

Rotierende geladene Massenschalen in der Allgemeinen Relativitätstheorie

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Markus King
aus Göppingen

2002

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Juni 2002

Dekan: Prof. Dr. H. Müther

1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Pfister

2. Berichterstatter: Prof. Dr. J. Ehlers

Rotierende geladene Massenschalen in der Allgemeinen Relativitätstheorie

Zusammenfassung

Das Standard-Thirring-Problem in der Allgemeinen Relativitätstheorie beschreibt den nichtlokalen Einfluß rotierender Körper auf die lokalen Inertialsysteme und die Bewegung von freien Teilchen. Diese werden durch die Massenströme in Rotationsrichtung mitgeführt. Derartige Phänomene sind der Newtonschen Physik völlig unbekannt. Sie entsprechen Machschen Vorstellungen hinsichtlich der Relativität der Rotationsbewegung. Danach sind allein die relativen Beschleunigungen der Körper bezüglich den entfernten kosmischen Massen, den Fixsternen, die entscheidenden und nur in diesen rotierenden Bezugssystemen treten die bekannten Coriolis- und Zentrifugalkräfte auf.

Für derartige Probleme haben sich rotierende Massenschalen mit flachem Innern, aufgefasst als Substitut für die kosmische Materieverteilung als geeignete Modellsysteme bestens bewährt. Erweitert man die Fragestellungen über die Analyse der Trägheitsstruktur des Raumes hinaus auf elektromagnetische Phänomene und fragt inwieweit Mitführungseffekte in der Einsteinschen Gravitationstheorie Ursache von gravitativ induzierten elektromagnetischen Feldern sind, so betrachtet man hierfür Systeme von langsam rotierenden geladenen Massenschalen. Derartige Konfigurationen werden in der Allgemeinen Relativitätstheorie als elektromagnetische Thirring-Probleme bezeichnet.

In der vorliegenden Arbeit wird zuerst eine sphärisch symmetrische Schale mit Masse M , Ladung q , Radius R und kleiner Winkelgeschwindigkeit ω betrachtet. Mathematisch handelt es sich um rotative Dipolstörungen ungerader Parität der Reissner-Nordström-Lösung. Es werden in M/R und q/R exakte Lösungen der in ω linearisierten gekoppelten Einstein-Maxwell-Gleichungen für diese Modellklasse angegeben. Mitführungseffekte, Magnetfelder, magnetisches Moment, Drehimpuls und der gyromagnetische Faktor werden berechnet und bezüglich ihrem Verhalten bei Verletzung der Energiebedingungen untersucht. Dabei tritt für bestimmte Werte der Modellparameter Anti-Mitführung, d.h. eine Rotation der lokalen Inertialsysteme entgegengesetzt der Drehrichtung der Schale auf. Überraschend ergibt sich für den gyromagnetischen Faktor ein Wert sehr nahe bei 2 in einem sehr großen Bereich des physikalisch zulässigen Parameterraums.

Desweiteren wird ein System von zwei konzentrischen Schalen, die innere mit Ladung q aber ohne Ruhmasse, die äußere mit Masse M aber elektrisch neutral analysiert. Die beiden Schalen besitzen voneinander unabhängige (kleine) Drehimpulse. (Anti-)Mitführungseffekte und die induzierten magnetischen Dipolfelder werden in 1. Ordnung in der Winkelgeschwindigkeit berechnet und in einer Machschen Sichtweise positive Interpretationen für die induzierten magnetischen Dipolfelder gefunden. Diesbezügliche Mach-negative Aussagen in der Literatur werden korrigiert. Wechselwirkungseffekte zwischen starken Gravitations- und elektrostatischen Feldern führen zu neuen ungewöhnlichen Phänomenen, wie dem Ansteigen der Mitführung vom Zentrum nach außen hin im Zwischenraum der beiden Schalen. Im Fall des Gravitationskollaps der äußeren Massenschale werden die Inertialsysteme auch in Anwesenheit von starken Ladungen total mitgeführt. Daraus resultiert die Vermutung, daß dieses Ergebnis universelle Bedeutung besitzt und unabhängig von allen physikalischen Feldern im Innern der Schale erreicht wird.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Statische Systeme geladener sphärisch symmetrischer Massenschalen	10
2.1	Das Ein-Schalen-System	12
2.1.1	Die Reissner-Nordström-Geometrie in isotropen Koordinaten	12
2.1.2	Der Energie-Impuls-Tensor und die Energiebedingungen	14
2.1.3	Das elektrostatische Feld und die Ladungsdichte	16
2.2	Das Zwei-Schalen-System	16
2.2.1	Die Metrikpotentiale in Innen-, Zwischen- und Außenraum	16
2.2.2	Der Energie-Impuls-Tensor der Schalen und deren Ladungsdichte	18
2.2.3	Analyse der Energiebedingungen	20
3	Systeme rotierender geladener Massenschalen	26
3.1	Miführungseffekte, Magnetfelder, magnetisches Moment und gyromagnetischer Faktor in 1. Ordnung ω	27
3.1.1	Rotative Dipolstörungen der Reissner-Nordström-Geometrie	30
3.1.2	Lösungen der Einstein-Maxwell-Gleichungen in 1. Ordnung ω	32
3.1.3	Bestimmung der Integrationskonstanten	34
3.1.4	Drehimpuls, magnetisches Moment und gyromagnetischer Faktor	36
3.2	Elektromagnetische Thirring-Probleme	39
3.2.1	Randbedingungen für eine rotierende äußere Schale	40
3.2.2	Randbedingungen für eine rotierende innere Schale	42
3.2.3	Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit	43
3.2.4	Festlegung der Integrationskonstanten	44
3.2.5	Der Übergang vom statischen zum stationär-axial rotierenden Modell im Schwachfeldlimit	47
4	Diskussion und Interpretation der Resultate	50
4.1	Analyse des Ein-Schalen-Systems	51
4.1.1	Mitführung, Anti-Mitführung und Drehimpuls	51
4.1.2	Magnetfeld und magnetisches Moment	55
4.1.3	Der gyromagnetische Faktor	57
4.2	Analyse des Zwei-Schalen-Modells	62
4.2.1	Die Magnetfelder in der Testfeldapproximation	62
4.2.2	Die Mitführung in 2. Ordnung q	67
4.2.3	Ergebnisse im Schwachfeldlimit	73
4.2.4	In M und q exakte Resultate—der Kollapsfall	78
5	Ausblick und weiterführende Fragestellungen	81

Kapitel 1

Einleitung

Seit den Arbeiten von Thirring [1] und Lense und Thirring [2] ist bekannt, daß in der Gravitationstheorie Einsteins, der Allgemeinen Relativitätstheorie, rotierende Massen die Raumzeit in ihrer Umgebung in der Weise verzerren, daß die lokalen Inertialsysteme mitgeführt werden. Ein derartiger Einfluß beschleunigt bewegter Körper auf die Trägheitsstruktur des Raumes ist der Newtonschen Physik unbekannt. Die Bewegungen von Körpern vollziehen sich dort bezüglich dem absoluten Raum, der nach Newton „vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich“ ist (aus [3]). Sie stehen also insbesondere in keiner Wechselwirkung zu anderen Körpern, wie etwa den kosmischen Massen. Aus physikalischer Sicht, z.B. wegen eines allgemeinen actio = reactio-Prinzips, ist ein derartiges Konzept des Raumes, in dem physikalische Vorgänge ablaufen, diese den Raum selbst aber unbeeinflusst lassen, höchst unbefriedigend.

Die wohl wesentlichsten Einwände gegen Newtons Konstruktion des absoluten Raumes erhob gegen Ende des 19. Jahrhunderts der Physiker und Philosoph Ernst Mach [4]. Seine Kritik des Newtonschen Raumbegriffs hatte ganz wesentlichen Einfluß auf Einsteins Weg zu einer neuen Theorie der Gravitation. Nach Mach sind nur die relativen Bewegungen aller Körper bzw. Massen im Universum von Bedeutung: Während aus Newtonscher Sicht die Inertialsysteme, in denen sich kräftefreie Teilchen auf Geraden bewegen, diejenigen Bezugssysteme sind, die sich in gleichförmiger Bewegung oder in Ruhe zum absoluten Raum befinden, bestimmt vom Machschen Standpunkt aus die globale Materieverteilung der kosmischen Massen und ihre (mittlere) Bewegung in jedem Punkt der Raumzeit die lokalen Inertialsysteme. Trägheitskräfte treten demzufolge bei beschleunigter Bewegung relativ zu den Fixsternen auf, d.h. die Wechselwirkung mit der Materie des Kosmos ist physikalische Ursache der Trägheit der Körper. Im Rahmen der Newtonschen Physik bleibt die experimentelle Tatsache, daß die lokalen Inertialsysteme in sehr guter Näherung gerade diejenigen Bezugssysteme sind, welche relativ zu den Fixsternen ruhen, gänzlich unerklärt und damit letztendlich auch der Ursprung der Trägheitskräfte. Aus Machscher Sicht macht es keinen Sinn von der Trägheit eines Körpers in einem ansonsten leeren Universum zu sprechen, denn ein Körper ist immer träge in Bezug auf andere Körper. Ebensowenig macht es Sinn von der Bewegung eines einzelnen Körpers zu reden, denn eine solche läßt sich nur relativ zu einem anderen Bezugskörper angeben. Ein absoluter Raum, auf den man sich beziehen könnte, steht nicht zur Verfügung. An dieser Stelle wird bereits klar, daß Antworten auf derartige „Machsche“ Fragestellungen, die seit Einstein unter dem Begriff „Machsches Prinzip“ zusammengefaßt sind [5], nur im Rahmen eines kosmologischen Modells zu erwarten sind [6], Kap. 5.

Betrachtet man in der Klasse der beschleunigten Bewegungen rotative Beschleunigung-

gen, so folgt im Sinne einer Machschen Interpretation der Trägheitsstruktur des Raumes, daß die in diesen beschleunigten Bezugssystemen auftretenden Zentrifugal- und Corioliskräfte durch die kosmischen Massen induziert werden. Somit sollte es gerade keinen Unterschied machen, ob ein Körper relativ zu den ruhenden Fixsternen rotiert oder umgekehrt das Universum mit seinen entfernten Massen sich um diesen Körper dreht. In dieser Sichtweise ist dann auch verständlich, daß Newtons Versuch die Existenz des von ihm postulierten absoluten Raums anhand seines bekannten Eimerversuchs (siehe z.B. [3]) zu beweisen, daß also Zentrifugalkräfte erst bei der „wahren“ Rotation bezüglich des absoluten Raums auftreten und nicht in Bezug zu lokalen Relativdrehungen wie gegen die Wände des Eimers, physikalisch nicht zwingend sein kann. Wie erstmals Mach klar betont hat, läßt sich daraus nur die Erkenntnis gewinnen, daß die entfernten Massen des Universums den größten Einfluß auf die lokalen Trägheitseigenschaften beschleunigter Körper haben und nicht etwa die gegenüber der gesamten Materieverteilung des Kosmos vernachlässigbaren Eimerwände.

Wenden wir uns der Frage zu, inwieweit Machsche Ideen und Vorstellungen, insbesondere zur Relativität der Rotationsbewegung in der Allgemeinen Relativitätstheorie verwirklicht sind, so kommen wir historisch auf die eingangs zitierten Arbeiten von Thirring [1] und Lense und Thirring [2] im Jahr 1918 zurück. Thirrings Analyse von Mitführungseffekten durch rotierende Körper basierte auf einer Untersuchung des Gravitationsfeldes im Innern einer rotierenden, unendlich dünnen Schale mit Masse M , Radius R und Winkelgeschwindigkeit ω in erster nichttrivialer Näherung $M/R \ll 1$ und $\omega R \ll 1$. In diesem wichtigen Modellsystem, das sich für derartige Fragestellungen bis heute bestens bewährt hat, werden freie Teilchen und die lokalen Inertialsysteme innerhalb der Schale im Verhältnis $4M/3R$ in Rotationsrichtung mitgeführt. Dieses Phänomen der Mitführung lokaler inertialer Beobachter wird als (Standard-)Thirring-Effekt bezeichnet. Für den Außenraum rotierender Körper gelang in Folge Lense und Thirring [2] das entsprechende Resultat, mit einem asymptotischen radialen Abfallverhalten der Mitführung der Ordnung $O(r^{-3})$.

Wir haben betont, daß ein Einfluß des Universums auf die lokale Physik ganz allgemein sicher nur im Rahmen eines kosmologischen Modells zu erwarten ist. Man muß demzufolge den Bereich schwacher Gravitationsfelder verlassen, um definitive Aussagen zu gewinnen. Daher war es nötig Thirrings Rechnungen auf beliebige Werte von M/R zu erweitern. Dies gelang 1966 Brill und Cohen [7]: Sie betrachteten eine im Außenraum durch die Schwarzschild-Lösung beschriebene Schale, die stetig an einen sphärischen flachen Ausschnitt der Raumzeit anschließt in 1. Ordnung einer Störungsrechnung in der Winkelgeschwindigkeit ω . In dieser Arbeit war es nun möglich den Grenzfall einer Massenschale mit Radius gleich dem Schwarzschildradius zu betrachten. Eine solche Konfiguration nahe dem Gravitationskollaps wird als ein sehr einfaches kosmologisches Modell interpretiert, in dem die Schale als Substitut für die kosmische Materieverteilung aufgefaßt wird. In diesem Grenzwert erreicht die Mitführung im Inneren der Schale den Wert der Winkelgeschwindigkeit des „Kosmos“, d.h. es kommt zu einer totalen Mitführung der lokalen Inertialsysteme relativ zu den asymptotischen Bezugssystemen. Die Trägheitsstruktur ist demnach vollständig durch die entfernten Massen bestimmt. Dieses Resultat gilt (in 1. Ordnung ω) als wichtigste und überzeugendste Mach-positive Realisierung der Relativität der Rotation in der Allgemeinen Relativitätstheorie. Hier ist nun verständlich, im Unterschied zur Situation bei Newton, warum in der Natur die lokalen Inertialsysteme in Ruhe bezüglich den Fixsternen sind.

In gleicher Weise wie es nötig war in M/R exakte Resultate zu erzielen, erforderte die

Einbeziehung korrekter Zentrifugalkräfte eine Erweiterung der Arbeit von Brill und Cohen auf höhere Ordnungen in der Winkelgeschwindigkeit ω . Bis hierher war es nur möglich aus den Modellen auf eine korrekte Induktion von Corioliskräften durch kosmische Massen zu schließen. Da Zentrifugalkräfte bekanntlich von 2. Ordnung ω sind, lagen sie prinzipiell außerhalb des Gültigkeitsbereichs der Störungsrechnung in diesen Modellsystemen. Pfister und Braun [8] gelang es 1985 schließlich, über 60 Jahre nach Einsteins ersten diesbezüglichen Versuchen (noch im Rahmen einer skalaren Gravitationstheorie [9]), die Frage nach der Induktion korrekter Zentrifugalkräfte durch rotierende Materiekonfigurationen positiv zu beantworten. Entscheidend war die Flachheit des Innenraums der Schale auch in 2. Ordnung ω zu garantieren. Dann besitzt die rotierende Massenschale eine korrekte Trägheitsstruktur, d.h. es werden im Innern die aus der Newtonschen Physik bekannten Coriolis- und Zentrifugalkräfte induziert und keine weiteren Trägheitskräfte höherer Ordnung in ω . Ein wichtiger, bis dahin übersehener Punkt, die Flachheitsbedingung in Ordnung ω^2 realisieren zu können, war die sphärische Symmetrie der Schalengeometrie aufzugeben und eine winkelabhängige Massenbelegung einzuführen, wie man sie physikalisch intuitiv aufgrund der in dieser Ordnung auftretenden zentrifugalen Deformationen der Schale erwartet.

In 3. Ordnung in der Winkelgeschwindigkeit ω hat die Forderung nach einem flachen Innern eine differentielle Rotation der Schale zur Konsequenz [10]. Dabei wiesen Pfister und Braun nach, daß das wichtige Resultat perfekter Mitführung im Kollapsfall der Massenschale von Brill und Cohen [7] durch die Korrekturterme höherer Ordnung unbeeinflußt bleibt. Schließlich konnte Pfister zeigen [11], daß zu gegebenen Werten von M und R in jeder Ordnung ω^n eine eindeutige, quasisphärische, differentiell rotierende Massenschale mit flachem Innern, eingebettet in eine asymptotisch flache Raumzeit, existiert.

Die asymptotische Flachheit der Raumzeit ist in gewisser Weise ein Nachteil der Modelle. (Mit Ausnahme des Kollapsfalles, in dem die Raumzeit in zwei getrennte Stücke, das rotierende „Universum“ mit flachem Innern und den Außenraum der Schale aufspaltet. Die asymptotischen Inertialsysteme werden für Beobachter innerhalb der Schale total abgeschirmt, und die Mitführung im Innern wird vollständig durch die kollabierende Schale bestimmt, d.h. dieser Raumzeitbereich bleibt von der Asymptotik völlig unbeeinflußt.) Ersetzt man die asymptotische Minkowski-Metrik durch eine kosmologische Lösung, etwa ein Friedman-Universum, so dient die Massenschale in einer solchen zusammengesetzten Raumzeit einerseits dazu im Kosmos rotative Mitführungseffekte zu induzieren und andererseits einen endlichen flachen Bereich der Raumzeit abzugrenzen. Derartige Konfigurationen mit kosmologischen Randbedingungen wurden von Klein [12] untersucht, mit Bestätigung der Machschen Effekte.

In jüngster Zeit ist es gelungen, über die bisher betrachtete rotative Mitführung von Inertialsystemen hinaus, in der Allgemeinen Relativitätstheorie auch translative Mitführungseffekte innerhalb linear beschleunigter Massenschalen zu induzieren [13]. Dieses Ergebnis ist ein weiterer Schritt eine Hypothese von Pfister [8], das sogenannte „Quasiglobale Äquivalenzprinzip“, zu untermauern. Demnach besteht im folgenden Sinne eine globale Äquivalenz zwischen Beschleunigungs- bzw. Trägheits- und Gravitationsfeldern: Befindet sich ein räumlich und zeitlich endlicher flacher Teilbereich der Raumzeit in beliebig beschleunigter Bewegung relativ zu den Fixsternen, so werden die Bewegungen von freien Teilchen durch die dabei auftretenden „Trägheitskräfte“ geändert. Dieselben Kräfte sollten in einer Mach-äquivalenten Sichtweise durch geeignet beschleunigt bewegte Massen in einer Umgebung des flachen Teilbereichs induziert werden, so daß dieselben Bewegungen

resultieren.

Mitführungseffekte sind aber nicht nur im Zusammenhang mit dem Machschen Prinzip von Bedeutung, sondern sie sind, neben den Gravitationswellen, eine der zentralen, experimentell noch nicht direkt verifizierten Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie, die in der Newtonschen Gravitationstheorie fehlen. Geplante Tests zum Gravitomagnetismus sind z.B. die Weltraumexperimente „Gravity Probe-B“ und „LAGEOS III“. (Eine Zusammenfassung zum gegenwärtigen Stand der Experimente zu Machschen Effekten findet sich in der Monographie [6], Kap. 6.)

Geht man nun einen Schritt weiter und fragt, ob über die Trägheitseigenschaften von Körpern hinaus, ganz allgemein, auch andere physikalische Erscheinungen durch die kosmischen Massen beeinflusst werden, so wird man innerhalb der klassischen Physik zunächst an elektromagnetische Phänomene denken. (Dies vielleicht um so mehr, als im Schwachfeldlimit in der Allgemeinen Relativitätstheorie eine Formulierung der Einstein-Gleichungen in Maxwell-artiger Form existiert, in der die Gravitationspotentiale sich in einen sogenannten gravitoelektrischen und -magnetischen Anteil, der im stationären Fall die Mitführung bestimmt, aufteilen lassen [14]). Inwieweit sind also Mitführungseffekte Ursache von gravitativ induzierten elektromagnetischen Feldern?

Die einfachst denkbaren Fälle im Rahmen von elektromagnetischen Systemen sind, wie bei den betrachteten Arbeiten zur Mitführung durch Massenströme, die stationär-axial rotierenden Ladungsverteilungen, die in der klassischen Maxwell-Theorie zeitunabhängige magnetische Dipolfelder verursachen. Man würde etwa daran denken, daß im Hinblick auf die Frage nach der Relativität der Rotation und gemäß einer Vermutung von W. Rindler [15], eine ruhende geladene Schale im Innern einer rotierenden Massenschale von einem dipolartigen Magnetfeld umgeben ist. (Dies würde in einer Mach-äquivalenten Sichtweise der Situation der klassischen Elektrodynamik entsprechen.) Derartige rotierende, geladene, massive Zwei-Schalen-Modelle werden in der Allgemeinen Relativitätstheorie mit Ehlers und Rindler [16] als „elektromagnetische Thirring-Probleme“ bezeichnet. Da im Standard-Thirring-Problem einer ungeladenen, rotierenden Massenschale die Einsteinschen Feldgleichungen bis zur 3. Ordnung in der Winkelgeschwindigkeit explizit gelöst wurden, ist zu erwarten, daß auch eine Lösung des elektromagnetischen Thirring-Problems für die entsprechenden gekoppelten Einstein-Maxwell-Gleichungen möglich ist (zumindest in 1. Ordnung ω).

Historisch beginnen die Arbeiten im Rahmen solcher Konfigurationen (in denen die innere geladene Schale der Einfachheit halber i.a. keine Ruhmasse besitzt) mit der Arbeit von Hofmann [17]. Er berechnet in 1. Ordnung in der Masse M , Ladung q und Winkelgeschwindigkeit ω das von einer rotierenden massiven Hohlkugel induzierte dipolartige Magnetfeld zu einer im Innern befindlichen Ladungsverteilung.

Will man, wie im reinen Thirring-Problem, diese Fragestellungen innerhalb eines kosmologischen Modells untersuchen, ist es erforderlich das elektromagnetische Thirring-Problem exakt in der Masse M , d.h. für starke Gravitationsfelder zu lösen. Dies gelang 1966 Cohen [18]. Im Grenzwert, daß der Radius der rotierenden Massenschale den Schwarzschildradius erreicht, erhält Cohen eines der wichtigsten, nahezu Mach-perfekten Resultate in Zusammenhang mit der Frage nach der Relativität der Rotation in Anwesenheit von elektromagnetischen Feldern: Das Magnetfeld ist einerseits (bis auf einen vernachlässigbar kleinen „kosmologischen Korrekturterm“) exakt das aus der klassischen Maxwell-Theorie bekannte magnetische Dipolfeld und ist andererseits nur von den rela-

tiven Winkelgeschwindigkeiten der Ladungs- und Materieverteilungen abhängig. In den Worten von Cohen [18]: „... one cannot distinguish (even with electromagnetic fields reaching beyond the mass shell) whether the charged shell is rotating or the mass shell is rotating in the opposite direction.“

Ehlers und Rindler [16, 19] schließlich behandeln das Zwei-Schalen-Modell in linearer Näherung in der Gravitationskonstanten. Die gravitativen und elektromagnetischen Felder des Gesamtsystems werden als lineare Superposition des (ungeladenen) Thirring-Problems der äußeren rotierenden Massenschale und des in der Gravitationskonstante linearisierten Reissner-Nordström-Problems der statischen inneren Schale behandelt. Die resultierenden Magnetfelder werden als „in fact Mach-negative or, at best, Mach-neutral“ gedeutet. Wir argumentieren jedoch, daß aufgrund unserer Analyse der bezüglich M und q vollen nichtlinearen Einstein-Maxwell-Gleichungen die Rechnungen von Ehlers und Rindler [16] nur in 1. Ordnung in M und q Gültigkeit besitzen. Insbesondere geben wir eine Mach-positive Interpretation dieser speziellen Konfiguration des Zwei-Schalen-Modells im Schwachfeldlimes.

Betrachtet man innerhalb dieser Klasse von Zwei-Schalen-Modellen den Limes, daß der Radius der inneren geladenen, masselosen Schale den Radius der äußeren Massenschale erreicht und sowohl Materie- wie auch Ladungsströme dieselbe Winkelgeschwindigkeit besitzen, so erhält man den Grenzfall einer rotierenden geladenen Massenschale. Während jedoch bei den Zwei-Schalen-Systemen Machsche Fragen zur Relativität der Rotationsbewegung im Zusammenhang mit gravitativ induzierten Magnetfeldern im Vordergrund stehen und die äußere (elektrisch neutrale) Massenschale als Substitut für die kosmische Materieverteilung interpretiert wird, sind im Ein-Schalen-Modell die Mitführungseigenschaften einer solchen Konfiguration, ihr Drehimpuls und magnetisches Moment, sowie insbesondere der gyromagnetische Faktor von zentraler Bedeutung: Wie werden diese wichtigen physikalischen Größen durch die Anwesenheit von Ladungen und die daraus resultierende Wechselwirkung zwischen starken elektromagnetischen und gravitativen Feldern modifiziert?

Im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie haben dies erstmals Cohen, Tiomno und Wald [20] in der sogenannten Testfeldapproximation, in der die Ladungen nicht auf die Geometrie der Raumzeit rückwirken, analysiert. Im Grenzfall des Gravitationskollaps der Schale strebt der gyromagnetische Faktor G gegen den Wert 2 und die elektromagnetischen und gravitativen Felder im Außenraum erreichen die der Kerr-Newman-Schwarz-Loch-Klasse.

Für beliebige Werte von M und q bestätigen in der Folgezeit Briggs et al. [21] und Mustafa, Cohen und Pechenick [22] diese Resultate. Darüber hinaus finden diese Autoren, daß das wichtige Machsche Resultat perfekter Mitführung im Schaleninnern im Kollapsfall sich auf geladene Massenschalen überträgt. Im Grenzwert schwacher Felder wird in [21] nach unserem Wissen erstmals das Phänomen der sogenannten Anti-Mitführung beobachtet, d.h. eine Rotation der lokalen Inertialsysteme aufgrund der Mitführung durch die Schale entgegengesetzt ihrer Rotationsrichtung. Sehr indirekt werden für diese Erscheinung die Verletzung der bekannten Energiebedingungen der Schalenmaterie durch den dominierenden Einfluß der negativen Spannungen der Schale (die der Coulombabstoßung das Gleichgewicht halten) verantwortlich gemacht. Ebenfalls im Schwachfeldlimes wird in derselben Arbeit vermerkt, daß im Rahmen dieses Modellsystems der G -Faktor den „natürlichen“ Wert der klassischen Elektrodynamik $G = 1$ weit übersteigen kann und wie Mustafa et al. [22] schließlich zeigen beliebig große positive und negative Werte anneh-

men kann. Ursache hierfür ist das Verschwinden des Gesamtdrehimpulses für bestimmte Parameterwerte von M/R und q/R .

In der hier vorliegenden Arbeit werden sowohl das Ein-Schalen-Modell als auch das Zwei-Schalen-Modell wesentlich umfassender behandelt und eine breitere Diskussion der physikalischen Effekte in dem „maximal“ physikalisch zugänglichen Parameterbereich, sowie eine grundlegendere Analyse Machscher Fragestellungen durchgeführt, als in den bis hierher zitierten Arbeiten. Dazu werden wichtige physikalische Größen der Systeme, wie Mitführung, induzierte Magnetfelder, Drehimpuls, magnetisches Moment und der gyromagnetische Faktor für beliebige Werte von M/R und q/R , und für kleine Winkelgeschwindigkeiten ω berechnet. Mathematisch basieren die elektromagnetischen Thirring-Probleme auf einer Störungsrechnung in der Winkelgeschwindigkeit ω der Schalen auf der in M und q exakten (statischen) Reissner-Nordström-Geometrie. Wir nehmen dabei an, daß sich alle relevanten Größen in eine Potenzreihe in ω entwickeln lassen und daher analytische Funktionen in dem Parameter ω sind. Wir linearisieren demnach die vollen gekoppelten Einstein-Maxwell-Gleichungen in ω und betrachten nur die rotativen Dipolstörungen ungerader Parität der Reissner-Nordström-Lösung.

Konkret analysieren wir im Ein-Schalen-Fall eine unendlich dünne, sphärisch symmetrische Schale mit Radius R (in isotropen Koordinaten), Ladung q und Masse M , die in 1. Ordnung in ω um ihre Achse rotiert. Im Zwei-Schalen-Fall besteht das Modellsystem aus zwei konzentrischen, ebenfalls unendlich dünnen, sphärisch symmetrischen Schalen mit Radien a und $R > a$. Die innere Schale trägt eine Ladung q , besitzt jedoch (wie auch in den Arbeiten [16, 17, 18]) keine Ruhmasse. Die äußere Massenschale mit Masse M ist elektrisch neutral. Wir betrachten insofern eine wesentlich allgemeinere Klasse elektromagnetischer Thirring-Probleme, die die oben zitierten Modelle als Grenzfälle enthalten, als beide Schalen nichtverschwindende, unabhängige Eigenwinkelgeschwindigkeiten ω^I und ω^{II} bzw. entsprechende Drehimpulse J^I und J^{II} besitzen.

Eingeschränkt sind die Modellparameter dadurch, daß die resultierenden Raumzeiten singularitäts- und horizontfrei und tatsächlich stationär sind, die Schalen also keinen Gravitationskollaps erleiden. Der invariante Radius der Schalen ist stets positiv, die Ladungen sind nicht imaginär und die Gesamtmasse(-energie) des Systems soll stets nichtnegativ sein.

In Kapitel 2 führen wir für das statische Ein-Schalen-Modell und das statische Zwei-Schalen-Modell einen Satz isotroper Koordinaten ein, mit denen sich die Raumzeit global überdecken läßt und bezüglich denen die durch die Schalen voneinander getrennten Teilstücke der Reissner-Nordström-Lösung stetig aneinander schließen. Dies hat zum einen den Vorteil, daß sich der Energie-Impuls-Tensor der Schalen relativ einfach durch Integration der Einstein-Maxwell-Gleichungen bestimmen läßt, zum anderen, daß wir mit einer einzigen Karte arbeiten können. Da Mitführungseffekte genuin globale Effekte sind und wir Aussagen inertialer asymptotisch fester Beobachter mit denen von lokal nichtrotierenden, inertialen Beobachtern innerhalb der Schalen vergleichen wollen, ist eine durchgehend stetige Metrik bezüglich einem einzigen Koordinatensatz auch physikalisch besonders vorteilhaft. (Darüber hinaus wurden auch in den Arbeiten [16, 17, 18, 19, 20, 21] isotrope Koordinaten verwendet.)

Wir untersuchen in beiden Fällen die schwachen Energiebedingungen für den Energie-Impuls-Tensor der geladenen bzw. ungeladenen Massenschale, lassen eine Verletzung der Energiebedingungen im Ein-Schalen-Modell aber explizit zu, da wir gerade den Einfluß

dieser Bedingung auf z.B. Mitführungseigenschaften untersuchen wollen. Dagegen ergeben für das Zwei-Schalen-Modell die Energiebedingungen weitere Einschränkungen an die Modellparameter. Die äußere Massenschale wollen wir gerade als ein approximatives Modell der Materieverteilung des Kosmos interpretieren und daher sollte zumindest die schwächste Formulierung der Energiebedingungen für die Materie gesichert sein. Andernfalls wäre nicht zu erwarten in den folgenden Kapiteln eindeutige Aussagen über den Machschen Charakter der gravitativ induzierten magnetischen Dipolfelder zu gewinnen. Insbesondere für das Zwei-Schalen-Modell ist die Analyse der Energiebedingungen für beliebige Werte von M/R , q/R und a/R technisch sehr aufwendig, aber trotz der nichttrivialen Abhängigkeiten von allen Parametern überraschenderweise explizit durchführbar.

In Kapitel 3 betrachten wir unsere Modellsysteme geladener Massenschalen in langsamer Rotation ($\omega R \ll 1$). Es werden zunächst die Feldgleichungen in 1. Ordnung in der Winkelgeschwindigkeit aufgestellt, ein Separationsansatz für die Winkelabhängigkeit und das radiale Verhalten der in dieser Ordnung relevanten physikalischen Größen [der Mitführungskoeffizient $A(r)$ und die Magnetfeldkomponenten $B_r(r, \vartheta)$ und $B_\vartheta(r, \vartheta)$] angesetzt und ein erstes Integral für die Einstein-Gleichungen angegeben. Dies ermöglicht die Einstein-Maxwell-Gleichungen zu entkoppeln und führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die „Magnetfeldfunktion“ $g(r)$, die die radiale Abhängigkeit von B_r bestimmt. Explizite, in M/R und q/R exakte Lösungen dieser Differentialgleichung werden für alle Teilbereiche der Konfiguration angegeben. Wir formulieren, entsprechend den mathematischen und physikalischen Eigenschaften unserer Modelle, die Randbedingungen für die Gravitations- und elektromagnetischen Felder. (Diese sind im wesentlichen die Regularität der Mitführungsfunktion $A(r)$ und der Magnetfeldfunktion $g(r)$ im Ursprung und im Unendlichen, sowie die Stetigkeits- bzw. Unstetigkeits-Bedingungen an den Schalen.) Daraus werden die bei der Integration der Feldgleichungen auftretenden Integrationskonstanten bestimmt.

Im Ein-Schalen-Modell geben wir explizite Beziehungen für den Drehimpuls, das magnetische Moment und den gyromagnetischen Faktor der rotierenden, geladenen Massenschale an. Im Zwei-Schalen-System führen wir dies getrennt für die beiden Fälle einer äußeren rotierenden Massenschale und einer inneren geladenen rotierenden Schale in Anwesenheit der jeweils anderen Schale verschwindender Eigenrotation aus. Der allgemeine Fall zweier mit unabhängigen Drehimpulsen J^I und J^{II} bzw. Eigenwinkelgeschwindigkeiten ω^I und ω^{II} rotierenden Schalen ergibt sich aufgrund der Linearität der Störungsrechnung als Superposition der beiden Fälle: Die gesuchten Magnet- und Mitführungsfelder setzen sich demzufolge additiv aus denen der Einzelfälle zusammen. Abschließend zeigen wir im Schwachfeldlimes für $J^I = 0, J^{II} \neq 0$, wie ein Übergang vom Anfangszustand der statischen Konfiguration aus Kapitel 2 zum Endzustand der durch die Rotation der äußeren Schale mitgeführten inneren Schale aussehen kann.

Kapitel 4 beinhaltet die physikalische Diskussion und Interpretation der Resultate unserer elektromagnetischen Thirring-Probleme. Im Ein-Schalen-Modell stellen wir die Ergebnisse für die Mitführung und das Magnetfeld im Innern der Schale, sowie für den Drehimpuls, das magnetische Moment und den gyromagnetischen Faktor teils analytisch und teils in graphischer Form von Höhenlinien-Diagrammen dar.

Für den (konstanten) Mitführungskoeffizienten innerhalb der Schale finden wir im Gravitationskollaps der geladenen Massenschale totale Mitführung. Für alle anderen Werte von M/R und q/R , weg vom Kollapslimes, nimmt die Mitführung stetig ab, verschwindet in einem Bereich des Parameterraums, in dem die Energiebedingungen verletzt werden

und wechselt schließlich von der üblichen Mit- zur Anti-Mitführung. Ursache dafür sind letztendlich die in diesem Parameterbereich auftretenden negativen Spannungen der Schale, die die Ruhenergiedichte dominieren und somit die Energiebedingungen verletzen.

Das bezüglich einem lokalen Beobachter im Innenraum gemessene Magnetfeld ist ebenfalls konstant und ist im gesamten zulässigen Parameterraum positiv, mit Ausnahme der Grenzfälle des Kollapsfalls und des verschwindenden invarianten Radius der Schale, in denen das Magnetfeld verschwindet. Insbesondere ist es nicht direkt mit den Energiebedingungen korreliert. Im Außenraum ergeben sich im Kollapslimes, wie physikalisch erwartet, die Lösungen der Kerr-Newman-Klasse.

Das wohl bemerkenswerteste Resultat der Analyse des Ein-Schalen-Modells ist, daß der gyromagnetische Faktor dieses Systems mit Masse M und Ladung q in einem sehr großen Parameterbereich, insbesondere auch fern ab des Gravitationskollapses und in einer Umgebung der extremen Reissner-Nordström-Lösung, in der die Spannungen der Schale beliebig klein sind, den Wert $G \approx 2$ annimmt. Für solche Werte von M/R und q/R , für die der Gesamtdrehimpuls verschwindet (aufgrund der Verletzung der Energiebedingungen), bzw. sehr klein wird, divergiert der G -Faktor, bzw. nimmt beliebig positive und negative Werte an. Schließlich verschwindet der gyromagnetische Faktor im Grenzfall verschwindender Gesamtmasse und erreicht im Schwachfeldlimes den bekannten Wert der klassischen Elektrodynamik $G = 1$ im Sektor der extremen und unterextremen Reissner-Nordström-Lösung. Im überextremen Reissner-Nordström-Fall zeigt der G -Faktor dagegen ein richtungsabhängiges Verhalten. Die überraschende Tatsache, daß $G = 2$ für unsere Modellklasse einer langsam rotierenden, sphärisch symmetrischen Massenschale in nahezu dem gesamten physikalisch zugänglichen Parameterbereich von M/R und q/R (vor allem auch dort, wo die Energiebedingungen erfüllt werden) extrem klein ist und daher der G -Faktor mit den G -Werten bedeutender Lösungsklassen der Quantentheorie, wie etwa der Dirac-Theorie (zufällig?) übereinstimmt und insbesondere praktisch identisch dem der einfachsten, elementaren Teilchen des Standard-Modells, dem Elektron und Muon ist, könnte, falls dieser Wert fundamentalen Charakter für die Vereinheitlichung von Gravitation und Quantentheorie besitzt, ein Datum liefern, an dem solche Theorien der „Quantengravitation“ getestet werden können.

Im zweiten Teil von Kapitel 4 liegt der Schwerpunkt der Gesamtanalyse der Mitführungs- und induzierten Magnetfelder des Zwei-Schalen-Systems auf Machschen Fragestellungen nach dem Einfluß der kosmischen Massen auf diese Felder, deren Interpretation, sowie auf Wechselwirkungseffekten zwischen starken gravitativen und elektromagnetischen Feldern. Um die Resultate der vorliegenden Arbeit mit denen von Hofmann [17], Cohen [18] und Ehlers und Rindler [16] in Verbindung bringen zu können, werden die physikalischen Größen in M und/oder q linearisiert. Mathematisch bestätigen wir alle Ergebnisse der oben zitierten Arbeiten, korrigieren aber einige Aussagen hinsichtlich ihrer Machschen Interpretation: In sämtlichen betrachteten Fällen ergeben sich Mach-positive induzierte Magnetfelder.

In der Testfeldapproximation $q/R \ll 1$ von Cohen [18] erweitern wir die Resultate über die dort angegebenen Ergebnisse im Gravitationskollaps der Massenschale hinaus auf beliebige Werte von M und betrachten auch die Felder des Außenraums, die im Kollapsfall durch die Kerr-Newman-Felder (in 1. Ordnung in q und ω) beschrieben werden. Darüber hinaus weisen wir in diesem Grenzfall auf eine weitaus perfektere Realisierung der Relativität der Rotation hin, als dies die ohnehin Mach-positiven Aussagen von Cohen ergeben: Wie im ersten Teil der Einleitung bemerkt, ist das Magnetfeld im Innern der

kollabierenden Massenschale zum einen nur von den relativen Winkelgeschwindigkeiten der Materie- und Ladungsverteilungen zueinander abhängig, und zum anderen weicht es nur durch einen experimentell unmeßbar kleinen „kosmologischen“ Korrekturfaktor von dem Magnetfeld der klassischen Elektrodynamik ab.

In 2. Ordnung in einer Potenzreihenentwicklung aller Größen in der Ladung q ergibt sich ein weiteres Beispiel für Anti-Mitführung, als Konsequenz der Verletzung der Energiebedingungen durch die innere geladene Schale (aufgrund ihrer Masselosigkeit). Darüber hinaus treten in dieser Ordnung erstmals nichttriviale und ungewöhnliche Wechselwirkungseffekte zwischen starken Gravitations- und elektrostatischen Feldern auf, da letztere auf die Geometrie der Raumzeit rückwirken: So steigt die Mitführung im Zwischenraum der beiden Schalen vom Zentrum nach außen hin an.

Im Schwachfeldlimit argumentieren wir, daß die Aussagen von Ehlers und Rindler [16] (für eine spezielle Konfiguration des Zwei-Schalen-Modells, die einer Mach-äquivalenten Sichtweise zur Situation der klassischen Elektrodynamik im flachen Raum entspricht), die resultierenden Magnetfelder seien „Mach-negative or, at best, Mach-neutral“ [16], auf einer unvollständigen Analyse des Bewegungszustandes der inneren Schale beruht. Berücksichtigt man alle Quellen der Rotation der Schalen, so sind diese Magnetfelder ebenso im besten Sinne Mach-positiv interpretierbar und erfüllen bezüglich den inertialen asymptotischen Beobachtern und den inertialen mitgeführten Beobachtern im Innern der Massenschale alle Machschen Erwartungen.

Die Untersuchungen der elektromagnetischen Thirring-Probleme werden durch Betrachtung der in M und q exakten Resultate abgeschlossen. Für solche Parameterwerte von M/R , q/R und a/R , für die ein Teil der schwachen Energiebedingungen, genauer die Summe aus Ruhenergiedichte und Druck gerade den Wert null annimmt, verschwinden im Fall der Rotation der äußeren Massenschale auch die Mitführungs- und Magnetfelder. In einer lokalen Umgebung dieser Nullstelle der Energiebedingung wechseln die im Innern der geladenen Schale konstanten Felder gerade ihr Vorzeichen, d.h. die Mitführung schlägt in Anti-Mitführung um und die Magnetfelder ändern ihre Orientierung relativ zur Rotationsrichtung. Im Unterschied zum Ein-Schalen-Modell sind die Magnetfelder hier direkt mit der Verletzung bzw. Erfüllung der Energiebedingungen korreliert, eine Tatsache, die explizit die physikalische Bedeutung einer detaillierten Analyse der Energiebedingungen hervorhebt.

Im Kollapslimit bestätigen sich auch für das Zwei-Schalen-System die Resultate des Ein-Schalen-Modells, also perfekte Mitführung inertialer Beobachter und Verschwinden der Magnetfelder im Innern der kollabierenden Massenschale und Reduktion der Felder im Außenraum auf die Kerr-Newman-Lösungs-Klasse in niedrigster Ordnung im Drehimpuls (d.h. vollständige Abschirmung der inneren Felder). Dies legt folgende Vermutung nahe: Das Resultat perfekter Mitführung der lokalen Inertialsysteme und freien Teilchen im Gravitationskollaps einer (langsam) rotierenden Schale (eingebettet in eine singularitätsfreie und asymptotisch flache Raumzeit) besitzt in dem Sinne universelle Gültigkeit, als dieser Grenzwert völlig unabhängig von allen in ihrem Innern befindlichen physikalischen Feldern erreicht wird.

