [MeV]	$E(\Delta G)$ [MeV]
1.00	769.667	0.820	-10.65	11.78	-2.58	-19.85
1.10	726.597	0.774	-11.59	13.73	-1.43	-23.89
1.20	680.284	0.725	-12.59	15.38	1.21	-29.18
1.30	629.886	0.671	-13.48	16.33	6.33	-36.13
1.36	598.519	0.638	-13.67	16.32	11.14	-41.13
1.40	576.876	0.614	-13.57	15.95	15.36	-44.87
1.50	522.223	0.556	-12.18	13.33	30.43	-55.95
1.60	467.491	0.498	-8.51	7.24	54.39	-70.15
1.70	414.074	0.441	-1.82	-3.78	90.68	-88.72
1.80	364.722	0.388	9.26	-20.47	141.87	-112.14

Tabelle 4.2: Ergebnisse für Bonn B

Siehe Anmerkungen Tab.4.1

Bonn C						
k_f [fm ⁻¹]	M^* [MeV]	M^*/M	E/A [MeV]	$E(\text{kin})$ [MeV]	$E(V)$ [MeV]	$E(\Delta G)$ [MeV]
1.00	770.943	0.821	-10.38	11.79	1.29	-23.45
1.10	728.642	0.776	-11.17	13.75	3.62	-28.55
1.20	682.118	0.727	-11.95	15.43	7.64	-35.00
1.30	632.353	0.674	-12.49	16.43	14.24	-43.15
1.36	600.918	0.640	-12.41	16.46	20.00	-48.87
1.40	579.820	0.618	-12.10	16.15	24.81	-53.07
1.50	525.683	0.560	-10.09	13.72	41.35	-65.16
1.60	471.585	0.502	-5.67	7.98	66.46	-80.11
1.70	419.080	0.446	1.86	-2.37	103.23	-99.00
1.80	370.218	0.394	13.77	-18.17	154.21	-122.26

Tabelle 4.3: Ergebnisse für Bonn C

Siehe Anmerkungen Tab.4.1

Als Beispiel für die Impulsabhängigkeit ist in Abb.4.6 die effektive Masse $M^*(k)$ in Abhängigkeit von der Dichte dargestellt, wie sie sich unter Verwendung des Projektions-Formalismuses ergibt. Die schraffierte Fläche gibt den Impulsbereich von $M^*(k)$ bei jeder Dichte mit dem Fermi-Impuls k_f wieder. Die Werte gehören zu den Rechnungen unter Verwendung des Bonn B Potentials.

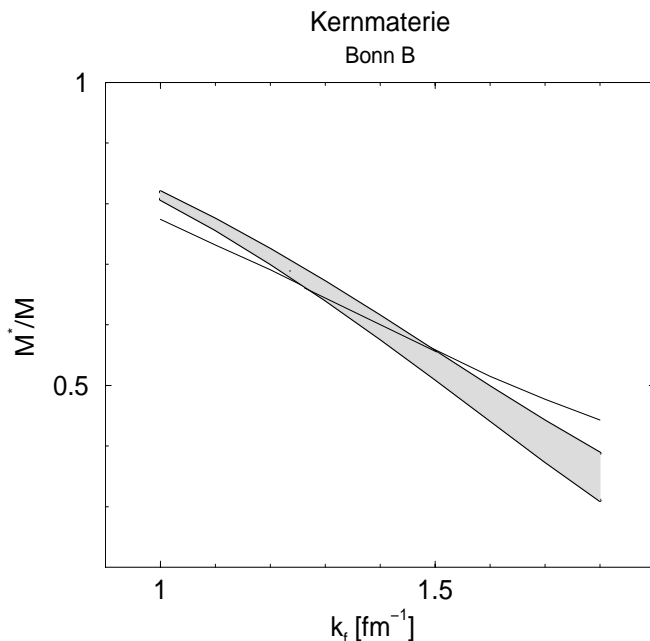


Abbildung 4.6: Vergleich M^* in Kernmaterie

Die schraffierte Fläche gibt den Impulsbereich zu jeder Dichte für $M^*(k)$ an. Zum Vergleich ist M^* aus der Analyse der Einteilchenenergie $\varepsilon(k)$ als durchgezogene Linie dargestellt.

Zum Vergleich ist ebenfalls die effektive Masse M^* als durchgezogene Linie eingezeichnet, wie sie sich aus der Analyse der Einteilchenenergie $\varepsilon(k)$ ergibt, vgl.[18]. Diese Analyse ist in der Verwendung wesentlich einfacher als die Anwendung des Projektions-Formalismuses, und wie man sieht, ergeben sich ähnliche Ergebnisse für die effektive Masse, auch wenn sich natürlich aus dieser Analyse keine Impulsabhängigkeit der effektiven Masse ableiten läßt.

Damit ergibt sich für die effektive Masse M^* im System der Kernmaterie aus den beiden Verfahren kein signifikanter Unterschied. Die sich aus dem Projektions-

Formalismus ergebende Impulsabhängigkeit ist relativ gering und scheint damit tatsächlich für die Bestimmung der effektiven Masse keine besondere Rolle zu spielen. Vergleicht man die Bindungsenergien, wie sie sich zum einen aus dem Projektions-Verfahren, zum anderen aus der Analyse der Einteilchenenergie $\varepsilon(k)$ [49] ergeben, so sind diese bis auf vernachlässigbar kleine Unterschiede identisch und werden aus diesem Grund an dieser Stelle nicht extra gegenübergestellt.

4.4.3 Neutronenmaterie

Ergibt sich für das System der Kernmaterie kein relevanter Unterschied zwischen der Projektions-Methode und der Analyse der Einteilchenenergie $\varepsilon(k)$ zur Bestimmung der effektiven Masse M^* , abgesehen davon, daß man im letzteren Fall keine Aussagen zur Impulsabhängigkeit der effektiven Masse machen kann, und anderer Grundzustandseigenschaften der Kernmaterie, so ergibt sich im Fall isospin-asymmetrische Materie ein anderes Bild.

Wenden wir uns dem einfachsten Fall isospin-asymmetrischer Materie zu, der Neutronenmaterie. Im Fall der Neutronenmaterie kann das Projektionsverfahren genauso wie im diskutierten Fall der Kernmaterie durchgeführt werden. Insbesondere betrifft dies natürlich die Gültigkeit des Operator-Ansatzes für den Restwechselwirkungsteil ΔG .

In Abb.4.7 ist wieder die effektive Masse $M^*(k)$ in Abhängigkeit von der Dichte dargestellt, wie sie sich unter Verwendung des Projektions-Formalismuses ergibt. Ebenso stellt die schraffierte Fläche den Impulsbereich von $M^*(k)$ bei jeder Dichte mit dem Fermi-Impuls k_f dar. Die sich aus der Analyse der Einteilchenenergie $\varepsilon(k)$ ergebende effektive Masse ist wieder als durchgezogene Linie dargestellt.

Im Gegensatz zur Kernmaterie ergibt sich nun, daß die sich aus der Analyse der Einteilchenenergie $\varepsilon(k)$ ergebende effektive Masse M^* über den gesamten Dichtebereich eine merklich größere effektive Masse, und damit eine kleinere skalare Komponente der Selbstenergie Σ^S liefert, als es für das Projektions-Verfahren der Fall ist. Dies steht im Einklang mit einer Untersuchung von Ulrych et.al. [21], in der eine Parametrisierung der effektiven Wechselwirkung G von Boersma und Malfliet [23] benutzt wurde, um gerade verschiedene Methoden zur Bestimmung der effektiven Masse M^* in asymmetrischer Materie zu vergleichen.

Es läßt sich somit an dieser Stelle festhalten, daß die Analyse der Einteilchenenergie

$\varepsilon(k)$ im Allgemeinen nicht geeignet ist, um die Dirac-Struktur der Selbstenergie in asymmetrische Materie zu bestimmen; auch wenn dies im Fall der Kernmaterie durchaus möglich erscheint.

