Über minimale p-Grade primitiver Permutationsgruppen

Dissertation

der mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Jens Höchsmann
aus Illertissen

2002

Tag der mündlichen Prüfung:	19. Juli 2002

Dekan:	Prof. Dr. W. Knapp
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. W. Knapp
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. C. Hering

Inhaltsverzeichnis

Konventionen

$i \in n$	Von Neumann-Notation für $i \in \{0, \dots, n-1\}$
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
(a, b)	Größter gemeinsamer Teiler der ganzen Zahlen a und b
$\lceil a \rceil$	Kleinste ganze Zahl größer oder gleich a
$\lfloor a \rfloor$	Größte ganze Zahl kleiner oder gleich a
$\mathrm{Sym}(\Omega)$, $\mathrm{Sym}(n)$	Symmetrische Gruppe auf Ω bzw. auf n
$\mathrm{Alt}(\Omega)$, $\mathrm{Alt}(n)$	Alternierende Gruppe auf Ω bzw. auf n
G	Endliche Gruppe
G_α	Punktweise Stabilisator des Punktes α in G
G'	Kommutatorgruppe der Gruppe G
G^∞	Letztes Glied der Ableitungsreihe der Gruppe G
$O_{\mathrm{solv}}(G)$	Größter auflösbarer Normalteiler der Gruppe G
$N_G(H)$	Normalisator von H in G
$C_G(H)$	Zentralisator von H in G
$Z(G)$	Zentrum der Gruppe G
$\mathrm{soc}(G)$	Sockel der Gruppe G
$\mathrm{Aut}(G)$	Automorphismengruppe von G
$\mathrm{Inn}(G)$	Innere Automorphismengruppe von G
$\mathrm{Out}(G)$	Äußere Automorphismengruppe von G
$\mathrm{Syl}_p(G)$	Menge der p-Sylowgruppen von G
$o(g)$	Ordnung des Gruppenelementes g
${}^g\Omega$	Träger des Gruppenelementes g in Ω
Ω_g	Fixpunktmenge des Gruppenelementes g in Ω
$\mathrm{rfix}_\Omega(g)$	Fixpunktanteil des Gruppenelementes g in Ω
$\mathbb{F}_q$	Körper bestehend aus q Elementen
V_g	Fixraum der Matrix g im Vektorraum V
$E_\lambda(g)$	Eigenraum der Matrix g zum Eigenwert λ
$[V, \langle g \rangle]$	Kommutator des Gruppenelementes g im Vektorraum V

Einleitung

Schon seit jeher zeigt sich die Gruppentheorie an verschiedenen Charakteristika von Permutationsgruppen interessiert. Beachtung findet dabei auch der *Minimalgrad* $m(G)$ von $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$, der als kleinstmöglicher Grad eines von 1 verschiedenen Gruppenelementes definiert wird.

Eine zentrale Rolle bei der Behandlung von Minimalgraden spielt der Versuch, Verbindungen zwischen dem Grad und dem Minimalgrad einer Permutationsgruppe anzugeben. Beziehungen zwischen diesen beiden Merkmalen wurden bei mehrfach transitiven Permutationsgruppen schon Ende des 19. Jahrhunderts aufgedeckt. Bochert (vgl. [Boc92], [Boc97]) erhält etwa für 2-transitive Permutationsgruppen vom Grad n, welche weder alternierend noch symmetrisch sind, die Abschätzung

$$m(G) \geq \frac{n}{3} - \frac{2\sqrt{n}}{3}.$$

Wesentlich günstigere Schranken werden gut 30 Jahre später von W.A. Manning (vgl. [Man29], [Man33]) durch Berücksichtigung der Ordnung von Gruppenelementen kleinsten Grades gewonnen (Eine Zusammenfassung seiner Ergebnisse und von Resultaten von Jordan, Bochert und Weiss findet sich in Wielandts Abhandlung (vgl. [Wie64]) über endliche Permutationsgruppen):

> *Es sei G eine 2-transitive Permutationsgruppe vom Grad n und $\mathrm{Alt}(n) \nleq G$. Ferner enthalte G ein Element kleinsten Grades mit Primzahlordnung p. Dann gilt*
>
> $$m(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{p^2-1}}{p} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{4}{3}.$$

Neue Impulse erhielt die Frage nach den Verflechtungen zwischen dem Grad und dem Minimalgrad einer primitiven Permutationsgruppe durch die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen. Mit Ihrer Hilfe konnten Liebeck und Saxl (vgl. [LS91]) für primitive Permutationsgruppen vom Grad n mit $\mathrm{Alt}(n) \not\leq G$ die Gültigkeit der Beziehung

$$m(G) \geq 2(\sqrt{n} - 1)$$

nachweisen. Aufbauend auf diesen Ergebnissen gelang es in jüngster Zeit Guralnick und Magaard sämtliche Permutationsgruppen zu klassifizieren, deren Minimalgrad den Wert $\frac{n}{2}$ unterschreiten (vgl. [GM98]). Im Wesentlichen handelt es sich dabei um Blow-ups alternierender oder symmetrischer Gruppen, die auf Teilmengen der Punktmenge agieren oder um Blow-ups orthogonaler Gruppen über dem Körper $\mathbb{F}_2$, die auf gewissen 1-Räumen operieren (vgl. [GM98; Theorem 1]).

Eine genauere Betrachtung des letztgenannten Resultates zeigt nun, dass bei den beschriebenen Ausnahmegruppen der Minimalgrad nur von bestimmten 2-Elementen angenommen wird.
Dies führt, ebenso wie Mannings Vorgehen, zu der Frage, inwiefern durch eine Berücksichtigung der Ordnungen von Gruppenelementen oben genannte Ergebnisse verfeinert werden können.

Als hilfreich erweist sich hierbei der von H. Wielandt (vgl. [Wie94]) definierte Begriff des *minimalen p-Grades* $m_p(G)$. Unter diesem verstehen wir den kleinstmöglichen Grad eines p-Elementes der betrachteten Permutationsgruppe G.

Da mindestens ein Primteiler p der Gruppenordnung $|G|$ mit $m_p(G) = m(G)$ existiert, ergeben sich aus Aussagen über minimale p-Grade stets auch Folgerungen für den Minimalgrad von G.

So liefert die folgende Aussage (vgl. (7.3)) für den Minimalgrad einer nicht unter 2. auftretenden primitiven Permutationsgruppe die Abschätzung $m(G) \geq \frac{1}{3} \cdot |\Omega|$; eine Schranke, die von Liebeck und Saxl in [LS91, Theorem 2] bewiesen wird.

> *Sei $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine primitive Permutationsgruppe und p ein Primteiler der Ordnung von G. Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:*
>
> 1. *Es gilt* $\quad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|$.
> 2. *Die Gruppe G ist Blow-up einer Gruppe B mit alternierendem Sockel $\mathrm{soc}(B) = \mathrm{Alt}(n) \leq \mathrm{Sym}(\Delta)$ und die Menge Δ stimmt mit der Menge $\binom{n}{k}$ der k-elementigen Teilmengen von n überein.*

Darüber hinaus können minimale p-Grade einen Beitrag zur Klärung der von Praeger in [Pra83] formulierten Frage leisten, welche Permutationen in primitiven Permutationsgruppen mit vorgegebenem Grad auftreten. Von Nutzen ist dabei etwa die Tatsache, dass eine untere Schranke des Grades eines beliebigen Gruppenelementes $g \in G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ durch das (unter Umständen stark vom Minimalgrad abweichende) Maximum der minimalen p-Grade sämtlicher Primteiler der Ordnung von g bestimmt wird: $|{}^g\Omega| \geq \max \{ m_p(G^\Omega) \mid p \mid o(g) \}$

Insbesondere erlaubt die oben erwähnte Aussage die Formulierung von Bedingungen für die Existenz von Zyklen. Die hierbei erhältlichen Ergebnisse zeigen Parallelen zu entsprechenden Resultaten Jordans (vgl. [Wie64, (13.9)]).

Wenngleich (mit Ausnahme des Wielandt-Skriptes) in der bisher erschienenen Literatur der Begriff des minimalen p-Grades nicht verwendet wird, lassen sich Publikationen angeben, welche sich mit aus dieser Definition ergebenden Fragestellungen auseinander setzen. Darunter sind etwa Arbeiten von Praeger (vgl. [Pra79], [Pra76]) zu nennen, welche primitive Permutationsgruppen mit der Eigenschaft $m_p(G) < p^2$ respektive $m_p(G) < 2p^2 - p$ (für einen Primteiler p von $|G|$) klassifizieren.
Nicht unerwähnt bleiben sollen in diesem Zusammenhang auch die Arbeiten von Bender (vgl. [Ben68]), Hering (vgl. [Her68]) und King (vgl. [Kin69]), in denen sämtliche 2-transitiven Permutationsgruppen mit $m_2(G) \geq |\Omega| - 2$ bestimmt werden (Beachte, dass keine der genannten Artikel auf die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen zurückgreift).

Die vorliegende Arbeit versucht nun eine Einführung in die Theorie der minimalen p-Grade zu geben. Besonderes Augenmerk richten wir dabei auf die Bestimmung primitiver Permutationsgruppen $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ und Primteiler p von $|G|$, welche die Eigenschaft $m_p(G) < \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ besitzen. Es handelt sich dabei um diejenigen Gruppen, für die das Verhältnis $\frac{m_p(G)}{|\Omega|}$ aus minimalem p-Grad und Grad der Permutationsgruppe klein wird.

Neben den schon an früherer Stelle genannten alternierenden oder symmetrischen Gruppen, bei denen wegen $\lim\limits_{|\Omega| \to \infty} \frac{m_p(G)}{|\Omega|} \leq \lim\limits_{|\Omega| \to \infty} \frac{\binom{n}{k} - \binom{n-p}{k}}{\binom{n}{k}} = 0$ generell keine Konstante c mit $m_p(G) \geq c \cdot |\Omega|$ angegeben werden kann, treten hier die von Frohardt und Magaard bestimmten Permutationsgruppen mit $m_2(G) = m(G) < \frac{1}{2} \cdot |\Omega|$ auf. Beispiele, bei welchen der Minimalgrad keine Unregelmäßigkeiten aufweist, aber dennoch $m_p(G) < \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ für einen Primteiler p von $|G|$ gilt, liefern jene projektiven speziellen linearen Gruppen $L_2(2^f)$, deren Ordnung von einer Mersenneschen Primzahl $p = 2^f - 1$ geteilt wird. Sie bilden die einzigen primitiven Permutationsgruppen $\mathrm{Alt}(\Omega) \not\leq G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$, welche Zyklen von Primzahllänge $p \leq |\Omega| - 2$ besitzen (vgl. [Zie95]); ein Sachverhalt, der von der Schranke $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ nicht beachtet wird.

Eine genauere Übersicht über die auftretenden Ausnahmen bietet das folgende Theorem (vgl. (7.2)):

Sei $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine primitive Permutationsgruppe und p ein Primteiler der Ordnung von G. Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:

1. *Es gilt* $\quad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.
2. *Die Gruppe G entspricht einem Blow-up einer Gruppe $B \leq \mathrm{Sym}(\Delta)$ mit einer der folgenden Eigenschaften:*
   - *(a) Der Sockel $\mathrm{soc}(B)$ von B ist isomorph zu einer alternierenden Gruppe $\mathrm{Alt}(n)$ und die Menge Δ stimmt mit der Menge $\binom{n}{k}$ (mit $1 \leq k < \frac{1}{2}(n - \sqrt{n})$) der k-elementigen Teilmengen von n überein. Für $p = 2$ oder $p < n - 3k + 2$ gilt dabei, falls $p \leq k$ ist, $m_p(B) = \binom{n}{k} - \binom{n-p}{k} - \binom{n-p}{k-p}$, andernfalls, $m_p(B) = \binom{n}{k} - \binom{n-p}{k}$.*
   - *(b) Die Gruppe B ist eine klassische Gruppe über dem Primkörper $\mathbb{F}_r$. Weiter gilt $p = r > 2$ und $m_p(B) \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Delta|$.*
   - *(c) Der Sockel $\mathrm{soc}(B)$ von B entspricht der projektiven speziellen linearen Gruppe $L_2(2^f)$. Die Gruppe B wirkt auf der Menge Δ der 1-Räume von $V(2, 2^f)$ und $p = 2^f - 1$ ist eine Mersennesche Primzahl mit $m_p(G) = p = |\Delta| - 2 \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Delta|$.*
   - *(d) Der Sockel $\mathrm{soc}(B)$ von B kann mit der orthogonalen Gruppe $O_n^\varepsilon(2)$ mit $4 \leq n$ identifiziert werden. Die Gruppe B operiert auf der kürzesten Bahn von 1-Räumen des Vektorraumes $O^\varepsilon(n, 2)$ und für $p = 2$ gilt $m_p(B) \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Delta|$.*
   - *(e) Es ist $(\Delta, \mathrm{soc}(B)) \cong (u_1^-(O(7,2)), O_7(2))$ und für $p = 3$ gilt $m_p(B) = \lfloor \frac{p-1}{p} \cdot |\Delta| \rfloor \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Delta|$.*

Bei unserer Beschäftigung mit minimalen p-Graden werden wir im Einzelnen wie folgt vorgehen:

In den ersten beiden Kapiteln der vorliegenden Arbeit listen wir die Grundlagen auf, die im Laufe unserer Abhandlung benötigt werden.
Das erste Kapitel fasst dabei einige bekannte Resultate und Begriffsbildungen aus verschiedenen Teilbereichen der Gruppentheorie und der Zahlentheorie zusammen.

Das zweite Kapitel ist hingegen dem Begriff des minimalen p-Grades selbst gewidmet und nennt einfache Folgerungen (vgl. (2.5),(2.6),(2.8)), die sich im weiteren Verlauf als zentrale Hilfsmittel erweisen.

Im sich daran anschließenden Kapitel geben wir erste Abschätzungen für minimale p-Grade ausgesuchter Klassen von Permutationsgruppen an. Die Auswahl der Klassen erfolgt hierbei in Hinblick auf eine spätere Anwendung des O'Nan-Scott-Theorems für primitive Permutationsgruppen. Dieses wird zusammen mit den in diesem Abschnitt gewonnenen Resultaten zu der Feststellung führen, dass primitive Permutationsgruppen mit kleinen minimalen p-Graden entweder fasteinfach mit nicht-abelsch einfachem Sockel oder Blow-ups fasteinfacher Ausnahmegruppen sind (vgl. (7.1)).

Diesem Ergebnis Rechnung tragend, beschäftigen wir uns in den drei folgenden Kapiteln mit fasteinfachen Permutationsgruppen mit nicht-abelsch einfachem Sockel.

Kapitel 4 behandelt dabei den Fall klassischer Gruppen. Besondere Aufmerksamkeit wenden wir hier zunächst minimalen p-Graden bei Wirkungen auf assoziierten geometrischen Objekten zu. Die zugehörigen Permutationsgruppen erweisen sich in Hinblick auf die oben genannte Fragestellung als kritische Fälle. Mit Hilfe von g-invarianten Zerlegungen des zu Grunde liegenden Vektorraumes ist es in diesen Fällen aber möglich hinreichend gute obere Schranken für die Mächtigkeit der Fixpunktmenge semisimpler Gruppenelemente zu finden. Bei unipotenten Elementen einer Lie-Gruppe über dem Primkörper $\mathbb{F}_p$ begnügen wir uns hingegen mit der in [LS91] bewiesenen, geringfügig schwächeren Abschätzung $\mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \frac{4}{3q}$, da eine vollständige Diskussion dieses Falles den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde (Problematisch sind hier in erster Linie Permutationsgruppen mit kleinem Lie-Rang und kleinem Grad).

Im zweiten Teil des Kapitels dehnen wir dann unsere Untersuchung auf sämtliche primitiven Wirkungen klassischer Gruppen aus. Ein Widerspruchsbeweis, der auf die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnittes zurückgreift, liefert hier die in Theorem (4.20) genannten und in Theorem (7.2) berücksichtigten Restriktionen für klassische Gruppen mit $m_p(G) < \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.

In Kapitel 5 betrachten wir fasteinfache Gruppen mit einem Sockel, der einer exzeptionellen Lie-Gruppe oder einer sporadisch einfachen Gruppe entspricht. Wie unter Ausnutzung gewonnener Ergebnisse von Frohardt und Magaard gezeigt werden kann, ist bei derartigen Gruppen das Verhältnis zwischen minimalem p-Grad und Grad in aller Regel hinreichend groß um die oben genannte Schranke einzuhalten (vgl. (5.1) und (5.9)).

Kapitel 6 setzt sich hingegen mit jenen fasteinfachen Permutationsgruppen auseinander, die einen zu einer alternierenden Gruppe isomorphen Sockel besitzen. Dabei vertiefen wir zunächst unsere Kenntnisse über die schon an früherer Stelle erwähnten Wirkungen alternierender oder symmetrischer Gruppen vom Grad n auf k-elementigen Teilmengen von n. Neben der Bestimmung der exakten Werte der minimalen p-Grade dieser Permutationsgruppen (vgl. (6.1)) erfolgt in diesem Abschnitt auch die Formulierung von Bedingungen für das Vorliegen kleiner minimaler p-Grade (vgl. (6.2)).
Mit diesem Rüstzeug ausgestattet, sind wir im weiteren Verlauf des Kapitels in der Lage nachzuweisen, dass neben dem behandelten Ausnahmetypus keine weiteren Ausnahmegruppen mit alternierendem Sockel auftreten (vgl. (6.8)).

Im letzten Kapitel werden abschließend die in den vorangegangenen Abschnitten gewonnenen Resultate zu Aussagen über minimale p-Grade in primitiven Permutationsgruppen zusammengefasst. Insbesondere erhalten wir dabei die beiden oben zitierten Resultate.

Ich möchte mich ganz herzlich bei Prof. Dr. W. Knapp für die sehr gute Betreuung zu der vorliegenden Arbeit bedanken. Seine Unterstützung und Anregungen waren mir stets eine große Hilfe.

Kapitel 1

Grundlagen

In dieser Arbeit werden ausschließlich endliche Gruppen und endliche Mengen betrachtet. Wir verwenden die in der Theorie der Permutationsgruppen gebräuchlichen Bezeichnungen, wie sie etwa in den Arbeiten von Helmut Wielandt [Wie64] zu finden sind. Das vorliegende Kapitel fasst einige bekannte Resultate und Definitionen zusammen, die im Laufe unserer Abhandlung benötigt werden.

1.1 Permutationsgruppen und Wirkungen

Die *symmetrische Gruppe* $\mathrm{Sym}(\Omega)$ besteht aus sämtlichen Permutationen der Menge Ω. Ihre Untergruppen werden als *Permutationsgruppen* bezeichnet. Die Elemente der Menge Ω nennen wir *Punkte*. Für das Bild eines Punktes $\alpha \in \Omega$ unter der Permutation $g \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ benutzen wir die Notation α^g.

Unter einer *Wirkung* einer Gruppe G auf einer Menge Ω versteht man eine Abbildung

$$\Omega \times G \longrightarrow \Omega \qquad , \qquad (\alpha, g) \longmapsto \alpha^g,$$

welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $\alpha^1 = \alpha$ für alle $\alpha \in \Omega$,

(ii) $(\alpha^g)^h = \alpha^{gh}$ für alle $\alpha \in \Omega$ und alle $g, h \in G$.

Konvention: Operiert die Gruppe G auf der Menge Ω so sprechen wir das Paar (Ω, G) als *Gruppenraum* (kurz: *G-Raum*) an.

Bildet nun (Ω, G) einen G-Raum, so liefert die Abbildung

$$\psi: \quad G \longrightarrow \mathrm{Sym}(\Omega) \qquad , \qquad g \longmapsto (\alpha \mapsto \alpha^g)$$

einen Gruppenhomomorphismus von G in $\mathrm{Sym}(\Omega)$. Das Bild von ψ heißt die von G auf Ω induzierte Permutationsgruppe; wir schreiben dafür G^Ω. Ist ψ injektiv, so wirkt G *treu* auf Ω. Insbesondere operieren Permutationsgruppen $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ stets treu auf Ω.

Zwei Gruppenräume (Ω, G) und $(\tilde{\Omega}, \tilde{G})$ sind zueinander *isomorph* (im Zeichen $(\Omega, G) \cong (\tilde{\Omega}, \tilde{G})$), wenn ein Gruppenisomorphismus σ von G auf $\tilde{G}$ und eine Bijektion τ von Ω auf $\tilde{\Omega}$ existiert derart, dass für alle $\alpha \in \Omega$ und alle $g \in G$

$$(\alpha^g)^\tau = (\alpha^\tau)^{(g^\sigma)}$$

gilt. Entsprechend heißen zwei Permutationsgruppen $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ und $\tilde{G} \leq \mathrm{Sym}(\tilde{\Omega})$ *permutationsisomorph* oder *ähnlich*, wenn die natürlichen Wirkungen der G-Räume (Ω, G) und $(\tilde{\Omega}, \tilde{G})$ isomorph sind.

Die folgenden Begriffsbildungen beziehen sich auf Permutationsgruppen, lassen sich jedoch ohne Schwierigkeiten auch auf Wirkungen übertragen.

Die *Fixpunktmenge* eines Elementes $g \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ ist die Menge

$$\Omega_g := \{\, \alpha \in \Omega \mid \alpha^g = \alpha \,\}.$$

Das Komplement der Fixpunktmenge von g in Ω wird mit ${}^g\Omega$ abgekürzt und *Träger* von g genannt. Unter dem *Grad* eines Gruppenelementes $g \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ verstehen wir die Mächtigkeit des Trägers von g. Bei Gruppenelementen $g \in G$ von Primzahlordnung p, die wir in dieser Arbeit auch als *Primelemente* bezeichnen, ist p ein Teiler des Grades $|{}^g\Omega|$.
Analog können die Begriffe *Fixpunktmenge, Träger* und *Grad* einer Permutationsgruppe $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ definiert werden. Die Fixpunktmenge von G entspricht dann dem Schnitt der Fixpunktmengen, der Träger von G der Vereinigung der Träger sämtlicher Gruppenelemente in G.

Der *punktweise Stabilisator* der Menge $\Delta \subseteq \Omega$ in $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ ist die Untergruppe

$$G_\Delta := \{\, g \in G \mid \delta^g = \delta \quad \forall\, \delta \in \Delta \,\}.$$

Bei einelementigen Teilmengen $\Delta = \{\alpha\} \subseteq \Omega$ schreiben wir statt $G_{\{\alpha\}}$ lediglich G_α.

Die *Bahn* von $\alpha \in \Omega$ unter $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ wird durch

$$\alpha^G := \{\alpha^g \mid g \in G\}$$

festgelegt. Enthält diese mindestens zwei Punkte, so bildet sie eine *lange Bahn* von G. Für die Partition von Ω in G-Bahnen benutzen wir die Schreibweise $\Omega : G$, für die Teilmenge der langen Bahnen die Notation $\{\Omega : G\}_{>1}$.

(1.1) Lemma (Klassengleichung) *Es sei $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine Permutationsgruppe und $\alpha \in \Omega$. Dann gilt*

$$|\alpha^G| = |G : G_\alpha|.$$

Für jedes Repräsentantensystem $\{{\alpha_i}^G \mid i \in n\}$ der verschiedenen Bahnen von G folgt

$$|\Omega| = \sum_{i \in n} |G : G_{\alpha_i}|.$$

Beweis: vgl. [Wie64, (3.2)]. □

Besitzt $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ auf $\Omega \neq \emptyset$ lediglich eine einzige Bahn, gilt also $|\Omega : G| = 1$, so nennen wir G *transitiv*, andernfalls *intransitiv*. In transitiven Gruppen sind die Punktstabilisatoren sämtlicher einelementiger Teilmengen von Ω zueinander konjugiert. Transitive Permutationsgruppen deren Punktstabilisatoren G_α für alle $\alpha \in \Omega$ trivial sind, werden als *reguläre* Permutationsgruppen bezeichnet.

Sei nun $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine transitive Permutationsgruppe vom Grad $|\Omega| > 1$. Unter einem *Block* von G verstehen wir eine Teilmenge Δ von Ω derart, dass für alle $g \in G$ entweder

$$\Delta^g = \Delta \quad \text{oder} \quad \Delta^g \cap \Delta = \emptyset$$

gilt. Jede Gruppe $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ weist die *trivialen Blöcke* $\emptyset$, Ω und $\{\alpha\}$ für alle $\alpha \in \Omega$ auf. Falls G keine nichttrivialen Blöcke besitzt, heißt G *primitiv*, andernfalls *imprimitiv*. Für jeden Normalteiler N von $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ bilden die Bahnen von N auf Ω Blöcke. Folglich ist jeder nichttriviale Normalteiler einer primitiven Permutationsgruppe transitiv.

(1.2) Lemma *Sei $|\Omega| > 1$ und $\alpha \in \Omega$. Eine transitive Permutationsgruppe $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ ist genau dann primitiv, wenn G_α eine maximale Untergruppe der Gruppe G bildet.*

Beweis: vgl. [Wie64, (8.2)]. □

Eine 2-*fach transitive*, abgekürzt 2-transitive, Permutationsgruppe $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ wirkt mittels der Zuordnung

$$(\alpha_i)_{i\in 2}{}^g := (\alpha_i{}^g)_{i\in 2} \qquad \text{für alle} \quad \alpha_i \in \Omega, g \in G$$

transitiv auf der Menge $\Omega^{[2]}$ der injektiven 2-Tupel von Ω. Offenbar ist jede 2-transitive Gruppe $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ primitiv. Primitive Permutationsgruppen, welche nicht 2-transitiv auf Ω operieren, werden als *uniprimitive* Permutationsgruppen bezeichnet.

1.2 Kranzprodukte

Sei $A \leq \mathrm{Sym}(\Lambda)$ und $B \leq \mathrm{Sym}(\Delta)$ mit $\Lambda \neq \emptyset \neq \Delta$. Dann wirkt A auf B^Λ via

$$(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}{}^a := (b_{\lambda^{a^-}})_{\lambda\in\Lambda}$$

als Gruppe von Automorphismen.

Das bezüglich dieser Wirkung gegebene semidirekte Produkt $G := A \ltimes B^\Lambda$, definiert durch

$$\begin{aligned} \big(a', (b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big) \cdot \big(a, (b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big) \quad &:= \quad \big(a'a, (b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}{}^a \cdot (b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big) \\ &= \quad \big(a'a, (b'_{\lambda^{a^-}} \cdot b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big), \end{aligned}$$

heißt *Kranzprodukt* von A mit B über Λ. Die Gruppe B wird *Basisgruppe*, der zu B^Λ kanonisch isomorphe Normalteiler von G *Basisnormalteiler* genannt. Für das Kranzprodukt von A mit B über Λ verwenden wir die abkürzende Schreibweise

$$G =: B \underset{\Lambda}{\wr} A.$$

Offenbar besitzt das Kranzprodukt die Ordnung

$$|B \underset{\Lambda}{\wr} A| = |A| \cdot |B|^{|\Lambda|}.$$

Bei der Behandlung primitiver Permutationsgruppen treten Kranzprodukte auf. Und zwar in der auf Δ^Λ durch

$$(\delta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}{}^{(a,\,(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})} \quad := \big(\delta_{\lambda^{a^-}}{}^{b_\lambda}\big)_{\lambda\in\Lambda}$$

definierten *Produktwirkung*.

(1.3) Satz *Es sei $A \leq \mathrm{Sym}(\Lambda)$ eine transitive Permutationsgruppe vom Grad > 1. Die Gruppe $B \leq \mathrm{Sym}(\Delta)$ sei primitiv, aber nicht regulär. Dann ist das Kranzprodukt $B \underset{\Lambda}{\wr} A$ bezüglich der Produktwirkung auf Δ^Λ primitiv.*

Beweis: vgl. [Cam81, (3.2)]. □

Konvention: In der in Satz (1.3) beschriebenen Situation bezeichnen wir die Permutationsgruppe $B \underset{\Lambda}{\wr} A \leq \mathrm{Sym}(\Delta^\Lambda)$ auch als *Blow-up* von B.

Im Gegensatz dazu ist die durch

$$(\lambda, \delta)^{(\,a,\,(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})} := (\lambda^a,\, \delta^{\,b_{\lambda^a}})$$

auf $\Delta \times \Lambda$ definierte *natürliche* Wirkung von $B \underset{\Lambda}{\wr} A$ im Falle $|\Delta|, |\Lambda| > 1$ imprimitiv.

Eine Verallgemeinerung der obigen Konstruktion stellt das *getwistete Kranzprodukt* dar. Es wird erstmals von B.H. Neumann in [Neu63] beschrieben; unsere Darstellung folgt jedoch den Ausführungen Knapps [Kna95].

Seien A, B Gruppen und C eine Untergruppe von A, welche als Automorphismengruppe auf B wirke. Ferner sei $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Transversale von $A : C$.
Dann wird durch die (aus Rechtsmultiplikation gewonnene) kanonische Wirkung von A auf $A : C$ via

$$C\,t_\lambda\, a = C\, t_{\lambda^a} \qquad \text{für } \lambda \in \Lambda, a \in A$$

eine transitive Wirkung von A auf Λ induziert.
Da $a^{k(\lambda)} := t_{\lambda^{a^-}}\, a\, t_\lambda^-$ ein Element in C bildet, erhalten wir mittels der Festlegung

$$(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}{}^a := (b_{\lambda^{a^-}}{}^{a^{k(\lambda)}})_{\lambda\in\Lambda}$$

eine Wirkung w von A auf B^Λ. Wir nennen w die mit B *verschränkende* Wirkung von A.

Das daraus entstehende semidirekte Produkt $G := A \ltimes B^\Lambda$ mit der Verknüpfungsregel

$$\begin{aligned}\big(a',\,(b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big)\cdot\big(a,\,(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big) \quad &:= \quad \big(a'a,\,(b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}{}^a\cdot(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big)\\ &= \quad \big(a'a,\,(b'_{\lambda^{a^-}}{}^{a^{k(\lambda)}}\cdot b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big),\end{aligned}$$

heißt das durch w und $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *verschränkte* oder *getwistete Kranzprodukt* von A mit B. Für dieses verwenden wir die Notation

$$G =: B \underset{A:C\,{}^{w}_{(t_\lambda)}}{\wr} A.$$

Das getwistete Kranzprodukt operiert auf B^Λ mittels

$$(b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}{}^{(a,\,(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})} := ({b'_{\lambda^{a^-}}}^{a^{k(\lambda)}} \cdot b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}.$$

Diese Wirkung wird als die *bezüglich A kanonische Wirkung* von G auf B^Λ bezeichnet. Sie ist genau dann treu auf B^Λ, wenn die verschränkende Wirkung treu auf B^Λ wirkt.

1.3 Zahlentheoretische Hilfsmittel

Aus dem Bereich der Zahlentheorie benötigen wir die folgende Begriffsbildung.

(1.4) Definition *Es sei $1 \neq q = r^f$ eine Primzahlpotenz und $p \neq r$ eine Primzahl. Existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $p \mid q^k - 1$ und $p \nmid q^l - 1$ für alle $l \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq l < k$, so nennt man p einen q-primitiven Primteiler von $q^k - 1$.*

Konvention: Ist p ein q-primitiver Primteiler von $q^k - 1$, so schreiben wir abkürzend $p \perp q^k - 1$. Ferner sei $p \perp q - 1$ gleichbedeutend mit $p \mid q - 1$.

Über die Existenz q-primitiver Primteiler eines Wertes $q^k - 1$ gibt der folgende Satz Auskunft.

(1.5) Satz (Zsigmondy) *Seien $2 \leq q, k \in \mathbb{N}$. Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:*

1. *Es existiert eine Primzahl p mit $p \perp q^k - 1$.*

2. *Es ist $q = 2$ und $k = 6$.*

3. *Die Zahl q ist eine Mersennesche Primzahl und es ist $k = 2$.*

Beweis: vgl. [Zsi92]. $\square$

1.4 Klassische Gruppen

1.4.1 Geometrische Voraussetzungen

Sei $1 \neq q = r^f$ eine Potenz der Primzahl r und $V = V(n, q^u)$ ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{F}_{q^u}$. Wir versehen den Vektorraum V mit einer geeigneten biadditiven Abbildung $(\, , \,)$ von $V \times V$ in $\mathbb{F}_{q^u}$. Dabei setzen wir voraus, dass einer der folgenden Fälle vorliegt:

Fall L $(\, , \,)$ ist trivial, das heißt es gilt $(v, w) = 0$ für alle v, $w \in V$;

Fall S $(\, , \,)$ ist eine nicht-ausgeartete symplektische Form;

Fall U $(\, , \,)$ ist eine nicht-ausgeartete Hermitesche Form;

Fall O $(\, , \,)$ ist eine zu einer quadratischen Form $Q : V \mapsto \mathbb{F}_{q^u}$ assoziierte nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform.

Im Fall U setzen wir $u = 2$, in allen anderen Fällen $u = 1$. Bei Vorliegen des Unterfalls $X \in \{ \mathrm{L, S, U, O} \}$ bezeichne $X(n, q)$ das Paar $\big(V; (\, , \,)\big)$.

Unter einem *nicht-ausgearteten* Teilraum $W \leq V$ verstehen wir einen Unterraum W von V, für den in den Fällen $X \in \{\mathrm{S, U}\}$ die Restriktion der Abbildung $(\, , \,)$ auf $W \times W$, im Falle $X = \mathrm{O}$ die Einschränkung der quadratischen Form Q auf W, nicht-ausgeartet ist. Der Unterraum W bildet dann, entsprechend dem Vektorraum V, einen symplektischen, unitären oder orthogonalen Vektorraum.

Demgegenüber heißt ein Unterraum $W \leq V$ *total isotrop*, wenn die Restriktion der Zuordnung $(\, , \,)$ auf $W \times W$ verschwindet. Darüber hinaus wird im Falle $X = \mathrm{O}$ der Teilraum $W \leq V$ *total singulär* genannt, wenn die Einschränkung der quadratischen Form Q auf W trivial ist. In den Fällen $X \in \{\mathrm{S, U}\}$ verwenden wir hingegen die Begriffe „total singulär“ und „total isotrop“ als Synonyme.
Entsprechend bezeichnen wir einen Vektor $v \in V$ als *(total) isotrop* bzw. *(total) singulär*, wenn der von v erzeugte Unterraum $\langle v \rangle$ total isotrop bzw. total singulär ist.

Eine *Standardbasis* von $X(n, q)$ wird wie in [KL90, S. 22ff.] definiert. Gilt $n \geq 3$, so enthält sie zwei total singuläre Vektoren, welche eine *hyperbolische Ebene* (d.h. eine Ebene $E = \langle e_0, f_0 \rangle$ mit $(e_0, f_0) = 1$) erzeugen.

1.4.2 Kurzdefinition und Notation klassischer Gruppen

Wir verwenden die oben eingeführten Funktionen (,) zur Bildung verschiedener Untergruppen der *generellen semilinearen Gruppe* $\Gamma\mathrm{L}_n(q)$. Letztere besteht aus allen bijektiven semilinearen Abbildungen des Vektorraumes V und kann als semidirektes Produkt der *generellen linearen Gruppe* $\mathrm{GL}_n(q)$ mit einer zur Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^u})$ isomorphen Untergruppe $\langle \Phi_B \rangle$ aufgefasst werden (Der Großbuchstabe B steht dabei für eine beliebige aber feste Basis $\{\, b_i \mid i \in n\}$ von V; Φ_B für die vom Frobenius-Automorphismus $\sigma : \mathbb{F}_{q^u} \longrightarrow \mathbb{F}_{q^u}\ ,\ x \longmapsto x^r$ induzierte $\mathbb{F}_{q^u}$-semilineare Abbildung $\Phi_B : V \longrightarrow V\ ,\ \sum_{i\in n} v_i b_i \longmapsto \sum_{i\in n} v_i^r b_i$).
In den Fällen L, S, U definieren wir

$$\Gamma(V,q) := \{g \in \Gamma\mathrm{L}(V,q) \,|\, (v^g, w^g) = \tau(g)\cdot(v,w)^{\psi(g)} \text{ für alle } v,w \in V, \\ \text{wo } \tau(g) \in \mathbb{F}_{q^u}{}^*,\ \psi(g) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^u})\},$$

im Fall O hingegen

$$\Gamma(V,q) := \{g \in \Gamma\mathrm{L}(V,q) \,|\, Q(v^g) = \tau(g)\cdot Q(v)^{\psi(g)} \text{ für alle } v \in V, \\ \text{wo } \tau(g) \in \mathbb{F}_q{}^*,\ \psi(g) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)\}.$$

Stets setzen wir

$$\begin{aligned} \Delta(V,q) &:= \{g \in \Gamma(V,q) \,|\, \psi(g) = 1\}, \\ I(V,q) &:= \{g \in \Delta(V,q) \,|\, \tau(g) = 1\}, \\ S(V,q) &:= \{g \in I(V,q) \,|\, \det(g) = 1\}, \\ \Omega(V,q) &:= S(V,q)'. \end{aligned}$$

Bei der Behandlung einzelner Unterfälle benutzen wir die in der Theorie der klassischen Gruppen üblichen Bezeichnungen, die etwa in [KL90, S.15] angegeben sind. $S(V,q)$ entspricht dann je nach Unterfall einer der Gruppen $\mathrm{SL}_n(q), \mathrm{Sp}_n(q), \mathrm{SU}_n(q)$ oder $\mathrm{SO}_n(q)$.

Die zugehörigen projektiven Gruppen entstehen durch Faktorisierung der Skalare und werden durch ein Voranstellen des Buchstabens P gekennzeichnet. Abweichend davon verwenden wir bei einfachen Gruppen häufig auch die Artinsche Notation $L_n(q)$, $S_n(q)$, $U_n(q)$ beziehungsweise $O_n(q)$.

Beachte, dass sich durch die verschiedenen Schreibweisen und Indizierungen Vektorräume, Gruppen-Typen und einzelne Gruppen unterscheiden lassen. Eine Überschneidung tritt nur bei der Bezeichnung $O_n(q)$ auf. Hier sollte jedoch aus dem Kontext hervorgehen, ob mit $O_n(q)$ die projektive orthogonale Gruppe $P\Omega_n(q)$ oder das im Fall O auftretende Äquivalent der klassischen Gruppe $I(V,q)$ gemeint ist.

(1.6) Satz *Bezeichnet $\Omega(V,q)$ eine der oben beschriebenen klassischen Gruppen, so liegt einer der folgenden Fälle vor:*

1. *$\Omega(V,q)$ ist auflösbar. Im Falle $n > 1$ entspricht sie einer der Gruppen* $\mathrm{SL}_2(2)'$, $\mathrm{SL}_2(3)'$, $\mathrm{Sp}_2(2)', \mathrm{Sp}_2(3)'$, $\mathrm{SU}_2(2)'$, $\mathrm{SU}_2(3)'$, $\mathrm{SO}_2^{\pm}(q)'$, $\mathrm{SU}_3(2)'$, $\mathrm{SO}_3(3)'$, $\mathrm{SO}_4^{+}(2)'$ *oder* $\mathrm{SO}_4^{+}(3)'$.

2. *$\Omega(V,q)$ stimmt mit der orthogonalen Gruppe $\Omega_4^+(q)$ (wo $q \geq 4$ ist) überein. Ferner gilt $P\Omega(V,q) \cong L_2(q) \times L_2(q)$.*

3. *$\Omega(V,q)$ ist quasieinfach, das heißt $\Omega(V,q)$ ist eine perfekte Gruppe mit nicht-abelsch einfacher Faktorgruppe $P\Omega(V,q) = \Omega(V,q)/Z(\Omega(V,q))$.*

Beweis: vgl. [KL90, (2.9.2)]. □

Für die Automorphismengruppe einer nicht-abelsch einfachen klassischen Gruppe $P\Omega(V,q)$ gilt mit wenigen Ausnahmen $\mathrm{Aut}(P\Omega(V,q)) = P\Gamma(V,q)$. Andernfalls enthält $\mathrm{Aut}(P\Omega(V,q))$ Graphautomorphismen und $P\Omega(V,q)$ ist entweder $L_n(q)$ mit $n \geq 3$; $S_4(q)$ mit geradem q oder $O_8^+(q)$.

(1.7) Definition *Sei G eine fasteinfache Gruppe mit Sockel $\mathrm{soc}(G) = P\Omega(V,q)$. Wir bezeichnen, [LS99] folgend, eine maximale Untergruppe M von G als Unterraumuntergruppe, wenn M eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

(a) $M = G_W$ ist der Stabilisator eines nicht-trivialen Unterraumes W von V. In den Fällen U, S, O ist der Teilraum W darüber hinaus entweder ein total isotroper nicht-singulärer 1-Raum, total singulär oder nicht-ausgeartet.

(b) Die Gruppe $G \leq \mathrm{Aut}(L_n(q))$ enthält einen Graphautomorphismus von $L_n(q)$ und M entspricht dem Stabilisator einer Fahne $0 < U < W < V$ oder einer Zerlegung $V = U \oplus W$ von V.

(c) Es gilt $\mathrm{soc}(G) = S_n(2^f)$ und $\mathrm{soc}(G) \cap M = O_n^{\pm}(2^f)$ (für ein $f > 0$).

Bemerkung: Wird im Unterfall (c) der Sockel von G mit der zu $S_n(q)$ isomorphen orthogonalen Gruppe $O_{n+1}(q)$ identifiziert, so kann die Gruppe M als Stabilisator eines 1-Raumes (d.h. eindimensionalen Teilraumes) des natürlichen Moduls der Dimension $n+1$ aufgefasst werden.

1.4.3 Invariante orthogonale Zerlegungen

Unter einer *orthogonalen Zerlegung* $V = W \perp W'$ verstehen wir eine direkte Zerlegung von V in zueinander orthogonale Teilräume W, W' (In den Fällen S, U, O erfordert diese Definition also $W' \subseteq W^{\perp} := \{v \in V \mid (v, w) = 0 \text{ für alle } w \in W\}$).
Sie wird *g-invariant* genannt, wenn das Gruppenelement $g \in P\Gamma(V, q)$ die Unterräume W und W' untereinander permutiert. Hält g die Teilräume W und W' fest, so *zentralisiert* g die Zerlegung $V = W \perp W'$. Ist g ein $2'$-Element, dann wird jede g-invariante orthogonale Zerlegung von g zentralisiert.

Für jedes Gruppenelement $g \in P\Gamma(V, q)$ bezeichne $\hat{g}$ ein Element kleinstmöglicher Ordnung im Urbild von g in $\Gamma(V, q)$.
Im Fall $g \in P\Delta(V, q)$ betrachten wir die g-invarianten Teilräume

$$E_\Lambda(\hat{g}) := \oplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda(\hat{g}) \qquad \text{und} \qquad K_\Lambda(\hat{g}) := \cap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda(\hat{g}),$$

wobei $K_\lambda(\hat{g}) := \{\lambda^- v^{\hat{g}} - v \mid v \in V\}$ für jedes $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{F}_{q^u}{}^*$ gesetzt (und bei Aufzählung der Elemente von Λ auf die Mengenklammern verzichtet) wird, und erhalten

(1.8) Lemma *Sei g ein Element in $P\Delta(V, q)$ von Primzahlordnung $p \perp (q^u)^k - 1$ für ein $k > 0$ und $\tau := \tau(\hat{g}) \in \mathbb{F}_{q^u}{}^*$ das in der Definition von $\Gamma(V, q)$ dem Element $\hat{g}$ zugeordnete Körperelement. Dann gilt*

(i) $V = E_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g}) \perp K_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})$ *für jeden Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{F}_{q^u}{}^*$.

(ii) Im Fall $k = 1$ sind, wenn $E_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})$ nicht mit dem Eigenraum $E_\lambda(\hat{g})$ übereinstimmt, die beiden Teilräume $E_\lambda(\hat{g})$ und $E_{\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})$ total singuläre Unterräume von V.

(iii) Im Fall $k > 1$ lässt sich die unter (i) genannte Zerlegung zu

$$V = E_1(\hat{g}) \perp K_1(\hat{g}) = V_{\hat{g}} \perp [V, \langle \hat{g} \rangle]$$

spezialisieren. Darüber hinaus besitzt jeder irreduzible Konstituent von $[V, \langle \hat{g} \rangle]$ als $\langle \hat{g} \rangle$-Modul die Dimension k.

Bemerkung: Es wird *nicht* behauptet, dass die angegebenen Zerlegungen nicht-trivial sind.

Beweis: (i) - Wir zeigen zunächst $E_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g}) \cap K_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g}) = 0$:
Angenommen das Element $w_0 + w_1$ mit $w_0 \in E_\lambda(\hat{g})$ und $w_1 \in E_{\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})$ liegt in $K_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})$. Dann existieren Vektoren u und v in V mit $w_0 + w_1 = \lambda^- u^{\hat{g}} - u$ und

$w_0 + w_1 = \tau^- \lambda^q v^{\hat{g}} - v$. Wir lösen die beiden letztgenannten Gleichungen nach $u^{\hat{g}}$ bzw. $v^{\hat{g}}$ auf und erhalten nach wiederholter Anwendung von $\hat{g}$:

$$u = u^{\hat{g}^p} = \lambda^p u + p \cdot \lambda^p w_0 + \frac{(\tau^- \lambda^{q+1})^p - 1}{\tau^- \lambda^{q+1} - 1} \cdot w_1 = u + p \cdot w_0$$

und

$$v = v^{\hat{g}^p} = (\lambda^{-q}\tau)^p \cdot v + \frac{(\tau^- \lambda^{q+1})^p - 1}{\tau^- \lambda^{q+1} - 1} \cdot w_0 + p \cdot (\lambda^{-q}\tau)^p \cdot w_1 = v + p \cdot w_1.$$

Es folgt daher $p \cdot w_i = 0$ für $i \in 2$, was wegen $(p, q) = 1$ auch $w_0 = w_1 = 0$ impliziert. (Beachte, dass nach Berücksichtigung der Gleichheit $E_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g}) = E_\lambda(\hat{g})$, auch im Fall $\tau^- \lambda^{q+1} = 1$ wie oben argumentiert werden kann).

- Des Weiteren beweisen wir $V = E_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g}) \oplus K_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})$:
Offenbar bildet für $\mu \in \{\lambda, \lambda^{-q}\tau\}$ die durch

$$\Pi_\mu : V \longrightarrow K_\mu(\hat{g}) \qquad , \qquad v \longmapsto \mu^- v^{\hat{g}} - v$$

definierte Abbildung einen Epimorphismus von V in $K_\mu(\hat{g})$ mit Kern $E_\mu(\hat{g})$. Mithin lässt sich der Vektorraum V in

$$\begin{aligned} V &= \operatorname{Ker}\Pi_\lambda \oplus \operatorname{Im}\Pi_\lambda = \operatorname{Ker}\Pi_\lambda \oplus (\operatorname{Ker}\Pi_{\lambda^{-q}\tau|\operatorname{Im}\Pi_\lambda} \oplus \operatorname{Im}\Pi_{\lambda^{-q}\tau|\operatorname{Im}\Pi_\lambda}) \\ &= E_\lambda(\hat{g}) \oplus (E_{\lambda^{-q}\tau}(\hat{g}) \oplus K_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})) = E_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g}) \oplus K_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g}) \end{aligned}$$

zerlegen.