Kapitel 2

Statische Systeme geladener sphärisch symmetrischer Massenschalen

In Kapitel 2 betrachten wir statische und asymptotisch flache Lösungen der Einstein-Maxwell-Gleichungen, die eine Klasse sphärisch symmetrischer, unendlich dünner, geladener Massenschalen mit flachem Inneren beschreiben. Im ersten Fall untersuchen wir eine Schale mit Radius R , Masse M und Ladung q . Im zweiten Fall eine Modellklasse von zwei um den Ursprung des gewählten Koordinatensystems konzentrischen Schalen mit den Radien a und $R \geq a$, wobei die innere Schale eine Ladung q trägt, der Einfachheit halber aber keine Ruhmasse besitzt und die äußere Schale mit Masse M elektrisch neutral ist. Die Parameter M und q sind in beiden Fällen jeweils dadurch eingeschränkt, daß die Raumzeiten singularitäts- und horizontfrei und tatsächlich statisch sind, d.h. insbesondere keinen gravitativen Kollaps erleiden. Der invariante Radius der Schalen muß dabei stets positiv sein. Darüber hinaus betrachten wir nur Systeme mit positiver Gesamtmasse. Im Fall des Zwei-Schalen-Modells ergeben sich durch die Forderung nach Erfüllung der (schwachen) Energiebedingungen des Energie-Impuls-Tensors der äußeren Massenschale weitere Bedingungen an die Modellparameter.

Außer diesen physikalisch motivierten Einschränkungen von M , q , R und a sind diese frei wählbar, so daß unsere Modelle in diesen Parametern exakt sind. Mathematisch wird die Geometrie der Raumzeit daher durch entsprechende, durch die Schalen voneinander getrennte Stücke der Reissner-Nordström-Lösung beschrieben, wobei der Innenbereich jeweils flach sein soll.

Im ersten Teil dieses Kapitels betrachten wir das Ein-Schalen-Modell, führen zunächst einen Satz von isotropen Koordinaten ein, mit denen sich die Raumzeit global überdecken läßt und bezüglich denen sich die Teilstücke der Reissner-Nordström-Metrik im Innen- und Außenraum stetig anschließen lassen. Lediglich die radialen Ableitungen der Metrikpotentiale erfahren an der Schale bei $r = R$ einen Sprung, was über die Einsteinschen Feldgleichungen zu einem δ -förmigen Energie-Impuls-Tensor der Materie führt. Daraufhin untersuchen wir die (schwache) Energiebedingung des Energie-Impuls-Tensors, wobei wir im Gegensatz zum folgenden Zwei-Schalen-Modell eine Verletzung der Energiebedingungen explizit zulassen (in Kapitel 4.1.1 wird untersucht wie sich Materieeigenschaften wie die schwache Energiebedingung auf z.B. Mitführungseffekte auswirken). Mit dem elektrostatischen Coulomb-Feld der Reissner-Nordström-Lösung ergibt sich abschließend über die inhomogenen Maxwell-Gleichungen die Ladungsverteilung der Schale. Die entsprechenden Rechnungen für das Zwei-Schalen-Modell im zweiten Abschnitt von Kapitel 2 sind zwar algebraisch wesentlich aufwendiger, da die Raumzeit durch die beiden Schalen in drei Teilgebiete (Innen-, Zwischen- und Außenraum) geteilt wird, sie ergeben sich aber sonst in völliger Analogie zum Falle einer Schale. Die Analyse der Energiebedingungen

nimmt hier aber einen wesentlich breiteren Raum ein, da wie in der Einleitung betont, die äußere Massenschale letztendlich ein sehr einfaches, approximatives Modell unseres Universums darstellen soll, so daß zumindest die schwache Energiebedingung erfüllt sein sollte.

Bezeichnungen und Konventionen:

Wir verwenden durchgehend relativistische Einheiten, d.h. wir setzen den Wert der Lichtgeschwindigkeit c und den der Gravitationskonstanten G gleich 1, $c = G = 1$. Die Kopplungskonstante in den Feldgleichungen hat damit den Wert 8π und die Einstein-Maxwell-Gleichungen lauten wie folgt:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}), \quad (2.1)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = (1/\sqrt{-g})(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{,\nu} = 4\pi j^\mu, \quad (2.2)$$

$$F_{[\mu\nu;\lambda]} = F_{[\mu\nu,\lambda]} = 0. \quad (2.3)$$

Dabei ist $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ der Einstein-Tensor, $R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$ der Ricci-Tensor und $R = R^\lambda{}_\lambda$ dessen Spur, $g_{\mu\nu}$ die Metrik mit Determinante $\sqrt{-g}$ und Signatur $+2$ entsprechend der Vorzeichenverteilung $(-+++)$. $T_{\mu\nu}$ beschreibt den materiellen Anteil des Energie-Impuls-Tensors der Schalen, die wir durch eine ideale Flüssigkeit in zwei Raumdimensionen beschreiben,

$$T_{\mu\nu} = (\varrho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$$

und die ihrerseits durch die drei Größen Energiedichte ϱ , Druck p und Vierergeschwindigkeitsfeld u^μ der Materie (mit Normierung $u_\mu u^\mu = -1$) charakterisiert ist. Der elektromagnetische Energie-Impuls-Tensor $S_{\mu\nu}$ ist durch

$$S_{\mu\nu} = (1/4\pi)(F_{\mu\lambda}F^\lambda{}_\nu - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa}F^{\lambda\kappa})$$

definiert, mit dem elektromagnetischen Feldtensor

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_r & -E_\vartheta & -E_\varphi \\ E_r & 0 & B_\varphi & -B_\vartheta \\ E_\vartheta & -B_\varphi & 0 & B_r \\ E_\varphi & B_\vartheta & -B_r & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{E} = (E_r, E_\vartheta, E_\varphi)^\top$ und $\mathbf{B} = (B_r, B_\vartheta, B_\varphi)^\top$ die elektrischen und magnetischen Anteile von $F_{\mu\nu}$ in den im folgenden Abschnitt eingeführten isotropen Koordinaten sind. Ferner ist $j^\mu = (\sigma, \mathbf{j})$ die Viererstromdichte.

Griechische Indizes laufen hierbei von 0 bis 3, lateinische Indizes von 1 bis 3. Die Notationen „ λ “ und „ $;\lambda$ “ bezeichnen wie üblich partielle und kovariante Ableitungen nach der Koordinate x^λ . Die Bezeichnungen „ \cdot “ und „ $'$ “ stehen für Ableitungen nach der Koordinatenzeit t und der Radialkoordinate r . Im Falle des Ein-Schalen-Modells indizieren wir alle Größen im Außenraum der Schale mit „1“, im Innern der Schale mit „2“. Für das Zwei-Schalen-System sind Größen im Außen-, Zwischen- bzw. Innenraum mit „1“, „2“ bzw. „3“ gekennzeichnet.

2.1 Das Ein-Schalen-System

2.1.1 Die Reissner-Nordström-Geometrie in isotropen Koordinaten

Die Geometrie im Innen- und Außenraum der kugelsymmetrischen Schale ergibt sich aufgrund einer Verallgemeinerung des Birkhoff-Theorems [23] nach der eine Lösung der Einstein-Maxwell-Gleichungen einer sphärisch symmetrischen Materie- und Ladungsverteilung notwendigerweise statisch und asymptotisch flach ist und, in geeigneten Koordinaten, durch die Reissner-Nordström-Lösung beschrieben wird:

$$ds^2 = -F(\rho)d\tau^2 + F(\rho)^{-1}d\rho^2 + \rho^2d\Omega^2, \quad (2.4)$$

mit $F(\rho) = 1 - 2M/\rho + q^2/\rho^2$ und dem Raumwinkelelement $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2$. Die einzige nichtverschwindende Komponente des elektromagnetischen Feldtensors ist

$$-F_{\tau\rho} = E_\rho = q/\rho^2, \quad (2.5)$$

welche ein elektrostatisches radiales Coulombfeld beschreibt. So ist auch in der klassischen Elektrodynamik die Coulomb-Lösung bis auf eine additive Konstante die einzige sphärisch symmetrische Lösung der Vakuum-Maxwell-Gleichungen.

Das statische kugelsymmetrische Ein-Schalen-Modell ist also durch die drei Parameter Masse M , Ladung q und Radius R eindeutig charakterisiert und die Geometrie der Raumzeit im Innen- und Außenraum der Schale durch die Reissner-Nordström-Lösung gegeben. Regularität im Ursprung $\rho = 0$ erzwingt für den Innenbereich, daß M und q verschwinden und die Metrik daher dort die Minkowski-Metrik in Kugelkoordinaten ist, $ds^2 = -d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2d\Omega^2$. Der Innenraum ist demnach flach und feldfrei, $F_{\mu\nu} \equiv 0$.

Ein stetiger Anschluß an die Außenraumlösung mit nichtverschwindendem M und q bezüglich den Koordinaten $(\tau, \rho, \vartheta, \varphi)$ ist ganz offensichtlich nicht möglich. Da Mitführungseffekte, wie sie ab 1. Ordnung ω auftreten, aber genuin nichtlokale Phänomene sind, ist es aus physikalischer Sicht von großem Vorteil die Raumzeit global mit einer einzigen Karte zu überdecken, in der die Metrik auch über die Schale bei $r = R$ stetig ist.

Eine durchgehend stetige Metrik erreicht man z.B. durch Einführung sogenannter isotroper Koordinaten $(t, r, \vartheta, \varphi)$, bezüglich denen die Metrik die Form

$$ds^2 = -e^{2U(r)}dt^2 + e^{2V(r)}(dr^2 + r^2d\Omega^2) \quad (2.6)$$

hat (der räumliche Anteil der Metrik, das sind die Zeitschnitte $t = \text{const}$, ist damit konform zum Linienelement des dreidimensionalen Euklidischen Raumes in Kugelkoordinaten). Ein Vergleich des räumlichen Anteils der Metrik (2.4) mit (2.6) liefert nach Separation der Variablen $dr/r = d\rho/\sqrt{\rho^2 - 2M\rho + q^2}$. Anschließende Integration führt auf die für $F(\rho) \geq 0$ reelle Transformation der Radialkoordinate

$$r(\rho) = \frac{1}{2D} \left(\sqrt{\rho^2 - 2M\rho + q^2} + \rho - M \right), \quad (2.7)$$

bzw. auf die Umkehrtransformation

$$\rho(r) = \frac{(2Dr + M)^2 - q^2}{4Dr} \quad (2.8)$$

mit einer zunächst beliebigen Integrationskonstanten D . Die noch verbleibende Freiheit einer unabhängigen Transformation der Zeitkoordinate führt auf

$$t(\tau) = C\tau \quad (2.9)$$

mit einer ebenfalls freien Konstanten C .

Wir bezeichnen mit $R > 0$ den Radius der Schale in isotropen Koordinaten und führen die dimensionslosen Parameter

$$\alpha = \frac{M}{2R}, \quad \gamma = \frac{q}{2R}, \quad x = \frac{r}{R}$$

ein, d.h. skalieren im Wesentlichen mit dem positiven Koordinatenradius R . Im Außenraum $x \geq 1$ setzen wir $D = C = 1$, so daß τ und t identisch sind und ρ und r asymptotisch, d.h. für $x \rightarrow \infty$ übereinstimmen. Die Metrikpotentiale lauten damit

$$V_1(x) = \log \left[\frac{(x + \alpha)^2 - \gamma^2}{x^2} \right], \quad (2.10)$$

$$U_1(x) = \log \left[\frac{x^2 - \alpha^2 + \gamma^2}{(x + \alpha)^2 - \gamma^2} \right]. \quad (2.11)$$

Im Innenraum reduzieren sich, wegen $M = q = 0$, vorherige Transformationen der Radial- und Zeitkoordinate auf $r = \rho/D$ und $t = C\tau$, mit den Potentialen

$$V_2(x) = \log D = \text{const}, \quad U_2(x) = -\log C = \text{const}. \quad (2.12)$$

Wie erwartet ist die Innenmetrik flach, die Metrikpotentiale schließen aber nun an der Stelle $x = 1$, d.h. an der Schale für

$$D = (1 + \alpha)^2 - \gamma^2 = 1 + 2\alpha + \kappa, \quad (2.13)$$

$$C = \frac{(1 + \alpha)^2 - \gamma^2}{1 - \alpha^2 + \gamma^2} = \frac{D}{1 - \kappa} \quad (2.14)$$

stetig an, wobei $\kappa = \alpha^2 - \gamma^2$.

Damit können wir die eingangs genannten Einschränkungen an die Modellparameter des Ein-Schalen-Systems quantitativ formulieren:

- i.) Nichtnegative Gesamtmasse bedeutet $\alpha \geq 0$ (zur Bedeutung von $M = 2R\alpha$ als Gesamtmasse des Systems kommen wir im folgenden Abs. 2.1.2 zurück).
- ii.) Die Forderung, daß γ reell ist, also $\gamma^2 \geq 0$, ist durch $\kappa \leq \alpha^2$ gesichert.
- iii.) Damit $U_1(x)$ und $V_1(x)$ für alle $x \geq 1$ reell sind, muß gelten

$$|\gamma| - 1 \leq \alpha \leq \sqrt{1 + \gamma^2} \quad \text{bzw.} \quad -(1 + 2\alpha) \leq \kappa \leq 1. \quad (2.15)$$

Damit sind D und C automatisch reell und nichtnegativ, $D, C \geq 0$, und gemäß (2.12) auch $U_2(x)$ und $V_2(x)$, d.h. das gesamte Linienelement. Im Falle einer ungeladenen Massenschale ist (2.15) gerade die Schwarzschild-Bedingung $M \leq 2R$ (in isotropen Koordinaten!).

- iv.) Singularitätsfreiheit von $U_1(x)$ und damit auch von $U_2(x)$ erfordert, daß $(1 + \alpha)^2 - \gamma^2 \neq 0$, also mit ii.) $D > 0$. Dies ist gleichbedeutend mit einem positiven invarianten Schalenradius¹: $0 < \mathbf{R} = \rho(r = R) = DR$ erreicht man (für $R > 0$) durch $D > 0$. Der Punktlimes wird also für $\alpha = |\gamma| - 1$ bzw. $\kappa = -(1 + 2\alpha)$ erreicht.

¹Der invariante Schalenradius \mathbf{R} ist dadurch festgelegt, daß $4\pi\mathbf{R}^2$ gerade die Oberfläche der Schale mit Radius \mathbf{R} mißt.

- v.) Kollaps- und Horizontfreiheit führen gleichermaßen auf $1 + \alpha^2 - \gamma^2 \neq 0$, mit iii.) also auf $C > 0$ (siehe Abschnitt 2.1.2: für $\alpha = \sqrt{1 + \gamma^2}$ bzw. $\kappa = 1$ divergieren die Spannungen in der Schale und führen zum Kollapsphänomen).

$C \geq 0$ bedeutet physikalisch, daß in der gesamten Raumzeit die Zeit in dieselbe Richtung weist. Dies ist im rotierenden Fall natürlich entscheidend, damit zwei Beobachter inner- und außerhalb der Schale den gleichen Umlaufsinn der Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\varphi/dt$ der Schale messen.

2.1.2 Der Energie-Impuls-Tensor und die Energiebedingungen

Neben dem Vorteil in isotropen Koordinaten die Raumzeit global mit einer einzigen Karte überdecken zu können, ist diese Wahl der Koordinaten auch für die Berechnung des materiellen Energie-Impuls-Tensors $T_{\mu\nu}$ der Schale besonders günstig. Da die Schale „unendlich dünn“ ist, ist der Träger von $T_{\mu\nu}$ einzig an der Stelle $r = R$ konzentriert, d.h. der Energie-Impuls-Tensor der Materie hat offensichtlich die Form $T_{\nu}^{\mu}(r) = \tau_{\nu}^{\mu}\delta(r - R)$. Will man nun den r -unabhängigen Teil τ_{ν}^{μ} über die Einstein-Gleichungen $G_{\nu}^{\mu} = 8\pi(T_{\nu}^{\mu} + S_{\nu}^{\mu})$ aus der Geometrie, d.h. der linken Seite der Feldgleichungen berechnen, so können aufgrund der Stetigkeit der Metrikfunktionen U und V und der Unstetigkeit der ersten Ableitung nach der Radialkoordinate r über die Schale hinweg (es treten dort also Sprungfunktionen auf) nur die zweiten Ableitungen im Einstein-Tensor zu δ -förmigen Beiträgen an der Stelle $x = 1$ führen. Da der Innenraum feldfrei ist, $F_{\mu\nu} \equiv 0$, der elektromagnetische Feldtensor demgemäß an der Stelle $x = 1$ einen Sprung macht, liefert der elektromagnetische Teil S_{ν}^{μ} des Gesamt-Energie-Impuls-Tensors bei der Integration der Feldgleichungen keinen Beitrag zu τ_{ν}^{μ} und es gilt:

$$8\pi\tau_{\nu}^{\mu} = 8\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} dr \tau_{\nu}^{\mu}\delta(r - R) = 8\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} dr T_{\nu}^{\mu}(r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} dr G_{\nu}^{\mu}(r).$$

Beachtet man, daß die Metrikpotentiale im Innern konstant sind, dV_2/dx und dU_2/dx also verschwinden, so ergibt sich für die Ruhenergiedichte $\varrho = -\tau_0^0$ und den isotropen Druck $p = \tau_2^2 = \tau_3^3$:

$$8\pi\tau_0^0 = \frac{2}{RD^2} \frac{d}{dx} V_1(x=1) = -\frac{4(\alpha + \kappa)}{RD^3}, \quad (2.16)$$

$$8\pi\tau_2^2 = 8\pi\tau_3^3 = \frac{1}{RD^2} \frac{d}{dx} [V_1(x=1) + U_1(x=1)] = \frac{2\kappa}{RD^2(1 - \kappa)}. \quad (2.17)$$

Wegen der sphärischen Symmetrie treten keine radialen Spannungen auf, $\tau_1^1 \equiv 0$. Im ungeladenen Fall, $\kappa = \alpha^2$, ergeben sich die Resultate von [8], wobei α dort für die dimensionsbehaftete Größe $M/2$ steht. Im extremen Reissner-Nordström-Fall, $\kappa = 0$, verschwinden die Spannungen $\tau_2^2 = \tau_3^3$ und sind für $\kappa < 0$ negativ, um die in diesem Parameterbereich dominierende Coulomb-Abstoßung der geladenen Teilchen zu kompensieren. Für $\kappa = 1$ divergieren schließlich die Spannungen und die Schale erleidet aufgrund der gravitativen Anziehung unausweichlich einen Kollaps (die Raumzeit ist demnach nicht mehr statisch!).

Die Gesamtmasse(-energie) $M = 2R\alpha$ des Systems läßt sich aus dem asymptotischen Verhalten der g_{00} -Komponente der Metrik ablesen, wobei M dem Term des Feldes entspricht, der mit $1/r$ abfällt: $g_{00} = 1 - 2M/r + O(r^{-2})$. [Da r und ρ per Konstruktion asymptotisch übereinstimmen, ergibt sich dies auch unmittelbar aus $F(\rho) = 1 - 2M/\rho + O(\rho^{-2})$]

in Gl. (2.4).] Andererseits läßt sich aufgrund der Existenz eines globalen zeitartigen Killingvektorfeldes $\xi = \partial_{x^0}$ die Gesamtmasse nach Tolmans Theorem auch in integraler Form (als Volumenintegral über die gesamte Raumzeit) darstellen [24]:

$$M = \int_{x^0=\text{const}} dx^1 dx^2 dx^3 \sqrt{-g} (T^{\mu 0} + S^{\mu 0}) \xi_\mu \quad (2.18)$$

$$= \int_{t=\text{const}} dr d\vartheta d\varphi \sqrt{-g} (T_i^i + S_i^i - T_0^0 - S_0^0) \quad (2.19)$$

$$= \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi [(2\tau_3^3 - \tau_0^0) \delta(r - R) - 2S_0^0(r)] \sin \vartheta r^2 e^{(3V+U)(r)}, \quad (2.20)$$

wobei wir $S_0^0 = S_1^1 = -S_2^2 = -S_3^3 = -(1/8\pi) E_r^2 e^{-2(U+V)}$ mit $E_r = (q/r^2) e^{(U-V)} H(r - R)$ verwendet und bei der Integration $(1/r^2) e^{(U-V)} = -(1/r e^V)'$ ausgenutzt haben. Zur Gesamtmasse(-energie) tragen demnach auch die Spannungen und die elektrostatische Feldenergie, $\int_{t=\text{const}} dr d\vartheta d\varphi \sqrt{-g} S_0^0 = q^2/2\mathbf{R}$, bei.

Wir untersuchen nun für welche Werte von (α, κ) bzw. (α, γ) die schwachen Energiebedingungen des Energie-Impuls-Tensors der Massenschale erfüllt sind und für welche sie verletzt werden. Nach [25] bestehen die schwachen Energiebedingungen aus zwei Teilen. Der erste Teil besagt, daß die lokale Ruhenergiedichte der Materie nichtnegativ ist, $\varrho \geq 0$, der zweite Teil verlangt, daß auch die Summe aus lokaler Ruhenergiedichte und Druck nichtnegativ ist, $\varrho + p \geq 0$. In unserer Notation bedeutet dies

$$-\tau_0^0 \geq 0 \quad \text{und} \quad \tau_3^3 - \tau_0^0 \geq 0. \quad (2.21)$$

Der erste Teil ist mit Gl. (2.16) offensichtlich für $\kappa \geq -\alpha$ bzw. $\alpha \geq \frac{1}{2}(\sqrt{1+4\gamma^2} - 1)$ erfüllt. Der zweite Teil schreibt sich mit

$$\Delta\tau = 2\pi R C D^5 (\tau_3^3 - \tau_0^0) = \frac{C^2 D}{2} (2\alpha + 3\kappa - \kappa^2), \quad (2.22)$$

kurz $\Delta\tau \geq 0$. Wegen $C, D \geq 0$ ist dies zu $\kappa^2 - 3\kappa - 2\alpha \leq 0$ äquivalent, bzw. entspricht der „Parabelungleichung“ $(\kappa - \frac{3}{2})^2 \leq 2(\alpha + \frac{9}{8})$ in der (α, κ) -Ebene. Im ungeladenen Fall, $\gamma = 0$, sind die beiden Bedingungen äquivalent zu $0 \leq \alpha \leq 2$.

Wir bemerken noch, daß unter den Annahmen i.) $\rho \geq 0$ und ii.) U_1 und V_1 reell bereits $|\gamma| - 1 \leq \frac{1}{2}(\sqrt{1+4\gamma^2} - 1) \leq \alpha \leq \sqrt{1+\gamma^2}$ folgt und damit der zweite Teil der Energiebedingungen, $\varrho + p \geq 0$, erfüllt ist. $\varrho \geq 0$ allein liefert nur eine untere positive Schranke für α , aber keine obere, die z.B. Singularitäten verhindert.

Im Außenraum verschwindet aufgrund der Deltafunktion in T_ν^μ der materielle Anteil des Gesamt-Energie-Impuls-Tensors. Der elektromagnetische Beitrag S_ν^μ erfüllt in diesem Bereich die Energie-Bedingungen. Daher sind für alle Werte von α und γ , die der Ungleichung

$$\frac{1}{2}(\sqrt{1+4\gamma^2} - 1) \leq \alpha \leq \sqrt{1+\gamma^2} \quad (2.23)$$

genügen, beide Teile der schwachen Energiebedingungen in der gesamten Raumzeit erfüllt.

2.1.3 Das elektrostatische Feld und die Ladungsdichte

Der elektromagnetische Feldtensor der Reissner-Nordström-Lösung besteht in sphärischen Koordinaten lediglich aus der radialen Komponente (2.5). Da der Innenraum feldfrei ist, gilt $E_\rho = (q/\rho^2)H(\rho - \mathbf{R})$, wobei \mathbf{R} der Radius der Schale in Reissner-Nordström-Koordinaten und $H(\rho - \mathbf{R})$ die Heaviside-Funktion ist. Die Ladungsverteilung j^τ ergibt sich aus der inhomogenen Maxwell-Gleichung (2.2), $(1/\sqrt{-g})(\sqrt{-g}F^{\tau\mu})_{,\mu} = 4\pi j^\tau$. Mit $\sqrt{-g} = \rho^2 \sin\vartheta$ und der einzigen nichtverschwindenden Komponente $F^{\tau\rho} = -E_\rho$ folgt $\sqrt{-g}F^{\tau\rho} = q \sin\vartheta H(\rho - \mathbf{R})$ und nach Differentiation nach ρ

$$j^\tau = \frac{q}{4\pi\mathbf{R}^2}\delta(\rho - \mathbf{R}).$$

Umgerechnet auf isotrope Koordinaten lautet die Ladungsdichte $\sigma(r) = j^t(r) = Cj^\tau(\rho)$ schließlich

$$\sigma(x) = \frac{qC}{4\pi R^3 D^3}\delta(x - 1). \quad (2.24)$$

[Integrieren wir umgekehrt Gl. (2.24) über den gesamten Raum, so folgt aufgrund der Kontinuitätsgleichung $0 = j^\mu_{;\mu} = j^t_{;t}$ und der Existenz des zeitartigen Killingvektors ξ die Erhaltungsgröße $\int_{t=\text{const}} drd\vartheta d\varphi \sqrt{-g}j^t = q$, die den Parameter q als Gesamtladung des Systems identifiziert [24].]

2.2 Das Zwei-Schalen-System

Wir betrachten nun die vierparametrische Modellklasse zweier statischer, konzentrischer Schalen, die innere mit Radius a , ruhmasselos und mit einer homogenen Ladungsverteilung q , die äußere Schale mit Radius $R \geq a$, massiv mit Masse M , aber elektrisch neutral. Für den Zwischenraum benötigen wir darüber hinaus noch einen Massenparameter \widehat{M} . Die den Modellparametern M , \widehat{M} , a , q und der Radialkoordinate r entsprechenden dimensionslosen Variablen bezeichnen wir mit

$$\alpha = \frac{M}{2R}, \quad \widehat{\alpha} = \frac{\widehat{M}}{2R}, \quad 0 \leq \beta = \frac{a}{R} \leq 1, \quad \gamma = \frac{q}{2R}, \quad x = \frac{r}{R}$$

(vgl. die entsprechende Notation im Ein-Schalen-Fall).

2.2.1 Die Metrikpotentiale in Innen-, Zwischen- und Außenraum

Unser Vorgehen entspricht dem im Falle des Ein-Schalen-Systems. Die Geometrie der Raumzeit des Zwei-Schalen-Systems besteht nun aus drei Teilbereichen, die jeweils durch die Reissner-Nordström-Metrik (2.6) beschrieben werden, aber mit verschiedenen Masse- und Ladungsparametern M_i und q_i ($i = 1, 2, 3$). Den stetigen Anschluß von ds_i^2 an den Stellen $x = \beta$ und $x = 1$ erreicht man durch geeignete Wahl der Konstanten D_i und C_i :

- i.) Aufgrund der Forderung nach einem regulären Zentrum [$\rho = 0$ bezüglich der Metrik (2.4)] ist der Innenraum $0 \leq x \leq \beta$ wieder feldfrei, d.h. $M_3 = q_3 = 0$. Die Transformationen auf isotrope Koordinaten lauten demgemäß $r = \rho/D_3$ und $t = C_3\tau$ mit den Potentialen

$$V_3(x) = \log D_3 = \text{const}, \quad U_3(x) = -\log C_3 = \text{const}, \quad (2.25)$$

die wiederum einen flachen Innenbereich beschreiben.

- ii.) Zwar soll die innere Schale einfachheitshalber keine Ruhmasse besitzen, d.h. $T_0^0(a) = 0$, die Ladungen $q_2 := q$ führen aber einerseits zu einer elektrostatischen Energie S_0^0 des elektrischen Feldes und andererseits muß die resultierende Coulombabstoßung der Ladungen durch materielle Spannungen $T_2^2(a) = T_3^3(a)$ der Schale kompensiert werden, damit diese überhaupt stabil ist. Dies führt zu einer nichtverschwindenden Masse $M_2 := \widehat{M}$ im Zwischenraum $\beta \leq x \leq 1$, die durch die quasi-lokale Hawking-Masse gegeben ist [26].

Die Gl. (2.7) und (2.9) entsprechenden Transformationen sind demnach

$$r(\rho) = \frac{1}{2D_2} \left(\sqrt{\rho^2 - 2\widehat{M}\rho + q^2} + \rho - \widehat{M} \right), \quad t(\tau) = C_2\tau, \quad (2.26)$$

mit den Gravitationspotentialen

$$V_2(x) = \log \left[\frac{(D_2x + \widehat{\alpha})^2 - \gamma^2}{D_2x^2} \right], \quad (2.27)$$

$$U_2(x) = \log \left[\frac{D_2^2x^2 - \widehat{\alpha}^2 + \gamma^2}{C_2[(D_2x + \widehat{\alpha})^2 - \gamma^2]} \right]. \quad (2.28)$$

- iii.) Im Außenraum $x \geq 1$ erhalten wir schließlich mit den Transformationen (2.7) und (2.9) und $D_1 = C_1 = 1$ die Potentiale (2.10) und (2.11), die wir der Vollständigkeit halber nochmal zitieren:

$$V_1(x) = \log \left[\frac{(x + \alpha)^2 - \gamma^2}{x^2} \right], \quad (2.29)$$

$$U_1(x) = \log \left[\frac{x^2 - \alpha^2 + \gamma^2}{(x + \alpha)^2 - \gamma^2} \right]. \quad (2.30)$$

Da die äußere Massenschale keine zusätzlichen Ladungen trägt, ist der Parameter $q = 2R\gamma$ in Gl. (2.29) und (2.30) der gleiche, wie in Gl. (2.27) und (2.28), also $q_1 = q$. Der Parameter $M_1 := M$ hat über das Komar-Integral (2.19), bzw. über das asymptotische Abfallverhalten der Metrik die Bedeutung der Gesamtmasse des Systems.

Schließlich müssen wir aus den Stetigkeitsbedingungen der Potentiale an den Schalen bei $r = a$ und $r = R$ noch die bisher unbestimmten Konstanten D_i und C_i festlegen. Die Bedingung $V_1(x = 1) = V_2(x = 1)$ führt auf eine quadratische Gleichung für D_2 mit der Lösung

$$2D_2 = (1 + \alpha)^2 - 2\widehat{\alpha} - \gamma^2 + \sqrt{[(1 + \alpha)^2 - 2\widehat{\alpha} - \gamma^2]^2 + 4(\gamma^2 - \widehat{\alpha}^2)}, \quad (2.31)$$

wobei das negative Vorzeichen vor der Wurzel dadurch ausgeschlossen wird, daß im Schwachfeldlimit $\alpha, \gamma \ll 1$ der Wert $D_2 = 1$ resultieren sollte [wir werden im nächsten Abs. 2.2.2 sehen, daß in diesem Grenzwert $\widehat{\alpha}$ von der Ordnung $O(\gamma^2)$, also vernachlässigbar ist, und wir demnach keine zusätzliche Bedingung $\widehat{\alpha} \ll 1$ fordern müssen]. Die Bedingung $U_1(x = 1) = U_2(x = 1)$ legt C_2 fest:

$$C_2 = \frac{D_2^2 - \widehat{\alpha}^2 + \gamma^2}{D_2(1 - \alpha^2 + \gamma^2)}. \quad (2.32)$$

Schließlich führen die Anschlußbedingungen an der inneren Schale, $V_2(x=1) = V_3(x=1)$ und $U_2(x=1) = U_3(x=1)$, auf

$$D_3 = \frac{(D_2\beta + \hat{\alpha})^2 - \gamma^2}{D_2\beta^2}, \quad C_3 = C_2 \frac{(D_2\beta + \hat{\alpha})^2 - \gamma^2}{D_2^2\beta^2 - \hat{\alpha}^2 + \gamma^2}. \quad (2.33)$$

Da unsere statische Modellklasse durch die vier Parameter M , q , a und R eindeutig bestimmt ist, kann der Parameter \widehat{M} nicht frei wählbar sein, sondern muß sich aus den festgelegten Modelleigenschaften ergeben. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß $\hat{\alpha}$ durch die Bedingung $T_0^0(a) = 0$ bestimmt wird, also aus den Sprungbedingungen der Ableitungen der Metrikpotentiale an der Stelle $x = \beta$ folgt. Damit können wir die Konstanten D_i und C_i endgültig in ihrer Abhängigkeit von α , β und γ festlegen.

2.2.2 Der Energie-Impuls-Tensor der Schalen und deren Ladungsdichte

Im Falle des Zwei-Schalen-Modells hat der Energie-Impuls-Tensor offensichtlich die Form $T_\nu^\mu(r) = \tau_\nu^\mu(a)\delta(r-a) + \tau_\nu^\mu(R)\delta(r-R)$. Integrieren wir nun, wie in Abschnitt 2.1.2, die Feldgleichungen $G_\nu^\mu = 8\pi(T_\nu^\mu + S_\nu^\mu)$ über das Intervall $[R-\varepsilon, R+\varepsilon]$ und $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, so erhalten wir wegen $V_3'(r) = U_3'(r) \equiv 0$ im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ für die Komponenten τ_ν^μ :

$$8\pi\tau_0^0(a) = 2e^{-2V_3(a)}V_2'(a), \quad (2.34)$$

$$8\pi\tau_2^2(a) = 8\pi\tau_3^3(a) = e^{-2V_3(a)}[V_2'(a) + U_2'(a)], \quad (2.35)$$

$$8\pi\tau_0^0(R) = 2e^{-2V_1(R)}[V_1'(R) - V_2'(R)], \quad (2.36)$$

$$8\pi\tau_2^2(R) = 8\pi\tau_3^3(R) = e^{-2V_1(R)}[V_1'(R) - V_2'(R) + U_1'(R) - U_2'(R)]. \quad (2.37)$$

Wenn wir nun unser Modell dahingehend vereinfachen, daß die Ruhenergiedichte der inneren Schale verschwinden soll und damit die Schale allein durch den Parameter γ bestimmt wird, so ergibt sich mit $\tau_0^0(a) = 0$ aus Gl. (2.27) und (2.34):

$$0 = \left. \frac{dV_2(x)}{dx} \right|_{x=\beta} = \frac{2}{\beta} \left[\frac{\gamma^2 - \hat{\alpha}(D_2\beta + \hat{\alpha})}{(D_2\beta + \hat{\alpha})^2 - \gamma^2} \right],$$

bzw. aufgelöst nach D_2 erhält man: $D_2 = (\gamma^2 - \hat{\alpha}^2)/\hat{\alpha}\beta$. Ein Vergleich mit Gl. (2.31) und die Verwendung der Abkürzungen

$$\Delta_\pm = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\beta^2\delta^2 + 4\gamma^2(1-\beta)^2} \pm \beta\delta \right), \quad \text{also} \quad \Delta_+\Delta_- = \gamma^2(1-\beta)^2,$$

$$\delta = (1+\alpha)^2 - \gamma^2 = (\Delta_+ - \Delta_-)/\beta \equiv D$$

führen schließlich auf eine quadratische Gleichung für \widehat{M} mit der positiven Lösung

$$\hat{\alpha} = \frac{\Delta_-}{(1-\beta)^2} = \frac{\gamma^2}{\Delta_+}. \quad (2.38)$$

Bemerkungen zum Massenparameter \widehat{M} des Zwischenraums:

- i.) $\hat{\alpha}$ ist nichtnegativ, d.h. $\widehat{M} = 2R\hat{\alpha} \geq 0$.
- ii.) Bezüglich der Reissner-Nordström-Variablen ρ ergibt sich für (2.38) gerade der Ausdruck der klassischen Elektrostatik für die Energie einer geladenen Schale mit Radius $\mathbf{a} = \rho(r=a) = R\Delta_+$, also $\widehat{M} = q^2/2\mathbf{a}$.

- iii.) Im Schwachfeldlimites $\alpha, \gamma \ll 1$, in dem die Radialkoordinaten r und ρ übereinstimmen, erhält man formal denselben Ausdruck, $\widehat{M} = q^2/2a$.
- iv.) Im Grenzwert $\beta \rightarrow 1$ ist $\widehat{\alpha} = \Delta_-/(1-\beta)^2$ nichtsingulär. In diesem Grenzwert ist $1-\beta \ll 1$ hinreichend klein, wir entwickeln die Wurzel in Δ_- nach Potenzen von $(1-\beta)^2$, erhalten $\Delta_- \approx \gamma^2(1-\beta)^2/\beta\delta$ und daher $\lim_{\beta \rightarrow 1} \widehat{\alpha} = \gamma^2/\delta$, ein endlicher Wert.
- v.) Charakterisiert man den Punktlimites der inneren Schale dadurch, daß \widehat{M} bei nichtverschwindendem konstantem q divergiert (dies ist der Fall für $\mathbf{a} \rightarrow 0$), so bedeutet dies in der Darstellung (2.38), daß Δ_+ verschwinden muß. Dies ist aber nur für $\beta = \gamma = 0$ möglich. In diesem Grenzwert macht es aber keinen Sinn mehr von einer inneren Schale zu sprechen. Für $\beta \rightarrow 0, \gamma \neq 0$ nimmt dagegen $\widehat{\alpha}$ ein endliches Maximum, $\widehat{\alpha}_{\max} = |\gamma|$, an. Dies ergibt sich allerdings erst aus der Forderung $0 \leq D_2 = (\gamma^2 - \widehat{\alpha}^2)/\widehat{\alpha}\beta$ weiter unten.
- vi.) Wegen $0 \leq \widehat{\alpha} \leq \widehat{\alpha}_{\max} = |\gamma|$ gemäß v.) ist die Transformation (2.26) stets reell, denn $\rho^2 - 2\widehat{M}\rho + q^2 \geq \rho^2 - 2\widehat{M}\rho + \widehat{M}^2 \geq (\rho - \widehat{M})^2 \geq 0$.
- vii.) Die Funktion $F(\rho)$ aus Gl. (2.4) vereinfacht sich an der inneren Schale $r = a$ zu $F_2(R\Delta_+) = 1$.

Die im vorherigen Abschnitt eingeführten Konstanten D_i und C_i lassen sich mit Gl. (2.38) explizit durch α, β und γ ausdrücken:

$$D_2 = \frac{(1-\beta)^2\Delta_+ - \Delta_-}{\beta(1-\beta)^2}, \quad D_3 = \frac{\Delta_+}{\beta}, \quad (2.39)$$

$$C_2 = C_3 = \frac{(1-\beta)\Delta_+ - (1+\beta)\Delta_-}{\beta(1-\beta)(1-\alpha^2 + \gamma^2)}. \quad (2.40)$$

Wie beim Ein-Schalen-System ergeben sich auch hier physikalisch begründete Einschränkungen an die Modellparameter. Für

$$|\gamma| - 1 \leq \alpha \leq \sqrt{1 + \gamma^2} \quad (2.41)$$

sind $U_1(x)$ und $V_1(x)$ für alle $x \geq 1$ wieder reell, ebenso alle Konstanten D_i und C_i . Daher sind insbesondere auch $U_3(x)$ und $V_3(x)$ für alle $0 \leq x \leq \beta$ reell. Damit die geladene Schale stets innerhalb der Massenschale und das Zentrum $x = 0$ stets im Innern der geladenen Schale ist, müssen wir $D_2, D_3 \geq 0$ fordern. Soll die Zeit in allen drei Teilgebieten in die gleiche Richtung ablaufen, müssen darüber hinaus auch $C_2 = C_3 \geq 0$ sein. Insgesamt verlangen wir also, daß alle Konstanten D_i und C_i nichtnegativ sind. Wir zeigen nun: Die einzige nichttriviale Bedingung, die wir bis hierhin stellen müssen ist $D_2 \geq 0$. Daraus folgt schon $C_2 = C_3 \geq 0$. $D_3 = \Delta_+/\beta$ ist bereits nichtnegativ und die Bedingung $D_2 \geq 0$ führt auf eine biquadratische Ungleichung für $\tilde{\alpha} = \alpha + 1$ mit der Lösung

$$\alpha_1 := \sqrt{\gamma(\gamma + 2 - \beta)} - 1 \leq \alpha \leq \sqrt{1 + \gamma^2}. \quad (2.42)$$

Aufgrund von $\sqrt{\gamma(\gamma + 2 - \beta)} - 1 > |\gamma| - 1$ ist dies eine schärfere untere Schranke für α , als die aus der Realitätsbedingung an $U_1(x)$ und $V_1(x)$ folgende Gl. (2.41). Nun ist $D_2 \geq 0$ nach Gl. (2.39) äquivalent zu $(1-\beta)^2\Delta_+ - \Delta_- \geq 0$. Wegen $(1-\beta)^2\Delta_+ - (1-\beta^2)\Delta_- =$

$(1 - \beta)^2 \Delta_+ - \Delta_- + \beta^2 \Delta_- \geq (1 - \beta)^2 \Delta_+ - \Delta_- \geq 0$ und $1 - \beta > 0$ für $\beta \in [0, 1[$ folgt nach Division mit $1 - \beta$, daß auch der Zähler von $C_2 = C_3$ nichtnegativ ist und somit die Behauptung $C_2 = C_3 \geq 0$. [Im Grenzwert $\beta \rightarrow 1$ fallen Innen- und Zwischenbereich zusammen und wir erhalten den Grenzfall des Ein-Schalen-Systems, vgl. Gl. (2.13) und (2.14): $\lim_{\beta \rightarrow 1} C_2 = \lim_{\beta \rightarrow 1} C_3 = \delta / (1 - \alpha^2 + \gamma^2) \equiv C$ und $\lim_{\beta \rightarrow 1} D_2 = \lim_{\beta \rightarrow 1} D_3 = \delta \equiv D$.] Aus Gl. (2.33) folgt dann $(D_2 \beta + \hat{\alpha})^2 - \gamma^2 = D_2 D_3 \beta^2 \geq 0$ und wegen $\hat{\alpha} \leq \gamma^2$ auch $D_2^2 \beta^2 - \hat{\alpha}^2 + \gamma^2 \geq 0$. Damit ist schließlich mit Gl. (2.27) und (2.28) auch $U_2(x)$ und $V_2(x)$ für alle $\beta \leq x \leq 1$ reell und somit das gesamte Linienelement.