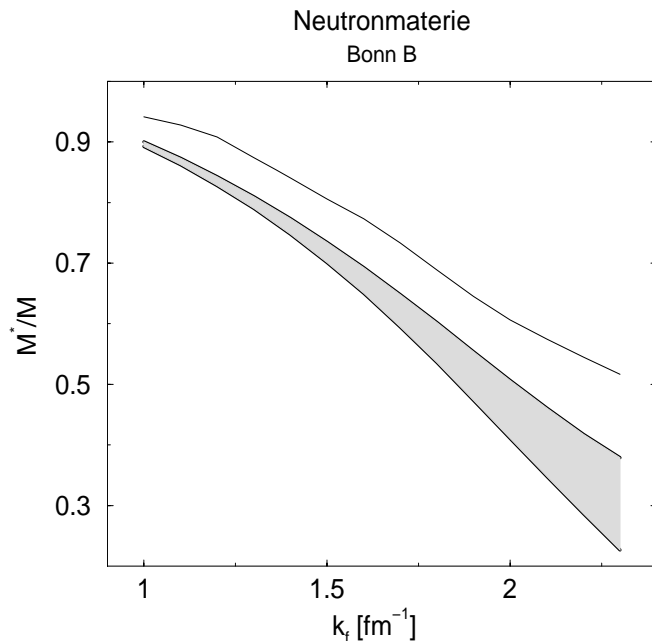


Abbildung 4.7: Vergleich M^* in Neutronenmaterie

Die schraffierte Fläche gibt den Impulsbereich zu jeder Dichte für $M^*(k)$ an. Zum Vergleich ist M^* aus der Analyse der Einteilchenenergie $\varepsilon(k)$ als durchgezogene Linie dargestellt.

Interessant ist zu sehen, wie sich dieser Unterschied zwischen den effektiven Massen aus Abb.4.7 auf die Bindungsenergie pro Nukleon auswirkt. Diese sind in der Abb.4.8 dargestellt. Obwohl sich die effektiven Massen M^* der beiden verschiedenen Methoden merklich unterscheiden, so ergibt sich jedoch für die Bindungsenergie bei kleinen Dichten kaum ein Unterschied. Erst zu größeren Dichten hin wird deutlich, daß die Bindungsenergie im Fall der Analyse der Einteilchenenergie $\varepsilon(k)$ die Bindungsenergie unter Verwendung der Projektionsmethode unterschätzt. Bei Dichten um 0.4 fm^{-3} , was gerade der 2.5-fachen Sättigungsdichte entspricht, beträgt der Unterschied in etwa 10 Prozent.

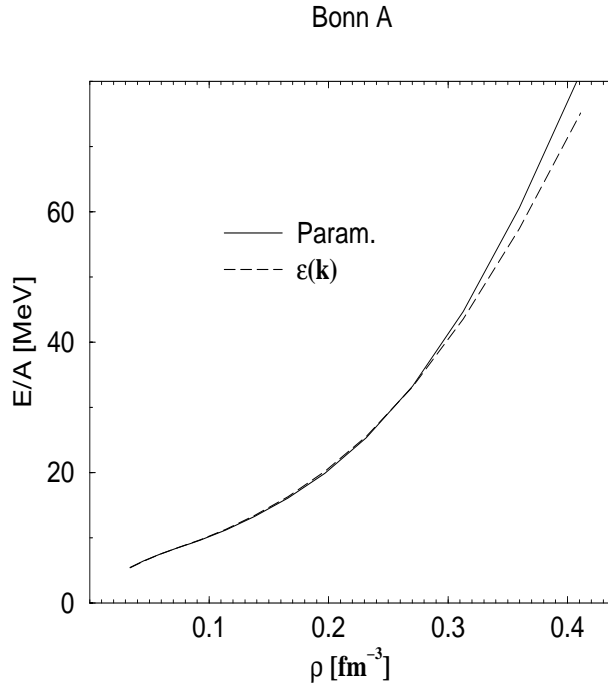


Abbildung 4.8: Energie pro Nukleon in Neutronenmaterie

Energie pro Nukleon in Abhängigkeit von der Dichte unter Verwendung des Bonn A Potentials für Projektions-Methode (durchgezogene Linie) und Analyse der Einteilchenenergie $\epsilon(k)$ (gestrichelte Linie)

4.4.4 Parametrisierung und Anwendung

Wie wir bereits in Abb.4.4 festgestellt haben, bewirken die durch die Restwechselwirkung ΔG berücksichtigten Korrelationen im wesentlichen eine konstante Verschiebung der Komponenten der Selbstenergie, bezogen auf die reine Nukleon-Nukleon Wechselwirkung V . D.h. unter anderem auch, daß die Impulsabhängigkeit der Selbstenergie hauptsächlich durch die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung gegeben ist.

Diese einfache Erkenntnis wird im Folgenden anhand der sich aus der Projektions-Methode ergebenden Operator-Amplituden Gl.(4.55), aus denen letztlich die zur Restwechselwirkung ΔG gehörenden Komponenten der Selbstenergie bestimmt wurden, noch einmal veranschaulicht werden. Weiterhin ergibt sich unmittelbar daraus in einfachster Art und Weise eine Möglichkeit zur Parametrisierung des

Restwechselwirkungsanteils ΔG .

Hierzu betrachten wir die auf der linken Seite der Abb.4.9 dargestellten Operatoramplituden. Diese ergeben sich aus der Analyse der Restwechselwirkung ΔG unter Verwendung des Operator-Ansatzes. Als Beispiel wurde hier eine Rechnung bei Sättigungsdichte $k_f = 1.36 \text{ fm}^{-1}$ unter Verwendung des Bonn B Potentials gewählt. Die Impulsabhängigkeit der Operatoramplituden bezieht sich auf dem im Schwerpunktsystem definierten Relativimpuls Gl.(4.33).

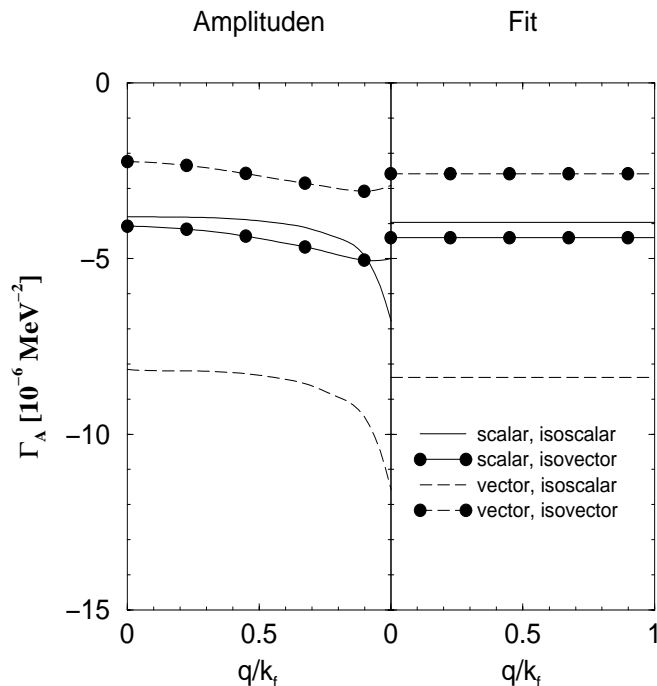


Abbildung 4.9: Operator Amplituden

Auf der linken Seite sind die antisymmetrischen Operatoramplituden Γ_A^i aus der Analyse von ΔG in Abhängigkeit vom Relativimpuls im Schwerpunktsystem in Einheiten des Fermi-Impulses k_f dargestellt bei Sättigungsdichte $k_f = 1.36 \text{ fm}^{-1}$. Auf der rechten Seite die für die Parametrisierung dazugehörigen Konstanten.

Dargestellt sind nur die skalaren und vektoriellen Operatoramplituden, wie sie letztlich in die Selbstenergie eingehen. An dieser Stelle werden ferner die verschiedenen Isospin-Komponenten unterschieden.

Aus der Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung ergeben sich Operator-Amplituden

sowohl für den Isospin $T = 0$ als auch für $T = 1$, die im Folgenden durch $\Gamma_A^{i,T=1,2}$ bezeichnet werden mögen. Mit diesen Amplituden werden nun gemäß

$$\begin{aligned}\Gamma_A^{i,\text{is}} &= \frac{1}{4}(3\Gamma_A^{i,T=1} + \Gamma_A^{i,T=0}) \\ \Gamma_A^{i,\text{iv}} &= \frac{1}{4}(\Gamma_A^{i,T=1} - \Gamma_A^{i,T=0})\end{aligned}\quad (4.65)$$

die isoskalare (is) und isovektorielle (iv) Komponente der Operatoramplituden definiert, wobei der Index $i = S, V$ für die skalare bzw. vektorielle Operator-Amplitude steht. Wir unterscheiden damit die skalare isoskalare bzw. isovektorielle und die vektorielle isoskalare bzw. isovektorielle Operatoramplitude. Diese können im Mesonen-Austausch Bild mit den Beiträgen von dem σ - bzw. δ -Meson und dem ω - bzw. ρ -Meson veranschaulicht werden.