- Es bleibt $E_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g}) \leq K_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})^\perp$ nachzuweisen:
Für jedes $x \in K_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})$ existieren nach Definition von $K_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})$ Vektoren u, $v \in V$ mit $x = \lambda^- u^{\hat{g}} - u$ und $x = \tau^- \lambda^q v^{\hat{g}} - v$. Wird nun $w_0 + w_1 \in E_{\lambda,\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})$ mit $w_0 \in E_\lambda(\hat{g})$ und $w_1 \in E_{\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})$ gewählt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (w_0 + w_1, x) &= (w_0, \tau^- \lambda^q v^{\hat{g}} - v) + (w_1, \lambda^- u^{\hat{g}} - u) \\ &= \tau^{-q}\lambda(w_0, v^{\hat{g}}) - (w_0, v) + \lambda^{-q}(w_1, u^{\hat{g}}) - (w_1, u) \\ &= \tau^{-q}(\lambda w_0, v^{\hat{g}}) - (w_0, v) + \tau^-(\lambda^{-q}\tau w_1, u^{\hat{g}}) - (w_1, u) \\ &= \tau^{-q}(w_0^{\hat{g}}, v^{\hat{g}}) - (w_0, v) + \tau^-(w_1^{\hat{g}}, u^{\hat{g}}) - (w_1, u) \\ &= \tau^{-q}\tau(w_0, v) - (w_0, v) + (w_1, u) - (w_1, u) = 0 \end{aligned}$$

und damit die Aussage von (i).

(ii) Sei $w \in E_{\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})$, dann gilt für alle Vektoren $v \in V$

$$\begin{aligned}(\lambda^- v^{\hat{g}} - v, w) &= \lambda^-(v^{\hat{g}}, w) - (v, w) = \lambda^-(v^{\hat{g}}, \tau^- \lambda^q \lambda^{-q} \tau w) - (v, w)\\ &= \tau^{-q}(v^{\hat{g}}, w^{\hat{g}}) - (v, w) = \tau^{-q}\tau(v, w) - (v, w) = 0\end{aligned}$$

und insbesondere $K_\lambda(\hat{g}) \subseteq E_{\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})^\perp$.
Da aus $w \in E_{\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})$ andererseits $\lambda^- w^{\hat{g}} - w = (\lambda^-)^{q+1}\tau w - w = ((\lambda^-)^{q+1}\tau - 1)w$ geschlossen werden kann, erzwingt die Annahme $\lambda^{-q}\tau \neq \lambda$ auch $E_{\lambda^{-q}\tau}(\hat{g}) \subseteq K_\lambda(\hat{g})$. Es ist daher $E_{\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})$ total isotrop. In orthogonalen Vektorräumen gilt darüber hinaus

$$0 = Q(w^{\hat{g}}) - Q(\lambda^{-q}\tau \cdot w) = (\tau - (\lambda^{-q}\tau)^2) \cdot Q(w),$$

so dass wegen $\lambda^{-q}\tau \neq \lambda$ der Eigenraum $E_{\lambda^{-q}\tau}(\hat{g})$ einen total singulären Teilraum von V bildet.
Ein entsprechendes Vorgehen für den Eigenraum $E_\lambda(\hat{g})$ liefert nun die im Satz unter (ii) formulierte Behauptung.

(iii) Die verbliebene Folgerung ist wohlbekannt (vgl. [KaL82, (2.19)]). Die erste Teilaussage kann jedoch auch aus (i) nach Beachtung der Teilereigenschaften $o(\tau) \mid (p, q^u - 1) = 1$ und $o(\lambda) \mid (p, q^u - 1) = 1$ gewonnen werden. □

Für Primelemente g in $P\Gamma(V, q) \setminus P\Delta(V, q)$ bilden der Fixraum $V_{\hat{g}}$ und der Kommutator $[V, \langle\hat{g}\rangle]$ keine $\mathbb{F}_{q^u}$-Unterräume von V. Dennoch lassen sich in diesem Fall nicht-triviale orthogonale Zerlegungen von V angeben, welche von g zentralisiert werden.

(1.9) Lemma *Sei* $\dim(V) = n > 2$ *und* g *ein Primelement in* $P\Gamma(V, q) \setminus P\Delta(V, q)$. *Dann existiert eine nicht-triviale orthogonale Zerlegung* $V = W \perp W'$ *von* V *in* g*-invariante Teilräume* W *und* W' *derart, dass* $\dim(W) \leq 2$ *gilt.*

Beweis: Wir beweisen die Aussage im nicht-linearen Fall.
Bezeichnet B eine Standardbasis von V und erzeugen die Vektoren $e_0, f_0 \in B$ eine hyperbolische Ebene E, so hält jedes Element in $\langle\bar{\Phi}_B\rangle$ die zueinander orthogonalen, nicht-ausgearteten Unterräume E und $\langle B \setminus \{e_0, f_0\}\rangle$ fest. Weil nach [GL83,(7.2)] jedes Primelement $g \in P\Gamma(V, q) \setminus P\Delta(V, q)$ zu einem Element gleicher Ordnung in $\langle\bar{\Phi}_B\rangle$ konjugiert ist, ergibt sich nun die Behauptung. □

Über halbeinfache Primelemente $g \in P\Gamma(V, q)$, welche keine nicht-triviale orthogonale Zerlegung des Vektorraumes V festhalten, gibt das folgende Lemma Auskunft.

(1.10) Lemma *Sei g ein Element in $P\Gamma(V, q)$ von Primzahlordnung $p \neq r$. Wenn g keine orthogonale Zerlegung des Vektorraumes V in nicht-triviale g-invariante Teilräume von V zulässt, dann gilt:*

(i) *Im Fall* $\dim(V) = n > 2$ *liegt g in $P\Delta(V, q)$.*

(ii) *Entweder wirkt $\langle \hat{g} \rangle$ irreduzibel auf V oder $\hat{g}$ hält eine Zerlegung von V in total singuläre, irreduzible $\langle \hat{g} \rangle$-Moduln fest.*

(iii) *Im Falle O ist n gerade.*

(iv) *Für $g \in P\Delta(V, q)$ kann die Ordnung des Zentralisators $C_{PS(V,q)}(g)$ durch*

$$|C_{PS(V,q)}(g)| \leq \begin{cases} \dfrac{q^n - 1}{q - 1} & \text{im Fall } L, \\ \dfrac{q^n + 1}{q + 1} & \text{im Fall } U, \\ q^{\frac{n}{2}} + 1 & \text{in den Fällen } S \text{ und } O \end{cases}$$

abgeschätzt werden.

Beweis: Aussage (i) ist eine unmittelbare Konsequenz aus dem vorangegangenen Lemma. Die Behauptungen (ii) bis (iv) werden für Gruppenelemente $g \in P\Delta(V, q)$ in [LS91, (1.5)] bewiesen. □

Kapitel 2

Minimale p-Grade und Fixpunktanteile

Der folgende Abschnitt dient der Einführung in die Theorie der minimalen p-Grade. Nach einer Definition des Begriffs und der Präsentation verwandter Konzepte, sollen dabei auch einige nützliche Hilfsmittel, die in den folgenden Abschnitten immer wieder Verwendung finden, bewiesen werden.

Wir beginnen unsere Ausführungen mit der folgenden von Wielandt eingeführten und auf Anregung von Knapp in mein Blickfeld geratenen Begriffsbildung.

(2.1) Definition

(i) Es sei $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine Permutationsgruppe und p ein Primteiler der Ordnung von G. Dann heißt

$$m_p(G) := \min \{ \, |{}^g\Omega| \mid g \in G \textit{ mit } o(g) = p^i \textit{ für ein } i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \, \}$$

minimaler p-Grad von G.

(ii) Unter dem minimalen p-Grad eines G-Raumes (Ω, G) verstehen wir den minimalen p-Grad der von G auf Ω induzierten Permutationsgruppe G^Ω.

Offenbar entspricht der minimale p-Grad einer Permutationsgruppe $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ dem kleinstmöglichen Grad eines Elementes in G von Primzahlordnung p.
Darüber hinaus gilt $m_p(G) = m(G)$ für einen geeigneten Primteiler p von $|G|$, wobei $m(G)$ für den *Minimalgrad*, das heißt den kleinstmöglichen Grad der von 1 verschiedenen Gruppenelemente von G, steht. Die Begriffsbildung stellt daher eine natürliche Verallgemeinerung des Begriffes des Minimalgrades dar.

Weitere elementare Eigenschaften, die sich aus der oben genannten Festlegung ergeben, fassen wir in der sich anschließenden Beobachtung zusammen.

Beobachtung: Es sei $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine Permutationsgruppe und p ein Primteiler der Ordnung von G. Dann gilt

(i) $p \mid m_p(G)$

(ii) $m_p(G) \leq m_p(U)$ für alle $U \leq G$ mit $p \mid |U|$

(iii) $m_p(G) = m_p(S)$ für jede p-Sylowgruppe $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ von G

(iv) $m_p(G) = m_p(G_\alpha)$ falls G transitiv wirkt und $p \mid |G_\alpha|$ für ein $\alpha \in \Omega$.

Unerlässlich für ein sinnvolles Arbeiten mit minimalen p-Graden ist die Invarianz derselben unter Permutationsisomorphie. Das folgende Lemma beweist, dass diese Anforderung von unserer Begriffsbildung erfüllt wird.

(2.2) Lemma *Es seien $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ und $\tilde{G} \leq \mathrm{Sym}(\tilde{\Omega})$ permutationsisomorphe Permutationsgruppen und p ein Primteiler der Ordnung von G. Dann gilt*

$$m_p(G) = m_p(\tilde{G}).$$

Insbesondere besitzen zueinander konjugierte Untergruppen einer Permutationsgruppe gleiche minimale p-Grade.

Beweis: σ bezeichne den durch die Permutationsisomorphie gegebenen Gruppenisomorphismus von G auf $\tilde{G}$, τ die dazugehörige Bijektion von Ω auf $\tilde{\Omega}$. Es sei $\alpha \in \Omega$ ein Fixpunkt des p-Elementes $g \in G$. Dann gilt $\alpha^\tau = (\alpha^g)^\tau = (\alpha^\tau)^{(g^\sigma)}$ und folglich ist $|\Omega_g| \leq |\tilde{\Omega}_{g^\sigma}|$. Gleiche Argumentation für Fixpunkte von g^σ und Ausnutzung der Bijektivität von τ liefert nun Gleichheit. □

Der vorangegangene Beweis zeigt, dass anstelle der Betrachtung des Trägers eines Gruppenelementes häufig auch eine Untersuchung des Komplementes, also der Fixpunktmenge, von Nutzen ist. Wir definieren daher

(2.3) Definition *Es sei (Ω, G) ein G-Raum und $g \in G$. Dann heißt*

$$\mathrm{rfix}_\Omega(g) := \frac{|\Omega_g|}{|\Omega|}$$

Fixpunktanteil (kurz: Fixanteil) von g in Ω.

Das nächste Lemma stellt eine Verbindung zwischen Fixpunkten und Konjugiertenklassen her.

(2.4) Lemma *Sei $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine transitive Permutationsgruppe und $L \trianglelefteq G$ ein auf Ω transitiver Normalteiler von G. Liegt das Gruppenelement g in einem Punktstabilisator G_α, dann gilt*

$$\mathrm{rfix}_\Omega(g) = \frac{|g^G \cap G_\alpha|}{|g^G|} \leq \frac{|g^L \cap G_\alpha|}{|g^L|} \leq \frac{|C_L(g)|}{|\Omega|}.$$

Beweis: Wir identifizieren Ω mit der Menge der Nebenklassen von G_α in G und setzen $r := \mathrm{rfix}_\Omega(g)$ sowie $s := \frac{|g^G \cap G_\alpha|}{|g^G|}$.
Da g einen Anteil r der Nebenklassen $G : G_\alpha$ festhält, existieren mindestens $r \cdot |G|$ Elemente $h \in G$ mit $g^h \in G_\alpha$. Dies erzwingt $r = \frac{r \cdot |G|}{|G|} \leq \frac{r \cdot |G|}{|g^G|} \leq s$.
Weil andererseits G_α einen Anteil s an Konjugierten von g enthält, treten mindestens $s \cdot |G|$ Elemente $h \in G$ mit der Eigenschaft $g^h \in G_\alpha$ beziehungsweise $G_\alpha h^- \cdot g = G_\alpha h^-$ auf. Wir erhalten daher auch $s \leq s \cdot |G_\alpha| = \frac{s \cdot |G|}{|G:G_\alpha|} \leq \frac{|(G:G_\alpha)_g|}{|G:G_\alpha|} = r$ und somit die oben genannte Gleichheit.
Weiter muss eine Nebenklasse Lk von L in G vorhanden sein, die die Abschätzung $s \cdot |g^{Lk}| \leq |g^{Lk} \cap G_\alpha|$ erfüllt. Folglich unterschreitet die Anzahl der Elemente $h \in Lk$ mit $g^h \in G_\alpha$ nicht den Wert $s \cdot |Lk|$. Die Transitivität von L ermöglicht ferner die Wahl $k \in G_\alpha$ (denn dann ist $G = LG_\alpha$), so dass auch in L mindestens $s \cdot |L|$ Elemente $hk^- \in L$ mit $g^{hk^-} \in G_\alpha$ gefunden werden können. Dies liefert nun $s \cdot |g^L| \leq |g^L \cap G_\alpha|$.

Es bleibt uns daher nur noch die letztgenannte Ungleichung zu verifizieren. Wegen $g^L \subseteq Lg$ gilt hier zunächst $|g^L \cap G_\alpha| \leq |(L \cap G_\alpha)g| = |L \cap G_\alpha| = |L_\alpha|$. Ein Ersetzen des Wertes $|g^L|$ durch $|L : C_L(g)|$ führt dann zu der Behauptung. □

Der Beweis von Lemma (2.4) folgt im Wesentlichen der Argumentation von [LS91; (2.5),(2.6)]. Alternativ ließe sich die Gültigkeit der Gleichung $\mathrm{rfix}_\Omega(g) = \frac{|g^G \cap G_\alpha|}{|g^G|}$ jedoch auch mit doppelter Abzählung (vgl. [Dem68, S.4f]) der taktischen Konfiguration $(g^G, H^G, \in)$, wo $H = G_\alpha$ ist, nachweisen. Diese gebietet

$$\begin{aligned} |g^G| \cdot |\{H^k \,|\, k \in G \text{ und } g \in H^k\}| &= |H^G| \cdot |\{g^k \,|\, k \in G \text{ und } g^k \in H\}| \\ &= |G : N_G(H)| \cdot |g^G \cap H|. \end{aligned}$$

Die gewünschte Gleichheit ergibt sich nun nach Anwendung eines Satzes von Jordan (vgl. [Wie64, (3.6)]), der die Transitivität von $N_G(H)$ auf Ω_H sicherstellt (Beachte, dass dieser Zugang auch für andere Untergruppen $H \leq G$ interessante Abschätzungen von $\frac{|g^G \cap H|}{|g^G|}$ hervorbringt).

Bemerkung: Aufgrund von Lemma (2.4) gilt für Untergruppen H, K von G mit $H \leq K$ und Gruppenelemente $g \in H$

$$\mathrm{rfix}_{G:H}(g) \leq \mathrm{rfix}_{G:K}(g).$$

Insbesondere werden die im Verhältnis zum Grad kleinstmöglichen minimalen p-Grade der verschiedenen transitiven Wirkungen einer Gruppe G bei primitiven Wirkungen angenommen.

Aus Lemma (2.4) gewinnen wir ohne große Mühe das folgende Kriterium zur Abschätzung minimaler p-Grade.

(2.5) Lemma (Zentralisatorargument) *Es sei $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine transitive Permutationsgruppe und $L \trianglelefteq G$ ein auf Ω transitiver Normalteiler von G.*
Wenn für alle Elemente $g \in G$ von Primzahlordnung p die Beziehung

$$|\Omega| \geq p \cdot |C_L(g)|$$

erfüllt ist, dann gilt

$$m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|.$$

Beweis (durch Widerspruch): Angenommen es wäre $\mathrm{rfix}_\Omega(g) > \frac{1}{p}$ für ein Primelement $g \in G$ der Ordnung p. Dann folgte aus Lemma (2.4) die Ungleichung $\frac{1}{p} < \mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \frac{|C_L(g)|}{|\Omega|}$. Ein Widerspruch zur Annahme $|\Omega| \geq p \cdot |C_L(g)|$. $\square$

Ein weiteres bedeutendes Kriterium zur Abschätzung minimaler p-Grade liefert das folgende Lemma, das einen Zusammenhang zwischen dem Permutationscharakter und den minimalen p-Graden einer Permutationsgruppe herstellt.

(2.6) Lemma (Charakterargument) *Es sei $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine nicht-zyklische primitive Permutationsgruppe und $\pi = 1 + \sum_{i \in k} \chi_i$ die Zerlegung des komplexwertigen Permutationscharakters π in irreduzible Charaktere von G.*
Wenn unter der Festlegung $\widetilde{\chi_i}(g) := \begin{cases} \chi_i(g) & \text{falls } \chi_i(g) \text{ reell} \\ |\chi_i(g)| & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $i \in k$ und sämtliche Primelemente g der Ordnung p die Abschätzung

$$1 + \chi_i(1) \geq p \cdot [\widetilde{\chi_i}(g) + 1]$$

erfüllt ist, dann gilt

$$m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|.$$

Beweis: Da G' transitiv auf Ω wirkt, sind die Charaktere χ_i nicht-linear (andernfalls würde - entgegen der Feststellung in [Dor71, S.57] - der triviale Charakter im Permutationscharakter $\pi_{|G'}$ nicht mit Vielfachheit 1 auftreten).
Wenn nun für jedes $i \in k$ und jedes Gruppenelement $g \in G$ von Primzahlordnung p die Beziehung $1 + \chi_i(1) \geq p \cdot (\widetilde{\chi}_i(g) + 1)$ vorliegt, erhält man unter Verwendung der wohlbekannten Gleichungen $\pi(1) = |\Omega|$ und $\pi(g) = |\Omega_g|$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in k}(1+\chi_i(1)) &\geq \sum_{i\in k}(p\cdot[\widetilde{\chi}_i(g)+1]) \\
(k-1)+\left(1+\sum_{i\in k}\chi_i(1)\right) &\geq p\cdot\sum_{i\in k}(\widetilde{\chi}_i(g)+1) \\
(k-1)+|\Omega| &\geq p\cdot\left[(k-1)+\left(1+\sum_{i\in k}\widetilde{\chi}_i(g)\right)\right] \\
(k-1)+|\Omega| &\geq p\cdot|\Omega_g|+p\cdot(k-1) \\
|\Omega| &\geq p\cdot|\Omega_g|+(p-1)\cdot(k-1)\geq p\cdot|\Omega_g| \\
|\Omega|-|\Omega_g| &\geq \frac{p-1}{p}\cdot|\Omega|
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung des Lemmas. □

Bemerkung: Bezeichnet in obiger Situation $\xi = \sum_{i\in I}\chi_i$ die Summe zueinander konjugierter irreduzibler Charaktere von G, so bleibt die Aussage des Lemmas auch dann korrekt, wenn die Voraussetzung $1 + \chi_i(1) \geq p \cdot (\widetilde{\chi}_i(g) + 1)$ für alle $i \in I$ durch die schwächere Bedingung $1 + \xi(1) \geq p \cdot (\widetilde{\xi}(g) + 1)$ ersetzt wird.

Das letzte in diesem Abschnitt anzusprechende Lemma wird sich als wesentliches Hilfsmittel bei der Abschätzung minimaler p-Grade fasteinfacher Gruppen vom Lie-Typ erweisen. Der Formulierung des Lemmas schicken wir jedoch den folgenden in seinen Beweis miteingehenden Hilfssatz voraus.

(2.7) Hilfssatz *Sei $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine transitive Permutationsgruppe. Dann gilt: Wenn G auflösbar ist, so ist auch $C_{\mathrm{Sym}(\Omega)}(G)$ auflösbar.*

Beweis: Bekannt ist, dass für transitive Permutationsgruppen $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ mittels der Abbildung $\varphi : N_G(G_\alpha) \longrightarrow C_{\mathrm{Sym}(\Omega)}(G)$, $n \longmapsto (c_n : \alpha^g \mapsto \alpha^{n^- g})$ die Isomorphie $N_G(G_\alpha)/G_\alpha \cong C_{\mathrm{Sym}(\Omega)}(G)$ gewonnen werden kann.
Die Behauptung ergibt sich dann aufgrund der Vererbung der Auflösbarkeit auf isomorphe Gruppen, Untergruppen und Faktorgruppen. □

Mit Hilfe dieses Hilfssatzes erhalten wir

(2.8) Lemma *Es sei* (Ω, G) *ein transitiver Gruppenraum und* $X, Y \leq G$ *Untergruppen von* G *derart, dass* X *auflösbar und das letzte Glied* $Y_1 = Y^\infty$ *der Ableitungsreihe von* Y *quasieinfach ist.*
Dann liegt einer der folgenden beiden Fälle vor:

1. *Es gilt* $Y_1 \leq G_w$ *für ein* $\omega \in \Omega$ *oder*

2. *Für jedes Gruppenelement* $g \in Y \times X$*, dessen Projektion* g_Y *in* Y *die Untergruppe* Y_1 *nicht zentralisiert, ist*

   $$\mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \max_\Lambda \{\mathrm{rfix}_\Lambda(C_Y(Y_1) \cdot g_Y) \mid \Lambda \textit{ ist ein treuer primitiver } Y/C_Y(Y_1)\textit{-Raum}\}.$$

Beweis: Wir beweisen, dass bei Nichtvorliegen von 1. Fall 2. erfüllt sein muss. Dazu setzen wir zunächst $D := Y \times X$ und $C := O_{\mathrm{solv}}(Y) \times X$ (wobei offenbar $O_{\mathrm{solv}}(Y) = C_Y(Y_1)$ ist) und wählen eine beliebige (aber feste) D-Bahn Δ von Ω.
Mit diesen Festlegungen wirkt die Faktorgruppe D/C transitiv auf der Menge $\Lambda := \{\Lambda_j \mid j \in J\} = \Delta : C$ der C-Bahnen von Δ. Wir wollen nun mittels eines Widerspruchsbeweises zeigen, dass D/C auch treu auf Λ operiert. Da Y_1 quasieinfach ist, muss dazu nur $Y_1 \not\leq D_\Lambda$ nachgewiesen werden (denn wenn der Normalteiler $D_\Lambda \trianglelefteq D$ die Gruppe Y_1 nicht enthält, ergibt sich aus $D_\Lambda \cap Y_1 \leq Z(Y_1)$ und $D_\Lambda / D_\Lambda \cap Y_1 \cong D_\Lambda Y_1 / Y_1 \leq D/Y_1$ die Auflösbarkeit von D_Λ. Mithin ist $D_\Lambda \leq C$ und folglich auch $(D/C)_\Lambda = C$).
Wäre also $Y_1 \leq D_\Lambda$, so folgte bei Nichtvorliegen von Unterfall 1. für alle $j \in J$ $Y_1^{\Lambda_j} \neq 1$ (andernfalls erhielten wir für alle $j \in J$ $\quad Y_1^{\Lambda_j} = 1$ und damit die zu unserer Voraussetzung im Widerspruch stehende Folgerung $Y_1 \leq D_\Delta \leq G_\omega$ für ein $\omega \in \Delta \subseteq \Omega$). Darüber hinaus implizierte nach [Kur77, S.23 (6)] die Beziehung $[C, Y_1] \leq Z(Y_1)$ unter den gegebenen Annahmen auch $[C, Y_1'] = 1$. Wegen $Y_1 = Y_1'$ würde daher $Y_1^{\Lambda_j}$ die transitive, auflösbare Gruppe C^{Λ_j} zentralisieren. Hilfssatz (2.7) lieferte nun die Auflösbarkeit von $1 \neq Y_1^{\Lambda_j} \leq C_{\mathrm{Sym}(\Lambda_j)}(C^{\Lambda_j})$. Dies widerspricht jedoch unserer Voraussetzung Y_1 sei eine quasieinfache (und insbesondere perfekte) Gruppe.

Wir verwenden die eben gewonnenen Erkenntnisse über die Permutationsgruppe $D/C \leq \mathrm{Sym}(\Lambda)$ um den Fixpunktanteil von g in Δ abzuschätzen.
Da mit dem Punkt $\delta \in \Delta$ auch der Block δ^C von g festgehalten wird, schließen wir zunächst

$$\mathrm{rfix}_\Delta(g) \leq \mathrm{rfix}_\Lambda(Cg) = \mathrm{rfix}_\Lambda(Cg_Y).$$

(wobei $|\Lambda_{Cg_Y}| < |\Lambda|$ gilt, weil D/C treu auf Λ operiert und g_Y nicht im Zentralisator $C_Y(Y_1)$ liegt). Aufgrund der leicht zu verifizierenden Isomorphie der Gruppenräume $(\Lambda, D/C)$ und $(\Lambda, Y/C_Y(Y_1))$ folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{rfix}_\Delta(g) &\leq \mathrm{rfix}_\Lambda(C_Y(Y_1) \cdot g_Y) \\ &\leq \max_\Sigma \{\mathrm{rfix}_\Sigma(C_Y(Y_1) \cdot g_Y) \mid \Sigma \text{ ist ein treuer primitiver } Y/C_Y(Y_1)\text{-Raum}\} \end{aligned}$$

Summierung der oberen Schranken für die Mächtigkeit der Fixpunktmengen $(\Delta)_g$ für alle $\Delta \in \Omega : D$ und Berücksichtigung der in der Bemerkung nach Lemma (2.4) festgehaltenen Tatsache, dass maximale Fixpunktanteile stets von primitiven Permutationsgruppen angenommen werden, liefert nun die zweite Behauptung des Hilfssatzes. □

Eine zu Lemma (2.8) ähnliche Aussage findet sich schon in [GM98, (2.1)] (Dort jedoch mit dürftigem Beweis). Die Argumentation in der Beweisführung weist hingegen Parallelen zu den Begründungen in [LS91, (2.8)] auf.

Kapitel 3

Minimale p-Grade ausgewählter Klassen von Permutationsgruppen

In diesem Kapitel geben wir Abschätzungen für die minimalen p-Grade verschiedener Klassen von Permutationsgruppen an. Obwohl diese Klassen in Hinblick auf eine spätere Anwendung des O'Nan-Scott-Theorems ausgewählt wurden, wird im vorliegenden Kapitel in der Argumentation von der etwaigen Primitivität der betrachteten Permutationsgruppen kein Gebrauch gemacht.

3.1 Minimale p-Grade affiner Gruppen

Wir wollen zunächst die minimalen p-Grade einer in natürlicher Weise auf dem ihr zu Grunde liegenden Vektorraum operierenden affinen Gruppe bestimmen. Für diese ergibt sich

(3.1) Satz *Sei* $1 \neq q = r^f$ *eine Potenz der Primzahl* r, $1 < n \in \mathbb{N}$. *Es bezeichne* $\mathrm{AGL}_n(q)$ *die affine lineare Gruppe in ihrer natürlichen Wirkung auf den Vektoren des Vektorraumes* ${\mathbb{F}_q}^n$. *Ferner sei* p *ein Primteiler der Ordnung von* $\mathrm{AGL}_n(q)$. *Dann gilt*

$$\begin{array}{ll} m_p(\mathrm{AGL}_n(q)) = q^{n-1} \cdot (q-1) & \textit{, falls} \quad p = r, \\ m_p(\mathrm{AGL}_n(q)) = q^{n-k} \cdot (q^k - 1) & \textit{, falls} \quad p \perp q^k - 1. \end{array}$$

Beweis: Da jeder Primteiler der Ordnung von $\mathrm{AGL}_n(q)$ auch die Ordnung eines Punktstabilisators teilt, genügt es die Gruppe $\mathrm{GL}_n(q)$ zu betrachten.

I. Fall: $p = r$
Es bezeichne $e_{ij} := (\delta_{ik}\delta_{jl})_{kl}$ die (i,j)-Basismatrix in ${\mathbb{F}_q}^{n\times n}$. Dann hält die Transvektion $t_{0n-1} := 1 + e_{0n-1}$ genau q^{n-1} Punkte fest. Wir erhalten daher den oben genannten Wert als obere Schranke des minimalen r-Grades.
Da jedes Element in $\mathrm{GL}_n(q)$ einen echten Unterraum des ${\mathbb{F}_q}^n$ als Fixpunktmenge besitzt, kann der gegebene Wert nicht unterschritten werden. Es folgt daher die gewünschte Gleichheit.

II. Fall: $p \neq r$, d.h. es existiert genau ein $1 \leq k \leq n$ derart, dass $p \perp q^k - 1$ gilt.
Offenbar ist die zyklische Gruppe $\mathrm{GL}_1(q^k) \cong {\mathbb{F}_{q^k}}^*$ permutationsisomorph zu einer Untergruppe der $\mathrm{GL}_n(q)$. Daher existieren Matrizen in $\mathrm{GL}_n(q)$, welche q^{n-k} Punkte festhalten und Ordnung $p \perp q^k - 1$ besitzen. Mithin gilt $m_p(\mathrm{GL}_n(q)) \leq q^{n-k} \cdot (q^k - 1)$.
Angenommen der minimale p-Grad würde den Wert $q^{n-k} \cdot (q^k - 1)$ unterschreiten. Dann erhielten wir $m_p(\mathrm{GL}_n(q)) = q^{n-l} \cdot (q^l - 1)$ für ein $l < k$ und $p \neq r$ würde den Wert $q^l - 1$ teilen. Folglich wäre p – im Widerspruch zur Voraussetzung – kein q-primitiver Teiler von $q^k - 1$. Daher ist $q^{n-k} \cdot (q^k - 1)$ nicht nur obere, sondern auch untere Schranke des minimalen p-Grades und die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung: Ist $n = 1$ so ändert sich lediglich der minimale r-Grad. In diesem Fall wirkt jedes Element der Ordnung r fixpunktfrei.

Eine unmittelbare Konsequenz aus dem vorangegangenen Satz ist

(3.2) Korollar *Sei $1 \neq q = r^f$ eine Potenz der Primzahl r, $0 < n \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $G \leq \mathrm{AGL}_n(q)$ eine in natürlicher Weise auf den Vektoren des Vektorraumes ${\mathbb{F}_q}^n$ wirkende affine Gruppe. Ist p einen Primteiler der Ordnung von G, so gilt*

$$m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot q^n.$$

Beweis: Ist p ein q-primitiver Teiler von $q^k - 1$, so erhalten wir
$$\tfrac{p-1}{p} \cdot q^n \leq \tfrac{q^k-2}{q^k-1} \cdot q^n \leq \tfrac{q^k-1}{q^k} \cdot q^n = m_p(\mathrm{AGL}_n(q)) \leq m_p(G).$$
Im Falle $p = r$ gilt $\frac{p-1}{p} \cdot q^n \leq \frac{q-1}{q} \cdot q^n = q^{n-1} \cdot (q-1) = m_p(\mathrm{AGL}_n(q)) \leq m_p(G)$. $\square$

3.2 Minimale p-Grade von Gruppen vom Diagonaltyp

Eine weitere Klasse von Permutationsgruppen bilden die in [LPS88] näher beschriebenen Gruppen vom Diagonaltyp. Diese Klasse transitiver Permutationsgruppen besitzt weit weniger übersichtliche Werte minimaler p-Grade, als die im vorangegangenen Abschnitt behandelten affinen Gruppen.

(3.3) Satz *Es bezeichne $P \leq \mathrm{Sym}(k)$ eine Permutationsgruppe und A eine fasteinfache Gruppe mit Sockel $\mathrm{soc}(A) = T$. Die Gruppe*

$$G := \{ (\pi, (a_i)_{i\in k}) \mid \pi \in P,\ a_i \in A \text{ und } a_i \equiv a_j \pmod{\mathrm{Inn}(T)} \text{ für alle } i, j \in k \}$$

wirke in der Diagonalwirkung auf Ω (d.h. es ist $G_\alpha := \{ (\pi, (a)_{i\in k}) \mid \pi \in P,\ a \in A \}$ und $\Omega = G : G_\alpha$). Ferner bezeichne $A^{T^{k-1}}$ die induzierte Permutationsgruppe der von A auf T^{k-1} durch ${(t_i)_{i\in k-1}}^a := ({t_i}^a)_{i\in k-1}$ definierten Wirkung und p einen Primteiler der Ordnung von G. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
m_p(G) &= m_p(A^{T^{k-1}}) && \text{, falls } \quad p \mid |A| \text{ und } p \nmid |P|,\\
m_p(G) &= |T|^{k-1} - |T|^{k-1-\frac{p-1}{p}m_p(P)} && \text{, falls } \quad p \nmid |A|,\ p \mid |P| \text{ mit } m_p(P) \neq k,\\
m_p(G) &= |T|^{k-1} - |T|^{\frac{k}{p}-1} \cdot \max_{a\in A,\, o(a)\mid p} |T_p(a)| && \text{, falls } \quad p \nmid |A|,\ p \mid |P| \text{ mit } m_p(P) = k.
\end{aligned}
$$

$$\text{mit } T_p(a) := \{t \in T \mid \prod_{i=0}^{p-1} t^{(a^-)^i} = 1\}$$

Ist p ein Primteiler von $(|A|, |P|)$, so ist der minimale p-Grad von G das Minimum derjenigen Werte, die entstehen, wenn p wie ein Primteiler behandelt wird, welcher lediglich eine der genannten Gruppenordnungen teilt.

Beweis: Ist G vom diagonalen Typ, so kann gemäß [LS91, S. 310] die Menge Ω mit dem direkten Produkt T^{k-1} identifiziert werden. Für $\alpha \in \Omega$ ergibt sich dann die Wirkung von G_α auf T^{k-1} aus den folgenden Festsetzungen:

(i) $(a)_{i\in k} \in A^k$ bildet $(t_i)_{i\in k-1}$ auf $({t_i}^a)_{i\in k-1}$ ab.

(ii) $\pi \in \mathrm{Sym}(k)_{k-1}$ führt $(t_i)_{i\in k-1}$ auf $(t_{i^{\pi^-}})_{i\in k-1}$ über,

(iii) $\pi = (0, k-1) \in \mathrm{Sym}(k)$ bildet $(t_i)_{i\in k-1}$ auf $({t_0}^-, {t_0}^- t_1, \ldots, {t_0}^- t_{k-2})$ ab.

Wir führen die folgende Fallunterscheidung durch. Dabei sei $g = (\pi, (a)_{i\in k})$ ein Element in G_α mit Ordnung p.

I. Fall: $\pi \neq 1$

(a) Fall: $1 \neq \pi \in P_l$ für ein $l \in k$
In diesem Fall können wir $\pi \in P_{k-1}$ annehmen, so dass für jeden Fixpunkt $(t_i)_{i\in k-1}$ von g und jedes $i \in k-1$ die Gleichung $t_{i^{\pi^-}} = t_i{}^{a^-}$ gilt. Deshalb sind die Werte t_j für $j \in i^{\langle\pi\rangle}$ durch den Wert t_i eindeutig bestimmt. Wir erhalten somit die Abschätzung $|\Omega_g| \leq |T|^{|(k-1):\langle\pi\rangle|}$.
Die Wahl $a = 1$ zeigt, dass diese Schranke angenommen wird.
Da nun die Ordnung von g (und damit auch von π) p beträgt, ist die Anzahl der Bahnen von π genau dann maximal, wenn π in P minimalen p-Grad besitzt. Dann gilt jedoch

$$|(k-1):\langle\pi\rangle| = k-1-m_p(P)+\frac{m_p(P)}{p} = k-1-\frac{p-1}{p}\cdot m_p(P)$$

und folglich muss $|T|^{k-1-\frac{p-1}{p}m_p(P)}$ eine obere Schranke für die Mächtigkeit der Fixpunktmenge eines jeden p-Elementes in G sein.

(b) Fall: $\pi \in P \setminus (\bigcup_{l\in k} P_l)$, d.h. π wirkt fixpunktfrei auf k.
Setze $\phi := \pi \cdot (n, k-1)$ mit $n = (k-1)^\pi$. Dann ist ϕ ein Element im Punktstabilisator $\mathrm{Sym}(k)_{k-1}$ mit $|(k-1):\langle\phi\rangle| = |(k):\langle\pi\rangle|$ (denn jede Bahn von π, welche $k-1$ nicht enthält ist auch eine Bahn von ϕ; die verbleibende Bahn zerfällt hingegen in $(k-1)^\pi \setminus \{k-1\} \in (k-1):\langle\phi\rangle$ und $k-1 \notin (k-1):\langle\phi\rangle$).
Wegen $\pi = \phi\cdot(n,k-1)$ ergeben sich daher für Fixpunkte $(t_i)_{i\in k-1} \in \Omega_g$ die Bedingungen $t_{n^{\phi^-}} = (t_n{}^{a^-})^-$ und $t_{i^{\phi^-}} = t_{n^{\phi^-}} t_i{}^{a^-}$ falls $n \neq i \in k-1$. Es sind also auch hier die Werte t_j für $j \in i^{\langle\phi\rangle}$ durch den Wert t_i eindeutig bestimmt und damit $|\Omega_g| \leq |T|^{|(k-1):\langle\phi\rangle|} = |T|^{|(k):\langle\pi\rangle|} = |T|^{\frac{k}{p}}$.

Ein Vergleich dieses Wertes mit der in Unterfall (a) gewonnenen Schranke zeigt nun, dass letztere nur dann überschritten werden kann, wenn $m_p(P) > k - \frac{p}{p-1} \geq k-p$ ist, wegen der Teilereigenschaft $p \mid k$ also $m_p(P) = k$ gilt.
Unter dieser zusätzlichen Voraussetzung, erhalten wir – mittels Rekursion – aus den obigen Bedingungen für Fixpunkte von g die Einschränkung $\prod_{i=0}^{p-1} t_{k-1^{\pi\phi^-}}{}^{(a^-)^i} = 1$. Diese führt zu den im Satz genannten Werten minimaler p-Grade.

II. Fall $\pi = 1$
Hier entspricht die Anzahl der Fixpunkte von g wegen der Gleichheit ${t_i}^a = t_i$ für $(t_i)_{i \in k-1} \in \Omega_g$ offenbar dem Wert $|\Omega_g| = |T_a|^{k-1}$. Die von der natürlichen Wirkung von A auf T abgeleitete Wirkung von A auf T^{k-1} besitzt die gleiche Anzahl an Fixpunkten.

Die Behauptung ergibt sich nun nach einer Berücksichtigung der verschiedenen Teilereigenschaften von p. $\square$

Bemerkung: Wie der angegebene Beweis zeigt, erweist sich die Maximumsbildung im Unterfall ($p \mid |P|$ mit $m_p(P) = k$) nur für Primteiler $p \,|\, (|A|, |P|)$ von Relevanz. Gilt hingegen $p \nmid |A|$, so kann der zweite Faktor des Subtrahenden durch die Mächtigkeit der p-Menge $T_p(id) = \{t \in T \,|\, t^p = 1\}$ von T ersetzt werden.

Wir wollen nun zeigen, dass der minimale p-Grad einer in der Diagonalwirkung operierenden Permutationsgruppe $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ mindestens den Wert $\frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ annimmt.
Dazu sind zwei Aussagen über das Verhalten von Automorphismen nicht-abelsch einfacher Gruppen heranzuziehen, die schon für sich betrachtet von Interesse sein dürften.
Der erste Hilfssatz gibt eine Abschätzung für die Anzahl der unter einem Automorphismus invertierten Gruppenelemente an.

(3.4) Hilfssatz *Jeder Automorphismus einer nicht-abelsch einfachen Gruppe invertiert höchstens die Hälfte aller Gruppenelemente.*
Insbesondere ist die Anzahl der Involutionen einer nicht-abelsch einfachen Gruppe T durch den Wert $\frac{|T|}{2}$ nach oben beschränkt.

Beweis: Nicht-abelsche Gruppen, welche einen Automorphismus besitzen, der mehr als die Hälfte aller Gruppenelemente auf ihr Inverselement abbildet, werden als $> \frac{1}{2}$-Gruppen bezeichnet. Eine genauere, sehr lesenswerte Beschreibung dieser Gruppen findet sich in [LM72]. Dort (s. Theorem (4.1)) wird unter anderem gezeigt, dass die größte abelsche Untergruppe einer $> \frac{1}{2}$-Gruppe G ein (nicht-trivialer) Normalteiler von G mit elementar-abelscher Faktorgruppe ist. Folglich kann eine nicht-abelsch einfache Gruppe keine $> \frac{1}{2}$-Gruppe sein. $\square$

Auch für die Anzahl der Fixpunkte von Automorphismen nicht-abelsch einfacher Gruppen lassen sich Schranken angeben.

(3.5) Hilfssatz *Ist $a \in \mathrm{Aut}(T)$ ein Automorphismus einer nicht-abelsch einfachen Gruppe T und a von Primzahlordnung p, so gilt*

$$|T : T_a| \geq p.$$

Bemerkung: Es wird *nicht* behauptet, dass p den Index $|T : T_a|$ teilt. Bei Primteilern p von $|T|$ mit $p^2 \nmid |T|$ kann dies etwa mit Hilfe des p-Argumentes ausgeschlossen werden.

Beweis: Um Hilfssatz (3.5) zu beweisen, führen wir die Annahme $|T : T_a| < p$ zu einem Widerspruch.
Nach dem Hauptsatz über Wirkungen induziert die durch

$$T : T_a \times \langle a \rangle \longrightarrow T : T_a \qquad , \qquad (T_a t, a^i) \longmapsto T_a t^{a^i}$$

definierte Wirkung einen Homomorphismus φ von $\langle a \rangle$ in $\mathrm{Sym}(T : T_a)$.
Wäre nun $\mathrm{Ker}\,\varphi = 1$, so würde eine Anwendung des Homomorphiesatzes die Teilereigenschaft $p = |\langle a \rangle| \mid |\mathrm{Sym}(T : T_a)| \leq (p-1)!$ liefern. Dies würde jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung "p Primzahl" stehen.
Also müsste $\mathrm{Ker}\,\varphi = \langle a \rangle$ und damit $T_a t^{a^i} = T_a t$ für alle $t \in T$ und $i \in \mathbb{N}$ gelten. Dann wären jedoch mit $t \in T \setminus T_a$ auch die Bilder t^{a^i} mit $i \in p$ in der Nebenklasse $T_a t$. Da $T_a t$ keinen Fixpunkt enthält, wäre p ein Teiler von $|T_a t| = |T_a|$ und damit auch von $|T|$.
Aus der Einfachheit von T folgte wegen $T_a \lneqq T$ andererseits sofort $\mathrm{core}_T(T_a) = 1$. Dies würde wegen $T = T/\,\mathrm{core}_T(T_a) \tilde{\leq} \mathrm{Sym}(T : T_a)$ allerdings erneut den Widerspruch $p \mid (p-1)!$ nach sich ziehen. $\square$

Hilfssatz (3.5) lässt sich auch in der Sprache minimaler p-Grade fassen. Er lautet dann

(3.5)* Hilfssatz *Es bezeichne $\mathrm{Aut}(T)$ eine in natürlicher Weise auf einer nicht-abelsch einfachen Gruppe T operierende Automorphismengruppe. Ferner sei p ein Primteiler der Ordnung von $\mathrm{Aut}(T)$. Dann gilt*

$$m_p(\mathrm{Aut}(T)) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |T|.$$

Mit Hilfe der Aussagen (3.4) und (3.5) sind wir nun in der Lage das folgende Korollar zu beweisen.

(3.6) Korollar *Es bezeichne G eine auf Ω in der Diagonalwirkung operierende Permutationsgruppe und p einen Primteiler der Ordnung von G. Dann gilt*

$$m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|.$$

Beweis: Unter Verwendung der in Satz (3.3) genannten Notation haben wir zu zeigen, dass die dort aufgeführten Werte minimaler p-Grade die oben genannte Schranke nicht unterschreiten.
Ist $m_p(G) = m_p(A^{T^{k-1}})$, so teilt p die Ordnung von A. Aus Hilfssatz (3.5) ergibt sich also $|T : T_a| \geq p$, was $\sqrt[k-1]{p} \cdot |T_a| \leq p \cdot |T_a| \leq |T|$ zur Folge hat. Damit erhalten wir jedoch die Ungleichung $p \cdot |T_a|^{k-1} \leq |T|^{k-1}$ und $\frac{p-1}{p} \cdot |T|^{k-1} \leq |T|^{k-1} - |T_a|^{k-1} = m_p(A^{T^{k-1}}) = m_p(G)$.
Der Fall $m_p(G) = |T|^{k-1} - |T|^{k-1-\frac{p-1}{p}m_p(P)}$ ist unproblematisch. Denn wegen $p \leq 2^{p-1} < |T|^{p-1} \leq |T|^{\frac{p-1}{p}m_p(P)}$ folgt $p \cdot |T|^{k-1-\frac{p-1}{p}m_p(P)} \leq |T|^{k-1}$ und damit auch $\frac{p-1}{p} \cdot |T|^{k-1} \leq |T|^{k-1} - |T|^{k-1-\frac{p-1}{p}m_p(P)} = m_p(G)$.
Es bleibt der Fall $m_p(G) = |T|^{k-1} - |T|^{\frac{k-p}{p}} \max\limits_{a \in A,\, o(a)|p} |T_p(a)|$ zu betrachten.
Wenn $k > 2$ oder $p > 2$ ist, gilt $p \leq |T|^{\frac{p-1}{p}k-1}$ (denn es ist $p \leq 3^{p-2} < |T|^{p-2} = |T|^{\frac{p-1}{p}k-1}$ falls $p > 2$ und $p = 4^{\frac{1}{2}} < |T|^{\frac{1}{2}} \leq |T|^{\frac{k}{2}-1}$ falls $k > 2 = p$). Dies impliziert $\frac{p-1}{p}|T|^{k-1} \leq |T|^{k-1} - |T|^{\frac{k}{p}} \leq m_p(G)$.
Liegt hingegen der Unterfall $k = 2 = p$ vor, so wird der minimale 2-Grad unter den gegebenen Voraussetzungen von einem Element $g = (\pi, (a)_{i \in 2})$ mit $o(g) = o(\pi) = 2$ (d.h. $\pi = (0,1)$) und $o(a) \mid 2$ angenommen. Diese Permutationen besitzen die Fixpunktmengen $T_2(a) = \{t \in T \mid t^a = t^-\}$. Da nach Hilfssatz (3.4) jeder Automorphismus einer nichtabelsch einfachen Gruppe höchstens $\frac{|T|}{2}$ Punkte invertiert, folgt auch hier $\frac{p-1}{p} \cdot |T| = \frac{|T|}{2} = |T| - \frac{|T|}{2} \leq |T| - |T_2(a)| = m_2(G)$. □

3.3 Minimale p-Grade von in der Produktwirkung operierenden Kranzprodukten

Übersichtlicher als die im letzten Abschnitt gewonnenen Ergebnisse sind die Resultate über minimale p-Grade, die wir in diesem Paragraphen gewinnen werden. Er ist der Klasse der in der Produktwirkung operierenden Kranzprodukte gewidmet. Bei dieser Klasse lässt sich der minimale p-Grad mit Hilfe minimaler p-Grade von kleineren, an der Konstruktion der Permutationsgruppe beteiligten Permutationsgruppen ausdrücken.