Mit Gl. (2.39) und (2.40) können wir nun explizit die Werte von τ_ν^μ angeben:

$$\tau_0^0(a) = 0, \quad (2.43)$$

$$\tau_2^2(a) = \tau_3^3(a) = -\frac{\beta \gamma^2}{4\pi R \Delta_+^4}, \quad (2.44)$$

$$\tau_0^0(R) = \frac{(1 + \alpha)(1 - \beta) + \Delta_+ - \delta}{2\pi R \delta^3 (1 - \beta)}, \quad (2.45)$$

$$\tau_2^2(R) = \tau_3^3(R) = \frac{(\alpha^2 - \gamma^2) [(1 - \beta)^2 \Delta_+ - \Delta_-] + \beta^2 \Delta_-}{4\pi R \delta^2 (1 - \beta) (1 - \alpha^2 + \gamma^2) [(1 - \beta) \Delta_+ - (1 + \beta) \Delta_-]}. \quad (2.46)$$

In den Reissner-Nordström-Koordinaten lauten die Spannungen (2.44) der inneren Schale

$$T_2^2(\rho) = T_3^3(\rho) = (-q^2 / 16\pi \mathbf{a}^3) \delta(\rho - \mathbf{a}) = (-\widehat{M} / 8\pi \mathbf{a}^2) \delta(\rho - \mathbf{a}).$$

Ausgedrückt durch den Druck p erhält man für den Radius der Schale $\mathbf{a}^3 = q^2 / 16\pi p$ und dies ist gerade die Gleichgewichtsbedingung für eine geladene Schale mit Oberflächenspannung in einer flachen Raumzeit [27, 28]: Wegen der abstoßenden elektrischen Coulombkräfte ist ein negativer Druck $p = -q^2 / 16\pi \mathbf{a}^3$ erforderlich um ein statisches Gleichgewicht aufrechtzuhalten. [Analog ist im Falle einer massiven (ungeladenen) statischen Schale mit Radius \mathbf{a} in der Newtonschen Mechanik ein positiver Druck $p = M^2 / 16\pi \mathbf{a}^3$ nötig, um die nach innen gerichteten Gravitationskräfte zu kompensieren.]

Die Ladungsdichte $\sigma(x) = j^t(x)$ der inneren Schale berechnet sich ganz analog wie im Ein-Schalen-Modell. Die einzige nichtverschwindende Komponente des elektromagnetischen Feldtensors lautet im Zwei-Schalen-Modell $-F_{\tau\rho} = E_\rho = (q/\rho^2)H(\rho - \mathbf{a})$ und führt über die inhomogene Maxwell-Gleichung schließlich auf

$$j^\tau = \frac{q}{4\pi \mathbf{a}^2} \delta(\rho - \mathbf{a}),$$

bzw. in isotropen Koordinaten auf

$$\sigma(x) = \frac{q\beta C_3}{4\pi R^3 \Delta_+^3} \delta(x - \beta). \quad (2.47)$$

2.2.3 Analyse der Energiebedingungen

Da wir im nächsten Kapitel für das elektromagnetische Thirring-Problem Machsche Fragestellungen hinsichtlich der Induktion von Magnetfeldern und dem Auftreten von Mitführungseffekten durch die rotierende Massenschale untersuchen wollen, kommen den Energiebedingungen im Zwei-Schalen-Modell ausgezeichnete und zentrale Rollen zu. Wenn überhaupt eine Interpretation der Ergebnisse im Sinne Machs möglich sein sollte, dann

müssen wir als Minimalforderung an die Materiekonfiguration des Kosmos, die wir hier approximativ durch eine Materieverteilung in Form der äußeren Massenschale beschreiben, die Erfüllung der schwachen Energiebedingungen stellen. Dies macht man sich leicht im Limes schwacher Gravitationsfelder klar, in dem die übliche Mitführung der Inertialsysteme in Rotationsrichtung für eine negative Masse der Schale (d.h. eine negative Energiedichte) trivialerweise zu einer Mach-negativen Mitführung, d.h. entgegen dem Drehsinn der Schale führt. So werden wir in Abs. 4.2.1 sehen, daß unter bestimmten Bedingungen das induzierte Magnetfeld und die Mitführung für gewisse Parameterwerte von α , β und γ proportional zu $\tau_3^3(R) - \tau_0^0(R)$ sind und damit das Vorzeichen des zweiten Teils der schwachen Energiebedingungen zum einen die Orientierung des Feldes relativ zur Drehrichtung des Systems festlegt und zum anderen bestimmt, in welchem Parameterbereich die Mitführung in die sogenannte Anti-Mitführung umschlägt.

Wir bemerken an dieser Stelle, daß die innere Schale aufgrund ihrer Masselosigkeit, $\tau_0^0(a) \equiv 0$ und wegen $\tau_2^2(a) = \tau_3^3(a) < 0$ für $\gamma \neq 0$ den zweiten Teil der Energiebedingungen verletzt, nichtsdestotrotz aber stabil ist (vgl. die Bemerkungen im vorherigen Abschnitt).

Der erste Teil der schwachen Energiebedingungen für die äußere Massenschale,

$$\tau_0^0(R) \leq 0,$$

ist mit Gl. (2.45) und wegen $\delta = (1 + \alpha)^2 - \gamma^2 \geq 0$ nach Gl. (2.42) äquivalent zu $(1 + \alpha)(1 - \beta) + \Delta_+ - \delta \leq 0$, bzw. zu

$$\sqrt{\beta^2\delta^2 + 4\gamma^2(1 - \beta)^2} \leq (2 - \beta)\delta - 2(1 - \beta)(1 + \alpha). \quad (2.48)$$

Ist die rechte Seite dieser Ungleichung nichtnegativ, so können wir sie quadrieren und aus der Gültigkeit dieser Ungleichung dann die von Gl. (2.48) folgern. Dies ist der Fall für

$$\alpha \geq \frac{1}{2 - \beta} \left[\sqrt{(1 - \beta)^2 + \gamma^2(2 - \beta)^2} - 1 \right] =: \alpha_2.$$

Für $\alpha \geq \alpha_2$ ist Gl. (2.48) nach Quadrieren äquivalent zu einer Ungleichung 4. Ordnung in $\tilde{\alpha} = \alpha + 1$, die sich jedoch nach Division durch den Faktor δ auf eine quadratische Ungleichung in $\tilde{\alpha}$ reduziert, mit der Lösung

$$\alpha \geq \frac{1}{2}(\sqrt{\beta^2 + 4\gamma^2} - \beta) =: \alpha_3.$$

Dies ist eine größere untere Schranke als α_2 , denn

$$\frac{2 - \beta}{2}\sqrt{\beta^2 + 4\gamma^2} \geq \sqrt{(1 - \beta)^2 + \gamma^2(2 - \beta)^2} - \left(1 - \beta + \frac{\beta^2}{2}\right)$$

ist trivialerweise erfüllt, falls die rechte Seite negativ ist und ist andernfalls äquivalent zu der Ungleichung

$$\sqrt{(1 - \beta)^2 + \gamma^2(2 - \beta)^2} \geq (1 - \beta)\frac{1 - \beta}{1 - \beta + \frac{\beta^2}{2}},$$

die aber wegen $1 - \beta \leq 1 - \beta + \frac{\beta^2}{2}$ ebenfalls immer erfüllt ist, also $\alpha_3 \geq \alpha_2$.

Wir zeigen nun, daß α_3 eine echte Verschärfung der Einschränkung durch Ungleichung (2.42) ist, die aus der Bedingung $D_2 \geq 0$ resultierte, also $\alpha_3 \geq \alpha_1 = \sqrt{\gamma(\gamma + 2 - \beta)} -$

1 bzw. $\sqrt{\beta^2 + 4\gamma^2} + 2 - \beta \geq 2\sqrt{\gamma(\gamma + 2 - \beta)}$. Beide Seiten dieser Ungleichung sind nichtnegativ, wir können also wieder quadrieren, mit dem Resultat $\sqrt{\beta^2 + 4\gamma^2} \geq 2\gamma - \frac{\beta^2 - 2\beta + 2}{2 - \beta} = 2\gamma + \beta - \frac{2}{2 - \beta}$. Diese Ungleichung gilt, falls die rechte Seite negativ ist, d.h. für $\gamma < \frac{1}{2 - \beta} - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta^2 - 2\beta + 2}{2(2 - \beta)} =: \gamma_1(\beta)$. Andernfalls quadrieren wir nochmals und erhalten schließlich

$$\gamma \geq \frac{(1 - \beta)^2}{(2 - \beta)(2 - 2\beta + \beta^2)} =: \gamma_2(\beta).$$

Wie man sofort nachprüft, ist $\gamma_1(\beta) > \gamma_2(\beta)$ und obige Ungleichung ebenfalls erfüllt und wir sind am Ende unserer Analyse.

Der erste Teil der schwachen Energiebedingungen für die äußere Massenschale, $\tau_0^0(R) \leq 0$, führt demnach zu einer Verschärfung der unteren Schranke für α , bzw. zu einer unteren Schranke für den Radius $a = R\beta$ der inneren Schale:

$$\alpha \geq \frac{1}{2}(\sqrt{\beta^2 + 4\gamma^2} - \beta) := \alpha_3 \quad \text{bzw.} \quad (2.49)$$

$$\beta \geq \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\alpha} = \frac{2\alpha + 1 - \delta}{\alpha} =: \beta_1. \quad (2.50)$$

Für $\alpha^2 > \gamma^2$ ist β_1 negativ und Gl. (2.50) wegen $\beta \geq 0$ trivial erfüllt.

Den zweiten Teil der schwachen Energiebedingungen,

$$\tau_3^3(R) - \tau_0^0(R) \geq 0,$$

diskutieren wir getrennt für die beiden Fälle $\alpha^2 \geq \gamma^2$ (unterextremer und extremer Reissner-Nordström-Fall) und $\alpha^2 < \gamma^2$ (überextremer Reissner-Nordström-Fall).

Wir beginnen mit dem unterextremen und extremen Reissner-Nordström-Fall: Nach Gl. (2.46) sind die Spannungen $\tau_2^2(R) = \tau_3^3(R)$ wegen $D_2 \geq 0$ für $\alpha^2 \geq \gamma^2$ offensichtlich nichtnegativ. Gilt der erste Teil der Energiebedingungen, $-\tau_0^0(R) \geq 0$, so folgt auch die Gültigkeit des zweiten Teils, $\tau_3^3(R) - \tau_0^0(R) \geq 0$. Mit Gl. (2.50) entsprechen die Einschränkungen an die Parameter im (α, δ) -Parameterbereich gerade dem Streifen

$$1 + 2\alpha \leq \delta \leq 2 + 2\alpha.$$

[Wegen $\alpha^2 \geq \gamma^2$, d.h. $\delta \geq 1 + 2\alpha$ ist $\alpha \geq \alpha_3$ bzw. $\delta \geq 1 + (2 - \beta)\alpha$ stets erfüllt.]

Im überextremen Reissner-Nordström-Fall kann $\tau_3^3(R)$ für $\gamma^2 > \alpha^2$ negativ werden, um die in diesem Parameterbereich dominierenden abstoßenden Coulomb-Kräfte kompensieren zu können. Für bestimmte Werte von (α, β, γ) führt der zweite Teil der Energiebedingungen dann zu einer Verschärfung der unteren Schranken $\alpha \geq \alpha_3$ bzw. $\beta \geq \beta_1$. Wir führen nun die Variable $\tilde{\beta} = 1 - \beta$ ein und bringen $\tau_0^0(R)$ und $\tau_3^3(R)$ auf einen gemeinsamen, nichtnegativen Nenner, so daß ein positiver Zähler von $\tau_3^3(R) - \tau_0^0(R)$ auf folgende Ungleichung führt:

$$P_3(\delta; \alpha, \tilde{\beta}) \geq \sqrt{\delta^2(1 - \tilde{\beta})^2 - 4\delta\tilde{\beta}^2 + 4\tilde{\beta}^2(\alpha + 1)^2} \cdot P_2(\delta; \alpha, \tilde{\beta}), \quad (2.51)$$

wobei die Polynome

$$\begin{aligned} P_3(\delta; \alpha, \tilde{\beta}) &:= -\delta^3(3 - 2\tilde{\beta} + \tilde{\beta}^2) + 2\delta^2[\alpha(3 + \tilde{\beta}^2) + (3 + \tilde{\beta} + 5\tilde{\beta}^2)] \\ &\quad - 8\delta\tilde{\beta}(\alpha + 1)[\alpha(1 + \tilde{\beta}) + (1 + 3\tilde{\beta})] + 16(\alpha + 1)^3\tilde{\beta}^2, \\ P_2(\delta; \alpha, \tilde{\beta}) &:= -\delta^2(3 + \tilde{\beta}) + 2\delta[3\alpha(1 + \tilde{\beta}) + (3 + 4\tilde{\beta})] - 8(\alpha + 1)^2\tilde{\beta} \end{aligned}$$

im zulässigen Intervall ($\alpha \geq \alpha_3$ und $\gamma^2 > \alpha^2$)

$$\alpha + 1 \leq \alpha(1 + \tilde{\beta}) + 1 =: \delta_1 \leq \delta \leq \delta_2 := 2\alpha + 1$$

nichtnegativ sind, $P_2, P_3 \geq 0$. An den Intervallenden $\delta = \delta_1$ und $\delta = \delta_2$ sieht man dies unmittelbar. Da $P_2(\delta)$ die Form $P_2(\delta) = -u\delta^2 + v\delta - w$ mit geeigneten positiven Konstanten u, v und w hat, sichert dies bereits $P_2 \geq 0$ für alle $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$. $P_3(\delta)$ ist ein Polynom 3. Ordnung in δ und man beweist die Behauptung durch eine Kurvendiskussion in δ , z.B. durch eine Fallunterscheidung der möglichen Vorzeichen der ersten und zweiten Ableitung von $P_3(\delta)$ an der Stelle $\delta = \delta_1$.

Wir quadrieren also die Ungleichung (2.51) und erhalten zunächst eine polynomiale Ungleichung 6. Ordnung in δ , wobei sich jedoch die δ -unabhängigen Terme gerade wegheben und wir demnach einen Faktor δ ausklammern können. Beachtet man, daß $\delta = \delta_1$ bzw. $\alpha = \alpha_3$ gerade die Masse der inneren geladenen Schale ist und damit anschaulich gesprochen die Gesamtmasse α vollständig in der inneren Schale steckt, demnach für die äußere Massenschale keine weitere Masse mehr zur Verfügung steht, so folgt $\tau_V''(R) \equiv 0$ für $\alpha = \alpha_3$. Daher können wir einen weiteren Faktor $\delta - \delta_1$ abspalten und die Ungleichung (2.51) ist mit $\tilde{\alpha} = \alpha + 1$ äquivalent zu

$$4\tilde{\beta}^2\delta(\delta - \delta_1) \cdot P_4(\delta; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \geq 0,$$

mit einem Polynom 1. Ordnung in $\tilde{\beta}$

$$P_4(\delta; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) := Q_1(\delta, \tilde{\alpha}) - 2\tilde{\beta}Q_2(\delta, \tilde{\alpha})$$

und positiven, $\tilde{\beta}$ -unabhängigen Polynomen

$$\begin{aligned} Q_1(\delta, \tilde{\alpha}) &:= 3\delta(2\tilde{\alpha} - \delta)[(2\tilde{\alpha} - \delta)(\delta - \tilde{\alpha}) + 2\delta], \\ Q_2(\delta, \tilde{\alpha}) &:= (2\tilde{\alpha} - \delta)^2[(2\tilde{\alpha} - \delta)^2 + \frac{7}{2}\delta(\tilde{\alpha} - 1)] + 2\delta^2(2\tilde{\alpha} - 1 - \delta). \end{aligned}$$

Die Bedingung $P_4(\delta) \geq 0$ ist demnach äquivalent zu

$$\beta \geq 1 - \frac{Q_1(\delta, \tilde{\alpha})}{2Q_2(\delta, \tilde{\alpha})} =: \beta_2(\delta, \tilde{\alpha}). \quad (2.52)$$

Wir vergleichen nun diese untere Schranke mit der durch Gl. (2.50) gegebenen,

$$\beta \geq 1 - \frac{\delta - \tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} - 1} =: \beta_1(\delta, \tilde{\alpha}).$$

Eine Verschärfung dieser Ungleichung ergibt sich also für diejenigen Parameterwerte von (α, δ) , für die $\beta_2(\delta, \tilde{\alpha}) > \beta_1(\delta, \tilde{\alpha})$ gilt, also

$$2(\delta - \tilde{\alpha})Q_2(\delta, \tilde{\alpha}) > (\tilde{\alpha} - 1)Q_1(\delta, \tilde{\alpha}).$$

Wir dividieren durch den positiven Faktor $\tilde{\alpha}^3$, führen die Größe $z := \delta/\tilde{\alpha} \in [1, 2]$ ein und erhalten

$$[\tilde{\alpha}(z - 1)(2 - z) - z] [\tilde{\alpha}(2 - z)(z^2 - 2z + 4) + z(5z - 8)] > 0.$$

Wir dividieren durch z^2 , führen nun die Größe $y := \tilde{\alpha}(2 - z)/z \in [0, 1]$ ein und erhalten

$$[y(z - 1) - 1] [y(z^2 - 2z + 4) + (5z - 8)] > 0.$$

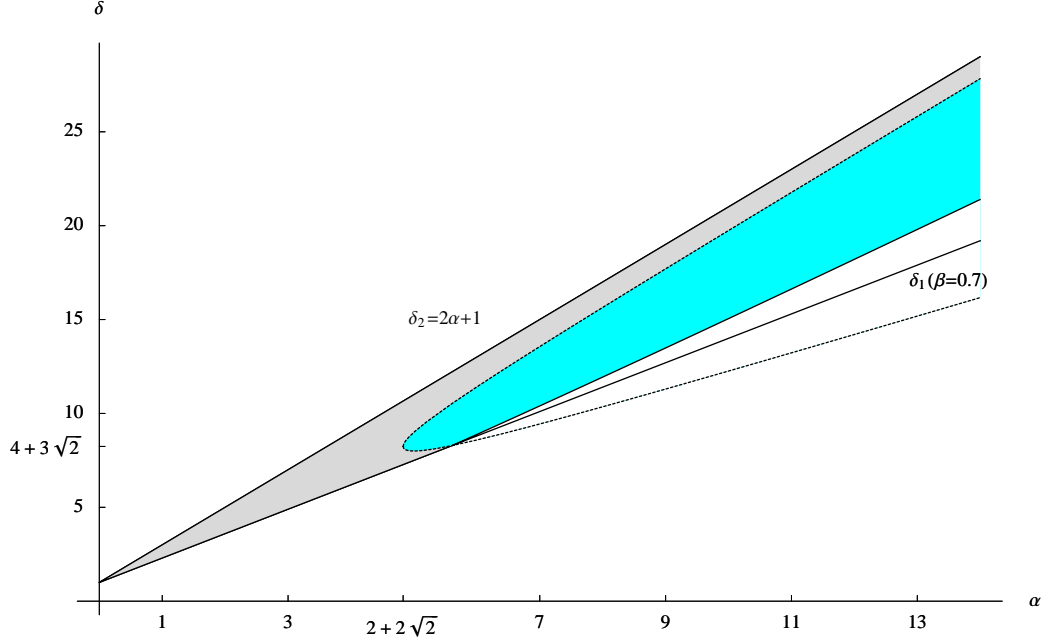


Abbildung 2.1: Die Graphik zeigt im überextremen Reissner-Nordström-Fall $\gamma^2 > \alpha^2$ für den Wert $\beta = 0.7$ denjenigen (α, δ) -Parameterbereich, in dem alle geforderten Einschränkungen an die Modellparameter erfüllt sind: Der erste Teil der schwachen Energiebedingungen, $\tau_0^0(R) \leq 0$, ist in dem durch die Geraden $\delta_1(\beta = 0.7) = \frac{13}{10}\alpha + 1$ und $\delta_2 = 2\alpha + 1$ begrenzten Ausschnitt gültig. Der zweite Teil, $\tau_3^3(R) - \tau_2^2(R) \geq 0$, ist in den grau schattierten Bereichen garantiert. Der dunkelgraue Bereich liegt innerhalb des (gestrichelten) Hyperbelzweiges $\beta_2(\delta, \tilde{\alpha}) = \beta_1(\delta, \tilde{\alpha})$, innerhalb dem die Bedingung $\beta \geq \beta_2$ des zweiten Teils der Energiebedingungen restriktiver ist, als die Bedingung $\beta \geq \beta_1$ aus dem ersten Teil der schwachen Energiebedingungen. Die Abbildung zeigt für alle Werte von $\beta \in [0, 1]$ im wesentlichen ähnliche Einschränkungen an α und δ . [Wir haben hier eine Darstellung in den Variablen α, β und δ einer Darstellung in α, β und γ vorgezogen, da bereits der Bereich $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_2$ aus der Bedingung $-\tau_0^0(R) \geq 0$ in den ursprünglichen dimensionslosen Parametern α und γ (für alle festen Werte von $\beta \in [0, 1]$) viel zu klein wäre, um eine vernünftige graphische Auflösung der Ungleichungen zu erzielen.]

Der zweite Faktor der linken Seite ist für $1 \leq z \leq 2$ stets nichtnegativ, d.h. der Parameterbereich mit $\beta_2(\delta, \tilde{\alpha}) > \beta_1(\delta, \tilde{\alpha})$ ist durch $y(z-1) > 1$ bzw. durch $\delta^2 - (3\tilde{\alpha} - 1)\delta + 2\tilde{\alpha}^2 < 0$ oder in der (α, δ) -Ebene durch

$$3\alpha + 2 - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha - 4} < 2\delta < 3\alpha + 2 + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha - 4} \quad (2.53)$$

gegeben, wobei diese Ungleichung nur für α -Werte mit $\alpha \geq 2 + 2\sqrt{2} \approx 4.83$, dem „Scheitelpunkt“ des Hyperbelastes zum Tragen kommt (siehe Abb. 2.1). Für große Werte von α geht obige Ungleichung in $\alpha + 2 < \delta < 2\alpha$ über (dies sind die Asymptoten der Hyperbeläste). Es gibt also im überextremen Reissner-Nordström-Fall für beliebig große Werte von α bzw. δ Streifen $2\alpha < \delta < 2\alpha + 1$ und $\alpha + 1 < \delta < \alpha + 2$, innerhalb denen die Bedingung $\beta \geq \beta_2$ des zweiten Teils der Energiebedingungen schwächer ist, als die Bedingung $\beta \geq \beta_1$ aus dem ersten Teil der schwachen Energiebedingungen (siehe Abb. 2.1).

Wir fassen unsere Gesamtanalyse der schwachen Energiebedingungen für den Energie-Impuls-Tensor der äußeren Massenschale in den beiden Fällen $\gamma^2 \geq \alpha^2$ und $\gamma^2 < \alpha^2$ kurz zusammen:

- i.) Im unterextremen und extremen Reissner-Nordström-Fall liefern die Energiebedingungen die untere Schranke $\alpha \geq \alpha_3$ aus Gl. (2.49) bzw. $\beta \geq \beta_1$ aus Gl. (2.50).
- ii.) Im überextremen Reissner-Nordström-Fall ergeben sich in bestimmten Bereichen (siehe Abb. 2.1) des Parameterraums zusätzliche schärfere Einschränkungen an den Radius $a = \beta R$ der inneren geladenen Schale, $\beta \geq \beta_2$ gemäß Gl. (2.52).

Kapitel 3

Systeme rotierender geladener Massenschalen

In Kapitel 3 betrachten wir Schalen in (langsamer) Rotation (mit einer Rotationsgeschwindigkeit $\omega R \ll 1$), d.h. neben Masse M , Ladung q und Radius R (bzw. a) ist der Drehimpuls J eine weitere, unsere Modellsysteme charakterisierende Größe. Physikalisch erwarten wir dann einerseits aufgrund der Rotation der Ladungen q , die einen Strom j in Drehrichtung verursachen, das Auftreten von zeitunabhängigen magnetischen Dipolfeldern. Andererseits führen die rotierenden Massenströme zu einer Mitführung der freien Teilchen bzw. der lokalen Inertialsysteme bezüglich festen Beobachtern im Unendlichen. Die Mitführung ist ihrerseits Ursache für zusätzliche gravitativ induzierte Magnetfelder. Mit den Magnetfeldern verbunden ist ein magnetisches Moment m und damit auch ein gyromagnetischer Faktor G der Schalen. Derartige Systeme werden in der Allgemeinen Relativitätstheorie mit Ehlers und Rindler [16] als „elektromagnetische Thirring-Probleme“ bezeichnet, wobei dieser Begriff ursprünglich für das rotierende Zwei-Schalen-System stand, wir hier darunter aber auch den Grenzfall des Ein-Schalen-Modells verstehen wollen.

Mathematisch handelt es sich bei diesen elektromagnetischen Thirring-Problemen um rotative Dipolstörungen der Reissner-Nordström-Geometrie. Dies bedeutet, daß wir die allgemeinen, gekoppelten, stationär-axialsymmetrischen Einstein-Maxwell-Gleichungen in dem Parameter ω linearisieren und für unsere Materiekonfigurationen der Schalenmodelle lösen. Technisch geschieht dies durch einen Potenzreihenansatz in der Winkelgeschwindigkeit ω für die Metrikfunktionen $g_{\mu\nu}$ und den elektromagnetischen Feldtensor $F_{\mu\nu}$, d.h. wir nehmen an, daß diese Größen analytische Funktionen in ω sind. Da wir uns nur auf die linearen Terme einer solchen Entwicklung beschränken, sind unsere Systeme nach wie vor sphärisch symmetrisch, denn physikalisch gesehen treten zentrifugale Deformationen der Schalen erst in 2. Ordnung ω auf. Darüber hinaus betrachten wir nur starre Rotation der Materie, schließen also differentielle Rotation explizit aus.

In Abs. 3.1 behandeln wir die Mitführungseffekte und induzierten Magnetfelder des Ein-Schalen-Systems, sowie das damit verbundene magnetische Moment und den gyromagnetischen Faktor. Wir leiten die relevanten Feldgleichungen in 1. Ordnung ω auf der Basis einer Störungsrechnung der Reissner-Nordström-Geometrie ab, geben ein erstes Integral für die Einstein-Gleichungen an, entkoppeln damit die Einstein-Maxwell-Gleichungen und werden letztendlich auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Radialkoordinaten geführt. Wir geben explizite Lösungen dieser Differentialgleichung für den Außen- und Innenraum der Schale an. (Diese sind demnach exakt in M/R und q/R und 1. Ordnung in ω .) Wir formulieren die Randbedingungen für die elektromagnetischen Felder und die Mitführungsfunktion und bestimmen daraus die bei der Integration der Feldgleichungen auftretenden Integrationskonstanten. Im letzten Teil von Abs. 3.1 berechnen wir schließlich über die Sprungbedingungen der Ableitungen der Metrikfunktionen an

der Schale den Gesamtdrehimpuls des Systems, aus dem asymptotischen Verhalten des Dipolfeldes sein magnetisches Moment und daraus den gyromagnetischen Faktor.

Im zweiten Teil von Kapitel 3 betrachten wir das ursprüngliche elektromagnetische Thirring-Problem, das rotierende Zwei-Schalen-Modell. Da beide Schalen mit einem unabhängigen Drehimpuls versehen werden, untersuchen wir zunächst getrennt die Fälle einer rotierenden äußeren Massenschale (I) und daraufhin den einer rotierenden inneren geladenen Schale (II) und stellen hier die entsprechenden Randbedingungen auf. Der allgemeine Fall zweier rotierender Schalen ergibt sich dann aufgrund der Linearität der Störungsrechnung als Superposition der beiden getrennten Fälle (I) und (II), z.B. für die Magnetfelder: $\mathbf{B} = \mathbf{B}^I + \mathbf{B}^{II}$.

Da die Rotation der einen Schale aufgrund des Mitführungseffektes zu einer nichtverschwindenden Winkelgeschwindigkeit der jeweils anderen Schale führt, sind die Winkelgeschwindigkeiten der Schalen keine voneinander unabhängigen Größen. Wir geben den Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit und Drehimpuls explizit an.

Abschließend zeigen wir anhand einer Modellrechnung wie dieser dynamische Übergang vom statischen Fall der nichtrotierenden Schalen zum stationären Fall der starren Rotation der beiden Schalen aussehen kann. Wir berechnen, der Einfachheit halber im Schwachfeldlimit, den adiabatischen Anschubmechanismus der Drehung der inneren Schale (mit verschwindendem Eigendrehimpuls) durch die Rotation der äußeren Massenschale.

3.1 Mitführungseffekte, Magnetfelder, magnetisches Moment und gyromagnetischer Faktor in 1. Ordnung ω

Der allgemeine Metrikansatz für unser physikalisches Modell und die darauf aufbauende Störungsrechnung in der Winkelgeschwindigkeit ω ergibt sich aufgrund der Stationarität, d.h. der Zeitunabhängigkeit der Rotation und der Axialsymmetrie des Systems. Es existieren zwei globale, kommutierende Killingvektorfelder ξ (zeitartig) und η (raumartig), und ein Koordinatensystem $(x^0 = t, x^1, x^2, x^3 = \varphi)$, in dem ξ und η bezüglich den lokalen Basisvektorfeldern $(\partial_t, \partial_{x^1}, \partial_{x^2}, \partial_\varphi)$ die Koordinatendarstellungen $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ und $\eta^\mu = (0, 0, 0, 1)$ besitzen. Aufgrund dieser Symmetrien sind die Metrikfunktionen $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ unabhängig von t und φ : $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^1, x^2)$.

Im Falle unserer starr, rein axial rotierenden, geladenen Massenschale idealer Flüssigkeit in zwei Raumdimensionen mit Vierergeschwindigkeitsvektorfeld u in der von ξ und η aufgespannten Ebene, $u = u^0(\xi + \omega\eta)$ bzw. $u^\mu = u^0(1, 0, 0, \omega)$, läßt sich nach einem Theorem von Kundt und Trümper [29] die Metrik weiter vereinfachen. In diesem Falle besitzen die beiden Killingvektorfelder Orthogonalflächen in dem Sinne, daß die Integralkurven von ξ und η in jedem Punkt orthogonal zu zweidimensionalen raumartigen Ebenen sind, die integrierbar sind. Entlang dieser Integralkurven lassen sich die in den Orthogonalflächen gewählten Koordinaten x^1 und x^2 durch den Fluß von ξ und η mittransportieren und so auf die gesamte Raumzeit global fortsetzen. Weiterhin kann man die Metrik in den (x^1, x^2) -Ebenen noch auf Diagonalgestalt bringen und erhält in den isotropen Koordinaten $(x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \vartheta, x^3 = \varphi)$ für das Linienelement folgende Form:

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{-2U} [e^{2K}(dr^2 + r^2 d\vartheta^2) + W^2 (d\varphi - \omega A dt)^2]. \quad (3.1)$$

Die Metrikpotentiale U , K , W und A hängen nur von r und ϑ ab. Die flache Metrik des Innenraumes der Schale ist durch $U, K, A = \text{const}$, sowie $W = e^K r \sin \vartheta$ gegeben. Für

$U = K = A = 0$ und $W = r \sin \vartheta$ erhält man die asymptotische Minkowski-Metrik in Kugelkoordinaten. Die Raumzeit läßt sich somit in den hier gewählten isotropen Koordinaten mit einer einzigen Karte überdecken, in dem wir die Metrikfunktionen auf ihren konstanten Wert an der Schale setzen.

Bis auf den konformen Faktor e^{2K} lassen sich alle Metrikpotentiale durch die beiden Killingvektoren ξ und η invariant charakterisieren, haben also eine koordinatenunabhängige Bedeutung:

$$W^2 = -g(\xi, \xi)g(\eta, \eta) + g(\xi, \eta)^2, \quad e^{2U} = \frac{W^2}{g(\eta, \eta)}, \quad A = -\frac{g(\xi, \eta)}{g(\eta, \eta)}.$$

Dabei kann man insbesondere die Metrikfunktion A physikalisch wie folgt interpretieren (siehe [40]): Wir untersuchen einen Beobachter, d.h. eine zeitartige Bahnkurve $x^\mu(\tau)$, parametrisiert durch die Eigenzeit τ , der bezüglich den ($t = \text{const}$)-Hyperebenen „ruht“, genauer der sich lokal senkrecht zu diesen raumartigen Hyperebenen bewegt. Für die Komponenten seiner Vierergeschwindigkeit u gilt also

$$u^\mu = dx^\mu/d\tau \sim \nabla^\mu t = g^{\mu\nu} \partial_\nu t = g^{\mu\nu} \delta^0_\nu = g^{\mu 0}$$

und daher folgt mit Gl. (3.1)

$$u = u^\mu \partial_\mu \sim \partial_t + \omega A \partial_\varphi = \xi + \omega A \eta.$$

Der invariante Drehimpuls eines solchen Beobachters ist proportional $g(\eta, u)$ und verschwindet:

$$g(\eta, u) = g_{\mu\nu} \delta_3^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} = g_{30} \frac{dt}{d\tau} + g_{33} \frac{d\varphi}{d\tau} = 0.$$

In diesem Sinne rotiert der Beobachter lokal nicht und es gilt:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{u^\varphi}{u^t} = \frac{g^{30}}{g^{00}} = \frac{-\omega A e^{-2U}}{-e^{-2U}} = \omega A.$$

Der Mitführungskoeffizient A gibt also das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeit $\Omega := d\varphi/dt$ unseres lokal nichtrotierenden Beobachters, gemessen von einem asymptotischen Beobachter zu der Winkelgeschwindigkeit der Massenschale an. Insofern beschreibt A die Stärke des Mitführungseffektes durch die umgebenden rotierenden Massen.

Auf der Basis der Metrik (3.1) führen wir nun eine Störungsrechnung in der Winkelgeschwindigkeit ω durch (siehe hierzu insbesondere [8]). Die Metrikfunktionen $g_{\mu\nu}$ und den elektromagnetischen Feldtensor $F_{\mu\nu}$ entwickeln wir in eine Potenzreihe in ω und lösen die Einstein-Maxwell-Gleichungen bezüglich der Metrik (3.1) in den jeweiligen Ordnungen der Potenzen von ω .

Die Beschränkung auf eine Störungsrechnung in 1. Ordnung in der Winkelgeschwindigkeit ermöglicht die Anzahl der unbekannteten Metrikfunktionen und ihrer unabhängigen Variablen weiter zu reduzieren. Da erst in Ordnung ω^2 und höheren Ordnungen zentrifugale Deformationen der Schale auftreten, ist diese in 1. Ordnung ω noch sphärisch symmetrisch, d.h. es gilt $W = e^K r \sin \vartheta$ und es verbleiben lediglich drei unbekanntete Metrikfunktionen U , $V := K - U$ und A , die lediglich von der Radialkoordinate r abhängen,

d.h. unabhängig von ϑ sind, siehe [8, 10]. Wir können somit die Metrik (3.1) in der physikalisch intuitiven Form

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{2V} [dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta (d\varphi - \omega A dt)^2] \quad (3.2)$$

schreiben. Für die folgenden Rechnungen werden wir jedoch nur Terme linear in ω berücksichtigen.

Beachtet man, daß ein stationär rotierendes System unter der gleichzeitigen Transformation $t \rightarrow -t$ und $\varphi \rightarrow -\varphi$ invariant ist und insbesondere die Metrikfunktionen unabhängig von t sind, so folgt, daß alle Metrikpotentiale und Komponenten des elektromagnetischen Feldtensors nach geraden Potenzen von ω entwickelt werden können, z.B. $E_r = \overset{0}{E}_r + \omega^2 \overset{2}{E}_r + \dots$ oder $\Omega = \omega A = \omega(\overset{0}{A} + \omega^2 \overset{2}{A} + \dots)$. Daher bleiben die Funktionen $U(r)$ und $V(r)$ aus Kapitel 2 in 1. Ordnung ω unverändert und $A(r)$ ist wegen des Vorfaktors ω in Gl. (3.2) unabhängig von ω .

Wir schließen die Betrachtungen zur Störungsrechnung auf stationär-axialsymmetrischen Raumzeiten mit einigen Bemerkungen zu höheren Ordnungen in der Winkelgeschwindigkeit ab. (Dabei beschränken wir uns auf Schalenmodelle und solche Systeme, die in Beziehung zu unseren elektromagnetischen Thirring-Problemen stehen.) Mathematisch separiert man die r - und ϑ -Abhängigkeit der Metrikfunktionen U , K , $W/\sin \vartheta$ und A in Gl. (3.1) und der Komponenten des elektromagnetischen Feldtensors durch eine Entwicklung nach Legendre-Polynomen $P_l(\cos \vartheta)$.

- i.) Pfister und Braun [8, 10] ist es gelungen eine stationär-axialsymmetrische Vakuumlösung der Einstein-Gleichungen über eine Schwarzschild-Schale (d.h. eine ungeladene Massenschale) in 2. und 3. Ordnung in der Winkelgeschwindigkeit an eine flache Innenmetrik anzuschließen. Dabei treten in Ordnung ω^2 , wie schon erwähnt, zentrifugale Deformationen der Schale auf. Die Metrikfunktionen sind daher bezüglich der ϑ -Abhängigkeit Linearkombinationen der Legendre-Polynome mit $l = 0$ und $l = 2$, z.B. $\overset{2}{U} = g(r)P_0(\cos \vartheta) + h(r)P_2(\cos \vartheta)$ und analog für die Potentiale $\overset{2}{K}$, $\overset{2}{W}/\sin \vartheta$ und $\overset{2}{A}$. Will man die Flachheit des Innenraums auch in Ordnung ω^3 aufrechterhalten, so muß man schließlich differentielle Rotation der Schale zulassen.

Darüber hinaus konnte Pfister [11] zeigen, daß zu gegebenen Werten von M und R in jeder Ordnung ω^n eine eindeutige quasispärische rotierende Massenschale mit flachem Innern existiert. Aufgrund der Flachheitsbedingung besitzt die rotierende Massenschale eine korrekte Trägheitsstruktur in dem Sinne, daß im Innenraum außer den Coriolis- und Zentrifugalkräften der Newtonschen Physik keine Trägheitskräfte höherer Ordnung induziert werden (soweit es sich auf den stationär-axialsymmetrischen Fall bezieht; für zeitabhängige langsame Rotation würde man darüber hinaus Euler-Kräfte proportional $\dot{\omega}$ erwarten, vgl. Abs. 3.2.5).

- ii.) Im Falle elektromagnetischer Testfelder (dies entspricht einer Linearisierung der Feldgleichungen in der Ladung q) werden wir weiter unten sehen, daß die Einstein-Maxwell-Gleichungen entkoppeln und man „lediglich“ die Maxwell-Gleichungen auf einem gegebenen rotativ gestörten Schwarzschild-Hintergrund lösen muß und für die Metrikfunktionen, insbesondere den Mitführungskoeffizienten A die Resultate des ungeladenen Falles [7] übernehmen kann (vgl. [18]). In dieser Näherung berechnet man Korrekturen 2. Ordnung in ω für die elektrischen Felder in der Weise, daß

man eine „effektive“ zweite Ordnung-Rechnung in ω durchführt: die Lösungen der elektromagnetischen Testfelder der 1. Ordnung ω entsprechen einem magnetischen Dipolfeld, das als Quellterm in den Differentialgleichungen der nächsten, zweiten Ordnung für die elektrischen Quadrupolfelder auftritt, siehe [30].

- iii.) Im Schwachfeldlimit haben Ehlers und Rindler [16] unter der Annahme exakt sphärischer Symmetrie des Zwei-Schalen-Modells Quadrupolkorrekturen des elektrostatischen Coulombfeldes berechnet.

3.1.1 Rotative Dipolstörungen der Reissner-Nordström-Geometrie

Im Folgenden integrieren wir die einzige in 1. Ordnung ω nichttriviale Einstein-Gleichung

$$G_3^0 = -\frac{\omega \sin^2 \vartheta}{2\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left[\rho^4 \frac{d}{d\rho} A(\rho) \right] = 8\pi(T_3^0 + S_3^0), \quad (3.3)$$

die die r -Abhängigkeit des Mitführungskoeffizienten $A(r)$ bestimmt und entkoppeln damit die Einstein-Maxwell-Gleichungen. $S_3^0 = (1/4\pi)F_\lambda^0 F_3^\lambda$ ist dabei der in ω linearisierte Beitrag des elektromagnetischen Feldes zum Energie-Impuls-Tensor. Dazu ist es notwendig das Verhalten der Komponenten $F_{\mu\nu}$ des elektromagnetischen Feldtensors unter den Transformationen $t \rightarrow -t$ und $\omega \rightarrow -\omega$ zu bestimmen. Nun sind die elektrischen Anteile des Feldtensors zeitsymmetrisch und daher gerade Funktionen in ω , reduzieren sich also in linearer Näherung auf das elektrostatische Coulombfeld E_ρ aus Gl. (2.5). Die magnetischen Anteile sind dagegen antisymmetrisch in der Zeit, daher ungerade Funktionen in ω , so daß wir bei einer Entwicklung nach Potenzen von ω einen Faktor ω ausklammern können (vgl. mit der ω -Abhängigkeit der Metrikfunktion A).¹ Für S_3^0 ergibt sich somit in 1. Ordnung in der Winkelgeschwindigkeit $S_3^0 = (1/4\pi)E_\rho B_\vartheta$.

Da wir in unseren Modellsystemen nur Ströme aufgrund der Rotation der Schalen um die Achse zulassen (und auch die Mitführungseffekte sich stets in Rotationsrichtung auswirken) treten keine Ströme in r - und ϑ -Richtung auf, d.h. die einzige nichtverschwindende Stromkomponente ist j^φ . Aufgrund der inhomogenen Maxwell-Gleichungen ist daher $B_\varphi = F_{r\vartheta} \equiv 0$. Die einzigen rotationsinduzierten magnetischen Felder sind somit B_r und B_ϑ , die durch die homogene Maxwell-Gleichung, $F_{[12,3]} = 0$, bzw.

$$\frac{d}{dr} B_r + \frac{d}{d\vartheta} B_\vartheta = 0 \quad (3.4)$$

und die inhomogene Maxwell-Gleichung, $F^{3\nu}{}_{;\nu} = 4\pi j^3$, bzw.

$$4\pi j^\varphi = \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \vartheta} \frac{d}{d\rho} [F(\rho) B_\vartheta] - \frac{1}{\rho^4 \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{B_\rho}{\sin \vartheta} \right) + \frac{\omega}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 A E_\rho) \quad (3.5)$$

festgelegt sind. Da der Träger von T_ν^μ nur an der Stelle $x = 1$ lokalisiert ist und S_3^0 über die Sprungfunktion in $E_\rho = (q/\rho^2)H(\rho - \mathbf{R})$ dort unstetig ist, betrachten wir Gl. (3.3) bis (3.5) getrennt im Innen- und Außenraum.

Für $x \geq 1$ lautet Gl. (3.5):

$$-\frac{\omega \sin^2 \vartheta}{4} \frac{d}{d\rho} \left[\rho^4 \frac{d}{d\rho} A(\rho) \right] = q B_\vartheta. \quad (3.6)$$

¹Dies ergibt sich auch aus einer Analyse des Transformationsverhaltens der Maxwell-Gleichungen in 1. Ordnung ω unter den Transformationen $t \rightarrow -t$ und $\omega \rightarrow -\omega$.