Anhand der Abb.4.4 wurde bereits festgestellt, daß die Restwechselwirkung ΔG zu einer konstanten Verschiebung der Komponenten der Selbstenergie der reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung führt, die nahezu unabhängig vom Impuls des Nukleons ist. Diese konstante Verschiebung, mit der einhergehenden geringen Impulsabhängigkeit, spiegelt sich auch bei den antisymmetrischen Operator-Amplituden Γ_A^i wieder. Eine deutlichere Abweichung von einem konstanten Wert ergibt sich nur, wenn $q \rightarrow k_f$. Dies ist aber verständlich, da sich an dieser Stelle der Nenner in der Bethe-Goldstone Gleichung dem Pol nähert, wie bereits am Beispiel der Einteilchenenergie in Kap.2.6 diskutiert wurde. Sehen wir von dieser Polstruktur ab, so können die Operator-Amplituden einfach durch Konstanten ersetzt werden.

Die Ersetzung der Operator-Amplituden durch Konstanten legt es nahe, die Restwechselwirkung ΔG durch den Austausch von effektiven Mesonen mit unendlich großer Masse zu beschreiben, d.h. die in der Restwechselwirkung ΔG enthaltenen Korrelationen werden durch eine effektive Wechselwirkung beschrieben, die von der Reichweite null ist. Auf diese Art erhält man in einfachster Weise eine Parametrisierung der Restwechselwirkung in der Form

$$\Delta G = [-g_{s,s}11 + g_{v,s}\gamma^\mu\gamma_\mu] + [-g_{s,v}11 + g_{v,v}\gamma^\mu\gamma_\mu]\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} \quad (4.66)$$

wie sich aus Gl.(3.5) im Grenzfall $m \rightarrow \infty$ ergibt. Damit werden die skalare und vektorielle Operator-Amplituden durch vier dichteabhängige Kopplungskonstanten beschrieben, entsprechend der vier Operator-Amplituden. Durch diesen Ansatz Gl.(4.66) für die Parametrisierung wird zum einen der Spin- und Isospin-Struktur

der Operator-Amplituden Rechnung getragen, zum anderen sind die Kopplungskonstanten durch das resultierende 4×4 -Gleichungssystem zwischen dem Ansatz Gl.(4.66) und den vier Operator-Amplituden, nahezu eindeutig bestimmt. Nahezu eindeutig bedeutet hier, daß die Kopplungskonstanten in einem ersten Schritt einfach durch Matrixinversion des resultierenden Gleichungssystems bestimmt werden und anschließend durch einen Least-Square-Fit optimiert werden, um der, wenn auch geringen, Impulsabhängigkeit der Operator-Amplituden bestmöglichst gerecht zu werden.

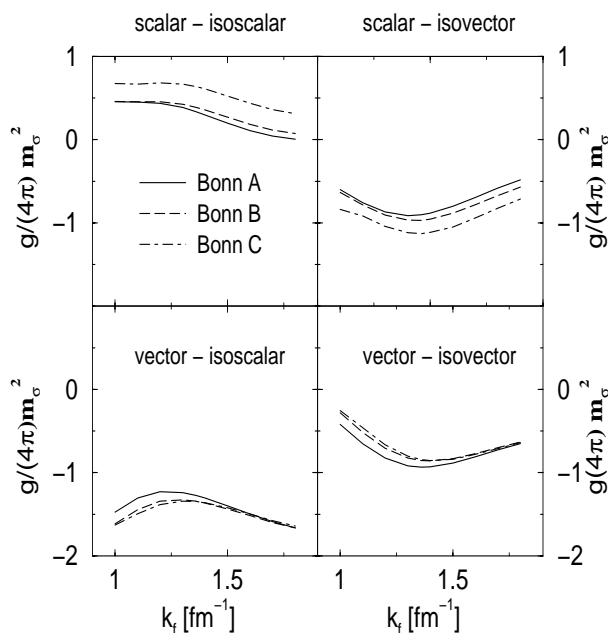


Abbildung 4.10: Kopplungskonstanten Parametrisierung

Kopplungskonstanten für die Parametrisierung der Restwechselwirkung ΔG für die Bonn Potentiale A, B, C, dargestellt in Abhängigkeit des Fermi-Impulses k_f . Die Kopplungskonstanten sind mit dem Quadrat der Masse des σ -Mesons ($m_\sigma = 550$ MeV) multipliziert und durch 4π dividiert um dimensionslose Größen der Ordnung eins zu erhalten.

Als Beispiel sind die sich aus der Parametrisierung ergebenden Konstanten auf der rechten Seite der Abb.4.9 den zu parametrisierenden Operator-Amplituden zum

Vergleich gegenüber gestellt.

Bonn A				
k_f	s-is	s-iv	v-is	v-iv
[fm ⁻¹]	σ'	δ'	ω'	ρ'
1.00	0.4538	-0.5998	-1.4737	-0.4196
1.10	0.4516	-0.7569	-1.3066	-0.6539
1.20	0.4375	-0.8686	-1.2280	-0.8259
1.30	0.3853	-0.9122	-1.2392	-0.9178
1.36	0.3353	-0.9020	-1.2752	-0.9332
1.40	0.2981	-0.8842	-1.3060	-0.9311
1.50	0.1984	-0.8007	-1.4001	-0.8845
1.60	0.1083	-0.6933	-1.4971	-0.8095
1.70	0.0419	-0.5821	-1.5900	-0.7276
1.80	0.0046	-0.4814	-1.6630	-0.6514

Tabelle 4.4: Parameter Pseudo-Mesonen Bonn A

Angegeben sind die Kopplungskonstanten $g/(4\pi)m_\sigma^2$ für die Parametrisierung der Restwechselwirkung ΔG entsprechend Gl.(4.66) in Abhängigkeit vom Fermi-Impuls k_f

In Abb.4.10 sind die Ergebnisse für die Kopplungskonstanten in Abhängigkeit vom Fermi-Impuls k_f dargestellt. Die Beträge der Kopplungskonstanten sind vom Betrag her im Allgemeinen kleiner im Vergleich zur reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung V , liefern jedoch gerade die zu V nicht zu vernachlässigenden Korrekturen. Die Unterschiede der Kopplungskonstanten für die verschiedenen Potentiale Bonn A, B, C sind relativ klein, wobei die absoluten Beträge z.B. für das Bonn C typischerweise etwas größer sind und damit zum Ausdruck bringen, daß das Bonn C etwas größere Korrelationseffekte liefert als die beiden anderen Potentiale. Die Dichteabhängigkeit der Kopplungskonstanten ist nicht besonders stark, andererseits für die Parametrisierung der Restwechselwirkung ΔG nicht vernachlässigbar. Die größten absoluten Beträge ergeben sich für das vektorielle-isoskalare Pseudo-Meson ($g_{v,s}$). Dies bringt den schon oben diskutierten Sachverhalt zum Ausdruck, daß die Korrelationen insbesondere zu einer stärkeren Unterdrückung des ω -Meson

Austausches führen.

Die genauen Parameter der Kopplungskonstanten für die verschiedenen Bonn Potentiale sind in den Tabellen 4.4, 4.5, 4.6 angegeben. Verwendet man diese Parameter und berechnet beispielsweise die Komponenten der Selbstenergie in Kernmaterie, so werden diese im Rahmen der Vernachlässigung der durch die Restwechselwirkung ΔG gegebenen geringen Impulsabhängigkeit relativ genau wiedergegeben. Hingegen reproduziert die Parametrisierung die Bindungsenergie pro Nukleon in Kernmaterie exakt, da sich die gegenüber der reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung zusätzlich gegebene Impulsabhängigkeit gerade herausmittelt.