(3.7) Satz *Es seien $A \leq \mathrm{Sym}(\Lambda)$ und $B \leq \mathrm{Sym}(\Delta)$ Permutationsgruppen mit $|A|, |B| \geq 2$. Das Kranzprodukt $G := B \wr_\Lambda A$ wirke auf $\Omega = \Delta^\Lambda$ in der Produktwirkung. Ferner sei p ein Primteiler der Ordnung von G. Dann gilt*

$$\begin{array}{lll} m_p(G) = |\Delta|^{|\Lambda|-1} \cdot m_p(B) & \text{, falls} & p \nmid |A|, \\ m_p(G) = |\Delta|^{|\Lambda|-1} \cdot m_p(B) & \text{, falls} & p \mid (|A|, |B|) \text{ und } m_p(B) \neq |\Delta|, \\ m_p(G) = |\Delta|^{|\Lambda|} - |\Delta|^{|\Lambda| - \frac{p-1}{p} m_p(A)} & \text{, sonst.} & \end{array}$$

Beweis: Es sei $g := (a, (b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ ein Element in $B \wr_\Lambda A$ mit Ordnung p. Wir unterscheiden die folgenden beiden Fälle.

I. Fall $a = 1$:
Wegen $(\delta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = ({\delta_\lambda}^{b_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ für alle $(\delta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in Ω_g erhalten wir in diesem Falle offenbar

$$\Omega_g = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} \Delta_{b_\lambda}.$$

Da jedes von 1 verschiedene b_λ mit $\lambda \in \Lambda$ Ordnung p besitzt, ist Ω_g genau dann maximal, wenn $(b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ so gewählt wird, dass b_μ für ein $\mu \in \Lambda$ den minimalen p-Grad von B annimmt und die verbleibenden Elemente b_λ (mit $\mu \neq \lambda \in \Lambda$) dem Einselement von B entsprechen. Unter obiger Voraussetzung ergibt sich also

$$|{}^g\Omega| \geq |\Delta|^{|\Lambda|-1} \cdot m_p(B).$$

II. Fall $a \neq 1$:
Weil für jeden Fixpunkt $(\delta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \Omega_g$ von g stets $(\delta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = ({\delta_{\lambda^{a^-}}}^{b_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ gilt und daher $\delta_{\lambda^{a^-}} = {\delta_\lambda}^{b_\lambda^-}$ ist, sind für $\lambda \in \Lambda$ die Punkte $\delta_{\lambda^{a^i}}$ mit $i \in p$ durch δ_λ eindeutig bestimmt. Die Anzahl der Fixpunkte von g wird folglich durch den Wert $|\Delta|^{|\Lambda : \langle a \rangle|}$ nach oben beschränkt.
Die Wahl $(b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = (1)_{\lambda \in \Lambda}$ zeigt, dass diese Schranke angenommen werden kann.
Ferner besitzt die Permutation a in der vorliegenden Situation Ordnung p. Deshalb ist die Anzahl der Bahnen von $\langle a \rangle$ in Λ genau dann maximal, wenn die Mächtigkeit des Trägers ${}^a\Lambda$ dem minimalen p-Grad von A entspricht. Dann folgt jedoch auch $|\Lambda : \langle a \rangle| = |\Lambda| - \frac{p-1}{p} \cdot m_p(A)$. Wir erhalten in diesem Fall also die Abschätzung

$$|{}^g\Omega| \geq |\Delta|^{|\Lambda|} - |\Delta|^{|\Lambda| - \frac{p-1}{p} \cdot m_p(A)}.$$

Die Behauptung ergibt sich nun nach einem Vergleich der gewonnenen Werte. $\square$

Im folgenden Korollar erweist sich der minimale p-Grad eines Kranzproduktes im Wesentlichen durch den minimalen p-Grad ihrer Basisgruppe bestimmt.

(3.8) Korollar *Es seien $A \leq \mathrm{Sym}(\Lambda)$ und $B \leq \mathrm{Sym}(\Delta)$ Permutationsgruppen mit $|A|, |B| \geq 2$. Das Kranzprodukt $G := B \underset{\Lambda}{\wr} A$ wirke auf $\Omega = \Delta^\Lambda$ in der Produktwirkung. Ist p ein Primteiler der Ordnung von G, so liegt einer der folgenden Fälle vor:*

1. *Es gilt* $\quad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.
2. *Es ist p ein Teiler von $|B|$ mit $m_p(B) \neq |\Delta|$ und es gilt $m_p(B) < \frac{p-1}{p} \cdot |\Delta|$.*

Beweis: Wie in Satz (3.7) gezeigt wurde, gibt es in Kranzprodukten nur zwei Typen von minimalen p-Graden.
Im Fall $m_p(G) = |\Delta|^{|\Lambda|} - |\Delta|^{|\Lambda| - \frac{p-1}{p} m_p(A)}$ ist p ein Teiler der Ordnung von A und damit $p \leq 2^{p-1} \leq |\Delta|^{p-1} \leq |\Delta|^{\frac{p-1}{p} m_p(A)}$. Dies impliziert jedoch $p \cdot |\Delta|^{|\Lambda| - \frac{p-1}{p} m_p(A)} \leq |\Delta|^{|\Lambda|}$, was wiederum $\frac{p-1}{p} \cdot |\Omega| \leq m_p(G)$ zur Folge hat.
Also kann die Eigenschaft $m_p(G) < \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ nur im Falle $m_p(G) = |\Delta|^{|\Lambda|-1} \cdot m_p(B)$ auftreten. Dann ist die Primzahl p allerdings ein Teiler von $|B|$ mit $m_p(B) \neq |\Delta|$ und es gilt $m_p(B) < \frac{p-1}{p} \cdot |\Delta|$. $\square$

3.4 Minimale p-Grade getwisteter Kranzprodukte

Mit Hilfe ähnlicher Argumente wie in den beiden vorangegangenen Abschnitten können auch Abschätzungen für die minimalen p-Grade von in der kanonischen Wirkung operierenden getwisteten Kranzprodukten gefunden werden.

Erschwerend auf die Bestimmung ihrer exakten Werte, wirkt sich vor allem die Tatsache aus, dass die an der Konstruktion dieser Permutationsgruppen beteiligten Wirkungen von A auf Λ bzw. B^Λ (s. Seite 15) nicht notwendigerweise treu sind. Zunächst wollen wir jedoch Beziehungen zwischen den Werten minimaler p-Grade eines getwisteten Kranzproduktes und ihrer verschränkenden Wirkung herstellen.

(3.9) Satz *Seien A, B Gruppen mit Ordnungen ≥ 2 und C eine Untergruppe von A, welche als Gruppe von Automorphismen auf B wirke. Ferner sei $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Transversale von $A : C$ und A^{B^Λ} die durch die mit B verschränkende Wirkung w von A induzierte Permutationsgruppe.*
Das getwistete Kranzprodukt

$$G := B \underset{A:C^w_{(t_\lambda)}}{\wr} A$$

wirke in der bezüglich A kanonischen Wirkung auf $\Omega = B^\Lambda$. Weiter sei p ein Primteiler der Ordnung von G^{B^Λ}. Dann gilt

$$\begin{aligned} m_p(G) &= m_p(A^{B^\Lambda}) && \text{, falls} \quad p \mid |A^{B^\Lambda}|, \\ m_p(G) &= |B|^{|\Lambda|} && \text{, sonst.} \end{aligned}$$

Beweis: Unter den gegebenen Voraussetzungen wirkt die Gruppe G transitiv auf Ω (denn durch die Wahl $g := (1, (b'^{-}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ kann jeder Punkt $(b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ auf den Punkt $(1)_{\lambda\in\Lambda}$ überführt werden).
Aufgrund der Beobachtung nach Definition (2.1) genügt es daher, die Elemente eines Punktstabilisators G_α mit $\alpha \in \Omega$ zu betrachten. Die Wahl $\alpha = (1)_{\lambda\in\Lambda}$ zeigt nun, dass der Punktstabilisator G_α auf Ω permutationsisomorph zu der mit B verschränkenden Wirkung w von A operiert. $\square$

Über die minimalen p-Grade der verschränkenden Wirkung eines getwisteten Kranzproduktes kann die folgende Aussage getroffen werden.

(3.10) Satz *Seien A, B Gruppen mit Ordnungen ≥ 2 und C eine Untergruppe von A, welche als Gruppe von Automorphismen auf B wirke. Ferner sei $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Transversale von $A : C$.*
Die Gruppe A operiere in der verschränkenden Wirkung auf $\Omega = B^\Lambda$. Weiter sei p ein Primteiler der Ordnung von A^{B^Λ}. Dann gilt

$$m_p(A^{B^\Lambda}) = |B|^{|\Lambda|} - \max_{\substack{a\in A\setminus A_{B^\Lambda} \\ o(a)=p}} |B|^{|\{\Lambda:\langle a\rangle\}_{>1}|} \cdot \prod_{\lambda\in\Lambda_a} |B_{a^{k(\lambda)}}|.$$

Beweis: Wir verwenden die auf Seite 15 eingeführten Bezeichnungen und unterscheiden zwischen Koordinaten $\lambda \in \Lambda_a$ eines Fixpunktes $(b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, welche unter der Wirkung des Gruppenelementes $a \in A \setminus A_{B^\Lambda}$ festbleiben, und den Koordinaten $\lambda \in {}^a\Lambda$, die in einer langen Bahn von a liegen.

Im erstgenannten Fall (d.h. $\lambda \in \Lambda_a$) ist die Gleichung $b'_\lambda = {b'_\lambda}^{a^{k(\lambda)}}$ erfüllt. Mithin entspricht die Anzahl der in einer solchen Koordinate auftretenden Gruppenelemente $b \in B$ dem Wert $|B_{a^{k(\lambda)}}|$.
Falls hingegen die Koordinate $\lambda \in \Lambda$ von a bewegt wird, gilt $b'_\lambda = {b'_{\lambda^{a^-}}}^{a^{k(\lambda)}}$. Deshalb sind mit b'_λ auch die Punkte b'_μ mit $\mu \in \lambda^{\langle a \rangle}$ eindeutig bestimmt.
Da die Rekursionsbildung bei Element $a \in A \setminus A_{B^\Lambda}$ von Primzahlordnung keine weiteren Restriktionen hervorbringt, erhalten wir für die Anzahl der Fixpunkte $(B^\Lambda)_a$ von a (mit $o(a) = p$) die obere Schranke

$$|(B^\Lambda)_a| \leq |B|^{|\{\Lambda:\langle a\rangle\}_{>1}|} \cdot \prod_{\lambda \in \Lambda_a} |B_{a^{k(\lambda)}}|.$$

Bildung des Maximums über allen in diesem Fall betrachteten Gruppenelementen führt nun zu den gesuchten Werten. □

Das recht unübersichtliche Ergebnis des vorangegangenen Satzes kann auf die folgende Weise mit Hilfe minimaler p-Grade von an der Konstruktion getwisteter Kranzprodukte beteiligter Wirkungen abgeschätzt werden.

(3.11) Hilfssatz *Seien A, B Gruppen mit Ordnungen ≥ 2 und C eine Untergruppe von A, welche als Gruppe von Automorphismen auf B wirke. Ferner sei $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Transversale von $A : C$.*
Die Gruppe A operiere in der verschränkenden Wirkung auf $\Omega = B^\Lambda$. Weiter sei p ein Primteiler der Ordnung von A^{B^Λ}. Dann gilt

$$\begin{array}{lll} m_p(A^{B^\Lambda}) \geq |B|^{|\Lambda|} - |B|^{|\Lambda| - \frac{p-1}{p} m_p(A^\Lambda)} & , \textit{falls} & p \mid |A^\Lambda| \textit{ und } p \nmid |A_\Lambda : A_{B^\Lambda}|, \\ m_p(A^{B^\Lambda}) \geq |B|^{|\Lambda|-1} \cdot m_p(C^B) & , \textit{falls} & p \nmid |A^\Lambda| \textit{ und } p \mid |A_\Lambda : A_{B^\Lambda}|. \end{array}$$

Ist p ein Primteiler von $(|A^\Lambda|, |A_\Lambda : A_{B^\Lambda}|)$, so lässt sich der minimale p-Grad von A durch das Minimum derjenigen Werte abschätzen, die entstehen, wenn p wie ein Primteiler behandelt wird, welcher lediglich einen der genannten Gruppenordnungen teilt.

Beweis: Es sei a ein Element in $A \setminus A_{B^\Lambda}$ von Primzahlordnung p.
Wenn a nicht-trivial auf Λ operiert, ist

$$|(B^\Lambda)_a| \leq |B|^{|\{\Lambda:\langle a\rangle\}_{>1}|} \cdot \prod_{\lambda \in \Lambda_a} |B_{a^{k(\lambda)}}| \leq |B|^{|\{\Lambda:\langle a\rangle\}_{>1}|} \cdot |B|^{|\Lambda_a|} = |B|^{|\Lambda:\langle a\rangle|}.$$

Da die Anzahl der Bahnen von $\langle a\rangle$ in Λ genau dann maximal ist, wenn a minimalen p-Grad in Λ besitzt, erhalten wir

$$|(B^\Lambda)_a| \le |B|^{|\Lambda|-\frac{p-1}{p}m_p(A^\Lambda)}.$$

Wirkt a hingegen trivial auf Λ, so ist

$$|(B^\Lambda)_a| \le \prod_{\lambda\in\Lambda}|B_{a^{k(\lambda)}}| \le |B|^{|\Lambda\setminus\{\mu\}|}\cdot|B_{a^{k(\mu)}}| \le |B|^{|\Lambda|-1}\cdot(|B|-m_p(C^B)),$$

was die Behauptung zur Folge hat. $\square$

Im folgenden Korollar stellen wir fest, dass „kleine“ minimale p-Grade bei einem getwisteten Kranzprodukt nur dann auftreten können, wenn die an der Konstruktion beteiligten Wirkungen „kleine“ minimale p-Grade besitzen.

(3.12) Korollar *Seien A, B Gruppen mit Ordnungen ≥ 2 und C eine Untergruppe von A, welche als Gruppe von Automorphismen auf B wirke. Ferner sei $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Transversale von $A:C$ und A^{B^Λ} die durch die mit B verschränkende Wirkung w von A induzierte Permutationsgruppe.*
Das getwistete Kranzprodukt $\quad G := B \underset{A:C^w_{(t_\lambda)}}{\wr} A$

wirke in der bezüglich A kanonischen Wirkung auf $\Omega = B^\Lambda$. Ist p ein Primteiler der Ordnung von G^{B^Λ}, so liegt einer der folgenden Fälle vor:

1. *Es gilt* $\quad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p}\cdot|\Omega|$.

2. *Es ist p ein Teiler von $|A_\Lambda : A_{B^\Lambda}|$ und es gilt $m_p(C^B) < \frac{p-1}{p}\cdot|B|$.*

Beweis: Nach Satz (3.9) genügt es die Aussage für die Primteiler der Permutationsgruppe A^{B^Λ} zu verifizieren.
In diesem Fall können wir die im letzten Hilfssatz gewonnen Abschätzungen verwenden. Die Behauptung ergibt sich nun mit der gleichen Argumentation wie in Korollar (3.8). $\square$

Bemerkung: Korollar (3.12) besagt insbesondere, dass getwistete Kranzprodukte $G = B \wr A$ welche mit Hilfe einer *treuen* Wirkung (Λ, A) gebildet werden, stets die Abschätzung $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p}\cdot|\Omega|$ erfüllen.

Kapitel 4

Minimale p-Grade klassischer Gruppen

In diesem Abschnitt wollen wir Aussagen über minimale p-Grade primitiver Permutationsgruppen mit klassischem Sockel gewinnen.
Besonderes Augenmerk richten wir dabei zunächst auf die Wirkungen klassischer Gruppen auf Bahnen von k-Räumen des zugehörigen Vektorraumes. Diese besitzen nicht nur kleine Grade und kleinen Rang, sondern bringen auch verschiedene Ausnahmen zur Abschätzung $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ hervor.
Im zweiten Teil des Kapitels dehnen wir dann unsere Untersuchungen auf sämtliche primitiven Wirkungen klassischer Gruppen aus. Die von uns zuvor nicht betrachteten Permutationsgruppen erweisen sich hierbei in aller Regel als unproblematisch.

4.1 Minimale p-Grade bei Wirkungen klassischer Gruppen auf assoziierten geometrischen Objekten

Bei der Untersuchung minimaler p-Grade klassischer Gruppen kommt jenen Permutationsgruppen eine besondere Bedeutung zu, deren Punktstabilisatoren Unterraumuntergruppen (vgl. Definition auf Seite 19) bilden. Sie stehen in enger Beziehung zu den Wirkungen klassischer Gruppen auf zugehörigen geometrischen Objekten wie Unterräumen, Zerlegungen oder Fahnen des zu Grunde liegenden Vektorraumes.

Wir inspizieren zunächst die projektiv semilineare Gruppe in ihrer Wirkung auf der Menge der d-dimensionalen Teilräume des zu Grunde liegenden Vektorraumes.

(4.1) Satz *Sei $1 \neq q = r^f$ eine Potenz der Primzahl r und $1 < n \in \mathbb{N}$. Die fasteinfache klassische Gruppe $G = P\Gamma L_n(q)$ wirke auf der Menge Ω der d-dimensionalen Teilräume des zu Grunde liegenden Vektorraumes $V = V(n,q)$ (mit $d \leq \frac{n}{2}$).*
Ist $p \neq r$ ein ungerader Primteiler der Ordnung von G, so liegt einer der folgenden Fälle vor:

1. *Es gilt $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.*
2. *Die Gruppe G wirkt auf der Menge Ω der 1-Räume von $V = V(2,2^f)$ und es ist $p = 2^f - 1$ eine Mersennesche Primzahl und $m_p(G) = p = |\Omega| - 2 \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|$.*

Beweis: Da gemäß [GL83, (7.2)] jedes Primelement $g \in G$ zu einem Element in $\mathrm{PGL}_n(q)$ oder $\langle \bar{\Phi}_B \rangle$ konjugiert ist, genügt es die Aussage unter der einschränkenden Annahme $g \in \mathrm{PGL}_n(q) \cup \langle \bar{\Phi}_B \rangle$ zu beweisen.

I. Fall: g ist ein Körperautomorphismus
Bezeichnet das Gruppenelement g einen Körperautomorphismus der Ordnung p in $\langle \bar{\Phi}_B \rangle$, so enthält jeder g-invariante, d-dimensionale Unterraum $W \in \Omega_g$ von V einen d-dimensionalen $\mathbb{F}_{q^{1/p}}$-Teilraum $W_{\hat{g}}$ von $V_{\hat{g}} \cong V(n, q^{\frac{1}{p}})$, dessen $\mathbb{F}_q$-Aufspann $\langle W_{\hat{g}} \rangle$ den Unterraum W erzeugt. Es ist daher

$$|\Omega_g| = |u_d(V(n, q^{\frac{1}{p}}))| = |u_d(V_{\hat{g}})|.$$

- Falls $n > 2$ (d.h. $n - d > 1$) vorausgesetzt wird, liefert nun die Ungleichung

$$p \leq (q^{\frac{1}{p}})^{p-1} \leq (q^{\frac{1}{p}})^{[(p-1)(n-d)-1]d} = \frac{q^{(n-d)d}}{(q^{\frac{1}{p}})^{(n-d+1)d}} < \frac{|u_d(V)|}{|u_d(V_{\hat{g}})|}$$

die Beziehung $\mathrm{rfix}_\Omega(g) < \frac{1}{p}$ und damit die im Satz unter 1. genannte Abschätzung.
- Unter der Wahl $n = 2, d = 1$ ergibt sich nach Beachtung der Voraussetzung $p > 2$ zunächst $p \leq (q^{\frac{1}{p}})^{p-2} + 1 \leq \sum_{i \in p} (-1)^{p-1-i} \cdot (q^{\frac{1}{p}})^{p-1-i} = \frac{(q^{\frac{1}{p}})^p + 1}{q^{\frac{1}{p}} + 1} = \frac{|u_1(V)|}{|u_1(V_{\hat{g}})|}$, was nach gleicher Argumentation wie oben erneut zu der im Satz mit 1. bezeichneten Aussage führt.

II. Fall: $g \in \mathrm{PGL}_n(q)$
Wir können uns daher den Primelementen in $\mathrm{PGL}_n(q)$ zuwenden. Bei diesen unterscheiden wir die folgenden Unterfälle:

(a) Unterfall $p \mid q-1$
Bildet g ein Gruppenelement aus $\mathrm{PGL}_n(q)$ mit Ordnung $p \mid q-1$, so ist $\hat{g}$ in $\mathrm{GL}_n(q)$ diagonalisierbar und folglich der Vektorraum $V = \oplus_{\mu \in \mathbb{F}_q^*} E_\mu(\hat{g})$ in die Eigenräume $E_\mu(\hat{g})$ von $\hat{g}$ zerlegbar. Mithin existiert eine nicht-triviale Zerlegung

$$V = E \oplus E'$$

des Vektorraumes V in g-invariante Teilräume $E = E_\lambda(\hat{g})$ (für ein $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$) und $E' = K_\lambda(\hat{g}) = \oplus_{\mu \in \mathbb{F}_q^* \setminus \{\lambda\}} E_\mu(\hat{g})$ mit $0 < e := \dim(E) \leq \dim(E') =: e'$.
Weil sich darüber hinaus jeder Fixpunkt $W \in \Omega_g$ in der Form

$$W = (W \cap E) \oplus (W \cap E')$$

schreiben lässt, überschreitet - wenn $a := \min\{d, e\}$ gesetzt wird - die Mächtigkeit der Fixpunktmenge Ω_g nicht den Wert

$$|\Omega_g| \leq \sum_{l \in a+1} |u_l(E)| \cdot |u_{d-l}(E')|.$$

Wir benutzen diese Schranke um jene Gruppenelemente $g \in \mathrm{PGL}_n(q)$ zu bestimmen, welche die Abschätzung $|\Omega_g| > \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$ erfüllen.

- Im Fall $a = 1$ lässt sich, wenn g unter den p-Elementen in $\mathrm{PGL}_n(q)$ den kleinstmöglichen Grad aufweist, die oben angegebene Schranke von $|\Omega_g|$ zur Gleichheit $|\Omega_g| = |u_1(E)| + |u_1(E')|$ bzw. $|\Omega_g| = |u_d(E')| + |u_{d-1}(E')|$ (falls $a = d$ bzw. $a = e$ ist) spezialisieren. Bezeichnet a' den von a verschiedenen Parameter aus $\{d, e\}$, so folgt nach elementaren Äquivalenzumformungen der Ungleichung $|\Omega_g| > \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$ in beiden Fällen

$$q^{n-a'} + q^{a'} - 2 > \frac{1}{p} \cdot (q^n - 1) \geq \frac{q^n - 1}{q - 1} = \sum_{i \in n} q^i.$$

Es muss somit $a' = 1$ gelten. Die daraus entstehende Beziehung $q - 2 > \sum_{i \in n-1} q^i$ impliziert weiter $n = 2$. Ein Vergleich der hieraus resultierenden Werte $|\Omega_g| = 2$ und $|\Omega| = q + 1$ beweist nun das Vorliegen der im Satz unter 2. beschriebenen Situation.

- Im verbliebenen Fall $a > 1$ betrachten wir die einzelnen Summanden der oben aufgeführten Schranke von $|\Omega_g|$. Wegen $|\Omega_g| > \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$ tritt offenbar ein $\tilde{l} \in a+1$ mit

$$|u_{\tilde{l}}(E)| \cdot |u_{d-\tilde{l}}(E')| > \frac{1}{p \cdot (a+1)} \cdot |u_d(V)|$$

auf. Folglich gilt

$$p \cdot (a+1) > \frac{|u_d(V)|}{|u_{\tilde{l}}(E)| \cdot |u_{d-\tilde{l}}(E')|} > \frac{q^{(d-\tilde{l}) \cdot (n-e') + (n-e-(d-\tilde{l})) \cdot \tilde{l}}}{q^{(d-\tilde{l}+1) \cdot \tilde{l}}}.$$

Aufgrund der (mittels Induktion nach a für $a > 1$ leicht verifizierbaren) Beziehung $p \cdot (a+1) \leq (q-1) \cdot (a+1) \leq q^a - 1 < q^a$ erhalten wir ferner

$$a > (d - \tilde{l}) \cdot (e - \tilde{l}) + (e' - (d - \tilde{l}) - 1) \cdot \tilde{l}.$$

Die letztgenannte Ungleichung erzwingt jedoch ein Vorliegen der Bedingung

$$(d = \tilde{l} \quad \text{oder} \quad e = \tilde{l} \quad \text{oder} \quad e' - 1 \leq d - \tilde{l}),$$

denn andernfalls nimmt der erste Summand mindestens den Wert $a - \tilde{l}$ und der zweite Summand zumindest den Wert $\tilde{l}$ an. Wir ersetzen in obiger Abschätzung die Variable $\tilde{l}$ durch einen der durch diese Forderungen vorgegebenen Parameter und schließen zunächst

$$(d \geq a > (e' - 1) \cdot d \ \text{ oder } \ e \geq a > (n - d - 1) \cdot e \ \text{ oder } \ a > (e' - 1) \cdot (n - d - 1)),$$

was weiters zu der Restriktion

$$(n = 2, e' = e = d = \tilde{l} = 1 \quad \text{oder} \quad n = 4, e' = e = d = 2, \tilde{l} = 1)$$

führt. Wegen $|u_1(E)| \cdot |u_1(E')| = (q+1)^2 < \frac{1}{3(q-1)} \cdot (q^2+1) \cdot (q^2+q+1) \leq \frac{1}{p \cdot (a+1)} \cdot |u_2(V)|$ liefert die zweite Bedingung keine Ausnahme zu der im Satz unter 1. genannten Schranke. Die Wahl $n = 2, e' = 1$ widerspricht hingegen der Voraussetzung $a > 1$.

(b) Unterfall $p \perp q^k - 1$ mit $k > 1$
Um eine Abschätzung für die Mächtigkeit der Fixpunktmenge Ω_g eines Gruppenelementes $g \in \mathrm{PGL}_n(q)$ von Primzahlordnung $p \perp q^k - 1$ mit $k > 1$ zu gewinnen, betrachten wir die (nicht notwendigerweise nicht-triviale) g-invariante Zerlegung

$$V = V_{\hat{g}} \oplus [V, \langle \hat{g} \rangle].$$

Diese wird von jedem Fixpunkt $W \in \Omega_g$ respektiert, das heißt es gilt

$$W = W_{\hat{g}} \oplus [W, \langle \hat{g} \rangle].$$

Der Unterraum W lässt sich daher als direkte Summe des Teilraumes $W_{\hat{g}} \leq V_{\hat{g}}$ und einer gewissen Anzahl l $\langle g \rangle$-irreduzibler Konstituenten von $[V, \langle \hat{g} \rangle]$ schreiben.
Da - wie wir Lemma (1.8) entnehmen - die letztgenannten Unterräume stets die Dimension k besitzen, ergibt sich für die Mächtigkeit der Fixpunktmenge Ω_g die Schranke

$$|\Omega_g| \leq \sum_{l \in \lfloor \frac{d}{k} \rfloor + 1} |u_{lk}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}| \cdot |u_{d-lk}(V_{\hat{g}})|,$$

wobei $u_{lk}([V,\langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}$ für die Menge der lk-Teilräume steht, welche als Summe irreduzibler Konstituenten von $[V,\langle\hat{g}\rangle]$ gebildet wurden.

- Im Falle $d = 1$ kann oben genannte Abschätzung zu der Gleichheit $|\Omega_g| = |u_1(V_{\hat{g}})|$ spezialisiert werden. Nach der Festlegung $\dim(V_{\hat{g}}) := c$ folgt daher aus

$$p < q^k < \frac{q^n - 1}{q^c - 1} = \frac{|u_1(V)|}{|u_1(V_{\hat{g}})|}$$

die im Satz unter 1. genannte Behauptung.

- Im Falle $d > 1$ weisen wir die Gültigkeit der Ungleichungen

$$|u_d(V_{\hat{g}})| + |u_{d-n+c}(V_{\hat{g}})| \leq \frac{1}{2p} \cdot |u_d(V)| \quad \text{und} \quad |u_{lk}([V,\langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}| \leq \frac{1}{2p} \cdot |u_{lk}([V,\langle\hat{g}\rangle])|$$

(wobei l die Menge $\frac{n-c}{k}$ durchläuft) nach. Mit ihrer Hilfe erhält man ohne weiteres die Beziehung $|\Omega_g| \leq \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$ und damit die Behauptung des Satzes.
Wird in der Summe $|u_d(V_{\hat{g}})|+|u_{d-n+c}(V_{\hat{g}})|$ der kleinere der beiden Summanden durch den größeren ersetzt, so zeigen (wegen $d > 1$) die Ungleichungen

$$4p \leq 4 \cdot (q^k - 1) < q^{k+2} \leq (q^k)^d \leq \prod_{i \in d} \frac{q^{n-i} - 1}{q^{c-i} - 1} = \frac{|u_d(V)|}{|u_d(V_{\hat{g}})|}$$

und

$$4p < q^{k+2} \leq (q^d)^k \leq (q^{n-d})^k \leq (q^{n-d})^{n-c} \leq \prod_{i \in n-c} \frac{q^{n-i} - 1}{q^{d-i} - 1} = \frac{|u_d(V)|}{|u_{d-n+c}(V_{\hat{g}})|},$$

dass die erste der beiden oben genannten Forderungen stets erfüllt ist.
Es bleibt daher nur noch die Beziehung $|u_{lk}([V,\langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}| \leq \frac{1}{2p} \cdot |u_{lk}([V,\langle\hat{g}\rangle])|$ (für $0 < lk < n - c$) zu verifizieren. Wenn $lk > 2$ angenommen wird, gewinnen wir diese aus der Ungleichung

$$2p < q^{k+1} \leq (q^k)^{l(k-1)} \leq (q^{n-c-lk})^{l(k-1)} < \prod_{i \in l} \prod_{j \in k \setminus \{0\}} \frac{q^{n-c-ik-j} - 1}{q^{lk-ik-j} - 1} = \frac{|u_{lk}([V,\langle\hat{g}\rangle])|}{|u_{lk}([V,\langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}|}.$$

Ist hingegen $lk = 2$, so überprüft man direkt

$$2p \leq 2(q+1) < \frac{q^{n-c-1} - 1}{q - 1} = \frac{|u_2([V,\langle\hat{g}\rangle])|}{|u_2([V,\langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}|}. \qquad \square$$

Ein zum Beweis von Satz (4.1) analoges Vorgehen ermöglicht auch bei Wirkungen klassischer Gruppen auf Bahnen von d-dimensionalen Teilräumen nicht-ausgearteter Vektorräume eine Abschätzung ihrer minimalen p-Grade.
Wir behandeln zunächst Permutationsgruppen deren Punktstabilisatoren parabolischen Untergruppen entsprechen.

(4.2) Satz *Sei $1 \neq q = r^f$ eine Potenz der Primzahl r und $2 < n \in \mathbb{N}$. Die fast-einfache klassische Gruppe $G = P\Gamma(V,q)$ wirke auf einer Bahn Ω total singulärer d-dimensionaler Teilräume des nicht-ausgearteten Vektorraumes $V = V(n,q)$. Ist $p \neq r$ ein ungerader Primteiler der Ordnung von G, so liegt einer der folgenden Fälle vor:*

1. *Es ist $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.*
2. *Es gilt $(\Omega, \mathrm{soc}(G)) \cong (5, \mathrm{Alt}(5)) \cong (u_1^{t.s.}(O^-(4,2)), O_4^-(2))$ und $m_p(G) = 3$.*

Beweis: Beim Beweis der obigen Aussage benötigen wir Kenntnisse über die Anzahl der total singulären d-Teilräume eines gegebenen Vektorraumes $V(n,q)$. Diese Werte können [Cop78] entnommen werden, wenn dessen Angabe im Falle (O, $n = 2m$) auf den in Tabelle 4.1 genannten Wert korrigiert wird.

Fall	$\lvert u_d^{t.s.}(V)\rvert$
S	$\prod_{i \in d} \frac{q^{n-2i}-1}{q^{d-i}-1}$
U	$\prod_{i \in d} \frac{(q^{n-2i}-(-1)^{n-2i}) \cdot (q^{n-2i-1}-(-1)^{n-2i-1})}{q^{2d-2i}-1}$
O^{ε} , $n = 2m$	$\prod_{i \in d} \frac{(q^{m-i}-\varepsilon) \cdot (q^{m-1-i}+\varepsilon)}{q^{d-i}-1}$
, $n = 2m+1$	$\prod_{i \in d} \frac{q^{n-1-2i}-1}{q^{d-i}-1}$

Tabelle 4.1: Anzahl der total singulären d-Teilräume von V

Nach [GL83, (7.2)] genügt es Primelemente g in $P\Delta(V,q)$ und $\langle \bar{\Phi}_B \rangle$ zu betrachten.

I. Fall: g ist ein Körperautomorphismus
Entspricht das Gruppenelement g einen Körperautomorphismus von $\langle \bar{\Phi}_B \rangle$ der Ordnung p, so enthält jeder total singuläre g-invariante, d-dimensionale Unterraum $W \in \Omega_g$ einen total singulären d-dimensionalen $\mathbb{F}_{q^{u/p}}$-Teilraum $W_{\hat{g}}$ von

$V_{\hat{g}} \cong V(n, q^{\frac{u}{p}})$, dessen $\mathbb{F}_{q^u}$-Aufspann $\langle W_{\hat{g}} \rangle$ den Unterraum W erzeugt. Bildet der Vektorraum V einen symplektischen, hermiteschen bzw. orthogonalen Vektorraum, so ist darüber hinaus auch der Fixraum $V_{\hat{g}}$ symplektisch, unitär bzw. orthogonal. Es folgt daher

$$|\Omega_g| = |u_d^{t.s.}(V_{\hat{g}})| = |u_d^{t.s.}(V(n, q^{\frac{u}{p}}))|.$$

Ein Vergleich dieses Wertes mit der Mächtigkeit der Menge Ω zeigt nun die Gültigkeit der Ungleichung $|\Omega_g| \leq \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$.
Wir skizzieren das dazu erforderliche Vorgehen im Unterfall S. Wegen $n \geq 3$ und $d \leq \frac{n}{2}$ ergibt sich hier unter den gegebenen Voraussetzungen zunächst $n \geq \frac{3}{2} \cdot (d+1)$ und dann $p - 1 \leq 2 \cdot (p-1) - 1 \leq (n - \frac{3}{2}d + \frac{1}{2}) \cdot (p-1) - 1$. Die letztgenannte Ungleichung liefert jedoch

$$p \leq (q^{\frac{1}{p}})^{p-1} \leq (q^{\frac{1}{p}})^{[(p-1)(n-\frac{3}{2}d+\frac{1}{2})-1]d} = \frac{q^{(n-d)d-\frac{(d-1)d}{2}}}{(q^{\frac{1}{p}})^{(n-d+1)d-\frac{(d-1)d}{2}}} < \frac{|u_d^{t.s.}(V)|}{|u_d^{t.s.}(V_{\hat{g}})|}$$

und damit die im Satz unter 1. genannte Abschätzung. Bei Vorliegen eines unitären oder orthogonalen Vektorraumes V kann analog argumentiert werden. Allerdings erfordern hier die Fälle $n = 4, d = 2$ und $n = 3, d = 1$ eine gesonderte Behandlung. Wegen $p \leq (q^{\frac{u}{p}})^{p-2} + 1 \leq \sum_{i \in p} (-1)^{p-1-i} \cdot (q^{\frac{u}{p}})^{p-1-i} = \frac{q^u+1}{q^{\frac{u}{p}}+1} \leq \frac{|u_d^{t.s.}(V)|}{|u_d^{t.s.}(V_{\hat{g}})|}$ treten jedoch auch in diesen Fällen keine Ausnahmen zu der ersten Teilaussage des Satzes auf.

II. Fall: $g \in P\Delta(V, q)$
Wir können uns daher den Gruppenelementen in $P\Delta(V, q)$ zuwenden. Wie im Falle projektiv semilinearer Gruppen unterscheiden wir dabei zwischen Primelementen der Ordnung $p \mid q^u - 1$ bzw. $p \mid (q^u)^k - 1$ für ein $k > 1$.

(a) Unterfall $p \mid q^u - 1$
Gemäß Lemma (1.8) lässt sich der Vektorraum V hier entweder in nicht-triviale, nicht-ausgeartete Teilräume $E_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$ und $K_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$ (für einen geeigneten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{F}_{q^u}^*$) zerlegen oder als direkte Summe total singulärer Eigenräume $E_\lambda(\hat{g})$ und $E_{\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$ schreiben.

(i) Unterfall: $V = E_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g}) \perp K_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$
Hier wird die Zerlegung $V = E_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g}) \perp K_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$ von jedem Fixpunkt $W \in \Omega_g$ respektiert, d.h. es gilt

$$W = (W \cap E_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})) \perp (W \cap K_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})).$$

Insbesondere ist $|u_d^{t.s.}(V)_g| \leq \sum_{l \in d+1} |u_{d-l}^{t.s.}(E_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g}))| \cdot |u_l^{t.s.}(K_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g}))|$.

Wir kürzen unter den beiden oben auftretenden Teilräumen jenen Unterraum kleinerer Dimension durch die Kurzschreibweise E, den größeren durch E' ab und setzen $\dim(E) =: e \leq e' := \dim(E')$ sowie $a := \min\{d, \lfloor \frac{e}{2} \rfloor\}$. Dann ergibt sich

$$|\Omega_g| \leq \sum_{l \in a+1} |u_l^{t.s.}(E)| \cdot |u_{d-l}^{t.s.}(E')|.$$

Eine Verwendung dieser Schranke erlaubt nun den Nachweis der im Satz unter 1. erfassten Eigenschaft $|\Omega_g| \leq \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$.
- Unter der Wahl $a \leq 1$ kann, wenn g unter den p-Elementen in $P\Delta(V,q)$ den kleinstmöglichen Grad annimmt, die oben angegebene Beziehung zu $|\Omega_g| = |u_d^{t.s.}(E')|$ bzw. $|\Omega_g| = |u_d^{t.s.}(E')| + |u_{d-1}^{t.s.}(E')| \cdot |u_1^{t.s.}(E)|$ spezialisiert werden. Ein zum Fall L analoges Vorgehen liefert dann die Aussage des Satzes (Beachte hierbei die Voraussetzungen "$n > 2$" und "G fasteinfach").

- Im Fall $a > 1$ untersuchen wir hingegen die einzelnen Summanden der oben aufgeführten Schranke von $|\Omega_g|$. Wir erläutern das Vorgehen anhand symplektischer Gruppen, weisen jedoch darauf hin, dass auch bei unitären und orthogonalen Gruppen entsprechend argumentiert werden kann.
Wäre $\mathrm{rfix}_\Omega(g) > \frac{1}{p}$, so müsste ein $\tilde{l} \in a+1$ mit

$$|u_{\tilde{l}}^{t.s.}(E)| \cdot |u_{d-\tilde{l}}^{t.s.}(E')| > \frac{1}{p \cdot (a+1)} \cdot |u_d^{t.s.}(V)|$$

auftreten. Folglich erhielten wir

$$p \cdot (a+1) > \frac{|u_d^{t.s.}(V)|}{|u_{\tilde{l}}^{t.s.}(E)| \cdot |u_{d-\tilde{l}}^{t.s.}(E')|} > q^{(e-\tilde{l})\cdot(d-\tilde{l})+(e'-2\cdot(d-\tilde{l})-1)\cdot\tilde{l}},$$

und wegen $p \cdot (a+1) < q^a$ weiters

$$a > (d-\tilde{l}) \cdot (e-\tilde{l}) + (e' - 2 \cdot (d-\tilde{l}) - 1) \cdot \tilde{l}.$$

Dies würde jedoch ein Vorliegen der Bedingung

$$(e = \tilde{l} \quad \text{oder} \quad d = \tilde{l} \quad \text{oder} \quad e' - 1 \leq 2 \cdot (d - \tilde{l}))$$

erzwingen, denn andernfalls besäße der erste Summand der obigen Summe mindestens den Wert $a - \tilde{l}$ und der zweite Summand mindestens den Wert $\tilde{l}$.
Wird in obiger Gleichung die Variable $\tilde{l}$ durch einen der durch diese Forderung vorgegebenen Terme ersetzt, so ergibt sich

$$(e = 1,\, d = \frac{n}{2} \quad \text{oder} \quad e' = e = 1,\, n = 2 \quad \text{oder} \quad e' = 2,\, d - \tilde{l} \leq 1).$$

Im erstgenannten Fall wäre E entgegen unserer Annahme nicht symplektisch. Die Ergebnisse des zweiten Unterfalles würden hingegen nicht mit der im Satz formulierten Voraussetzung $n > 2$ in Einklang stehen. Es müsste daher die letztgenannte Bedingung $e' = 2$, $d - \tilde{l} = 1$ und insbesondere $n = e' + e \leq 2e' = 4$ erfüllt sein. Wegen $|\Omega_g| \leq 2 \cdot |u_1^{t.s}(S(2,q))| < \frac{1}{p} \cdot |u_1^{t.s.}(S(4,q))| = \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$ bzw. $|\Omega_g| \leq |u_1^{t.s}(S(2,q))| \cdot |u_1^{t.s}(S(2,q))| < \frac{1}{p} \cdot |u_2^{t.s.}(S(4,q))| = \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$ gewinnen wir jedoch auch in dieser Situation einen Widerspruch zu $|\Omega_g| > \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$.

(ii) Unterfall $V = E_\lambda(\hat{g}) \oplus E_{\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$, wo $E_\lambda(\hat{g})$ und $E_{\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$ total singulär sind. Ist $W \in \Omega_g$ ein Fixpunkt von g in Ω, so folgt zunächst

$$W = (W \cap E_\lambda(\hat{g})) \oplus (W \cap E_{\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})).$$

Darüber hinaus muss für den total singulären Teilraum $W \cap E_{\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$ weiter

$$W \cap E_{\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g}) \leq (W \cap E_\lambda(\hat{g}))^\perp \cap E_{\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$$

gelten. Da - wie eine Verwendung von [KL90, (2.1.5)] zeigt - unter der Festlegung $\dim(W \cap E_\lambda(\hat{g})) := l$ der letztgenannte Unterraum höchstens die Dimension $\frac{n}{2} - l$ besitzt, kann die Mächtigkeit der Fixpunktmenge Ω_g nicht den Wert

$$|\Omega_g| \leq \sum_{l \in d+1} |u_l(L(\frac{n}{2}, q))| \cdot |u_{d-l}(L(\frac{n}{2} - l, q))|$$

überschreiten.
Wir nutzen diese Schranke zum Nachweis der Beziehung $\mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \frac{1}{p}$.
- Unter der Annahme $d = 1$ lässt sich die oben genannte Summe zu $2 \cdot |u_1(L(\frac{n}{2}, q))|$ vereinfachen. Im Fall S schließen wir wegen $n > 2$ auf

$$2p \leq 2 \cdot (q-1) \leq q^{\frac{n}{2}} + 1 = \frac{|u_1^{t.s.}(S(n,q))|}{|u_1(L(\frac{n}{2}, q))|}.$$

In den Fällen U und O kann entsprechend argumentiert werden, wenn berücksichtigt wird, dass $2 < n$ gerade ist und die orthogonalen Gruppen $O_4^+(q)$ nicht einfach sind (Der Fall $V = U(4,q)$ mit $q \leq 3$ ist dabei gesondert zu behandeln, kann jedoch mit Hilfe der Angaben im Atlas [ATLAS] eliminiert werden).
- Im Fall $d > 1$ untersuchen wir die einzelnen Summanden der oben genannten Summe. Bei Vorliegen eines symplektischen Vektorraumes gilt für diese entweder

$$p(d+1) < q^d \leq q^{l^2 - (d+1)l + \frac{1}{2}d(n-d+1)} \leq \frac{|u_d^{t.s.}(V(n,q))|}{|u_l(L(\frac{n}{2}, q))| \cdot |u_{d-l}(L(\frac{n}{2} - l, q))|}$$

oder

$$d > l^2 - (d+1) \cdot l + \frac{1}{2} \cdot d \cdot (n - d + 1) \geq l^2 - (d+1) \cdot l + \frac{1}{2} \cdot d \cdot (d+1).$$

Da die erstgenannte Ungleichung ohne weiteres die Beziehung $|\Omega_g| \leq \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$ liefert, genügt es, die zweite Abschätzung genauer zu betrachten. Eine wiederholte Anwendung der Mitternachtsformel zeigt hier jedoch, dass die beiden äußeren Terme nur unter der Wahl

$$(d = 1,\, l = 1 \quad \text{oder} \quad d = 2,\, 1 \leq l \leq 2 \quad \text{oder} \quad d = 3,\, l = 2)$$

in der geforderten Beziehung zueinander stehen. Ein Einsetzen dieser Werte in die erste der beiden Ungleichungen liefert des Weiteren die Einschränkung

$$(n = 4,\, d = 2,\, 1 \leq l \leq 2 \quad \text{oder} \quad n = 6,\, d = 3,\, l = 2).$$

Für die verbliebenen Zahlentripel (n, d, l) überprüfen wir direkt die Ungleichung $|u_l(L(\frac{n}{2}, q))| \cdot |u_{d-l}(L(\frac{n}{2} - l, q))| \leq \frac{1}{p\cdot(d+1)} \cdot |u_d^{t.s.}(S(n, q))|$. Es treten daher auch hier keine Ausnahmen zur Schranke $\mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \frac{1}{p}$ auf.
Wenn die Gruppe G nicht auf einer Bahn maximaler total singulärer Teilräume des Vektorraumes $O^+(n, q)$ mit $n \leq 8$ wirkt, kann auch bei Vorliegen unitärer oder orthogonaler Gruppen entsprechend vorgegangen werden.
In den verbliebenen Fällen ist G entweder nicht fasteinfach (Fall $n = 4$), der G-Raum Ω zur $L_4(q)$-Bahn $u_1(V(4, q))$ isomorph und folglich Satz (4.1) anwendbar (Fall $n = 6$) oder $\sum_{l\in d+1} |u_l(L(\frac{n}{2}, q))| \leq \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$ (Fall $n = 8$). Es ergibt sich also auch unter diesen Annahmen die Behauptung des Satzes.