Da einerseits die Metrikfunktion A nur eine Funktion der Radialkoordinate ist und andererseits die Ursache des Stroms j^φ die rotierenden Ladungen q sind und demnach im Grenzwert $q \rightarrow 0$ auch das Magnetfeld verschwinden sollte, machen wir gemäß Gl. (3.6) für B_ϑ den folgenden Separationsansatz: $B_\vartheta = \omega q f(r) \sin^2 \vartheta$ mit einer dimensionslosen Funktion $f(r)$. Aus Gl. (3.4) folgt damit $B_r = \omega q R g(r) \sin \vartheta \cos \vartheta$ mit $f(r) = -(R/2) dg(r)/dr$. Die Gl. (3.3) und (3.5) stellen demzufolge zwei gewöhnliche gekoppelte Differentialgleichungen für die beiden unbekannt Funktionen $g(r)$ und $A(r)$ dar. Geometrisch beschreiben die ϑ -Abhängigkeiten von B_r und B_ϑ ein Dipolfeld. Da diese stetig an den Innenraum anschließen ist der Ansatz auch dort gültig.

Für $0 \leq x \leq 1$ vereinfachen sich Gl. (3.5) und (3.6) drastisch und entkoppeln, da dort der elektromagnetische Beitrag S_3^0 des Energie-Impuls-Tensors verschwindet:

$$\frac{d}{dr} \left(r^4 \frac{d}{dr} A \right) = 0, \quad \frac{d^2}{dr^2} g - \frac{2}{r^2} g = 0, \quad (3.7)$$

mit den im Ursprung $r = 0$ regulären Lösungen

$$A_2(r) = \mu_2, \quad g_2(r) = \eta_2 r^2 / R^2 \quad (3.8)$$

und den dimensionslosen Konstanten μ_2 und η_2 . [Die beiden anderen homogenen Lösungen $A_2(r) = \lambda_2/r^3$ und $g_2(r) = \zeta_2/r$ divergieren im Zentrum, daher müssen die Konstanten λ_2 und ζ_2 verschwinden.]

Bemerkungen zu den Lösungen (3.8):

- i.) Wegen $A_2(r) = \text{const}$ ist der Innenraum wie erwartet auch in 1. Ordnung ω weiterhin flach.
- ii.) Transformiert man die Komponenten des Magnetfeldes auf kartesische Koordinaten, so erhält man ein konstantes Feld $B_z = (\omega q/R)\eta_2$ entlang der z -Achse. [Man vergleiche mit der Situation einer rotierenden geladenen Schale mit Radius R , Ladung q und Winkelgeschwindigkeit ω in der klassischen Elektrodynamik: $\mathbf{B} = (2\omega q/3R)\mathbf{e}_z$.]
- iii.) Zwar entkoppeln die Gl. (3.7) für $0 \leq x \leq 1$, über die Integrationskonstanten μ_2 und η_2 , die sich aus den Anschlußbedingungen der Mitführung und des Magnetfeldes an der Schale ergeben, sind aber A_2 und g_2 nicht völlig unabhängig voneinander.

Im Außenraum läßt sich mit $B_\vartheta \sim f(r) \sim dg(r)/dr$ sofort ein erstes Integral von Gl. (3.6) angeben:

$$\frac{d}{d\rho} A(\rho) = \frac{1}{\rho^4} [2q^2 R g(\rho) - 4MR^2 \lambda_1], \quad (3.9)$$

mit einer weiteren dimensionslosen Integrationskonstanten λ_1 . [Dabei haben wir bei der Integration den Faktor $-4MR^2$ vor λ_1 mit Blick auf das Standardresultat für die Mitführung im Außenraum einer rotierenden, ungeladenen Schale im Schwachfeldfall, $A(r) = \frac{4}{3}MR^2 r^{-3}$, gewählt.] Mit Gl. (3.9) entkoppeln wir schließlich die Einstein-Maxwell-Gleichungen: Eliminiert man $dA(\rho)/d\rho$ in Gl. (3.5) mittels (3.9) und beachtet, daß der Strom an die Schale gebunden ist, d.h. $j^\varphi \equiv 0$ im Außenraum, so erhält man schließlich die folgende gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Magnetfeldfunktion $g(\rho)$:

$$\frac{d}{d\rho} \left[F(\rho) \frac{d}{d\rho} g(\rho) \right] - \frac{2}{\rho^2} \left(1 + \frac{2q^2}{\rho^2} \right) g(\rho) = -\frac{8MR\lambda_1}{\rho^4}. \quad (3.10)$$

Unsere elektromagnetischen Thirring-Probleme reduzieren sich letztendlich darauf, eine Lösung $g(\rho)$ dieser Differentialgleichung zu finden, damit Gl. (3.9) zu integrieren und über die Randbedingungen, das sind Regularität von $g(r)$ und $A(r)$ im Ursprung und im Unendlichen, Stetigkeit von $g(r)$ und $A(r)$, und die Stetigkeits- bzw. Unstetigkeitsbedingung von $dg(r)/dr$ und $dA(r)/dr$ an der Schale alle Integrationskonstanten in ihrer Abhängigkeit von M und q zu bestimmen.

3.1.2 Lösungen der Einstein-Maxwell-Gleichungen in 1. Ordnung ω

Überraschenderweise findet man für die beiden Differentialgleichungen (3.9) und (3.10) recht einfache Lösungen in Form von Polynomen in ρ und ρ^{-1} , sowie Termen mit logarithmischer ρ -Abhängigkeit. Die allgemeine Lösung g der Differentialgleichung zweiter Ordnung (3.10) für den Außenraum $x \geq 1$ hat die Form

$$g_1(r) = \lambda_1 \hat{g}[\rho(r)] + \eta_1 \bar{g}[\rho(r)] + \zeta_1 \bar{\bar{g}}[\rho(r)], \quad (3.11)$$

mit dimensionslosen Integrationskonstanten η_1 und ζ_1 . Mit $\hat{g}(\rho)$ bezeichnen wir eine möglichst einfache partikuläre Lösung und mit $\bar{g}(\rho)$ und $\bar{\bar{g}}(\rho)$ zwei unabhängige homogene Lösungen von Gl. (3.10). Durch einen Potenzreihenansatz in ρ für die erste Fundamentallösung $\bar{g}(\rho)$ und anschließende Anwendung des d'Alembertschen Reduktionsverfahrens, $\bar{\bar{g}}(\rho) \sim \bar{g}(\rho) \int^\rho d\rho' [F(\rho')]^{-1} [\bar{g}(\rho')]^{-2}$, erhält man

$$\hat{g}(\rho) = \frac{4R}{3\rho}, \quad \bar{g}(\rho) = \frac{1}{R^2} \left(\rho^2 - 3q^2 + \frac{2q^4}{M\rho} \right), \quad (3.12)$$

$$\bar{\bar{g}}(\rho) = \frac{3M^2R}{4(M^2 - q^2)^2} \left[\frac{2q^2}{3\rho} \left(1 + \frac{2q^2}{M^2} \right) - \rho - M + R^2 \bar{g}(\rho) S(\rho; M, q) \right], \quad (3.13)$$

mit

$$S(\rho; M, q) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{q^2 - M^2}} \operatorname{arccot} \left(\frac{\rho - M}{\sqrt{q^2 - M^2}} \right) & \text{für } q^2 > M^2, \\ \frac{1}{2\sqrt{M^2 - q^2}} \log \left(\frac{\rho - M + \sqrt{M^2 - q^2}}{\rho - M - \sqrt{M^2 - q^2}} \right) & \text{für } q^2 \leq M^2. \end{cases}$$

[Den Zweig von $y = \operatorname{arccot}(z)$ definieren wir derart, daß die Funktion im Bereich $z \rightarrow -\infty$ bis $z \rightarrow +\infty$ die Werte π bis 0 annimmt.] Im extremen Reissner-Nordström-Fall, $q^2 = M^2$, vereinfacht sich $\bar{\bar{g}}(\rho)$ in Gl. (3.13) zu einer rationalen Funktion in ρ :

$$\bar{\bar{g}}(\rho) \Big|_{q^2=M^2} = \frac{R(2\rho - M)(5\rho^2 - 5M\rho + 2M^2)}{10\rho(\rho - M)^3}. \quad (3.14)$$

Bemerkungen zu den Magnetfeldfunktionen $g(\rho)$:

- i.) Die homogenen Lösungen (3.12) und (3.14) wurden bereits von Bičák und Dvořák [31, 32] im Rahmen einer Analyse stationärer Störungen auf Reissner-Nordström gefunden und unabhängig davon von uns in [33] entdeckt. Die Lösungen (3.12) und (3.13) findet man auch bei Briggs et al. [21] und Mustafa et al. [22].
- ii.) Regularität der Magnetfelder im Unendlichen erzwingt, daß im Außenraum $x \geq 1$ die Konstante η_1 Null sein muß, denn $\bar{g}(\rho)$ divergiert für $\rho \rightarrow \infty$.

- iii.) Entwickelt man $\bar{g}(\rho)$ nach Potenzen von ρ^{-1} , so wird klar, daß wir die Normierung von $\bar{g}(\rho)$ so gewählt haben, daß $\bar{g}(\rho)$ asymptotisch von der Ordnung $O(\rho^{-1})$ ist, $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \bar{g}(\rho) = R/\rho$, insbesondere dort unabhängig von M und q ist. [Dies ist konsistent damit, daß Gl. (3.10) im Grenzwert $M \rightarrow 0$ und $q \rightarrow 0$ in Gl. (3.7) übergeht, mit der im Unendlichen regulären Lösung $g(\rho) \sim R/\rho$.] In einer solchen asymptotischen Entwicklung heben sich gerade die Terme mit Potenzen ρ^1 und ρ^0 weg, da für kleine Werte von $\epsilon := \sqrt{M^2 - q^2}/(\rho - M)$ die Funktion $S(\rho; M, q)$ sich wie

$$S(\rho; M, q) = \frac{1}{\rho - M} \left(1 + \frac{\epsilon^2}{3} + \frac{\epsilon^4}{5} + \dots \right)$$

verhält.

- iv.) Transformiert man auf kartesische Koordinaten oder auf lokal nichtrotierende, inertielle Beobachter, so ergibt sich für das Magnetfeld selbst

$$\begin{aligned} B_{\hat{r}} &= \frac{e^{-2V} B_r}{r^2 \sin \vartheta} \sim \frac{q}{r^3} \omega \cos \vartheta, \\ B_{\hat{\vartheta}} &= \frac{e^{-2V} B_{\vartheta}}{r \sin \vartheta} \sim -\frac{q}{r^3} \omega \sin \vartheta, \end{aligned}$$

also das korrekte radiale Abfallverhalten und die charakteristische ϑ -Abhängigkeit magnetischer Dipolfelder der klassischen Elektrodynamik.

- v.) Wir bemerken noch, daß es Pfister [34] gelungen ist, über die hier betrachteten „Rotationsstörungen“ hinaus, für allgemeine stationäre Störungen der Reissner-Nordström-Metrik mit beliebigen Drehimpulsquantenzahlen l und beiden Paritätsklassen Lösungen der Gl. (3.10) entsprechenden Differentialgleichung in der Form $\bar{g}_l(\rho) = \sum_{k=-1}^{l+1} a_{k,l} \rho^k$ mit $a_{1,l} = 0$ und $\bar{g}_l(\rho) = \sum_{k=-1}^l b_{k,l} \rho^k + \bar{g}_l(\rho) S(\rho; M, q)$ zu finden. Für $q = 0$, d.h. Störungsrechnung auf einem Schwarzschild-Hintergrund ist es sogar möglich, aus den Rekursionsrelationen des Potenzreihenansatzes in ρ geschlossene Formeln für die Koeffizienten $a_{k,l}$ und $b_{k,l}$ anzugeben. Im extremen Reissner-Nordström-Fall, in dem die Lösungen zu einfachen rationalen Funktionen in ρ entarten, ist dies Bičák [31] gelungen.
- vii.) An der Schale bei $r = R$ bzw. $\rho = RD$ vereinfacht sich die Funktion S bezüglich der Parameter α und $\kappa := \alpha^2 - \gamma^2$ zu

$$RS(RD; M, q) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-\kappa}} \operatorname{arccot} \left(\frac{1 + \kappa}{2\sqrt{-\kappa}} \right) & \text{für } \kappa < 0, \\ 1 & \text{für } \kappa = 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{\kappa}} \log \left(\frac{1 + \sqrt{\kappa}}{1 - \sqrt{\kappa}} \right) & \text{für } \kappa > 0, \end{cases}$$

d.h. sie ist insbesondere nicht explizit von α abhängig.

Wir können nun auch die Mitführungsfunktionen im Außenraum $A_1(r)$ explizit berechnen, indem wir Gl. (3.9) integrieren. Dazu schreiben wir in Anlehnung an Gl. (3.11) $A_1(r)$ in der Form

$$\begin{aligned} A_1(\rho) &= C_1 \cdot A_1(r) \\ &= \frac{2q^2}{R^2} \left\{ \lambda_1 \hat{A}[\rho(r)] + \eta_1 \bar{A}[\rho(r)] + \zeta_1 \bar{\bar{A}}[\rho(r)] \right\} + \frac{4MR^2 \lambda_1}{3[\rho(r)]^3} + \mu_1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

und erhalten

$$\hat{A}(\rho) = -\frac{R^4}{3\rho^4}, \quad \bar{A}(\rho) = R \left(-\frac{1}{\rho} + \frac{q^2}{\rho^3} - \frac{q^4}{2M\rho^4} \right), \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{A}}(\rho) = & \frac{3MR^4}{8(M^2 - q^2)^2} \left\{ -\frac{1}{\rho} + \frac{M}{\rho^2} + \frac{q^2 + 2M^2}{3\rho^3} - \frac{q^2(M^2 + 2q^2)}{3M\rho^4} \right. \\ & \left. + \left[1 + \frac{2M}{R}\bar{A}(\rho) \right] S(\rho; M, q) \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Für $q^2 = M^2$ vereinfacht sich Gl. (3.17) wieder:

$$\bar{\bar{A}}(\rho) \Big|_{q^2=M^2} = -\frac{R^4(5\rho^2 - 4M\rho + M^2)}{20\rho^4(\rho - M)^2}. \quad (3.18)$$

Asymptotisch ist $\bar{\bar{A}}(\rho)$ von der Ordnung $O(\rho^{-4})$: $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \bar{\bar{A}}(\rho) = -R^4/4\rho^4$. Zwar ist $A_1(\rho)$ in Gl. (3.15) mit Gl. (3.16) und (3.17) eine asymptotisch reguläre Funktion, da wir jedoch fordern, daß die Mitführung im Unendlichen verschwindet, $\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 0$, statische Beobachter dort also nicht mitgeführt werden sollen, sondern in Ruhe verbleiben, muß μ_1 verschwinden, $\mu_1 = 0$. Schließlich definieren wir z.B. die Rotation unserer Schalen gerade gegenüber solchen festen Beobachtern und dies kann nur dann eine physikalisch sinnvolle Größe sein, wenn die Beobachter selbst von der Drehung der Schale völlig unbeeinflusst bleiben.

3.1.3 Bestimmung der Integrationskonstanten

Bei der Integration der entsprechenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung in r bzw. ρ für die Magnetfeldfunktion g und die Mitführungsfunktion A im Innen- und Außenraum treten insgesamt 8 Integrationskonstanten auf: η_i und ζ_i für g und μ_i und λ_i für A ($i = 1, 2$). Die Forderung nach Regularität im Zentrum und im Unendlichen reduzierte die Anzahl nichtverschwindender Konstanten bereits auf vier: $\zeta_2 = \lambda_2 = 0$ bzw. $\eta_1 = \mu_1 = 0$. Die verbleibenden Konstanten η_2 , μ_2 und ζ_1 , λ_1 werden durch die physikalischen Modelleigenschaften unseres Ein-Schalen-Systems bestimmt und sind folglich Randbedingungen an der Schale $r = R$ bzw. $\rho = RD$. Im Folgenden werden diese über die Stetigkeits- bzw. Unstetigkeitsbedingungen des Magnetfeldes und der Metrikfunktion bestimmt. Diese sind physikalisch gesehen eine Konsequenz der Ladungs- und Materieströme.

Da wir die Funktionen \hat{g} , \bar{g} und $\bar{\bar{g}}$ bzw. \hat{A} , \bar{A} und $\bar{\bar{A}}$ in der Reissner-Nordström-Variablen ρ notiert haben, müssen wir, um die Ableitungen von $g(r)$ und $A(r)$ nach der isotropen Radialkoordinaten r an der Schale angeben zu können, die Transformationskoeffizienten der Ableitungen bestimmen:

$$\left. \frac{d\rho}{dr} \right|_{R_+} = \frac{D}{C} = 1 - \kappa, \quad \left. \frac{d\rho}{dr} \right|_{R_-} = D.$$

Wir beginnen zunächst mit den Stetigkeitsbedingungen für $g(r)$ und $A(r)$, die auf lineare, homogene Bedingungsgleichungen führen. Wie in Abs. 2.1.1 und 3.1 betont, ist die Metrik in isotropen Koordinaten an der Schale stetig, also insbesondere $A_1(r = R) = A_2(r = R)$:

$$-\mu_2 + \frac{8(\alpha D - \gamma^2)}{3D^4} \lambda_1 + 8\gamma^2 \bar{\bar{A}}(RD) \zeta_1 = 0. \quad (3.19)$$

In Analogie zur klassischen Elektrodynamik ist die radiale Magnetfeldkomponente B_r ebenso stetig, d.h. $g_1(r = R) = g_2(r = R)$:

$$-\eta_2 + \frac{4}{3D}\lambda_1 + \bar{g}(RD)\zeta_1 = 0. \quad (3.20)$$

Gleichung (3.20) ist dabei nichts anderes als die wohlbekannte Randbedingung eines Magnetfeldes \mathbf{B} an der Grenzfläche (mit Normalenvektor \mathbf{n}) zwischen zwei Medien: $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$. (Lokal kann man stets auf ein Lorentzsystem transformieren, bezüglich dem die Randbedingungen diese Form des flachen Raumes annehmen.)

Die Inhomogenitäten (Dichten) j^φ und T_3^0 in den Differentialgleichungen (3.5) und (3.3), die in integrierter Form gerade den Strom der Ladungsträger und den Drehimpuls der Materie ergeben, führen dazu, daß die Ableitungen $g'(r)$ und $A'(r)$ an dieser Grenzfläche unstetig sind. Damit der Energie-Impuls-Tensor $T_\nu^\mu = \tau_\nu^\mu \delta(r - R)$ tatsächlich einen starr, rein axial rotierenden Körper beschreibt, muß die Vierergeschwindigkeit u^μ der Materie durch einen zeitartigen Eigenvektor der Form $u^\mu = u^0(1, 0, 0, \omega)$ mit $\omega = \text{const}$ der Eigenvektorgleichung $T_\nu^\mu u^\nu = -\varrho_0 u^\mu$ gegeben sein, siehe [18]. ϱ_0 ist die lokale Ruhenergiedichte und u^0 ergibt sich aus der Normierungsbedingung $u^\mu u_\mu = -1$. Die Komponenten von u^μ sind demnach alle konstant, insbesondere unabhängig von ϑ . Eliminiert man die Ruhenergiedichte ϱ_0 aus den Eigenvektorgleichungen mit $\mu = 0$ und $\mu = 3$, dann erhält man in 1. Ordnung in der Winkelgeschwindigkeit $\tau_3^0 = \omega(\tau_0^0 - \tau_3^3)$ und mit $\tau_0^3 = (g_{33})^{-1}[g_{00}\tau_3^0 + g_{03}(\tau_3^3 - \tau_0^0)]$ schließlich

$$\tau_3^0 = \omega R^2 e^{2(V_2 - U_2)(R)} [1 - A_2(R)] [\tau_3^3 - \tau_0^0] \sin^2 \vartheta \quad (3.21)$$

$$= \frac{\omega RC}{2\pi D^3} (1 - \mu_2) \Delta\tau \sin^2 \vartheta. \quad (3.22)$$

Andererseits kann man wie in Abs. 2.1.2 die Komponente τ_3^0 des Energie-Impuls-Tensors auch durch Integration der Einstein-Gleichung (3.3) von $R - \epsilon$ nach $R + \epsilon$ bestimmen. Mit Gl. (3.8) und (3.9), wegen der Stetigkeit von $g(r)$ an der Stelle $r = R$, sowie aufgrund von $A_2'(r) \equiv 0$ ergibt sich im Limes $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \tau_3^0 &= -\frac{\omega R^2}{16\pi} e^{-2U_2(R)} \frac{d}{dr} A_1(r = R) \sin^2 \vartheta \\ &= \frac{\omega RC}{2\pi D^3} \left[\left(\alpha - \frac{4\gamma^2}{3D} \right) \lambda_1 - \gamma^2 \bar{g}(RD)\zeta_1 \right] \sin^2 \vartheta \end{aligned} \quad (3.23)$$

und durch Vergleich mit Gl. (3.22) erhalten wir schließlich die inhomogene Beziehung

$$\Delta\tau \mu_2 + \left(\alpha - \frac{4\gamma^2}{3D} \right) \lambda_1 - \gamma^2 \bar{g}(RD)\zeta_1 = \Delta\tau. \quad (3.24)$$

Die Sprungbedingung für die radiale Ableitung $g'(r)$ bzw. für die Tangentialkomponente des Magnetfeldes B_ϑ an der Schale entspricht der Randbedingung $\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = (4\pi/c)\mathbf{j}$ der klassischen Elektrodynamik. Sie ergibt sich durch Integration der inhomogenen Maxwell-Gleichung (3.5) in isotropen Koordinaten über das Intervall $[R - \epsilon, R + \epsilon]$ im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$:

$$4\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} dr j^3 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} dr F^{3\nu}_{;\nu}. \quad (3.25)$$

Auf der Schale lokalisierte Ströme proportional zu $\delta(x - 1)$ erhält man in Gl. (3.5) nur durch die ρ -Ableitungen von B_ϑ und E_ρ . Der Integrand der rechten Seite in Gl. (3.25) reduziert sich demgemäß auf

$$j^\varphi = \frac{\omega q C}{4\pi R^3 D^3} \left[-\frac{R^2}{2CD} \frac{d^2}{dr^2} g(r=R) + \mu_2 \delta(x-1) \right]. \quad (3.26)$$

Nehmen wir nun weiter an, daß die die Schale konstituierenden Massenelemente auch die Träger der Ladungen q sind, wir also ein Isolatormodell betrachten, dann sind die Ladungsströme nicht mehr unabhängig von den Materieströmen und haben insbesondere die gleiche Vierergeschwindigkeit $u^\mu = u^0(1, 0, 0, \omega)$. Der Strom in φ -Richtung lautet daher mit der Ladungsdichte $\sigma(x)$ aus Gl. (2.24):

$$j^\varphi = \omega \sigma(x) = \frac{\omega q C}{4\pi R^3 D^3} \delta(x-1). \quad (3.27)$$

Eingesetzt in Gl. (3.25) und anschließende Ausführung der Integration ergibt im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ die zweite und letzte inhomogene Bedingungsgleichung

$$\mu_2 + \frac{1}{CD} \eta_2 + \frac{2}{3C^2 D^2} \lambda_1 - \frac{R}{2C^2} \frac{d}{d\rho} \bar{g}(RD) \zeta_1 = 1. \quad (3.28)$$

Für die vier unbekanntenen Integrationskonstanten μ_2 , η_2 , λ_1 und ζ_1 haben wir also ein System von vier linearen Bedingungsgleichungen in Form von Randbedingungen an der Schale gefunden [Gl. (3.19), (3.20), (3.24) und (3.28)], in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{4}{3D} & \bar{g}(RD) \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{\alpha}{3D^3} - \frac{\gamma^2}{3D^4} & \gamma^2 \bar{A}(RD) \\ \Delta\tau & 0 & \alpha - \frac{4\gamma^2}{3D} & -\gamma^2 \bar{g}(RD) \\ 1 & \frac{1}{CD} & \frac{2}{3C^2 D^2} & -\frac{R}{2C^2} \frac{d}{d\rho} \bar{g}(RD) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \eta_2 \\ \lambda_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\tau \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt sich in einfacher Weise nach den Regeln der linearen Algebra. Eine numerische Analyse zeigt, daß die Determinante dieses Systems keine Nullstellen in den Parametern α und κ bzw. α und γ hat, sondern für alle erlaubten Parameterwerte gemäß Abs. 2.1.1 negativ ist. Daher sind die Integrationskonstanten eindeutig und nichtsingulär.

3.1.4 Drehimpuls, magnetisches Moment und gyromagnetischer Faktor

Zwar haben wir unsere Störungsrechnung auf der Basis einer Potenzreihenentwicklung in der Winkelgeschwindigkeit ω durchgeführt, die physikalisch relevante Quelle aller rotativen Effekte, wie Mitführung A und induzierte Magnetfelder \mathbf{B} , ist aber der Drehimpuls J der Schale. Wie in der Einleitung zu Abs. 3.1 erwähnt, existiert aufgrund der Axialsymmetrie des Ein-Schalen-Systems neben dem zeitartigen Killingvektor $\xi = \partial_{x^0}$ (der die Stationarität der Raumzeit charakterisiert), ein weiterer globaler raumartiger Killingvektor $\eta = \partial_{x^3}$. Als Konsequenz des lokalen Erhaltungssatzes $(T^\mu_\nu + S^\mu_\nu)_{;\nu} = 0$ läßt sich der

Gesamtdrehimpuls J nach Tolman's Theorem (wie die Gesamtmasse M in Abs. 2.1.2) ebenfalls als Volumenintegral über die gesamte Raumzeit darstellen [24]:

$$J = \int_{x^0=\text{const}} dx^1 dx^2 dx^3 \sqrt{-g} (T^{\mu 0} + S^{\mu 0}) \eta_\mu \quad (3.30)$$

$$= \int_{t=\text{const}} dr d\vartheta d\varphi \sqrt{-g} (T_3^0 + S_3^0) \quad (3.31)$$

$$= \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi [\tau_3^0 \delta(r - R) + S_3^0(r, \vartheta)] \sin \vartheta r^2 e^{(3V+U)(r)}. \quad (3.32)$$

Einsetzen von τ_3^0 aus Gl. (3.22) bzw. (3.23), mit

$$S_3^0 = -\frac{\omega R q^2}{8\pi} \frac{g'(r)}{r^2} e^{-(U+3V)(r)} H(r - R) \sin^2 \vartheta,$$

sowie unter Beachtung von $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 0$ und der Stetigkeit von g an der Stelle $x = 1$ liefert

$$J = \frac{4}{3} \omega R^3 [(1 - \mu_2) \Delta\tau + \gamma^2 \eta_2] \quad (3.33)$$

$$= \frac{2}{3} \omega M R^2 \lambda_1. \quad (3.34)$$

Letztere Relation erhält man auch direkt aus der Charakterisierung des Drehimpulses über das asymptotische Fernfeld einer (nicht notwendigerweise stationären und axialsymmetrischen) rotativen Quelle, genauer über das Abfallverhalten der g_{03} -Komponente der Metrik: $g_{03} = (-4J/r) \sin^2 \vartheta + O(r^{-2})$. Der Vergleich mit der asymptotischen Form des $dtd\varphi$ -Terms in Gl. (3.2) mit $\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 4MR^2 \lambda_1 / 3r^3$ liefert wieder das obige Resultat.

Bemerkungen zum Drehimpuls J :

- i.) Die Integrationskonstante λ_1 beschreibt demnach das Abweichen des Drehimpulses von dem Wert $\frac{2}{3}MR^2\omega$ einer Schale mit Masse M , Radius R und Winkelgeschwindigkeit ω in der Newtonschen Mechanik. λ_1 wird entscheidend durch die gewählten Randbedingungen unseres Ein-Schalen-Modells festgelegt und dies führt letztendlich zu einer nichttrivialen Abhängigkeit von λ_1 von allen Modellparametern. Physikalische Ursache dafür ist das Auftreten von starken gravitativen und elektromagnetischen Feldern und deren Wechselwirkung in der Allgemeinen Relativitätstheorie.
- ii.) Zum Drehimpuls trägt insbesondere die „nichtlokalisierte“, d.h. r -abhängige Impulsdichte S_3^0 des elektromagnetischen Feldes bei. Dieser Beitrag entspricht in der klassischen Elektrodynamik $\int_{\mathbb{R}^3} d^3r (\mathbf{r} \times \mathbf{P}) = \frac{2}{9} \omega q^2 R \mathbf{e}_z \sim O(\gamma^2)$ mit dem Poyntingvektor $\mathbf{P} = (1/4\pi)(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß auch weit weg von diesem Schwachfeldlimit der Feldanteil $\int_{t=\text{const}} dr d\vartheta d\varphi \sqrt{-g} S_3^0 = \frac{1}{3} \omega q^2 R \eta_2$ stets positiv ist.
- iii.) Der materielle Beitrag zum Gesamtdrehimpuls, der an die Schale gebunden ist, $\int_{t=\text{const}} dr d\vartheta d\varphi \sqrt{-g} T_3^0$ wird allein durch die Sprungbedingungen der Mitführung A an der Schale festgelegt. Sein Vorzeichen hängt nach Gl. (3.33) von dem Vorzeichen von $\Delta\tau$ ab, diejenige Größe, die den zweiten Teil der schwachen Energiebedingungen bestimmt.

Mit dem Magnetfeld verbunden ist ein magnetisches Moment m . In der klassischen Elektrodynamik erzeugt ein Dipolmoment \mathbf{m} ein Magnetfeld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = [3(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{m})\mathbf{e}_r - \mathbf{m}]r^{-3} = m[2 \cos \vartheta \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta]r^{-3}$$

bezüglich eines inertialen Bezugssystems, mit $m = |\mathbf{m}|$ und o.B.d.A. der Rotationsachse parallel zur z -Achse eines orthogonalen Koordinatensystems. Berechnen wir das asymptotische Verhalten der Magnetfeldfunktion $g_1(\rho) = \lambda_1 \hat{g}(\rho) + \zeta_1 \bar{g}(\rho)$, so erhält man $\lim_{\rho \rightarrow \infty} g_1(\rho) = (\frac{4}{3}\lambda_1 + \zeta_1)R/\rho$. Die Transformation auf einen lokalen nichtrotierenden, inertialen Beobachter ergibt für die $\hat{\rho}$ -Komponente des Fernfeldes

$$B_{\hat{\rho}} = \frac{B_\rho}{\rho^2 \sin \vartheta} = \omega q \left(\frac{4}{3}\lambda_1 + \zeta_1 \right) \frac{R^2}{\rho^3} \cos \vartheta.$$

Beachten wir wieder, daß ρ und r asymptotisch übereinstimmen, dann folgt durch Vergleich mit dem Resultat der klassischen Elektrodynamik das magnetische Moment zu

$$m = \frac{1}{3}\omega q R^2 \left(\frac{3}{2}\zeta_1 + 2\lambda_1 \right). \quad (3.35)$$

Der Faktor $\frac{3}{2}\zeta_1 + 2\lambda_1$ gibt demnach das Abweichen vom Standardwert $\frac{1}{3}\omega q R^2$ des magnetischen Moments einer Schale mit Ladung q , Radius R und Winkelgeschwindigkeit ω auf einem flachen Hintergrund an.

Nun ist in der klassischen Maxwell-Theorie das magnetische Moment \mathbf{m} einer Stromverteilung \mathbf{j} in dem Sinne eine globale Größe, als es sich als Volumenintegral

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r [\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r (\mathbf{r} \times \sigma \mathbf{v})$$

über den gesamten Raum ergibt. Ob eine derartige integrale Darstellung des magnetischen Moments auf einem beliebig gekrümmten Hintergrund existiert, ist nach unserem Wissen unbekannt (vgl. auch die Bemerkungen hierzu in [35]). Dazu wäre es nötig obige Relation kovariant zu formulieren, indem man die Stromdichte über die Maxwell-Gleichungen durch die Felder ausdrückt. Wenn überhaupt, dürfte dieses Vorgehen für stationäre und axialsymmetrische Raumzeiten isolierter Systeme erfolgreich sein, in denen z.B. auch Masse und Drehimpuls eine Darstellung als Volumenintegral besitzen. [Bei der Integration müßten in unseren Koordinaten gerade alle Terme des Magnetfeldes der Ordnung $O(\rho^{-2})$ und schwächer herausprojiziert werden.]

Definiert man in Analogie zur klassischen Elektrodynamik und zur Quantenmechanik den gyromagnetischen Faktor G eines Systems mit Masse M , Ladung q und Drehimpuls J auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie über $G = 2Mm/qJ$, so ergibt sich mit Gl. (3.34) und (3.35)

$$G = 2 + \frac{3\zeta_1}{2\lambda_1}. \quad (3.36)$$

Das Verhältnis der beiden Integrationskonstanten ζ_1 und λ_1 , die den Drehimpuls und das magnetische Moment festlegen, bestimmt demnach den G -Faktor unseres Ein-Schalen-Modells. Die Definition $G = 2Mm/qJ$ ist in gewisser Weise eine asymptotische, da alle darin auftretenden Größen sich aus dem Fernfeld der gravitativen und elektromagnetischen Felder ergeben. Dagegen ist in der Darstellung (3.36) indirekt Information über

die lokale Struktur des Ein-Schalen-Systems enthalten: So sind die Konstanten ζ_1 und λ_1 durch Auswertung aller Anschlußbedingungen für das Mitführungsfeld $A(r)$ und die Magnetfeldfunktion $g(r)$ eindeutig fixiert und hängen daher in komplexer Weise von den dimensionslosen Modellparametern α und γ ab. In diesem Sinne sind auch Informationen über die lokalen physikalischen Eigenschaften des Gesamtsystems im gyromagnetischen Faktor enthalten.

In die Definition des G -Faktors gehen die Gesamtmasse und der Gesamtdrehimpuls des Systems ein. Dies bedeutet daß die gravitativen und elektromagnetischen Felder einen nichttrivialen, der klassischen, nichtrelativistischen Physik unbekanntem Beitrag leisten. Insbesondere auch nichtrotierende Anteile der Gesamtmasse wie das Massenäquivalent der elektrostatischen Feldenergie gehen in G ein. Schließlich bemerken wir noch, daß wegen $M, q > 0$ die Nullstellen des magnetischen Momentes m , bzw. des Drehimpulses J zu Nullstellen, bzw. Singularitäten von G führen.

3.2 Elektromagnetische Thirring-Probleme

Die in Abs. 3.1.1 durchgeführte Störungsrechnung in der Winkelgeschwindigkeit ω auf der Reissner-Nordström-Metrik findet auch im vorliegenden Fall des Zwei-Schalen-Modells ihre Anwendung. Da die Raumzeit nun aus drei Teilbereichen der Reissner-Nordström-Geometrie mit verschiedenen Massen- und Ladungsparametern M_i und q_i besteht ($i = 1, 2, 3$), müssen wir die Lösungen für die Magnetfeldfunktion g und den Mitführungskoeffizienten A entsprechend modifizieren. Im Innenraum ändern wir (3.8) dahingehend ab, daß wir die Integrationskonstante μ_3 mit dem Faktor C_3^{-1} skalieren und damit $A_3(r) = \mu_3/C_3$ erhalten. Im Zwischenraum lautet der Massenparameter $M_2 = \widehat{M}$ und wegen $\widehat{\alpha} \leq \widehat{\alpha}_{\max} = |\gamma|$ beschränkt sich die Funktion $S(\rho; \widehat{M}, q)$ auf den arccot-Fall. Im Außenraum sind die Lösungen dieselben wie im Falle einer Schale.

Regularität im Ursprung und korrekte Asymptotik von g und A reduzieren die nichtverschwindenden Integrationskonstanten auf μ_3 und η_3 im Innenraum $0 \leq x \leq \beta$, auf μ_2 , λ_2 , η_2 und ζ_2 im Zwischenbereich $\beta \leq x \leq 1$ und auf λ_1 , ζ_1 im Außenraum $x \geq 1$. Wie im Ein-Schalen-System werden diese 8 Konstanten durch die physikalischen Eigenschaften des Modells, die sich mathematisch in den Randbedingungen für g und A an den Schalen bei $r = a$ und $r = R$ ausdrücken, festgelegt:

Wir versehen im Zwei-Schalen-Modell beide Schalen mit unabhängigen Drehimpulsen, J^I für die innere Schale und J^{II} für die äußere. Da in 1. Ordnung ω kein Drehimpulsübertrag von der einen auf die andere Schale erfolgen kann, sind J^I und J^{II} in der Tat unabhängige Größen und sie sind die physikalischen Quellen aller auftretenden rotativen Effekte wie Mitführung und Induktion von Magnetfeldern. In höheren Ordnungen in ω führen die Zentrifugalkräfte dazu, daß unser Zwei-Schalen-Modell nicht mehr sphärisch symmetrisch ist und ein Quadrupolmoment besitzt. Erhöht man nun ausgehend von der statischen Situation in Kapitel 2 sehr rasch die Winkelgeschwindigkeit, so beginnt das System aufgrund der nichtadiabatischen Änderung dieses Quadrupolmoments Gravitationswellen zu produzieren, die einen Drehimpulstransport von einer Schale auf die andere ermöglichen.

Im Gegensatz zu den Drehimpulsen J^I und J^{II} sind die Gesamtwinkelgeschwindigkeiten $\omega(a)$ und $\omega(R)$ der beiden Schalen nicht voneinander unabhängig, sondern miteinander gekoppelt. So führt die Mitführung durch die jeweils andere Schale zu einer nichtverschwin-

denden Winkelgeschwindigkeit derjenigen Schale mit verschwindendem Drehimpuls. Diese Rotation (bezüglich einem Beobachter im Unendlichen) führt aber, da sie nicht mit einem Drehimpuls verbunden ist, ihrerseits nicht zu einer erneuten Mitführung derjenigen Schale, die Quelle der Rotation ist. Andernfalls würde es zu Selbstmitführungen der Schalen kommen. (Im Falle zweier rotierender, ungeladener Schalen hat eine Analyse des Zwei-Schalen-Problems in Abhängigkeit von den Winkelgeschwindigkeiten überaus komplizierte Relationen der Mitführung zu diesen Winkelgeschwindigkeiten zur Konsequenz, vgl. [36].)

Mathematisch ist es aber einfacher unsere elektromagnetischen Thirring-Probleme als Zwei-Parameter-Schar von Lösungen der Einstein-Maxwell-Gleichungen aufzufassen, die analytisch von ω^I und ω^{II} abhängen und bei deren Potenzreihenentwicklung wir nur die linearen Terme in ω^I und ω^{II} berücksichtigen.

Unsere Strategie zur Lösung des Problems der Mitführung und Induktion von Magnetfeldern im Falle der beiden rotierenden Schalen ist nun die folgende: Wir bezeichnen mit $\bar{\omega}^I$ bzw. ω^{II} diejenigen „Eigenwinkelgeschwindigkeiten“ der inneren bzw. der äußeren Schale, die direkt proportional zu den beiden unabhängigen Drehimpulsen \bar{J}^I bzw. J^{II} sind. (In diesem Sinne und aufgrund der Tatsache, daß Selbstmitführungen ausgeschlossen sind, sind $\bar{\omega}^I$ und ω^{II} ebenfalls wohldefinierte, voneinander unabhängige Größen.) Dabei messen wir $\bar{\omega}^I = C_3\omega_3$ und $\bar{J}^I = C_3J^I$ in der Eigenzeit $\tau = C_3^{-1}t$, vgl. [18]. Wir behandeln dann getrennt die beiden Fälle I ($\bar{\omega}^I \neq 0, \omega^{II} = 0$) und II ($\bar{\omega}^I = 0, \omega^{II} \neq 0$) [oder äquivalent ausgedrückt: ($\bar{J}^I \neq 0, J^{II} = 0$) und ($\bar{J}^I = 0, J^{II} \neq 0$)], bestimmen die Mitführungsfunktionen A^I, A^{II} , sowie die Dipolfelder $\mathbf{B}^I, \mathbf{B}^{II}$ (vgl. die Notation in [16]) und erhalten den allgemeinen Fall ($\bar{\omega}^I \neq 0, \omega^{II} \neq 0$) durch lineare Superposition der Felder: $\omega A = \omega^I A^I + \omega^{II} A^{II}$ und $\mathbf{B} = \mathbf{B}^I + \mathbf{B}^{II}$. Wegen der Linearität der Störungsrechnung auf der exakten Reissner-Nordström-Lösung ist dieser Ansatz gerechtfertigt.

3.2.1 Randbedingungen für eine rotierende äußere Schale

Mit den ausführlichen Bemerkungen zu den Randbedingungen und deren physikalischer Interpretation für das Ein-Schalen-Modell in Abs. 3.1.3 können wir uns in diesem und dem folgenden Abschnitt in einigen Passagen sehr kurz fassen. Wir beginnen mit dem Fall II, einer äußeren, rotierenden, ungeladenen Massenschale mit Drehimpuls J^{II} und einer inneren, geladenen Schale mit verschwindendem Drehimpuls \bar{J}^I ($\omega^{II} \neq 0, \bar{\omega}^I = 0$). Die Metrikfunktion A ist an den Stellen $x = \beta$ und $x = 1$ wieder stetig und demgemäß gilt

$$\begin{aligned} \mu_2 &= C_3 \frac{8(\alpha\delta - \gamma^2)}{3\delta^4} \lambda_1 - \frac{8(\hat{\alpha}\delta - \gamma^2)}{3\delta^4} \lambda_2 \\ &\quad - 8\gamma^2 \bar{A}_2(R\delta)\eta_2 + 8C_3\gamma^2 \bar{A}_1(R\delta)\zeta_1 - 8\gamma^2 \bar{A}_2(R\delta)\zeta_2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\mu_3 = \mu_2 + 8\gamma^2 \bar{A}_2(R\Delta_+)\eta_2 + 8\gamma^2 \bar{A}_1(R\Delta_+)\zeta_2. \quad (3.38)$$

Die Unstetigkeiten von $A'(r)$ an den beiden Schalen werden analog zum Ein-Schalen-Fall durch die Drehimpulse \bar{J}^I und J^{II} der Schalen festgelegt. Wir bezeichnen mit $\omega(R)$ die Gesamtwinkelgeschwindigkeit der äußeren Schale und mit $A(R)$ die Gesamtmitführung an der Stelle $r = R$. Die Eigenwertgleichung $T_\nu^\mu u^\nu = -\rho_0 u^\mu$ für den Energie-Impuls-Tensor $T_\nu^\mu(r) = \tau_\nu^\mu(R)\delta(r - R)$ mit zeitartigem Eigenvektor $u^\mu = u^0(R)(1, 0, 0, \omega(R))$ liefert

$$\tau_3^0(R) = R^2 e^{2(V-U)(R)} [\omega(R) - \omega A(R)] [\tau_3^3(R) - \tau_0^0(R)] \sin^2 \vartheta. \quad (3.39)$$

Gleichung (3.39) beschränkt sich dabei nicht auf den Fall II, sondern ist ganz allgemein gültig. Man beachte den Unterschied zu Gl. (3.21) im Falle einer rotierenden Quelle, in der wir den Störparameter ω sofort in der Form $\omega(1-A)$ ausklammern konnten. Im vorliegenden Zwei-Schalen-Modell ist dagegen von vornherein nicht ersichtlich, daß die Gesamtwinkelgeschwindigkeit $\omega(R)$ der äusseren Massenschale und die Gesamtmitführung $\omega A(R)$ des Zwei-Schalen-Systems direkt proportional sind. Vielmehr kann der Term $\omega A(R)$ gerade durch einen weiteren, rotierenden Materiestrom mit nichtverschwindendem Drehimpuls einen zusätzlichen Mitführungsbeitrag erhalten. Wie wir jedoch später sehen werden, wird die Gesamtwinkelgeschwindigkeit durch diesen Beitrag gerade so modifiziert, daß sich stets $\omega(R) - \omega A(R) = \omega^I [1 - A^I(R)]$ ergibt und damit $\tau_3^0(R)$ ausschließlich durch die Eigenwinkelgeschwindigkeit ω^I bestimmt ist. Dies impliziert, daß in 1. Ordnung ω kein Drehimpulsübertrag von der einen Schale auf die andere erfolgen kann. [Explizit sieht man dieses Resultat für den Spezialfall, in dem die äußere Schale keine Eigenwinkelgeschwindigkeit besitzt, aufgrund der Mitführung z.B. durch die innere Schale aber bezüglich eines asymptotischen Beobachters eine nichtverschwindende Winkelgeschwindigkeit $\omega(R) = \omega^I A^I(R)$ besitzt. Da die Gesamtmitführung ausschließlich durch die innere Schale verursacht wird, gilt $\omega A(R) = \omega^I A^I(R)$ und $\tau_3^0(R)$ verschwindet. Bezüglich einem lokal nichtrotierenden, mitgeführten Beobachter rotiert die äußere Schale gerade nicht. Solche Beobachter werden mit Bardeen [37] zero-angular-momentum observers, ZAMOs, genannt.]