Bonn B				
k_f	s-is	s-iv	v-is	v-iv
[fm ⁻¹]	σ'	δ'	ω'	ρ'
1.00	0.4580	-0.6344	-1.6132	-0.2799
1.10	0.4547	-0.7862	-1.4435	-0.5189
1.20	0.4567	-0.9052	-1.3444	-0.7064
1.30	0.4247	-0.9673	-1.3262	-0.8231
1.36	0.3877	-0.9688	-1.3431	-0.8542
1.40	0.3559	-0.9544	-1.3647	-0.8590
1.50	0.2685	-0.8842	-1.4353	-0.8337
1.60	0.1833	-0.7809	-1.5170	-0.7717
1.70	0.1165	-0.6729	-1.5985	-0.7009
1.80	0.0747	-0.5704	-1.6650	-0.6308

Tabelle 4.5: Parameter Pseudo-Mesonen Bonn B

Siehe Anmerkungen Tab.4.4

Bonn C				
k_f [fm ⁻¹]	s-is σ'	s-iv δ'	v-is ω'	v-iv ρ'
1.00	0.6746	-0.8369	-1.6288	-0.2542
1.10	0.6679	-0.9177	-1.4951	-0.4619
1.20	0.6824	-1.0411	-1.3840	-0.6648
1.30	0.6668	-1.1189	-1.3424	-0.8018
1.36	0.6364	-1.1277	-1.3477	-0.8437
1.40	0.6089	-1.1156	-1.3621	-0.8538
1.50	0.5245	-1.0480	-1.4208	-0.8386
1.60	0.4353	-0.9392	-1.4978	-0.7801
1.70	0.3615	-0.8243	-1.5761	-0.7107
1.80	0.3100	-0.7141	-1.6411	-0.6407

Tabelle 4.6: Parameter Pseudo-Mesonen Bonn C
Siehe Anmerkungen Tab.4.6

In der Gl.(4.67) sind die entsprechenden Ausdrücke für die skalare (Σ^S) und vektorielle (Σ^0) Komponente der Selbstenergie in der Hartree-Fock Näherung angegeben, wie sie sich für den Meson-Austausch von Mesonen mit unendlich großer Masse ergeben,

$$\begin{aligned}
\Sigma^S &= -\frac{1}{8}\tilde{\rho}_s \sum_{i=is,iv} \{g_{s,i} [4I_{H,i} - I_{F,i}] + g_{v,i}4I_{F,i}\} \\
\Sigma^0 &= -\frac{1}{8}\tilde{\rho}_b \sum_{i=is,iv} \{g_{v,i} [4I_{H,i} + 2I_{F,i}] + g_{s,i}I_{F,i}\}
\end{aligned} \tag{4.67}$$

wobei die Größen $\tilde{\rho}_s$ und $\tilde{\rho}_b$ definiert sind durch

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_s &\equiv \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_f} dq q^2 \frac{M^*}{E^*(q)} \\
\tilde{\rho}_b &\equiv \frac{2}{3\pi^2} k_f^3
\end{aligned} \tag{4.68}$$

und in Kernmaterie gerade mit der dort definierten Baryonen- und skalaren Dichte übereinstimmen. Ferner sind die Isospin-Faktoren für den Hartree- und Fock-Anteil zu berücksichtigen. Diese können der Tab.4.7 entnommen werden.

	Kernmaterie		Neutronenmaterie	
	is	iv	is	iv
H	2	0	1	1
F	1	3	1	1

Tabelle 4.7: Isospin-Parameter

Isospin-Faktoren für den Hartree- (H) und Fock- (F) Beitrag zur Selbstenergie Gl.(4.67) wie sie sich für Kernmaterie und Neutronenmaterie ergeben

Die Parametrisierung der Restwechselwirkung ΔG ist ausreichend, um die sich aus der selbstkonsistenten Dirac-Brueckner-Hartree-Fock Rechnung ergebenden Ergebnisse zu reproduzieren. Wendet man die in Kernmaterie bestimmten, dichteabhängigen Parameter für die Restwechselwirkung ΔG ebenso auf Neutronenmaterie an, unter der Annahme, daß die Parametrisierung nicht von der Isospin-Asymmetrie abhängt, so läßt sich beispielsweise die effektive Masse $M^* = M^*(k_f)$ und der von der Restwechselwirkung ΔG stammende Beitrag zur Energie pro Nukleon in Neutronenmaterie berechnen. Diese beiden Größen sind in Abhängigkeit von der Dichte in der Abb.4.11 als gestrichelte Linien dargestellt, im Vergleich zu den sich aus der Dirac-Brueckner-Hartree-Fock Rechnung für Neutronenmaterie stammenden Werten. Es läßt sich feststellen, daß für kleine Dichten die Parametrisierung die exakten Werte, dargestellt durch die durchgezogenen Linien, sehr gut wiedergibt, mit steigender Dichte die Unterschiede aber etwas größer werden und sich für $k_f > 2.0$ in etwa um 10% unterscheiden.

Dennoch kann man in guter Näherung und unter Berücksichtigung der besonders einfachen Art der Parametrisierung sagen, daß die zugrunde gelegte Annahme, die Unabhängigkeit der Isospin-Asymmetrie der Parametrisierung der Restwechselwirkung ΔG , sehr wohl gerechtfertigt erscheint.

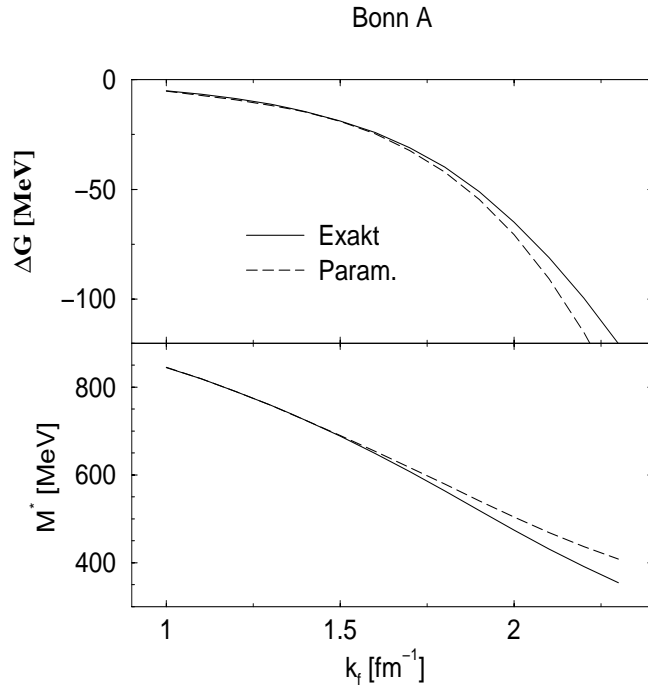


Abbildung 4.11: Ergebnisse Neutronenmaterie aus Parametrisierung

Im oberen Bild ist der Anteil zur Bindungsenergie von der Restwechselwirkung ΔG in Abhängigkeit vom Fermi-Impuls k_f in Neutronenmaterie, im Bild unten die effektive Masse M^* , dargestellt. Die durchgezogene Linie gibt die Ergebnisse aus der DBHF-Rechnung wieder, die gestrichelte Linie die sich aus der Parametrisierung ergebenden Ergebnisse.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Im ersten Teil dieser Arbeit wurde die Gültigkeit der Näherungen untersucht, die üblicherweise bei der Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung benutzt werden. Dies ist zum einen die Verwendung des winkelmittelten Pauli-Operators, zum anderen die Parametrisierung der Einteilchenenergie. Es konnte gezeigt werden, daß die Verwendung des exakten Pauli-Operators generell zu einer größeren Bindungsenergie führt, unabhängig von der verwendeten realistischen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung. Dieser Effekt ist im Bereich der Sättigungsdichte am größten und liegt dort in der Größenordnung von rund 0.5 MeV und nimmt sowohl mit kleinerer als auch zunehmender Dichte ab.