(b) Unterfall $p \perp (q^u)^k - 1$ für ein $k > 1$
Um eine Abschätzung für die Mächtigkeit der Fixpunktmenge Ω_g eines Elementes $g \in P\Delta(V, q)$ von Primzahlordnung $p \perp (q^u)^k - 1$ mit $k > 1$ zu erhalten, werfen wir einen Blick auf die gemäß Lemma (1.8) orthogonale (aber nicht notwendigerweise nicht-triviale) Zerlegung

$$V = V_{\hat{g}} \perp [V, \langle \hat{g} \rangle].$$

Diese wird von jedem Fixpunkt respektiert, das heißt es gilt

$$W = W_{\hat{g}} \perp [W, \langle \hat{g} \rangle]$$

für jeden Fixpunkt $W \in \Omega_g$. Aufgrund der $\langle g \rangle$-Invarianz des Vektorraums $[W, \langle \hat{g} \rangle]$, kann dieser wiederum als direkte Summe einer gewissen Anzahl l $\langle g \rangle$-irreduzibler Konstituenten von $[V, \langle \hat{g} \rangle]$ geschrieben werden. Da nach Lemma (1.8) die letztgenannten Unterräume stets die Dimension k besitzen, erhalten wir für die Mächtigkeit der Fixpunktmenge Ω_g die Abschätzung

$$|\Omega_g| \leq \sum_{l \in \lfloor \frac{d}{k} \rfloor + 1} |u_{lk}^{t.s.}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}| \cdot |u_{d-lk}^{t.s.}(V_{\hat{g}})|$$

(Die Bezeichnung $u_{lk}^{t.s.}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}$ repräsentiert hierbei die Menge der total singulären lk-Teilräume, welche als Summe irreduzibler Konstituenten von $[V, \langle \hat{g} \rangle]$ entstehen).

Wegen

$$\sum_{l\in\lfloor\frac{d}{k}\rfloor+1} |u^{t.s.}_{lk}([V,\langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}|\cdot|u^{t.s.}_{d-lk}(V_{\hat{g}})| \leq |u^{t.s.}_{d}(V_{\hat{g}})| + \sum_{l=1}^{\lfloor\frac{d}{k}\rfloor}\frac{1}{2p}\cdot|u^{t.s.}_{lk}([V,\langle\hat{g}\rangle])|\cdot|u^{t.s.}_{d-lk}(V_{\hat{g}})|$$

$$\leq \begin{cases} 0+\frac{1}{2p}\cdot|u^{t.s.}_{d}(V)| = \frac{1}{p}\cdot|\Omega| & \text{falls } V \text{ orthogonal,}\\ & n=2d\\ \frac{1}{2p}\cdot|u^{t.s.}_{d}(V)|+\frac{1}{2p}\cdot|u^{t.s.}_{d}(V)| = \frac{1}{p}\cdot|\Omega| & \text{sonst}\end{cases}$$

können lediglich Gruppenelemente $g \in G$ mit

$$|u^{t.s.}_{d}(V_{\hat{g}})| > \frac{1}{2p}\cdot|u^{t.s.}_{d}(V)| \qquad \text{oder} \qquad |u^{t.s.}_{lk}([V,\langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}| > \frac{1}{2p}\cdot|u^{t.s.}_{lk}([V,\langle\hat{g}\rangle])|$$

die im Satz genannten Schranken unterschreiten. Wir werden deshalb ermitteln unter welchen Umständen eine der eben genannten Abschätzungen erfüllt ist.

- Wir weisen zunächst nach, dass die Beziehung $|u^{t.s.}_{d}(V_{\hat{g}})| > \frac{1}{2p}\cdot|u^{t.s.}_{d}(V)|$ nur unter den Bedingungen (“$d=1$“ und “$\dim(V_{\hat{g}}) := c = n-k$“) Gültigkeit besitzen kann. Bei symplektischen Vektorräumen ergibt sich dies aus den Ungleichungen

$$2p \leq 2\cdot(q^k-1) < q^{k+1} \leq (q^k)^d \leq \prod_{i\in d}\frac{q^{n-2i}-1}{q^{c-2i}-1} = \frac{|u^{t.s.}_{d}(V)|}{|u^{t.s.}_{d}(V_{\hat{g}})|}.$$

Das gleiche Ergebnis erhält man nach einer analogen Vorgehensweise auch bei Vorliegen unitärer Vektorräume.
Orthogonale Vektorräume erfordern hingegen im Unterfall ($n \equiv c \equiv 0 \pmod 2$) eine etwas sorgfältigere Argumentation: Wegen $\frac{n-k}{2} \geq d > i$ (andernfalls würde der Fixraum $V_{\hat{g}}$ keine total singulären d-Teilräume besitzen) gilt hier die Relation $q^{n-2-2i} > q^{\frac{n+k}{2}-2-i}$. Zusammen mit $q^{\frac{n+k}{2}-2-i} \geq q^{\frac{n}{2}-1-i}$ führt diese zu der Beziehung $(q-1)\cdot(q^{n-2-2i}-q^{\frac{n+k}{2}-2-i}-q^{\frac{n}{2}-1-i})+q^{k-1}-1 \geq 0$, die gleichwertig zu

$$\frac{(q^{\frac{n}{2}-i}+1)\cdot(q^{\frac{n}{2}-i}-1)}{(q^{\frac{c}{2}-i}-1)\cdot(q^{\frac{c}{2}-i}+1)} \geq q^{k-1}$$

ist. Abgesehen vom Fall ($d=2=k$), folgt oben genannte Bedingung nun aus den Abschätzungen

$$2p \leq 2(q^k-1) < q^{k+1} \leq (q^{k-1})^d \leq \prod_{i\in d}\frac{(q^{\frac{n}{2}-i}+1)\cdot(q^{\frac{n}{2}-i}-1)}{(q^{\frac{c}{2}-i}-1)\cdot(q^{\frac{c}{2}-i}+1)} \leq \frac{|u^{t.s.}_{d}(V)|}{|u^{t.s.}_{d}(V_{\hat{g}})|}.$$

Im Falle (d=2=k) verifiziert man hingegen direkt die Ungleichung

$$2p \leq 2q^2 \leq \frac{(q^{\frac{n}{2}}+1)\cdot(q^{\frac{n}{2}-1}+1)}{(q^{\frac{n}{2}-2}+1)\cdot(q^{\frac{n}{2}-3}+1)} \leq \frac{|u_2^{t.s.}(V)|}{|u_2^{t.s.}(V_{\hat{g}})|}.$$

- In dem nun noch zu behandelnden Fall ($d = 1, c = n-k$) treten tatsächlich Vektorräume mit $|u_1^{t.s.}(V_{\hat{g}})| > \frac{1}{2p}|u_1^{t.s.}(V)|$ auf. Die Voraussetzung $d = 1$ erlaubt jedoch auch eine Spezialisierung der weiter oben genannten Abschätzung von $|\Omega_g|$ zu $|\Omega_g| = |u_1^{t.s.}(V_{\hat{g}})|$. Wir können daher die für $m_p(G^{u_1^{t.s.}(V)}) < \frac{p-1}{p}\cdot|u_1^{t.s.}(V)|$ notwendige Bedingung $|u_1^{t.s.}(V_{\hat{g}})| > \frac{1}{2p}\cdot|u_1^{t.s.}(V)|$ durch die dafür hinreichende und notwendige Bedingung $|u_1^{t.s.}(V_{\hat{g}})| > \frac{1}{p}\cdot|u_1^{t.s.}(V)|$ ersetzen.
In den Fällen S und U zeigt eine leichte Modifikation der oben durchgeführten Rechnungen, dass diese Ungleichung nicht erfüllt ist.
Bei Vorliegen eines orthogonalen Vektorraumes erfordert hingegen der Unterfall $(\dim(V_{\hat{g}}) \equiv 0 \pmod 2)$ einen etwas größeren Rechenaufwand:
Besitzt der Vektorraum V ungerade Dimension, so gestattet die Voraussetzung “V nicht-ausgeartet“ die Annahme $q > 2$ und damit auch den Schluss $q^2 - 2q > q - 1$. Soll g auf Ω nicht fixpunktfrei wirken, muss darüber hinaus $c = n - k \geq 2$ und insbesondere $q^k - 1 \leq q^{\frac{n+k}{2}-1}$ sein. Aufgrund dieser Voraussetzungen erhalten wir die Beziehung

$$\begin{aligned} q^{\frac{n-k}{2}-1}\cdot(q^k-1)\cdot(q-1)+1 &\leq q^{\frac{n-k}{2}-1}\cdot q^{\frac{n+k}{2}-1}\cdot(q^2-2q)+1 \\ &\leq q^{\frac{n-k}{2}-1}\cdot q^{\frac{n+k}{2}-1}\cdot(q^2-2q)+q^{n-k-1}+q^k-q+1, \end{aligned}$$

welche nach elementaren Umformungen die Abschätzung

$$(q^k-1)\cdot(q^{\frac{n-k}{2}}-1)\cdot(q^{\frac{n-k}{2}-1}+1) \leq (q^{n-1}-1)\cdot(q-1)$$

liefert. Die daraus resultierende Ungleichung

$$p \leq \frac{q^k-1}{q-1} \leq \frac{q^{n-1}-1}{(q^{\frac{n-k}{2}}-1)\cdot(q^{\frac{n-k}{2}-1}+1)} \leq \frac{|u_1^{t.s.}(V)|}{|u_1^{t.s.}(V_{\hat{g}})|}$$

belegt nun die Gültigkeit der im Satz genannten Schranke.
Bei orthogonalen Vektorräumen gerader Dimension $n = 2m$ ist aufgrund der Annahme $(c \equiv 0 \pmod 2)$ auch $k = n - c$ eine gerade Zahl und folglich $p \leq q^{\frac{k}{2}} + 1$. Wegen

$$p \leq q^{\frac{k}{2}}+1 \leq q^{\frac{k}{2}+1} \leq q^{k-2} \leq \frac{q^m\cdot q^{m-2}}{q^{\frac{n-k}{2}}\cdot q^{\frac{n-k}{2}}} \leq \frac{(q^m+1)\cdot(q^{m-1}-1)}{(q^{\frac{n-k}{2}}-1)\cdot(q^{\frac{n-k}{2}-1}+1)} \leq \frac{|u_1^{t.s.}(V)|}{|u_1^{t.s.}(V_{\hat{g}})|}$$

können also lediglich q-primitive Teiler zu den Werten q^2-1 und q^4-1 der Bedingung $|u_1^{t.s.}(V_{\hat{g}})| > \frac{1}{p}\cdot|u_1^{t.s.}(V)|$ genügen.
Durch eine gesonderte Betrachtung der Primteiler $p\perp q^4-1$ lassen sich diese als Kandidaten für die von uns gesuchten Ausnahmen ausschließen. Die dazu erforderliche Abschätzung $(q^2+1)\cdot(q^{\frac{n}{2}-2}-1)\cdot(q^{\frac{n}{2}-3}+1)\leq(q^{\frac{n}{2}}+1)\cdot(q^{\frac{n}{2}-1}-1)$ erhält man dabei, ausgehend von $2q^2+1\leq(q^2-1)\cdot(q+1)$, durch Umformung der Beziehung $q^{\frac{n}{2}-3}\cdot(2q^2+1)\cdot(q-1)-1\leq q^{n-5}\cdot(q^2-1)^2-1\leq q^{n-5}\cdot(q^4-q^2-1)+q^2-1$.
Im Falle $p\perp q^2-1$ führt die Äquivalenz

$$q+1\leq\frac{(q^m+1)\cdot(q^{m-1}-1)}{(q^{m-1}-1)\cdot(q^{m-2}+1)}\quad\Longleftrightarrow\quad q^{\frac{n}{2}}-q^{\frac{n}{2}-1}-q^{\frac{n}{2}-2}-q\geq 0$$

zu den Werten $q=2=k, n=4$. Des Weiteren rechtfertigt eine Überprüfung der für $\frac{|u_1^{t.s.}(V^{\varepsilon}(4,2))|}{|u_1^{t.s.}(V^{\varepsilon}(4,2)_g)|}$ möglichen Werte die Wahl $\varepsilon=-$, welche lediglich den im Satz unter 2. erfassten Ausnahmefall $p=3, \mathrm{soc}(G)=\Omega_4^-(2)$ hervorbringt.

- Wir haben uns nun noch mit der Forderung $|u_{lk}^{t.s.}([V,\langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}| > \frac{1}{2p}|u_{lk}^{t.s.}([V,\langle\hat{g}\rangle])|$ auseinander zu setzen.
Um zu klären unter welchen Umständen diese Ungleichung Gültigkeit besitzt, werden in einem ersten Schritt die in Tabelle 4.2 aufgeführten Abschätzungen für $|u_{lk}^{t.s.}([V,\langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}|$ verwendet. Sie ergeben sich aus der Beobachtung, dass jeder irreduzible Konstituent von $[V,\langle\hat{g}\rangle]$ (als $\langle\hat{g}\rangle$-zyklischer Teilraum der Dimension k) durch einen (jeden) in ihm enthaltenen Vektor eindeutig bestimmt ist.

Fall	Obere Schranke für $\lvert u_{lk}^{t.s.}([V,\langle g\rangle])_{\mathrm{irr}}\rvert$
S	$\prod_{i\in l}\frac{q^{n-c-2ik}-1}{q^{lk-ik}-1}$
U	$\prod_{i\in l}\frac{(q^{n-c-2ik}-(-1)^{n-c-2ik})\cdot(q^{n-c-2ik-1}-(-1)^{n-c-2ik-1})}{q^{2lk-2ik}-1}$
O^{ε} , $n-c=2o$	$\prod_{i\in l}\frac{(q^{o-ik}-\varepsilon)\cdot(q^{o-1-ik}+\varepsilon)}{q^{lk-ik}-1}$
, $n-c=2o+1$	$\prod_{i\in l}\frac{q^{n-c-1-2ik}-1}{q^{lk-ik}-1}$

Tabelle 4.2: Obere Schranke für den Wert $|u_{lk}^{t.s.}([V,\langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}|$

Mit Hilfe dieser Schranken lassen sich jene Werte l,k und $n-c$ ermitteln, welche ein Vorliegen der oben genannten Beziehung gestatten (nicht jedoch erzwingen).

Wir verdeutlichen das hierzu erforderliche Vorgehen anhand symplektischer Vektorräume: Besitzt der symplektische Raum $[V, \langle\hat{g}\rangle]$ total singuläre lk-Teilräume, so gilt $2lk \leq n - c$. Wegen

$$\frac{|u_{lk}^{t.s.}([V, \langle\hat{g}\rangle])|}{|u_{lk}^{t.s.}([V, \langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}|} \geq \prod_{i\in l} \prod_{j\in k\setminus\{0\}} \frac{q^{n-c-2ik-2j} - 1}{q^{lk-ik-j} - 1} \geq \prod_{i\in l} \prod_{j\in k\setminus\{0\}} q^{lk-ik-j} \geq q^{\frac{l}{2}lk(k-1)}$$

und $q^{k+1} \geq 2p$ genügt es, die Fälle $l = 1, k \leq 3$ (andernfalls ist $k + 1 \leq \frac{l}{2}lk(k-1)$) näher zu betrachten.
Die Wahl $l = 1, k = 3$ führt zu $2p \leq 2 \cdot \frac{q^3-1}{q-1} \leq \frac{q^4-1}{q-1} \leq \frac{q^{n-c-2}-1}{q-1} \leq \frac{|u_3^{t.s.}([V,\langle\hat{g}\rangle])|}{|u_3^{t.s.}([V,\langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}|}$ und erfüllt daher die oben genannte Forderung nicht.
Im Falle $l = 1$, $k = 2$ erlaubt die Annahme $n-c \geq 5$ die Abschätzung $2p \leq 2\cdot(q+1) \leq \frac{q^{n-c-2}-1}{q-1} \leq \frac{|u_2^{t.s.}([V,\langle\hat{g}\rangle])|}{|u_2^{t.s.}([V,\langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}|}$. Folglich kann der Grundbedingung nur entsprochen werden, wenn $l = 1, k = 2$ und $n - c = 4$ gesetzt wird.
Mutatis mutandis lassen sich auf die gleiche Weise auch unitäre und orthogonale Vektorräume behandeln. Nach einer Elimination des sich rechnerisch ergebenden Ausnahmefalles $(l, k, n-c) = (1, 2, 5)$, welche durch das Fehlen der Teilereigenschaft $k \mid n - c$ gerechtfertigt wird, bleibt in unitären Vektorräumen nur das Zahlentripel $(l, k, n - c) = (1, 2, 4)$, in orthogonalen Vektorräumen zusätzlich die Wahl $l = 1, k = 3, n - c = 6$ zu berücksichtigen.

- Im weiteren Vorgehen schließen wir zunächst für orthogonale Vektorräume $[V, \langle\hat{g}\rangle]$ ein Auftreten der Werte $l = 1$, $k = 3$, $n - c = 6$ aus:
Bezeichnet o die Dimension eines maximalen total singulären Teilraumes von $[V, \langle\hat{g}\rangle]$, so besitzt gemäß [Asc86, (22.13)] die auf der Menge $u_o^{t.s.}([V, \langle\hat{g}\rangle])$ der maximal total singulären Teilräume von $[V, \langle\hat{g}\rangle]$ durch

$$U \sim W :\Longleftrightarrow o - \dim(U \cap W) \equiv 0 \pmod 2$$

definierte Äquivalenzrelation $\sim$ genau zwei Äquivalenzklassen. Weil sich zwei verschiedene irreduzible Teilräume stets trivial schneiden, enthält unter den gegebenen Voraussetzungen jede dieser Äquivalenzklassen höchstens einen irreduziblen total singulären 3-Raum. Es folgt daher $|u_3^{t.s.}([V, \langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}| \leq 2 < \frac{1}{2p}|u_3^{t.s.}([V, \langle\hat{g}\rangle])|$.

Im Fall $(l, k, n - c) = (1, 2, 4)$ treten Beispiele auf, welche der Ungleichung $|u_{lk}^{t.s.}([V, \langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}| > \frac{1}{2p}|u_{lk}^{t.s.}([V, \langle\hat{g}\rangle])|$ genügen (etwa wenn g als 3A-Element in $\mathrm{Sp}(4, 2)$ gewählt wird). Dennoch kann auch in dieser Situation die im Satz formulierte Behauptung $m_p(G^\Omega) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ bewiesen werden. Zu diesem Zweck ersetzen wir die in Tabelle 4.2 aufgeführten Schranken durch bessere Abschätzungen von $|u_{lk}^{t.s.}([V, \langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}|$:

Sind $\langle v, v^{\hat{g}}\rangle, W$ und U paarweise verschiedene irreduzible total singuläre 2-Räume in $[V, \langle\hat{g}\rangle]$, dann ergibt sich aus Dimensionsgründen $\langle v\rangle^{\perp} \cap W \neq 0$. Wir wählen $w \in \langle v\rangle^{\perp} \cap W$ mit $(w, v^{\hat{g}}) = 1$ und erhalten folglich

$$\langle v\rangle^{\perp} = \langle v, v^{\hat{g}}, w\rangle \quad \text{und} \quad \langle v^{\hat{g}}\rangle^{\perp} = \langle v, v^{\hat{g}}, w^{\hat{g}}\rangle,$$
$$\langle w\rangle^{\perp} = \langle v, w, w^{\hat{g}}\rangle \quad \text{und} \quad \langle w^{\hat{g}}\rangle^{\perp} = \langle v^{\hat{g}}, w, w^{\hat{g}}\rangle.$$

Da der Vektorraum $[V, \langle\hat{g}\rangle]$ die direkte Summe der Teilräume $\langle v, v^{\hat{g}}\rangle$ und $\langle w, w^{\hat{g}}\rangle$ und die Restriktion der Projektionsabbildung $\mathrm{Pr}_{[V,\langle\hat{g}\rangle]\to\langle v, v^{\hat{g}}\rangle}$ auf den Teilraum U surjektiv ist, existiert darüber hinaus ein $u \in U$ mit

$$u = v + \lambda w + \mu w^{\hat{g}} \quad \text{für geeignete} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{F}_q.$$

Wegen $w^{\hat{g}^2} \in W = \langle w, w^{\hat{g}}\rangle$ lässt sich ferner $w^{\hat{g}^2} = \alpha w + \beta w^{\hat{g}}$ für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q$ setzen. Das Fehlen $\langle\hat{g}\rangle$-invarianter 1-Räume in $[V, \langle\hat{g}\rangle]$ ermöglicht dabei den Nachweis der Eigenschaft $\alpha \cdot \beta \neq 0$.
Ein Einsetzen der bisherigen Festlegungen und Resultate in die - aus $U \leq U^{\perp}$ zu gewinnende - Beziehung $(u, u^{\hat{g}}) = 0$, führt bei symplektischen Vektorräumen zu den Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 = (u, u^{\hat{g}}) &= (v + \lambda w + \mu w^{\hat{g}}, v^{\hat{g}} + \lambda w^{\hat{g}} + \mu w^{\hat{g}^2}) \\
&= (v + \lambda w + \mu w^{\hat{g}}, v^{\hat{g}} + \mu\alpha w + (\mu\beta + \lambda) w^{\hat{g}}) \\
&= (\mu\beta + \lambda) \cdot (v, w^{\hat{g}}) + \lambda \cdot (w, v^{\hat{g}}) \\
&= (\mu\beta + \lambda)\alpha \cdot (v^{\hat{g}}, w) + \lambda \cdot (w, v^{\hat{g}}) \\
&= -\mu\alpha\beta - (\alpha - 1)\lambda
\end{aligned}$$

und damit auch zu der Identität

$$\mu = \alpha^{-}\beta^{-}(1 - \alpha)\lambda.$$

Eine entsprechende Vorgehensweise liefert in den Fällen U bzw. O die Gleichheit $\mu = -\alpha^{-}\beta^{-}(\lambda^{q} + \alpha\lambda)$ respektive $\mu = -\alpha^{-}\beta^{-}(\alpha + 1)\lambda$.
Wir haben damit nachgewiesen, dass der Vektor u durch die Variable λ eindeutig bestimmt wird, der Vektorraum $[V, \langle\hat{g}\rangle]$ also höchstens $q+1$ verschiedene irreduzible total singuläre 2-Räume besitzt.
Bei orthogonalen Vektorräumen kann aus dem Ansatz $Q(u) = 0$ zusätzlich die Bedingung $\mu = 0$ abgeleitet werden. Da mit $\langle v + \lambda_0 w, v^{\hat{g}} + \lambda_0 w^{\hat{g}}\rangle$ für ein $\lambda_0 \in \mathbb{F}_q{}^*$ auch die irreduziblen 2-Räume $\langle v + \lambda w, v^{\hat{g}} + \lambda w^{\hat{g}}\rangle$ $(\lambda \in \mathbb{F}_q)$ total singulär sind, folgt

$$(|u_2^{t.s.}([V, \langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}| \leq 2 \text{ oder } |u_2^{t.s.}([V, \langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}| = q + 1).$$

Wird $n = n - c = 4$ angenommen, so wirkt im letztgenannten Fall g fixpunktfrei oder trivial auf Ω, denn $u_2^{t.s.}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}$ und Ω entsprechen Äquivalenzklassen der weiter oben definierten Äquivalenzrelation $\sim$. Für die bei unserer Betrachtung relevanten Gruppenelemente g gilt also $|u_2^{t.s.}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}| \leq 2$ (wenn $o(g) = q + 1$ ist sogar $|u_2^{t.s.}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}| = 0$) und damit auch die Behauptung des Satzes.
In den Fällen $n = 5$ und $n = 6$ überprüft man direkt die Gültigkeit der Beziehung $|u_d^{t.s.}(V_{\hat{g}})| + (q + 1) \cdot |u_{d-2}^{t.s.}(V_{\hat{g}})| \leq \frac{1}{p} \cdot |u_d^{t.s.}(V)|$.
In orthogonalen Vektorräumen der Dimension $n \geq 7$ lässt sich ohne große Mühe nachweisen, dass die beiden Summanden der oberen Schranke $|u_d^{t.s.}(V_{\hat{g}})| + (q + 1) \cdot |u_{d-2}^{t.s.}(V_{\hat{g}})|$ den Wert $\frac{1}{2p} \cdot |u_d^{t.s.}(V)|$ nicht überschreiten (Die erste der beiden Forderungen wurde im Verlauf des Beweises schon verifiziert).
Auf die gleiche Weise können auch symplektische oder unitäre Vektorräume der Dimension $n \geq 5$ behandelt werden. Im letzten verbleibenden Fall $n = 4$ ergibt eine Verwendung der oben ermittelten Schranke die Abschätzung $|u_2^{t.s.}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}| \leq q + 1 \leq \frac{1}{p} \cdot |u_2^{t.s.}([V, \langle \hat{g} \rangle])|$. □

Im folgenden Satz sollen Abschätzungen der minimalen p-Grade von Wirkungen klassischer Gruppen auf nicht-ausgearteten Teilräumen angegeben werden.
Dabei verwenden wir im Falle O für die Bahn des d-Unterraumes U die Notation $u_d^{\varepsilon_0}(V)$, wobei ε_0 bei gerader Dimension d dem Vorzeichen von U, bei ungerader Dimension d dem Vorzeichen von $U^\perp$ entspricht. In den Fällen S und U identifizieren wir $u_d^{\varepsilon_0}(V)$ mit der Menge $u_d^{n.a.}(V)$ der nicht-ausgearteten d-Teilräume von V.

(4.3) Satz *Sei $1 \neq q = r^f$ eine Potenz der Primzahl r und $2 < n \in \mathbb{N}$. Die fasteinfache klassische Gruppe $G = P\Gamma(V, q)$ wirke auf einer Bahn Ω nicht-ausgearteter d-dimensionaler Teilräume des nicht-ausgearteten Vektorraumes $V = V(n, q)$ (mit $d \leq \frac{n}{2}$). Ist $p \neq r$ ein ungerader Primteiler der Ordnung von G, so gilt*

$$m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|.$$

Beweis: Um die Behauptung des Satzes zu beweisen, verwenden wir die in Tabelle 4.3 angegebenen Bahnlängen nicht-ausgearteter d-Teilräume.

Nach [GL83, (7.2)] genügt es ferner Primelemente g in $P\Delta(V, q)$ und $\langle \bar{\Phi}_B \rangle$ zu betrachten.

I. Fall: g ist ein Körperautomorphismus
Entspricht das Gruppenelement g einem Körperautomorphismus von $\langle \bar{\Phi}_B \rangle$ der Ordnung p, so enthält jeder nicht-ausgeartete g-invariante, d-dimensionale Unterraum $W \in \Omega_g$ einen nicht-ausgearteten d-dimensionalen $\mathbb{F}_{q^{u/p}}$-Teilraum $W_{\hat{g}}$ von

Fall	$\lvert u_d^{\varepsilon_0}(V)\rvert$	Bedingung
S	$q^{\frac{(n-d)d}{2}} \cdot \prod_{i \in \frac{d}{2}} \frac{q^{n-2i}-1}{q^{d-2i}-1}$	$d \equiv 0 \ (2)$
U	$q^{(n-d)d} \cdot \prod_{i \in d} \frac{q^{n-i}-(-1)^{n-i}}{q^{d-i}-(-1)^{d-i}}$	
O^{ε} , $n \equiv 0 \ (2)$	$\frac{1}{2} \cdot q^{\frac{(n-d)d}{2}} \cdot \frac{(q^{\frac{d}{2}}+\varepsilon_0)\cdot(q^{\frac{n-d}{2}}+\varepsilon\varepsilon_0)}{q^{\frac{n}{2}}+\varepsilon} \cdot \prod_{i \in \frac{d}{2}} \frac{q^{n-2i}-1}{q^{d-2i}-1}$	$d \equiv 0 \ (2)$
	$\frac{1}{2} \cdot q^{\frac{(n-d)d-1}{2}} \cdot \left(q^{\frac{n}{2}} - \varepsilon\right) \cdot \prod_{i \in \frac{d-1}{2}} \frac{q^{n-2-2i}-1}{q^{d-1-2i}-1}$	$d \equiv 1 \ (2)$
, $n \equiv 1 \ (2)$	$\frac{1}{2} \cdot q^{\frac{(n-d)d}{2}} \cdot \left(q^{\frac{d}{2}} + \varepsilon_0\right) \cdot \prod_{i \in \frac{d}{2}} \frac{q^{n-1-2i}-1}{q^{d-2i}-1}$	$d \equiv 0 \ (2)$
	$\frac{1}{2} \cdot q^{\frac{(n-d)d}{2}} \cdot \left(q^{\frac{n-d}{2}} + \varepsilon_0\right) \cdot \prod_{i \in \frac{d-1}{2}} \frac{q^{n-1-2i}-1}{q^{d-1-2i}-1}$	$d \equiv 1 \ (2)$

Tabelle 4.3: Länge der Bahnen nicht-ausgearteter d-Teilräume von V

$V_{\hat{g}} \cong V(n, q^{\frac{u}{p}})$, dessen $\mathbb{F}_{q^u}$-Aufspann $\langle W_{\hat{g}} \rangle$ den Unterraum W erzeugt. Bildet der Vektorraum V einen symplektischen, hermiteschen bzw. orthogonalen Vektorraum, so ist darüber hinaus auch der Fixraum $V_{\hat{g}}$ symplektisch, unitär bzw. orthogonal. Es folgt daher

$$|\Omega_g| = |u_d^{n.a.}(V_{\hat{g}})| = |u_d^{n.a.}(V(n, q^{\frac{u}{p}}))|.$$

Ein Vergleich dieses Wertes mit der Mächtigkeit der Menge Ω zeigt nun die Gültigkeit der Ungleichung $|\Omega_g| \leq \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$. Wir skizzieren das dazu erforderliche Vorgehen im Unterfall S. Wegen $n \geq 3$ und $d \leq \frac{n}{2}$ ergibt sich hier $n - d > 1$ und folglich auch $p \leq (q^{\frac{1}{p}})^{p-1} \leq (q^{\frac{1}{p}})^{2p-\frac{5}{2}} \leq (q^{\frac{1}{p}})^{[2(p-1)\cdot(n-d)-1]\cdot\frac{d}{2}} = \frac{q^{(n-d)d}}{(q^{\frac{1}{p}})^{(n-d)d+\frac{d}{2}}} < \frac{|u_d^{n.a.}(V)|}{|u_d^{n.a.}(V_{\hat{g}})|}$.
Bei unitären oder orthogonalen Vektorräumen V ist analog zu argumentieren.

II. Fall: $g \in P\Delta(V, q)$
Wir können uns daher den Gruppenelementen in $P\Delta(V, q)$ zuwenden. Dabei unterscheiden wir zwischen Primelementen der Ordnung $p \mid q^u - 1$ bzw. $p \mid (q^u)^k - 1$ für ein $k > 1$.

(a) Unterfall $p \mid q^u - 1$
Gemäß Lemma (1.8) lässt sich der Vektorraum V unter den gegebenen Umständen entweder in nicht-triviale, nicht-ausgeartete Teilräume $E_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$ und $K_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$ (für einen geeigneten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{F}_{q^u}^*$ zerlegen oder als direkte Summe total singulärer Eigenräume $E_\lambda(\hat{g})$ und $E_{\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$ schreiben.

(i) Unterfall $V = E_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g}) \perp K_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$
Hier wird die Zerlegung $V = E_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g}) \perp K_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$ von jedem Fixpunkt W in Ω_g respektiert, d.h. es gilt

$$W = (W \cap E_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})) \perp (W \cap K_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})).$$

Wegen $V = (W \cap E_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})) \perp (W^\perp \cap E_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})) \perp (W \cap K_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})) \perp (W^\perp \cap K_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g}))$ sind die Teilräume $W \cap E_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$ und $W \cap K_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$ darüber hinaus nicht-ausgeartet und insbesondere

$$|u_d^{n.a.}(V)_g| \leq \sum_{l \in d+1} |u_{d-l}^{n.a.}(E_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g}))| \cdot |u_l^{n.a.}(K_{\lambda,\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g}))|.$$

Wir kürzen unter den beiden oben auftretenden Teilräumen jenen Unterraum kleinerer Dimension durch die Kurzschreibweise E, den größeren durch E' ab und setzen $\dim(E) =: e \leq e' := \dim(E')$ sowie $a := \min\{d, e\}$. Dann ergibt sich

$$|\Omega_g| \leq \sum_{l \in a+1} |u_l^{n.a.}(E)| \cdot |u_{d-l}^{n.a.}(E')|.$$

Mit dieser Schranke lässt sich nun die Ungleichung $|\Omega_g| \leq \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$ nachweisen.
- Ist $a = 1$, so kann die oben angegebene Beziehung zu $|\Omega_g| = |u_1^{n.a.}(E')| + |u_1^{n.a.}(E)|$ bzw. $|\Omega_g| = |u_d^{n.a.}(E')| + |u_{d-1}^{n.a.}(E')|$ spezialisiert werden. Wirkt $P\Delta(V, q)$ nicht auf der Menge $u_1^-(O(3, q))$, so liefert ein zu Fall L analoges Vorgehen die Aussage des Satzes (Beachte hierbei die Voraussetzungen "$n > 2$" und "G fasteinfach"). Im verbliebenen Fall entspricht der Sockel von G der Gruppe $O_3(q) \cong L_2(q)$ und $L_2(q) \cap G_\alpha$ der Diedergruppe D_{q+1} der Ordnung $q + 1$. Mithin wirkt jedes Primelement g in $O_3(q)$ mit Ordnung $2 \neq o(g) = p \mid q - 1$ fixpunktfrei auf $u_1^-(O(3, q))$. Die Behauptung ergibt sich nun nach Berücksichtigung der aus Ordnungsgründen (und dem Satz von Sylow) folgenden Eigenschaft $\mathrm{Syl}_p(O_3(q)) \subseteq \mathrm{Syl}_p(G)$.
- Im Fall $a > 1$ untersuchen wir hingegen die einzelnen Summanden der oben aufgeführten Schranke von $|\Omega_g|$. Wir erläutern das Vorgehen anhand symplektischer Gruppen. Wäre $\mathrm{rfix}_\Omega(g) > \frac{1}{p}$, so müsste ein $\tilde{l} \in a + 1$ mit

$$|u_{\tilde{l}}^{n.a.}(E)| \cdot |u_{d-\tilde{l}}^{n.a.}(E')| > \frac{1}{p \cdot (a+1)} \cdot |u_d^{n.a.}(V)|$$

auftreten. Folglich erhielten wir

$$p \cdot (a+1) > \frac{|u_d^{n.a.}(V)|}{|u_{\tilde{l}}^{n.a.}(E)| \cdot |u_{d-\tilde{l}}^{n.a.}(E')|} > q^{(e-\tilde{l})\cdot(d-\tilde{l}) + (e' - (d-\tilde{l}) - \frac{1}{2})\cdot \tilde{l}},$$

und wegen $p \cdot (a+1) < q^a$ weiters $a > (d-\tilde{l}) \cdot (e-\tilde{l}) + (e' - (d-\tilde{l}) - \frac{1}{2}) \cdot \tilde{l}$. Dies würde jedoch ein Vorliegen der Bedingung

$$(e = \tilde{l} \quad \text{oder} \quad d = \tilde{l} \quad \text{oder} \quad e' - 1 \leq d - \tilde{l})$$

erzwingen, denn andernfalls besäße der erste Summand der obigen Summe mindestens den Wert $a - \tilde{l}$ und der zweite Summand mindestens den Wert $\tilde{l}$.
Wird in obiger Gleichung die Variable $\tilde{l}$ durch einen der durch diese Forderung vorgegebenen Terme ersetzt, so ergibt sich nach einem Vergleich mit den oberen Schranken d und e von a

$$(d = 1,\, n = 2 \quad \text{oder} \quad d = e' = 2,\, \tilde{l} = 1,\, n = 4).$$

Im erstgenannten Fall wäre $a = d = 1$, ein Widerspruch zu unserer Annahme $a > 1$. Die Bedingung $\tilde{l} = 1$ lieferte im zweiten Unterfall die im Gegensatz zur Forderung $|u_{\tilde{l}}^{n.a.}(E)| \cdot |u_{d-\tilde{l}}^{n.a.}(E')| > \frac{1}{p \cdot (a+1)} \cdot |u_d^{n.a.}(V)|$ stehende Gleichheit $|u_{\tilde{l}}^{n.a.}(E)| \cdot |u_{d-\tilde{l}}^{n.a.}(E')| = 0$. Bei unitären bzw. orthogonalen Vektorräumen führt ein analoges Vorgehen zunächst zu den Restriktionen $n \leq 6$, $d = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, l = d-1$ bzw. $d \leq 7, l \leq 3$. Die verbliebenen Wirkungen lassen sich dann durch Rechnung mit den exakten Werten der in Tabelle 4.3 angegebenen Bahnlängen eliminieren.

(ii) Unterfall $V = E_\lambda(\hat{g}) \oplus E_{\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$, wo $E_\lambda(\hat{g})$ und $E_{\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$ total singulär sind. Ist $W \in \Omega_g$ ein Fixpunkt von g in Ω, so folgt zunächst

$$W = (W \cap E_\lambda(\hat{g})) \oplus (W \cap E_{\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})).$$

Da W nicht-ausgeartet ist und $W \cap E_\lambda(\hat{g})$ bzw. $W \cap E_{\lambda^{-q_\tau}}(\hat{g})$ total singuläre Teilräume von W bilden, muss weiter $d \equiv 0 \pmod 2$ und $\dim(W \cap E_\lambda(\hat{g})) = \frac{d}{2}$ gelten. Die Mächtigkeit der Fixpunktmenge Ω_g kann daher nicht den Wert

$$|\Omega_g| \leq |u_{\frac{d}{2}}(L(\frac{n}{2}, q))|^2$$

überschreiten.
Wir nutzen diese Schranke zum Nachweis der Beziehung $\mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \frac{1}{p}$.
Bei Vorliegen eines symplektischen Vektorraumes schließen wir unter der Annahme $n - d - 2 \geq 2$ auf

$$p \leq q^{\frac{(n-d-2)d}{2}} \leq \frac{q^{\frac{(n-d)d}{2}} \cdot q^{(\frac{n}{2} - \frac{d}{2} - 1) \cdot \frac{d}{2}}}{q^{(\frac{n}{2} - \frac{d}{2} + 1) \cdot \frac{d}{2}}} \leq \frac{q^{\frac{(n-d)d}{2}} \cdot \prod_{i \in d/2} \frac{q^{(n/2)-i}+1}{q^{(d/2)-i}+1}}{\prod_{i \in d/2} \frac{q^{(n/2)-i}-1}{q^{(d/2)-i}-1}} = \frac{|u_d^{n.a.}(V(n,q))|}{|u_{\frac{d}{2}}(L(\frac{n}{2}, q))|^2}.$$

Im Fall $n = 4, d = 2$ (d.h. $n - d - 2 < 2$) erhalten wir die Behauptung des Satzes aus $p \leq q \leq \frac{q^2 \cdot (q^2+1)}{(q+1)^2} = \frac{|u_2^{n.a.}(S(4,q))|}{|u_1(L(2,q))|^2}$.
Eine entsprechende Argumentation führt auch bei unitären bzw. orthogonalen Vektorräumen zu der Ungleichung $|\Omega_g| \leq \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$ (Beachte hierbei, dass die Voraussetzungen "G fasteinfach" und "V direkte Summe zweier maximaler total singulärer Teilräume" im Falle O die Bedingung $n > 4$ liefern).

(b) Unterfall $p \perp (q^u)^k - 1$ für ein $k > 1$
Um eine Abschätzung für die Mächtigkeit der Fixpunktmenge Ω_g eines Elementes $g \in P\Delta(V,q)$ von Primzahlordnung $p \perp (q^u)^k - 1$ mit $k > 1$ zu erhalten, betrachten wir die gemäß (1.8) orthogonale (aber nicht notwendigerweise nicht-triviale) Zerlegung

$$V = V_{\hat{g}} \perp [V, \langle \hat{g} \rangle].$$

Bezeichnet $W \in \Omega_g$ einen Fixpunkt von g in Ω, so gilt

$$V = W_{\hat{g}} \perp [W, \langle \hat{g} \rangle] \perp (W^{\perp})_{\hat{g}} \perp [W^{\perp}, \langle \hat{g} \rangle],$$

denn nach Voraussetzung ist W nicht-ausgeartet in V. Mithin bilden die Teilräume $W_{\hat{g}}$ und $[W, \langle \hat{g} \rangle]$ nicht-ausgeartete Unterräume von $V_{\hat{g}}$ bzw. $[V, \langle \hat{g} \rangle]$.
Da nach (1.8) jeder $\langle g \rangle$-irreduzible Konstituent des Vektorraums $[V, \langle \hat{g} \rangle]$ die Dimension k besitzt, gewinnen wir daraus für die Mächtigkeit der Fixpunktmenge Ω_g die Abschätzung

$$|\Omega_g| \leq \sum_{l \in \lfloor \frac{d}{k} \rfloor + 1} |u_{lk}^{n.a.}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}| \cdot |u_{d-lk}^{n.a.}(V_{\hat{g}})|$$

(Die Bezeichnung $u_{lk}^{n.a.}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}$ dient hierbei als Kürzel für die Menge der nicht-ausgearteten lk-Teilräume, welche sich als Summe irreduzibler Konstituenten von $[V, \langle \hat{g} \rangle]$ schreiben lassen).

Verwendung dieser Schranke erlaubt nun den Nachweis der Eigenschaft $|\Omega_g| \leq \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$.

(i) Fall $d \geq 2$:
Wirkt die Gruppe G auf einer Bahn $\Omega = u_d^{\varepsilon_0}(V)$ nicht-ausgearteter Teilräume der Dimension $d \geq 2$, so unterscheiden wir die Fälle $\dim([V, \langle \hat{g} \rangle]) := n - c > k$ und $\dim([V, \langle \hat{g} \rangle]) = k$.

- Unterfall $n - c > k$:
Unter dieser Annahme können stets die Ungleichungen $|u_d^{\varepsilon_1}(V_{\hat{g}})| \leq \frac{1}{4p} \cdot |u_d^{\varepsilon_0}(V)|$ und $|u_{d-n+c}^{n.a.}(V_{\hat{g}})| \leq \frac{1}{4p} \cdot |u_d^{\varepsilon_0}(V)|$ verifiziert werden.
Bei Vorliegen eines symplektischen Vektorraumes ergibt sich dies aus den Abschätzungen

$$4p \leq 4q^k \leq q^k \cdot q^k \leq q^{n-c} < q^{(n-c)d} < q^{\frac{(n-c)d}{2}} \cdot \prod_{i \in \frac{d}{2}} \frac{q^{n-2i} - 1}{q^{c-2i} - 1} = \frac{|u_d^{n.a.}(V)|}{|u_d^{n.a.}(V_{\hat{g}})|}$$

und

$$4p \leq q^{k+2} \leq q^{d(n-c)} \leq q^{(n-d) \cdot (n-c)} \leq q^{\frac{(n-d) \cdot (n-c)}{2}} \cdot \prod_{i \in \frac{n-c}{2}} \frac{q^{n-2i} - 1}{q^{d-2i} - 1} = \frac{|u_d^{n.a.}(V)|}{|u_{d-n+c}^{n.a.}(V_{\hat{g}})|}.$$

Eine analoge Vorgehensweise liefert auch in unitären und orthogonalen Vektorräumen die Behauptung.
Es genügt daher die Beziehung $\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n-c}{k} \rfloor -1} |u_{lk}^{n.a.}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}| \cdot |u_{d-lk}^{n.a.}(V_{\hat{g}})| \leq \frac{1}{2p} \cdot |u_d^{\varepsilon_0}(V)|$ zu verifizieren. Von Nutzen erweist sich dabei die dafür hinreichende Bedingung $|u_{lk}^{n.a.}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}| \leq \frac{1}{2p} \cdot |u_{lk}^{\varepsilon_0}([V, \langle \hat{g} \rangle])|$ für alle $1 \leq l < \frac{n-c}{k}$ und $\varepsilon_0 \in \{\pm, 0\}$. Diese erlaubt lediglich im Unterfall $k = 2$ ein Auftreten von Gegenbeispielen. Denn wegen

$$\begin{aligned} 2p \cdot q^{(n-c-lk+1)l} &> 2p \prod_{i \in l} \frac{q^{n-c-ik} - 1}{q^{lk-ik} - 1} \geq 2p \cdot |u_{lk}^{n.a.}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}| \\ &\geq |u_{lk}^{\varepsilon_0}([V, \langle \hat{g} \rangle])| = q^{\frac{(n-c-lk)lk}{2}} \cdot \prod_{i \in \frac{lk}{2}} \frac{q^{n-c-2i} - 1}{q^{lk-2i} - 1} > q^{(n-c-lk)lk}, \end{aligned}$$

erhält man bei Vorliegen eines symplektischen Vektorraumes die Ungleichung $k + 1 + l > (n - c - lk)l(k - 1) \geq kl(k - 1)$ und damit die Forderung $k = 2$. Ein Vergleich der oberen Schranke $|u_{2l}^{n.a.}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}| \leq \prod_{i \in l} \frac{q^{n-c-2i} - 1}{q^{2l-2i} - 1}$ mit dem Ausdruck $\frac{1}{2p} \cdot |u_{2l}^{\varepsilon_0}([V, \langle \hat{g} \rangle])|$ führt ferner zu der Einschränkung $k = 2, l = 1, q = 2, n - c = 4$.
Nach entsprechender Argumentation ergeben sich im Falle O die kritischen Werte $l = 1, k = 2, q \in \{2, 4\}, n - c = 4$ und $l \leq 2, k = 2, q = 2, n - c = 6$, in unitären Vektorräumen hingegen keine Ausnahmen.
Wir bemerken, dass der bei symplektischen Räumen verbliebene Wert (notfalls mit Hilfe des Atlasses) leicht eliminiert werden kann, und wenden uns den noch zu behandelnden orthogonalen Vektorräumen zu.
Gilt $n-c = 6, q = 2$, so hat der Teilraum $[V, \langle \hat{g} \rangle]$ den Witt-Defekt 1, denn $O_6^+(2)$ weist keine auf $[V, \langle \hat{g} \rangle]$ fixpunktfrei wirkenden 3-Elemente auf. Darüber hinaus besitzen - da jeder über $\mathbb{F}_2$ gebildete hyperbolische 2-Raum genau einen nicht-singulären Vektor enthält - sämtliche nicht-ausgearteten g-invarianten 2-Unterräume von $[V, \langle \hat{g} \rangle]$ den Witt-Defekt 1. Die 36 nicht-singulären Vektoren von $[V, \langle \hat{g} \rangle]$ können daher höchstens in 12 irreduzible 2-Räume eingeteilt werden. Weil 4-dimensionale nicht-ausgeartete g-invariante Teilräume stets ein g-invariantes Komplement der Dimension 2 besitzen, gilt die gleiche Schranke auch für den Wert $|u_4^{n.a.}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}|$. Die gewonnenen Beträge liefern nun ohne weiteres die hinreichende Bedingung

$$|u_{lk}^{n.a.}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}| \leq \frac{1}{2p} \cdot |u_{lk}^{\varepsilon_0}([V, \langle \hat{g} \rangle])|.$$

Im Fall $n - c = 4, q \in \{2, 4\}$ ist diese Forderung hingegen nicht erfüllt. Unter der Zusatzannahme $n \geq 6$ lässt sich hier jedoch - durch Abschätzen der Werte $|u_2^{n.a.}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}| \cdot |u_{d-2}^{n.a.}(V_{\hat{g}})|$ und $|u_d^{\varepsilon_0}(V)|$ mittels geeigneter Potenzen von q - die oben erwähnte hinreichende Bedingung $|u_2^{n.a.}([V, \langle \hat{g} \rangle])_{\mathrm{irr}}| \cdot |u_{d-2}^{n.a.}(V_{\hat{g}})| \leq \frac{1}{2p} \cdot |u_d^{\varepsilon_0}(V)|$ nachweisen.