Im Fall II, $\omega(R) = \omega^I \neq 0$ und $\bar{\omega}^I = 0$, lautet Gl. (3.39)

$$\tau_3^0(R) = R^2 \omega^I e^{2(V_1 - U_1)(R)} [1 - A_1(R)] [\tau_3^3(R) - \tau_0^0(R)] \sin^2 \vartheta. \quad (3.40)$$

Integrieren wir wieder die Einstein-Gleichung (3.3), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \tau_3^0(R) &= -\frac{\omega^I R^2}{16\pi} e^{-2U_1(R)} [A_1'(R) - A_2'(R)] \sin^2 \vartheta \\ &= \frac{\omega^I R}{2\pi\delta^2(1 - \alpha^2 + \gamma^2)} (\alpha\lambda_1 - \hat{\alpha}\lambda_2) \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Mit der gegenüber dem Ein-Schalen-Modell leicht abgeänderten, aber entsprechenden Abkürzung

$$\Delta\tau = -(2\pi R\delta^6) [\tau_3^3(R) - \tau_0^0(R)] / (1 - \alpha^2 + \gamma^2)$$

führen Gl. (3.39) und (3.41) auf eine lineare, inhomogene Bedingungsgleichung

$$-\left[\frac{8(\gamma^2 - \alpha\delta)\Delta\tau}{3\delta^4} + \alpha \right] \lambda_1 + \hat{\alpha}\lambda_2 + 8\gamma^2 \Delta\tau \bar{A}_1(R\delta)\zeta_1 = \Delta\tau. \quad (3.42)$$

Die Bedingung für $A'(r)$ an der inneren Schale bei $r = a$ ergibt sich aus den oben gemachten Bemerkungen: Da die innere Schale keine Eigengeschwindigkeit $\bar{\omega}^I$ bzw. keinen Drehimpuls \bar{J}^I besitzt, folgt sofort

$$\begin{aligned} 0 = \tau_3^0(a) &= -\frac{\omega^I a^2}{16\pi} e^{-2U_3(a)} A_2'(a) \sin^2 \vartheta \\ &= -\frac{\omega^I R\beta C_3}{2\pi\Delta_+^3} (\gamma^2\beta^2\eta_3 - \hat{\alpha}\lambda_2) \sin^2 \vartheta \end{aligned} \quad (3.43)$$

und somit die lineare, homogene Gleichung

$$\lambda_2 = \beta^2 \Delta_+ \eta_3. \quad (3.44)$$

Die Magnetfeldfunktion $g(r)$ ist wie $A(r)$ durchgehend stetig und wir erhalten daraus an den Stellen $r = a$ und $r = R$ die homogenen Gleichungen zwischen den Integrationskonstanten

$$-\frac{4}{3\delta}\lambda_1 + \frac{4}{3\delta}\lambda_2 + \bar{g}_2(R\delta)\eta_2 - \bar{g}_1(R\delta)\zeta_1 + \bar{g}_2(R\delta)\zeta_2 = 0, \quad (3.45)$$

$$\frac{4}{3\Delta_+}\lambda_2 + \bar{g}_2(R\Delta_+)\eta_2 - \beta^2\eta_3 + \bar{g}_2(R\Delta_+)\zeta_2 = 0. \quad (3.46)$$

Um die Sprungbedingungen der Tangentialkomponente $B_\vartheta \sim f(r) \sim g'(r)$ auswerten zu können, benötigen wir wieder die Transformationskoeffizienten zwischen der ρ - und der r -Ableitung:

$$\left. \frac{d\rho}{dr} \right|_{R_+} = 1 - \alpha^2 + \gamma^2, \quad (3.47)$$

$$\left. \frac{d\rho}{dr} \right|_{R_-} = \frac{(1 - \beta)\Delta_+ - (1 + \beta)\Delta_-}{\beta(1 - \beta)} = \delta\sqrt{F_2(R\delta)}, \quad (3.48)$$

$$\left. \frac{d\rho}{dr} \right|_{a_+} = \left. \frac{d\rho}{dr} \right|_{a_-} = \frac{\Delta_+}{\beta}. \quad (3.49)$$

Da die äußere Massenschale jedoch ungeladen ist, demnach keinen Strom $j^\varphi(R)$ trägt, ist auch $g'(r)$ an der Stelle $r = R$ stetig:

$$\frac{4(1 - \alpha^2 + \gamma^2)}{3\delta^2}\lambda_1 - \frac{4\sqrt{F_2(R\delta)}}{3\delta^2}\lambda_2 + R\bar{g}'_2(R\delta)\eta_2 - R\bar{g}'_1(R\delta)\zeta_1 + R\bar{g}'_2(R\delta)\zeta_2 = 0. \quad (3.50)$$

Daß darüber hinaus $g'(r)$ an der inneren Schale bei $r = a$ ebenfalls stetig ist, ist zunächst überraschend, wird die innere Schale doch durch die Rotation der äußeren mitgeführt und hat folglich eine nichtverschwindende Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}(a) = C_3\omega^H A^H(a)$ und trägt somit auch einen Strom $j^\varphi(a) = \omega^H A^H(a)\sigma(x)$. Doch ist die Grenzflächenbeziehung $\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = (4\pi/c)\mathbf{j}$, wie in Abs. 3.1 betont, eine lokale Bedingungsgleichung, deren Gültigkeit sich auf ein inertiales Bezugssystem beschränkt. Hier sind die lokalen Inertialsysteme gerade diejenigen, die mit der Winkelgeschwindigkeit $C_3\omega^H A^H(a)$ mitrotierenden. Bezüglich einem solchen Bezugssystem rotiert die Schale gerade nicht und ein inertialer Beobachter bei $r = a$ mißt daher eben keinen Strom (solange, wie im Ein-Schalen-Modell, das Schalenmaterial aus einem Isolator besteht und die Ladungsträger die gleiche Vierergeschwindigkeit wie die Massenelemente besitzen). Somit folgt also

$$R\bar{g}'_2(R\Delta_+)\eta_2 - \frac{10\beta}{3}\eta_3 + R\bar{g}'_2(R\Delta_+)\zeta_2 = 0. \quad (3.51)$$

Vergleichen wir $j^\varphi(a) = \omega^H A^H(a)\sigma(x)$ mit der Gl. (3.26) entsprechenden Relation im Zwei-Schalen-Modell, so erhalten wir auf direktem Wege die Stetigkeit der Tangentialkomponente B_ϑ , bzw. $g'_2(a) = g'_3(a)$.

3.2.2 Randbedingungen für eine rotierende innere Schale

Die Randbedingungen an der Schale bei $x = \beta$ und $x = 1$ im Fall I einer inneren, rotierenden, geladenen Schale, die die äußere Massenschale mitführt ($\bar{\omega}^I \neq 0, \omega^H = 0$) ergeben

sich zum großen Teil direkt aus den Bemerkungen im vorherigen Abschnitt. Da im vorliegenden Fall lediglich die Rolle der nichtverschwindenden Drehimpulse vertauscht ist ($\bar{J}^I \neq 0, J^II = 0$) und diese Ursache für Materie- und Ladungsströme sind, erwarten wir ausschließlich eine Modifikation der Sprungbedingungen. Die homogenen Stetigkeitsbedingungen für die Metrikfunktion A und die Magnetfeldfunktion g bleiben dagegen formal unverändert (dies bedeutet natürlich nicht, daß die Integrationskonstanten dieselben wie in Fall II sind). Die Beziehungen $A_2(r = a) = A_3(r = a)$ und $A_1(r = R) = A_2(r = R)$ führen wieder auf Gl. (3.37) und (3.38), $g_2(r = a) = g_3(r = a)$ und $g_1(r = R) = g_2(r = R)$ in derselben Weise auf Gl. (3.45) und (3.46). Da die äußere Massenschale nach wie vor ungeladen ist, gilt weiterhin $g'_1(r = R) = g'_2(r = R)$, siehe Gl. (3.50).

Für die Unstetigkeitsrelationen erhalten wir der Reihe nach: Drehimpuls $J^II = 0$ ist äquivalent zu $\tau_3^0(R) = 0$ bzw. mit Gl. (3.41) zu

$$\lambda_1 = \frac{\hat{\alpha}}{\alpha} \lambda_2. \quad (3.52)$$

Die Gl. (3.40) entsprechende Beziehung für die innere Schale mit Drehimpuls $\bar{J}^I \neq 0$ lautet mit $\tau_3^3(a) - \tau_0^0(a) = -\beta\gamma^2/4\pi R\Delta_+^4$ aus Gl. (2.43) und (2.44):

$$\tau_3^0(a) = -\frac{\omega^I R \beta \hat{\alpha} C_3}{4\pi \Delta_+} (C_3 - \mu_3) \sin^2 \vartheta. \quad (3.53)$$

Vergleichen wir mit Gl. (3.43), so resultiert die lineare, inhomogene Gleichung

$$\lambda_2 = \beta^2 \Delta_+ \eta_3 - \frac{\Delta_+^2}{2} (C_3 - \mu_3). \quad (3.54)$$

Die Vierergeschwindigkeit der inneren Schale hat die Koordinatendarstellung $u^\mu = u^0(a)(1, 0, 0, \omega(a))$ mit $\omega(a) = \omega^I$, d.h. sie besitzt auch bezüglich einem inertialen, mitrotierenden Beobachter an der Stelle $x = \beta$ einen nichtverschwindenden Strom $j^\varphi(a) = \omega^I \sigma(x)$ bezüglich unseren im Unendlichen fixierten Koordinaten. [Im Fall II trägt die innere Schale dagegen nur einen „Mitführungsstrom“ $j^\varphi(a) = \omega^II A^II(a) \sigma(x)$ bezüglich einem inertialen, festen Beobachter im Unendlichen.]. Vergleichen wir diesen mit dem aus der inhomogenen Maxwellgleichung gewonnenen Strom,

$$j^\varphi(a) = \frac{\omega^I q \beta}{4\pi R^3 \Delta_+^3} \left[-\frac{\beta R^2}{2\Delta_+} g''(r = a) + \mu_3 \delta(x - \beta) \right], \quad (3.55)$$

so ergibt sich unsere letzte lineare, inhomogene Bedingungsgleichung zwischen den Integrationskonstanten:

$$R\bar{g}'_2(R\Delta_+)\eta_2 + R\bar{g}'_2(R\Delta_+)\zeta_2 - \frac{10\beta}{3}\eta_3 + \frac{8\Delta_+}{3\beta}(C_3 - \mu_3) = 0. \quad (3.56)$$

3.2.3 Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit

Für den allgemeinen Fall, in dem beide Schalen eine nichtverschwindende Eigenwinkelgeschwindigkeit besitzen und eine Schale nicht nur durch die jeweils andere mitgeführt wird, können wir alle rotativen Effekte wie Mitführung, Induktion von Magnetfeldern, usw. aufgrund der Linearität der Störungsrechnung als Superposition der beiden Fälle I und II auffassen. Dies bedeutet im Einzelnen:

i.) Für die jeweilige Gesamtwinkelgeschwindigkeit der Schalen gilt

$$\omega(R) = \omega^I + C_3^{-1} \bar{\omega}^I A^I(R), \quad (3.57)$$

$$\bar{\omega}(a) = \bar{\omega}^I + C_3 \omega^I A^I(a), \quad (3.58)$$

wobei wir die Winkelgeschwindigkeit der inneren Schale in der Eigenzeit $\tau = C_3^{-1}t$ berechnet haben und in beiden Fällen von nichtsingulären Eigenwinkelgeschwindigkeiten $\bar{\omega}^I$ und ω^I ausgehen.

ii.) Die Gesamtmitführung des Zwei-Schalen-Systems an einem Punkt in der Raumzeit beträgt

$$\Omega(r) = \omega A(r) = \omega^I A^I(r) + \omega^I A^I(r). \quad (3.59)$$

Insbesondere ergibt sich mit Gl. (3.59) z.B. für die äußere Massenschale $\omega(R) - \omega A(R) = \omega^I [1 - A^I(R)]$ und damit die in Abs. 3.2.1 aufgestellte Behauptung, daß in 1. Ordnung ω kein Drehimpulsübertrag stattfinden kann.

iii.) Wie im Ein-Schalen-Modell berechnen wir für beide Fälle I und II die Drehimpulse gemäß Gl. (3.31) und erhalten

$$J^I = \frac{2}{3} M R^2 \omega^I \lambda_1^I, \quad (3.60)$$

$$\bar{J}^I = \frac{2}{3} \widehat{M} R^2 \bar{\omega}^I \lambda_2^I = \frac{2}{3} M R^2 \bar{\omega}^I \lambda_1^I. \quad (3.61)$$

Für den Gesamtdrehimpuls des Systems finden wir daher

$$J = J^I + J^I = \frac{2}{3} M R^2 (\omega^I \lambda_1^I + \omega^I \lambda_1^I),$$

den man auch wieder direkt aus dem asymptotischen Verhalten der Gesamtmitführungsfunktion ablesen kann.

Man beachte, daß λ_1^I bzw. λ_2^I und λ_1^I in sehr komplexer Weise von allen drei Modellparametern α, β und γ abhängen. So einfach und den Beziehungen der Newtonschen Mechanik in gewisser Weise ähnlich Gl. (3.60) und (3.61) auch sind, führen insbesondere die „nicht-lokalisierten“ Beiträge des Gravitationsfeldes und der elektromagnetischen Felder zu einer in α, β und γ nichttrivialen Relation zwischen den Drehimpulsen $J^{I,II}$ und den Eigenwinkelgeschwindigkeiten $\omega^{I,II}$. Ansonsten sind diese beiden physikalischen Größen direkt proportional zueinander, und in diesem Sinne sind mit den Drehimpulsen \bar{J}^I und J^I auch die Eigenwinkelgeschwindigkeiten $\bar{\omega}^I$ und ω^I voneinander unabhängige Größen. Insbesondere gehen in \bar{J}^I und J^I nicht die Gesamtwinkelgeschwindigkeiten aus Gl. (3.57) und (3.58) ein.

3.2.4 Festlegung der Integrationskonstanten

Die aus den Randbedingungen an den Schalen hervorgegangenen Gleichungssysteme für die beiden Fälle I und II werden in diesem Abschnitt nach den jeweiligen 8 Integrationskonstanten $\mu_2, \mu_3, \lambda_1, \lambda_2, \eta_2, \eta_3, \zeta_1$ und ζ_2 aufgelöst und ihre Abhängigkeit von den

Modellparametern α , β und γ explizit dargelegt. Zunächst führen wir folgende Abkürzungen ein, die die abschließenden Formeln für die Integrationskonstanten auf eine akzeptable, übersichtliche Form bringen:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\beta^2 \Delta_+^2}{4(\Delta_+^2 - \gamma^2)^2} \left[3 + \frac{\Delta_+^2 + 2\gamma^2}{2\gamma\sqrt{\Delta_+^2 - \gamma^2}} \operatorname{arccot} \frac{\Delta_+^2 - 2\gamma^2}{2\gamma\sqrt{\Delta_+^2 - \gamma^2}} \right], \\
\tilde{P} &= -\frac{\Delta_+^3}{12(\Delta_+^2 - \gamma^2)^2} \left[5 - \frac{2\gamma^2}{\Delta_+^2} + \frac{3\Delta_+^2}{2\gamma\sqrt{\Delta_+^2 - \gamma^2}} \operatorname{arccot} \frac{\Delta_+^2 - 2\gamma^2}{2\gamma\sqrt{\Delta_+^2 - \gamma^2}} \right], \\
Q &= -\frac{4\beta^2}{3\Delta_+} (\Delta_+^2 + 2\gamma^2), \\
\tilde{Q} &= \frac{4}{3} \Delta_+^2, \\
K &= P\bar{g}_2(R\delta) + Q\bar{g}_2(R\delta) + \frac{4\beta^2\Delta_+}{3\delta}, \\
\tilde{K} &= \tilde{P}\bar{g}_2(R\delta) + \tilde{Q}\bar{g}_2(R\delta) + \frac{2\Delta_+^2}{3\alpha\delta} (\hat{\alpha} - \alpha), \\
L &= PR\delta\bar{g}'_2(R\delta) + QR\delta\bar{g}'_2(R\delta) - \frac{4\beta^2\Delta_+}{3} \sqrt{F_2(R\delta)}, \\
\tilde{L} &= \tilde{P}R\delta\bar{g}'_2(R\delta) + \tilde{Q}R\delta\bar{g}'_2(R\delta) + \frac{2\Delta_+^2}{3} \left[\sqrt{F_2(R\delta)} - \frac{\hat{\alpha}(1 - \alpha^2 + \gamma^2)}{\alpha\delta} \right], \\
N &= \gamma^2 P [\bar{A}_2(R\Delta_+) - \bar{A}_2(R\delta)] + \gamma^2 Q [\bar{A}_2(R\Delta_+) - \bar{A}_2(R\delta)] \\
&\quad + \frac{\beta^2\gamma^2}{3\delta^4} \left[C_3 \left(\delta - \frac{\gamma^2}{\alpha} \right) - (\delta - \Delta_+) \right], \\
\tilde{N} &= \frac{1}{8} + \gamma^2 \tilde{P} [\bar{A}_2(R\Delta_+) - \bar{A}_2(R\delta)] + \gamma^2 \tilde{Q} [\bar{A}_2(R\Delta_+) - \bar{A}_2(R\delta)] \\
&\quad - \frac{\gamma^2\Delta_+}{6\delta^4} \left[C_3 \left(\delta - \frac{\gamma^2}{\alpha} \right) - (\delta - \Delta_+) \right].
\end{aligned}$$

Dabei sind die Konstanten K , \tilde{K} , L und \tilde{L} frei von arccot -Termen.

Die Gleichungssysteme enthalten zwar algebraisch sehr komplizierte Ausdrücke. Ansonsten gelingt aber eine Reduktion der Abhängigkeiten in dem Sinne, daß in beiden Fällen I und II fünf Konstanten recht leicht eliminierbar sind und nur zwischen den verbleibenden drei Integrationskonstanten ein komplexes lineares Gleichungssystem besteht.

Im Fall II betrachten wir zunächst die homogenen Gl. (3.44), (3.46) und (3.51). Mittels Gl. (3.44) eliminieren wir λ_2^H in Gl. (3.46) und (3.51) und schreiben η_2^H und ζ_2^H als Funktionen von η_3^H . Die Determinante dieses (2×2) -Gleichungssystems ist nun gerade die Wronski-Determinante W der Differentialgleichung (3.10), ausgewertet an der Stelle $r = a$. Die Wronski-Determinante berechnet sich gemäß der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen zu:

$$\begin{aligned}
W(\rho) &= W(\xi) \exp \left[- \int_{\xi}^{\rho} d\rho' \frac{dF(\rho')/d\rho'}{F(\rho')} \right] = W(\xi) \exp \left[- \int_{\xi}^{\rho} d\rho' \frac{d \ln F(\rho')}{d\rho'} \right] \\
&= [W(\xi)F(\xi)] \cdot F(\rho)^{-1}.
\end{aligned}$$

Wir bestimmen den konstanten Vorfaktor $W(\xi)F(\xi)$ asymptotisch, d.h. im Grenzwert $\xi \rightarrow \infty$. Einerseits gilt $\lim_{\xi \rightarrow \infty} F(\xi) = 1$, andererseits folgt aus dem asymptotischen Verhalten der Magnetfeldfunktionen

$$\bar{g}(\rho) \sim \frac{R}{\rho}, \quad \frac{d}{d\rho} \bar{g}(\rho) \sim -\frac{R}{\rho^2}, \quad \bar{g}(\rho) \sim -\frac{\rho^2}{R^2}, \quad \frac{d}{d\rho} \bar{g}(\rho) \sim -\frac{2\rho}{R^2}$$

mit $W(\rho) = [\bar{g}(\rho)d\bar{g}(\rho)/d\rho] - [\bar{g}(\rho)d\bar{g}(\rho)/d\rho]$ der Grenzwert $\lim_{\xi \rightarrow \infty} W(\xi) = -3/R$. In isotropen Koordinaten ist $W(r) = (d\rho/dr)W[\rho(r)] = -(d\rho/dr)\{3F[\rho(r)]/r\}$ und an der Stelle $r = a$ erhält man mit Gl. (3.49)

$$W(a) = \frac{3}{R} \left. \frac{d\rho}{dr} \right|_{a\pm} F(R\Delta_+) = -\frac{3\Delta_+}{\beta}.$$

Das Gleichungssystem (3.44), (3.46) und (3.51) hat damit die Lösungen

$$\lambda_2^{\text{II}} = \beta^2 \Delta_+ \eta_3^{\text{II}}, \quad (3.62)$$

$$\eta_2^{\text{II}} = P \eta_3^{\text{II}}, \quad (3.63)$$

$$\zeta_2^{\text{II}} = Q \eta_3^{\text{II}}. \quad (3.64)$$

Die verbleibenden Gl. (3.42), (3.45) und (3.50) im Fall II für die Konstanten λ_1^{II} , ζ_1^{II} und η_3^{II} führen auf

$$\lambda_1^{\text{II}} = \frac{-\Delta\tau}{4(\text{Det})^{\text{II}}} [L\bar{g}_1(R\delta) - KR\delta\bar{g}'_1(R\delta)], \quad (3.65)$$

$$\zeta_1^{\text{II}} = \frac{\Delta\tau}{3\delta(\text{Det})^{\text{II}}} [(1 - \alpha^2 + \gamma^2)K + L], \quad (3.66)$$

$$\eta_3^{\text{II}} = \frac{\Delta\tau}{3\delta(\text{Det})^{\text{II}}} [(1 - \alpha^2 + \gamma^2)\bar{g}_1(R\delta) + R\delta\bar{g}'_1(R\delta)], \quad (3.67)$$

mit der (3×3) -Determinante des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{3\delta(\text{Det})^{\text{II}}}{\Delta\tau} &= \left[\frac{2(\gamma^2 - \alpha\delta)}{\delta^3} + \frac{3\alpha\delta}{4\Delta\tau} \right] [L\bar{g}_1(R\delta) - KR\delta\bar{g}'_1(R\delta)] \\ &+ \frac{\beta^2\gamma^2}{\Delta\tau} [(1 - \alpha^2 + \gamma^2)\bar{g}_1(R\delta) + R\delta\bar{g}'_1(R\delta)] \\ &+ 8\gamma^2\bar{A}_1(R\delta)[(1 - \alpha^2 + \gamma^2)K + L]. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Über die Gl. (3.37) und (3.38) lassen sich damit μ_2^{II} und μ_3^{II} explizit angeben:

$$\begin{aligned} \mu_2^{\text{II}} &= C_3 \frac{8(\alpha\delta - \gamma^2)}{3\delta^4} \lambda_1^{\text{II}} + 8C_3\gamma^2\bar{A}_1(R\delta)\zeta_1^{\text{II}} \\ &- 8\gamma^2 \left[\frac{\beta^2(\delta - \Delta_+)}{3\delta^4} + P\bar{A}_2(R\delta) + Q\bar{A}_2(R\delta) \right] \eta_3^{\text{II}}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\mu_3^{\text{II}} = \mu_2^{\text{II}} + 8\gamma^2 [P\bar{A}_2(R\Delta_+) + Q\bar{A}_2(R\Delta_+)] \eta_3^{\text{II}}. \quad (3.70)$$

Wir verfahren mit den Integrationskonstanten λ_i^{I} , η_i^{I} , ζ_i^{I} und μ_i^{I} für den Fall I analog. Die homogenen linearen Gleichungen (3.46), (3.54) und (3.56) werden wieder mittels der

Wronski-Determinante gelöst und λ_2^I , η_2^I und ζ_2^I als Funktionen von η_3^I und $(C_3 - \mu_3^I)$ ausgedrückt:

$$\lambda_2^I = \beta^2 \Delta_+ \eta_3^I - \frac{\Delta_+^2}{2} (C_3 - \mu_3^I), \quad (3.71)$$

$$\eta_2^I = P \eta_3^I + \tilde{P} (C_3 - \mu_3^I), \quad (3.72)$$

$$\zeta_2^I = Q \eta_3^I + \tilde{Q} (C_3 - \mu_3^I). \quad (3.73)$$

Aus Gl. (3.52), $\lambda_1^I = (\hat{\alpha}/\alpha) \lambda_2^I$, erhalten wir dann

$$\lambda_1^I = \frac{\beta^2 \gamma^2}{\alpha} \eta_3^I - \frac{\gamma^2 \Delta_+}{2\alpha} (C_3 - \mu_3^I). \quad (3.74)$$

Die Gl. (3.45), (3.50) und (3.38) bilden wieder ein vollständiges System linearer Gleichungen für die Integrationskonstanten ζ_1^I , η_3^I und μ_3^I mit den Lösungen:

$$\zeta_1^I = \frac{C_3}{8(\text{Det})^I} \left\{ \tilde{L}K - \tilde{K}L - \frac{4\beta^2 \gamma^2}{3\alpha\delta} [(1 - \alpha^2 + \gamma^2)\tilde{K} + \tilde{L}] \right\}, \quad (3.75)$$

$$\eta_3^I = \frac{C_3}{8(\text{Det})^I} [\tilde{L}\bar{g}_1(R\delta) - \tilde{K}R\delta\bar{g}'_1(R\delta)], \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \mu_3^I = C_3 + \frac{C_3}{8(\text{Det})^I} & \left\{ [L\bar{g}_1(R\delta) - KR\delta\bar{g}'_1(R\delta)] \right. \\ & \left. + \frac{4\beta^2 \gamma^2}{3\alpha\delta} [(1 - \alpha^2 + \gamma^2)\bar{g}_1(R\delta) + R\delta\bar{g}'_1(R\delta)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

wobei $(\text{Det})^I$ die (3×3) -Determinante dieses Gleichungssystems bezeichnet:

$$\begin{aligned} (\text{Det})^I = C_3 \gamma^2 \bar{A}_1(R\delta) & \left\{ \tilde{L}K - \tilde{K}L - \frac{4\beta^2 \gamma^2}{3\alpha\delta} [(1 - \alpha^2 + \gamma^2)\tilde{K} + \tilde{L}] \right\} \\ & - \frac{4\beta^2 \gamma^2}{3\alpha\delta} \tilde{N} [(1 - \alpha^2 + \gamma^2)\bar{g}_1(R\delta) + R\delta\bar{g}'_1(R\delta)] \\ & + N [\tilde{L}\bar{g}_1(R\delta) - \tilde{K}R\delta\bar{g}'_1(R\delta)] - \tilde{N} [L\bar{g}_1(R\delta) - KR\delta\bar{g}'_1(R\delta)]. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Für die letzte Integrationskonstante μ_2^I gilt schließlich die Fall II entsprechende Gl. (3.69),

$$\begin{aligned} \mu_2^I = C_3 \frac{8(\alpha\delta - \gamma^2)}{3\delta^4} \lambda_1^I + 8C_3 \gamma^2 \bar{A}_1(R\delta) \zeta_1^I \\ - 8\gamma^2 \left[\frac{\beta^2(\delta - \Delta_+)}{3\delta^4} + P\bar{A}_2(R\delta) + Q\bar{A}_2(R\delta) \right] \eta_3^I. \end{aligned} \quad (3.79)$$

3.2.5 Der Übergang vom statischen zum stationär-axial rotierenden Modell im Schwachfeldlimes

Wir haben in den vorherigen Abschnitten mehrfach betont, daß einerseits in 1. Ordnung in der Winkelgeschwindigkeit aufgrund des reinen Mitführungseffektes kein Drehimpulsübertrag von der einen auf die andere Schale möglich ist. Andererseits haben wir plausibel gemacht, daß in 2. Ordnung ω ein nichtadiabatischer Übergang vom Anfangszustand der statischen Situation des Zwei-Schalen-Modells zum Endzustand der stationären Rotation zu einem Drehimpulstransport über die Abstrahlung von Gravitationswellen

führen kann. Ursache für das von der sphärischen Symmetrie unserer elektromagnetischen Thirring-Probleme abweichende zeitabhängige Quadrupolmoment waren die in dieser Ordnung in den Bewegungsgleichungen auftretenden Zentrifugalkräfte.

Wir zeigen nun, wie ein Mechanismus des adiabatischen Anfahrens der Rotation der inneren Schale mit der Mitführungswinkelgeschwindigkeit $\omega^I A^I(a)$ (bezüglich einem inertialen, festen Beobachter im Unendlichen) durch die äußere Massenschale aussehen kann. Wir betrachten den Einschaltvorgang der Einfachheit halber und zum besseren Vergleich mit der Situation in der Newtonschen Mechanik im Schwachfeldfall, in dem insbesondere gravitative und elektromagnetische Effekte entkoppelt sind.

In linearer Näherung, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, und mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}\Phi_g &= \frac{1}{4}h_{00}, \\ \mathbf{E}_g &= -\nabla\Phi_g, \\ \mathbf{A}_g &= (A_g^1, A_g^2, A_g^3)^\top = -\frac{1}{4}h_{0i}, \\ \mathbf{B}_g &= \nabla \times \mathbf{A}_g, \\ \mathbf{g} &= -\nabla\Phi_g - \frac{\partial\mathbf{A}_g}{\partial t}\end{aligned}$$

lauten die Einstein-Gleichungen in einer (3+1)-Zerlegung bezüglich den Koordinaten $x^\mu = (t, \mathbf{r})$ in der sogenannten „Maxwell-Form“ [14]:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{g} &= -4\pi T^{00} = -4\pi \varrho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_g &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{g} &= -\frac{\partial\mathbf{B}_g}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B}_g &= -4\pi T^{0i} + \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t} = -4\pi \varrho \mathbf{v} + \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t},\end{aligned}$$

bzw. in der Lorentzzeichnung $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$, mit $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$

$$\square\mathbf{A}_g \equiv \partial_t^2\mathbf{A}_g - \Delta\mathbf{A}_g = -4\pi\varrho\mathbf{v}. \quad (3.80)$$

Dabei bezeichnet Φ_g das Gravitationspotential, \mathbf{E}_g bzw. \mathbf{B}_g das gravitoelektrische bzw. -magnetische Feld und \mathbf{A}_g das zugehörige gravitomagnetische Vektorpotential. Die Bewegungsgleichungen für ein neutrales Testteilchen, $d^2x^\mu/d\tau^2 + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu(dx^\nu/d\tau)(dx^\sigma/d\tau) = 0$, ergeben sich damit zu ($dt/d\tau \approx 1$):

$$\mathbf{a} = -\nabla\Phi_g - 4\frac{\partial\mathbf{A}_g}{\partial t} - 4\mathbf{v} \times \mathbf{B}_g \quad (3.81)$$

bezüglich einem Koordinatensystem, das im Unendlichen fixiert ist und bezüglich dem lokale Inertialsysteme mit $-2\mathbf{B}_g$ rotieren.

Wir betrachten nun die Beschleunigung auf ruhende Materie (wegen $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ spielt die Lorentzkraft im Falle geladener Materie zunächst keine Rolle, ebensowenig die Coriolis-Kraft) im Innern der Massenschale [$\Phi_g(r \leq R) = \text{const}$, d.h. $\mathbf{E}_g = \mathbf{0}$] beim adiabatischen Einschalten (d.h. $R^2\dot{\omega} \ll 1$) der Winkelgeschwindigkeit der äußeren Schale vom Anfangswert $\omega(t_i) = 0$ (statische Situation) auf den Endwert $\omega(t_f) = \omega$ (stationäre Situation). Da der Einschaltvorgang adiabatisch verlaufen soll, ist für kleine $\dot{\omega}$,

$$\Delta\mathbf{A}_g = -4\pi T^{i0} = -4\pi\rho\mathbf{v}$$

nach wie vor eine gute Näherung, die Situation also quasi-stationär. (Neben der Näherung des Schwachfeldlimes, betrachten wir demgemäß zeitlich nur schwach variierende Felder und den slow-motion-limit. Retardierungseffekte, wie die Abstrahlung von Gravitationsstrahlung, sind demnach vernachlässigbar.)

Für das gravitomagnetische Potential \mathbf{A}_g unserer Massenschale gilt dann (vgl. die entsprechenden Beziehungen in der Magnetostatik):

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_g &= - \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{T^{i0}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{\varrho(\mathbf{r}')(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \begin{cases} -\frac{M}{3R} \omega r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi & \text{für } r \leq R, \\ -\frac{MR^2}{3r^2} \omega \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi & \text{für } r > R \end{cases}\end{aligned}$$

und demnach

$$2\mathbf{B}_g = 2 \operatorname{rot} \mathbf{A}_g = \begin{cases} \frac{4M}{3R} \boldsymbol{\omega} & \text{für } r \leq R, \\ \frac{2MR^2}{3} \frac{3(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} r^2}{r^5} & \text{für } r > R. \end{cases}$$

Bezüglich $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi)$ lautet die Dreierbeschleunigung auf die zunächst ruhende innere Schale somit („Thirring-Euler-Beschleunigung“):

$$\mathbf{a} = -4 \frac{\partial \mathbf{A}_g}{\partial t} = \frac{4M}{3R} (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) + \frac{4M}{3R} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \frac{4M}{3R} \dot{\omega} r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi,$$

d.h. wie erwartet eine Beschleunigung der inneren Schale in Rotationsrichtung der äußeren Schale, sprich in Richtung \mathbf{e}_φ . Die φ -Komponente der Viererbeschleunigung lautet umgerechnet auf unsere Koordinaten

$$a^3 = \frac{4M}{3R} \dot{\omega}. \quad (3.82)$$

[Man vergleiche die Beschleunigung (3.82) mit der Eulerkraft bei Katz et al. [38], $F_3^g = (4M/3R)\dot{\omega}r^2 \sin^2 \vartheta$ bezüglich einem festen, nichtinertialen Bezugssystem.] Der Term $-4\dot{\mathbf{A}}_g$ treibt die innere Schale auf die Endgeschwindigkeit in Richtung \mathbf{e}_φ :

$$\begin{aligned}v^\varphi(a) &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{dv^\varphi}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_f} a^\varphi dt = \frac{4M}{3R} a \sin \vartheta \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\omega}{dt} dt \\ &= \frac{4M}{3R} a \sin \vartheta [\omega(t_f) - \omega(t_i)] = \frac{4M}{3R} a \omega \sin \vartheta.\end{aligned}$$

Bezüglich unserer Koordinatenbasis $(\partial_t, \partial_r, \partial_\vartheta, \partial_\varphi)$ lautet die Vierergeschwindigkeit der inneren Schale im stationären Endzustand

$$u^\mu(a) = (1, 0, 0, \frac{4M}{3R} \omega) = (1, 0, 0, \omega^H A^H(a)), \quad (3.83)$$

denn es gilt $v^\varphi = u^3/u^0$ mit $u^0 = e^{-U} \approx 1$ im Schwachfeldlimes und $u^3 = d\varphi/dt = v^\varphi/r \sin \vartheta$. Wie behauptet treibt die durch die Rotation der äußeren Massenschale induzierte Eulerkraft die innere Schale auf den Thirring-Wert der Mitführungswinkelgeschwindigkeit $(4M/3R)\boldsymbol{\omega}$.

Kapitel 4

Diskussion und Interpretation der Resultate

In Kapitel 4 stellen wir alle Resultate für die beiden Modell-Systeme zusammen, vergleichen mit den in der Literatur bekannten Ergebnissen und korrigieren diese zum Teil, insbesondere hinsichtlich der Interpretation der Felder im Zusammenhang mit Machschen Fragestellungen. Zunächst bemerken wir, daß wir über die Bestimmung der Integrationskonstanten, zusammen mit den entsprechenden Gleichungen, die die radialen Abhängigkeiten der Felder bestimmen, alle für unsere Fragestellungen relevanten physikalischen Größen wie die Mitführung A und die induzierten Magnetfeldkomponenten B_r und B_ϑ , das magnetische Moment m , den Drehimpuls J und den gyromagnetischen Faktor G eindeutig festgelegt haben. Die Formeln für die Integrationskonstanten hängen jedoch in nichttrivialer Weise von allen Modellparametern ab. In erster Linie liegt dies an den algebraisch komplizierten Ausdrücken für $\bar{g}(\rho)$, $d\bar{g}(\rho)/d\rho$ und $\bar{A}(\rho)$, ausgewertet an den Stellen $r = a$ und $r = R$.

Im allgemeinen Fall beliebiger Werte von M und q (eingeschränkt durch die jeweiligen Ungleichungen aus den Energiebedingungen und den weiteren Einschränkungen in den Abs. 2.1.1 und 2.2.2) werden wir daher nicht erwarten können, physikalisch leicht interpretierbare Resultate auffinden zu können. Dies um so mehr, als im Parameterbereich starker Gravitations- und elektromagnetischer Felder, insbesondere dort, wo der nicht-relativistischen Physik unbekannt Wechselwirkungen zwischen beiden Feldern wirksam werden, unsere physikalische Intuition und Anschauung aus der Newtonschen Mechanik und der klassischen Maxwell-Theorie verloren gehen.

Darüber hinaus sind fast alle in der Literatur bekannten Resultate, insbesondere diejenigen, die Machsche Fragestellungen betreffen, nicht exakt in M und/oder q (vgl. die Arbeiten von Hofmann [17], Cohen [18], und Ehlers und Rindler [16, 19]). Ein Vergleich mit diesen Ergebnissen erfordert daher zwingend gewisse Näherungsverfahren.

Wir verfahren deshalb folgendermaßen: Zunächst suchen wir physikalisch interessante Eigenschaften unserer Schalenmodelle für beliebige Werte von M , beschränken uns aber auf elektromagnetische Testfelder, die per Definition nicht auf die Raumzeit-Geometrie rückwirken. Wechselwirkungseffekte, wie sie z.B. die elektrostatische Energiedichte $S_0^0 \sim O(q^2)$ erzeugt, sind demgemäß in dieser Näherung ausgeschlossen. Wir entwickeln daher alle physikalischen Größen in Potenzen von q und betrachten nur deren Linearisierung. Physikalisch macht dies um so mehr Sinn, als in kosmologischen Zusammenhängen Ladungen fast keine Rolle spielen (und Machsche Probleme sind letztendlich genuin globale, den gesamten Kosmos mit seiner Materieverteilung betreffende Fragestellungen). Nun sind hier ganz generell elektromagnetische Felder und damit verbundene Größen wie z.B. das magnetische Moment ungerade Funktionen in q , während die Mitführung eine gerade Funktion in q ist. Letztere Behauptung ist Konsequenz der Tatsache, daß Massenströme

Ursache von Mitführungseffekten sind und die elektromagnetische Impulsdichte S_3^0 quadratisch in der Ladung q ist und daher erst in 2. Ordnung q zu einem nichtverschwindenden Massenäquivalent führt. [Man beachte, daß die magnetische Feldenergie von der Ordnung $O(\omega^2)$ ist und daher an keiner Stelle dieser Arbeit eine Rolle spielt!] Da wir in der Definition der Magnetfeldkomponente B_r einen Faktor q abgespalten haben, besitzen alle Funktionen $g_i(r)$ und $A_i(r)$ und alle Integrationskonstanten Entwicklungen nach Potenzen von q^2 . In 1. Ordnung q sind daher nur die Magnetfelder von Interesse.

Weiterhin untersuchen wir die ersten nichttrivialen Beiträge des elektromagnetischen Feldes zur Geometrie, d.h. beziehen Terme der Ordnung $O(q^2)$ in der Entwicklung der Mitführungsfunktion A ein, beschränken uns diesbezüglich aber im Detail auf das Zwei-Schalen-Modell. Wie erwähnt, ist unsere physikalische Anschauung in großem Maße von der klassischen Physik geprägt, fernab starker gravitativer und elektromagnetischer Felder. Daher untersuchen wir im Besonderen den Schwachfeldfall, d.h. wir berücksichtigen in einer Entwicklung in M nur deren lineare Terme. Wir versuchen, so eng wie möglich eine Interpretation unserer physikalischen Ergebnisse in Kategorien der Newtonschen Physik und der klassischen Maxwell-Theorie zu finden. Darüberhinaus geben wir in einigen Spezialfällen der Werte von M und q in diesen Parametern exakte Ergebnisse an. Dies beinhaltet insbesondere den physikalisch wichtigen Kollapsfall, den extremen Reissner-Nordström-Fall und im Falle einer Schale den Punktlimes.

4.1 Analyse des Ein-Schalen-Systems

Wie in den beiden vorherigen Kapiteln betrachten wir zuerst den einfachen Grenzfall des Ein-Schalen-Modells und führen die verschiedenen Näherungen in $q = 2R\gamma$ und/oder $M = 2R\alpha$ zunächst für den Mitführungskoeffizienten A und den Drehimpuls J , anschließend für das Magnetfeld \mathbf{B} und das damit verbundene magnetische Moment m und schließlich für den gyromagnetischen Faktor G durch. Einige Resultate werden wir graphisch anhand von Niveaufächendiagrammen im (α, κ) -Parameterraum diskutieren [$\kappa = \alpha^2 - \gamma^2 = (M^2 - q^2)/4R^2$].

4.1.1 Mitführung, Anti-Mitführung und Drehimpuls

Wir beginnen mit der Analyse der Trägheitsstruktur für $r \leq R$, d.h. mit der Diskussion der konstanten Mitführung im Innern der Schale. Diese wird nach Gl. (3.8) durch die Integrationskonstante μ_2 bestimmt, deren Höhenlinien wir in Abb. 4.1 in Abhängigkeit der Parameter α und κ graphisch aufgetragen haben (und zwar innerhalb desjenigen Parameterbereiches, der durch die im Abs. 2.1.1 gegebenen Einschränkungen an α und κ gegeben ist).