In einem nächsten Schritt wurde neben dem exakten Pauli-Operator auch die Einteilchenenergie in ihrer exakten Form bei der selbstkonsistenten Lösung der Bethe-Goldstone Gleichung berücksichtigt. Die normalerweise verwendete Parametrisierung kann den Verlauf der Einteilchenenergie unterhalb der Fermi-Kante sehr gut beschreiben. Dies trifft jedoch nicht mehr oberhalb der Fermi-Kante zu. Hier macht sich insbesondere die Polstruktur in der Bethe-Goldstone Gleichung bemerkbar, die zu einem attraktiveren Verlauf der Einteilchenenergie führt, der nicht durch die Parametrisierung Berücksichtigung findet. Diese zusätzliche Komponente führt dann auch dazu, daß im Bereich der Sättigungsdichte der Verlauf der Bindungsenergie attraktiver wird, in einer Größenordnung von etwa 0.6-0.7 MeV.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß sich sowohl der Einfluß des exakten Pauli-Operators als auch die Verwendung der exakten Einteilchenenergie auf

die Bindungsenergie pro Nukleon im System der Kernmaterie im Bereich der berechneten Sättigungsdichte am stärksten bemerkbar machen. Diese Änderungen gegenüber den normalerweise verwendeten Näherungen sind nicht in besonderer Weise dramatisch, zeigen aber auf der anderen Seite, daß sie auch nicht in Rechnungen vernachlässigt werden sollten, die über die reine Brueckner-Hartree-Fock Näherung hinausgehen.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wurde die Operator-Struktur der effektiven Wechselwirkung im Medium, der G -Matrix, unter Verwendung der Projektions-Methode bestimmt. Die Abhängigkeit der Projektions-Methode von der Wahl der kovarianten Operatoren wurde an verschiedenen Beispielen des Ein-Meson Austausches diskutiert. Es hat sich gezeigt, daß neben dem π -Meson Austausch, als bekanntes Beispiel, ebenso der ρ -Meson Austausch, aufgrund seiner Tensor-Kopplung, nur ungenügend mittels der Projektions-Methode beschrieben werden kann. Es wurde gezeigt, daß diese Abhängigkeit von der Wahl der verwendeten Operatoren bestmöglichst vermieden werden kann, wenn die G -Matrix aufgespalten wird in den Anteil V der reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung und den Restwechselwirkungsanteil ΔG , der gerade die Korrelationseffekte beschreibt. Da für die reine Nukleon-Nukleon Wechselwirkung V die Dirac-Struktur bekannt ist, reicht es, das Projektions-Verfahren nur auf den Restwechselwirkungsterm ΔG anzuwenden.

Die Nukleon Selbstenergie im System der Kernmaterie zeichnet sich durch zwei Eigenschaften aus. Zum einen ist die Abhängigkeit vom Einteilchenimpuls im wesentlichen bereits durch die Impulsabhängigkeit der reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung V bestimmt. Zum anderen bedingen die in ΔG enthaltenen Korrelationseffekte eine Verringerung der absoluten Beträge der Komponenten der Selbstenergie von V . Diese Verringerung ist für den repulsiven Anteil Σ^0 größer als für den attraktiven Anteil Σ^S der Selbstenergie von V und führt somit auf ein attraktives Einteilchenpotential.

Auf einfachste Weise kann die Dirac-Struktur des Restwechselwirkungsanteils ΔG durch den Austausch von Pseudo-Mesonen mit unendlich großer Masse beschrieben und in Abhängigkeit von der Dichte parametrisiert werden. Unter Verwendung der Parametrisierung läßt sich in Kernmaterie die Selbstenergie des Nukleons wiederum in guter Genauigkeit sowie die Bindungsenergie pro Nukleon exakt reproduzieren. Unter der sehr einfachen Annahme, daß die Parametrisierung der effektiven Wechselwirkung in Kernmaterie unabhängig von der Asymmetrie ist, läßt sich ebenso die effektive Masse als auch die Energie pro Nukleon in Neutro-

nenmaterie beschreiben. Die Übereinstimmung mit den exakten Ergebnissen aus der entsprechenden Dirac-Brueckner-Hartree-Fock Rechnung in Neutronenmaterie ist für kleine Dichten bis in den Bereich der Sättigungsdichte der Kernmaterie ausgezeichnet. Für größere Dichten ergeben sich Abweichungen, die bis zu rund 10% betragen können bei Dichten, die dem 2,5-fachen der Sättigungsdichte in Kernmaterie entsprechen.

Vergleicht man das Projektionsverfahren mit dem relativ einfachen Verfahren, bei dem die Dirac-Struktur der Selbstenergie aus der Impulsabhängigkeit der Einteilchenenergie bestimmt wird, so ergeben sich im System der Kernmaterie keine gravierenden Unterschiede. Letzteres Verfahren versagt jedoch im Fall der Neutronenmaterie.

Interessant sind die möglichen Weiterentwicklungen, die sich an die in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse anschließen können bzw. bereits durchgeführt werden.

Einen großen Komplex stellt hier sicherlich die Berücksichtigung des exakten Pauli-Operators sowie die exakte Einteilchenenergie bei der Lösung des Vielteilchenproblems dar, die über die reine Brueckner-Hartree-Fock Näherung hinausgeht. Es wurden bereits erste Rechnungen durchgeführt, die zusätzlich 2h1p-Diagramme in der Selbstenergie berücksichtigen. Aus der Selbstenergie können dann wiederum die Teilchen- und Loch- Spektralfunktionen berechnet werden, aus denen sich unmittelbar die Einteilchen-Greensfunktion ergibt, die über die Dyson-Gleichung andererseits mit der Selbstenergie verknüpft ist. Die Selbstenergie ergibt sich andererseits aus der effektiven Zweiteilchen-Wechselwirkung, in die im Rahmen des selbstkonsistenten Greens-Funktionen Formalismus wieder die zuvor bestimmte Einteilchen-Greensfunktion eingeht. An einer solchen Vervollständigung des Selbstkonsistenzproblems wird zur Zeit gearbeitet.

Ein weiterer, aktueller Themenbereich ist die Berücksichtigung von relativistischen Effekten in endlichen Kernen. In Vorbereitung befindet sich hier die Verwendung der sich aus dieser Arbeit ergebenden Ergebnisse zur Dirac-Struktur der effektiven Zweiteilchen-Wechselwirkung, der G -Matrix. Interessant dürfte es sein, zu sehen, welche Auswirkungen die hier vorgeschlagene Parametrisierung, mit der Annahme über die Unabhängigkeit von der Asymmetrie, auf solche Rechnungen hat.

Zu guter Letzt sollte natürlich auch bei Lösung der relativistischen Bethe-Goldstone Gleichung der exakte Pauli-Operator Berücksichtigung finden.

Anhang A

Notation

In dieser Arbeit wird in weiten Teilen der Notation und Schreibweise gefolgt, wie man sie beispielsweise in Bjorken und Drell [55] oder Itzykson und Zuber [43] findet.

Für den metrischen Tensor wird die Darstellung

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1) \quad (\text{A.1})$$

verwendet.

Für den kontravarianten Vierervektor der Raum-Zeit Koordinaten gilt

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z) \quad (\text{A.2})$$

wobei $\hbar = c = 1$ gesetzt wird. Entsprechend ergibt sich für den kovarianten Vierervektor

$$x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) = g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -x, -y, -z) \quad (\text{A.3})$$

Falls nicht anders erwähnt, wird die Einstein'sche Summenkonvention verwendet, d.h. über doppelt auftretende Indizes wird summiert. Griechische Buchstaben bezeichnen die Komponenten von Vierervektoren, lateinische Buchstaben die Komponenten von Dreiervektoren.

Für den Viererimpuls ergibt sich vollkommen analog

$$p^\mu \equiv (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv (E, p_x, p_y, p_z) \quad (\text{A.4})$$

Die auftretenden γ -Matrizen erfüllen die Antivertauschungsrelation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.5})$$

und werden in der gebräuchlichen Darstellung

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \vec{\gamma} &= \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

für komponentenweise Angaben verwendet. Hierbei sind

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad 1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

die bekannten Pauli-Matrizen sowie die 2×2 -Einheitsmatrix.

Häufig benutzte Schreibweisen sind für beliebige Vierervektoren a_ν und γ -Matrizen

$$\begin{aligned} \not{a} &= \gamma_\mu a^\mu = \gamma^0 a^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{a} \\ a_\nu^2 &= a_\nu a^\nu = a^0{}^2 - \vec{a}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Anhang B

Selbstenergiebeiträge

An dieser Stelle werden die Ausdrücke für die Selbstenergie angegeben, wie sie sich für die verschiedenen Mesonen der Bonn Potentiale A, B, C in Kernmaterie und Neutronenmaterie ergeben.