In den verbliebenen Fällen $n < 6$ folgt $c < 2$. Daher genügt es für die Gültigkeit der Aussage des Satzes die Ungleichung $|u_2^{n.a.}([V, \langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}| \leq \frac{1}{p} \cdot |u_2^{\varepsilon_0}(V)|$ zu verifizieren. Wegen $p \leq q^2 - 1 < \frac{1}{2} \cdot q^3 \cdot (q-1) \leq \frac{|u_2^{\varepsilon_0}(V)|}{q^2+1} \leq \frac{|u_2^{\varepsilon_0}(V)|}{|u_2^{n.a.}([V,\langle\hat{g}\rangle])_{\mathrm{irr}}|}$ bereitet dies im Falle $n = 5$ keine Schwierigkeiten.
Unter der Voraussetzung $n = 4$ ergibt sich die Behauptung nach einem zu Unterfall $n - c = 6, q = 2$ analogen Vorgehen (Bei der Behandlung des Vektorraumes $O^+(4, 2)$ dürfen dabei die auf $u_2^-(O^+(4, 2))$ trivial wirkenden 3-Elemente vernachlässigt werden).

- Unterfall $n - c = k$:
In dieser Situation kann die auf Seite 64 gewonnene Abschätzung in der Form

$$|\Omega_g| \leq |u_d^{\varepsilon_1}(V_{\hat{g}})| + |u_{d-k}^{n.a.}(V_{\hat{g}})|$$

geschrieben werden. Wird nun der kleinere der beiden Summanden durch den größeren ersetzt, so erhält man die hinreichende Bedingung ($|u_d^{\varepsilon_1}(V_{\hat{g}})| \leq \frac{1}{2p} \cdot |u_d^{\varepsilon_0}(V)|$ und $|u_{d-k}^{n.a.}(V_{\hat{g}})| \leq \frac{1}{2p} \cdot |u_d^{\varepsilon_0}(V)|$). Diese ist, wie einfache Rechnungen zeigen, nur bei Vorliegen gewisser orthogonaler Verktorräume gerader Dimension nicht gegeben. Wir illustrieren das Vorgehen erneut anhand symplektischer Vektorräume. Hier gilt

$$2p \leq 2q^k \leq q^{2k} < q^{kd} < q^{\frac{kd}{2}} \cdot \prod_{i \in \frac{d}{2}} \frac{q^{n-2i} - 1}{q^{n-k-2i} - 1} = \frac{|u_d^{n.a.}(V)|}{|u_d^{n.a.}(V_{\hat{g}})|}$$

und

$$2p \leq q^{2k} \leq q^{dk} \leq q^{(n-d)k} \leq q^{\frac{(n-d)k}{2}} \cdot \prod_{i \in \frac{k}{2}} \frac{q^{n-2i} - 1}{q^{d-2i} - 1} = \frac{|u_d^{n.a.}(V)|}{|u_{d-k}^{n.a.}(V_{\hat{g}})|}.$$

Im einzigen problematischen Fall (O, $n \equiv k \equiv d \equiv 0 \pmod 2$) führen die Zusatzannahmen ($n \geq 8$ und $kd > 4$) zu den Beziehungen

$$\begin{aligned} 2p &\leq 2(q^{\frac{k}{2}} + 1) \leq q^{\frac{k}{2}+2} \underset{kd>4}{\leq} q^{kd-4} \\ &\leq q^{\frac{kd}{2}} \cdot \frac{(q^{\frac{n-d}{2}} - 1) \cdot (q^{\frac{n-k}{2}} - 1)}{(q^{\frac{n}{2}} + 1) \cdot (q^{\frac{n-k-d}{2}} + 1)} \cdot \prod_{i \in \frac{d}{2}} \frac{q^{n-2i} - 1}{q^{n-k-2i} - 1} \leq \frac{|u_d^{\varepsilon_0}(V)|}{|u_d^{\varepsilon_0}(V_{\hat{g}})|} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 2p &\leq 2(q^{\frac{k}{2}} + 1) \leq q^{\frac{k}{2}+2} \leq q^{4k-4} \underset{n\geq 8}{\leq} q^{\frac{nk}{2}-4} \\ &\leq q^{(n-d)k-4} \leq \frac{1}{2} \cdot q^{\frac{(n-d)k}{2}} \frac{(q^{\frac{d}{2}} - 1) \cdot (q^{\frac{n-d}{2}} - 1)}{q^{\frac{n}{2}} + 1} \cdot \prod_{i \in \frac{k}{2}} \frac{q^{n-2i} - 1}{q^{d-2i} - 1} = \frac{|u_d^{\varepsilon_0}(V)|}{|u_{d-k}^{n.a.}(V_{\hat{g}})|}. \end{aligned}$$

Andernfalls folgt $d = k = 2$. Es muss daher lediglich $|u_2^{\varepsilon_0}(V_{\hat{g}})| + 1 \leq \frac{1}{p} \cdot |u_2^{\varepsilon_0}(V)|$ mit $k = 2$ und $n \equiv 0 \pmod 2$ überprüft werden. Falls g nicht-trivial auf $u_2^{\varepsilon_0}(V)$ wirkt, bestätigt jedoch die Ungleichung

$2p \cdot (q+\varepsilon_0) \cdot (\frac{1}{p} \cdot |u_2^{\varepsilon_0}(V)| - |u_2^{\varepsilon_0}(V_{\hat{g}})|) \geq q^{\frac{3}{2}n-6} \cdot (q^4 - q^3 - q^2 - 2q - 3) + q^{n-4} \geq 0 + 1 = 1$

die Gültigkeit dieser Aussage.

(ii) Fall $d = 1$

Operiert die Gruppe G auf einer Bahn $\Omega = u_1^{\varepsilon_0}(V)$ nicht-ausgearteter eindimensionaler Teilräume von V, so besitzt die Menge Ω_g die Mächtigkeit

$$|\Omega_g| = |u_1^{\varepsilon_1}(V_{\hat{g}})|.$$

Ein Vergleich der Tabelle 4.3 zu entnehmenden Werte $|u_1^{\varepsilon_1}(V_{\hat{g}})|$ und $\frac{1}{p} \cdot |u_1^{\varepsilon_0}(V)|$ liefert nun die im Satz aufgestellte Behauptung. Wir verdeutlichen das Argumentationsschema am Beispiel des Unterfalles (O, $n \equiv c \equiv 0 \pmod 2$):

Hier ist q ungerade, denn andernfalls besäße V ausschließlich isotrope Vektoren und folglich keine nicht-ausgearteten 1-Räume.

Wenn $|\Omega_g| = |u_1(V_{\hat{g}}^{\varepsilon_1})| > \frac{1}{p} \cdot |u_1(V^{\varepsilon_0})| = \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$ angenommen wird, gewinnt man aus der Abschätzung

$$q^k > p > q^{\frac{n-c}{2}} \cdot \frac{q^{\frac{n}{2}} - \varepsilon_0}{q^{\frac{c}{2}} - \varepsilon_1} > q^{n-c-1}$$

zunächst $k + 1 > n - c \geq k$ und damit die Bedingung $k = n - c \equiv 0 \pmod 2$. Eine Verwendung der Schranke $p \leq q^{\frac{k}{2}} + 1 < q^{\frac{k}{2}+1}$ anstelle des Ausdrucks q^k erzwingt ferner $k = 2$.

Unter den gegebenen Voraussetzungen können also lediglich im Fall $k = 2$ Gruppenelemente g mit $|\Omega_g| > \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$ auftreten. Diese erfüllen jedoch stets die Forderung $(q+1) \cdot (q^{\frac{n}{2}-1} - \varepsilon_1) > q \cdot (q^{\frac{n}{2}} - \varepsilon_0)$ und halten deshalb einen Witt-Defekt 1 besitzenden Unterraum des hyperbolischen Vektorraumes V punktweise fest. Ein Umformen der letztgenannten Ungleichung ergibt nun die Beziehung

$$0 > (q^2 - q - 1) \cdot q^{\frac{n}{2}-1} - 2q - 1 \geq q^2 - 3q - 2,$$

welche die Einschränkung $q = 3$ hervorbringt.

Da keine 3-primitiven Teiler von $3^2 - 1$ existieren, erhalten wir daraus allerdings einen Widerspruch zur Voraussetzung $p \perp q^k - 1$. Es muss daher stets die Relation $|\Omega_g| \leq \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$ vorliegen. $\square$

In nicht-ausgearteten orthogonalen Vektorräumen über Körpern der Charakteristik 2 treten neben den bisher behandelten eindimensionalen Teilräumen auch total isotrope, nicht-singuläre 1-Räume auf. Den Wirkungen der orthogonalen Gruppen auf den einzelnen Bahnen dieser Unterräume soll mit dem folgenden Satz Rechnung getragen werden.

(4.4) Satz *Sei* $1 \neq q = 2^f$ *und* $2 < n \in \mathbb{N}$. *Die fasteinfache klassische Gruppe* $G = P\Gamma(V, q)$ *wirke auf einer Bahn* Ω *nicht-singulärer, total isotroper* 1*-Räume des nicht-ausgearteten orthogonalen Vektorraumes* $V = O^{\varepsilon}(n, 2^f)$. *Ist* p *ein ungerader Primteiler der Ordnung von* G, *so liegt einer der folgenden Fälle vor:*

1. *Es ist* $\qquad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.
2. *Es gilt* $(\Omega, \mathrm{soc}(G)) \cong (\binom{8}{2}, \mathrm{Alt}(8)) \cong (u_1^{n.s}(O^+(6,2)), O_6^+(2))$ *mit* $p = 3$ *und* $m_3(G) = 18 = \lfloor \frac{2}{3} \cdot |\Omega| \rfloor$.

Beweis: Gemäß [GL83, (7.2)] genügt es Primelemente g in $P\Delta(V, q)$ und $\langle \bar{\Phi}_B \rangle$ zu betrachten.

I. Fall: g ist ein Körperautomorphismus
Entspricht das Gruppenelement g einem Körperautomorphismus von $\langle \bar{\Phi}_B \rangle$ der Ordnung p, so enthält jeder nicht-singuläre g-invariante 1-Raum $W \in \Omega_g$ einen nicht-singulären eindimensionalen $\mathbb{F}_{q^{1/p}}$-Teilraum $W_{\hat{g}}$ von $V_{\hat{g}} \cong V(n, q^{\frac{1}{p}})$, dessen $\mathbb{F}_q$-Aufspann $\langle W_{\hat{g}} \rangle$ den Unterraum W erzeugt. Da mit V auch der Fixraum $V_{\hat{g}}$ einen orthogonalen Vektorraum bildet, folgt

$$|\Omega_g| = |u_1^{n.s.}(V_{\hat{g}})| = |u_1^{n.s.}(V(n, q^{\frac{1}{p}}))|.$$

Wegen $|\Omega| = q^{\frac{n}{2}-1} \cdot (q^{\frac{n}{2}} - \varepsilon)$ und $n \geq 4$ erhalten wir

$$p \leq (q^{\frac{1}{p}})^{p-1} \leq (q^{\frac{1}{p}})^{3p-5} \leq (q^{\frac{1}{p}})^{(p-1)\cdot(\frac{n}{2}-1)} \cdot \frac{q^{\frac{n}{2}} - 1}{(q^{\frac{1}{p}})^{\frac{n}{2}} + 1} \leq \frac{|u_1^{n.s.}(V)|}{|u_1^{n.s.}(V_{\hat{g}})|}.$$

und damit die Abschätzung $|\Omega_g| \leq \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$.

II. Fall: $g \in P\Delta(V, q)$
Wie in den Beweisen der vorangegangenen Sätze unterscheiden wir auch hier zwischen Primelementen g der Ordnung $p \mid q - 1$ bzw. $p \mid q^k - 1$ für ein $k > 1$.

(a) Unterfall $p \mid q-1$
Gemäß Lemma (1.8) lässt sich der Vektorraum V hier entweder in nicht-triviale, nicht-ausgeartete Teilräume $E_{\lambda,\lambda^{-\tau}}(\hat{g})$ und $K_{\lambda,\lambda^{-\tau}}(\hat{g})$ (für einen geeigneten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$) zerlegen oder als direkte Summe total singulärer Eigenräume $E_\lambda(\hat{g})$ und $E_{\lambda^{-\tau}}(\hat{g})$ schreiben.
Im letztgenannten Fall wirkt g fixpunktfrei auf Ω, denn jeder g-invariante 1-Raum liegt in einem der keinen nicht-singulären Unterraum enthaltenden Teilräume $E_\lambda(\hat{g})$ bzw. $E_{\lambda^{-\tau}}(\hat{g})$.
Es kann folglich $V = E_{\lambda,\lambda^{-\tau}}(\hat{g}) \perp K_{\lambda,\lambda^{-\tau}}(\hat{g})$ angenommen werden. Unter dieser Voraussetzung gilt jedoch für jeden Fixpunkt $W \in \Omega_g$ von g in Ω

$$W \subseteq E_{\lambda,\lambda^{-\tau}}(\hat{g}) \qquad \text{oder} \qquad W \subseteq K_{\lambda,\lambda^{-\tau}}(\hat{g})$$

und insbesondere $|u_1^{n.s.}(V)_g| \leq |u_1^{n.s.}(E_{\lambda,\lambda^{-\tau}}(\hat{g}))| + |u_1^{n.s.}(K_{\lambda,\lambda^{-\tau}}(\hat{g}))|$. Da keine nicht-ausgearteten orthogonalen Vektorräume ungerader Dimension über Körpern der Charakteristik 2 existieren, besitzen die Teilräume $E_{\lambda,\lambda^{-\tau}}(\hat{g})$ und $K_{\lambda,\lambda^{-\tau}}(\hat{g})$ darüber hinaus gerade Dimension. Wenn $\dim(E_{\lambda,\lambda^{-\tau}}(\hat{g})) := e$ gesetzt wird, ergibt sich daher

$$\begin{aligned} |\Omega_g| &\leq q^{\frac{e}{2}-1} \cdot (q^{\frac{e}{2}}+1) + q^{\frac{n-e}{2}-1} \cdot (q^{\frac{n-e}{2}}+1) \leq q^{n-3} + q^{\frac{n}{2}-2} + q + 1 \\ &\leq q^{n-2} + q^{\frac{n}{2}-1} \leq \sum_{i=\frac{n}{2}-1}^{n-2} q^i = q^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{q^{\frac{n}{2}}-1}{q-1} \leq \frac{1}{p} \cdot |\Omega| \end{aligned}$$

und somit die Behauptung des Satzes.

(b) Unterfall $p \perp q^k - 1$ für ein $k > 1$
Bezeichnet $g \in P\Delta(V,q)$ ein Primelement der Ordnung $p \perp q^k - 1$ mit $k > 1$, so wird jeder g-invariante 1-Raum von g punktweise festhalten. Mithin gilt

$$|\Omega_g| = |u_1^{n.s.}(V_{\hat{g}})|$$

Da der Fixraum $V_{\hat{g}}$ einen nicht-ausgearteten Teilraum von V bildet und keine nicht-ausgearteten orthogonalen Vektorräume ungerader Dimension über Körpern der Charakteristik 2 auftreten, folgt ferner $\dim(V_{\hat{g}}) =: c \equiv 0 \pmod 2$.
Des Weiteren zeigt die Abschätzung

$$p < q^k \leq q^{n-c-1} \leq q^{\frac{n-c}{2}} \cdot \frac{q^{\frac{n}{2}}-1}{q^{\frac{c}{2}}+1} \leq \frac{|u_1^{n.s.}(V)|}{|u_1^{n.s.}(V_{\hat{g}})|},$$

dass die im Satz unter 1. genannte Ungleichung bestenfalls unter der Bedingung $k = n - c \equiv 0 \pmod 2$ nicht erfüllt ist. Wird in obiger Rechnung der Wert q^k durch die obere Schranke $q^{\frac{k}{2}+1}$ von p ersetzt, so ergibt sich weiters die Restriktion $k = 2$.

Mit der Festlegung $\varepsilon_0 := \mathrm{sgn}(V_{\hat{g}})$ erhalten wir also entweder $\mathrm{rfix}_\Omega(g) < \frac{1}{p}$ (und damit Aussage 1.) oder $q^{\frac{n}{2}-2} \cdot (q^{\frac{n}{2}-1} - \varepsilon_0) > \frac{1}{p} \cdot q^{\frac{n}{2}-1} \cdot (q^{\frac{n}{2}} - \varepsilon) \geq \frac{1}{q+1} \cdot q^{\frac{n}{2}-1} \cdot (q^{\frac{n}{2}} - \varepsilon)$. Ein Umformen der letztgenannten Bedingung liefert nun

$$0 > (q^2 - q - 1) \cdot q^{\frac{n}{2}-1} + (\varepsilon_0 - \varepsilon) \cdot q + \varepsilon_0,$$

was wiederum $\varepsilon_0 = -, \varepsilon = +, q^2 - q - 1 \leq 2$ (d.h. $q = 2$) und schließlich $n \leq 6$ erzwingt. Berücksichtigung der Voraussetzung "G fasteinfach" beweist nun das Vorliegen der im Satz unter 2. beschriebenen Situation. □

Der folgende Satz zeigt, dass sich die in (4.4) für orthogonale Gruppen über nicht-ausgearteten Vektorräumen gewonnenen Ergebnisse im Wesentlichen auch auf die zu symplektischen Gruppen isomorphen orthogonalen Gruppen über nicht-singulären Vektorräumen übertragen lassen.

(4.5) Satz *Sei* $1 \neq q = 2^f$ *und* $2 < n \in \mathbb{N}$. *Die fasteinfache klassische Gruppe* $G = P\Gamma(V, q)$ *wirke auf einer Bahn* Ω *nicht-singulärer* 1*-Räume des nicht-singulären orthogonalen Vektorraumes* $V = O(n, 2^f)$. *Ist* p *ein ungerader Primteiler der Ordnung von* G, *so liegt einer der folgenden Fälle vor:*

1. *Es ist* $\quad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.
2. *Es gilt* $(\Omega, \mathrm{soc}(G)) \cong (u_1^-(O(n,2)), O_n(2))$ *mit* $5 \leq n \leq 7$. *Dabei ist* $p = 3$ *und* $m_3(G) = \lfloor \frac{2}{3} \cdot (|\Omega| - 1) \rfloor$.

Beweis: Gemäß [GL83, (7.2)] genügt es Primelemente g in $P\Delta(V, q)$ und $\langle \bar{\Phi}_B \rangle$ zu betrachten.

I. Fall: g ist ein Körperautomorphismus
Entspricht das Gruppenelement g einem Körperautomorphismus von $\langle \bar{\Phi}_B \rangle$ der Ordnung p, so enthält jeder nicht-singuläre g-invariante 1-Raum $W \in \Omega_g$ einen nicht-singulären eindimensionalen $\mathbb{F}_{q^{1/p}}$-Teilraum $W_{\hat{g}}$ von $V_{\hat{g}} \cong V(n, q^{\frac{1}{p}})$, dessen $\mathbb{F}_q$-Aufspann $\langle W_{\hat{g}} \rangle$ den Unterraum W erzeugt. Da mit V auch der Fixraum $V_{\hat{g}}$ einen orthogonalen Vektorraum bildet, folgt

$$|\Omega_g| = |u_1^{\varepsilon_0}(V_{\hat{g}})| = |u_1^{\varepsilon_0}(V(n, q^{\frac{1}{p}}))|.$$

Wegen $|\Omega| = \frac{1}{2} q^{\frac{n-1}{2}} \cdot (q^{\frac{n-1}{2}} + \varepsilon)$ und $n \geq 3$ erhalten wir

$$p \leq (q^{\frac{1}{p}})^{p-1} \leq (q^{\frac{1}{p}})^{2p-3} \leq (q^{\frac{1}{p}})^{(p-1) \cdot \frac{n-1}{2}} \cdot \frac{q^{\frac{n-1}{2}} - 1}{(q^{\frac{1}{p}})^{\frac{n-1}{2}} + 1} \leq \frac{|u_1^{\varepsilon}(V)|}{|u_1^{\varepsilon_0}(V_{\hat{g}})|}$$

und damit die Abschätzung $|\Omega_g| \leq \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$.

II. Fall: $g \in P\Delta(V,q)$
In diesem Fall unterscheiden wir erneut zwischen Primelementen g der Ordnung $p \mid q-1$ bzw. $p \mid q^k-1$ für ein $k>1$.

(a) Unterfall $p \mid q-1$
Mit der Festlegung $\lambda^2 := \tau = \tau(\hat{g})$ gilt hier $\mathrm{Rad}(V) \subseteq E_\lambda(\hat{g})$. Eine zum Beweis von Lemma (1.8) analoge Argumentation zeigt ferner, dass sich der Vektorraum V in den nicht-trivialen, nicht-singulären Teilraum $E_\lambda(\hat{g})$ und den nicht-trivialen, nicht-ausgearteten Teilraum $K_\lambda(\hat{g})$ zerlegen lässt.
Für jeden Fixpunkt $W \in \Omega_g$ von g in Ω ergibt sich folglich

$$W \subseteq E_\lambda(\hat{g}) \qquad \text{oder} \qquad W \subseteq K_\lambda(\hat{g})$$

und insbesondere $|u_1^\varepsilon(V)_g| \leq |u_1^{\varepsilon_0}(E_\lambda(\hat{g}))| + |u_1^{n.s.}(K_\lambda(\hat{g}))|$. Da keine nicht-ausgearteten orthogonalen Vektorräume ungerader Dimension über Körpern der Charakteristik 2 existieren, besitzt der Teilraum $K_\lambda(\hat{g})$ darüber hinaus gerade Dimension. Wenn $\dim(E_\lambda(\hat{g})) := e$ gesetzt wird, erhalten wir daher unter der Annahme $e > 1$ (was insbesondere $n \geq 5$ impliziert):

$$\begin{aligned}
|\Omega_g| &\leq \frac{1}{2} \cdot q^{\frac{e-1}{2}} \cdot (q^{\frac{e-1}{2}} + 1) + q^{\frac{n-e}{2}-1} \cdot (q^{\frac{n-e}{2}} + 1) \leq \frac{1}{2} \cdot q^{n-2} + \frac{1}{2} \cdot q^{\frac{n-3}{2}} + 1 \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=\frac{n-1}{2}}^{n-2} q^i = \frac{1}{2} \cdot q^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{q^{\frac{n-1}{2}} - 1}{q-1} \leq \frac{1}{p} \cdot |u_1^\varepsilon(V)|.
\end{aligned}$$

Gilt hingegen $E_\lambda(\hat{g}) = \mathrm{Rad}(V)$ (d.h. $e = 1$), so muss $|\Omega_g| = 1 < \frac{1}{p} \cdot |\Omega|$ sein, denn jeder von $E_\lambda(\hat{g}) = \mathrm{Rad}(V)$ verschiedene g-invariante 1-Raum von $O(n, 2^f)$ ist ,wegen $0 = Q(u^{\hat{g}}) - Q(u^{\hat{g}}) = \tau Q(u) - Q(\mu \cdot u) = \lambda^2 Q(u) - \mu^2 Q(u) = (\lambda - \mu)^2 \cdot Q(u)$ und $\lambda \neq \mu \in \mathbb{F}_{2^f}^*$, total singulär.

(b) Unterfall $p \perp q^k - 1$ für ein $k > 1$
Bezeichnet $g \in P\Delta(V,q)$ ein Primelement der Ordnung $p \perp q^k - 1$ mit $k > 1$, so wird jeder g-invariante 1-Raum von g punktweise festgehalten. Insbesondere gilt

$$|\Omega_g| = |u_1^{\varepsilon_0}(V_{\hat{g}})|.$$

Da $V_{\hat{g}}$ das Radikal von V enthält, folgt ferner $\dim(V_{\hat{g}}) =: c \equiv 1 \pmod 2$.
Des Weiteren zeigt die Abschätzung

$$p < q^k \leq q^{n-c-1} \leq q^{\frac{n-c}{2}} \cdot \frac{q^{\frac{n-1}{2}} - 1}{q^{\frac{c-1}{2}} + 1} \leq \frac{|u_1^\varepsilon(V)|}{|u_1^{\varepsilon_0}(V_{\hat{g}})|},$$

dass die in 1. genannte Ungleichung bestenfalls unter der Bedingung $k = n - c \equiv 0 \pmod 2$ nicht erfüllt ist. Wird in obiger Rechnung der Wert q^k durch die obere

Schranke $q^{\frac{k}{2}+1}$ von p ersetzt, so ergibt sich weiters die Restriktion $k = 2$.
Wir erhalten daher entweder $\mathrm{rfix}_\Omega(g) < \frac{1}{p}$ (und damit Aussage 1.) oder

$$\frac{1}{2} \cdot q^{\frac{n-3}{2}} \cdot (q^{\frac{n-3}{2}} + \varepsilon_0) > \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{2} \cdot q^{\frac{n-1}{2}} \cdot (q^{\frac{n-1}{2}} + \varepsilon) \geq \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot q^{\frac{n-1}{2}} \cdot (q^{\frac{n-1}{2}} + \varepsilon).$$

Eine Umformung der letztgenannten Voraussetzung liefert nun

$$0 > (q^2 - q - 1) \cdot q^{\frac{n-3}{2}} - (\varepsilon_0 - \varepsilon) \cdot q - \varepsilon_0,$$

was wiederum $\varepsilon_0 = +, \varepsilon = -, q^2 - q - 1 \leq 2$ (d.h. $q = 2$) und schließlich $n \leq 7$ erzwingt. Berücksichtigung der Voraussetzung "G fasteinfach" und Inspektion der im Atlas [ATLAS] angegebenen Charaktertafeln von $O_n(2)$ mit $n \leq 7$ beweist nun das Vorliegen der im Satz unter 2. beschriebenen Situation. □

Im folgenden Theorem fassen wir die bisher gewonnenen Ergebnisse über minimale p-Grade klassischer Gruppen zusammen und erweitern sie um Resultate über minimale p-Grade von Wirkungen auf Fahnen und Zerlegungen eines gegebenen Vektorraumes.

(4.6) Theorem *Sei $1 \neq q = r^f$ eine Potenz der Primzahl r und $1 < n \in \mathbb{N}$. Die primitive, fasteinfache klassische Gruppe $G \leq \mathrm{Aut}(P\Omega(V,q))$ wirke auf einer Menge Ω derart, dass der Punktstabilisator G_α von $\alpha \in \Omega$ in G einer Unterraumgruppe oder dem Stabilisator einer Zerlegung $V = W \oplus W'$ entspricht. Ist $p \neq r$ ein ungerader Primteiler der Ordnung von G, so liegt einer der folgenden Fälle vor:*

1. *Es gilt* $\quad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.

2. *Der Sockel* $\mathrm{soc}(G)$ *von G entspricht der projektiven speziellen linearen Gruppe $L_2(2^f)$. G wirkt auf der Menge Ω der 1-Räume von $V(2, 2^f)$ und $p = 2^f - 1$ ist eine Mersennesche Primzahl mit $m_p(G) = p = |\Omega| - 2 \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|$.*

3. *Der Sockel* $\mathrm{soc}(G)$ *von G ist isomorph zu einer orthogonalen Gruppe $O_n^\varepsilon(2)$ mit $4 \leq n \leq 7$ und $\varepsilon \in \{0, n-5\}$. Die Menge Ω stimmt mit der kürzesten Bahn total isotroper 1-Räume des Vektorraumes $O^\varepsilon(n,2)$ überein. Dabei gilt $p = 3 (= q+1)$ und $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|$.*

Beweis: Es bezeichne g ein Primelement von G mit Ordnung $o(g) = p \neq 2$. Dann kann, da - wie auf Seite 74 gezeigt wird - Trialitäten von $O_8^+(q)$ stets die Ungleichung $\mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \frac{1}{p}$ erfüllen, $g \in \mathrm{P}\Gamma(V,q)$ angenommen werden. Wegen

$$\mathrm{rfix}_\Omega(g) = \frac{|g^G \cap G_\alpha|}{|g^G|} \underset{(2.4)}{\leq} \frac{|g^{\mathrm{P}\Gamma(V,q)} \cap G_\alpha|}{|g^{\mathrm{P}\Gamma(V,q)}|} = \mathrm{rfix}_{\alpha^{\mathrm{P}\Gamma(V,q)}}(g)$$

ergibt sich nun für Permutationsgruppen G, deren Punktstabilisator einer der auf Seite 19 unter (a) und (c) genannten Unterraumuntergruppen entspricht, die Behauptung aus den vorangegangenen Sätzen (4.1) bis (4.5).

In den verbliebenen Fällen wirkt G auf einer Bahn von Fahnen oder einer Bahn von Zerlegungen eines Vektorraumes V mit je zwei Teilräumen.
Da $2'$-Elemente in $\mathrm{P}\Gamma(V,q)$, welche eine Fahne $\mathcal{F} : 0 < W < W' < V$ festhalten, auch den Unterraum W' invariant lassen, folgt ferner

$$\mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \frac{|g^{\mathrm{P}\Gamma(V,q)} \cap G_{\mathcal{F}}|}{|g^{\mathrm{P}\Gamma(V,q)}|} = \frac{|g^{\mathrm{P}\Gamma(V,q)} \cap \mathrm{P}\Gamma(V,q)_{W'}|}{|g^{\mathrm{P}\Gamma(V,q)}|} = \mathrm{rfix}_{(W')^{\mathrm{P}\Gamma(V,q)}}(g).$$

Mit Hilfe der Ergebnisse der in diesem Kapitel bewiesenen Sätze ergibt sich daher

$$\mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \mathrm{rfix}_{(W')^{\mathrm{P}\Gamma(V,q)}}(g) \leq \frac{1}{p}$$

und damit die unter 1. erfasste Behauptung.

Bei Wirkung von G auf Zerlegungen von V erhält man entsprechend

$$\mathrm{rfix}_\Omega(g) = \frac{|g^G \cap G_{W\oplus W'}|}{|g^G|} \leq \frac{|g^{\mathrm{P}\Gamma(V,q)} \cap \mathrm{P}\Gamma(V,q)_W|}{|g^{\mathrm{P}\Gamma(V,q)}|} = \mathrm{rfix}_{W^{\mathrm{P}\Gamma(V,q)}}(g),$$

was im Falle $\mathrm{rfix}_{W^{\mathrm{P}\Gamma(V,q)}}(g) \leq \frac{1}{p}$ die im Theorem unter 1. aufgeführte Ungleichung liefert. Andernfalls zählt das Tripel $(W^{\mathrm{P}\Gamma(V,q)}, \mathrm{P}\Gamma(V,q), p)$ zu einem der in den vorangegangenen Sätzen identifizierten Ausnahmetripel. In den unter 3. zusammengefassten Fällen zeigt eine Inspektion der Angaben im Atlas [ATLAS], dass der G-Raum (Ω, G) keine Ausnahme bilden kann. Es darf daher $\mathrm{P}\Gamma(V,q) = \mathrm{P}\Gamma\mathrm{L}_n(q)$, $W^{\mathrm{P}\Gamma\mathrm{L}(V,q)} = u_1(V(2,2^f))$ und $p = q-1 = 2^f - 1$ angenommen werden. Wegen $|u_1(V(2,2^f)_g| = 2$ existiert dann jedoch genau eine Zerlegung von V, die von g festgehalten wird. Mithin gilt auch in diesem Fall Aussage 1. $\square$

4.2 Minimale p-Grade bei primitiven Wirkungen klassischer Gruppen

In diesem Abschnitt geben wir unter Rückgriff auf Theorem (4.6) Abschätzungen für die minimalen p-Grade primitiver Wirkungen klassischer Gruppen an. Wir verifizieren dabei die Gültigkeit des folgenden Theorems, dessen Beweis in Grundzügen dem Argumentationsgang beim Nachweis ähnlicher, aber schwächerer Aussagen in [LS91] und [GM98] folgt.

(4.7) Theorem *Sei $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine primitive, fasteinfache klassische Gruppe über einem Körper $\mathbb{F}_{q^u}$ der Charakteristik r und p ein Primteiler der Ordnung von G mit $2 \neq p \neq r$. Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:*

1. *Es gilt* $\quad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.
2. *Der Sockel* $\mathrm{soc}(G)$ *von G entspricht der projektiven speziellen linearen Gruppe $L_2(2^f)$. G wirkt auf der Menge Ω der 1-Räume von $V(2, 2^f)$ und $p = 2^f - 1$ ist eine Mersennesche Primzahl mit $m_p(G) = p = |\Omega| - 2 \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|$.*
3. *Der Sockel* $\mathrm{soc}(G)$ *von G ist isomorph zu einer orthogonalen Gruppe $O_n^\varepsilon(2)$ mit $4 \leq n \leq 7$ und $\varepsilon \in \{0, n-5\}$. Die Menge Ω stimmt mit der kürzesten Bahn total isotroper 1-Räume des Vektorraumes $O^\varepsilon(n, 2)$ überein. Dabei gilt $p = 3$ $(= q + 1)$ und $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|$.*
4. *Es ist $(\Omega, \mathrm{soc}(G)) \cong (8, \mathrm{Alt}(8)) \cong (8, L_4(2)) \cong (8, O_6^+(2))$ und $m_p(G) = p \leq 5$.*

Bemerkung: Bei den in 3. genannten Ausnahmegruppen handelt es sich im Wesentlichen um Permutationsgruppen mit alternierendem Sockel.

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis.
Angenommen die primitive Permutationsgruppe $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ bildete ein Gegenbeispiel zum Satz *kleinstmöglicher Ordnung*. Dann entspricht die Gruppe G (nach geeigneter Wahl des Vektorraumes $V = V(n, q)$) einer fasteinfachen klassischen Gruppe mit Sockel $L := \mathrm{soc}(G) = P\Omega(V, q)$ und es existiert ein Gruppenelement $g \in G$ mit

$$2 \neq o(g) = p \neq r \qquad \text{und} \qquad |\Omega_g| = |\Omega| - m_p(G) > \frac{1}{p} \cdot |\Omega| \qquad (*)$$

(Beachte die Gleichwertigkeit von $(*)$ zu $\mathrm{rfix}_\Omega(g) > \frac{1}{p}$).
Ferner tritt das Tripel (Ω, L, p) nicht in Theorem (4.7) 2. bis 4. auf.
Wegen $(*)$ hält das halbeinfache Primelement g, mindestens einen Punkt $\alpha \in \Omega$ fest, liegt also in einem Punktstabilisator G_α.

Da gemäß [LS91, (3.15)] (bzw. [ATLAS] im Fall $q = 2$) keine Trialität von $O_8^+(q)$ der Bedingung $(*)$ genügt (denn für $q > 3$ gilt $|\Omega_g| \leq \frac{4}{3q} \cdot |\Omega| \leq \frac{1}{3} \cdot |\Omega|$), kann nach [GL83, (7.3)] das $2'$-Element g mit einem Körperautomorphismus von L oder einem Gruppenelement in $P\Delta(V, q)$ identifiziert werden. Laut [GL83, (7.2)] ist darüber hinaus jeder Körperautomorphismus zu einem Element in $\langle \bar{\Phi}_B \rangle$ konjugiert, so dass im Fall $g \notin P\Delta(V, q)$ die Wahl $g \in \langle \bar{\Phi}_B \rangle$ getroffen werden kann.

Das weitere Vorgehen erfordert verschiedene Fallunterscheidungen.
Wir behandeln dabei zunächst klassische Gruppen über Vektorräumen hinreichend großer Dimension.

Fall I: $\dim(V)$ hinreichend groß
Für die Dimension $\dim(V) = n$ des zugrundeliegenden Vektorraumes V und den Sockel $L = \mathrm{soc}(G)$ der klassischen Gruppe G mögen die folgenden einschränkenden Annahmen erfüllt sein:

$$\begin{array}{llll} n \geq 5 & \text{und} & L \notin \{L_5(2), L_6(2), L_7(2), L_8(2)\} & \text{im Fall L} \\ n \geq 6 & \text{und} & L \notin \{S_6(2), S_8(2)\} & \text{im Fall S} \\ n \geq 4 & \text{und} & L \notin \{U_4(2), U_4(3), U_5(2), U_6(2)\} & \text{im Fall U} \\ n \geq 7 & \text{und} & L \notin \{O_8^{\pm}(2)\} & \text{im Fall O.} \end{array} \qquad (**)$$

Dann lässt sich durch Gebrauch von Lemma (2.8) ein Widerspruch zu $(*)$ gewinnen. In den folgenden beiden Lemmata zeigen wir daher, dass die für die Anwendbarkeit von Lemma (2.8) erforderlichen Voraussetzungen gegeben sind. Zunächst gilt

(4.8) Lemma *Der Vektorraum V ist direkte Summe nicht-trivialer g-invarianter Unterräume W und W'. In den Fällen U, S, O sind W und W' darüber hinaus zueinander orthogonale, nicht-ausgeartete Teilräume von V:*

$$V = W \perp W'.$$

Beweis: Würde das Gruppenelement g keine Zerlegung des Vektorraumes V in g-invariante (und in den Fällen U, S, O zueinander orthogonale, nicht-ausgeartete) Teilräume von V ermöglichen, so ließe sich die Ordnung des Zentralisators $C_L(g)$ von g in L durch die in Lemma (1.10) genannten Werte abschätzen. Unter Berücksichtigung der Voraussetzung $(**)$ lieferte ein Vergleich mit dem sich aus [Lie85] ergebenden kleinstmöglichen Index $\min\limits_{X \text{ irr}} |L : X|$ einer auf V irreduziblen Untergruppe X von L einen der folgenden Fälle:

(a) L_α wirkt reduzibel auf V.

(b) Es liegt Fall S mit $q = 2$ und $p = q^{\frac{n}{2}} + 1 = |C_L(g)|$ vor.

(c) Es gilt $p \cdot |C_L(g)| \leq \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot |C_L(g)| \leq \min\limits_{X \text{ irr}} |L : X| \leq |L : L_\alpha| = |\Omega|$.

(Mit wenigen Ausnahmen erhält man das gleiche Resultat auch nach Nutzung der in [Kan79b] angegebenen Schranken von $|L : L_\alpha|$, die im Gegensatz zu den exakten Werten in [Lie85] ohne Verwendung der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen gewonnen wurden).

Im Unterfall (c) würde das Zentralisatorargument (2.5) einen Widerspruch zu $(*)$ hervorbringen. Aus dem gleichen Grund könnte bei Vorliegen des Falles (b) die Gültigkeit der Ungleichung $p^2 = p \cdot |C_L(g)| > |L : L_\alpha| = |\Omega|$ angenommen werden. Dann wäre jedoch $m_p(G) \leq p \cdot (p-1)$ und damit $G^\Omega \cong G^{G:G_\alpha}$ eine der in [LS85] mit Hilfe der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen bestimmten Permutationsgruppen. Eine Durchsicht der dort aufgeführten Listen zeigte nun, dass sich der Punktstabilisator G_α (ebenso wie im Unterfall (a)) mit einer Unterraumuntergruppe identifizieren ließe. Da für diese Permutationsgruppen gemäß (4.6) unter der Bedingung $(**)$ stets $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ gilt, führte die Forderung $(*)$ auch in den verbliebenen Fällen zu einem Widerspruch. $\square$

Wir wählen unter den nach Lemma (4.8) existierenden orthogonalen Zerlegungen eine Zerlegung $V = W \perp W'$ mit einem g-invarianten (und in den Fällen U, S, O nicht-ausgearteten) Teilraum W kleinstmöglicher Dimension. Weiter werde

$$A_1 := \Omega(W', q), \quad A := \Gamma(W', q), \quad B_1 := \Omega(W, q), \quad B := \Gamma(W, q)$$

gesetzt, und die Projektion von $\hat{g}$ in A (bzw. B) mit $\hat{g}_A$ (bzw. $\hat{g}_B$) bezeichnet. Dann ergibt sich

(4.9) Lemma *Mit obiger Notation gelten bei geeigneter Wahl des Teilraums W' die folgenden Aussagen:*

(i) Die Gruppe A_1 ist quasieinfach.

(ii) Das Element $\hat{g}_A$ liegt nicht im Zentralisator $C_A(A_1)$ von A_1.

Beweis: (i) Wegen $(**)$ und $\dim(W') \geq \frac{1}{2} \cdot \dim(V)$ ist A_1 entweder quasieinfach oder ($A_1 = \Omega_4^+(q)$ und $V(n,q) \in \{O(7,q), O^\pm(8,q)\}$ mit $q \geq 3$).
Im Fall $V = O(7,q)$ besäße der Unterraum W die Dimension $\dim(W) = 3 \equiv 1 \ (2)$ und somit gemäß Lemma (1.10) auch eine - der minimalen Wahl von W widersprechende - Zerlegung $W = \widetilde{W} \perp \widetilde{W}^\perp$ in nicht-triviale, nicht-ausgeartete Teilräume $\widetilde{W}$; $\widetilde{W}^\perp$.
Bei der Wahl $V = O^-(8,q)$ können die Bezeichnungen der Unterräume W und W' vertauscht werden, ohne die oben genannten Notationsvereinbarungen zu verletzen. Der Teilraum W' entspricht dann einem Unterraum von V mit Witt-Defekt 1. Folglich ist A_1 die quasieinfache Gruppe $\Omega_4^-(q)$.

Es ist daher zum Beweis von (i) nur noch ein Auftreten des Falles $V = O^+(8,q)$ auszuschließen. Hier wären W und W' hyperbolische Unterräume von V, welche wegen der Minimalität von W und $\dim(W) = \dim(W')$ keinen g-invarianten nicht-ausgearteten Unterraum enthalten würden. Als halbeinfache Elemente müssten $\hat{g}^W$ und $\hat{g}^{W'}$ darüber hinaus Primelemente der Ordnung $p \perp q^2-1$ in $GO_4^+(q)$ bilden, die zwei maximal total singuläre Teilräume von W bzw. W' festhalten. Es existierten daher geeignete Standardbasen $\{e_0,\, e_1,\, f_0,\, f_1\}$ von W und $\{e_2,\, e_3,\, f_2,\, f_3\}$ von W' und nicht-skalare 2×2-Matrizen $M,\ N$ über $\mathbb{F}_q$ derart, dass sich $\hat{g}_A$ und $\hat{g}_B$ in der Form

$$\hat{g}_A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \lambda^t M^- \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \hat{g}_B = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & \lambda^t N^- \end{pmatrix} \qquad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{F}_q$$

schreiben ließen (vgl. [KL90, (4.1.9)]). Setzt man nun $E := \langle e_i | i \in 4\rangle, F := \langle f_i | i \in 4\rangle$, so wäre $\hat{g} \in \hat{G}_{\{E,F\}} =: Y$. Weil das letzte Glied der Ableitungsreihe $Y^\infty \cong \mathrm{SL}_4(q)$ von Y quasieinfach ist und das Gruppenelement $\hat{g} = \hat{g}_Y$ nicht im Zentralisator $C_Y(Y^\infty)$ liegt, könnte Lemma (2.8) angewendet werden. Die Minimalität unseres Gegenbeispieles ergäbe dabei $Y \le \hat{G}_\alpha$ (Beachte hier, dass nach $(**)$ $q > 2$ gilt). Gemäß [Kle86] entspricht dann jedoch der Stabilisator G_α einer Unterraumuntergruppe oder dem Stabilisator der Zerlegung $E \oplus F$. Die Ergebnisse von Theorem (4.6) lieferten nun einen Widerspruch zu $(*)$.