Im vorliegenden Fall einer rotierenden geladenen Massenschale wird mit Blick z.B. auf die integrale Darstellung der Gesamtmasse in Gl. (2.19),

$$M = \int_{t=\text{const}} dr d\vartheta d\varphi \sqrt{-g} (2T_3^3 - T_0^0 - 2S_0^0),$$

klar, daß wir durch die Anwesenheit von Ladungen eine erheblich komplexere Situation hinsichtlich der Mitführungseigenschaften der Schale vorliegen haben, als im ungeladenen Fall, vgl. z.B. [8]. So hängt die Stärke der Mitführung ganz allgemein vom Verhältnis

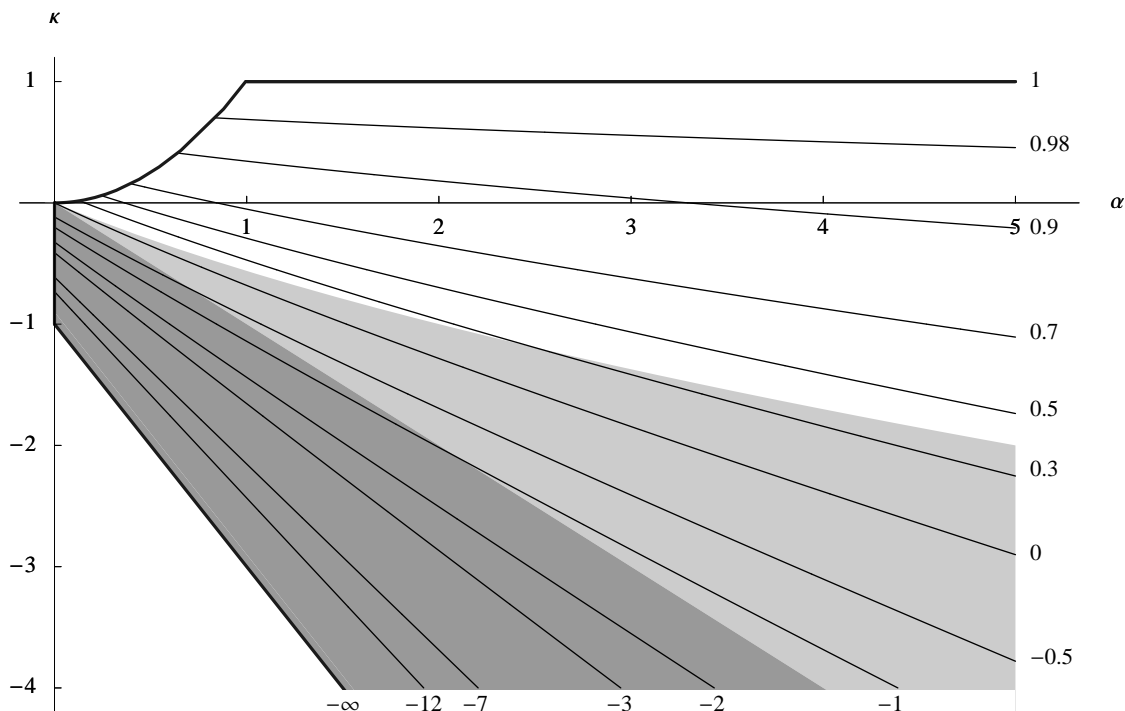


Abbildung 4.1: Höhenlinien für ausgewählte Werte der konstanten Mitführung $A(r \leq R) = \mu_2$ im Inneren der geladenen Massenschale, dargestellt im zulässigen (α, κ) -Parameterraum. Grau schattiert sind diejenigen Bereiche, in denen die schwachen Energiebedingungen des Energie-Impuls-Tensors der Schale verletzt werden: $\Delta\tau < 0$ (hellgrau) und $-\tau_0^0 < 0$ (dunkelgrau).

der rotierenden zur nichtrotierenden Massenenergie des Gesamtsystems ab. Welcher Anteil der Gesamtmasse sitzt tatsächlich auf der rotierenden Schale und welcher ist fest bezüglich dem Unendlichen? Im geladenen Fall müssen daher rotierende bzw. nichtrotierende Anteile der Massen- und Drehimpulsäquivalente der elektromagnetischen Feldenergien, S_0^0 bzw. S_3^0 , berücksichtigt und bezüglich den entsprechenden Beiträgen der Massen zur Mitführung gewichtet werden.

Aus Abb. 4.1 entnehmen wir für die Integrationskonstante μ_2 aus Gleichungssystem (3.29) die folgenden Hauptergebnisse:

- i.) $\mu_2 \equiv 1$ im Kollapsfall, $\kappa = 1$, d.h. perfekte Mitführung.
 $\mu_2 \rightarrow 1$ für feste Werte von $\kappa < 1$ und $\alpha \rightarrow \infty$.
- ii.) $\mu_2 \rightarrow \frac{8}{3}\alpha$, d.h. der Standard-Thirring-Wert im Schwachfeldfall, $\alpha \rightarrow 0$ und $\gamma \rightarrow 0$.
 $\mu_2 = 0$ auf einer Linie in der Region zwischen den Nullstellen $\Delta\tau = 0$ und $\tau_0^0 = 0$ der beiden Teile der schwachen Energiebedingungen.
- iii.) $\mu_2 < 0$ unterhalb dieser Linie, d.h. Anti-Mitführung.
- iv.) $\mu_2 \rightarrow -\infty$ im Punktlimes der Schale, $\kappa \rightarrow -(1 + 2\alpha)$.

Wir betonen, daß im gesamten zulässigen (α, κ) -Parameterraum, insbesondere im Bereich der Anti-Mitführung die Gesamtmasse(-energie) stets nichtnegativ ist, $\alpha \geq 0$. Andernfalls resultiert bereits im Schwachfeldfall trivialerweise eine Mitführung der lokalen

Inertialsysteme entgegen der Rotationsrichtung der Massen: $A(r \leq R) = 4M/3R < 0$ für Parameterwerte $M < 0$.

Im Kollapsfall, $\kappa = 1$, verallgemeinert unsere geladene Massenschale das wichtige Machsche Resultat von Brill und Cohen [7], daß im Innern einer kollabierenden Schale die lokalen Inertialsysteme total mitgeführt werden und daher Relativität der Rotation in diesen Modellsystemen perfekt realisiert ist. [Ursache für $A(r \leq R) \equiv 1$ sind die divergenten Spannungen $\tau_2^2 = \tau_3^3$ der Schale.] Dieses Ergebnis wird bereits bei Briggs et al. [21] vermerkt. Totale Mitführung ergibt sich auch für alle festen Werte von $\kappa < 1$ im Limes $\alpha \rightarrow \infty$: $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mu_2 = 1 + O(\alpha^{-1})$, d.h. die Korrekturterme zu $\mu_2 = 1$ sind linear in α^{-1} .

Unterhalb der Grenzlinie $\kappa = 1$ nimmt die Mitführung stetig ab und verschwindet schließlich in einer Region des Parameterbereiches, in der der zweite Teil der schwachen Energiebedingungen, $\Delta\tau \geq 0$, verletzt wird (hellgrauer Bereich in Abb. 4.1). Die Höhenlinie $\mu_2 = 0$ hat im Ursprung eine Steigung $d\kappa/d\alpha = -\frac{3}{4}$, die asymptotisch auf $d\kappa/d\alpha \approx -0.44$ ansteigt.

Unterhalb dieser Kurve schlägt die Mitführung dann in sogenannte Anti-Mitführung um, d.h. das Mitführungsfeld nimmt negative Werte an, $\mu_2 < 0$, und erreicht im Grenzfall des verschwindenden invarianten Radius der Schale beliebig große negative Werte: $\mu_2 \rightarrow -\infty$ für $\kappa \rightarrow -(1 + 2\alpha)$. Das Phänomen der Anti-Mitführung stellen im Schwachfeldfall, $\alpha \ll 1$, $\gamma \ll 1$, wiederum Briggs et al. in [21], Sec. IV D fest. In diesem eingeschränkten Parameterbereich verhält sich die Mitführung wie $\mu_2 = \frac{8}{9}(3\alpha + 4\kappa)$.

Vernachlässigen wir Terme der Ordnung $O(\alpha^2)$ und $O(\gamma^2)$, so folgt $\mu_2 = 4M/3R$ und man erhält gerade den Standard-Thirring-Wert. Dieser Wert ergibt sich auch für den Schwachfeldlimes im ungeladenen Fall¹, $\kappa = \alpha^2$, $\alpha \rightarrow 0$, sowie im extremen Reissner-Nordström-Fall, $\kappa = 0$, im Limes $\alpha \rightarrow 0$. Im letzteren Fall gilt allgemein (die Spannungen $\tau_2^2 = \tau_3^3$ verschwinden dort!), vgl. [36]

$$\mu_2(\kappa = 0) = 1 - \frac{15 + 50\alpha + 60\alpha^2 + 24\alpha^3}{15 + 90\alpha + 200\alpha^2 + 192\alpha^3 + 64\alpha^4}.$$

Für verschwindende Gesamtmasse(-energie), $\alpha = 0$, erhält man im gesamten zulässigen κ -Intervall $-1 \leq \kappa \leq 0$ einen nichtverschwindenden negativen Mitführungsterm und zwar gilt an den Grenzen dieses Intervalls: $\mu_2(\alpha = 0) \rightarrow -\infty$ für $\kappa \rightarrow -1$ und $\mu_2(\alpha = 0) \rightarrow \frac{32}{9}\kappa = -8q^2/9R^2 \rightarrow 0$ für $\kappa \rightarrow 0$. Ursache für die Anti-Mitführung sind sowohl die für $\alpha = 0$, $\kappa \leq 0$ negative Energiedichte $-\tau_0^0$ in Gl. (2.16), als auch die negativen Spannungen $\tau_2^2 = \tau_3^3$ in Gl. (2.17), die beide Teile der Energiebedingungen verletzen. Dies erwartet man auch physikalisch nach dem Positiven-Energie-Theorem. Danach erhält man nichttriviale Phänomene für verschwindende Gesamtenergie $\alpha = 0$ nur, wenn die dominanten Energiebedingungen verletzt werden. Ansonsten folgt notwendig, daß die Raumzeit global flach ist. (Die positive elektrostatische Feldenergie $q^2/2\mathbf{R}$ kann gerade so durch negative Spannungen der Schale kompensiert werden, daß $\alpha = 0$ resultiert, ohne daß jedoch $T_\nu^\mu = S_\nu^\mu \equiv 0$ wäre!)

Eine vollständige physikalische Interpretation der Kurve $\mu_2(\alpha, \kappa) \equiv 0$ im Parameterbereich starker gravitativer und elektromagnetischer Felder ist aufgrund der dort auftretenden Wechselwirkungseffekte äußerst schwierig. Quantitativ ist (wie wir bereits im Falle

¹Im ungeladenen Fall, $\kappa = \alpha^2$, ergeben sich, in unterschiedlicher Notation, die Resultate von Brill und Cohen [7].

schwacher Felder gesehen haben) jedoch klar, daß es jenseits der Verletzung der Energiebedingungen zu Anti-Mitführung kommt. Da nur die mit einem Drehimpuls verbundenen Materieströme zu einer Mitführung führen, ist ebenso einsichtig, daß die Werte von (α, κ) bzw. (α, γ) , für die die Mitführung $A(r \leq R)$ gerade verschwindet, mit denjenigen Parameterwerten korreliert sein müssen, für die der Drehimpuls J verschwindet. Aufgrund der algebraisch komplizierten Abhängigkeiten der Integrationskonstanten μ_2 und λ_1 ist eine mathematisch analytische Untersuchung der Kurven $\mu_2(\alpha, \kappa) \equiv 0$ und $J(\alpha, \kappa) \equiv 0$ aber aussichtslos.

Wir analysieren nun den Gesamtdrehimpuls J , dessen Abhängigkeit von α und κ in Abb. 4.2 dargestellt ist. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß die das kon-

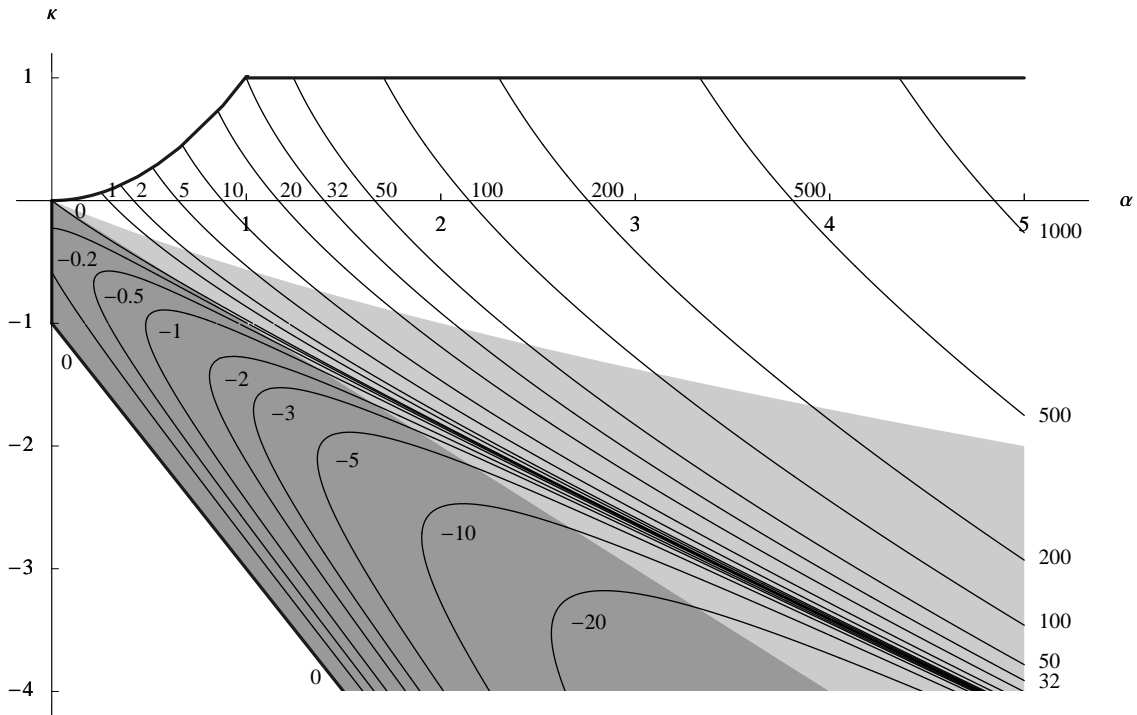


Abbildung 4.2: Höhenlinien für ausgewählte Werte des Drehimpulses in Einheiten von $\frac{2}{3}MR^2\omega$, dargestellt im zulässigen (α, κ) -Parameterraum. Grau schattiert sind diejenigen Bereiche, in denen die schwachen Energiebedingungen des Energie-Impuls-Tensors der Schale verletzt werden: $\Delta\tau < 0$ (hellgrau) und $-\tau_0^0 < 0$ (dunkelgrau).

stante Magnetfeld im Schaleninnern bestimmende Integrationskonstante η_2 im zulässigen Parameterbereich stets positiv ist und damit auch der elektromagnetische Beitrag $\gamma^2\eta_2$ zu $3J/4\omega R^3$ in Gl. (3.33). Wird nun der zweite Teil der schwachen Energiebedingungen, $\Delta\tau \geq 0$, verletzt, dann kann wegen $\mu_2 \leq 1$ der an die Schale gebundene, materielle Beitrag $(1 - \mu_2)\Delta\tau$ zum Drehimpuls negativ werden und den Feldbeitrag des elektromagnetischen Feldes gerade kompensieren und es resultiert $J = 0$. Dies führt zu einer der Newtonschen Mechanik unbekanntem Situation, in der die Schale zwar mit einer nichtverschwindenden Winkelgeschwindigkeit ω rotiert aber keinen (Gesamt-)Drehimpuls besitzt. Ursache dafür sind die negativen Spannungen der Schale, die im Bereich $\Delta\tau < 0$ auftreten und die die positiven Beiträge zum Drehimpuls überwiegen können. Diese Tatsache bemerken auch Mustafa et al. [22].

Im Schwachfeldlimes, $\kappa = \alpha^2$, $\alpha \rightarrow 0$, ergibt sich $\lambda_1 = 1$ und daher das aus der Newtonschen Physik bekannte Resultat $J = \frac{2}{3}MR^2\omega$. Den gleichen Wert erhält man für den extremen Reissner-Nordström-Fall, $\kappa = 0$, im Grenzwert $\alpha \rightarrow 0$.

4.1.2 Magnetfeld und magnetisches Moment

In der gleichen Weise wie μ_2 das konstante Mitführungsfeld im Innern der rotierenden Schale vollständig festlegt, bestimmt die Integrationskonstante η_2 das konstante Magnetfeld $B_z = (\omega q/R)\eta_2$ entlang der z -Achse. Anstelle von η_2 untersuchen wir aber die mit C^{-1} skalierte Konstante $\tilde{\eta}_2 = \eta_2/C$, da wir das Magnetfeld bezüglich einem lokalen Beobachter im Innern der Schale messen. (Ein Beobachter wird durch ein zeitartiges Einheitsvektorfeld beschrieben und daher erfolgen alle physikalischen Messungen bezüglich der Eigenzeit des Beobachters.) Die Konstanten λ_1 und ζ_1 bestimmen dagegen das magnetische Dipolfeld im Außenraum, insbesondere das magnetische Moment m (vgl. die Bemerkungen in Abs. 3.1.4).

Wir fassen wieder die Hauptresultate kurz zusammen:

- i.) $\tilde{\eta}_2 \geq 0$ im gesamten zulässigen (α, κ) -Parameterraum.
- ii.) $\tilde{\eta}_2 \rightarrow 0$ für $\kappa \rightarrow 1$ und für $\kappa \rightarrow -(1 + 2\alpha)$, d.h. im Kollapslimes, sowie für eine unendlich kleine Schale.
- iii.) $\tilde{\eta}_2 \rightarrow \frac{2}{3}$ für $\alpha \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 0$, d.h. der Standardwert der Maxwell-Theorie.
- iv.) $\tilde{\eta}_2$ ist endlich für feste Werte von κ und $\alpha \rightarrow \infty$.

Den Höhenlinien $\tilde{\eta}_2 = \text{const}$ in Abb. 4.3 entnehmen wir das globale Verhalten von $\tilde{\eta}_2$ im zulässigen Parameterraum. $\tilde{\eta}_2$ ist zwischen seinen Nullstellen bei $\kappa = 1$ und $\kappa = -(1 + 2\alpha)$, vgl. [22], durchgehend positiv, insbesondere im Parameterbereich in dem die Mitführung ihr Vorzeichen wechselt. Das Vorzeichen des Magnetfeldes und das Vorzeichen der Mitführung scheinen demnach nicht direkt korreliert zu sein, d.h. das konstante Magnetfeld wechselt nicht sein Vorzeichen bei entgegengesetzter Mitführung. Die Tatsache, daß das Magnetfeld stets die gleiche Orientierung relativ zur Rotationsrichtung hat, ist mathematisch vermutlich eine Konsequenz des Maximumprinzips für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung [39], angewandt auf die Differentialgleichung (3.10). Demzufolge ist die Magnetfeldfunktion $g(\rho)$ entweder identisch Null oder hat einheitliches (positives) Vorzeichen. (Ein mathematisch rigoroser Beweis konnte aber nicht erbracht werden.)

Bemerkenswert ist darüber hinaus, daß für feste Werte von κ die Integrationskonstante $\tilde{\eta}_2$ im Limes $\alpha \rightarrow \infty$ endliche Werte annimmt und nur für $\alpha \rightarrow \infty$ und $\kappa \rightarrow \infty$ divergiert. Im Schwachfeldlimes, $\alpha \ll 1$, $\gamma \ll 1$, wie im extremen Reissner-Nordström-Fall, $\kappa = 0$, im Limes $\alpha \rightarrow 0$, sowie für $\alpha = 0$ und $\kappa \rightarrow 0$ erreicht $\tilde{\eta}_2$ den aus der klassischen Elektrodynamik bekannten Wert $\tilde{\eta}_2 = \frac{2}{3}$. Dementsprechend folgt für die z -Komponente des Magnetfeldes $B_z = (2q/3R)\omega$.

Das magnetische Moment nimmt in diesen Näherungen wegen $\lambda_2 = 1$ den klassischen Wert der Maxwell-Theorie $m = \frac{1}{3}qR^2\omega$ für eine Schale mit Radius R , Ladung q und Winkelgeschwindigkeit ω an.

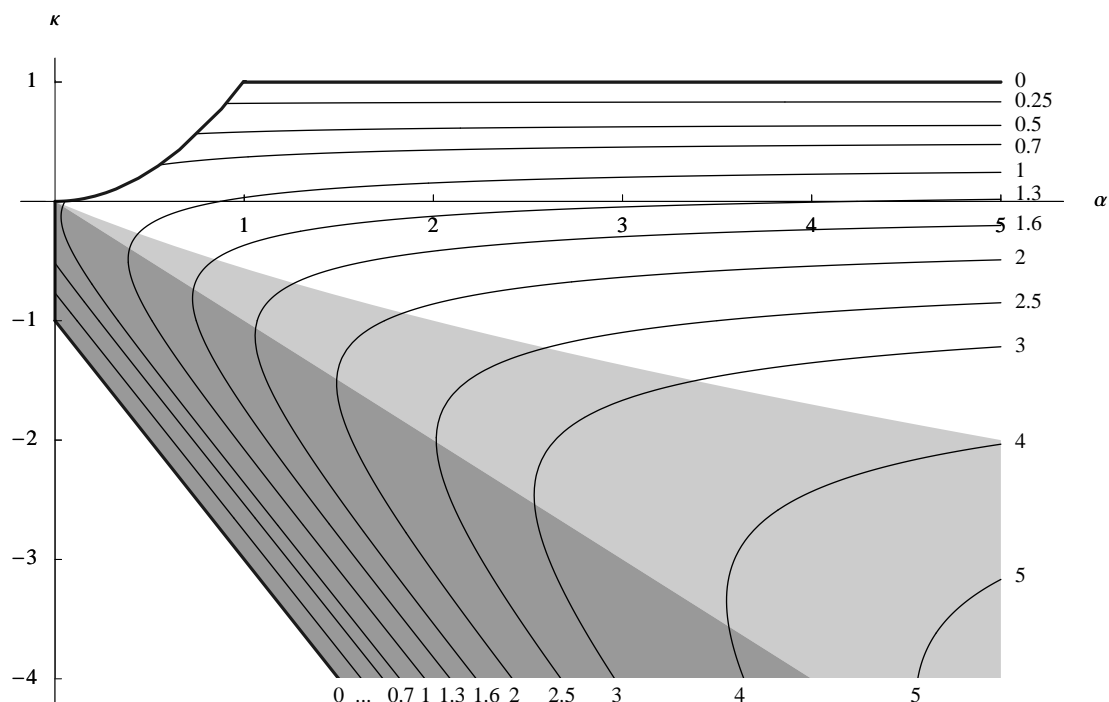


Abbildung 4.3: Höhenlinien für ausgewählte Werte der konstanten z -Komponente des Magnetfeldes im Innern der geladenen Massenschale in Einheiten von $\omega q/R$, dargestellt im zulässigen (α, κ) -Parameterraum. Grau schattiert sind diejenigen Bereiche, in denen die schwachen Energiebedingungen des Energie-Impuls-Tensors der Schale verletzt werden: $\Delta\tau < 0$ (hellgrau) und $-\tau_0^0 < 0$ (dunkelgrau).

Im Außenraum, $r \geq R$, erwarten wir im Kollapsfall aufgrund der no-hair-Theoreme eine Reduktion des Magnet- und Mitführungsfeldes auf die Felder der Kerr-Newman-Schwarz-Loch-Klasse mit Masse M , Ladung q und Drehimpuls J . Aufgrund unserer linearen Näherung in der Winkelgeschwindigkeit ω kann eine Übereinstimmung nur in 1. Ordnung im Drehimpuls bestehen. Für $\kappa = 1$ tritt an der Stelle $r = R$ ein Horizont auf und es gilt für die folgenden Integrationskonstanten:

$$\lim_{\kappa \rightarrow 1} \zeta_1 = 0, \quad \lim_{\kappa \rightarrow 1} \lambda_1 = 6(1 + \alpha)^2, \quad \lim_{\kappa \rightarrow 1} \tilde{\eta}_2 = 0, \quad \lim_{\kappa \rightarrow 1} \mu_2 = 1. \quad (4.1)$$

Daraus folgt $g_1(\rho) \rightarrow 8(1 + \alpha)^2 R/\rho$ und mit $J/M = 4(1 + \alpha)^2 R^2 \omega$ erhält man für die Magnetfeldkomponenten im Außenraum bezüglich eines asymptotisch ruhenden Beobachters

$$B_\rho(\rho, \vartheta) = \frac{J}{M} \frac{2q}{\rho} \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad (4.2)$$

$$B_\vartheta(\rho, \vartheta) = \frac{J}{M} \frac{q}{\rho^2} \sin^2 \vartheta \quad (4.3)$$

und für die Mitführungsfunktion

$$A_1(\rho) = \frac{2(2R + M)^2}{\rho^2} \left(M - \frac{q^2}{2\rho} \right). \quad (4.4)$$

Nun fällt jedoch in 1. Ordnung in der Winkelgeschwindigkeit im Kollapsfall die Reissner-Nordström-Variable ρ mit der Boyer-Lindquist-Radialkoordinate zusammen (siehe z.B. [40], Kap. 33.2–33.3) und obige Erwartungen an die elektromagnetischen und gravitativen Felder bestätigen sich. Zusammengefaßt ergibt sich also:

$$\mathbf{B}(r \leq R) \equiv 0, \quad \mathbf{B}(r > R) = \mathbf{B}_{\text{Kerr-Newman}}, \quad (4.5)$$

$$A(r \leq R) \equiv 1, \quad A(r > R) = A_{\text{Kerr-Newman}}, \quad (4.6)$$

d.h. totale Abschirmung der Magnetfelder und perfekte Mitführung im Innern, sowie die magnetischen Dipol- und Gravitationsfelder der Kerr-Newman-Lösungsklasse im Außenraum.

4.1.3 Der gyromagnetische Faktor

Mit der Kenntnis der Abhängigkeit des Drehimpulses J und des magnetischen Momentes m von den Parametern α und κ ist auch der gyromagnetische Faktor G über $G = 2Mm/qJ$ eindeutig festgelegt. Andererseits ist der G -Faktor auch durch das Verhältnis $3\zeta_1/2\lambda_1$ der beiden Integrationskonstanten ζ_1 und λ_1 gegeben, $G = 2 + (3\zeta_1/2\lambda_1)$. In dieser Darstellung kürzt sich die algebraisch komplizierte Determinante des Gleichungssystems (3.29) gerade heraus und man erhält, vgl. [21]:

$$G = 2 + \frac{\Delta\tau \cdot \frac{C}{D}(2+C) - 2(3\alpha D - 4\gamma^2)}{-\left(\frac{C}{D}\Delta\tau + 4\gamma^2\right)\bar{g}_1(RD) + \frac{C^2}{2}\Delta\tau R d\bar{g}_1(RD)/d\rho}. \quad (4.7)$$

Der Zähler des Bruchs ist demnach unabhängig von $\bar{g}(RD)$, $d\bar{g}(RD)/d\rho$ und $\bar{A}(RD)$ und ist proportional zu $(5 - \kappa)\kappa + \alpha(3 + \kappa)$. Im Nenner hebt sich dabei die Abhängigkeit von $\bar{A}(RD)$ gerade weg.

Aus Abb. 4.4 liest man für den gyromagnetischen Faktor folgende interessante Ergebnisse ab:

- i.) $G \rightarrow 2$ im Kollapsfall, $\kappa \rightarrow 1$, für Werte $\kappa = \frac{1}{2}(5 + \alpha - \sqrt{25 + 22\alpha + \alpha^2})$ und für fast alle asymptotischen Richtungen, d.h. Grenzwerte $\alpha \rightarrow \infty$, $\kappa \rightarrow \infty$.
- ii.) $G \approx 2$ nahezu im gesamten (α, κ) -Parameterraum (siehe auch Abb. 4.5).
- iii.) $G \rightarrow 1$ für $\alpha \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 0$ falls $\kappa \geq 0$, andernfalls weist $G \rightarrow (1 + \frac{5\kappa}{6\alpha})^{-1}$ eine Richtungsabhängigkeit auf.
- iv.) $G \rightarrow \pm\infty$ auf einer Linie in der Region mit $\Delta\tau < 0$.
 $G < 0$ in einem sehr schmalen Streifen unterhalb dieser Linie.
- v.) $G \rightarrow 0$ für $\alpha \rightarrow 0$ und $-1 \leq \kappa \leq 0$.
 $G = 0$ auf einer Linie mit $m = 0$.

Das wohl bemerkenswerteste und überraschenste Resultat der Analyse des gyromagnetischen Faktors ist, daß nahezu im gesamten (α, κ) - Parameterraum G den Wert 2 annimmt und dies nicht nur im Kollapsfall, $\kappa = 1$, wo dieser G -Faktor der Kerr-Newman-Klasse seit Carter [41] bekannt ist, sondern eben auch fern ab des Gravitationskollapses. (Wir kommen am Ende von Abs. 4.1.3 im Rahmen einer breiter angelegten Diskussion des Wertes 2 des G -Faktors nochmal auf diese Tatsache zurück.) So ist z.B. im extremen

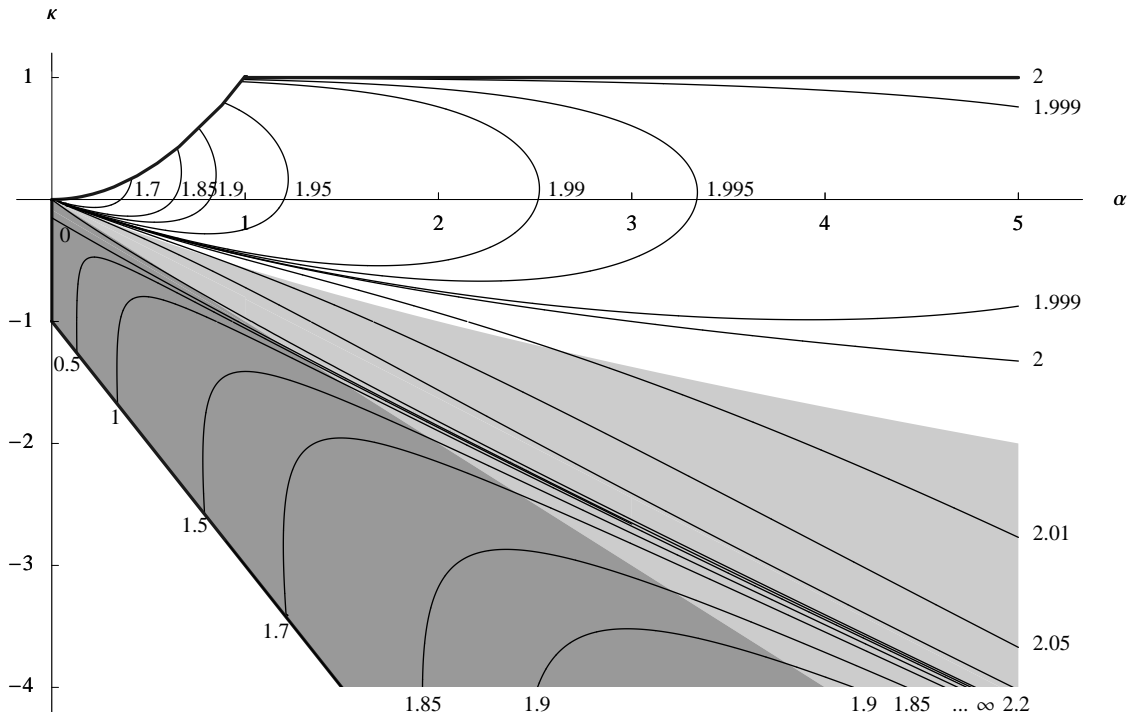


Abbildung 4.4: Höhenlinien für ausgewählte Werte des gyromagnetischen Faktors, dargestellt im zulässigen (α, κ) -Parameterraum. Grau schattiert sind diejenigen Bereiche, in denen die schwachen Energiebedingungen des Energie-Impuls-Tensors der Schale verletzt werden: $\Delta\tau < 0$ (hellgrau) und $-\tau_0^0 < 0$ (dunkelgrau).

Reissner-Nordström-Fall, $\kappa = 0$, $2 - G \leq 0.1$ für alle α mit $\alpha \geq 0.8$. Die Umgebung dieses Parameterbereiches mit $|\kappa| \ll 1$ ist umso mehr von Bedeutung, als dort die Spannungen der Schale $\tau_2^2 = \tau_3^3$ beliebig klein sind und gerade nicht die Ruhenergiedichte $-\tau_0^0$ dominieren. Insofern ist unser geladenes Materiemodell, abgesehen von der Schalen-Struktur, physikalisch nicht unrealistisch. Beschränkt man sich auf den physikalisch wichtigsten Bereich, innerhalb dem die schwachen Energiebedingungen erfüllt sind, $\kappa \geq \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - 2\alpha}$, so gilt dort $1.92 < G < 2.05$ für alle $\alpha > 1$. Um diese überraschende Tatsache physikalisch zu untermauern, müßte man noch genauer sagen, in welchem Sinne man „weit weg“ vom Kollaps des Kerr-Newman-Schwarz-Lochs ist. Dies könnte z.B. dadurch geschehen, daß man physikalische Invarianten für $\kappa = 1$ und $\kappa \neq 1$ auswertet und die Abweichung der beiden Werte vergleicht. G nimmt identisch den Wert 2 auf der Hyperbel $\kappa = \frac{1}{2}(5 + \alpha - \sqrt{25 + 22\alpha + \alpha^2})$ mit Asymptote $\kappa = -3$ an; dies ist die Nullstelle des Zählers von $2 - G$ in Gl. (4.7).

Der G -Faktor ist darüber hinaus auch extrem „robust“, als z.B. Korrekturen von $G - 2$ für feste Werte von κ und $\alpha \rightarrow \infty$ von höherer als linearer Ordnung in α^{-1} sind:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} G(\kappa = \text{const}) = 2 + O(\alpha^{-3}), \quad \text{insbesondere}$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow 1} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} G = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} G(\kappa = -3) = 2 + O(\alpha^{-4}).$$

So gilt z.B. im extremen Reissner-Nordström-Fall $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} G(\kappa = 0) = 2 - \frac{5}{16}\alpha^{-3}$. Für asymptotische Richtungen mit Steigungen $-2 \leq d\kappa/d\alpha < -0.698$ sind die Korrekturterme zu $G = 2$ proportional zu $\alpha^{-5/2}$, z.B. $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} G(\kappa = -(1 + 2\alpha)) = 2 - \frac{16\sqrt{2}}{3\pi}\alpha^{-5/2}$. Und

im Falle linearer Abweichungen ϵ vom Kollapsfall, $\kappa = 1 - \epsilon$ und α fest, verhält sich der gyromagnetische Faktor wie

$$G = 2 - \frac{4\epsilon}{3\alpha(1 + \alpha)^2}.$$

[Vgl. mit dem Resultat zur perfekten Mitführung im Kollapsfall: $\lim_{\kappa \rightarrow 1} \mu_2 = 1 + O(\alpha^{-1})$.] Die Tatsache, daß in unserer Modellklasse der langsam rotierenden geladenen Massenschale der gyromagnetische Faktor G im zulässigen (α, κ) -Parameterbereich nur sehr gering von dem Wert 2 abweicht, wird am eindrucksvollsten in Abb. 4.5 sichtbar. [Für feste Werte von $|q|/M$ siehe auch die Graphiken Fig. 1a-9a in [22] des G -Faktors in Abhängigkeit von R/M . $G \approx 2$ läßt sich dort (etwas indirekt) aus Fig. 5a für den speziellen Wert $|q|/M = 1.01$ ablesen.] Im Falle elektromagnetischer Testfelder, $\kappa = \alpha^2$, erhalten wir die

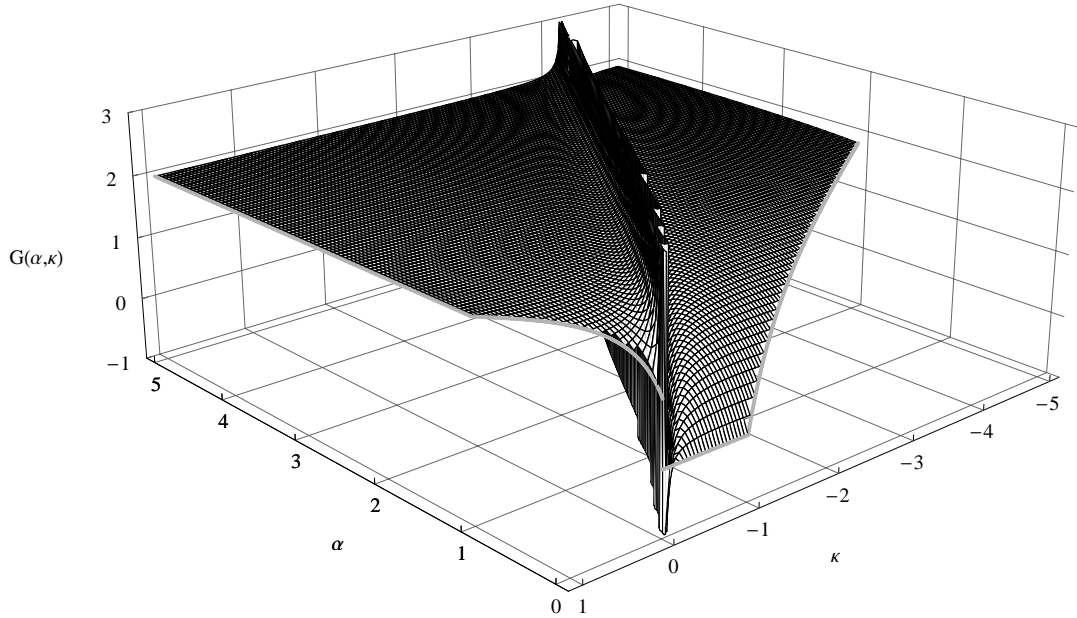


Abbildung 4.5: Graph der Funktion $G(\alpha, \kappa)$ im zulässigen (α, κ) -Parameterbereich. Der gyromagnetische Faktor G weicht nur in einem sehr kleinen (α, κ) -Bereich vom Wert $G = 2$ ab, insbesondere in einer Umgebung, in der der G -Faktor aufgrund des Verschwindens des Gesamtdrehimpulses J divergiert.

Resultate von [20], in unserer Notation:

$$G(\kappa = \alpha^2) = 2 - \frac{8\alpha(1 - \alpha)(3 - \alpha)}{3(2 - \alpha)(1 + \alpha)^2} \frac{1}{-1 + 2\alpha + \alpha^2 + (1 - \alpha)(1 + \alpha)^3 \frac{1}{2\alpha} \log \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}}.$$

Gehen wir hier zum Schwachfeldlimites über, $\alpha \ll 1$, $\gamma \ll 1$, so erhalten wir $G = 1$, mit einem Korrekturterm $\frac{19}{6}\alpha$. Definiert man den Schwachfeldfall über $\alpha \ll 1$, $\kappa \ll 1$, so sieht man, daß G den klassischen Wert $G = 1$ nur für $\alpha \rightarrow 0$ im unterextremen oder extremen

Reissner-Nordström-Fall erreicht. Für $\kappa < 0$, d.h. im überextremen Reissner-Nordström-Fall wird der G -Faktor richtungsabhängig:

$$G = \frac{1}{1 + \frac{5\kappa}{6\alpha}}.$$

Diese Beziehung findet man bereits in [21, 22]. Dort steht κ aber nur für Terme der Ordnung $O(\gamma^2)$. Der Beitrag des Gravitationsfeldes der Ordnung $O(\alpha^2)$ ist damit in diesen Relationen nicht enthalten. Insofern ist unser in κ linearisiertes Ergebnis allgemeiner. (Die Größe $\kappa = \alpha^2 - \gamma^2$ „misst“ in gewisser Weise alle Beiträge der gravitativen und elektromagnetischen Felder.) Im extremen Reissner-Nordström-Fall, $\kappa = 0$, ergibt sich ein einfacher rationaler Ausdruck in α , vgl. [21]:

$$G(\kappa = 0) = 2 - \frac{1}{1 + 4\alpha + 6\alpha^2 + \frac{16}{5}\alpha^3} \rightarrow 1 \quad \text{für } \alpha \rightarrow 0.$$

Für verschwindende Gesamtmasse(-energie), $\alpha = 0$, verschwindet auch der G -Faktor, $G(\alpha = 0) \equiv 0$ für $-1 \leq \kappa \leq 0$.

Neben dem überraschenden Ergebnis $|G - 2| \ll 1$ in einem sehr großen Teil des physikalischen Bereichs der Parameter α und κ , verhält sich der gyromagnetische Faktor in anderer Hinsicht sehr „extrem“. Ursache dafür ist, daß in die Definition von G der Gesamtdrehimpuls J eingeht und im Nenner steht. Wir haben jedoch in Abs. 4.1.1 gesehen, daß J für bestimmte Werte von α und κ verschwinden kann, letztendlich aufgrund der Verletzung der Energiebedingungen. Daher divergiert der G -Faktor auf dieser Linie, die im Ursprung eine Steigung $d\kappa/d\alpha = -\frac{6}{5}$ und asymptotisch $d\kappa/d\alpha \approx -0.697$ aufweist, vgl. auch die Bemerkungen hierzu in [22]. Ober- bzw. unterhalb dieses Pols nimmt G beliebige positive und negative Werte an. Bei $\alpha = 0$ hat dieser Bereich eine Breite von $\Delta\kappa \approx 0.15$ und für $\alpha > 0$ ist die ($G \equiv 0$)-Linie mit zunehmendem α sehr rasch nicht mehr von der ($J \equiv 0$)-Linie zu unterscheiden, vgl. Abb. 4.4. Das Verschwinden des G -Faktors ist natürlich Konsequenz des Verschwindens des magnetischen Moments $m = \frac{1}{3}\omega q R^2(\frac{3}{2}\zeta_1 + 2\lambda_1)$. Offen bleibt für welche exakten Werte von α und κ , sprich den Nullstellen von $\frac{3}{2}\zeta_1 + 2\lambda_1$, der gyromagnetische Faktor verschwindet.

Zum Abschluß von Abs. 4.1.3 machen wir noch einige allgemeine, in der Literatur bisher kaum diskutierte und zum Teil spekulative Bemerkungen zum gyromagnetischen Faktor in der klassischen Physik und der Quantentheorie. Für eine ausführliche Darstellung der Bedeutung und Stellung des G -Faktors, sowohl in der relativistischen und der nichtrelativistischen, als auch in der klassischen und der Quantenphysik siehe den Übersichtsbericht [42].