Gehen wir von der allgemeinen Form Gl.(4.17) aus, mit der Ersetzung $G \rightarrow V$, so ergibt sich für die Selbstenergie

$$\begin{aligned}\Sigma(k) = & -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{k_f} q^2 dq \frac{F_H \Gamma_1 \text{Tr}[(\not{q}^* + M^*)\Gamma_2]}{E_q^* m^2} I_H \\ & - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{k_f} q^2 dq \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) \frac{F_F \Gamma_1 (\not{q}^* + M^*) \Gamma_2}{E_q^* (k-q)_\nu^2 - m^2} I_F\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

Hierbei bezeichnet k und q den Betrag der Einteilchenimpulse. Γ_i sind die Meson-Nukleon Vertizes, m ist die Mesonmasse und M bzw. M^* die Masse des Nukleons bzw. die effektive Masse. Die auftretenden Isospin-Faktoren I_H und I_F für den Hartree- (H) und Fock- (F) Term sind in der Tab.B.1 zusammengefasst. Für die Formfaktoren Gl.(3.21) ergibt sich

$$F_H = \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2}\right)^n \quad F_F = \left(\frac{\Lambda^2 - m^2}{\Lambda^2 - p_\nu^2}\right)^n \quad (\text{B.2})$$

mit den entsprechenden Werten für die Bonn Potentiale Tab.3.2. Als Abkürzung steht hier und im Folgenden für den Viererimpuls $p_\nu = (k - q)_\nu$.

Ferner werden die Größen

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_s &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_f} q^2 dq \frac{M^*}{E_q^*} \\ \tilde{\rho}_b &= \frac{2}{3\pi^2} k_f^3\end{aligned}\quad (\text{B.3})$$

definiert, die in Kernmaterie gerade der dort auftretenden skalaren Dichte bzw. Baryondichte entsprechen.

Für eine skalare Wechselwirkung ($\Gamma_1 = g1, \Gamma_2 = g1$) ergibt sich

$$\begin{aligned}\Sigma_S &= -\frac{1}{2} \left(\frac{g}{m}\right)^2 \tilde{\rho}_s F_H I_H - \frac{1}{2} \frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^{k_f} q^2 dq \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) \frac{F_F}{E_q^*} \frac{1}{(k-q)_\nu^2 - m^2} \\ &\times \left\{ M^* + \gamma^0 E_q^* - \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{k}}{k} q \cos \vartheta \right\} I_F\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

Bei der vektoriellen Kopplung ($\Gamma_1 = g\gamma^\mu, \Gamma_2 = g\gamma_\mu$) muß noch ein Minuszeichen berücksichtigt werden, das sich vom Propagator Gl.(3.5) ergibt.

$$\begin{aligned}\Sigma_V &= \gamma^0 \frac{1}{2} \left(\frac{g}{m}\right)^2 \tilde{\rho}_b F_H I_H + \frac{1}{2} \frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^{k_f} q^2 dq \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) \frac{F_F}{E_q^*} \frac{1}{(k-q)_\nu^2 - m^2} \\ &\times \left\{ 4M^* - \gamma^0 2E_q^* + \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{k}}{k} 2q \cos \vartheta \right\} I_F\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

Der Vollständigkeit halber ist hier auch der Fall einer pseudoskalaren Kopplung ($\Gamma_1 = gi\gamma^5, \Gamma_2 = gi\gamma^5$)

$$\begin{aligned}\Sigma_{PS} &= \frac{1}{2} \frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^{k_f} q^2 dq \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) \frac{F_F}{E_q^*} \frac{1}{(k-q)_\nu^2 - m^2} \\ &\times \left\{ M^* - \gamma^0 E_q^* + \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{k}}{k} q \cos \vartheta \right\} I_F\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

angegeben.

Für die in den Bonn Potentialen verwendete pseudovektorielle Kopplung für das π - und η -Meson ergibt sich ($\Gamma_1 = (f/m)i\gamma_5 \not{p}, \Gamma_2 = (f/m) \not{p}i\gamma^5$)

$$\Sigma_{PV} = \frac{1}{2} \left(\frac{f}{m}\right)^2 \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{k_f} q^2 dq \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) \frac{F_F}{E_q^*} \frac{1}{(k-q)_\nu^2 - m^2}$$

$$\times \left\{ p_\nu^2 M^* + \gamma^0 [p_\nu^2 E_q^* - 2(E_k - E_q) q_\mu^* p^\mu] - \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{k}}{k} [p_\nu^2 q \cos \vartheta - 2q_\mu^* p^\mu \{k - q \cos \vartheta\}] \right\} I_F \quad (\text{B.7})$$

Das ρ -Meson besitzt neben der Vektorkopplung Gl.(B.5) noch Beiträge, die von der Tensorkopplung stammen. Mit $(\Gamma_1 = (g\gamma^\mu + (f/(2M))i\sigma^{\mu\nu}p_\nu), (\Gamma_2 = (g\gamma_\mu - (f/(2M))i\sigma_{\mu\nu}p^\nu))$) ergeben sich neben dem Beitrag von der Vektorkopplung ein Beitrag von der Tensorkopplung

$$\begin{aligned} \Sigma_{TT} &= +\frac{1}{2} \frac{f^2}{4M^2} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{k_f} q^2 dq \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) \frac{F_F}{E_q^*} \frac{1}{(k-q)_\nu^2 - m^2} \\ &\times \left\{ 3p_\nu^2 M^* - \gamma^0 [4q_\mu^* p^\mu (E_k - E_q) - p_\nu^2 E_q^*] + \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{k}}{k} [-p_\nu^2 q \cos \vartheta + 4q_\mu^* p^\mu \{k - q \cos \vartheta\}] \right\} I_F \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

sowie ein gemischter Beitrag mit einem vektoriellem und einem tensoriellem Vertex

$$\begin{aligned} \Sigma_{VT} &= -\frac{1}{2} \frac{fg}{2M} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{k_f} q^2 dq \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) \frac{F_F}{E_q^*} \frac{1}{(k-q)_\nu^2 - m^2} \\ &\times \left\{ 6q_\mu^* p^\mu - \gamma^0 6M^* (E_k - E_q) + \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{k}}{k} M^* [k - q \cos \vartheta] \right\} I_F \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

	Kernmaterie		Neutronenmaterie	
	is	iv	is	iv
I_H	2	0	1	1
I_F	1	3	1	1

Tabelle B.1: Isospin-Parameter

Isospin-Faktoren für den Hartree- (I_H) und Fock- (I_F) Beitrag zur Selbstenergie Gl.(4.67) wie sie sich für Kernmaterie und Neutronenmaterie ergeben

Anhang C

Parametrisierung Bonn Potentiale

Die in Kap.4.4.4 angegebene Parametrisierung der effektiven Wechselwirkung bedingt, daß die sich von der reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung V ergebenden Beiträge zur Selbstenergie exakt zu berechnen sind. Insbesondere schließt dies die Berücksichtigung der Formfaktoren mit ein, vgl. Gl.(B.1).

In Hinblick auf die Verwendung der Parametrisierung für Rechnungen in endlichen Kernen stellt dies aber eine nicht notwendige Erschwernis dar. Um derartige Rechnungen zu vereinfachen, kann in guter Näherung die Impulsabhängigkeit der Formfaktoren bei der Berechnung der Selbstenergie vernachlässigt werden, und der verbleibende konstante Faktor mit in die Kopplungskonstante hineingezogen werden.

Die sich für die Potentiale Bonn A, B, C Tab.3.2 ergebenden effektiven Kopplungskonstanten sind in den Tabellen C.1, C.2, C.3 zusammengestellt. Sie wurden so gewählt, daß bei der Berechnung der Energie des einzelnen Mesons ohne Berücksichtigung des Formfaktors die exakte Energie unter Berücksichtigung des Formfaktors reproduziert wird. Hierdurch erreicht man automatisch, daß ebenso das Einteilchenpotential sowie die Komponenten der Selbstenergie der einzelnen Mesonen bestmöglichst wiedergegeben werden. Eventuell kleine Abweichungen hierbei fallen nicht ins Gewicht, da am Ende immer die Summe der Beiträge aller Mesonen betrachtet wird.

Anhand der Tabellen läßt sich erkennen, daß diese effektiven Kopplungskonstanten mit der Dichte etwas abnehmen. Dies ist Ausdruck dafür, daß mit zunehmender

Dichte, und damit betragsmäßig größeren Impulsüberträgen in den Fockbeiträgen zur Selbstenergie, die Formfaktoren einen etwas stärkeren Einfluß haben.