(ii) Zentralisiert das Element $\hat{g}_A$ die Gruppe A_1, so ist $\hat{g}_A$ eine Skalarmatrix. Insbesondere enthält der Unterraum W' einen $\hat{g}$-invarianten (und in den Fällen U, S, O nicht-ausgearteten) Teilraum $\widetilde{W'}$ der Dimension $\dim(\widetilde{W'}) \le 2$.
Wenn die Unterräume $\widetilde{W'}$ und W' nicht miteinander übereinstimmen, ersetzen wir den Teilraum W durch $\widetilde{W'}$ und W' durch ein (in den Fällen U, S, O orthogonales) Komplement $\widetilde{W}^{\angle}$ von $\widetilde{W'}$. Für das aus dieser Umbenennung entstehende Element $\hat{g}_A$ folgt dann $\hat{g}_A \notin C_A(A_1)$ (denn W' schneidet die vormals mit W und W' bezeichneten Teilräume nicht-trivial). Wegen $(**)$ und $\dim(W') \ge n-2$ muss darüber hinaus A_1 quasieinfach und damit die Punkte 1. und 2. des Lemmas erfüllt sein.
Es bleibt daher nur der Fall $\widetilde{W'} = W'$ zu betrachten. Aufgrund der Forderungen $\dim(\widetilde{W'}) \le 2$ und $(**)$ gilt hier zunächst $W \cong W' \cong U(2,q)$. Im weiteren Vorgehen zeigen wir, dass die Annahme $\hat{g}_B \in C_B(B_1)$ zu einem Widerspruch führt (andernfalls liefert ein Vertauschen der Räume W und W' das gewünschte Resultat). Unter dieser Voraussetzung gäbe es, weil $\hat{g}$ keinen nicht-ausgearteten 1-Raum festhält, eine Standardbasis $\{e_1,\, e_2,\, f_1,\, f_2\}$ von V und Skalare $\lambda,\, \mu \in \mathbb{F}_{q^2}$, mit

$$\hat{g} = \mathrm{diag}(\lambda, \mu, \lambda^{-q}, \mu^{-q}) \quad \text{und} \quad \lambda \ne \mu.$$

Die Festlegungen $E := \langle e_i \mid i \in 2\rangle$ und $F := \langle f_i \mid i \in 2\rangle$ implizierten nun $\hat{g} \in \hat{G}_{\{E,F\}} =: Y$. Eine Anwendung von Hilfssatz (2.8) auf die einzelnen langen Bahnen $\Delta_i \in \{\Omega : Y^\infty\}_{>1}$ von $Y^\infty \cong \mathrm{SL}_2(q^2)$ (vgl. [KL90, (4.1.9)]) in Ω ermöglichte dann die Abschätzung

$$\begin{aligned}\mathrm{rfix}_{\Delta_i}(\hat{g}) \leq \max_\Lambda\{\mathrm{rfix}_\Lambda(\hat{g}Z(Y^\infty) \mid \Lambda \text{ ist ein treuer, primitver} \\ Y/C_Y(Y^\infty)\text{-Raum und } \mathrm{soc}(Y/C_Y(Y^\infty)) = L_2(q^2)\}.\end{aligned}$$

Da das Element $\hat{g}$ die Ordnung $2 \neq p \mid q+1$ besitzt, könnte gemäß [LS91, (4.1)] der letztgenannte Wert nicht die Schranke $\frac{4}{3q^2}$ übersteigen. Einfache Rechnungen zeigten ferner, die Gültigkeit der Ungleichung $|(\Delta_i)_{\hat{g}}| \leq \frac{1}{p} \cdot |\Delta_i| - 3$ (beachte hierbei, dass wegen $(**)$ $q > 3$ gilt). In Anbetracht von Bedingung $(*)$ würde dies wiederum $|\Omega_{Y^\infty}| \geq 3$ und damit $Y^\infty \leq \hat{G}_\alpha$ erzwingen. Nach [KaL82, (5.7)] müsste dann jedoch die Gruppe $\hat{G}_\alpha$ mit dem Stabilisator eines total singulären 2-Raumes ($= \hat{G}_E$ oder $\hat{G}_F$) oder dem Stabilisator der Zerlegung $V = E \oplus F$ übereinstimmen. Es ergäbe sich $|\Omega_{Y^\infty}| = 2$ bzw. $|\Omega_{Y^\infty}| = 1$, was im Widerspruch zu unserem Teilergebnis $|\Omega_{Y^\infty}| \geq 3$ steht. $\square$

Wir nutzen die bisher gewonnenen Ergebnisse um Aussagen über die Struktur des Punktstabilisators G_α zu erhalten.

(4.10) Lemma *Der Punktstabilisator G_α entspricht entweder einer Unterraumuntergruppe von G (mit $A_1 \leq \hat{G}_\alpha$) oder dem Stabilisator der orthogonalen Zerlegung $V = W \perp W'$.*

Beweis: Wegen Lemma (4.8) und (4.9) sind unter der Wahl $Y = A_1$ (bzw. $Y = \langle A_1, \hat{g}\rangle$ falls $\hat{g}_A \notin A_1$) und $X = \langle \hat{g}_B \rangle$ (bzw. $X = 1$ falls $\hat{g}_A \notin A_1$) die Voraussetzungen von Lemma (2.8) erfüllt. Es liegt daher einer der folgenden Fälle vor:

1. $A_1 \leq \hat{G}_\alpha$.
2. $\mathrm{rfix}_\Omega(g) = \mathrm{rfix}_\Omega(\hat{g}) \leq \max_\Lambda\{\mathrm{rfix}_\Lambda(g_A C_A(A_1)) \mid \Lambda$ ist ein treuer, primitiver $A/C_A(A_1)$-Raum $\}$.

Wir schließen zunächst ein Auftreten der im zweiten Punkt beschriebenen Situation aus:
Angenommen das Gruppenelement $\hat{g}$ würde den Anforderungen von Fall 2. genügen. Dann bildete $\hat{g}_A C_A(A_1)$ ein Ausnahmeelement, welches aufgrund von $(*)$ und der Minimalität des Gegenbeispiels G in Theorem (4.7) 2. bis 4. aufgeführt wird. Eine Inspektion der dort aufgelisteten Gruppen und ihrer zugehörigen Gruppenelemente lieferte nun nicht nur den Wert $\dim(W')$, sondern auch für jede von $\mathrm{SL}_4(2)$ verschiedene Gruppe A_1 einen $\hat{g}_A$-invarianten (und in den Fällen S, U, O nicht-ausgearteten)

Teilraum $0 \neq W^\circ \leq W'$ der Dimension $\dim(W^\circ) \leq 2$ (bzw. $\dim(W^\circ) = 1$ im Fall U). Da der Teilraum W so gewählt wurde, dass $\dim(W)$ den kleinstmöglichen Wert annimmt, folgern wir

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W') \leq \begin{cases} 2 \cdot \dim(W') & \text{falls } A_1 = \mathrm{SL}_4(2) \\ 1 + \dim(W') & \text{falls } A_1 = \mathrm{SU}_2(q) \\ 2 + \dim(W') & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abschätzungen von $\dim(V)$ widersprechen jedoch Voraussetzung $(**)$.

Es muss daher die im ersten Punkt genannte Beziehung $A_1 \leq \hat{G}_\alpha$ vorliegen.
Bis auf die Ausnahme ($A_1 = \Omega_4^-(q)$ und $L = O_8^\pm(q)$) enthält die Gruppe A_1 Untergruppen, welche von langen Wurzeln von L erzeugt werden. Unter Verwendung von [Kan79a] ermöglicht dies den Stabilisator G_α mit einer Unterraumuntergruppe oder dem Stabilisator der orthogonalen Zerlegung $V = W \perp W'$ zu identifizieren. Das gleiche Resultat ergibt sich für die Gruppen $L = O_8^\varepsilon(q)$ mit $A_1 = \Omega_4^-(q)$ nach Berücksichtigung der Ergebnisse in [Kle87] (wenn $\varepsilon = +$) bzw. [Kle86] (wenn $\varepsilon = -$). □

Lemma (4.10) liefert nun die folgende, Bedingung $(*)$ widersprechende, Aussage.

(4.11) Lemma *Das Element g erfüllt eine der Konklusionen von Theorem (4.7).*

Beweis: Dies kann wegen (4.10) ohne weiteres aus (4.6) geschlossen werden. □

Wir haben damit nachgewiesen, dass der Sockel L einer Ausnahmegruppe G kleinstmöglicher Ordnung der Bedingung $(**)$ nicht genügt.

Fall II: $\dim(V)$ klein
Es bleibt uns daher nur noch klassische Gruppen kleiner Dimension zu betrachten. Auch bei diesen kann ein Widerspruch zu Bedingung $(*)$ gewonnen werden. Als wesentliches Hilfsmittel erweisen sich dabei das Zentralisatorargument (2.5) und das Charakterargument (2.6). Wir beweisen zunächst

(4.12) Lemma *Der Sockel $L = \mathrm{soc}(G)$ entspricht keiner der Gruppen $L_5(2), U_4(2), U_4(3), U_5(2), U_6(2), S_6(2), S_8(2)$ oder $O_8^\pm(2)$.*

Beweis: In den Fällen $L = U_4(2)$ und $L = S_6(2)$ sind sämtliche Permutationscharaktere im Atlas [ATLAS] aufgeführt. Eine Inspektion zeigt nun, dass lediglich in dem in Theorem (4.7) unter 2. erfassten Fall $L = S_6(2) = O_7(2)$, $\Omega = u_1^-(O(7,2))$ der Forderung $(*)$ entsprochen wird.

Bei den verbliebenen Permutationsdarstellungen behandeln wir lediglich jene Fälle, welche nicht schon durch Gebrauch des Charakterargumentes (2.6) und der ihr folgenden Bemerkung, Verwendung des Zentralisatorargumentes (2.5), Berücksichtigung von Theorem (4.6) oder Inspektion der im Atlas [ATLAS] angegebenen Permutationscharaktere einen Widerspruch zu $(*)$ hervorbringen. Es handelt sich dabei um die folgenden Wirkungen und Gruppenelemente (die Notation für die das Gruppenelement g enthaltende Konjugiertenklasse folgt hier den Angaben im Atlas [ATLAS]):

1. $L = U_5(2)$, $|\Omega| = 1408$, $g \in 3E$,
2. $L = U_6(2)$, $|\Omega| = 20736$, $g \in 3E$,
3. $L = S_8(2)$, $|\Omega| = 13056$, $g \in 3A$,
4. $L = S_8(2)$, $|\Omega| = 24192$, $g \in 3A$,
5. $L = O_8^-(2)$, $|\Omega| = 24192$, $g \in 3A$,
6. $L = O_8^+(2)$, $|\Omega| = 12096$, $g \in \{3A, 3B, 3C\}$.

In diesen Fällen verifizieren wir stets die $(*)$ widersprechende Ungleichung $\mathrm{rfix}_\Omega(g) \underset{(2.4)}{=} \frac{|g^L \cap G_\alpha|}{|g^L|} \leq \frac{1}{3} = \frac{1}{p}$:

1. Gemäß Atlas [ATLAS] ist der Punktstabilisator $L_\alpha = N \rtimes \mathrm{Sym}(5)$ der Normalisator einer elementarabelschen 3-Gruppe N der Ordnung 81. Darüber hinaus besitzt N genau $20 = (3-1) \cdot 10$ Konjugierte des Elementes $g \in 3E$. Jede 3-Sylowgruppe S von G_α enthält daher höchstens $243 - 81 + 20 = 182$ Gruppenelemente vom Typ $3E$. Die Beziehung $|N_{G_\alpha/N}(S/N)| \geq |N_{\mathrm{Sym}(5)}(Z_3)| = |\,\mathrm{Sym}(3) \times \mathrm{Sym}(2)| = 12$ erzwingt andererseits $|\,\mathrm{Syl}_3(G_\alpha)| \leq 10$ und damit $|3E \cap G_\alpha| \leq |\,\mathrm{Syl}_3(G_\alpha)| \cdot 182 \leq 1820$. Wegen $|3E| = 7040$ ergibt sich nun $\mathrm{rfix}_\Omega(g) < \frac{1}{3}$.

2. Unter dieser Voraussetzung gilt bei Verwendung der in (2.6) eingeführten Notation für alle irreduziblen Charaktere χ_i von G die Beziehung $3 \cdot \chi_i^*(g) < \chi_i(1)$. Bezeichnet nun $\pi = 1 + \sum_{i \in n} \chi_i$ den Permutationscharakter von G^Ω, so gilt
$|\Omega_g| = 1 + \sum_{i\in n} \chi_i(g) \leq 1 + \sum_{i \in n} \chi_i^*(g) < 1 + \frac{1}{3} \sum_{i \in n} \chi_i(1) = 1 + \frac{1}{3}(|\Omega| - 1) = \frac{1}{3}|\Omega| + \frac{2}{3}$.
Weil andererseits $|\Omega| \equiv 0 \pmod 3$ ist und die Anzahl der Fixpunkte von g einer natürlichen Zahl entspricht, erhalten wir $|\Omega_g| \leq 6912 = \frac{1}{3} \cdot |\Omega|$.

3. Eine Betrachtung des Herzens $M = \{(a_i)_{i \in 10} \mid \sum_{i \in 10} a_i = 0\} / \langle (1)_{i \in 10} \rangle \cong \mathbb{F}_2^8$ des Permutationsmoduls $\mathbb{F}_2^{10}$ zeigt hier, dass die Konjugiertenklasse $3A, 3B$ bzw. $3C$ von $G_\alpha = \mathrm{Sym}(10)$ in der Konjugiertenklasse $3A$, $3C$ bzw. $3D$ von $S_8(2)$ liegt. Es

folgt daher $|3A \cap G_\alpha| = |g^{G_\alpha}| = |\{\pi \mid \pi \text{ 3-Zyklus in} \operatorname{Sym}(10)\}| = 240$ und schließlich $\operatorname{rfix}_\Omega(g) = \frac{240}{10880} < \frac{1}{3}$.

4. Hier entspricht der Punktstabilisator G_α der Gruppe $S_4(4) \rtimes Z_2$. Diese weist zwei Konjugiertenklassen auf, welche Teilmengen der Konjugiertenklassen $3B$ bzw. $3C$ von $S_8(2)$ bilden. Mithin ist kein Element vom Typ $3A$ in G_α enthalten und dementsprechend $\operatorname{rfix}_\Omega(g) = 0 < \frac{1}{3}$.

5. Wegen $O_8^-(2) \leq S_8(2) \leq \operatorname{Sym}(24192)$ und der Beobachtung nach Definition (2.1) ist dieser Fall mit Unterfall 4. geklärt.

6. Hier gilt $L_\alpha = (\operatorname{Alt}(5) \times \operatorname{Alt}(5)) \rtimes (Z_2 \times Z_2) \cong O_4^+(4) \rtimes (Z_2 \times Z_2)$. Ferner können Elemente aus $3B, 3C$ und $3E$ als Repräsentanten der Konjugiertenklassen von $O_4^+(4)$ gewählt werden (insbesondere wirkt jedes Element aus $3A$ fixpunktfrei auf Ω). Des Weiteren führt die Gleichung $|C_{O_4^+(4)}(3B)| = |C_{O_4^+(4)}(3C)| = |C_{\operatorname{Alt}(5)}(3) \times \operatorname{Alt}(5)| = 180$ (wo $g \in 3B \cup 3C$ ist) zu der Abschätzung $|g^{L_\alpha}| \leq 80$. Wegen $|g^{L_\alpha}| = |g^L \cap G_\alpha|$ und $|g^L| = 2240$ impliziert dies $\operatorname{rfix}_\Omega(g) < \frac{1}{3}$. □

In den beiden folgenden Lemmata schließen wir ein Auftreten von Ausnahmen bei projektiven semilinearen Gruppen über Vektorräumen der Dimension $\dim(V) \geq 4$ aus. Es zeigt sich dabei, dass in diesen Fällen im Wesentlichen wie in Fall I argumentiert werden kann.

(4.13) Lemma *Der Sockel $L = \operatorname{soc}(G)$ stimmt mit keiner der Gruppen $L_6(2)$, $L_7(2)$ oder $L_8(2)$ überein.*

Beweis: Unter den gegebenen Voraussetzungen kann mit wenigen Ausnahmen wie im Fall I vorgegangen werden. Nur beim Beweis von Lemma (4.10) sind für Gruppenelemente $g \in L$ deren Projektion $\hat{g}_A$ in A aus einem der in Theorem (4.7) 3. oder 4. aufgeführten Ausnahmeelemente von $A \cong \operatorname{SL}_4(2)$ besteht, Modifikationen vorzunehmen.

Wir überprüfen die Gültigkeit von Lemma (4.10) zunächst für Gruppenelemente mit Restriktion $\hat{g}_A \in \operatorname{SL}_4(2)$ vom Typ $3A$. Diese erlauben eine Zerlegung des Unterraums $W' = \tilde{W} \oplus \tilde{W}'$ in $\hat{g}_A$-irreduzible 2-Räume $\tilde{W}$, $\tilde{W}'$. Wegen der minimalen Wahl von $\dim(W)$ und der Forderung $\dim(V) \geq 6$ gewinnen wir $6 \leq \dim(V) = \dim(W') + \dim(W) \leq \dim(W') + \dim(\tilde{W}) = 6$ und damit $\dim(V) = 6$ und $\dim(W) = 2$. Mithin lässt sich das Primelement $\hat{g} \in \operatorname{SL}_6(2)$ in der Form

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

mit geeigneten Matrizen $A_i \in \mathrm{SL}_2(2)$ und $o(A_i) = 3$ für alle $i \in 3$ darstellen. Darüber hinaus ermöglichen die Erkenntnisse über die Gestalt von $\hat{g}$ die Bestimmung der Ordnung des Zentralisators $C_L(g)$ und der Mächtigkeit der Konjugiertenklasse g^L. Diese nehmen die Werte $|C_L(g)| = |C_{\mathrm{SL}_6(2)}(\hat{g})| = 2^{12} \cdot 3^3$ bzw. $|g^L| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 31$ an. Andererseits können die maximalen Untergruppen von $\mathrm{SL}_6(2)$ der Quelle [Kle86] entnommen werden. Handelt es sich dabei nicht um eine Unterraumuntergruppe oder den Stabilisator einer Zerlegung $V = U \oplus U'$, so muss L_α einer der Gruppen $\mathrm{Sp}_6(2), \Gamma\mathrm{L}_3(4)$ oder $\Gamma\mathrm{L}_2(8)$ entsprechen. Für $L_\alpha = \mathrm{Sp}_6(2)$ bzw. $L_\alpha = \Gamma\mathrm{L}_3(4)$ berücksichtigen wir die Ergebnisse des Atlasses [ATLAS] und schließen

$$\mathrm{rfix}_\Omega(g) = \frac{|g^L \cap G_\alpha|}{|g^L|} \leq \frac{|\{g \in G_\alpha \mid o(g) = 3\}|}{|g^L|} = \frac{|3A| + |3B| + |3C|}{|g^L|} < \frac{1}{3}$$

(wobei $|3A| + |3B| + |3C| = 16352$ bzw. 3536 ist). Im Fall $L_\alpha = \Gamma\mathrm{L}_2(8)$ genügt hingegen aufgrund von $|\Omega| = |L : L_\alpha| = 2^{12} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31 > 2^{12} \cdot 3^4 = p \cdot |C_L(g)|$ schon eine Anwendung des Zentralisatorargumentes (2.5) um einen Widerspruch zur Grundannahme $(*)$ hervorzubringen.

Es müssen daher nur noch Gruppenelemente, deren Projektion $\hat{g}_A$ in der einzigen Konjugiertenklasse von 5-Elementen aus $\mathrm{SL}_4(2)$ liegen, betrachtet werden. Da die g-irreduziblen Konstituenten eines Primelementes g der Ordnung $5 \perp 2^4 - 1$ in V – und somit insbesondere der Unterraum $W \leq V$ – die Dimension 1 oder 4 besitzen, erfordert die Bedingung $6 \leq \dim(V) \leq 8$ ein Vorliegen der Gleichheit $\dim(V) = 8$ (und $\dim(W) = 4$). Das Primelement $\hat{g} \in SL_8(2)$ kann deswegen in der Form

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

mit $B_i \in \mathrm{SL}_4(2)$ und $o(B_i) = 5$ für alle $i \in 2$ geschrieben werden. Für die Ordnung des Zentralisators $C_L(g)$ erhalten wir deshalb $|C_L(g)| = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Wir vergleichen mit dem Index der nach [Lie85] größtmöglichen irreduziblen Untergruppe $\mathrm{Sp}_8(2)$ und bemerken

$$|L_8(2) : \mathrm{Sp}_8(2)| = 2^{12} \cdot 7 \cdot 31 \cdot 127 > 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = p \cdot |C_L(g)|.$$

Damit ist für irreduzible maximale Untergruppen von $L_8(2)$ die Voraussetzung des Zentralisatorarguments (2.5) gegeben und ein Auftreten von Elementen, welche der Bedingung $(*)$ Rechnung tragen, bestenfalls bei Vorliegen eines reduziblen Punktstabilisators L_α denkbar. Weil die letztgenannten Gruppen Unterraumuntergruppen bilden, haben wir auch in diesem Fall Lemma (4.10) bewiesen. Eine Verwendung von Theorem (4.6) rechtfertigt nun die oben aufgestellte Behauptung. $\square$

(4.14) Lemma *Die Gruppe G ist keine Gruppe mit Sockel $L \cong L_4(q)$.*

Beweis: Im Fall $L = L_4(2) \cong \mathrm{Alt}(8) \cong O_6^+(2)$ zeigt eine Inspektion der im Atlas [ATLAS] angegebenen Permutationscharaktere, dass die Bedingung $(*)$ genau dann erfüllt wird, wenn entweder $|\Omega| = 8$ und $g \in \{3A, 5A\}$ oder $\Omega = u_1^{n.s.}(O^+(6,2))$ mit $|\Omega| = 28$ und $g = 3A$ gewählt wird. Diese Wirkungen sind jedoch in Theorem (4.7) 3. bzw. 4. erfasst und liefern daher kein Gegenbeispiel zu der dort aufgestellten Behauptung.

Für $L = L_4(3)$ ist neben den Angaben im Atlas [ATLAS] das Charakterargument (2.6) heranzuziehen. Es ergibt sich dann $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ für alle Primteiler $p > 3$ von $|G|$.

Unter der Wahl $q > 3$ argumentieren wir im Wesentlichen wie in Fall I:
Auch hier müsste das hypothetische Gegenbeispiel $g \in \mathrm{P\Gamma L}_4(q)$ eine Zerlegung $V = W \oplus W'$ von V in nicht-triviale Unterräume $W, W' \leq V$ festhalten. Denn andernfalls wäre entweder $p \cdot |C_L(g)| \leq (q^2+1) \cdot \frac{q^4-1}{q-1} \leq |\Omega|$ und damit das Zentralisatorargument (2.5) anwendbar, oder - wie aus [Kle86] hervorgeht - $G_\alpha = G_W$ für ein $W \leq V$ mit $\dim(W) = 1$ oder 3 bzw. $G_\alpha = N_G(S_4(q))$. In der letztgenannten Situation könnte (im Unterfall $G_\alpha = N_G(S_4(q))$ nach Identifikation von L mit $O_6^+(q)$) der Stabilisator G_α als Unterraumuntergruppe aufgefasst werden, was nach (4.6) $\mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \frac{1}{p}$ implizierte.

Wären nun W und W' Unterräume ungerader Dimension, o.B.d.A. also $\dim(W) = 1$, so könnte wie in Lemma (4.9) und (4.10) vorgegangen werden. Mit der dort eingeführten Bezeichnung folgte dann $\mathrm{SL}(W') \cong A_1 \leq \hat{G}_\alpha$. Da dies nach [Kle86] $G_\alpha = G_W$ oder $G_\alpha = G_{W'}$ erzwänge, erhielten wir erneut aus (4.6) die $(*)$ widersprechende Abschätzung $\mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \frac{1}{p}$.

Es ist somit nur noch der Fall $\dim(W) = \dim(W') = 2$ zu betrachten. Hier führt die Bedingung $o(\hat{g}) = p \neq 2$ zunächst zu $\hat{g} = \hat{g}_A \cdot \hat{g}_B$ mit $\hat{g}_A \in A_1 = \mathrm{SL}(W')$ und $\hat{g}_B \in B_1 = \mathrm{SL}(W)$. Daher müsste eine nicht-ausgeartete symplektische Form $f : V \times V \longmapsto \mathbb{F}_q$ von V existieren, welche unter $\hat{g}$ invariant bleibt. Mithin ließe sich eine Untergruppe $Y_1 \cong \mathrm{Sp}_4(q)$ von $\hat{G}$ finden, dessen Normalisator $\hat{g}$ enthält. Weil $\hat{g}$ keine Skalarmatrix bildet, liefert Lemma (2.8) angewandt auf $Y = \langle Y_1, \hat{g} \rangle$ die Beziehung $Y_1 \leq \hat{G}_\alpha$ (Konklusion 2. tritt dabei wegen $q > 3$ und $(*)$ nicht auf). Gemäß [Kle86] erforderte dies wiederum $G_\alpha = N_G(S_4(q))$. Aufgrund der Isomorphie $L \cong O_6^+(q)$ könnte der Punktstabilisator G_α also als Unterraumuntergruppe angesehen werden. Nach (4.6) wäre folglich $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ - ein Widerspruch zu Annahme $(*)$. □

(4.15) Lemma *Der Sockel* $\mathrm{soc}(G) = L$ *ist nicht* $L_3(q)$.

Beweis: Wenn $q \leq 9$ ist, beweist dies eine Inspektion der im Atlas [ATLAS] angegebenen Charaktertafeln (neben dem Charakterargument (2.6) muss dabei vereinzelt auch vom Zentralisatorargument (2.5) Gebrauch gemacht werden).
Wir können also $q \geq 11$ annehmen. Die Charaktertafeln von $L_3(q)$ bzw. $\mathrm{PGL}_3(q)$ sind in [SF73] bzw. [Ste51] aufgeführt. Mit ihrer Hilfe lässt sich leicht nachprüfen, dass für Gruppenelemente $g \in \mathrm{PGL}_3(q)$ entweder die Voraussetzungen des Charakterargumentes (2.6) gegeben sind oder g die Ordnung $o(g) = p = q-1$ besitzt und einer der in [SF73] mit $C_4^{(k)}$ bezeichneten Konjugiertenklassen zugeordnet werden kann. Da die Bedingung $(*)$ die Anwendbarkeit des Zentralisatorargumentes (2.5) ausschließt, dürfen wir in letztgenannter Situation weiter

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q-1} < \frac{|C_L(g)|}{|\Omega|} \underset{[SF73]}{=} \frac{q \cdot (q-1)^2 \cdot (q+1)}{(3, q-1) \cdot |\Omega|}$$

ansetzen. Wie ein Vergleich mit den in [TZ96, Tafel VI] zu findenden kleinstmöglichen Graden von Permutationsdarstellungen von $L_3(q)$ zeigt, wird diese Abschätzung nur eingehalten, wenn der Punktstabilisator L_α dem Stabilisator eines 1-Raumes entspricht (Beachte dabei die aus $p = q-1 = r^f - 1$ resultierende Eigenschaft $f \equiv 1 \pmod 2$). Theorem (4.6) liefert in diesem Fall jedoch einen Widerspruch zu $(*)$.

Es bleibt der Fall $g \in G \setminus \mathrm{PGL}_3(q)$ zu klären. Wegen [GL83, (7.3)] (vgl. die Erläuterungen auf Seite 74) ist das Element g ein Körperautomorphismus mit $C_L(g) \cong L_3(q^{\frac{1}{p}}).(p, 3, q-1)$. Gleiche Argumentation wie oben erzwingt

$$\frac{1}{p} < \frac{(p, 3, q-1) \cdot q^{\frac{3}{p}} \cdot (q^{\frac{2}{p}} - 1) \cdot (q^{\frac{3}{p}} - 1)}{(3, q-1) \cdot |\Omega|}$$

und damit $|\Omega| < p \cdot q^{\frac{8}{p}} \leq q^{\frac{11}{3}}$. Die in [TZ96] zusammengefassten Ergebnisse verlangen nun erneut ein Vorliegen des Falles $L_\alpha = L_W$ mit $W \in u_1(V(3,q))$. Wie Theorem (4.6) zu entnehmen ist, gewinnen wir bei dieser Wirkung jedoch die in Widerspruch zu Annahme $(*)$ stehende Schranke $\mathrm{rfix}_\Omega(g) < \frac{1}{p}$. □

(4.16) Lemma *Der Sockel* $L = \mathrm{soc}(G)$ *stimmt nicht mit der Gruppe* $L_2(q)$ *überein.*

Beweis: Für $q \leq 19$ ergibt sich dies nach Verwendung der Angaben im Atlas [ATLAS]. Sämtliche Elemente $g \in G$, welche dabei $(*)$ erfüllen sind in Theorem (4.7) berücksichtigt und können daher kein Gegenbeispiel zu dessen Aussage liefern.

Wir dürfen also $q > 19$ voraussetzen. Gemäß [Dic01, S. 283f.] entspricht L_α einer der Gruppen L_W (wo $0 \neq W \lneq V$), $D_{(2,q)\cdot(q\pm 1)}$, $L_2(q^{\frac{1}{s}}).(s,2,q-1)$ (mit s prim und $s\,|\,f$), Alt(4), Sym(4) oder Sym(5).
In den Fällen $L_\alpha = L_W$ bzw. $L_\alpha = D_{(2,q)\cdot(q\pm1)}$ bildet der Punktstabilisator G_α eine Unterraumuntergruppe von G (Beachte dabei $L \cong O_3(q)$ und $D_{(2,q)\cdot(q+\varepsilon)} = L_W$ mit $W \in u_1^{\varepsilon}(O(3,q))$). Mithin gilt wegen (4.6) für die zugehörigen Permutationsdarstellungen $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ oder $L_\alpha = L_W$ mit $W \in u_1(V(2,2^f))$ und $p = q-1 = 2^f - 1$. Da beide Resultate in Theorem (4.7) Eingang gefunden haben und somit auch keinen Widerspruch zur Konklusion dieses Satzes hervorbringen, können wir unsere Aufmerksamkeit auf die verbliebenen Gruppen in obiger Liste richten.
Wir untersuchen dabei zunächst die durch $L_\alpha = L_2(q^{\frac{1}{s}}).(s,2,q-1)$ für ein Primelement s festgelegten Wirkungen. Wenn g im Normalisator $N_{\mathrm{PGL}_2(q)}(L_\alpha) = \mathrm{PGL}_2(q^{\frac{1}{s}})$ liegt, so folgt $g^{\mathrm{PGL}_2(q)_\alpha} = \mathrm{PGL}_2(q)_\alpha \cap g^{\mathrm{PGL}_2(q)}$, denn die Untergruppe $\langle g\rangle$ ist charakteristisch in einer der zyklischen p-Sylowgruppen S von $\mathrm{PGL}_2(q)$. Diese Gleichung impliziert allerdings

$$\mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \frac{|g^{\mathrm{PGL}_2(q^{\frac{1}{s}})}|}{|g^{\mathrm{PGL}_2(q)}|} \leq \frac{q^{\frac{1}{s}} \cdot (q^{\frac{1}{s}}+1)}{q \cdot (q-1)}.$$

Der letztgenannte Wert übertrifft die Schranke $\frac{1}{p}$ lediglich unter der Wahl $s = 2$, $p = 3 = q^{\frac{1}{s}} + 1$ und $q = 4$, welche in Widerspruch zu $q > 19$ steht. Für die gemäß [GL83] zu Körperautomorphismen konjugierten Gruppenelemente $g \in N_G(L_\alpha)$ mit $g \notin \mathrm{PGL}_2(q)$ erhalten wir, weil L genau $(2,p)$ Konjugiertenklassen an Untergruppen $L_2(q^{\frac{1}{p}})$ besitzt, im Fall $p \neq s$ ebenfalls $g^{G_\alpha} = G_\alpha \cap g^G$. Wegen $C_{L_\alpha}(g) = L_2(q^{\frac{1}{ps}}).(ps,2,q-1)$ und $C_L(g) = L_2(q^{\frac{1}{p}})$ erzwingt dies

$$\mathrm{rfix}_\Omega(g) = \frac{|L_2(q^{\frac{1}{s}}) : L_2(q^{\frac{1}{ps}})|}{|L_2(q) : L_2(q^{\frac{1}{p}})|} \leq \frac{1}{p}.$$

Es bleibt unter der Annahme $L_\alpha = L_2(q^{\frac{1}{s}}).(s,2,q-1)$ der Fall $g \in N_G(L_\alpha)\backslash \mathrm{PGL}_2(q)$ mit $o(g) = p = s\,(>2)$ zu behandeln. Hier ist $C_L(g) \cong L_2(q^{\frac{1}{p}})$ in L zu L_α konjugiert und somit der Zentralisator $C_L(g)$ mit dem Punktstabilisator L_α identifizierbar. Die Gleichheit $C_L(g) = L_2(q^{\frac{1}{s}})$ erlaubt es nun (wegen $h = g^l = \tilde{l}g \in G_\alpha \cap g^L$ und $\tilde{l} \in L_\alpha = C_L(g)$) jedes Element $h = g^l$ in $G_\alpha \cap g^L$ in der Form $h = cg$ mit $c \in C_L(g)$ und $o(c)|p$ zu schreiben. Wir können daher $|G_\alpha \cap g^L| \leq 1 + q^{\frac{1}{p}} \cdot (q^{\frac{1}{p}}+1)$ schließen, was in Verbindung mit $|g^L| = |L_2(q) : L_2(q^{\frac{1}{p}})|$ zu der Ungleichung

$$\mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \frac{|G_\alpha \cap g^L|}{|g^L|} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p}$$

führt.

Für $L_\alpha = \mathrm{Alt}(4)$, $\mathrm{Sym}(4)$ oder $\mathrm{Alt}(5)$ lässt sich mit wenigen Ausnahmen die Abschätzung $\mathrm{rfix}_\Omega(g) \underset{(2.4)}{\leq} \frac{|C_L(g)|}{|\Omega|} = \frac{|L_\alpha|}{|g^L|} \leq \frac{|L_\alpha|}{q\cdot(q-1)} \leq \frac{1}{p}$ verifizieren. In den verbliebenen Fällen berücksichtigen wir die im Satz von Dickson (vgl. [Hup67, S. 213]) genannten Voraussetzungen an q. Es kann dann festgestellt werden, dass $q \leq 16$ (oder $L_\alpha = \mathrm{Alt}(5) = L_2(q^{\frac{1}{s}})$) sein muss - ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung $q > 19$. □

(4.17) Lemma *Der Sockel* $L = \mathrm{soc}(G)$ *entspricht keiner der Gruppen vom Typ* $S_4(q)$.

Beweis: Wenn $q < 4$ ist, zeigt eine Inspektion der im Atlas [ATLAS] angegebenen Permutationscharaktere, dass der Bedingung $(*)$ lediglich in dem in Theorem (4.7) unter 3. erfassten Fall $L = S_4(2) = O_5(2) = \mathrm{Alt}(6)$, $\Omega = u_1^-(O(5,2)) = 6$ Rechnung getragen wird (Beachte hierbei die Voraussetzung $p \neq 2$).
Wir können also $q \geq 4$ annehmen. Für gerades $q \equiv 0 \pmod 2$ findet sich die Charaktertafel von $\mathrm{Sp}_4(q)$ in [Eno72]. Eine Inspektion der dort aufgelisteten Werte liefert nun für jedes Primelement $g \in L$ von Primzahlordnung $p \neq 2$ die Abschätzung $\chi(1) + 1 \geq p \cdot (\tilde{\chi}(g) + 1)$ (dabei ist $\tilde{\chi}(g)$ wie in (2.6) definiert). Das Charakterargument impliziert daher $m_p(L) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.

Für ungerade Primzahlpotenzen $q \equiv 1 \pmod 2$ wird die Charaktertafel von $\mathrm{Sp}_4(q)$ in [Sri68] aufgeführt. Wenn das Urbild des Primelements $g \in L$ mit Ordnung $o(g) = p \nmid 2q$ nicht zu dem in [Sri68] mit $B_1(i)$ bezeichneten Element konjugiert ist, ergibt sich erneut die Ungleichung $\chi(1) + 1 \geq p \cdot (\tilde{\chi}(g) + 1)$ und damit $\mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \frac{1}{p}$. Es genügt daher das Element $\overline{B_1(i)}$ zu betrachten. Gemäß [Sri68] gilt für dieses $o(\overline{B_1(i)}) = p \mid \frac{q^2+1}{2}$ und $|C_L(\overline{B_1(i)})| = q^2+1$, was wegen Lemma (2.4) und Bedingung $(*)$ ein Vorliegen der Beziehung $|\Omega| < p \cdot |C_L(\overline{B_1(i)})| \leq \frac{(q^2+1)^2}{2}$ erfordert. Da nach Theorem (4.6) der Punktstabilisator L_α weder eine Unterraumuntergruppe noch einen Stabilisator einer orthogonalen Zerlegung in nicht ausgeartete 2-Räume bildet, gewinnen wir aus obiger Anforderung in Verbindung mit [Kle86] die Gleichheit $L_\alpha = S_2(q^2).2$. In diesem Fall entsprechen die zyklischen p-Sylowgruppen von L_α jedoch p-Sylowgruppen von L. Wir erhalten deshalb die Abschätzung

$$\mathrm{rfix}_\Omega(g) = \frac{|\overline{B_1(i)}^{L_\alpha}|}{|\overline{B_1(i)}^{L}|} = \frac{2 \cdot q^2 \cdot (q^2-1)}{q^4 \cdot (q^2-1)^2} = \frac{2}{q^2 \cdot (q^2-1)} < \frac{2}{q^2+1} \leq \frac{1}{p}.$$

Es müssen folglich nur noch Gruppenelemente g in $G \setminus L$ untersucht werden. Aufgrund der Voraussetzung $o(g) = p \neq 2$ handelt es sich dabei um Körperautomorphismen (vgl. die Argumentation auf Seite 74) mit Zentralisator $C_L(g) = S_4(q^{\frac{1}{p}})$. Weil die Annahme $(*)$ die Anwendbarkeit des Zentralisatorargumentes (2.5) ausschließt, kann weiter $|L : L_\alpha| < p \cdot |C_L(g)| \leq q^{\frac{p+10}{p}}$ angesetzt werden. Ein Vergleich dieses Wertes mit den Indizes der in [Kle86] aufgelisteten maximalen Untergruppen von L zeigt nun, dass sich auch in diesem Fall der Punktstabilisator L_α mit einer Unterraumuntergruppe, dem Stabilisator einer orthogonalen Zerlegung von $S(4, q)$ in nicht-ausgeartete 2-Räume oder der Untergruppe $S_2(q^2).2$ identifizieren lässt und darüber hinaus die Primzahl p den Wert 3 annimmt. Wegen Theorem (4.6) bleibt lediglich der Fall $L_\alpha = S_2(q^2).2$ zu betrachten. Unter dieser Bedingung induziert allerdings jedes Element von $g^L \cap G_\alpha$ einen Körperautomorphismus von $S_2(q^2)$. Es folgt daher $\frac{|g^L \cap G_\alpha|}{|g^L|} = \frac{|S_2(q^2):S_2(q^{\frac{1}{p}})|}{|S_4(q):S_4(q^{\frac{1}{p}})|} = \frac{q^{\frac{2}{3}}-1}{q^{\frac{4}{3}}\cdot(q^2-1)} < \frac{1}{3}$. □

(4.18) Lemma *Der Sockel $L = \mathrm{soc}(G)$ ist keine der Gruppen $U_3(q)$.*

Beweis: Für $q \leq 8$ ergibt sich dies nach Verwendung des Charakterargumentes (2.6) aus den Angaben im Atlas [ATLAS].
Im Fall $q > 8$ beweist eine Inspektion der in [Enn63] und [SF73] aufgeführten Charaktertafeln von $\mathrm{PGU}_3(q)$ und $U_3(q)$, dass jedes Primelement $g \in \mathrm{PGU}_3(q)$ die Voraussetzungen des Charakterargumentes erfüllt und somit $m_p(L) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ gilt. Die verbliebenen Elemente $g \in G \setminus \mathrm{PGU}_3(q)$ bilden, wie auf Seite 74 festgestellt wurde, als $2'$-Elemente Körperautomorphismen von L mit Zentralisatorordnung $|C_L(g)| \leq |\,\mathrm{PGU}_3(q^{\frac{1}{p}})|$. Ferner liefert Bedingung $(*)$ in Verbindung mit dem Zentralisatorargument die Abschätzung $|\Omega| < p \cdot |C_L(g)|$, was aufgrund der in [Coo78] erzielten Ergebnisse über den kleinstmöglichen Grad einer Permutationsdarstellung einer klassischen Gruppe ein Vorliegen der Ungleichung $q^3 + 1 < p \cdot |\,\mathrm{PGU}_3(q^{\frac{1}{p}})|$ erfordert. Diese ist, wie einfache Rechnungen bestätigen, nur unter der Wahl $p = 3, q = 8$ gegeben. Weil jedoch im Falle $q = 8$ die Beziehung $\mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \frac{1}{p}$ direkt mit Hilfe des Atlasses [ATLAS] verifiziert wurde, können auch in diesem Fall keine Ausnahmen auftreten. □

In den bisher behandelten Sätzen haben wir für alle Primteiler $2 \neq p \neq r$ der Gruppenordnung $|G|$ einer primitiven fasteinfachen klassischen Permutationsgruppe G Abschätzungen des minimalen p-Grades $m_p(G)$ gewonnen.
In den verbliebenen Fällen $p = 2$ und $p = r(> 2)$ können wir auf von Guralnick und Magaard (vgl. [GM98]) bzw. Liebeck und Saxl (vgl. [LS91]) bewiesene Ergebnisse zurückgreifen. Wir erhalten dadurch die folgenden Theoreme.

(4.19) Theorem *Sei $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine primitive, fasteinfache klassische Gruppe über einem Körper $\mathbb{F}_{q^u}$ der Charakteristik r und p ein Primteiler der Ordnung von G mit $p \neq r$ oder $p = r = 2$. Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:*

1. *Es gilt* $\quad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.
2. *Der Sockel* $\mathrm{soc}(G)$ *von G entspricht der projektiven speziellen linearen Gruppe $L_2(2^f)$. Die Gruppe G wirkt auf der Menge Ω der 1-Räume von $V(2, 2^f)$ und $p = 2^f - 1$ ist eine Mersennesche Primzahl mit $m_p(G) = p = |\Omega| - 2 \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|$.*
3. *Der Sockel* $\mathrm{soc}(G)$ *von G kann mit der orthogonalen Gruppe $O_n^\varepsilon(2)$ mit $4 \leq n$ identifiziert werden. Die Gruppe G operiert auf der kürzesten Bahn von 1-Räumen des Vektorraumes $O^\varepsilon(n, 2)$ und für $p = 2$ gilt $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|$.*
4. *Der Sockel* $\mathrm{soc}(G)$ *von G ist isomorph zu einer orthogonalen Gruppe $O_n^\varepsilon(2)$ mit $4 \leq n \leq 7$ und $\varepsilon \in \{0, n-5\}$. Die Menge Ω stimmt mit der kürzesten Bahn total isotroper 1-Räume des Vektorraumes $O^\varepsilon(n, 2)$ überein. Dabei gilt $p = 3$ $(= q + 1)$ und $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|$.*
5. *Es ist* $(\Omega, \mathrm{soc}(G)) \cong (8, \mathrm{Alt}(8)) \cong (8, L_4(2)) \cong (8, O_6^+(2))$ *und* $m_p(G) = p \leq 5$.

Beweis: Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus [GM98, Theorem 1] und den in Theorem (4.7) gewonnenen Ergebnissen. □

Bemerkung: Eine genauere Beschreibung der in Theorem (4.19) unter den in 2. bzw. 3. genannten Gruppen auftretenden 2-transitiven Permutationsgruppen findet sich in [Höc99].

(4.20) Theorem *Sei $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine primitive, fasteinfache klassische Gruppe über einem Körper $\mathbb{F}_{q^u}$ der Charakteristik r und p ein Primteiler der Ordnung von G. Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:*

1. *Es gilt* $\quad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.
2. *Die Gruppe G ist eine klassische Gruppe über dem Primkörper $\mathbb{F}_r$. Weiter gilt $p = r > 2$ und $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|$.*
3. *Der Sockel* $\mathrm{soc}(G)$ *von G entspricht der projektiven speziellen linearen Gruppe $L_2(2^f)$. Die Gruppe G wirkt auf der Menge Ω der 1-Räume von $V(2, 2^f)$ und $p = 2^f - 1$ ist eine Mersennesche Primzahl mit $m_p(G) = p = |\Omega| - 2 \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|$.*

4. *Der Sockel* $\mathrm{soc}(G)$ *von* G *kann mit der orthogonalen Gruppe* $O_n^{\varepsilon}(2)$ *mit* $4 \leq n$ *identifiziert werden. Die Gruppe* G *operiert auf der kürzesten Bahn von 1-Räumen des Vektorraumes* $O^{\varepsilon}(n,2)$ *und für* $p = 2$ *gilt* $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|$.

5. *Der Sockel* $\mathrm{soc}(G)$ *von* G *ist isomorph zu einer orthogonalen Gruppe* $O_n^{\varepsilon}(2)$ *mit* $4 \leq n \leq 7$ *und* $\varepsilon \in \{0, n-5\}$. *Die Menge* Ω *stimmt mit der kürzesten Bahn total isotroper 1-Räume des Vektorraumes* $O^{\varepsilon}(n,2)$ *überein. Dabei gilt* $p = 3$ $(= q+1)$ *und* $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|$.

6. *Es ist* $(\Omega, \mathrm{soc}(G)) \cong (8, \mathrm{Alt}(8)) \cong (8, L_4(2)) \cong (8, O_6^+(2))$ *und* $m_p(G) = p \leq 5$.

Beweis: Wegen Theorem (4.19) genügt es die Aussage für den Primteiler $p = r (> 2)$ zu beweisen.
Erfüllt das Gruppenelement $g \in G$ mit $o(g) = r$ nicht die im Theorem unter 1. genannte Ungleichung, so ist $\mathrm{rfix}_{\Omega}(g) > \frac{1}{p}$.
Andererseits zeigt eine Inspektion der in [LS91, Tabelle 1] aufgeführten Fixpunktanteile, dass entweder einer der in Theorem (4.20) 3. bis 5. beschriebenen Fälle vorliegt oder $\mathrm{rfix}_{\Omega}(g) \leq \frac{4}{3r^f}$ gilt.
Ein Vergleich der oberen und der unteren Schranke von $\mathrm{rfix}_{\Omega}(g)$ liefert nun $f = 1$. Wegen $\mathrm{rfix}_{\Omega}(g) \leq \frac{4}{3r} \leq \frac{2}{r+1}$ erhalten wir in diesem Fall darüber hinaus $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|$. □

(4.21) Korollar *Sei* $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ *eine primitive, fasteinfache klassische Gruppe über einem Körper* $\mathbb{F}_{q^u}$ *der Charakteristik* r *und* p *ein Primteiler der Ordnung von* G. *Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:*

1. *Es gilt* $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|$.

2. *Es ist* $(\Omega, \mathrm{soc}(G)) \cong (8, \mathrm{Alt}(8)) \cong (8, L_4(2)) \cong (8, O_6^+(2))$ *und* $m_p(G) = p \leq 5$.

Beweis: Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus (4.20). □

Kapitel 5

Minimale p-Grade exzeptioneller Lie-Gruppen und sporadisch einfacher Gruppen

In diesem Kapitel setzen wir uns mit primitiven Permutationsgruppen auseinander, deren Sockel eine exzeptionelle Lie-Gruppe oder eine sporadisch einfache Gruppe ist. Dabei wollen wir zeigen, dass diese Gruppen die in den beiden vorangegangenen Kapiteln etablierte Schranke für minimale p-Grade im Wesentlichen respektieren. Einzige Ausnahme bilden die 7-Elemente der auf 9 Punkten operierenden Reegruppe ${}^2G_2(3)$; ein Sonderfall, der uns wegen der Isomorphie des G-Raumes $(\Omega, {}^2G_2(3)')$ zum Gruppenraum $(u_1(V(2,8)), L_2(8))$ schon bei der Behandlung klassischer Gruppen beschäftigt hat.