Prinzipiell kann man jedem physikalischen System mit Masse M , Drehimpuls J und Ladung q über die Definition $G = 2Mm/qJ$ eine Zahl, den G -Faktor zuordnen. Wir hatten bereits eingangs der Diskussion des gyromagnetischen Faktors bemerkt, daß in der Allgemeinen Relativitätstheorie alle Schwarz-Loch-Lösungen denselben G -Faktor besitzen. Zunächst würde man aus obiger Definition von G annehmen, daß dieser eine ziemlich beliebige Funktion der dimensionslosen Parameter J/M^2 und q/M ist. Aufgrund der no-hair-Theoreme ist das äußere Gravitationsfeld und sind die äußeren elektromagnetischen Felder eines stationären geladenen Schwarzen Lochs eindeutig durch ihre Masse M , Ladung q und ihren Drehimpuls J festgelegt (siehe z.B. [40], Kap. 33, Box 33.1). Über diese drei Kenngrößen hinaus existieren keine weiteren unabhängigen, die Felder charakterisierenden Größen (so ist z.B. das Dipolmoment m eines Schwarzen Lochs durch Ladung und

Drehimpuls eindeutig bestimmt). Der genaue Wert des G -Faktors bleibt damit zunächst offen. Doch nach Carter [41] resultiert für alle Lösungen der Kerr-Newman-Klasse derselbe Wert $G = G_{\text{Kerr-Newmann}}$, ein Ergebnis, das an sich erstaunlich genug ist und nach unserem Wissen auch nicht wirklich verstanden ist.

Überraschend ist nun aber, daß dieser Wert gerade $G = 2$ ist, wie er historisch als erstes für ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in der relativistischen (Poincaré-kovarianten) Dirac-Theorie auftrat. Gleichwohl gilt dies aber auch in der nichtrelativistischen (Galilei-kovarianten) Quantenmechanik für elementare Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, wenn man diese gemäß dem Prinzip der minimalen Kopplung an ein äußeres elektromagnetisches Feld ankoppelt. [So sind der Elektronenspin und sein anomales magnetisches Moment kein genuin relativistisches Konzept, sondern folgen bereits aus der nichtrelativistischen Darstellungstheorie der (zentral erweiterten) Galilei-Gruppe, siehe [43].] Für die nach heutigem Stand wirklich elementaren Teilchen, das Elektron (strukturlos bis mindestens 10^{-18}m) und das Muon erreichen die experimentell bestimmten G -Faktoren ($G \approx 2.00231$ für das Elektron und $G \approx 2.00233$ für das Muon) den Wert $G = 2$ nahezu perfekt. Für elementare Teilchen mit höherem Spin, $s > \frac{1}{2}$, ergibt sich im Rahmen quantenfeldtheoretischer Rechnungen, ebenfalls auf der Basis minimaler Kopplung der elektromagnetischen Wechselwirkungen, formal der Wert $G = 1/s$ (siehe z.B. [44]). Jedoch gibt es gewichtige Argumente, die für eine konsistente Beschreibung relativistischer geladener Spinteilchen $G = 2$ als einen bevorzugten Wert nahelegen, siehe [45]. Darüber hinaus hat in der klassischen, relativistischen (Bargmann-Michel-Telegdi-)Bewegungsgleichung [46] für Teilchen beliebigen Spins in einem äußeren homogenen elektromagnetischen Feld der Wert $G = 2$ in dem Sinne eine ausgezeichnete Position, als die Bewegungsgleichung einen Term mit einem Faktor $G - 2$ enthält und daher für $G = 2$, unabhängig vom Spin s , besonders einfach wird. Zusammenfassend scheint der natürliche Wert für mit äußeren Feldern wechselwirkende Teilchen beliebigen Spins $G = 2$ zu sein.

Kommen wir zur klassischen Physik zurück, so ist in der Maxwell-Theorie $G = 1$ der genuine Wert. G -Faktoren mit $G > 1$ werden, wenn überhaupt, nur in speziellen Modellen im Falle starker Gravitation, z.B. starker gravitierender elektromagnetischer Felder erreicht: So erreichen Cohen und Mustafa [47] (vgl. auch [48]), ebenfalls im Rahmen des Ein-Schalen-Modells, im Parameterbereich $q \gg M$ und $q \ll R$ (d.h. unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $O(M^2)$ und damit unter Ausschluß der Beiträge des Gravitationsfeldes) durch Einbeziehung der Spannungen der Schale und der Beiträge des elektromagnetischen Feldes, G -Werte im Intervall $0 \leq G \leq 6$. Innerhalb dieses Intervalls ist der Wert $G = 2$ aber weder besonders ausgezeichnet, noch erscheint er als „natürlich“.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie haben neben den oben erwähnten Lösungen der Kerr-Newman-artigen Schwarzen Löcher auch die der geladenen Tomimatsu-Sato-Klasse [49, 50] und ganz allgemein alle aus beliebigen stationär-axialsymmetrischen Vakuum-Lösungen durch Harrison-Transformationen entstehende Lösungen der Einstein-Maxwell-Gleichungen einen G -Faktor 2 [55].

Nun sind solche „Übereinstimmungen“ des Wertes $G = 2$ (und dessen „Robustheit“) für unsere Modellsysteme von rotierenden geladenen Massenschalen mit starken Gravitations- und elektrischen Feldern und für derart bedeutende Lösungsklassen, wie der Kerr-Newman-artigen in der Allgemeinen Relativitätstheorie mit solchen der Quantentheorie, wie der Dirac-Theorie sicher nicht zufällig (so waren solche Koinzidenzen wie z.B. die zwischen träger und schwerer Masse in der Geschichte der Physik selten zufällig oder von trivialer Natur). Zumindest muß man festhalten, daß sie in der Literatur nach un-

serem Wissen kaum diskutiert oder gar in irgendeiner Weise „verstanden“ sind. Man kann spekulieren inwiefern und inwieweit diese Tatsache für die Konstruktion einer einheitlichen Theorie der „Quantengravitation“ von Bedeutung ist. Sollte es sich jedoch zeigen, daß der Wert $G = 2$ einen fundamentalen Charakter besitzt, dann würde er in ganz praktischer Hinsicht ein Datum liefern, an dem derartige Theorien getestet werden können. So ergibt sich z.B. für eine Majumdar-Papapetrou-artige Klasse von Supergravitations-Solitonen auch gerade $G = 2$ [51].

4.2 Analyse des Zwei-Schalen-Modells

Im zweiten Teil von Kapitel 4 verfahren wir hinsichtlich der Näherungsmethoden und der Analyse der physikalischen Größen des Zwei-Schalen-Modells nahezu entsprechend Abs. 4.1, legen den Schwerpunkt der Diskussion aber deutlich auf Machsche Fragestellungen unserer elektromagnetischen Thirring-Probleme: Inwieweit und inwiefern werden, neben den Trägheitseigenschaften von Körpern, elektromagnetische Phänomene durch die Materieverteilung des Universums beeinflußt, und sind Mitführungseffekte Ursache von gravitativ induzierten elektromagnetischen Feldern? Insbesondere geben wir hinsichtlich der rotationsinduzierten Magnetfelder eine Mach-positive Interpretation und korrigieren diesbezüglich Ergebnisse und Aussagen in der Literatur.

Zunächst betrachten wir die in der Testfeldapproximation auftretenden magnetischen Dipolfelder. Zum Vergleich mit Cohen [18] untersuchen wir hierbei den Kollapsfall der äußeren Massenschale, in dem die Schale ein einfaches, idealisiertes Modell des Kosmos darstellt und erhalten ein nahezu perfektes Machsches Resultat. Anschließend geben wir in 2. Ordnung in q ein weiteres explizites Beispiel für Anti-Mitführung im Rahmen unseres Zwei-Schalen-Modells und interpretieren das höchst ungewöhnliche Ansteigen der Mitführung (weg vom Zentrum) im Zwischenraum der beiden Schalen.

Im Schwachfeldlimit erwarten wir Verhältnisse, welche sehr nahe an der klassischen Maxwell-Theorie sind und dementsprechend davon nur geringfügig abweichende Resultate. Nichtsdestotrotz ist eine Deutung der auftretenden Magnetfelder im Sinne von Mach sehr subtil und erfordert eine detaillierte Analyse des Bewegungszustandes der Schalen. Wir werden jedoch sehen, daß wir bezüglich allen inertialen Bezugssystemen vollkommen befriedigende Ergebnisse erhalten und korrigieren entsprechende Mach-negative bzw. Mach-neutrale Schlußfolgerungen zur Orientierung des Magnetfeldes bei Ehlers und Rindler [16].

Abschließend untersuchen wir unser Zwei-Schalen-Modell hinsichtlich in M und q exakter Resultate, insbesondere den Kollapsfall.

4.2.1 Die Magnetfelder in der Testfeldapproximation

Die Magnetfelder \mathbf{B}^I und \mathbf{B}^{II} im Innenraum, $r \leq a$, der geladenen Schale beschreiben gemäß Gl. (3.8) des Ein-Schalen-Modells in gleicher Weise konstante Felder in Richtung der Rotationsachse: $B_z = B_z^I + B_z^{II} = (q/R)(\omega^I \eta_3^I + \omega^{II} \eta_3^{II}) = (q/R)(\bar{\omega}^I \tilde{\eta}_3^I + \omega^{II} \eta_3^{II})$ mit der mit C_3^{-1} skalierten Integrationskonstanten $\tilde{\eta}_3^I = \eta_3^I / C_3$.

Im vorliegenden Fall elektromagnetischer Testfelder führt die lineare Näherung in der Ladung q im Fall II einer rotierenden äußeren Massenschale für die B_z^{II} bestimmende

Integrationskonstante η_3^{II} auf

$$\eta_3^{\text{II}} = \frac{3(1+\alpha)^2(2-\alpha)}{2\alpha(3-\alpha)} \frac{(1+\alpha)^2(1+\alpha^2) - \frac{8}{3}\alpha^2 - (1+\alpha)^4(1-\alpha)^2 \frac{1}{2\alpha} \log \frac{1+\alpha}{1-\alpha}}{-1+2\alpha+\alpha^2+(1+\alpha)^3(1-\alpha) \frac{1}{2\alpha} \log \frac{1+\alpha}{1-\alpha}}. \quad (4.8)$$

Wir haben in Abs. 4.1 betont, daß alle Funktionen $g_i(r)$ und $A_i(r)$ und alle Integrationskonstanten eine Entwicklung nach geraden Potenzen in q besitzen. In 1. Ordnung q sind diese Größen demnach alle unabhängig von q und hängen nur vom Massenparameter $M/2R = \alpha \in [0, 1]$ ab. In diesem α -Intervall ist η_3^{II} eine monoton steigende, positive Funktion mit den beiden Grenzwerten $\eta_3^{\text{II}} = \frac{4}{3}\alpha$ für $\alpha \ll 1$ und $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \eta_3^{\text{II}} = 8$. Analog ergibt sich für die Magnetfeldstärke von B_z^{I} (Fall I einer rotierenden inneren geladenen Schale) im Innenraum, die wir der Übersicht halber durch $\tilde{\eta}_3^{\text{II}}$ ausdrücken

$$\tilde{\eta}_3^{\text{I}} = \frac{2(1+\alpha)^2}{3\beta} + \left[\frac{4\alpha(1+\alpha)^2}{3(3+\alpha)} - \frac{(3-\alpha)}{(2-\alpha)(3+\alpha)} \eta_3^{\text{II}} \right] \beta^2. \quad (4.9)$$

Die α -abhängigen Vorfaktoren des β^2 -Terms fallen monoton vom Wert 0 für $\alpha = 0$ auf den Grenzwert $-\frac{8}{3}$ bei $\alpha = 1$. Im Limes $\beta \rightarrow 0$ divergiert $B_z^{\text{I}}(r \leq a)$ proportional zu β^{-1} analog zur Situation in der klassischen Elektrodynamik.

Im Zwischenraum, $a \leq r \leq R$, gilt gemäß Gl. (3.11) mit Gl. (3.12) und (3.13) ganz allgemein, wenn wir alle Terme der Ordnung $O(\gamma^2)$ vernachlässigen: $g_2(\rho) = (4R/3\rho)\lambda_2 + (\rho^2/R^2)\eta_2 + (R/\rho)\zeta_2$. Im Fall II heben sich in dieser Ordnung gerade die Terme $\lambda_2^{\text{II}} \hat{g}_2(\rho) = \beta^3(1+\alpha)^2 \eta_3^{\text{II}} \cdot \hat{g}_2(\rho)$ und $\zeta_2^{\text{II}} \bar{g}_2(\rho) = \frac{4}{3}\beta^3(1+\alpha)^2 \eta_3^{\text{II}} \cdot \frac{3}{4} \hat{g}_2(\rho)$ weg. Demgemäß folgt $g_2^{\text{II}}(\rho) = (\rho^2/R^2) \cdot \eta_3^{\text{II}} / (1+\alpha)^4$ und unter Beachtung der in q linearisierten Gleichung (2.26), $r(\rho) = \rho/D_2 = \rho/(1+\alpha)^2$, ergibt sich $g_2^{\text{II}}(r) = (r^2/R^2)\eta_3^{\text{II}} = g_3^{\text{II}}(r)$, d.h. das Magnetfeld \mathbf{B}^{II} des Innenraums erstreckt sich unverändert auf den Zwischenbereich:

$$B_z^{\text{II}}(r \leq R) = (q/R)\omega^{\text{II}}\eta_3^{\text{II}}. \quad (4.10)$$

Dieses zunächst überraschende Resultat erklärt sich jedoch dadurch, daß im Fall II das Magnetfeld \mathbf{B}^{II} allein Konsequenz der Mitführung durch die äußere rotierende Massenschale ist und in linearer Näherung in q ist die Mitführungsfunktion in diesem Bereich der Raumzeit unverändert konstant wie im ungeladenen Fall [7]: $A^{\text{II}}(r \leq R) = \text{const.}$ Auch das positive Vorzeichen von B_z^{II} ist in Machscher Hinsicht zu erwarten: So sieht ein mitgeführter, inertialer Beobachter im Zwischenraum einerseits eine nichtrotierende geladene Schale und andererseits eine mit $-A_3^{\text{II}}\omega^{\text{II}}$ rotierende Massenschale. Doch ist dies gerade die Mach-äquivalente Situation einer mit der Winkelgeschwindigkeit $A_3^{\text{II}}\omega^{\text{II}}$ rotierenden Ladungsverteilung in einem ansonsten statischen „Kosmos“. Zwar existieren im Innern der Massenschale bezüglich den lokalen Inertialsystemen keine elektrischen Ströme, da aufgrund der konstanten Mitführung die relative Winkelgeschwindigkeit inertialer Beobachter zur mitgeführten Ladungsverteilung verschwindet, dennoch messen solche Beobachter ein induziertes Magnetfeld \mathbf{B}^{II} für alle Werte von $0 \leq \alpha \leq 1$. Dies zeigt beispielhaft den nichtlokalen, genuin globalen Charakter solcher „Machscher“ Felder. (Man vergleiche mit der Situation Machscher Effekte in zeitabhängigen, dynamischen Situationen, die dort mit den Zwangsbedingungen verknüpft und damit instantaner Natur sind, siehe z.B. [52] und [53].)

Im Fall I erwarten wir aufgrund der nichtverschwindenden Eigenwinkelgeschwindigkeit ω^I der geladenen Schale bereits im Zwischenraum das aus der klassischen Maxwell-Theorie bekannte magnetische Dipolfeld außerhalb einer rotierenden Ladungsverteilung. Die Terme $\lambda_2^I \hat{g}_2(\rho)$ und $\zeta_2^I \bar{g}_2(\rho)$ ergeben zusammen mit $\eta_2^I \bar{g}_2(\rho)$ für die radiale Magnetfeldkomponente:

$$B_r^I(a \leq r \leq R) = qR(1 + \alpha)^2 \bar{\omega}^I \left\{ \left[\frac{\tilde{\eta}_3^I}{(1 + \alpha)^2} - \frac{2}{3\beta} \right] \frac{r^2}{R^2} + \frac{2\beta^2 R}{3r} \right\} \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (4.11)$$

Setzen wir in Gl. (4.11) die Integrationskonstante $\tilde{\eta}_3^I$ aus Gl. (4.9) ein, so kürzt sich in Gl. (4.11) der für $\beta \rightarrow 0$ divergente Term proportional $2/3\beta$ gerade weg. Übrig bleibt der aus der klassischen Elektrodynamik bekannte Term proportional $\frac{2}{3}\beta^2$ der Magnetfeldkomponente B_r außerhalb einer Ladungsverteilung. [Für $r = a$ kürzen sich in Gl. (4.11) die beiden letzten Terme in der geschweiften Klammer und dies garantiert gerade den stetigen Anschluß an das Feld $B_z^I(r \leq a)$ des Innenraums: $B_r^I(r = a) = qR\tilde{\eta}_3^I \bar{\omega}^I \sin \vartheta \cos \vartheta$.]

Im Außenraum, $r \geq R$, reduziert sich wegen $\eta_1 = 0$ die Magnetfeldfunktion $g_1(\rho)$ auf $g_1(\rho) = \lambda_1 \hat{g}_1(\rho) + \zeta_1 \bar{g}_1(\rho)$, mit $\hat{g}_1(\rho) = 4R/3\rho$ und

$$\begin{aligned} \bar{g}_1(\rho) &= -\frac{3R}{4M^2} \left[\rho + M + \frac{\rho^2}{2M} \log \left(1 - \frac{2M}{\rho} \right) \right] \\ &\approx \frac{R}{\rho} \left(1 + \frac{3M}{2\rho} + \frac{12M^2}{5\rho^2} + \dots \right), \end{aligned}$$

wobei mit Gl. (2.8) und $D_1 = 1$ in der Testfeldapproximation $\rho = (2r + M)^2/4r$ folgt. Asymptotisch besitzen daher die kartesischen Magnetfeldkomponenten von \mathbf{B}^I und \mathbf{B}^{II} das übliche Abfallverhalten mit r^{-3} und weisen ganz allgemein die charakteristische ϑ -Abhängigkeit von Dipolfeldern auf. Schließlich lauten die verbleibenden Integrationskonstanten, zunächst im Fall II:

$$\lambda_1^{II} = \frac{3(1 + \alpha)^5(2 - \alpha)}{2(3 - \alpha)}. \quad (4.12)$$

Als Funktion von α startet λ_1^{II} vom Wert 1 für $\alpha = 0$ und steigt monoton auf den Wert 24 für $\alpha = 1$. Wir geben noch die Integrationskonstante ζ_1^{II} an und drücken auch sie durch η_3^{II} aus:

$$\zeta_1^{II} = -\frac{4}{3}\alpha(1 - \alpha)\eta_3^{II} - \frac{2(1 + \alpha)^3(1 - \alpha)^2(2 - \alpha)}{3 - \alpha}. \quad (4.13)$$

Die Konstante ζ_1^{II} beginnt für $\alpha = 0$ mit dem Wert $-\frac{4}{3}$, fällt auf ein Minimum $\zeta_{1\min}^{II} \approx -1.56$ für $\alpha \approx 0.35$ und steigt anschließend wieder auf den Wert 0 im Kollapsfall, $\alpha = 1$. Im Schwachfeldlimit, $\alpha \ll 1$, heben sich deswegen die Terme $\lambda_1^{II} \hat{g}_1(\rho)$ und $\zeta_1^{II} \bar{g}_1(\rho)$ gerade weg, wohingegen für Werte von $\alpha \geq 0.5$ und insbesondere für $\alpha \rightarrow 1$ der Beitrag $\lambda_1^{II} \hat{g}_1(\rho)$ absolut dominierend ist. Mit Blick auf Gl. (4.8), (4.12) und (4.13) vermerken wir, daß das rein durch die Mitführung induzierte Magnetfeld \mathbf{B}^{II} in der Näherung elektromagnetischer Testfelder vollkommen unabhängig von $\beta = a/R$ und damit auch unabhängig von der detaillierten „Struktur“ der inneren Schale ist. (Natürlich darf die Schale nicht von der sphärischen Symmetrie abweichen, da unsere Störungsrechnung in 1. Ordnung ω

entscheidend auf der Kugelsymmetrie unserer Modellsysteme basiert.) Dies ist insofern plausibel, als sowohl der elektromagnetische, wie auch der materielle Teil des Energie-Impuls-Tensors der inneren Schale wegen der Vereinfachung $\tau_0^0(a) = 0$ erst in 2. Ordnung in q eine nichtverschwindende Komponente besitzen: $S_\nu^\mu \sim O(\gamma^2)$ und $\tau_\nu^\mu(a) \sim O(\gamma^2)$. Daher spielt die exakte Position der Schale hier keine Rolle. Letztendlich ist dies auch der Grund, weshalb im Fall I die Integrationskonstante λ_1^I in 1. Ordnung q verschwindet. Für die letzte verbleibende, mit C_3^{-1} skalierte Konstante ζ_1^I des Außenraums erhalten wir schließlich

$$\tilde{\zeta}_1^I = \frac{\zeta_1^I}{C_3} = \frac{\frac{8}{3}\alpha(1+\alpha)^2(1-\alpha)\beta^2}{-1 + 2\alpha + \alpha^2 + (1+\alpha)^3(1-\alpha)\frac{1}{2\alpha}\log\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}. \quad (4.14)$$

$\tilde{\zeta}_1^I$ startet vom Wert $\frac{2}{3}$ im Schwachfeldfall, $\alpha \ll 1$, erreicht ein Maximum von ca. 0.74 bei $\alpha \approx 0.32$ und verschwindet, wie ζ_1^H , im Kollapslimites $\alpha \rightarrow 1$.

Den physikalisch wichtigsten Fall unserer Gesamtanalyse des Zwei-Schalen-Systems (jedenfalls hinsichtlich der Frage nach dem Einfluß der kosmischen Materieverteilung auf elektromagnetische Phänomene) stellt der Fall des Gravitationskollapses der äußeren rotierenden Massenschale in der elektromagnetischen Testfeldapproximation dar. Dies hat zwei wesentliche Gründe:

- i.) Im Kollapsfall steht unsere äußere rotierende Massenschale als einfaches kosmologisches Modell stellvertretend für die Materieverteilung unseres Universums („shell-type-sky“), in dem hinsichtlich der lokalen Trägheitsstruktur im Schaleninnern die Relativität der Rotation perfekt realisiert ist: $A(r \leq R) \equiv 1$. Lokale Inertialsysteme werden mit der vollen Winkelgeschwindigkeit der „kosmischen“ Massen mitgeführt, sind also relativ zu den „Fixsternen“ in Ruhe. Würden wir dagegen ein kosmologisches Modellsystem verwenden, innerhalb dem bereits die lokale Trägheitsstruktur inkorrekt wäre, so könnte man durch Ausführung mechanischer und elektromagnetischer Experimente eben unterscheiden, ob es nun einen Unterschied macht, ob sich der Kosmos um uns dreht oder das Universum in Ruhe ist und wir uns drehen. (In Abs. 4.2.3 behandeln wir das Zwei-Schalen-Modell im Schwachfeldfall und diskutieren die induzierten Magnetfelder hinsichtlich ihrer Machschen Eigenschaften. Dort ist die Massenschale aber eben nur ein Teil der gesamten Materieverteilung des Kosmos. Wie wir in der Einleitung betont haben, ist nach Mach eine Beschreibung der Natur in Abwesenheit aller absoluten Elemente, wie z.B. Newton's absoluten Raum, auch nur innerhalb eines kosmologischen Modells zu erwarten, siehe [6], Kap. 5.)
- ii.) Wir haben bereits in der Einleitung zu Kapitel 4 deutlich gemacht, daß Ladungen in kosmologischen Zusammenhängen keine Rolle spielen. Wollen wir untersuchen, ob Rotationsbewegungen auch im Hinblick auf elektromagnetische Phänomene nur eine relative Bedeutung haben, es also z.B. nur auf die relativen Winkelgeschwindigkeiten zwischen den Materie- und Ladungsverteilungen ankommt, so vergleichen wir im Rahmen der rotationsinduzierten Magnetfelder stets mit solchen die Labormaßstäben entsprechen und uns aus der Maxwell-Theorie geläufig sind. Wir erwarten demnach keine Rückwirkung der Ladungen auf die Geometrie der Raumzeit. Wenn wir überhaupt enge Verbindungen zur klassischen Elektrodynamik erwarten können, dann ausschließlich in einem flachen Teilbereich der Raumzeit. Wegen $A(r \leq R) = \text{const}$ ist in der oben genannten Näherung der gesamte Innen- und Zwischenraum flach!

Der Kollapslimes ist auch der einzige Grenzfall, in dem Cohen [18] explizite Resultate für die Magnetfelder angibt. Führt man für die oben angegebenen Integrationskonstanten den Grenzwert $\alpha \rightarrow 1$ aus, so erhält man für die radiale Magnetfeldkomponente

$$B_r(r \leq a) = \frac{8qr^2}{3a} \left\{ \left[1 - \left(\frac{a}{R} \right)^3 \right] \bar{\omega}^I + \frac{3a}{R} \omega^{II} \right\} \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad (4.15)$$

$$B_r(a \leq r \leq R) = \frac{8qa^2}{3r} \left\{ \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^3 \right] \bar{\omega}^I + \frac{3r^3}{Ra^2} \omega^{II} \right\} \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad (4.16)$$

$$B_r(r \geq R) = \frac{32qR^2r}{(r+R)^2} \omega^{II} \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (4.17)$$

Um diese Ergebnisse mit denen von Cohen [18] korrelieren zu können, bemerken wir zunächst folgendes

- i.) Die Gesamtwinkelgeschwindigkeiten $\bar{\omega}(a)$ und $\bar{\omega}(R)$ der inneren und äußeren Schale werden in [18] mit $\bar{\omega}_c$ und $\bar{\omega}_s$ bezeichnet.
- ii.) Cohen berechnet die Magnetfeldkomponenten bezüglich lokal nichtrotierenden, inertialen Beobachtern im Innern der Massenschale, d.h. die Magnetfelder werden mit dem Faktor $C_3^{-1} = (1 - \alpha)/(1 + \alpha)$ skaliert. Dies hat zur Konsequenz, daß vermöge endlichem $\bar{\omega}^{II} = C_3 \omega^{II}$ die Winkelgeschwindigkeit ω^{II} , bzw. der zugehörige Drehimpuls J^{II} im Limes $\alpha \rightarrow 1$ verschwindet. Daher fehlen bei Cohen in Gl. (4.15) bis (4.17) auch alle Terme proportional ω^{II} . In diesem Sinne interessiert sich Cohen nur für das „rotierende Universum“ und dessen Innenbereich $r \leq R$. Alle physikalischen Vorgänge „außerhalb“ des Modell-Kosmos sind in einer solchen Sichtweise natürlich irrelevant.

Nichtsdestotrotz ist es legitim und interessant in unserer Modellklasse nach der Herkunft des Magnetfeldes proportional ω^{II} zu fragen, insbesondere im Außenraum, wo keine Magnetfeldbeiträge proportional $\bar{\omega}^I$ existieren. Im Unterschied zu einem Beobachter im Innern der Massenschale kann für einen Beobachter im Außenraum ω^{II} bzw. J^{II} endliche Werte annehmen. Mit Gl. (3.34) und $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \lambda_1^{II} = 24$ ergibt sich für den Drehimpuls J^{II} in 1. Ordnung in der Winkelgeschwindigkeit und in der Ladung im Kollapsfall $\alpha \rightarrow 1$ der Wert $J^{II} = 32R^3 \omega^{II}$. Demzufolge beschreiben $B_r(r \geq R)$ und $B_\vartheta(r \geq R)$ gerade das physikalisch erwartete Kerr-Newman-Feld in dieser Näherung, siehe z.B. [40], Kap. 33.2–33.3. Die ω^{II} -Terme in Gl. (4.15) und (4.16) garantieren den stetigen Anschluß dieses Feldes an den Zwischen- und Innenraum.

Betrachten wir nun im Kollapsfall die Situation im „Innern“ des Universums, $r \leq R$, d.h. $\omega^{II} = \bar{\omega}^{II}/C_3 = 0$ falls $\bar{\omega}^{II} = \text{endlich}$, so folgt $\bar{\omega}_c - \bar{\omega}_s \equiv \bar{\omega}(a) - \bar{\omega}(R) = [1 - A^I(R)] \bar{\omega}^I + (\mu_3^{II} - C_3) \omega^{II}$. Wegen $\lambda_1^I = 0$ in 1. Ordnung q , sowie $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \zeta_1^I = 0$ und $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \mu_3^{II} = C_3$ verschwindet $A^I(R)$, ebenso $\mu_3^{II} - C_3$. Wir erhalten also $\bar{\omega}_c - \bar{\omega}_s = \bar{\omega}^I$. Transformieren wir unsere isotropen Koordinaten auf Cohens Bezugssystem, so finden wir eine vollkommene Übereinstimmung unserer Felder proportional $\bar{\omega}^I$ in Gl. (4.15) und (4.16) mit denjenigen von Cohen.

Daher können wir auch die Mach-positive Schlußfolgerung von Cohen [18] übernehmen: An interior observer „... cannot distinguish (even with electromagnetic fields reaching beyond the mass shell) whether the charged shell is rotating or the mass shell is rotating in the opposite direction.“ Das Magnetfeld erfüllt jedoch nicht nur allein dadurch Machsche

Erwartungen, als nur relative Winkelgeschwindigkeiten der beiden Schalen von Bedeutung sind, vielmehr ist auch die Form, bis auf einen kosmologischen Korrekturfaktor, identisch mit dem Resultat für das Magnetfeld einer rotierenden geladenen Schale mit Radius a in der klassischen Maxwell-Theorie. Nehmen wir unser kosmologisches Modell einer Massenschale mit $M = 2R$ bzw. $\bar{\alpha} = \bar{r}_0$ (in Cohens Notation), abgesehen von der unrealistischen Schalenstruktur, wirklich Ernst, d.h. wollen wir daraus „beobachtbare“ Fakten gewinnen und betrachten nun die z -Komponente des Magnetfeldes im flachen Innenbereich

$$B_z^I(r \leq a) = \frac{8q}{3a} \left[1 - \left(\frac{a}{R} \right)^3 \right] \bar{\omega}^I,$$

so gilt für alle Labormaßstäbe a bzw. \bar{r}_c (in Cohens Notation) und selbst Dimensionen der Größenordnung unseres Sonnensystems $a \ll R$ bzw. $\bar{r}_c \ll \bar{r}_0$. Damit ist aber erst recht $(a/R)^3$ bzw. $(\bar{r}_c/\bar{r}_0)^3$ unmeßbar klein. Der „kosmologische Korrekturfaktor“ $1 - (a/R)^3$ macht demzufolge zwar einen prinzipiellen Einfluß der globalen Eigenschaften des Kosmos (hier des „Weltradius“ R bzw. \bar{r}_0) auf die lokalen Systeme (hier charakterisiert durch den Schalenradius a bzw. \bar{r}_c) sichtbar, ist aber in allen denkbaren Situationen heutigen Meßmethoden unzugänglich. Im Bereich $a \leq r \leq R$ ergibt sich das entsprechende äußere Dipolfeld (das für $r = R$, also am „Rand des Universums“ gerade verschwindet), jedoch ist für $r \ll R$ der relative Unterschied zwischen dem Resultat auf einem flachen und einem gekrümmten Hintergrund nach wie vor sehr klein. [In Cohen's Figur 2 [18] sind diesbezüglich die beiden Kurven für die auf einem flachen und auf einem gekrümmten Hintergrund berechneten radialen Magnetfeldfunktionen nicht korrekt skaliert: Das dort gewählte Verhältnis $\bar{r}_0/\bar{r}_c = 2.5$ führt für $\bar{r} < \bar{r}_c$ auf $1 - (\bar{r}_c/\bar{r}_0)^3 \approx 0.936$ anstelle des aufgetragenen Wertes ≈ 0.6 .]

Wir erhalten bezüglich einem inertialen (mitrotierenden) Beobachter in „irdischen“ Entfernungsmaßstäben ($r \ll R$) von der Ladungsverteilung demzufolge das oben angekündigte Mach-perfekte Resultat:

$$B_\rho(\rho, \vartheta) = \begin{cases} \frac{2q\mathbf{a}^2}{3\rho^3} [\bar{\omega}(a) - \bar{\omega}(R)] \cos \vartheta & \text{für } \mathbf{a} \leq \rho \ll R, \\ \frac{2q}{3\mathbf{a}} [\bar{\omega}(a) - \bar{\omega}(R)] \cos \vartheta & \text{für } \rho \leq \mathbf{a}. \end{cases} \quad (4.18)$$

Dies ist (zusammen mit B_ϑ) exakt das Magnetfeld einer Schale mit Radius \mathbf{a} , Ladung q und relativer Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}(a) - \bar{\omega}(R)$ der klassischen Elektrodynamik. In den Worten von Pfister und Braun [8] können wir dieses Resultat auch so kommentieren: „In this way, Mach's ideas on the relativity of rotation ... are materialised in general relativity as completely as one could ever hope within the model of a shell-type-sky.“

Wir bemerken noch, daß die Magnetfeldkomponente B_ϑ bei Cohen (und in seiner Notation) in Gl. (45), gemäß Gl. (28) $p(\bar{r}) = (q\bar{r}_c^2/3\bar{r}^3)(\bar{\omega}_c - \bar{\omega}_\rho)\{3 + 2[(\bar{r}_0 - \bar{r})/(\bar{r}_0 + \bar{r})][1 - (\bar{r}/\bar{r}_0)^3]\}$ lauten muß. Damit $n(\bar{r})$ asymptotisch wie \bar{r}^{-3} abfällt, muß Gl. (37) korrekterweise $F(\bar{r}) = 2\bar{\alpha}(\bar{r}\Psi^2)^{-1} + 4\bar{\alpha}^2(\bar{r}\Psi^2)^{-2} + \ln V$ heißen, um auch im Grenzwert $\bar{\alpha} \rightarrow 0$ in Gl. (4) überzugehen, in der der Faktor $(\bar{r}/\bar{r}_c)^3$ durch $(\bar{r}/\bar{r}_c)^{-3}$ ersetzt werden muß.

4.2.2 Die Mitführung in 2. Ordnung q

In 2. Ordnung in q erwarten wir nun die ersten nichtlinearen Wechselwirkungseffekte durch die Rückwirkung des Beitrags der elektrostatischen Energie zum Energie-Impuls-

Tensor auf die Geometrie. Die einzige relevante unbekannte Größe in dieser Ordnung ist die Mitführungsfunktion $A(r)$. Da die Raumzeit zwischen der Massenschale und der geladenen Schale nicht mehr flach, sondern durch die Anwesenheit starker elektromagnetischer Felder gekrümmt ist, erwarten wir das Auftreten von neuen und physikalisch interessanten, der nichtrelativistischen Physik unbekanntem Phänomenen. Aufgrund der Masselosigkeit der inneren geladenen Schale ist $\tau_v^\mu(a) \sim O(\gamma^2)$, so daß wir in dieser Näherung erstmals wirklich von einer inneren Schale reden können. Und es sind nur die Spannungen, die die Mitföhrungseigenschaften der inneren Schale bestimmen. Im wesentlichen ergeben sich in den Fällen I und II zwei wichtige und zum Teil ungewöhnliche Resultate:

- i.) Im Rahmen unseres Zwei-Schalen-Modells finden wir ein weiteres Beispiel für Anti-Mitführung.
- ii.) Für den Zwischenbereich $a \leq r \leq R$ ergeben unsere Rechnungen eine in Abhängigkeit der Radialkoordinate r (vom Zentrum weg) monoton ansteigende Mitführungsfunktion.

Betrachten wir Gl. (3.15), so sehen wir, daß wegen des Vorfaktors $2q^2/R^2$ die Funktionen $\hat{A}_i(\rho)$, $\bar{A}_i(\rho)$ und $\bar{\bar{A}}_i(\rho)$ nur in 0. Ordnung γ bestimmt werden müssen, gleichermaßen die Integrationskonstanten η_2 , ζ_1 und ζ_2 , und da \widehat{M} von der Ordnung $O(\gamma^2)$ ist, gilt dies auch für die Integrationskonstante λ_2 des Zwischenraums. Demzufolge verbleiben die Konstanten λ_1 , μ_2 und μ_3 , die wir explizit in 2. Ordnung in γ entwickeln müssen. μ_2 und μ_3 ergeben sich nach Gl. (3.37) und Gl. (3.38) in direkter Weise, haben wir erst λ_1 bis zur Ordnung $O(\gamma^2)$ bestimmt.

Für den Fall II einer rotierenden äußeren Massenschale erhalten wir die Resultate

$$\lambda_1^{\text{II}} = \frac{3(1+\alpha)^5(2-\alpha)}{2(3-\alpha)} \left\{ 1 - \frac{\gamma^2(1-\alpha)}{(1+\alpha)^4} \left[\frac{32-15\alpha+9\alpha^2-13\alpha^3+3\alpha^4}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)} + \frac{6(1-\alpha)^2}{\beta\alpha(2-\alpha)(3-\alpha)} - \frac{6\beta^2(1-\alpha)-2(2-\alpha)(3-\alpha)}{3\alpha(1+\alpha)^2(2-\alpha)} \eta_3^{\text{II}} \right] \right\}, \quad (4.19)$$

$$\mu_2^{\text{II}} = \frac{4\alpha(2-\alpha)}{(1-\alpha)(3-\alpha)} \left\{ 1 - \frac{\gamma^2(1-\alpha)}{\alpha(1+\alpha)^4} \times \left[\frac{6+15\alpha-24\alpha^2+36\alpha^3-22\alpha^4+5\alpha^5}{(1-\alpha)^2(2-\alpha)(3-\alpha)} + \frac{2(3-3\alpha+4\alpha^2-2\alpha^3)}{\beta(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)} - \frac{(1+\alpha)(9+12\alpha-5\alpha^2)-8\alpha^2\beta^2}{6\alpha(1+\alpha)^2(2-\alpha)} \eta_3^{\text{II}} \right] \right\}, \quad (4.20)$$

$$\mu_3^{\text{II}} = \mu_2^{\text{II}} - \frac{16\gamma^2}{3\beta(1+\alpha)^6} \eta_3^{\text{II}}. \quad (4.21)$$

Im Innenraum ergibt sich mit $A_3^{\text{II}}(x) = \mu_3^{\text{II}}/C_3$ für die konstante Mitführung

$$A_3^{\text{II}}(x \leq \beta) = \frac{4\alpha(2-\alpha)}{(1+\alpha)(3-\alpha)} \left\{ 1 - \frac{\gamma^2(1-\alpha)}{\alpha(1+\alpha)^4} \times \left[\frac{3(2+9\alpha-4\alpha^2+\alpha^3)}{(2-\alpha)(3+\alpha)} + \frac{6(1-\alpha)^2}{\beta(2-\alpha)(3-\alpha)} - \frac{(3-\alpha)(3+5\alpha)}{6\alpha(1+\alpha)(2-\alpha)} \eta_3^{\text{II}} + \frac{4(3-\alpha+\alpha\beta^3)}{3\beta(1+\alpha)^2(2-\alpha)} \eta_3^{\text{II}} \right] \right\}. \quad (4.22)$$

Da wir diesen algebraisch recht komplizierten Ausdruck nur in einigen Grenzfällen untersuchen, schreiben wir Gl. (4.22) der besseren Übersicht halber in der Form

$$A_3^{\text{II}}(x \leq \beta) = \frac{4\alpha(2-\alpha)}{(1+\alpha)(3-\alpha)} [1 - \gamma^2(1-\alpha) \cdot h(\alpha, \beta)], \quad (4.23)$$

mit einer positiven Funktion $h(\alpha, \beta)$. [Der dritte Korrekturterm in Gl. (4.22) ist kleiner gleich dem absoluten Betrag des ersten Korrekturterms.] Im ungeladenen Fall, $\gamma = 0$, erhält man natürlich den in $\alpha = M/2R$ exakten Mitführungsterm einer in 1. Ordnung ω rotierenden Massenschale (beachtet man die unterschiedlichen Notationen für α , so findet man die Resultate in [7] und [8] wieder).

Im Kollapsfall, $\alpha \rightarrow 1$, sieht man hier explizit, wie die γ -abhängigen Korrekturterme verschwinden und der verbleibende dominierende γ -unabhängige Term den Wert 1 annimmt. (Dieses wichtige Resultat der perfekten Mitführung beschränkt sich aber nicht auf die Störungsrechnung in 0. und 2. Ordnung in q . Wir werden im Abs. 4.2.4 über die in M und q exakten Resultate sehen, daß diese Aussage auch für das Zwei-Schalen-Modell allgemeine Gültigkeit hat.)

Schließlich führt der Grenzfall verschwindender Gesamtmasse(-energie), $\alpha \rightarrow 0$, dazu, daß zwar die Korrekturterme 2. Ordnung formal divergieren, letztendlich aber nur der zweite Term in Gl. (4.22) nicht verschwindet und ein endlicher, negativer Wert resultiert: $A_3^{\text{II}}(\alpha = 0) = -8\gamma^2/3\beta$. Dies wird physikalisch wie folgt verständlich: Wegen der positiven elektrostatischen Feldenergie $\widehat{M} = q^2/2a$ der inneren Schale erreicht man eine verschwindende Gesamtmasse $M = 2R\alpha$ nur durch eine negative Massendichte der äusseren Massenschale. Dabei verletzt man natürlich den ersten Teil der schwachen Energiebedingungen, $-\tau_0^0(R) \geq 0$, und verläßt demzufolge im Zwei-Schalen-Modell eigentlich den zulässigen Parameterbereich. Da es uns in diesem Abschnitt aber mehr auf Wechselwirkungen zwischen starken gravitativen und elektromagnetischen Feldern ankommt und wir nicht so sehr an Machschen Fragestellungen interessiert sind, für die die Gültigkeit der Energiebedingungen unabdingbar sind, sehen wir von diesem Umstand ab. Nun führt eine negative Massendichte qualitativ zu einer Mitführung entgegengesetzt der Rotationsrichtung. In diesem Grenzfall sehr kleiner Feldstärken, in dem die Effekte im wesentlichen additiv sind, kann man das Resultat aber auch quantitativ folgendermaßen verstehen: Um \widehat{M} gerade zu kompensieren, benötigen wir eine Massenbelegung der äußeren Schale mit $-\widehat{M}$ und daher folgt mit dem Standard-Thirring-Wert für die Mitführung: $A_3^{\text{II}}(\alpha = 0) = 4(-\widehat{M})/3R = -8\gamma^2/3\beta$.