Es versteht sich von selbst, daß diese Parametrisierung der Bonn Potentiale keine Streuphasen wiedergeben kann.

$k_f[\text{fm}^{-1}]$	Bonn A					
	π	σ	δ	η	ω	ρ
1.00	13.1359	7.1472	0.4334	5.0012	10.7033	0.3734
1.10	12.9184	7.1536	0.4313	4.9568	10.7164	0.3721
1.20	12.6917	7.1595	0.4291	4.9120	10.7261	0.3685
1.30	12.4559	7.1643	0.4265	4.8668	10.7305	0.3637
1.36	12.3103	7.1662	0.4249	4.8399	10.7295	0.3605
1.40	12.2115	7.1669	0.4237	4.8236	10.7268	0.3583
1.50	11.9571	7.1655	0.4205	4.7834	10.7117	0.3524
1.60	11.6884	7.1565	0.4167	4.7488	10.6807	0.3460
1.70	11.3980	7.1349	0.4121	4.7223	10.6297	0.3391
1.80	11.0767	7.0950	0.4064	4.7068	10.5569	0.3315

Tabelle C.1: Parameter Mesonen Bonn A

Angegeben sind die Kopplungskonstanten $g^2/(4\pi)$ für die Parametrisierung der reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung Bonn A in Abhängigkeit vom Fermi-Impuls k_f

$k_f[\text{fm}^{-1}]$	Bonn B					
	π	σ	δ	η	ω	ρ
1.00	13.2578	6.9433	0.9742	3.5718	10.7034	0.3583
1.10	13.0869	6.9495	0.9662	3.5409	10.7166	0.3571
1.20	12.9072	6.9553	0.9576	3.5078	10.7265	0.3535
1.30	12.7186	6.9600	0.9483	3.4751	10.7313	0.3489
1.36	12.6009	6.9620	0.9423	3.4566	10.7306	0.3459
1.40	12.5206	6.9628	0.9381	3.4445	10.7283	0.3438
1.50	12.3118	6.9618	0.9268	3.4151	10.7141	0.3381
1.60	12.0873	6.9541	0.9142	3.3899	10.6850	0.3320
1.70	11.8395	6.9348	0.8995	3.3693	10.6365	0.3255
1.80	11.5591	6.8991	0.8825	3.3561	10.5671	0.3183

Tabelle C.2: Parameter Mesonen Bonn B

Angegeben sind die Kopplungskonstanten $g^2/(4\pi)$ für die Parametrisierung der reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung Bonn B in Abhängigkeit vom Fermi-Impuls k_f

$k_f[\text{fm}^{-1}]$	Bonn C					
	π	σ	δ	η	ω	ρ
1.00	13.4505	6.6481	1.5867	2.1442	10.7034	0.3583
1.10	13.3019	6.6556	1.5737	2.1248	10.7167	0.3571
1.20	13.1448	6.6626	1.5597	2.1047	10.7267	0.3535
1.30	12.9791	6.6688	1.5444	2.0854	10.7316	0.3489
1.36	12.8753	6.6717	1.5347	2.0734	10.7311	0.3459
1.40	12.8040	6.6732	1.5279	2.0659	10.7290	0.3437
1.50	12.6178	6.6743	1.5097	2.0486	10.7154	0.3381
1.60	12.4154	6.6694	1.4892	2.0331	10.6873	0.3320
1.70	12.1895	6.6547	1.4656	2.0205	10.6408	0.3255
1.80	11.9305	6.6256	1.4382	2.0115	10.5738	0.3184

Tabelle C.3: Parameter Mesonen Bonn C

Angegeben sind die Kopplungskonstanten $g^2/(4\pi)$ für die Parametrisierung der reinen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung Bonn C in Abhängigkeit vom Fermi-Impuls k_f

Literaturverzeichnis

- [1] A. Valcarce, A. Buchmann, F. Fernández, and A. Fässler.
Phys.Rev. C51, page 1480, 1995.
- [2] R. Machleidt.
Adv.Nucl.Phys.19, page 189, 1989.
- [3] I.E. Lagaris and V.R. Pandharipande.
Nucl.Phys. A359, page 331, 1981.
- [4] H. Müther and A. Polls.
Prog.Part. and Nucl.Phys.45, page 243, 2000.
- [5] K.A. Brueckner.
Phys.Rev.97, page 1353, 1955.
- [6] J.P. Jeukenne, A. Lejeunne, and C. Mahaux.
Phys.Rep. 25, page 83, 1976.
- [7] H. Kümmel, K.H. Lührmann, and J.G. Zabolitzky.
Phys.Rep. 36, page 1, 1978.
- [8] R.F. Bishop.
Microscopic Quantum Many-Body Theories and Their Applications.
eds. J. Navarro and A. Polls (Springer), 1998.
- [9] W.H. Dickhoff and H. Müther.
Rep.Prog.Phys.11, page 1947, 1992.
- [10] R.B. Wiringa, V. Fiks, and A. Fabrocini.
Phys.Rev. C38, page 1010, 1988.
- [11] A. Akmal and V.R. Pandharipande.
Phys.Rev C56, page 2261, 1997.

- [12] K.E. Schmidt and D.M. Ceperley.
Monte Carlo Methods III.
ed. K. Binder (Springer), 1991.
- [13] D.M. Ceperley.
Rev.Mod.Phys. 67, page 279, 1995.
- [14] F. Coester, S. Cohen, B.D. Day, and C.M. Vincent.
Phys.Rev.C1, page 769, 1970.
- [15] R. Schiavilla, V.R. Pandharipande, and R.B. Wiringa.
Nucl. Phys. A449, page 219, 1986.
- [16] B.D. Serot and J.D. Walecka.
*Adv.Nucl.Phys.*16, page 1, 1986.
- [17] M.R. Anastasio, L.S. Celenza, W.S. Pong, and C.M. Shakin.
Phys.Rep. 100, page 327, 1983.
- [18] R. Brockmann and R. Machleidt.
Phys.Rev.C42, page 1965, 1990.
- [19] Bernard ter Haar and Rudi Malfliet.
*Phys.Rep.*149, page 208, 1987.
- [20] H. Huber, F. Weber, and M.K. Weigel.
Phys.Lett. B317, page 485, 1993.
- [21] S. Ulrych and H. Mütter.
Phys.Rev.C 56, page 1789, 1997.
- [22] C.J. Horowitz and Brian D. Serot.
*Nucl.Phys.*A464, page 613, 1987.
- [23] H.F. Boersma and R. Malfliet.
Phys.Rev. C49, Erratum Phys.Rev. C50, pages 233,1253, 1994.
- [24] L. Sehn, C. Fuchs, and A. Faessler.
Phys.Rev. C 56, page 216, 1997.
- [25] T. Gross-Boelting, C. Fuchs, and A. Faessler.
Nucl. Phys. A 648, page 105, 1999.
- [26] H. Elsenhans, H Mütter, and R. Machleidt.
*Nucl.Phys.*A515, page 715, 1990.

- [27] H.F. Boersma and R. Malfliet.
Phys.Rev. C49, page 1495, 1994.
- [28] R. Fritz and H. Müther.
Phys.Rev. C49, page 633, 1994.
- [29] Eugen Fick.
Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie.
Aula-Verlag, 1968.
- [30] Murray Gell-Mann and Francis Low.
Phys.Rev.84, page 350, 1951.
Appendix.
- [31] E.K.U. Gross and E. Runge.
Vielteilchentheorie.
Teubner Studienbücher, 1986.
- [32] A Fetter and J.D. Walecka.
Quantum Theory of Many-Particle Systems.
McGRAW-HILL Book Company, 1971.
- [33] J. Goldstone.
Proc.Roy.Soc.A239, page 267, 1957.
- [34] H. Müther.
*Proceedings Workshop on 'Electromagnetic induced two-hadron emission',
Granada, nucl-th/9906073*, 1999.
- [35] H.A. Bethe and J. Goldstone.
Proc.Roy.Soc.A238, page 551, 1957.
- [36] H.A. Bethe, B.H. Brandow, and A.G. Petschek.
Phys.Rev.129, page 225, 1963.
- [37] M. Haftel and F. Tabakin.
Nucl.Phys. A158, page 1, 1970.
- [38] T. Cheon and E.F. Redish.
Phys.Rev. C39, page 331, 1989.
- [39] Stoer.
Numerische Mathematik 1.
Springer-Lehrbuch, 1994.