5.1 Minimale p-Grade von Permutationsgruppen mit exzeptionellem Sockel vom Lie-Typ

Wir wenden uns zunächst primitiven Permutationsgruppen mit exzeptionellem Sockel vom Lie-Typ zu. Die Fixpunktanteile dieser Gruppen wurden von Frohardt und Magaard [FM95] eingehend studiert. Die von ihnen gewonnenen Ergebnisse tragen wesentlich zur Vereinfachung des Beweises des folgenden Satzes bei.

(5.1) Satz *Es sei $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine primitive Permutationsgruppe mit einfachem exzeptionellem Sockel vom Lie-Typ. Ist p ein Primteiler der Ordnung von G, so liegt einer der folgenden Fälle vor:*

1. *Es gilt* $\quad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.
2. *Es ist* $(\Omega, \mathrm{soc}(G)) \cong (9, {}^2G_2(3)') \cong (u_1(V(2,8)), L_2(8))$ *und für* $p = 7$ *ist* $m_p(G) = p \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|$.

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis.
Angenommen die primitive Permutationsgruppe $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ bildete ein Gegenbeispiel zum Satz. Dann entspricht G einer fasteinfachen Gruppe mit exzeptionellem Sockel $L = L(q) = \mathrm{soc}(G)$ vom Lie-Typ über einem Körper $\mathbb{F}_q$ der Charakteristik r mit $q = r^f$ Elementen und es existiert ein Gruppenelement $g \in G$ mit

$$o(g) = p \qquad \text{und} \qquad |\Omega_g| = |\Omega| - m_p(G) > \frac{1}{p} \cdot |\Omega| \qquad (*)$$

(Beachte die Gleichwertigkeit von $(*)$ zu $\mathrm{rfix}_\Omega(g) > \frac{1}{p}$).
Ferner entspricht das Tripel (Ω, L, p) nicht dem in Satz (5.1) unter 2. genannten Tripel.

Starke Einschränkungen für die Ordnung p des Ausnahmeelementes $g \in G$ liefert das folgende Lemma.

(5.2) Lemma *Für den Primteiler p gilt*

$$p > s := \begin{cases} 3 & \text{, falls } L = {}^2G_2(3)' \\ \frac{52}{7} & \text{, falls } L = G_2(4) \\ \frac{q^2+1}{q^{2/o}+1} & \text{, falls } L = {}^2B_2(q) \text{ und } o = \min\{p \in \mathbb{P} \mid p \mid f\} \\ q^2 - q + 1 & \text{, falls } L = {}^2G_2(q) \text{ mit } q > 3 \text{ oder } L = G_2(q)' \text{ mit } q \neq 4 \\ q^4 - q^2 + 1 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Wird der Wert s wie in Lemma (5.2) angegeben definiert, ist bei entsprechender Wahl von L nach [FM95, Hauptsatz]

$$\mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \frac{1}{s}.$$

Wegen $(*)$ folgt $\frac{1}{p} < \mathrm{rfix}_\Omega(g) \leq \frac{1}{s}$ und damit die Behauptung des Lemmas. $\square$

Um im weiteren Vorgehen einheitlich argumentieren zu können, treffen wir zunächst die folgenden Feststellungen.

(5.3) Hilfssatz *Das Ausnahmeelement $g \in G$ liegt im Sockel L.*
Dieser entspricht keiner der Gruppen ${}^2G_2(3)', G_2(2)', G_2(3)$ und $G_2(4)$.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass der Sockel L nicht mit einer der im Hilfssatz genannten Gruppen übereinstimmt.
In den Fällen $L \in \{G_2(3), G_2(4)\}$ müsste wegen Lemma (5.2) das Gruppenelement g die Ordnung $p = 13$ besitzen. Ein Blick in den Atlas [ATLAS] zeigt dann jedoch die Gültigkeit der Abschätzung $|\Omega| > p \cdot |C_L(g)| = p^2$. Mit dem Zentralisatorargument (2.5) ergäbe sich folglich ein Widerspruch zu $(*)$.
Im Falle $L = G_2(2)'$ erhielten wir wegen Lemma (5.2) zunächst $p = 7$. Eine Inspektion der im Atlas [ATLAS] angegebenen Charaktertafeln rechtfertigte dann die Anwendung des Charakterargumentes (2.6); erneut ein Widerspruch zu der Annahme $(*)$.
Wie wir den Angaben im Atlas [Atlas] entnehmen, ist für $L = {}^2G_2(3)'$ die mit $(*)$ bezeichnete Ungleichung lediglich unter der Bedingung $p = 7$ und $|\Omega| = 9$ erfüllt. Dies würde jedoch der Voraussetzung widersprechen, dass das Tripel (Ω, L, p) nicht in Theorem (5.1) 2. genannt wird.

Es bleibt daher nur noch die Behauptung $g \in L$ nachzuweisen.
Wäre $g \notin L$, so müsste der Primteiler p die Ordnung der äußeren Automorphismengruppe $|\operatorname{Out}(L)|$ teilen. Da L einer einfachen exzeptionellen Lie-Gruppe entspricht, folgte dann jedoch $p \mid f$ (d.h. $p \leq f \leq r^{f-1} < q$) oder $p \leq 3$. Insbesondere ergäbe sich (nach Beachtung von $L \neq {}^2G_2(3)'$) die Ungleichung $p \leq q + 1 \leq s$; ein Widerspruch zu Lemma (5.2). □

Nun lassen sich die folgenden Einschränkungen für den Sockel $L = L(q)$ und die Ordnung p des Ausnahmeelementes $g \in G$ nachweisen.

(5.4) Lemma *Für den Sockel $L = L(q)$ der Ausnahmegruppe G und die Ordnung $o(g) = p$ des Elementes $g \in L$ liegt einer der folgenden Fälle vor:*

L=L(q)	*Bedingungen für p*		*weitere Bedingungen*
$G_2(q)$	$p = q^2 + q + 1,$	$p \perp q^6 - 1$	$q > 4$
$F_4(q)$	$p = q^4 + 1,$	$p \perp q^8 - 1$	$q \equiv 0 \pmod 2$
${}^2E_6(q)$	$p = q^4 + 1,$	$p \perp q^8 - 1$	$q \equiv 0 \pmod 2$
	$p \mid q^6 - q^3 + 1,$	$p \perp q^{18} - 1$	

L=$L(q)$	*Bedingungen für p*		*weitere Bedingungen*
$E_6(q)$	$p = q^4 + 1,$	$p \perp q^8 - 1$	$q \equiv 0 \pmod 2$
	$p = q^4 + q^3 + q^2 + q + 1,$	$p \perp q^5 - 1$	$f \equiv 1 \pmod 2$
	$p \mid q^6 + q^3 + 1,$	$p \perp q^9 - 1$	
$E_7(q)$	$p = q^4 + 1,$	$p \perp q^8 - 1$	$q \equiv 0 \pmod 2$
	$p = q^4 + q^3 + q^2 + q + 1,$	$p \perp q^5 - 1$	$f \equiv 1 \pmod 2$
	$p \mid q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1,$	$p \perp q^{14} - 1$	
	$p \mid q^6 - q^3 + 1,$	$p \perp q^{18} - 1$	
	$p \mid q^6 + q^3 + 1,$	$p \perp q^9 - 1$	
	$p \mid q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1,$	$p \perp q^7 - 1$	$f \equiv 1 \pmod 2$
$E_8(q)$	$p = q^4 + 1,$	$p \perp q^8 - 1$	$q \equiv 0 \pmod 2$
	$p = q^4 + q^3 + q^2 + q + 1,$	$p \perp q^5 - 1$	$f \equiv 1 \pmod 2$
	$p \mid q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1,$	$p \perp q^{14} - 1$	
	$p \mid q^6 - q^3 + 1,$	$p \perp q^{18} - 1$	
	$p \mid q^6 + q^3 + 1,$	$p \perp q^9 - 1$	
	$p \mid q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1,$	$p \perp q^7 - 1$	$f \equiv 1 \pmod 2$
	$p \mid q^8 - q^7 + q^5 - q^4 + q^3 - q + 1,$	$p \perp q^{15} - 1$	
	$p \mid q^8 - q^6 + q^4 - q^2 + 1,$	$p \perp q^{20} - 1$	
	$p \mid q^8 - q^4 + 1,$	$p \perp q^{24} - 1$	
	$p \mid q^8 + q^7 - q^5 - q^4 - q^3 + q + 1,$	$p \perp q^{30} - 1$	

Beweis: Ein Vergleich des in (5.2) definierten Wertes s mit den Teilern der Gruppenordnung $|L|$ beweist für Primteiler $p > s$ die Gültigkeit einer der in obiger Tabelle angegebenen Bedingungen.
Insbesondere treten in den Fällen $L \in \{{}^2B_2(q),\ {}^2G_2(q),\ {}^2F_4(q),\ {}^3D_4(q)\}$ keine Primteiler der Gruppenordnung von L mit $p > s$ auf (Nicht-trivial ist der Nachweis der Beziehung $p \leq s$ dabei nur im Unterfall $L = {}^2B_2(q)$, in dem entweder $p \mid \frac{q^2+1}{q^{2/o}+1}$ oder $p \leq q+1 \leq (q^{\frac{1}{o}})^{o-1} \cdot q^{\frac{1}{o}} + 1 \underset{o \geq 3}{\leq} (q^{\frac{2}{o}})^{o-2} \cdot (q^{\frac{2}{o}} - 1) + 1 = (q^{\frac{2}{o}})^{o-1} - (q^{\frac{2}{o}})^{o-2} + 1 \leq \frac{q^2+1}{q^{2/o}+1}$ gilt). □

In den folgenden beiden Lemmata weisen wir nach, dass unter den verbliebenen exzeptionellen Lie-Gruppen jene keine Ausnahmegruppe bilden, welche einen den Wert 4 nicht übersteigenden Lie-Rang besitzen.

(5.5) Lemma *Der Sockel $L = L(q)$ der Ausnahmegruppe G entspricht keiner der Gruppen vom Typ $G_2(q)$ und $F_4(q)$.*

Beweis: Im Fall $L = G_2(q)$ genügt es nach Lemma (5.4) Elemente g der Ordnung $p = q^2 + q + 1$ zu betrachten. Gemäß [CR74], [Eno76] und [EY86] besitzt der Zentralisator $C_L(g)$ dieser Elemente die Ordnung $|C_L(g)| = q^2 + q + 1$.
Da andererseits nach [Vas96] der Grad der Permutationsgruppe $G_2(q)$ durch den kleinstmöglichen Index $|L : P| = \frac{q^6-1}{q-1}$ einer parabolischen Untergruppe P von L nach unten beschränkt wird, folgt

$$|\Omega| \geq \frac{q^6-1}{q-1} > (q^2+q+1)^2 = p \cdot |C_L(g)|.$$

Das Zentralisatorargument (2.5) liefert nun einen Widerspruch zur Annahme $(*)$.

Entsprechend kann im Fall $L = F_4(q)$ argumentiert werden. Hier ist wegen Lemma (5.4) $p = q^4 + 1$ und insbesondere $q \equiv 0 \pmod 2$. Eine Durchsicht der in [Shi74] angegebenen Zentralisatorordnungen semisimpler Elemente von $F_4(q)$ zeigt ferner $|C_L(g)| = q^4 + 1$. Ein Vergleich mit dem kleinstmöglichen Index einer Untergruppe von L, der nach [Vas96] den Wert $\frac{(q^{12}-1)\cdot(q^4+1)}{q-1}$ annimmt, ergibt nun

$$|\Omega| \geq \frac{(q^{12}-1)\cdot(q^4+1)}{q-1} > (q^4+1)^2 = p \cdot |C_L(g)|,$$

was nach Anwendung des Zentralisatorargumentes (2.5) zu einem Widerspruch zu $(*)$ führt. □

(5.6) Lemma *Der Sockel $L = L(q)$ der Ausnahmegruppe G entspricht keiner Gruppe vom Typ ${}^2E_6(q)$.*

Beweis: Bei Vorliegen einer Gruppe des Typs ${}^2E_6(q)$ erhalten wir, ähnlich wie im vorangegangenen Lemma, mit Hilfe von (2.5) einen Widerspruch zu $(*)$.
Als untere Schranke für den Grad der in Betracht kommenden Permutationsgruppen verwenden wir dabei den in [Vas98] angegebenen Wert $\frac{(q^{12}-1)(q^6-q^3+1)(q^4+1)}{q-1}$.
Für Gruppenelemente g mit $o(g) \perp q^{18} - 1$ ist darüber hinaus gemäß [FM95, (5.14)] $|C_L(g)| < q^{10}$ und damit

$$|\Omega| \geq \frac{(q^{12}-1)(q^6-q^3+1)(q^4+1)}{q-1} > (q^6-q^3+1) \cdot q^{10} \geq p \cdot |C_L(g)|.$$

Wir können daher unter Beachtung von (5.4) $o(g) = q^4 + 1 \perp q^8 - 1$ annehmen.
Liegt der Zentralisator von g in einem Torus, so gilt nach [LS87] $|C_L(g)| \leq (q+1)^4$ und das Zentralisatorargument führt zu einem Widerspruch zu $(*)$.

Andernfalls zeigt eine Durchsicht der in [DL85] aufgelisteten Zentralisatorordnungen halbeinfacher Elemente, dass der Zentralisator entweder die obere Schranke

$$|C_L(g)| \leq q^4 \cdot (q^8 - 1) \cdot (q^2 - 1)$$

besitzt oder eine zu $O_{10}^-(q)$ $(= {}^2D_5(q))$ isomorphe Untergruppe U enthält. Im letztgenannten Fall wäre jedoch die p-Sylowgruppe $\langle g \rangle \in \mathrm{Syl}_p(C_L(g)) \subseteq \mathrm{Syl}_p(L)$ die einzige p-Sylowgruppe von $U \subseteq C_L(g)$; ein Widerspruch zur Einfachheit von U. Mithin ist $|C_L(g)| \leq q^4 \cdot (q^8 - 1) \cdot (q^2 - 1)$ und das Zentralisatorargument anwendbar. Es folgt also auch in diesem Fall die Behauptung. □

(5.7) Lemma *Der Sockel der Ausnahmegruppe G ist nicht vom Typ $E_6(q)$.*

Beweis: Wir unterscheiden die folgenden beiden Fälle.
I. Fall: g zentralisiert keine Gruppe, welche von Wurzeln von L erzeugt wird.
Wenn g keine von Wurzeln von L erzeugte Gruppe zentralisiert, muss $C_L(g)$ nach [FM95] einen Torus bilden. Insbesondere kann dann mit [LS87] die Ordnung des Zentralisators durch

$$|C_L(g)| \leq (q+1)^6$$

abgeschätzt werden.
Ein Vergleich mit dem in [Vas97] bestimmten kleinstmöglichen Grad der Permutationsgruppe $E_6(q)$ liefert nun

$$|\Omega| \geq \frac{(q^9 - 1)(q^{12} - 1)}{(q-1)(q^4 - 1)} > \frac{q^9 - 1}{q^3 - 1} \cdot (q+1)^6 \geq p \cdot |C_L(g)|,$$

was nach (2.5) die $(*)$ widersprechende Beziehung $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ hervorbringt.
II. Fall: g zentralisiert eine von Wurzeln von L erzeugte Gruppe R.
In diesem Fall stimmt gemäß [FM95] der Zentralisator $C_L(R)$ der Wurzelgruppe R mit der Gruppe $\mathrm{SL}_6(q)$ überein. Beachtung von Lemma (5.4) erzwingt nun $o(g) \perp q^5 - 1$ und weiters $|C_{C_L(R)}(g)| = (q-1) \cdot (q^5 - 1)$. Da nach [FM95] damit auch auf die Ungleichung

$$|C_L(g)| \leq |\,\mathrm{SL}_2(q)| \cdot |C_{C_L(R)}(g)| \leq q \cdot (q-1)^2 \cdot (q+1) \cdot (q^5 - 1)$$

geschlossen werden kann, ergibt sich

$$|\Omega| \geq \frac{(q^9 - 1)(q^{12} - 1)}{(q-1)(q^4 - 1)} > \frac{q^5 - 1}{q - 1} \cdot q \cdot (q-1)^2 \cdot (q+1) \cdot (q^5 - 1) \geq p \cdot |C_L(g)|.$$

Gleiche Argumentation wie im ersten Fall vervollständigt nun den Beweis. □

Abgeschlossen wird der Beweis von Satz (5.1) durch das folgende Lemma, in dem wir nachweisen, dass auch die verbliebenen exzeptionellen Lie-Gruppen keine Ausnahmegruppen darstellen können.

(5.8) Lemma *Die Gruppen $E_7(q)$ und $E_8(q)$ treten nicht als Sockel einer Ausnahmegruppe auf.*

Beweis: Auch beim Beweis dieses Lemmas zielen wir darauf ab, die Gültigkeit der Ungleichung

$$|\Omega| \geq p \cdot |C_L(g)|$$

zu verifizieren, da das Zentralisatorargument dann einen Widerspruch zu $(*)$ liefert. Dazu sind geeignete Schranken für den Grad $|\Omega|$ der Permutationsgruppe G und die Ordnung des Zentralisators $|C_L(g)|$ zu ermitteln.
Als Abschätzung für $|\Omega|$ verwenden wir hierbei den in [Vas87] angegebenen kleinstmöglichen Grad der Permutationsgruppe G mit $L \cong E_7(q)$ bzw. $L \cong E_8(q)$. Bei der Bestimmung oberer Schranken für $|C_L(g)|$ ist hingegen zunächst zwischen Gruppenelementen g, mit einem einem Torus entsprechenden Zentralisator, und anderen Gruppenelementen zu unterscheiden.
Im erstgenannten Fall erhalten wir aus [LS87] die Ungleichung $|C_L(g)| \leq (q+1)^\ell \leq (q+1)^8$, wobei ℓ den Lie-Rang der Gruppe L bezeichnet. Andernfalls finden wir die Zentralisatorordnung von g in [Der83] als Produkt des semisimplen Anteils $|(M^{\tilde{g}})_\sigma|$ mit dem toralen Anteil $|(S^{\tilde{g}})_\sigma|$ aufgelistet. Weil $\langle g \rangle \trianglelefteq C_L(g)$ keinen Normalteiler einer einfachen Untergruppe von $(M^{\tilde{g}})_\sigma$ bilden kann, müssen unter den dort genannten Ordnungen nur jene berücksichtigt werden, bei denen die (5.4) erfüllende Ordnung von g den Anteil $|(S^{\tilde{g}})_\sigma|$ teilt. Es ist dann $|C_{E_7(q)}(g)| < q^{13}$ bzw. $|C_{E_8(q)}(g)| < q^{33}$.
Insgesamt erhalten wir also im Falle $E_7(q)$ die Beziehung

$$|\Omega| \underset{[Vas97]}{\geq} \frac{(q^{14}-1)\cdot(q^9+1)\cdot(q^5+1)}{q-1} > q^{27} > q^7 \cdot q^{13} > p \cdot |C_L(g)|$$

sowie für $E_8(q)$

$$|\Omega| \underset{[Vas97]}{\geq} \frac{(q^{30}-1)\cdot(q^{12}+1)\cdot(q^{10}+1)\cdot(q^6+1)}{q-1} > q^{57} > q^7 \cdot q^{33} > p \cdot |C_L(g)|. \;\square$$

5.2 Minimale p-Grade sporadisch einfacher Permutationsgruppen

Fasteinfache primitive Permutationsgruppen mit sporadisch einfachem Sockel erweisen sich unter dem uns gegebenen Blickwinkel als „gutartig".

(5.9) Satz *Ist $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine primitive Permutationsgruppe mit sporadisch einfachem Sockel und p ein Primteiler der Ordnung von G, so gilt*

$$m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|.$$

Beweis: Eine Inspektion der im Atlas [ATLAS] angegebenen Charaktertafeln sporadisch einfacher Gruppen und ihrer Automorphismengruppen zeigt, dass entweder die Ungleichung $1+\chi_i(1) \geq p \cdot (\widetilde{\chi_i}(g)+1)$ für jeden irreduziblen Charakter χ_i von G und sämtliche Gruppenelemente $g \in G$ von Primzahlordnung p erfüllt ist, oder der Sockel von G der Hall-Janko-Gruppe J_2 entspricht und die Primzahl p den Wert 3 oder 5 annimmt.

Im erstgenannten Fall liefert eine Verwendung des Charakterargumentes (2.6) die Aussage des Satzes. Die oben formulierte Behauptung muss daher nur noch für die minimalen p-Grade $m_3({J_2}^{\Omega})$ und $m_5({J_2}^{\Omega})$ der verschiedenen primitiven Wirkungen von J_2 bestätigt werden.

Bei der Wahl $p = 5$ bereitet dies keine Schwierigkeiten, denn für $|\Omega| < 1800$ ergibt sich die oben genannte Schranke nach Inspektion der im Atlas [ATLAS] aufgeführten Permutationscharaktere; für $|\Omega| \geq 1800$ kann hingegen wegen $p \cdot |C_L(g)| \leq 5 \cdot 300 = 1500 < |\Omega|$ für alle $g \in J_2$ mit $o(g) = 5$ das Zentralisatorargument (2.5) herangezogen werden.

Wir dürfen also $p = 3$ annehmen.
Für Punktmengen Ω deren Mächtigkeit den Wert 1800 nicht erreicht, lässt sich erneut mittels Inspektion der im Atlas [ATLAS] angegebenen Permutationscharaktere die Ungleichung $\mathrm{rfix}_\Omega(g) < \frac{1}{3}$ für alle $g \in J_2$ mit $o(g) = 3$ verifizieren.

Wirkt die Hall-Janko-Gruppe J_2 primitiv auf $|\Omega| = 1800$ Punkten, so führen die folgenden Überlegungen zum gewünschten Resultat:
Ist $S = \langle s \rangle$ eine 3-Sylowgruppe eines Punktstabilisators $(J_2)_\alpha$, so operiert der Normalisator $N_{J_2}(S)$ transitiv auf der Menge $\Omega_S = \Omega_s$ der Fixpunkte von S

(vgl. [Wie64, (3.7)]). Folglich gilt

$$|\Omega_s| = |N_{J_2}(S) : N_{(J_2)_\alpha}(S)| = \frac{|N_{J_2}(S)|}{|(J_2)_\alpha|} \cdot |(J_2)_\alpha : N_{(J_2)_\alpha}(S)|.$$

Aus der Struktur des Punktstabilisators $(J_2)_\alpha$ schließen wir andererseits jedoch $|(J_2)_\alpha| = 336$ und $|N_{J_2}(S)| \leq 2160$ (denn $N_{J_2}(S) / C_{J_2}(S) \tilde{\lesssim} \mathrm{Aut}(S) \cong Z_2$ und $C_{J_2}(S)$ besitzt entweder die Ordnung 1080 oder 36). Da, wie aus dem Atlas [ATLAS] hervorgeht, $L_3(2)$ ein Normalteiler vom Index 2 in $(J_2)_\alpha$ bildet, erhalten wir ferner

$$|(J_2)_\alpha : N_{(J_2)_\alpha}(S)| = |L_3(2) : N_{L_3(2)}(S)| \mid 56.$$

Die Mächtigkeit der Fixpunktmenge $|\Omega_S|$ kann daher den Wert $\frac{2160}{336} \cdot 56 = 360 < \frac{1}{3} \cdot |\Omega|$ nicht übersteigen.

Die primitive Wirkung von J_2 auf ihren 2016 5-Sylowgruppen wird in [HW68] näher beschrieben. Für unsere Zwecke genügt es jedoch von der in [LPS87, S.369] festgehaltenen Tatsache $J_2 \leq G_2(4) \leq \mathrm{Sym}(2016)$ Gebrauch zu machen. Es ist dann, wie sich nach einem erneuten Blick in den Atlas [ATLAS] zeigt,

$$m_3(J_2) \geq m_3(G_2(4)) = 2010 > \frac{2}{3} \cdot 2016.$$

Im verbliebenen Fall $|\Omega| = 10080$ ist zum Beweis des Satzes, wegen

$$|\Omega| = 10080 \geq 3 \cdot 1080 \geq p \cdot |C_L(g)| \text{ für alle } g \in J_2 \text{ mit } o(g) = 3,$$

lediglich das Zentralisatorargument (2.5) anzuwenden. □

Kapitel 6

Minimale p-Grade alternierender und symmetrischer Gruppen

In diesem Abschnitt betrachten wir fasteinfache primitive Permutationsgruppen, welche einen alternierenden Sockel besitzen. Unter diesen finden wir den Standardtypus an Gruppen mit kleinen minimalen p-Graden. Es handelt sich dabei um die von den Wirkungen der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(n)$ auf den Mengen der k-elementigen Teilmengen von n induzierten Permutationsgruppen. Andere Wirkungen der symmetrischen Gruppen liefern hingegen keine weiteren Ausnahmen zur Abschätzung $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.

6.1 Minimale p-Grade bei natürlichen Wirkungen symmetrischer Gruppen

Wir wollen uns zunächst mit den Wirkungen der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(\Omega)$ auf den k-elementigen Teilmengen von n näher befassen. Wie schon erwähnt treten hier Beispiele mit $m_p(G) < \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ auf. Diese unterscheiden sich jedoch in mancherlei Hinsicht von früher genannten Permutationsgruppen mit kleinem minimalen p-Grad. So unterschreiten hier häufig nicht nur einzelne Primteiler die oben genannte Schranke. Darüber hinaus kann bei Vorliegen einer derartigen Gruppe die „Monotonie“ der minimalen p-Grade nachgewiesen werden. Die exakten Werte minimaler p-Grade lassen sich in diesem Fall wie folgt bestimmen.

(6.1) Satz *Die Gruppe $G = \mathrm{Sym}(n)$ wirke auf der Menge $\Omega = \binom{n}{k}$ der k-elementigen Teilmengen von n (mit $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$). Ist p ein Primteiler der Ordnung von G, so gilt:*

$$\begin{aligned}
m_p(G) &= \binom{n}{k} - \binom{n-p}{k} - \binom{n-p}{k-p} && \text{, falls} \quad p \leq k\,(\leq n-k), \\
m_p(G) &= \binom{n}{k} - \binom{n-p}{k} && \text{, falls} \quad k < p \leq n-k, \\
m_p(G) &= \binom{n}{k} && \text{, falls} \quad (k \leq)\, n-k < p.
\end{aligned}$$

Beweis: Neben der im Satz genannten Wirkung von G auf Ω betrachten wir im Beweis auch die natürliche Wirkung von G auf $\Delta := n$.
Offenbar ist jeder Fixpunkt $M \in \Omega_g$ eines Gruppenelementes $g \in G$, welches sich bzgl. Δ als Produkt disjunkter Zyklen g_i schreiben lässt, auch Fixpunkt der einzelnen Zyklen g_i (Denn andernfalls wäre $M^{g_j} \neq M$ für ein j, so dass ein $m \in M$ mit $m^{g_j} \notin M$ existieren würde. Wegen $m \in {}^{g_j}\Delta$ und ${}^{g_j}\Delta \cap {}^{g_i}\Delta = \emptyset \;\; \forall i \neq j$ folgte dann allerdings $m^g = m^{\prod g_i} = m^{g_j} \notin M$ – ein Widerspruch zur Annahme $M \in \Omega_g$).
Bezeichnet nun $g \in G$ ein Element von Primzahlordnung p mit kleinstmöglichem Träger ${}^g\Omega$ in Ω, so können wir folglich g^Δ als p-Zyklus annehmen.
In diesem Fall besteht die Menge der Fixpunkte Ω_g von g in Ω jedoch genau aus jenen k-elementigen Teilmengen von n, welche entweder die (einzige) lange Bahn von g^Δ enthalten oder disjunkt zu dieser sind. $\square$

Bemerkung: Ist $G = \mathrm{Alt}(n)$ die alternierende Gruppe vom Grad n, so ändert sich lediglich der minimale 2-Grad. Dieser wird von einem Element angenommen, welches sich bezüglich Δ als Doppeltransposition schreiben lässt. Er besitzt den Wert $m_2(G^\Omega) = \binom{n}{k} - \binom{n-4}{k} - 2 \cdot \binom{n-4}{k-2} - \binom{n-4}{k-4}$.

Wir rechtfertigen unsere Behauptung, bei der betrachteten Wirkung würden Ausnahmegruppen auftreten, mit der folgenden durch Äquivalenzumformungen leicht zu verifizierenden

Beobachtung: Unter den Voraussetzungen des vorangegangenen Satzes gilt

$$\begin{aligned}
m_2(G) \geq \frac{1}{2} \cdot |\Omega| \qquad &\text{gdw.} \qquad k \geq \frac{1}{2} \cdot (n - \sqrt{n}) \\
m_3(G) \geq \frac{2}{3} \cdot |\Omega| \qquad &\text{gdw.} \qquad k \geq \frac{1}{2} \cdot (n - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{n^2 + 8n}).
\end{aligned}$$

Eine Besonderheit der im obigen Satz genannten Klasse primitiver Permutationsgruppen deckt das folgende Korollar auf. Es beweist, dass für jede beliebige Primzahl p eine unendliche Serie an primitiven Permutationsgruppen mit kleinen minimalen p-Graden angeben werden kann.

(6.2) Korollar *Die Gruppe $G = \mathrm{Sym}(n)$ wirke auf der Menge $\Omega = \binom{n}{k}$ der k-elementigen Teilmengen von n (mit $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$).*
Ist p eine ungerade Primzahl mit $p \leq \frac{n+1}{k+1}$, so gilt

$$m_p(G) < \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|.$$

Beweis: Wegen $p \leq \frac{n+1}{k+1}$ gilt $n - i \leq \frac{p}{p-1} \cdot (n - k - i)$ für alle $i \in p$.
Wenn $p > 3$ ist, lässt sich dieser Wert durch den Ausdruck $\sqrt[p]{p} \cdot (n-k-i)$ nach oben abschätzen. Produktbildung über allen $i \in p$ liefert dann jedoch die Eigenschaft $\binom{n}{k} < p \cdot \binom{n-p}{k}$. Da nun aber andererseits der Fall $n - k < p$ nicht vorliegen kann (sonst wäre p gerade), folgt für alle Primzahlen p mit $p > 3$ die Behauptung.
Im Falle $p = 3$ ergibt eine einfache Rechnung die Ungleichung $k < \frac{1}{2} \cdot (n - \frac{1}{3}\sqrt{n^2 + 8n})$, woraus man aufgrund oben genannter Beobachtung die Eigenschaft $m_3(G) < \frac{2}{3} \cdot \binom{n}{k}$ erhält. □

Bemerkung: Die sich aus Korollar (6.2) ergebende hinreichende Bedingung $k \leq \frac{n-p+1}{p}$ kann in obiger Situation durch die (für $p > 3$ schwächere) Ungleichung $k < \frac{\sqrt[p]{p}-1}{\sqrt[p]{p}} \cdot (n - p + 1)$ ersetzt werden. Dazu ist erneut zu zeigen, dass der Fall $n - k < p$ nicht vorliegen kann. Die Behauptung ergibt sich dann aus der mittels einfacher Abschätzungen leicht zu erhaltenden Ungleichung $\binom{n}{k} < p \cdot \binom{n-p}{k}$.

Wenngleich Korollar (6.2) für jeden Primteiler p Wirkungen mit kleinem minimalen p-Grad angibt, kann dennoch gezeigt werden, dass p gewissen Restriktionen unterliegt. Beachtenswert ist dabei zunächst die „Monotonie" der minimalen p-Grade dieser Permutationsgruppen.

(6.3) Satz *Die Gruppe $G = \mathrm{Sym}(n)$ wirke auf der Menge $\Omega = \binom{n}{k}$ der k-elementigen Teilmengen von n (mit $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$). Sind p und r Primzahlen mit $p < r \leq n$ und gilt $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$, so ist auch die Abschätzung $m_r(G) \geq \frac{r-1}{r} \cdot |\Omega|$ erfüllt.*

Beweis: In den Beweis geht die sich aus der Voraussetzung $m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ und Korollar (6.2) ergebende Ungleichung $(k+1)(p+1) \geq n+1$ ein. Sie tritt in Form der durch Äquivalenzumformungen erhältlichen Abschätzung $\frac{p}{p+1} \geq \frac{n-p-k}{n-p}$ $(*)$ auf.

Wir unterscheiden zwischen den folgenden sich aus Satz (6.1) ergebenden Fällen:
Im Falle $p \le k$ gilt nach Voraussetzung

$$\frac{1}{p} \cdot \binom{n}{k} \ge \binom{n-p}{k} + \binom{n-p}{k-p}.$$

Wegen $k \le \frac{n}{2}$ ist ferner

$$\frac{p}{p+1} \ge \frac{k-p}{n-p}. \qquad (**)$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p+1} \cdot \binom{n}{k} &= \frac{p}{p+1} \cdot \frac{1}{p} \cdot \binom{n}{k} \\
&\ge \frac{p}{p+1} \cdot \left[\binom{n-p}{k} + \binom{n-p}{k-p} \right] \\
&= \frac{p}{p+1} \cdot \left[\frac{n-p}{n-p-k} \cdot \binom{n-p-1}{k} + \frac{n-p}{k-p} \cdot \binom{n-p-1}{k-p-1} \right] \\
&\underset{(*)}{\ge} \binom{n-p-1}{k} + \frac{p}{p+1} \cdot \frac{n-p}{k-p} \cdot \binom{n-p-1}{k-p-1} \\
&\underset{(**)}{\ge} \binom{n-p-1}{k} + \binom{n-p-1}{k-p-1}
\end{aligned}$$

was die Behauptung zur Folge hat.
Gilt hingegen $k < p \le n-k$, so liefert ein analoges Vorgehen die gewünschte Aussage. Dabei ist in obiger Argumentation lediglich der zweite Summand zu streichen.
In dem verbleibenden Fall $n-k < p$ ist wegen $m_p(G) = m_r(G) = |\Omega|$ nichts zu zeigen. □

Eine ähnliche Beziehung besteht zwischen den Wirkungen der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(n)$ auf den verschiedenen Mengen der k-elementigen und der l-elementigen Teilmengen.

(6.4) Satz *Es seien k, l und n natürliche Zahlen mit $1 \le k < l \le \frac{n}{2}$. Die Gruppe $G = \mathrm{Sym}(n)$ wirke auf der Menge $\Omega = \binom{n}{k}$ der k-elementigen Teilmengen von n und der Menge $\Delta = \binom{n}{l}$ der l-elementigen Teilmengen von n.*
Dann gilt für jede Primzahl $p \le n$ mit $m_p(G^\Omega) \ge \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ auch die Abschätzung $m_p(G^\Delta) \ge \frac{p-1}{p} \cdot |\Delta|$.

Beweis: Wir nehmen zunächst $p \leq k$ an. Nach Voraussetzung gilt dann

$$\frac{1}{p} \cdot \binom{n}{k} \geq \binom{n-p}{k} + \binom{n-p}{k-p}.$$

Wegen $\frac{n-1}{2} \geq k$ ist ferner

$$\frac{(n-k-1)!}{(n-k-p)!} \geq \frac{k!}{(k-p+1)!}$$

und damit auch

$$\binom{n-p}{k} \geq \frac{n-k}{k-p+1} \cdot \binom{n-p}{k-p}.$$

Erweiterung mit dem Wert $\frac{p}{k+1}$ liefert

$$\left[\frac{n-k}{k+1} - \frac{n-p-k}{k+1}\right] \cdot \binom{n-p}{k} \geq \left[\frac{n-k}{k-p+1} - \frac{n-k}{k+1}\right] \cdot \binom{n-p}{k-p}$$
$$\frac{n-k}{k+1} \cdot \left[\binom{n-p}{k} + \binom{n-p}{k-p}\right] \geq \frac{n-p-k}{k+1} \cdot \binom{n-p}{k} + \frac{n-k}{k-p+1} \cdot \binom{n-p}{k-p}.$$

Verwendung oben genannter Voraussetzung ergibt also

$$\frac{1}{p} \cdot \binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{1}{p} \cdot \binom{n}{k} \geq \binom{n-p}{k+1} + \binom{n-p}{k-p+1}.$$

Im Fall $p = k+1$ gilt wegen $\binom{n-p}{k} \geq 1$ auch

$$\frac{p}{n-k} \cdot \binom{n-p}{k} \geq \frac{p}{n-k} = \frac{k+1}{n-k}.$$

Es folgt also

$$\frac{1}{p} \cdot \binom{n}{k} \geq \binom{n-p}{k} \geq \frac{n-p-k}{n-k} \cdot \binom{n-p}{k} + \frac{k+1}{n-k}.$$

Beidseitige Multiplikation mit $\frac{n-k}{k+1}$ liefert nun

$$\frac{1}{p} \cdot \binom{n}{k+1} \geq \binom{n-p}{k+1} + 1 = \binom{n-p}{k+1} + \binom{n-p}{k+1-p}.$$

Es bleibt noch der Fall $p > k+1$ zu betrachten. Aus $\frac{n-k}{n-p-k} > 1$ ergibt sich in dieser Situation die Ungleichung

$$\frac{n-k}{n-k-p} \cdot \frac{1}{p} \cdot \binom{n}{k} > \binom{n-p}{k}.$$

Mithin ist

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{k+1}{n-k-p} \cdot \binom{n}{k+1} > \frac{k+1}{n-k-p} \cdot \binom{n-p}{k+1}$$

und daher

$$\frac{1}{p} \cdot \binom{n}{k+1} > \binom{n-p}{k+1}. \qquad \square$$

Mit Hilfe der vorangegangenen Sätze sind wir nun in der Lage zu zeigen, dass die Beziehung $m_p(G) < \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ nur dann vorliegt, wenn entweder die Primzahl p oder der Wert k im Vergleich zu n klein wird.

(6.5) Satz *Die Gruppe $G \leq \mathrm{Sym}(n)$ wirke auf der Menge $\Omega = \binom{n}{k}$ der k-elementigen Teilmengen von n (mit $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$).*
Ist $p \leq n$ ein ungerader Primteiler der Ordnung von G mit $p \geq n - 3k + 2$, so gilt

$$m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|.$$

Beweis: Aufgrund von Beobachtung (ii) nach Definition (2.1) genügt es, die Aussage unter der Annahme $G = \mathrm{Sym}(\Omega)$ zu beweisen.
Wenn $k = 1$ ist, erhalten wir die Behauptung wegen $p \geq n-1$ aus Satz (6.1). Ist hingegen $k \geq 2$, so unterscheiden wir die folgenden Fälle:

I. Fall $k \geq \frac{n}{3}$
Unter dieser Voraussetzung ergibt sich die Behauptung aufgrund der Gültigkeit der Abschätzung $k > \frac{n-1}{3} \geq \frac{1}{2} \cdot (n - \frac{1}{3}\sqrt{n^2 + 8n})$ aus der nach Satz (6.1) genannten Beobachtung.

II. Fall $k < \frac{n}{3}$
In diesem Fall können wir $n = 3k - 2 + l$ mit $3 \leq l \in \mathbb{N}$ setzen. Wegen Lemma (6.3) und der Ungleichung $p \geq l$, genügt es ferner, die Aussage unter der Annahme $p = l$ zu beweisen. Es ist also

$$\prod_{i=0}^{l-1}(3k-2+l-i) \geq l \cdot \left(\prod_{i=0}^{l-1}(2k-2+l-i) + \prod_{i=0}^{l-1}(k-i) \right)$$

zu zeigen. Diese Beziehung lässt sich jedoch leicht mittels Induktion (nach l) nachweisen (Die Voraussetzungen $k \geq 2$ und $l \geq 3$ stellen dabei sicher, dass die im Induktionsschritt auftretenden Brüche $\frac{(3k+l-1)\cdot l}{(l+1)\cdot(2k-1+l)}$ und $\frac{(3k+l-1)\cdot l}{(l+1)\cdot(k-l)}$ unechte Brüche sind). □

Obwohl die im vorangegangenen Satz genannte Schranke $p \geq n-3k+2$ nicht weiter reduziert werden kann (Gegenbeispiele liefert etwa die Wahl $k = 1,\ 2 < p = n-2$; weitere Ausnahmen treten in den Fällen $k = 2, p \in \{5, 7\}$ und $n = p+5$ auf), lässt sich zeigen, dass bei großen Werten von k Primzahlen p mit kleinem minimalen p-Grad wesentlich stärkeren Einschränkungen unterliegen.

(6.6) Korollar *Die Gruppe $G \leq \mathrm{Sym}(n)$ wirke auf der Menge $\Omega = \binom{n}{k}$ der k-elementigen Teilmengen von n (mit $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$). Ferner sei p ein Primteiler der Ordnung von G.*

(i) Ist $k \geq \frac{n-1}{3}$ und $p > 2$, so gilt $\quad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.

(ii) Ist $k \geq \frac{n}{4}$ und $p > 5$, so gilt $\quad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.

Beweis: Aussage (i) ergibt sich unmittelbar aus dem vorangegangenen Satz.
Um die Behauptung (ii) zu verifizieren, betrachten wir zunächst den Spezialfall ($G = \mathrm{Sym}(n)$, $p = 7$ und $k = \lceil \frac{n}{4} \rceil =: \frac{n+r}{4}$).
Ausgehend von der Ungleichung $4^7 > 7 \cdot (3^7 + 1)$ erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\frac{4^7}{7} > 3^7 + 1 > 3^7 + \frac{n^2 - 24n + 2rn - 24r + r^2}{n^2 - 6n} \cdot \prod_{i=1}^{5}(1 - \frac{3i - r}{n - i}) \\
= 3^7 + \prod_{i=0}^{6}(1 - \frac{3i - r}{n - i}) \\
> \prod_{i=0}^{6}(3 - \frac{i + r}{n - i}) + \prod_{i=0}^{6}(1 - \frac{3i - r}{n - i}) \\
= \prod_{i=0}^{6} \frac{3n - r - 4i}{n - i} + \prod_{i=0}^{6} \frac{n + r - 4i}{n - i}
\end{aligned}$$

und folglich auch

$$\prod_{i=0}^{6}(n-i) > \frac{7}{4^7}\cdot\left(\prod_{i=0}^{6}(3n-r-4i)+\prod_{i=0}^{6}(n+r-4i)\right)$$
$$= 7\cdot\left(\prod_{i=0}^{6}(n-\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-i)+\prod_{i=0}^{6}(\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil-i)\right).$$

Damit ist jedoch

$$\binom{n}{\lceil\frac{n}{4}\rceil} \geq 7\cdot\left(\binom{n-7}{\lceil\frac{n}{4}\rceil}+\binom{n-7}{\lceil\frac{n}{4}\rceil-7}\right),$$

was weiters $m_7(G) \geq \frac{6}{7}\cdot\binom{n}{\lceil\frac{n}{4}\rceil}$ impliziert.
Eine Anwendung der Sätze (6.3) und (6.4), sowie der Beobachtung nach Definition (2.1), liefert nun das Gewünschte. □

Wir wollen uns mit den bisher gewonnenen Ergebnissen über minimale p-Grade der Wirkung der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(n)$ auf der Menge der k-elementigen Teilmengen von n begnügen.

Stattdessen wenden wir uns der Klasse der Permutationsgruppen zu, welche von den Wirkungen der symmetrischen Gruppen auf den Mengen der Partitionen in Blöcke gleicher Länge induziert werden.

(6.7) Satz *Die Gruppe $G \leq \mathrm{Sym}(n)$ wirke auf der Menge Ω der Partitionen von n in d Blöcke der Länge c (mit $c > 1$ und $d > 1$). Ist p ein Primteiler der Ordnung von G, so gilt*

$$m_p(G) \geq \frac{p-1}{p}\cdot|\Omega|.$$

Beweis: Auch hier genügt wegen Beobachtung (ii) nach Definiton (2.1) die Betrachtung des Falles $G = \mathrm{Sym}(n)$. Da der Spezialfall $p = 2$ in [LS91, S.312] bewiesen wird, beschränken wir uns in unserer Argumentation ferner auf ungerade Primzahlen $p \leq n =: \Delta$.
Wir geben zunächst Abschätzungen für die Mächtigkeit der Fixpunktmenge Ω_g eines Elementes $g = g^\Delta = \prod_{i\in k} g_i = \prod_{i\in k}(a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{ip-1})$ von Primzahlordnung p an.
Sei $\Pi \in \Omega_g$ ein Fixpunkt von g in Ω. Bezeichnet B_j für jedes $j \in p$ den Block von Π, welcher a_{0j} enthält, so gilt entweder ${B_0}^g = B_0$ [also $B_0 = B_j \quad \forall j \in p$ und $p \leq c$] oder ${B_0}^g \cap B_0 = \emptyset$ [also ${B_j}^g \cap B_j = \emptyset \quad \forall j \in p$ und $p \leq d$].

Im ersten Fall (${B_0}^g = B_0$) ist die Anzahl der Partitionen mit ${a_{00}}^{\langle g\rangle} \subseteq B_0$ obere Schranke für die Anzahl f_1 der Fixpunkte von g, welche die Bahn ${a_{00}}^{\langle g\rangle}$ in einem Block vereinigen. Kombinatorische Überlegungen zeigen, dass die erstgenannte Zahl dem Wert

$$\frac{1}{(d-1)!} \cdot \binom{n-p}{c-p} \cdot \prod_{i=1}^{d-1} \binom{n-ic}{c}$$

entspricht.
Im zweiten Fall (${B_0}^g \cap B_0 = \emptyset$) gibt es wegen ${B_j}^g = B_{j+1} \quad \forall j \in p-1$ und ${B_{p-1}}^g = B_0$ höchstens $\frac{1}{d-p!} \cdot \prod_{i=p}^{d-1} \binom{n-ic}{c}$ Partitionen, welche bei gegebenem (nicht-invariantem) B_0 unter g festbleiben. Ferner existieren genau $\binom{n-p}{c-1}$ c-elementige Teilmengen B_0 von n, die mit der Bahn ${a_{00}}^{\langle g\rangle}$ lediglich die Ziffer a_{00} gemein haben. Damit finden sich jedoch maximal

$$\frac{1}{(d-p)!} \cdot \binom{n-p}{c-1} \cdot \prod_{i=p}^{d-1} \binom{n-ic}{c}$$

Fixpunkte von g, welche die Elemente der Bahn ${a_{00}}^{\langle g\rangle}$ auf p paarweise verschiedene Blöcke verteilen. Mit f_2 sei die Anzahl dieser Fixpunkte bezeichnet.
Auch die Menge Ω lässt sich dieser Unterteilung entsprechend zerlegen. Wir differenzieren dabei zwischen der Menge Ω_1 der Partitionen, welche die Ziffern a_{00} und a_{01} in einem Block enthalten und zwischen der Menge Ω_2 der Partitionen, bei welchen die Ziffern a_{00} und a_{01} in verschiedenen Blöcken liegen. Offenbar gilt

$$|\Omega_1| = \frac{1}{(d-1)!} \cdot \binom{n-2}{c-2} \cdot \prod_{i=1}^{d-1} \binom{n-ic}{c}$$
$$|\Omega_2| = \frac{1}{(d-2)!} \cdot \binom{n-2}{c-1} \cdot \binom{n-c-1}{c-1} \cdot \prod_{i=2}^{d-1} \binom{n-ic}{c}.$$

Im Falle $\big(3 \le p \le c$ und $(p,d) \ne (3,2)\big)$ ist nun

$$p \le d^{p-2} = (1+d-1)^{p-2} \le \prod_{i=0}^{p-3}(1 + \frac{c \cdot (d-1)}{c-2-i}) = \prod_{i=0}^{p-3} \frac{n-2-i}{c-2-i}$$

und damit auch

$$p \cdot \frac{(c-2)!}{(c-p)!} \le \frac{(n-2)!}{(n-p)!}.$$

Daraus ergeben sich jedoch ohne weiteres die Abschätzungen

$$\binom{n-p}{c-p} \le \frac{1}{p} \cdot \binom{n-2}{c-2}$$

und

$$f_1 = \frac{1}{(d-1)!} \cdot \binom{n-p}{c-p} \cdot \prod_{i=1}^{d-1} \binom{n-ic}{c} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(d-1)!} \cdot \binom{n-2}{c-2} \cdot \prod_{i=1}^{d-1} \binom{n-ic}{c} = \frac{|\Omega_1|}{p}.$$

Im Falle $\big(3 \leq p \leq d\big)$ gilt hingegen die Ungleichung $f_2 \leq \frac{|\Omega_2|}{p}$. Ausgehend von $(d-i)^{c-1} \geq 1 \quad \forall\, i \in p\,(\leq d)$ gewinnt man dabei zunächst

$$c! \cdot (d-i) \;\leq\; c! \cdot (d-i)^c \;=\; \prod_{j=0}^{c-1} ((d-i)(c-j)) \;\leq\; \prod_{j=0}^{c-1} ((d-i) \cdot c - j)$$

und

$$(d-i) \;\leq\; \binom{n-ic}{c}.$$

Aufgrund der Abschätzung

$$\frac{(d-2)!}{(d-p)!} \;=\; \prod_{i=2}^{p-1} (d-i) \;\leq\; \prod_{i=2}^{p-1} \binom{n-ic}{c}$$

und der Beziehung $p \leq d \leq 2d-3 \leq c \cdot (d-2) + 1 = n - 2c + 1 \leq \binom{n-c-1}{c-1}$ folgt

$$p \cdot \frac{(d-2)!}{(d-p)!} \;\leq\; \binom{n-c-1}{c-1} \cdot \prod_{i=2}^{p-1} \binom{n-ic}{c}.$$

Wegen $\binom{n-p}{c-1} < \binom{n-2}{c-1}$ impliziert dies wiederum

$$p \cdot \frac{(d-2)!}{(d-p)!} \cdot \binom{n-p}{c-1} \;\leq\; \binom{n-2}{c-1} \cdot \binom{n-c-1}{c-1} \cdot \prod_{i=2}^{p-1} \binom{n-ic}{c}.$$

Damit erhalten wir jedoch auch

$$\frac{1}{(d-p)!} \cdot \binom{n-p}{c-1} \cdot \prod_{i=p}^{d-1} \binom{n-ic}{c} \;\leq\; \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(d-2)!} \cdot \binom{n-2}{c-1} \cdot \binom{n-c-1}{c-1} \cdot \prod_{i=2}^{d-1} \binom{n-ic}{c}$$

was gleichbedeutend mit $f_2 \leq \frac{|\Omega_2|}{p}$ ist.

Die vorangegangenen Berechnungen beweisen nun die Gültigkeit der Abschätzung $|\Omega_g| \leq f_1 + f_2 \leq \frac{|\Omega_1|+|\Omega_2|}{p} = \frac{|\Omega|}{p}$, so dass unter den gegebenen Voraussetzungen die im Satz genannte Behauptung folgt.
Im verbleibenden Fall $(p,d) = (3,2)$ lässt sich die Aussage des Satzes aus der leicht zu verifizierenden Ungleichung $|\Omega_g| \leq f_1 \leq \frac{|\Omega|}{p}$ erschließen. $\square$

6.2 Minimale p-Grade primitiver Permutationsgruppen mit alternierendem Sockel

Unter Verwendung der vorangegangenen Sätze wollen wir nun zeigen, dass primitive Permutationsgruppen mit alternierendem Sockel nur dann kleine minimale p-Grade annehmen, wenn sie von dem in Satz (6.1) genannten Typus sind.

(6.8) Satz *Es sei* $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ *eine primitive Permutationsgruppe mit alternierendem Sockel* $\mathrm{soc}(G) = \mathrm{Alt}(n)$. *Ist p ein Primteiler der Ordnung von G, so liegt einer der folgenden Fälle vor:*

1. *Es gilt* $\quad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.
2. *G wirkt auf der Menge $\Omega = \binom{n}{k}$ der k-elementigen Teilmengen von n (mit $1 \leq k < \frac{1}{2} \cdot (n - \sqrt{n})$) und es ist $p = 2$ oder $p < n - 3k + 2$.*

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Dabei nehmen wir an die Gruppe G lieferte ein Gegenbeispiel *kleinstmöglicher* Ordnung.
Wegen $A_6 \cong L_2(9) \cong O_5(2)'$, $\mathrm{Aut}(A_6) \cong \mathrm{P\Gamma L}_2(9)$ und Theorem (4.19) können wir ferner $n \neq 6$ annehmen, so dass G in natürlicher Weise auf der Menge $\Delta := n$ wirkt. Für den Punktstabilisator G_α ($\alpha \in \Omega$) ergeben sich nun die folgenden Möglichkeiten:

I. Fall: G_α wirkt intransitiv auf Δ
Unter dieser Voraussetzung gewinnt man aus der Maximalität von G_α in G die Eigenschaft $G_\alpha = \mathrm{Sym}(k) \times \mathrm{Sym}(n-k) \cap G$ für ein geeignetes $k \in n$. Daher lässt sich Ω mit der Menge der k-elementigen Teilmengen von n identifizieren. Für $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ liegt also die zu Beginn dieses Unterabschnittes beschriebene Situation vor. Falls nun die in 2. genannten Bedingungen nicht erfüllt sind, erhält man aufgrund von Lemma (6.3), Satz (6.5) sowie der nach (6.1) genannten Beobachtung die in 1. aufgeführte Abschätzung. Dies widerspricht der Annahme die Gruppe G bildete ein Gegenbeispiel zu der im vorliegenden Satz formulierten Behauptung.

II. Fall: G_α wirkt transitiv, aber imprimitiv auf Δ
Ist $\Pi = \{B^g \,|\, g \in G\} = \{B_i \,|\, i \in d\}$ ein nicht-triviales Blocksystem von G_α in Δ mit d Blöcken der Länge c, so sind die Gruppenräume (Δ, G_α) und $(\Pi \times B, {G_B}^B \wr G^\Pi)$ isomorph. Wegen der Maximalität von G_α in G entspricht der Punktstabilisator dem Kranzprodukt $G_\alpha = \mathrm{Sym}(c) \wr \mathrm{Sym}(d) \cap G$.

Die Gruppe $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ operiert damit auf der Menge Ω der Partitionen von n in d Blöcke der Länge c. Da Satz (6.7) die Gültigkeit der unter 1. genannten Ungleichung sichert, kann also auch in diesem Fall die Gruppe G kein Gegenbeispiel zum Satz hervorbringen.

III. Fall: G_α wirkt primitiv auf Δ
Da G als Gegenbeispiel angenommen wird, gilt insbesondere $|G_\alpha \cap g^G| \underset{(2.4)}{>} \frac{|g^G|}{p}$ falls g ein p-Element in G kleinstmöglichen Grades bezeichnet.

Sämtliche Elemente, welche sich bezüglich Δ als Produkt von l paarweise disjunkten p-Zyklen schreiben lassen, zerfallen in $G \in \{\mathrm{Alt}(n), \mathrm{Sym}(n)\}$ in höchstens 2 verschiedene Konjugiertenklassen. Also ist

$$|g^G| \geq \frac{n!}{2 \cdot p^l \cdot l! \cdot (n - lp)!}$$

für $g \in G$ mit $o(g) = p$ und $|{}^g\Delta| = lp$. Obige Ungleichung liefert nun

$$|G_\alpha| > |G_\alpha \cap g^G| > \frac{|g^G|}{p} \geq \frac{n!}{2 \cdot p^{l+1} \cdot l! \cdot (n - lp)!} \qquad (*).$$

Mit Hilfe der folgenden Fallunterscheidung führen wir diese Aussage zu einem Widerspruch

(a) Fall: $m_p(G_\alpha^\Delta) < \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Delta|$
Aufgrund der Sätze und Theoreme (4.21), (5.1), (5.9) und (7.1) ist G_α^Δ unter dieser Voraussetzung Blow-up einer primitiven Permutationsgruppe $B \leq \mathrm{Sym}(\Phi)$ mit alternierendem Sockel $\mathrm{Alt}(c)$ $\quad (c \leq n)$ und $m_p(B^\Phi) < \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Phi|$. Wir erhalten insbesondere $G_\alpha^\Delta \leq \mathrm{Sym}(c) \wr \mathrm{Sym}(r)$ und $n = |\Delta| = |\Phi|^r$ für ein geeignetes $r \in \mathbb{N}$.
Da G als Gegenbeispiel kleinstmöglicher Ordnung angenommen wurde, erfüllt B die Gegebenheiten des Satzes, wirkt also auf der Menge Φ der d-elementigen Teilmengen (mit $1 \leq d \leq \frac{1}{2} \cdot (c - \sqrt{c})$) von c. Es kann somit $|\Phi| = \binom{c}{d}$ gesetzt werden.
Wie ein Blick in [LPS87] zeigt, muss wegen $G_\alpha <\cdot\, G$ andererseits entweder ($r > 1$ und $n = c^r$) oder ($r = 1$ und $n = c + d$) gelten.
Eine Kombination dieser beiden Argumente führt nun zu den Bedingungen $(\binom{c}{d}^r = n = c^r$ und $r > 1)$ oder $(\binom{c}{d} = n = c + d$ und $r = 1)$. Letztgenannter Fall tritt allerdings nicht auf, denn es ist $\binom{c}{d} \neq c + d$ für alle $1 \leq d < \frac{1}{2}(c - \sqrt{c})$.

Es genügt daher das Kranzprodukt $G_\alpha = \mathrm{Sym}(c) \wr \mathrm{Sym}(r) \cap G$ in der Produktwirkung vom Grad $n = c^r$ mit $c > 1$ und $r > 1$ zu betrachten. Satz (3.7) und die Annahme $m_p(G_\alpha^\Delta) < \frac{p+1}{p-1} \cdot |\Delta|$ implizieren ferner $m_p(G_\alpha^\Delta) = p \cdot c^{r-1}$ mit $p \leq c-2$.
Verwendung dieses Wertes in der Abschätzung $(*)$ ergibt nun die Ungleichung

$$r! \cdot (c!)^r > \frac{(c^r)!}{2 \cdot p^{c^{r-1}+1} \cdot (c^{r-1})! \cdot ((c-p)c^{r-1})!}.$$

Wegen $k^{k-1} \geq k!$ für alle $k \geq 2$ folgt

$$r^{r-1} \cdot c^{rc^{r-1}+rc-2r+3} > ((c-p)c^{r-1})^{pc^{r-1}}.$$

Ein Ausnutzen der Eigenschaft $c - p \geq 2$ liefert

$$r^{r-1} > 2^{pc^{r-1}} \cdot c^{prc^{r-1}-pc^{r-1}-rc^{r-1}-rc+2r-3}.$$

Falls ($r > 2$ oder $p > 3$) gilt, ist der Exponent zur Basis c nicht negativ und damit

$$r^{r-1} > 2^{pc^{r-1}} \geq 2^{2^r}.$$

Diese Beziehung steht jedoch im Widerspruch zu der mittels Induktion leicht beweisbaren Tatsache $r^{r-1} \leq 2^{2^r}$.
Die verbleibenden Fälle ($r = 2$, $p \in \{2, 3\}$) können mit Hilfe ähnlicher Umformungen ausgeschlossen werden.

(b) Fall: $m_p(G_\alpha^\Delta) \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Delta|$
Wie im Anhang nachgewiesen wird, gewinnt man in dieser Situation die Ungleichung

$$\frac{n!}{2 \cdot p^{l+1} \cdot l! \cdot n - lp!} \geq \frac{n!}{2 \cdot p^{\lceil \frac{1}{p} \cdot \lceil \frac{p-1}{p+1} \cdot n \rceil \rceil + 1} \cdot \lceil \frac{1}{p} \lceil \frac{p-1}{p+1} \cdot n \rceil \rceil ! \cdot \lfloor \frac{2n}{p+1} \rfloor !}$$
$$\geq \frac{n!}{2^{\lceil \frac{n}{6} \rceil + 2} \cdot \lceil \frac{n}{6} \rceil ! \cdot \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor !}$$

Eine Anwendung der Abschätzung $(*)$ führt daher zu

$$|G_\alpha| > \frac{n!}{2^{\lceil \frac{n}{6} \rceil + 2} \cdot \lceil \frac{n}{6} \rceil ! \cdot \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor !} \qquad (**).$$

Da gemäß [PS80] andererseits $|G_\alpha| < 4^n$ ist, folgt (nach einer Benutzung der Stirlingschen Formel) $n < 780$.

Damit entspricht G_α^Δ einer der in [DM88] angegebenen Gruppen. Eine Inspektion dieser Liste primitiver Permutationsgruppen zeigt, dass für $n > 12$ lediglich die in Tabelle 2.1 genannten Gruppen die Bedingung $(**)$ erfüllen. Die dort aufgeführten Primzahlen p sind wegen $(*)$ und obiger Ungleichung die einzigen potentiellen Lieferanten von minimalen p-Graden, welche der Aussage des Satzes widersprechen.

n	$\mathrm{soc}(G_\alpha)$	p	$m_2(G_\alpha^\Delta)$	$m_3(G_\alpha^\Delta)$
13	$L_3(3)$	2, 3	8	9
14	$L_2(13)$	2	12	
15	$\mathrm{Alt}(7)$	2	12	
15	$L_4(2) \cong \mathrm{Alt}(8)$	2	8	
16	$\mathrm{AGL}_4(2)$	2	8	
24	M_{24}	2	16	

Tabelle 6.1: Gruppen, welche $(**)$ erfüllen

Aufgrund der 2-Transitivität der in Frage kommenden Permutationsgruppen erhält man nun aus [Höc99] die minimalen p-Grade $m_p(G_\alpha^\Delta)$. Ein Einsetzen dieser Werte in den Quotient $\frac{n!}{2\cdot p^{l+1}\cdot l!\cdot(n-lp)!}$ führt zu der Feststellung, dass die Ungleichung $(*)$ nicht gültig ist, und somit die Gruppe G kein Gegenbeispiel zum Satz darstellen kann.
Der gleiche Widerspruch ergibt sich auch im Falle $n \leq 12$. Anstelle des oben genannten Bruches muss dabei jedoch in den Rechnungen der exakte Wert $|g^G|$ (für ein $g \in G$ mit $o(g) = p$ und $|{}^g\Delta| = m_p(G_\alpha^\Delta)$) verwendet werden. $\square$

Kapitel 7

Minimale p-Grade primitiver Permutationsgruppen

In diesem Kapitel fassen wir die in den vorangegangenen Kapiteln gewonnenen Ergebnisse über minimale p-Grade zusammen. Dabei beschränken wir uns auf Aussagen über minimale p-Grade primitiver Permutationsgruppen. Unter Verwendung des mit Hilfe der Schreierschen Vermutung bewiesenen O'Nan-Scott-Theorems sind wir zunächst in der Lage das folgende Theorem zu beweisen:

(7.1) Theorem *Ist $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine primitive Permutationsgruppe und p ein Primteiler der Ordnung von G, so liegt einer der folgenden Fälle vor:*

1. *Es gilt* $\quad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.
2. *G ist eine nicht-abelsche fasteinfache Gruppe.*
3. *G ist ein Blow-up einer nicht-abelschen fasteinfachen primitiven Permutationsgruppe $B \leq \mathrm{Sym}(\Delta)$ mit minimalem p-Grad $m_p(B) < \frac{p-1}{p} \cdot |\Delta|$.*

Beweis: Nach dem O'Nan-Scott-Theorem lässt sich jede primitive Permutationsgruppe einer der folgenden Klassen von Permutationsgruppen unterordnen (Wir beschreiben die auftretenden Typen nicht genauer als für die folgende Beweisführung nötig; nähere Details finden sich in [LPS88]):

(a) Affine Gruppen

(b) Fasteinfache nicht-abelsche Gruppen

(c) Gruppen vom Diagonaltyp

(d) Blow-ups primitiver Permutationsgruppen des Typs (b) oder (c)

(e) In der kanonischen Wirkung operierende getwistete Kranzprodukte mit nicht-abelsch einfacher Basisgruppe.

Die Behauptung ergibt sich nun aus der sich anschließenden Typenbetrachtung:

(a) Affine Gruppen: Hier liegt gemäß Korollar (3.2) stets der Unterfall 1. vor.

(b) Fasteinfache Gruppen: Diesen Gruppen wird mit Unterfall 2. Rechnung getragen.

(c) Gruppen vom Diagonaltyp: Nach Korollar (3.6) erfüllt diese Klasse transitiver Permutationsgruppen die in Unterfall 1. genannte Abschätzung.

(d) Blow-ups primitiver Permutationsgruppen: Ist der Wert $\frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$ keine untere Schranke des minimalen p-Grades eines gegebenen Blow-ups G, so gilt gemäß Korollar (3.8) Gleiches für die zugehörige Basisgruppe B. Da eine Gruppe vom Diagonaltyp stets die unter 1. genannte Eigenschaft besitzt, muss die Basisgruppe B darüber hinaus nicht-abelsch und fasteinfach sein. Es liegt damit der Unterfall 3. vor.

(e) Getwistete Kranzprodukte mit nicht-abelsch einfacher Basisgruppe: Auch in diesem Fall ist stets Unterfall 1. gegeben. Verwendet man die auf Seite 15 eingeführte Notation, so ergibt sich dies im Falle $p \nmid |A_\Lambda : A_{B^\Lambda}|$ sofort aus Korollar (3.12); ist p hingegen ein Primteiler von $|A_\Lambda : A_{B^\Lambda}|$, so ist zusätzlich Hilfssatz (3.5) heranzuziehen. □

Aufgrund des vorangegangenen Theorems kann man bei der Suche nach primitiven Permutationsgruppen mit kleinen minimalen p-Graden seine ganze Aufmerksamkeit den fasteinfachen Gruppen zuwenden (bei den verschiedenen auftretenden Ausnahmegruppen sind dann lediglich noch Blow-ups dieser Gruppen hinzuzufügen).
Die in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse zeigen, dass auch diese Gruppen zumeist die in Theorem (7.1) unter 1. genannte Abschätzung erfüllen; primitive Permutationsgruppen mit kleinem minimalen p-Grad also starken Restriktionen unterliegen.

(7.2) Theorem *Sei $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine primitive Permutationsgruppe und p ein Primteiler der Ordnung von G. Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:*

1. *Es gilt* $\quad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p} \cdot |\Omega|$.
2. *Die Gruppe G entspricht einem Blow-up einer Gruppe $B \leq \mathrm{Sym}(\Delta)$ mit einer der folgenden Eigenschaften:*
   (a) *Der Sockel $\mathrm{soc}(B)$ von B ist isomorph zu einer alternierenden Gruppe $\mathrm{Alt}(n)$ und die Menge Δ stimmt mit der Menge $\binom{n}{k}$ der k-elementigen Teilmengen (mit $1 \leq k < \frac{1}{2}(n - \sqrt{n})$) von n überein. Für $p = 2$ oder $p < n - 3k + 2$ gilt dabei, falls $p \leq k$ ist, $m_p(B) = \binom{n}{k} - \binom{n-p}{k} - \binom{n-p}{k-p}$, andernfalls, $m_p(B) = \binom{n}{k} - \binom{n-p}{k}$.*
   (b) *Die Gruppe B ist eine klassische Gruppe über dem Primkörper $\mathbb{F}_r$. Weiter gilt $p = r > 2$ und $m_p(B) \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Delta|$.*
   (c) *Der Sockel $\mathrm{soc}(B)$ von B entspricht der projektiven speziellen linearen Gruppe $L_2(2^f)$. Die Gruppe B wirkt auf der Menge Δ der 1-Räume von $V(2, 2^f)$ und $p = 2^f - 1$ ist eine Mersennesche Primzahl mit minimalem p-Grad $m_p(G) = p = |\Delta| - 2 \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Delta|$.*
   (d) *Der Sockel $\mathrm{soc}(B)$ von B kann mit der orthogonalen Gruppe $O_n^{\varepsilon}(2)$ mit $4 \leq n$ identifiziert werden. Die Gruppe B operiert auf der kürzesten Bahn von 1-Räumen des Vektorraumes $O^{\varepsilon}(n, 2)$ und für $p = 2$ gilt die Abschätzung $m_p(B) \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Delta|$.*
   (e) *Es ist $(\Delta, \mathrm{soc}(B)) \cong (u_1^-(O(7,2)), O_7(2)) \cong (S_6(2) : O_6^-(2), S_6(2))$ und für $p = 3$ gilt $m_p(B) = \lfloor \frac{p-1}{p} \cdot |\Delta| \rfloor \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Delta|$.*

Beweis: Nach Theorem (7.1) genügt es primitive Permutationsgruppen G mit nicht-abelsch einfachem Sockel zu betrachten. Da gemäß der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen der Sockel $\mathrm{soc}(G)$ dann eine alternierende Gruppe, eine Lie-Gruppe oder eine sporadisch einfache Gruppe bildet, ergibt sich die Behauptung des Theorems nach Berücksichtigung von Satz (6.8), Theorem (4.20), den Sätzen (5.1) und (5.9) und Beachtung der verschiedenen Isomorphien zwischen einfachen Gruppen. □

Bemerkung: Theorem (7.2) besagt insbesondere, dass Permutationsgruppen mit „kleinem" minimalen p-Grad $m_p(G)$ existieren, in denen $m_p(G)$ nicht mit dem Minimalgrad $m(G)$ der Permutationsgruppe übereinstimmt.

(7.3) Korollar *Sei $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ eine primitive Permutationsgruppe und p ein Primteiler der Ordnung von G. Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:*

1. *Es gilt* $\quad m_p(G) \geq \frac{p-1}{p+1} \cdot |\Omega|.$
2. *G ist Blow-up einer Gruppe $B \leq \mathrm{Alt}(\Delta)$ mit alternierendem Sockel $\mathrm{soc}(B) = \mathrm{Alt}(n)$ und die Menge Δ stimmt mit der Menge $\binom{n}{k}$ (mit $1 \leq k < \frac{1}{2}(n - \sqrt{n})$) der k-elementigen Teilmengen von n überein. Für $p = 2$ oder $p < n - 3k + 2$ gilt dabei, falls $p \leq k$ ist, $m_p(B) = \binom{n}{k} - \binom{n-p}{k} - \binom{n-p}{k-p}$, andernfalls gilt für den minimalen p-Grad $m_p(B) = \binom{n}{k} - \binom{n-p}{k}$.*

Beweis: Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus Theorem (7.2). $\square$

Anhang

Im Beweis von Satz (6.8) haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{n!}{2\cdot p^{l+1}\cdot(n-lp)!\cdot l!} &\geq \frac{n!}{2\cdot p^{\lceil\frac{1}{p}\lceil\frac{p-1}{p+1}n\rceil\rceil+1}\cdot\lfloor\frac{2n}{p+1}\rfloor!\cdot\lceil\frac{1}{p}\lceil\frac{p-1}{p+1}n\rceil\rceil!}\\ &\geq \frac{n!}{2^{\lceil\frac{n}{6}\rceil+2}\cdot\lceil\frac{n}{6}\rceil!\cdot\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor!}\end{aligned}$$

verwendet. Ihre Gültigkeit soll auf den nächsten Seiten nachgewiesen werden.
Wir beginnen unser Vorhaben mit

Hilfssatz 1 *Seien n, l und p natürliche Zahlen mit $n \geq lp \geq 2$. Wir setzen $x := l - \lceil\frac{1}{p}\lceil\frac{p-1}{p+1}n\rceil\rceil = l - \frac{(p-1)n+(p+1)\varepsilon_{p-1}+\varepsilon_p}{p(p+1)}$ mit $\varepsilon_{p-1} = -\lceil\frac{p-1}{p+1}n\rceil \pmod p$. Dann gilt*

(i) Im Falle $n \geq p+2$ erhalten wir $n - lp + (p-1)x + \varepsilon_{p-1} \geq l - x$.

(ii) Unter der Bedingung $\neg\big(p \in \{2,3\}, x \leq 7-2p, n = lp$ und $\varepsilon_{p-1} = 0\big)$ ist

$$\prod_{i=1}^{(p-1)x+\varepsilon_{p-1}} (n - lp + i) \geq p^x.$$

Beweis: Wegen $n \geq p+2$ ergibt sich

$$n - l + n - lp \geq n - \frac{n}{p} + n - lp \geq \frac{p-1}{p}n \geq p \geq \varepsilon_p.$$

Daraus folgt $2n - \varepsilon_p \geq (p+1)l$ und $n - lp + lp - \frac{p-1}{p+1}n - \frac{\varepsilon_p}{p+1} - \varepsilon_{p-1} + \varepsilon_{p-1} \geq l$.
Es muss also $n - lp + px + \varepsilon_{p-1} \geq l$ und damit die Behauptung von Unterpunkt (i) erfllt sein.
Die zweite Aussage des vorliegenden Hilfssatzes kann leicht mittels Induktion (nach x) nachgewiesen werden. □

Unter Verwendung des vorangegangenen Hilfssatzes wollen wir nun das folgende Lemma beweisen.

Lemma 2 *Seien n, l und p natürliche Zahlen mit $n \geq lp > 4$. Ferner seien die Bedingungen $n \geq \lceil \frac{p-1}{p+1} \cdot n \rceil$ und $\lfloor \frac{2}{p+1} \cdot n \rfloor \geq n - lp$ erfüllt. Dann gilt*

$$p^{\lceil \frac{1}{p} \lceil \frac{p-1}{p+1} n \rceil \rceil + 1} \cdot \left\lfloor \frac{2n}{p+1} \right\rfloor ! \cdot \left\lceil \frac{1}{p} \left\lceil \frac{p-1}{p+1} n \right\rceil \right\rceil ! \geq p^{l+1} \cdot (n - lp)! \cdot l!$$

Beweis: Im Falle $(p \leq)\, n \leq p+1$ ersetzen wir die Zahl n durch den Wert p bzw. $p+1$. Die Ziffer l entspricht dann dem Wert $l = 1$. Ein Vergleich der sich daraus ergebenden Produkte liefert nun die Behauptung.
Es bleibt also der Fall $n > p+1$ zu betrachten. Nach Hilfssatz 1 gilt unter dieser Voraussetzung $n - lp + (p-1)x + \varepsilon_{p-1} + i \quad \geq \quad l - x + i$ (wobei x wie in Hilfssatz 1 definiert ist) und folglich auch

$$\prod_{i=1}^{x} (n - lp + (p-1)x + \varepsilon_{p-1} + i) \quad \geq \quad \prod_{i=1}^{x} (l - x + i).$$

Falls darüber hinaus die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 Unterpunkt (ii) erfüllt sind, ist

$$\prod_{i=1}^{(p-1)x+\varepsilon_{p-1}} (n - lp + i) \quad \geq \quad p^x.$$

Eine Multiplikation der beiden Ungleichungen liefert daher die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{x} (n - lp + (p-1)x + \varepsilon_{p-1} + i) \cdot \prod_{i=1}^{(p-1)x+\varepsilon_{p-1}} (n - lp + i) \quad &\geq \quad p^x \cdot \prod_{i=1}^{x} (l - x + i) \\
\prod_{i=1}^{px+\varepsilon_{p-1}} (n - lp + i) \quad &\geq \quad p^x \cdot \prod_{i=1}^{x} (l - x + i) \\
\frac{(n - lp + px + \varepsilon_{p-1})!}{(n - lp)!} \quad &\geq \quad \frac{l!}{(l-x)!} \cdot \frac{p^{l+1}}{p^{l-x+1}}.
\end{aligned}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt nun

$$p^{l-x+1} \cdot (l-x)! \cdot (n - lp + px + \varepsilon_{p-1})! \geq p^{l+1} \cdot (n - lp)! \cdot l!$$

was der Behauptung entspricht.
Die Annahme $\big(p \in \{2, 3\},\ x \leq 7 - 2p,\ n = lp$ und $\varepsilon_{p-1} = 0\big)$ liefert schließlich vier Sonderfälle, welche einzeln verifiziert werden können. $\square$

Zum Beweis des zweiten Teils der den Anhang einleitenden Aussage benötigen wir einen weiteren Hilfssatz.

Hilfssatz 3 *Ist $p \geq 7$ eine Primzahl, so gilt*

$$2^{\lceil \frac{p}{6} \rceil + 1} \cdot \left\lfloor \frac{2p}{3} \right\rfloor ! \cdot \left\lceil \frac{p}{6} \right\rceil ! \geq 2 \cdot p^2.$$

Beweis: Mittels Inspektion überprüft man leicht die Gültigkeit der Aussage unter der Wahl $p = 7$. Wir führen nun eine Art „Induktionsbeweis“, indem wir zeigen, dass die Behauptung bei Übergang vom Wert p zum Wert $p+2$ korrekt bleibt. Gelte also $2^{\lceil \frac{p}{6} \rceil + 1} \cdot \lfloor \frac{2p}{3} \rfloor ! \cdot \lceil \frac{p}{6} \rceil ! \geq 2 \cdot p^2$; dann folgt $2^{\lceil \frac{p+2}{6} \rceil + 1} \cdot \lfloor \frac{2(p+2)}{3} \rfloor ! \cdot \lceil \frac{p+2}{6} \rceil ! \geq \lfloor \frac{2p+4}{3} \rfloor \cdot 2^{\lceil \frac{p}{6} \rceil + 1} \cdot \lfloor \frac{2p}{3} \rfloor ! \cdot \lceil \frac{p}{6} \rceil ! \geq \lfloor \frac{2p+4}{3} \rfloor \cdot 2 \cdot p^2 \geq 12 \cdot p^2 \geq 2p^2 + 8p + 8 = 2 \cdot (p+2)^2$. □

Damit ergibt sich

Satz 4 *Sei $5 < n$ eine natürliche Zahl und $p \leq n$ eine Primzahl. Dann gilt*

$$2^{\lceil \frac{n}{6} \rceil + 1} \cdot \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor ! \cdot \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil ! \geq p^{\lceil \frac{1}{p} \lceil \frac{p-1}{p+1} n \rceil \rceil + 1} \cdot \left\lfloor \frac{2n}{p+1} \right\rfloor ! \cdot \left\lceil \frac{1}{p} \left\lceil \frac{p-1}{p+1} n \right\rceil \right\rceil !$$

Beweis: Wir führen die folgende Fallunterscheidung durch:

I. Fall: $p > n - 3$ (und $p \geq 11$)
In dieser Situation können wir Hilfssatz 3 anwenden. Es ist nämlich $n = p + k$ für ein $k \leq 2$ und daher

$$\begin{aligned}
2^{\lceil \frac{n}{6} \rceil + 1} \cdot \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor ! \cdot \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil ! &= 2^{\lceil \frac{p+k}{6} \rceil + 1} \cdot \left\lfloor \frac{2(p+k)}{3} \right\rfloor ! \cdot \left\lceil \frac{p+k}{6} \right\rceil ! \\
&\geq 2^{\lceil \frac{p}{6} \rceil + 1} \cdot \left\lfloor \frac{2p}{3} \right\rfloor ! \cdot \left\lceil \frac{p}{6} \right\rceil ! \geq 2 \cdot p^2 \\
&\geq \left\lfloor 2 + \frac{2(k-1)}{p+1} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{1}{p} \left\lceil \frac{p-1}{p+1}(p+k) \right\rceil \right\rceil \cdot p^2. \\
&\geq \left\lfloor \frac{2(p+k)}{p+1} \right\rfloor ! \cdot \left\lceil \frac{1}{p} \left\lceil \frac{p-1}{p+1}(p+k) \right\rceil \right\rceil ! \cdot p^{\lceil \frac{1}{p} \lceil \frac{p-1}{p+1}(p+k) \rceil \rceil + 1}
\end{aligned}$$

II. Fall: $n - 3 \geq p \geq 11$
Ein Induktionsbeweis zeigt, dass in diesem Falle die Beziehung $2^{\frac{p}{3}} \geq p$ besteht.

Wegen $n \geq p+3$ ergibt sich also

$$
\begin{aligned}
2^{\frac{p}{3}+\frac{(2p^2+p+3)n-(2p^2+6p-4)p}{(3p-3)n+6p(p+1)}} &\geq p \qquad (*)\\
2^{\frac{(3n-4)p^2-4p+3n}{3(p-1)n+6p(p+1)}} &\geq p\\
2^{\frac{(3n-4)(p+1)p}{3(p-1)n+6p(p+1)}-\frac{(p-1)n}{(p-1)n+2p(p+1)}} &\geq p\\
2^{\frac{3n-4}{3}-\frac{1}{p}\cdot\frac{p-1}{p+1}\cdot n} &\geq p^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p-1}{p+1}\cdot n+2}\\
2^{\frac{n}{3}+\frac{2n-2}{3}+1-\frac{2}{3}-\frac{1}{p}\cdot\frac{p-1}{p+1}\cdot n-1} &\geq p^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p-1}{p+1}\cdot n+2}\\
2^{2\cdot\lceil\frac{n}{6}\rceil+\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor+1-\lfloor\frac{2}{p+1}\rfloor+\lceil\frac{1}{p}\lceil\frac{p-1}{p+1}n\rceil\rceil} &\geq p^{\lceil\frac{1}{p}\lceil\frac{p-1}{p+1}n\rceil\rceil+1}\\
2^{\lceil\frac{n}{6}\rceil+1}\cdot\prod_{i=1}^{\lceil\frac{n}{6}\rceil-\lceil\frac{1}{p}\lceil\frac{p-1}{p+1}n\rceil\rceil}\left(\left\lceil\frac{1}{p}\left\lceil\frac{p-1}{p+1}n\right\rceil\right\rceil+i\right)\cdot\prod_{i=1}^{\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor-\lfloor\frac{2n}{p+1}\rfloor}\left(\left\lfloor\frac{2n}{p+1}\right\rfloor+i\right) &\geq p^{\lceil\frac{1}{p}\lceil\frac{p-1}{p+1}n\rceil\rceil+1}\\
2^{\lceil\frac{n}{6}\rceil+1}\cdot\frac{\lceil\frac{n}{6}\rceil!}{\lceil\frac{1}{p}\lceil\frac{p-1}{p+1}n\rceil\rceil!}\cdot\frac{\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor!}{\lfloor\frac{2n}{p+1}\rfloor!} &\geq p^{\lceil\frac{1}{p}\lceil\frac{p-1}{p+1}n\rceil\rceil+1}
\end{aligned}
$$

III. Fall: $11 > p \geq 3$
Ist $n \geq 12$ so erfüllen die in Frage kommenden Primzahlen die Ungleichung $(*)$. Die Behauptung ergibt sich dann nach gleicher Argumentation wie oben. In den verbleibenden Fällen bestätigt eine Inspektion die Aussage.

IV. Fall: $p = 2$
Hier liegt offenbar Gleichheit vor. □

Bemerkung: In den Fällen $(p,n) \in \{(3,3),(3,4),(5,5)\}$ ist die obige Ungleichung nicht erfüllt.

Literaturverzeichnis

[Asc86] M. Aschbacher, *Finite group theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[ATLAS] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *ATLAS of finite groups*, Oxford, 1985.

[Ben68] H. Bender, *Endliche zweifach transitive Permutationsgruppen, deren Involutionen keine Fixpunkte haben*, Math. Z. 104 (1968), S. 175-204.

[Boc92] A. Bochert, *Über die Klasse der transitiven Substitutionsgruppen*, Math. Ann. 40 (1892), S. 176-193.

[Boc97] A. Bochert, *Über die Klasse der transitiven Substitutionsgruppen II*, Math. Ann. 49 (1897), S. 133-144.

[Cam81] P. J. Cameron, *Finite permutation groups and finite simple groups*, Bull. London Math. Soc. 13 (1981), S. 1-22.

[CR74] B. Chang, R. Ree, *The characters of* $G_2(q)$, Symposia Mathematica XIII (1974), S. 395-413.

[Coo78] B. N. Cooperstein, *Minimal degree for a permutation representation of a classical group*, Israel J. Math. 30 (1978), S. 213-235.

[Dem68] P. Dembowski, *Finite geometries*, Springer Verlag, Heidelberg, 1968.

[Der83] D. I. Deriziotis, *The Centralizers of semisimple elements of the Chevalley groups E_7 and E_8*, Tokyo J. Math. 6 (1983) No. 1, S. 191-216.

[Dic01] L. E. Dickson, *Linear groups, with an exposition of the galois field theory*, Teubner, Leipzig, 1901.

[DL85] D. I. Deriziotis, M. W. Liebeck, *Centralizers of semisimple elementes in finite twisted groups of Lie type*, J. London Math. Soc. (2) 31 (1985), S. 48-54.

[DM88] J. D. Dixon, B. Mortimer, *The primitive permutation groups of degree less than* 1000, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 103 (1988), S. 213-238.

[Dor71] L. Dornhoff, *Group representation theory (Part A)*, New York, 1971.

[Enn63] V. Ennola, *On the characters of the finite unitary groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. 323 (1963), S. 120-155.

[Eno72] H. Enomoto, *The characters of the finite symplectic group* $\mathrm{Sp}(4,q)$*,* $q = 2^f$, Osaka J. Math. 9 (1972), S. 75-94.

[Eno76] H. Enomoto, *The characters of the finite Chevalley group* $G_2(q)$*,* $q = 3^f$, Japan J. Math. 2 (1976) No. 2, S. 191-248.

[EY86] H. Enomoto, H. Yamada, *The characters of* $G_2(2^n)$, Japan J. Math. 12 (1986) No. 2, S. 325-377.

[FM95] D. Frohardt, K. Magaard, *Maximal fixed point ratios in exceptional groups of Lie type*, erhältlich unter http://www.math.wayne.edu/~kaym/research/

[GL83] D. Gorenstein, R. Lyons, *The local structure of finite groups of characteristic 2 type*, Memoirs American Math. Soc. 42 (1983)

[GM95] D. Gluck, K. Magaard, *Character and fixed point ratios in finite classical groups*, Proc. London Math. Soc. (3) 71 (1995), S. 547-584.

[GM98] R. Guralnick, K. Magaard, *On the minimal degree of a primitive permutation group*, J. Algebra 207 (1998), S. 127-145.

[Her68] C. Hering, *Zweifach transitive Permutationsgruppen, in denen 2 die maximale Anzahl von Fixpunkten von Involutionen ist*, Math. Z. 104 (1968), S. 150-174.

[Höc99] J. Höchsmann, *On minimal p-degrees in 2-transitive permutation groups*, Arch. Math 72 (1999), S. 405-417.

[HW68] M. Hall, D. Wales, *The simple group of order 604800*, J. Algebra 9 (1968), S. 417-450.

[Kan79a] W. M. Kantor, *Subgroups of classical groups generated by long root elements*, Trans. Amer. Math. Soc. 248 (1979), S. 347-379.

[Kan79b] W. M. Kantor, *Permutation representations of the finite classical groups of small degree or rank*, J. Algebra 60 (1979), S. 158-168.

[KaL82] W. M. Kantor, R. A. Liebler, *The rank 3 permutation representations of the finite classical groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 271 (1982), S. 1-71.

[Kin69] J. D. King, *Doubly transitive groups in which involutions fix one or three points*, Math. Z. 111 (1969), S. 311-321.

[KL90] P. B. Kleidman, M. W. Liebeck, *The subgroup structure of the finite classical groups*, London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 129 (1990).

[Kle86] P. B. Kleidman, *The subgroup structure of some finite simple groups*, Trinity College, Cambridge (1986), PD thesis.

[Kle87] P. B. Kleidman, *The maximal subgroups of the finite 8-dimensional orthogonal groups $P\Omega_8^+(q)$ and of their automorphism groups*, J. Algebra 110 (1987), S. 173-242.

[Kna95] W. Knapp, *Skript zur Vorlesung Endliche Permutationsgruppen*, Tübingen, 1995.

[Kur77] H. Kurzweil, *Endliche Gruppen*, Berlin, 1977.

[LM72] H. Liebeck, D. MacHale, *Groups with automorphisms inverting most elements*, Math. Z. 124 (1972), S. 51-63.

[Lie85] M. W. Liebeck, *On the orders of maximal subgroups of the finite classical groups*, Proc. London Math. Soc. (3) 50 (1985), S. 426-446.

[LPS87] M. W. Liebeck, C. E. Praeger, J. Saxl, *A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups*, J. Algebra 111 (1987), S. 365-383.

[LPS88] M. W. Liebeck, C. E. Praeger, J. Saxl, *On the O'Nan-Scott theorem for finite primitive permutation groups*, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) 44 (1988), S. 389-396.

[LS85] M. W. Liebeck, J. Saxl, *Primitive permutation groups containing an element of large prime order*, J. London Math. Soc (2) 31 (1985), S. 237-249.

[LS87] M. W. Liebeck, J. Saxl, *On the orders of maximal subgroups of the finite exceptional groups of Lie type*, Proc. London Math. Soc (3) 55 (1987), S. 299-330.

[LS91] M. W. Liebeck, J. Saxl, *Minimal degrees of primitive permutation groups, with an application to monodromy groups of covers of Riemann surfaces*, Proc. London Math. Soc. (3) 63 (1991), S. 266-314.

[LS99] M. W. Liebeck, A. Shalev, *Simple groups, permutation groups and probability*, J. Amer. Math. Soc. 12 (1999), S. 497-520.

[Man29] W. A. Manning, *The degree and class of multiply transitive groups II*, Trans. Amer. Math. Soc. 31 (1929), S. 643-653.

[Man33] W. A. Manning, *The degree and class of multiply transitive groups III*, Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933), S. 585-599.

[Neu63] B. H. Neumann, *Twisted wreath products of groups*, Arch. Math. Basel 14 (1963), S. 1-6.

[Pra76] C. E. Praeger, *Primitive permutation groups containing a p-element of small degree, p a prime, II*, J. Algebra 42 (1976), S. 278-293.

[Pra79] C. E. Praeger, *On elements of prime order in primitive permutation groups*, J. Algebra 60 (1979), S. 126-157.

[Pra83] C. E. Praeger, *Finite simple groups and finite primitive permutation groups*, Bull. Austral. Math. Soc. 28 (1983), S. 355-365.

[PS80] C. E. Praeger, J. Saxl, *On the orders of primitive permutation groups*, Bull. London Math. Soc. 12 (1980), S. 303-307.

[SF73] W. A. Simpson, J. S. Frame, *The character tables for* $\mathrm{SL}(3,q)$*,* $\mathrm{SU}(3,q^2)$, $\mathrm{PSL}(3,q)$*,* $\mathrm{PSU}(3,q^2)$, Can. J. Math. 25 (1973), S. 486-494.

[Shi74] K. Shinoda, *The conjugacy classes of Chevalley groups of type* (F_4) *over finite fields of characteristic 2*, J. Fac. Sci. Tokyo 21 (1974), S. 133-159.

[Sri68] B. Srinivasan, *The characters of the finite symplectic group* $\mathrm{Sp}(4,q)$, Trans. Amer. Math. Soc. 131 (1968), S. 488-525.

[Ste51] R. Steinberg, *The representations of* $\mathrm{GL}(3,q)$, $\mathrm{GL}(4,q)$, $\mathrm{PGL}(3,q)$ *and* $\mathrm{PGL}(4,q)$, Can. J. Math. 3 (1951), S. 225-235.

[TZ96] P. H. Tiep, A. E. Zalesskii, *Minimal characters of the finite classical groups*, Comm. Algebra 24 (6) (1996), S. 2093-2167.

[Vas96] A. V. Vasilyev, *Minimal permutation representations of finite simple exceptional groups of types* G_2 *and* F_4, Algebra and Logic 35 (1996) No. 6, S. 371-383.

[Vas97] A. V. Vasilyev, *Minimal permutation representations of finite simple exceptional groups of types* E_6, E_7 *and* E_8, Algebra and Logic 36 (1997) No. 5, S. 302-310.

[Vas98] A. V. Vasilyev, *Minimal permutation representations of finite simple exceptional twisted groups*, Algebra and Logic 37 (1998) No. 1, S. 9-20.

[Wie64] H. Wielandt, *Finite permutation groups*, New York, 1964.

[Wie94] H. Wielandt, *Ausgewählte Fragen über Permutationsgruppen*, Vorlesung an der Universität Tübingen, ausgearbeitet von C. Namisolo, S. Schwab, K. Vedder, überarbeitet von W. Knapp, Tübingen, 1994.

[Zie95] T. E. Zieschang, *Primitive permutation groups containing a p-cycle*, Arch. Math. 64 (1995), S. 471-474.

[Zsi92] K. Zsigmondy, *Zur Theorie der Potenzreste*, Monatsh. Math. Phys. 3 (1892), S. 265-284.

Lebenslauf

19.5.1971	geboren in Illertissen als Sohn der Helga und des Kurt Höchsmann
1977-1981	Besuch der Grundschule in Seelbach
1981-1982	Besuch des Max-Planck-Gymnasiums in Lahr
1982-1991	Besuch des Kollegs der Schulbrüder in Illertissen
10.7.1991	Abitur
1991-1997	Studium der Fächer Mathematik und Germanistik an der Universität Tübingen
28.11.1997	Erstes Staatsexamen
1999-2001	Referendariat am Staatlichen Seminar für Schulpädagogik Tübingen
25.7.2001	Zweites Staatsexamen

Meine akademischen Lehrer in Mathematik waren die Herren Professoren, Dozenten und Akademischen Oberräte

G. Greiner, W. Grölz, W. Kaup, W. Knapp, B. Kümmerer, C. Lubich, M. Mathieu, U. Schlotterbeck, P. Schmid, H. Yserentant.