- [40] E. Schiller, H. Müther, and P. Czerski.
Phys.Rev. C59, Erratum Phys.Rev. C60, page 2934, 1999.
- [41] R.B. Wiringa, V.G.J. Stoks, and R. Schiavilla.
Phys.Rev. C51, page 38, 1995.
- [42] W. Legindgaard.
Nucl.Phys. A297, page 429, 1978.
- [43] Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber.
Quantum Field Theory.
McGRAW-HILL Book Company, 1980.
- [44] R. Machleidt, K. Holinde, and Ch. Elster.
Phys.Rep. 149, page 1, 1987.
- [45] E.E. Salpeter and H.A. Bethe.
Phys.Rev.84, page 1232, 1951.
- [46] R. Blankenbecler and R. Sugar.
Phys.Rev. 142, page 1051, 1966.
- [47] R.H. Thompson.
Phys.Rev. D1, page 110, 1970.
- [48] J. Blatt and L. Biedenharn.
Phys.Rev. 86, page 399, 1952.
- [49] R. Brockmann and R. Machleidt.
nucl-th/9612004, 1996.
- [50] S. Schweber.
Relativistic Quantum Field Theory.
Harper International Edition, 1966.
- [51] T. Fliessbach.
Mechanik.
B.I. Wissenschaftsverlag, 1992.
- [52] K. Erkelenz.
Phys.Rep.C13, page 193, 1974.
- [53] D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev, and V.K. Khersonskii.
Quantum Theory of Angular Momentum.
World Scientific, 1988.

- [54] M. Fierz.
Helv.Phys.Acta 33, page 855, 1960.
- [55] J.D. Bjorken and S.D. Drell.
Relativistische Quantenmechanik.
BI-Hochschultaschenbücher, 1966.
- [56] M.L. Goldberger, M.T. Grisaru, S.W. MacDowell, and D.Y. Wong.
Phys.Rev. 120, page 2250, 1960.
- [57] R.B. Wiringa, R.A. Smith, and T.L. Ainsworth.
Phys.Rev. C29, page 1207, 1984.
- [58] J.A. Tjon and S.J. Wallace.
Phys.Rev. C32, pages 267,1667, 1985.
- [59] M.J. Zuilhof and J.A. Tjon.
Phys.Rev. C24, page 736, 1981.
- [60] K. Brueckner, R.J. Eden, and N.C. Francis.
Phys.Rev.100, page 891, 1955.
- [61] H.A. Bethe.
Ann.Rev.Nucl.Sci. 21, page 933, 1971.
- [62] M.D. Scadron and H.F. Jones.
Phys. Rev. 173, page 1734, 1968.
- [63] V.R. Pandharipande and R.B. Wiringa.
Rev. Mod. Phys. 51, page 821, 1979.
- [64] H. Müther, S. Ulrych, and H. Toki.
Int. Jour.Mod.Phys. E (1998) in Druck, nucl-th/9711010, 1998.
- [65] H. Huber, F. Weber, and M.K. Weigel.
Phys.Rev C51, page 50, 1995.
- [66] N. Hoshizaki.
Supp.of Prog.Theor.Phys. 42, page 107, 1968.
- [67] J.D. Bjorken and S.D. Drell.
Relativistische Quantenfeldtheorie.
BI-Hochschultaschenbücher, 1967.
- [68] Rüdiger Fritz.
PhD thesis, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, 1994.

- [69] Markus Kleinmann.
PhD thesis, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, 1994.
- [70] A.R.M. Tereno.
PhD thesis, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, 1991.
- [71] A. Bouyssy, J.-F. Mathiot, and Nguyen Van Giai.
Phys.Rev.C36, page 380, 1987.
- [72] K. Erkelenz, R. Alzetta, and K. Holinde.
Nucl.Phys. A176, page 413, 1971.
- [73] H. Mütter, R. Machleidt, and R. Brockmann.
Phys.Rev.C42, page 1981, 1990.
- [74] C.J. Horowitz and Brian D. Serot.
Nucl.Phys.A399, page 529, 1983.
- [75] E. Schiller and H. Mütter.
nucl-th/0006072, 2000.
- [76] B.D. Day.
Rev.Mod.Phys.39, page 719, 1967.
- [77] M. Jacob and G.C. Wick.
Ann. of Phys. 7, page 404, 1959.
- [78] B.D. Day.
Phys.Rev. C24, page 1203, 1981.
- [79] M.R. Anastasio, L.S. Celenza, and C.M. Shakin.
Phys.Rev.Lett. 45, page 2096, 1980.
- [80] M.R. Anastasio, L.S. Celenza, and C.M. Shakin.
Phys. Rev. C23, pages 2258,2273, 1981.
- [81] L.S. Celenza and C.M. Shakin.
Relativistic Nuclear Physics.
World Scientific, 1986.
- [82] C.F. von Weizsäcker.
Z.Phys.96, page 431, 1935.
- [83] R. Brockmann and R. Machleidt.
Phys.Lett. 149B, page 283, 1984.

- [84] L. Engvik, M. Hjorth-Jensen, R. Machleidt, H. Mütter, and A. Pells.
Nucl.Phys.A627, page 85, 1997.
- [85] K. Suzuki, R. Okamoto, M. Kohno, and S. Nagata.
nucl-th/9907050, 1999.

Zum Schluß ...

... darf es einfach nicht fehlen, noch ein paar Worte des Dankes, nach all den vorangegangenen physikalischen Ausführungen, zu verlieren.

An erster Stelle gilt mein Dank Prof. Dr. Herbert Müther, der es mir ermöglicht hat, in seiner Arbeitsgruppe diese Doktorarbeit auf dem Gebiet der relativistischen Kernphysik anzufertigen. Nicht nur sein stetes Interesse für den Fortgang der Arbeit und den sich ergebenden Ergebnissen, vielmehr auch die Hilfestellungen bei der Bewältigung von auftauchenden Problemen und ausgiebigen Diskussionen waren ständiger Antrieb auf dem Weg zum erfolgreichen Bestehen der Promotion.

Danken möchte ich Herrn Prof. Dr. Herbert Müther ebenfalls für die gegebene Möglichkeit, an zahlreichen internationalen Konferenzen teilnehmen zu können. Auf diesen konnte ich nicht nur viel lernen, es ergab sich auch immer der motivierende Blick nach vorn zu neuen Zielen.

Dem Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen, sowie dem Graduiertenkolleg „Struktur und Wechselwirkung von Hadronen und Kernen“ sowie dem Sonderforschungsbereich 382 „Verfahren und Algorithmen zur Simulation physikalischer Prozesse auf Höchstleistungsrechnern“ danke ich besonders für die finanzielle Unterstützung bei der Anfertigung dieser Promotion. Ebenso geht mein Dank an das Deutsche Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V., das mir im Rahmen der *Wissenschaftlich-technologischen Zusammenarbeit mit Polen* einen Aufenthalt am Institut für Kernphysik (IFJ) in Krakau (Polen) ermöglichte.

Danken möchte ich auch den Mitgliedern des Instituts für Theoretische Physik sowie des Physikalischen Instituts für die sich einfach ergebenden und lehrreichen Diskussionen, die ebenso zum Gelingen beitrugen.

Nicht missen möchte ich die Betreuung der studentischen Übungsgruppen im Rahmen der Kursvorlesungen. Sie gab mir die Gelegenheit, mit besonderer Freude die verschiedenen Disziplinen der Physik vermitteln zu dürfen und selber immer noch etwas hinzu lernen zu können.

Mein besonderer Dank gilt nicht nur meinem ehemaligen Zimmergenossen Michael, sondern ebenso Sabine, Clemens, Daniel, Oliver, Thomas, Christian und allen anderen, die mich über all die Jahre nicht nur zum Mittagessen begleitet haben.

Im Kampf mit den Buchstaben, ob nun groß oder klein, Komma, Punkt oder Fragezeichen stritt erneut aufrecht, tapfer und wacker Gabriele Kliche stets zu meinen Gunsten. Auch Ihr sei im Besonderen gedankt.

Meine besondere Anerkennung gebührt meiner lieben Frau Heike, die mit mir die Zeit nicht nur gemeinsam bestritten, sondern ebenso zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Danke.