Da $h(\alpha, \beta)$ positiv ist, sind die Korrekturterme 2. Ordnung in γ stets negativ, d.h. $A_3^{\text{II}}(\gamma \neq 0) < A_3^{\text{II}}(\gamma = 0)$, insbesondere $A_3^{\text{II}}(r \leq a) \leq 1$ für alle $\alpha \in [0, 1]$ und alle (hinreichend kleinen) Werten von γ . Auch dies ist physikalisch leicht einzusehen: Halten wir die Gesamtmasse M fest und erhöhen den Wert der Ladung von $\gamma = 0$ auf einen endlichen (aber kleinen) Wert, bringen also ein gewisses Massenäquivalent der elektrostatischen Feldenergie in unser Gesamtsystem ein, dann ist dies nur möglich, wenn wir die Massendichte der äußeren rotierenden Schale entsprechend reduzieren. Damit verringert sich die Stärke der Mitführung, da lediglich die Masse der äußeren Schale mit einem Drehimpuls verbunden ist. Und dies umso mehr, je größer die substituierte Massendichte, sprich die eingebrachte elektrostatische Energie $\sim 1/\beta$ ist, d.h. je kleiner der Radius $a = R\beta$ der inneren Schale ist [vgl. den zweiten und vierten Korrekturterm in Gl. (4.22) proportional $1/\beta$].

Im Zwischenraum kürzen sich im Fall II in

$$C_2 A_2^{\text{II}}(r) = \mu_2^{\text{II}} + \frac{8\hat{\alpha}R^3\lambda_2^{\text{II}}}{3[\rho(r)]^3} + 8\gamma^2 \left\{ -4\lambda_2^{\text{II}}\hat{A}_2[\rho(r)] + \eta_2^{\text{II}}\bar{A}_2[\rho(r)] + \zeta_2^{\text{II}}\bar{\bar{A}}_2[\rho(r)] \right\} \quad (4.24)$$

die Terme 0. Ordnung in γ in den Ausdrücken $\lambda_2^{\text{II}}\hat{A}_2(\rho) = \beta^3(1+\alpha)^2\eta_3^{\text{II}} \cdot (-R^4/3\rho^4)$ und $\zeta_2^{\text{II}}\bar{\bar{A}}_2(\rho) = -\frac{4}{3}\beta^3(1+\alpha)^2\eta_3^{\text{II}} \cdot (-R^4/4\rho^4)$ gerade weg. Aufgrund der ortsabhängigen elektrostatischen Energie $S_0^0(r) \sim O(\gamma^2)$ ist jedoch unmittelbar klar, daß im Allgemeinen eine r -Abhängigkeit der Mitführung bestehen bleibt. Mit Gl. (4.21) ergibt sich somit in 2. Ordnung in γ :

$$A_2^{\text{II}}(\beta \leq x \leq 1) = A_3^{\text{II}} + \frac{8\gamma^2(1-\alpha)\eta_3^{\text{II}}}{(1+\alpha)^7} \left[\frac{2}{3\beta} - \left(1 - \frac{\beta^2}{3x^2}\right) \frac{1}{x} \right]. \quad (4.25)$$

Wegen der Stetigkeit von $A^{\text{II}}(x)$ und $A^{\text{III}}(x)$ an der Stelle $x = \beta$ startet die Mitführung im Zwischenraum horizontal vom konstanten Wert A_3^{II} des Innenraums [für $x = \beta$ verschwindet der Ausdruck in der eckigen Klammer in Gl. (4.25)] und steigt dann bis $x = 1$ mit $-(1 - \beta^2/3x^2)/x$ an (siehe Abb. 4.6). Wir bemerken zunächst zwei Dinge:

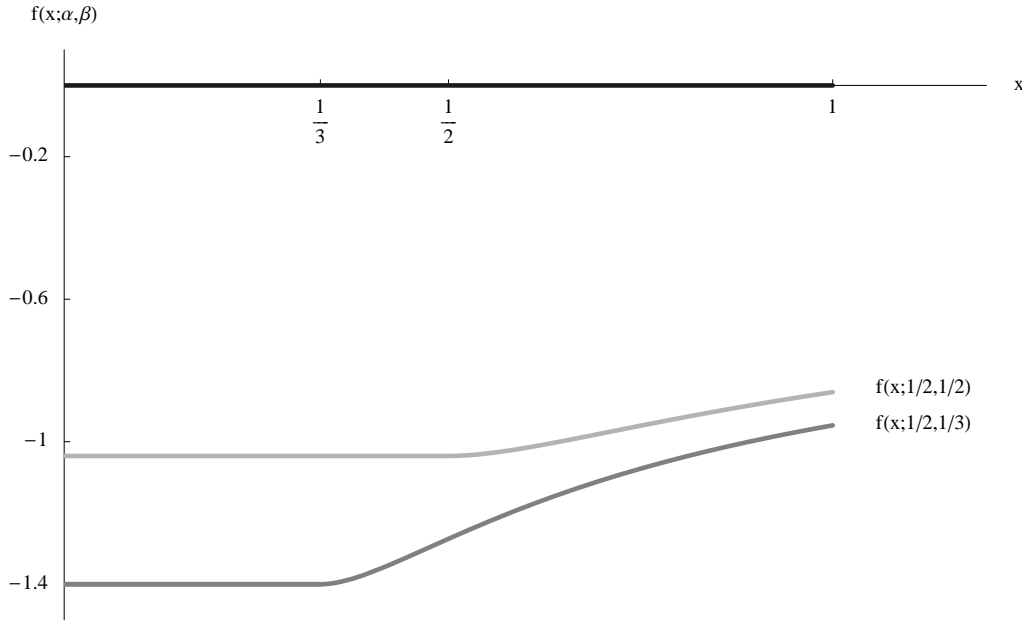


Abbildung 4.6: Graph der dimensionslosen und γ -unabhängigen Funktion $f(x; \alpha, \beta) := \gamma^{-2} \{ [A_i^{\text{II}}(x)/A_3^{\text{II}}(\gamma = 0)] - 1 \}$ für Werte $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ im Innern der Massenschale $0 \leq x \leq 1$, ($i = 2, 3$). Die Funktion f beschreibt im wesentlichen das radiale Verhalten der mit $1/A_3^{\text{II}}(\gamma = 0)$ skalierten Korrekturterme 2. Ordnung in γ . Die dunkle Linie zeigt den konstanten Mitführungsterm aus Gl. (4.26) für den Wert $\alpha = \frac{1}{2}$.

- i.) Im Kollapsfall, $\alpha \rightarrow 1$, verschwindet im Zwischenraum (wie im Innenraum) der Korrekturterm 2. Ordnung in γ und es gilt $\lim_{\alpha \rightarrow 1} A_2^{\text{II}}(\beta \leq x \leq 1) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} A_3^{\text{II}} = 1$. Damit gilt also im gesamten Innenbereich der Massenschale $A^{\text{II}}(x \leq 1) \equiv 1$, d.h. totale Mitführung der lokalen Inertialsysteme und dies völlig unabhängig von der Ladungsverteilung.

- ii.) Der positive, x -abhängige Korrekturterm des Zwischenbereichs ist stets kleiner als der negative x -unabhängige γ^2 -Term des Innenraums, d.h. die ansteigende Mitführungsfunktion erreicht für $\gamma > 0$ nie den Wert

$$A_3^H(\gamma = 0) = \frac{4\alpha(2 - \alpha)}{(1 + \alpha)(3 - \alpha)}. \quad (4.26)$$

Nun gilt generell, daß die Mitführung im Außenbereich einer rotierenden Materieverteilung mit r^{-3} abfällt und im flachen Innenbereich einen konstanten r -unabhängigen Wert annimmt. Ein Ansteigen der Mitführung im Zwischenraum ist daher höchst ungewöhnlich. Wie jedoch am Anfang von Abs. 4.2.2 betont, ist dieser Bereich wegen der (positiven und nichtrotierenden) elektrostatischen Energiedichte $S_0^0(r)$ nicht mehr flach. Wir hatten auch an anderer Stelle bereits erwähnt, daß die Stärke der Mitführung durch die rotierende äußere Schale (rein qualitativ) vom Verhältnis der Anteile der rotierenden zu den nichtrotierenden Massenbeiträgen abhängt, was u.a. zur Konsequenz hatte, daß bei festem Wert der Gesamtmasse α und mit zunehmendem γ die substituierte, nichtrotierende elektrostatische Energie $A_3^H(\gamma \neq 0) < A_3^H(\gamma = 0)$ bedingte. Teilen wir bei festem α nun die nichtrotierende Energiedichte $S_0^0(r)$ auf radial infinitesimal voneinander entfernte Schalen auf und halten einen Radius $r_0 > a$ fest, so haben die Anteile $S_0^0(r < r_0)$ an der Mitführung einen geringeren Einfluß, da sie nach außen mit r^{-3} abfallen. Daher steigt $A_2^H(x)$ im Bereich $\beta \leq x \leq 1$ an. Und natürlich ist so gesehen dann auch der Wert $A_2^H(x = 1, \gamma \neq 0)$ kleiner als $A_2^H(x = 1, \gamma = 0)$, da im Außenraum immer noch elektrostatische Energie vorhanden ist.

Führen wir die Potenzreihenentwicklung bis zur Ordnung γ^2 für den Fall der rotierenden, inneren geladenen Schale entsprechend dem Vorgehen in Fall II durch, dann ergibt sich für die mit C_3^{-1} skalierten Integrationskonstanten

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_3^I = \frac{\mu_3^I}{C_3} &= \frac{8\gamma^2}{3(1 + \alpha)^4(3 + \alpha)} \left\{ \frac{3}{2}\beta^2(1 + 3\alpha) \right. \\ &+ \frac{1}{3}(3 + \alpha + 8\alpha\beta^3) \left(\frac{\alpha\beta}{1 - \alpha} - \frac{1}{\beta^2} \right) - \frac{\beta^2(3 - \alpha)}{4\alpha(1 + \alpha)^2(2 - \alpha)}\eta_3^H \\ &\left. \times \left[3 + 16\alpha + \alpha^2 + 8\alpha\beta \left(\frac{\alpha\beta}{1 - \alpha} - \frac{1}{\beta^2} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\tilde{\lambda}_2^I = \frac{\lambda_2^I}{C_3} = \frac{\beta^3(1 + \alpha)^4}{(3 + \alpha)} \left[\frac{3 + \alpha}{6\beta} + \frac{4}{3}\alpha\beta^2 - \frac{(3 - \alpha)\beta^2}{(1 + \alpha)^2(2 - \alpha)}\eta_3^H \right], \quad (4.28)$$

$$\tilde{\eta}_2^I = \frac{\eta_2^I}{C_3} = \frac{1}{(1 + \alpha)^2(3 + \alpha)} \left[\frac{4}{3}\alpha\beta^2 - \frac{(3 - \alpha)\beta^2}{(1 + \alpha)^2(2 - \alpha)}\eta_3^H \right], \quad (4.29)$$

$$\tilde{\zeta}_2^I = \frac{\zeta_2^I}{C_3} = -4\tilde{\lambda}_2^I + 2\beta^2(1 + \alpha)^4, \quad (4.30)$$

$$\tilde{\mu}_2^I = \frac{\mu_2^I}{C_3} = \tilde{\mu}_3^I + \frac{8\gamma^2}{9\beta(1 + \alpha)^4} \left[\frac{1}{\beta} - \frac{6(3 - \alpha)}{(1 + \alpha)^2(2 - \alpha)(3 + \alpha)}\eta_3^H \right]. \quad (4.31)$$

Wir beginnen zunächst wieder mit dem Mitführungskoeffizienten A_3^I im Innenraum, $x \leq \beta$. In unserem Linienelement in Gl. (3.2) lesen wir den Mitführungsterm mit $\omega^I A_3^I dt = \bar{\omega}^I A_3^I d\tau = \bar{\omega}^I \tilde{\mu}_3^I d\tau$ ab. Allerdings divergiert die rechte Seite bei endlichem nichtverschwindendem $\bar{\omega}^I$ im Kollapsfall $\alpha \rightarrow 1$, denn aus Gl. (4.27) folgt $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \tilde{\mu}_3^I = \infty$. Beziehen

wir dagegen die Mitführung statt auf die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}^I$ auf den invarianten Drehimpuls \bar{J}^I , so finden wir mit $\bar{J}^I = \frac{4}{3}\hat{\alpha}R^3\lambda_2^I\bar{\omega}^I$ und $\hat{\alpha} = \gamma^2/\beta(1+\alpha)^2$ in 2. Ordnung γ die Beziehung

$$\omega^I A_3^I dt = \frac{3\beta(1-\alpha^2)\bar{J}^I}{4\gamma^2 R^3} \cdot \frac{\mu_3^I}{\lambda_2^I} d\tau. \quad (4.32)$$

Wegen $\tau_0^0(a) = 0$ und $\tau_2^2(a) = \tau_3^3(a) \sim O(\gamma^2)$ ist μ_3^I natürlich ebenso von der Ordnung $O(\gamma^2)$ und Gl. (4.32) ist aufgrund von $\lambda_2^I \sim O(\gamma^0)$ unabhängig von γ . Betrachten wir nun wieder den Grenzwert $\alpha \rightarrow 1$, so erhalten wir einerseits aus Gl. (4.28) den Grenzwert $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \tilde{\lambda}_2^I = \frac{8}{3}\beta^2(1-4\beta^3)$ und andererseits $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \hat{\alpha} = \gamma^2/4\beta$. Für den Drehimpuls \bar{J}^I folgt formal

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \bar{J}^I = \frac{8}{9}R^3 C_3 \gamma^2 \beta (1-4\beta^3) \bar{\omega}^I. \quad (4.33)$$

Diese Relation zwischen Drehimpuls \bar{J}^I und Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}^I$ hat folgende Konsequenzen:

- i.) Ist \bar{J}^I endlich und ungleich Null, so divergiert $\bar{\omega}^I$ im Limes $\gamma \rightarrow 0$. Ursache hierfür ist wiederum die Masselosigkeit der inneren Schale.
- ii.) Wegen $1/C_3 = (1-\alpha)/(1+\alpha) \rightarrow 0$ für $\alpha \rightarrow 1$ benötigt man im Kollapsfall einen unendlich großen Drehimpuls \bar{J}^I , um einen endlichen Wert von $\bar{\omega}^I$ beizubehalten, bzw. umgekehrt gilt im Kollapslimes $\bar{\omega}^I = 0$ für $\bar{J}^I \neq 0$. Physikalisch ist das dahingehend plausibel, als beim Gravitationskollaps der äußeren Massenschale, deren Spannungen $\tau_2^2(R) = \tau_3^3(R)$ zu divergieren beginnen und die innere Schale daher einen unendlich großen Drehimpuls benötigt, um eine solche extrem massive („unendlich schwere“) Schale mitführen zu können.
- iii.) Für $\alpha \gtrsim 0.7$ und $\beta \approx 1$, sowie im Kollapsfall $\alpha = 1$ und $\beta \geq 1/\sqrt[3]{4} \approx 0.63$ folgt $\text{signum } \bar{J}^I = -\text{signum } \bar{\omega}^I$ [siehe Gl. (4.28) für λ_2^I].

Analysieren wir in gleicher Weise Gl. (4.32) im Kollapslimes, so folgt mit Gl. (4.33) und dem formalen Grenzwert $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \tilde{\mu}_3^I = \frac{1}{36}\gamma^2\beta C_3(1-4\beta^3)$ aus Gl. (4.27)

$$\omega^I A_3^I dt = \frac{\bar{J}^I}{32R^3} d\tau, \quad (4.34)$$

d.h. der Faktor $1-4\beta^3$ in Gl. (4.33) kürzt sich gerade heraus und es resultiert (für endliche Werte von \bar{J}^I) ein endlicher, von β unabhängiger Wert! (Vgl. mit der Beziehung $\lim_{\alpha \rightarrow 1} J^I = 32R^3\omega^I$ für den Drehimpuls der kollabierenden äußeren Massenschale.)

Für Werte $\alpha < 1$ resultiert aufgrund von iii.) für kleine Werte von β ein negativer Mitführungsterm, für Werte $\alpha \lesssim 0.5$ sogar für alle $\beta \in [0, 1]$ und für den Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ ergibt sich schließlich der Wert $(-4\bar{J}^I/R^3\beta^3)d\tau$. Wir haben also auch in unserem Zwei-Schalen-Modell ein Beispiel für Anti-Mitführung gefunden. Und hier liegen die Verhältnisse insofern einfach, als wegen $\tau_0^0(\mathbf{a}) = 0$ ausschließlich die negativen „Drücke“ $\tau_2^2(\mathbf{a}) = \tau_3^3(\mathbf{a}) = -q^2/16\pi\mathbf{a}^3$, die der Coulombabstoßung gerade das Gleichgewicht halten (vgl. die Bemerkungen hierzu in Abs. 2.2.2) für dieses Phänomen verantwortlich sind.

Der Zwischenbereich im Fall I ist gegenüber dem Fall II der äußeren rotierenden Massenschale insofern verschieden, als der Term $\lambda_2^I \hat{g}_2(\rho) + \zeta_2^I \bar{g}_2(\rho)$ nicht verschwindet und damit die x -Abhängigkeit wesentlich komplizierter ist:

$$A_2^I(\beta \leq x \leq 1) = A_3^I + \frac{8\gamma^2}{9(1+\alpha)^4} \left\{ \frac{1}{\beta^2} - \frac{12\alpha}{(3+\alpha)} \left[\frac{\beta^2(x^2 + \beta^2)}{x^3} \right] + \frac{3\beta(x - \beta)}{2x^4} \right. \\ \left. + \frac{9(3-\alpha)\eta_3^I}{(1+\alpha)(2-\alpha)(3+\alpha)} \left[\frac{\beta^2(x^2 + \beta^2)}{x^3} - \frac{2}{3\beta} \right] \right\}. \quad (4.35)$$

Da die innere Schale einen nichtverschwindenden Drehimpuls besitzt, $\tau_3^0(a) \neq 0$, ist $A^I(x)$ an der Stelle $x = \beta$ unstetig, d.h. im allgemeinen gilt $\lim_{x \rightarrow \beta} A_2^I(x) \neq 0 = A_3^I = \tilde{\mu}_3^I$ (vgl. Abb. 4.6). Für kleine Werte von α zeigt $A_2^I(x)$ jedoch in einer Umgebung von $x = \beta$ ein qualitativ ähnliches, ansteigendes Verhalten wie $A_2^{II}(x)$, denn es gilt $A_2^I(x) - A_3^I = \gamma^2[8/9\beta^2 + 4\beta(x - \beta)/3x^4] > 0$.

Für den Außenraum bemerken wir lediglich, daß in beiden Fällen I und II die Mitführungsfunktion $A(r)$ erwartungsgemäß wie $\{4MR^2/3[\rho(r)]^3\}\lambda_1$ abfällt und die Beiträge 2. Ordnung in q von der Ordnung $O(\rho^{-4})$ sind, also um eine Potenz von ρ stärker abfallen.

4.2.3 Ergebnisse im Schwachfeldlimites

Ein weiterer wichtiger Grenzfall ist der sogenannte Schwachfeldlimites. Da in diesem Grenzwert alle elektromagnetischen und gravitativen Feldstärken hinreichend klein sind, können wir aus physikalischer Sicht Ergebnisse erwarten, die nahe der klassischen Physik, d.h. der Newtonschen Mechanik und der Maxwell-Theorie sind. Wir dürfen also hoffen Resultate zu finden, die unserer physikalischen Intuition einfacher zugänglich und dementsprechend leichter interpretierbar sind. Nichtsdestotrotz ist der Schwachfeldfall kein trivialer Grenzfall. Wir werden sehen, daß es darauf ankommt, wie man ihn festlegt und daß in ihm durchaus subtile Phänomene auftreten. Allerdings ist er in Machscher Hinsicht bei weitem nicht so bedeutend, wie der Gravitationskollaps der Massenschale, da für schwache Gravitationsfelder die Massenschale letztendlich nur ein kleiner Teil der kosmischen Materieverteilung sein kann. Darüber hinaus besitzen die Arbeiten von Hofmann [17] und von Ehlers und Rindler [16] ebenfalls nur in diesem Grenzwert Gültigkeit.

Wir definieren den Schwachfeldlimites folgendermaßen: In einer Potenzreihenentwicklung in der Masse der äußeren Massenschale und der Ladung der inneren, geladenen Schale berücksichtigen wir nur lineare Terme in M und q . Da wir im vorherigen Abschnitt alle Feldgrößen bereits in q linearisiert haben (Testfeldapproximation), bleibt nur noch die von α und/oder β abhängigen Integrationskonstanten, sowie die Magnetfeldfunktion $\bar{g}(\rho)$ und die Mitführungsfunktion $\bar{A}(\rho)$ in eine Potenzreihe in α zu entwickeln und deren 0. und 1. Ordnung zu betrachten. Im Schwachfeldlimites kennen wir bereits den Wert der Mitführung aus dem Standard-Thirring-Problem und folglich interessieren wir uns in diesem Abschnitt nur für die magnetischen Dipolfelder \mathbf{B}^I und \mathbf{B}^{II} . Wir beginnen mit dem Fall II:

Wir hatten bereits in Abs. 4.2.1 berechnet, daß sich η_3^{II} für $\alpha \ll 1$, $\gamma \ll 1$ wie $\eta_3^{II} = \frac{4}{3}\alpha$ verhält. Für die Integrationskonstanten des Außenraums folgt entsprechend in 0. und 1. Ordnung in α , $\lambda_1^{II} = 1 + \frac{29}{6}\alpha$ und $\zeta_1^{II} = -\frac{4}{3}(1 + \frac{5}{6}\alpha)$ und die α -unabhängigen Terme in λ_1^{II} und ζ_1^{II} heben sich in $g_1^{II}(\rho) = \lambda_1^{II} \hat{g}_1(\rho) + \zeta_1^{II} \bar{g}_1(\rho) = \frac{48}{9}\alpha(R/\rho)$ gerade weg. Dies bedeutet insbesondere, daß \mathbf{B}^{II} von M abhängt und daher ein rein gravitativ induziertes

Magnetfeld ist:

$$B_z^{\text{II}}(r \leq R) = \frac{2Mq}{3R^2}\omega^{\text{II}}, \quad (4.36)$$

$$B_r^{\text{II}}(r \geq R) = 2Mq \left(\frac{4R}{3r} - \frac{R^2}{r^2} \right) \omega^{\text{II}} \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (4.37)$$

Transformieren wir unsere isotropen Koordinaten auf kartesische Vektornotation, so finden wir gerade die Ergebnisse von Hofmann [17], Gl. (33) und (24), wieder. Beachten wir bei Ehlers und Rindler [16] $\vec{\Omega} = (-4M/3R)\vec{\omega}$, so ergeben sich aus (4.36) und (4.37) die Magnetfelder Gl. (4.11) und (4.12) in [16]. Das zugehörige magnetische Moment berechnet sich zu $m = (4M/R) \cdot (qJ/2M) = \frac{4}{3}MqR\omega$.

Betrachten wir nun das Magnetfeld \mathbf{B}^{II} in Machscher Hinsicht: Aus der klassischen Elektrodynamik ist bekannt, daß innerhalb einer homogen geladenen, rotierenden, sphärischen Schale ein konstantes Magnetfeld in Richtung der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ auftritt. Nach Mach sollte das gleiche Magnetfeld auftreten, wenn anstelle der inneren, geladenen Schale die Massen des Universums in die entgegengesetzte Richtung rotieren. Und genau dies bestätigt sich für \mathbf{B}^{II} : i.) Es ist konstant im Innern der Massenschale mit positiver Orientierung bezüglich der Drehrichtung und hat somit das korrekte Vorzeichen. ii.) Es zeigt im Außenraum die typische ϑ -Abhängigkeit von Dipolfeldern, sowie das korrekte asymptotische radiale Abfallverhalten. iii.) Es entspricht selbst die Magnetfeldstärke Machschen Erwartungen: Ein inertialer, mitrotierender Beobachter im Bereich $r \leq R$ sieht einerseits eine nichtrotierende Ladungsverteilung und andererseits die inertialen, asymptotischen Beobachter und die entfernten kosmischen Massen mit der Winkelgeschwindigkeit $-(4M/3R)\boldsymbol{\omega}$ rotieren. Das Magnetfeld B_z^{II} aus Gl. (4.36) entspricht in einer Mach-äquivalenten Sichtweise dem durch eine mit der Winkelgeschwindigkeit $+(4M/3R)\boldsymbol{\omega}$ rotierenden geladenen Schale mit Radius $4R/3$ produzierten Magnetfeld in einem statischen Kosmos.

Mit den in Abs. 4.1.2 vermerkten Abhängigkeiten der Integrationskonstanten im Fall I für kleine Werte von α , $\eta_3^I = 2/3\beta$, $4\lambda_2^I = \zeta_1^I = \frac{2}{3}\beta^2$, $\eta_2^I = \lambda_1^I = 0$ und $\zeta_2^I = \frac{2}{3}\beta^2$, ergibt sich ein M -unabhängiges Magnetfeld \mathbf{B}^I :

$$B_z^I(r \leq a) = \frac{2q}{3a}\omega^I, \quad (4.38)$$

$$B_r^I(r \geq a) = \frac{2qa^2}{3r}\omega^I \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (4.39)$$

Dies ist, zusammen mit der ϑ -Komponente $B_\vartheta^I(r \geq a)$, exakt das erwartete magnetische Dipolfeld einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω^I rotierenden Schale mit Radius a und Ladung q der klassischen Elektrodynamik.

Die Situation bei Ehlers und Rindler [16] ist jedoch eine andere: Dort ruht die innere, geladene Schale bezüglich dem im Unendlich fixierten Koordinatensystem (bezeichnet mit S in [16]) und ein lokaler inertialer Beobachter (System S' in der Notation in [16]), der durch die Rotation der äußeren Massenschale mitgeführt wird, sieht demnach eine mit der Mitführungswinkelgeschwindigkeit entgegengesetzt rotierende Ladungsverteilung. Dieser Fall entspricht aus physikalischer Sicht im Prinzip gerade der zur klassischen Elektrodynamik gesuchten Mach-äquivalenten Situation einer rotierenden geladenen Schale in einer flachen Raumzeit (siehe insbesondere die Bemerkungen zu Fig. 1.3 in Rindlers Buch [15]). Ein asymptotisch fester, inertialer Beobachter kann aber nur die Gesamtwinkelgeschwindigkeiten der beiden Schalen messen. Mit Gl. (3.58) ergibt sich aus $\bar{\omega}(a) = 0$ der inneren

Schale im Schwachfeldfall $\omega^I = -(4M/3R)\omega^II$ [vgl. Gl. (2.9) in [16]]. Die beiden Eigenwinkelgeschwindigkeiten $\bar{\omega}^I$ und ω^II sind nach dieser Relation nicht mehr voneinander unabhängig, sondern eben durch die Forderung nach einer bezüglich dem asymptotischen Bereich nichtrotierenden Ladungsverteilung miteinander korreliert. Setzen wir diese Bedingungsgleichung in Gl. (4.38) und (4.39) ein, so stimmen die Magnetfelder \mathbf{B}^I exakt mit denen bei Ehlers und Rindler [16], Gl. (4.11) überein. Im Unterschied zu Ehlers und Rindler argumentieren wir jedoch, daß diese Magnetfelder \mathbf{B}^I , wie auch schon die Felder \mathbf{B}^II , alle Machsche Erwartungen erfüllen und keinesfalls „Mach-negative or at best, Mach-neutral“ sind, wie Ehlers und Rindler [16] formulieren: Wie oben betont, wird ein inertialer, lokal nichtrotierender Beobachter (ZAMO) innerhalb der Massenschale mit der Winkelgeschwindigkeit $(4M/3R)\omega^II$ mitgeführt, folglich rotiert bezüglich einem solchen Beobachter die innere geladene Schale mit $-(4M/3R)\omega^II$ und man erwartet im Bezugssystem S' genau das Magnetfeld \mathbf{B}^I aus Gl. (4.38).

Bezüglich einem inertialen Beobachter im Unendlichen ist die Argumentation etwas subtiler: Zunächst einmal scheint, wie Ehlers und Rindler betonen, ein solcher Beobachter in seinem Koordinatensystem S kein Magnetfeld zu erwarten, da die innere Schale von ihm aus betrachtet ruht und er folglich auch keinen Strom beobachtet. Der entscheidende Punkt ist aber, wie der Bewegungszustand $u^\mu(a) \sim (1, 0, 0, 0)$ der Ladungsverteilung tatsächlich realisiert wird: Der Beobachter in der Asymptotik sieht neben der ruhenden geladenen Schale, die äußere Massenschale mit $\omega(R) = \omega^II$ rotieren. Aufgrund des bekannten Thirring-Effektes weiß er, daß die innere Schale im Prinzip mit $(4M/3R)\omega^II$ rotieren sollte. Da sie das aber nicht tut, folgert er, daß diese Winkelgeschwindigkeit gerade durch eine entgegengesetzte „Eigen“-Rotation der inneren Schale mit $\omega^I = -(4M/3R)\omega^II$ kompensiert wird. Da jedoch die Eigenwinkelgeschwindigkeit ω^I mit einem nichtverschwindenden Drehimpuls J^I der geladenen Schale verbunden ist, ist er überhaupt nicht überrascht genau das Magnetfeld \mathbf{B}^I zu messen, ohne einen Strom \mathbf{j}^I zu beobachten. (Man vergleiche mit dem in gewisser Weise umgekehrten Fall II: Dort sieht ein asymptotischer, inertialer Beobachter einen Strom \mathbf{j}^II , wohingegen der lokale, inertielle Beobachter im Innern der Massenschale keinen \mathbf{B}^II verursachenden Strom wahrnimmt.) Somit kann also auch ein asymptotischer Beobachter schließen, daß das Magnetfeld \mathbf{B}^I Mach-positiv ist, obwohl er eine statische Ladungsverteilung sieht. Dazu muß er den nichtverschwindenden Drehimpuls J^I berücksichtigen. Tut er dies nicht, dann kommt er, wie Ehlers und Rindler [16], zu der falschen Schlußfolgerung, daß das Magnetfeld \mathbf{B}^I „as expected on Machian grounds for the dragged frame S' , should in fact arise in the ‚wrong‘ frame, S .“

Zwar stimmen mathematisch unsere gesamten Ergebnisse bezüglich den Magnetfeldern \mathbf{B}^I und \mathbf{B}^II exakt mit denen von Hofmann [17] und Ehlers und Rindler [16] überein. Dennoch wollen wir abschließend einige Bemerkungen zur Art der Störungsrechnung und den in diesen Arbeiten angegebenen Interpretationen und physikalischen Bewertungen der Magnetfelder machen.

- i.) In beiden Arbeiten werden die gekoppelten Einstein-Maxwell-Gleichungen in der Gravitationskonstante k linearisiert (wir schließen uns im Folgenden der Bezeichnung der Gravitationskonstanten mit k bei Ehlers und Rindler [16] an), d.h. die Metrik $g_{\mu\nu}$ und der elektromagnetische Feldtensor $F_{\mu\nu}$ weichen nur geringfügig von den entsprechenden Lösungen $\eta_{\mu\nu}$ und $E_{\mu\nu}$ des flachen Minkowski-Raumes ab:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + kh_{\mu\nu} + O(k^2), \\ F_{\mu\nu} &= E_{\mu\nu} + kH_{\mu\nu} + O(k^2). \end{aligned}$$

Bei Ehlers und Rindler setzen sich die Störungen $\gamma_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\lambda_\lambda$ der Metrik $g_{\mu\nu}$ additiv aus den Abweichungen der Metrik des reinen Thirring-Problems (für die rotierende äußere Massenschale) und des reinen, in k linearisierten Reissner-Nordström-Problems (für die innere Schale) von der Minkowski-Metrik zusammen:

$$\gamma_{\mu\nu} = (\gamma_{\mu\nu})_{\text{Thirring}} + (\gamma_{\mu\nu})_{\text{Reissner-Nordström}}.$$

Bei Hofmann werden dagegen nur die Störungen der Metrik durch die Massenschale, $\gamma_{\mu\nu} = (\gamma_{\mu\nu})_{\text{Thirring}}$, betrachtet. (Genau genommen existiert in dieser Arbeit keine innere Schale, die einen Beitrag zum Energie-Impuls-Tensor leistet!) Schließlich werden in dieser Metrik die kovarianten Maxwell-Gleichungen für die gravitativ induzierten Magnetfelder \mathbf{B}^I und \mathbf{B}^{II} gelöst. Dabei wird \mathbf{B}^{II} als das durch die Störung $(\gamma_{\mu\nu})_{\text{Thirring}}$ und \mathbf{B}^I als das durch $(\gamma_{\mu\nu})_{\text{Reissner-Nordström}}$ induzierte magnetische Dipolfeld definiert (letzteres fehlt entsprechend bei Hofmann).

Nun werden jedoch in beiden Arbeiten [17] und [16] die elektromagnetischen Feldgleichungen künstlich in der Form geschrieben, daß auf der linken Seite (wegen der Stationarität der Felder) nur der Laplace-Operator der flachen Minkowski-Raumzeit steht und auf der rechten Seite eben alle „Korrektur“-Terme, die über die gravitativen Störungen $\gamma_{\mu\nu}$ mit der Krümmung der Raumzeit verbunden sind. Diese werden als „fictitious currents and charges“ [16], bzw. „fiktive Ströme“ [17] bezeichnet. Natürlich sind diese Ströme keine physikalisch realen Ströme oder Quellen der Magnetfelder \mathbf{B}^I und \mathbf{B}^{II} . So kommentieren Ehlers und Rindler auch [16], S. 3548: „their (Maxwells equations) curved-space origin shows up in the fictitious γ_{ij} -dependent current on the righthand side of Eq. (4.2), which should only be regarded as a device for computing H_{ij} (the magnetic field).“ Diese Vorgehensweise hat aber zur Konsequenz, daß die fiktiven Strom- und Ladungsverteilungen sich über den ganzen Raum ausdehnen und sogar Sprünge an der ungeladenen äußeren Massenschale haben. Daher argumentierten wir, daß diese erzwungene Trennung der physikalischen Größen in den Maxwell-Gleichungen in einen flachen Differentialoperator einerseits und die krümmungsinduzierten Terme andererseits, sowie deren Interpretation als (wenn auch „fiktive“) Ströme und Ladungen aus physikalischer und mathematischer Sicht unangemessen und höchst irreführend ist.

Eine Weiterführung der Störungsrechnung in höheren Ordnungen in der Gravitationskonstanten k würde nach dieser Methode in jeder Ordnung von k neue „fiktive“ Quellterme produzieren. Nun ist aber bekannt (siehe z.B. [40], Box 17.2, Punkte 5a-i), daß in einer solchen unendlichen Entwicklung in den Abweichungen $h_{\mu\nu}$ der Metrik $g_{\mu\nu}$ vom Wert $\eta_{\mu\nu}$ der flachen Minkowski-Metrik sich diese Terme schließlich zu den vollen nichtlinearen Einstein-Gleichungen, in unserem Fall also zur rotativ gestörten Reissner-Nordström-Metrik aufsummieren. Die ursprünglich flache Raumzeit ist im Zuge einer solchen „Renormalisierung“ nicht länger beobachtbar.

- ii.) Hofmann [17] und Ehlers und Rindler [16, 19], interpretieren das Magnetfeld \mathbf{B}^{II} als von einer rotierenden Hohlkugel zu einer in ihrem Innern befindlichen Punktladung induziertes Magnetfeld, obwohl Hofmann einleitend ebenfalls von einem Zwei-Schalen-Modell ausgeht und von einer elektrisch geladenen Schale mit Radius a spricht. Dies ist aber nicht korrekt. Die angeführte Erklärung, daß \mathbf{B}^I im Limes $a \rightarrow 0$ verschwindet und einzig das Magnetfeld \mathbf{B}^{II} in diesem Grenzwert bestehen

bleibt (da unabhängig vom Radius a), ist kein Argument dafür. So hatten wir bereits in Abs. 4.2.1 gesehen, daß die Masselosigkeit der inneren Schale, $\tau_\nu^\mu(a) \sim O(\gamma^2)$, Konsequenz für die Unabhängigkeit des Magnetfeldes \mathbf{B}^I vom Parameter $a = \beta R$ in dieser Ordnung war.

- iii.) Schließlich argumentieren wir, daß die Resultate von Ehlers und Rindler nur für eine masselose, geladene Schale und nur in 1. Ordnung in M und q gelten und daher die Behauptung in [16] „we need not restrict the relative magnitudes of the two shell masses and of the charge“ nicht korrekt ist. Entscheidend ist die Art der durchgeführten Störungsrechnung, bzw. die Definition des Schwachfeldlimes.

In unserem Vorgehen führen wir zuerst eine Linearisierung der vollen nichtlinearen Einstein-Gleichungen im Ladungsparameter q durch (Testfeldapproximation von Cohen [18]) und vollziehen anschließend eine Entwicklung aller Größen in Potenzen von M , bei der wir nur Terme 0. und 1. Ordnung in M behalten. Insbesondere führt bereits die Linearisierung in q dazu, daß keine Wechselwirkungseffekte zwischen gravitativen und elektromagnetischen Feldern auftreten, da $S_3^0 \sim O(q^2)$ und damit zu einer effektiven Entkopplung der Einstein-Maxwell-Gleichungen. (Man muß „nur“ noch die kovarianten Maxwell-Gleichungen auf einem in der Winkelgeschwindigkeit ω gestörten Schwarzschild-Hintergrund lösen.)

Ehlers und Rindler dagegen linearisieren die Einstein-Maxwell-Gleichungen in der Gravitationskonstanten k , d.h. betrachten eben nur kleine, in k lineare Abweichungen von der Minkowski-Metrik, bzw. von einer geeigneten Lösung der Maxwell-Gleichungen auf einem flachen Hintergrund. Für die innere Schale linearisieren sie die Reissner-Nordström-Lösung in k . Dadurch erhält man aber bereits Terme der Ordnung $O(q^2)$ [siehe Gl. (3.20), (3.23) und (3.3) in [16]]. Wären die Ergebnisse für die Magnetfelder \mathbf{B}^I und \mathbf{B}^II nun tatsächlich exakt in q , so würde man sich bereits im nichtlinearen Wechselwirkungsbereich befinden und die Ladungen würden eine nichtverschwindende Rückwirkung auf die Raumzeit-Geometrie verursachen (wie wir sie z.B. in Abs. 4.3.2 kennengelernt haben). Dies würde aber zur Folge haben, daß die Abweichungen $h_{\mu\nu}$ von der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ sich nicht mehr wie von Ehlers und Rindler behauptet, als lineare Superposition der entsprechenden Beiträge des reinen Thirring-Problems, $(\gamma_{\mu\nu})_{\text{Thirring}}$, und des reinen Reissner-Nordström-Problems, $(\gamma_{\mu\nu})_{\text{Reissner-Nordström}}$, ergeben. Insofern hat die Linearisierung der in Masse und Ladung exakten Reissner-Nordström-Lösung in der Gravitationskonstanten k die Konsequenz, daß man eben doch nur schwache elektromagnetische und gravitative Felder zulassen kann [auch wenn formal zunächst in k lineare Terme der Ordnung $O(q^2)$ mitgenommen werden].

- iv.) Abschließend gehen wir noch auf die in Abs. 3.1 Punkt iii.) angesprochenen Quadrupolkorrekturen des elektrostatischen Coulombfeldes in 2. Ordnung in der Winkelgeschwindigkeit ω bei Ehlers und Rindler [16] ein: Zwar sind diese mathematisch korrekt, es stellt sich jedoch die Frage, ob die in Ordnung ω^2 induzierten elektrischen Felder eine physikalische Relevanz hinsichtlich Machscher Fragestellungen besitzen. Diese Frage stellt sich insofern, als die Trägheitsstruktur im Innern der Massenschale in 2. Ordnung ω in dem Sinne nicht die richtige ist, als durch die rotierende Massenschale keine korrekten Zentrifugalkräfte induziert werden. Denn nach dem Ansatz von Ehlers und Rindler ist das Zwei-Schalen-Modell auch in 2. Ordnung ω noch

exakt sphärisch symmetrisch, obgleich physikalisch gesehen zentrifugale Deformationen beider Schalen in dieser Ordnung auftreten müssen. Dies führt u.a. dazu, daß das elektrische Quadrupolfeld sich in den Innenraum der inneren geladenen Schale fortsetzt (siehe Fig. 2 in [16]).

Wie bereits in Abs. 3.1 Punkt i.) erwähnt, ist es Pfister und Braun [10] im Fall einer ungeladenen rotierenden Massenschale gelungen, in 3. Ordnung ω die Flachheitsbedingung im Innern einer quasisphärischen, differentiell rotierenden Schale zu erfüllen und damit eine korrekte Trägheitsstruktur zu induzieren. Entsprechend sollte eine Erweiterung unserer elektromagnetischen Thirring-Probleme auf höhere Ordnungen in der Winkelgeschwindigkeit durchführbar sein: Damit die Raumzeit im Innern der geladenen Schale flach ist, werden in gleicher Weise geeignete zentrifugale und differentielle Korrekturen der Massen- und Ladungsverteilungen der beiden Schalen angebracht. Aufgrund der Ergebnisse in [11] erscheint es plausibel, daß auch im Rahmen des Zwei-Schalen-Modells zu gegebenen Werten von M , q , a und R eine solche Konfiguration mit flachem Innenraum existiert. Und diese ist Machschen Fragestellungen weit besser angepaßt, als ein Modell mit sphärisch symmetrischen Schalen.

4.2.4 In M und q exakte Resultate—der Kollapsfall

In diesem letzten Abschnitt von Kapitel 4 zeigen wir, daß trotz der algebraisch sehr komplizierten Relationen für die Integrationskonstanten und der daher komplexen Abhängigkeiten der Magnetfelder \mathbf{B}^I und \mathbf{B}^{II} , sowie der Mitführungsfunktionen $A^I(r)$ und $A^{II}(r)$ von allen Modellparametern α , β und γ es gelingt, in M und q exakte Resultate aufzufinden.

So erwarten wir physikalisch z.B. im Kollapsfall die Gültigkeit der Resultate in 1. und 2. Ordnung in q auch auf beliebige Werte von M und q auszudehnen (d.h. Reduktion der gravitativen und elektromagnetischen Felder im Außenraum auf die der Kerr-Newman-Klasse und totale Mitführung im Innern der Massenschale). Dies legt auch die Analyse des Ein-Schalen-Modells nahe, in dem wir entsprechende Aussagen zeigen konnten und da das Ein-Schalen-System im Limes $\beta \rightarrow 1$ in unserem Zwei-Schalen-System enthalten ist.

Darüberhinaus hatten wir bei der Analyse der schwachen Energiebedingungen in Abs. 2.2.3 bereits bemerkt, daß für $\alpha = \alpha_3 := \frac{1}{2}(\sqrt{\beta^2 + 4\gamma^2} - \beta)$ keine äußere Schale existiert, da in diesem Grenzwert alle Komponenten des Energie-Impuls-Tensors der Massenschale verschwinden, $\tau_\nu^\mu(R) \equiv 0$. Intuitiv erwartet man daher im Fall II, in dem die innere Schale ruht (!), daß keine Mitführungseffekte (1. Ordnung in ω) auftreten, da sich die Gesamtenergie $M = 2R\alpha$ vollständig in der inneren, nichtrotierenden Schale befindet. Existieren aber keine rotierenden Massen(-ströme), dann gibt es keine Mitführung und damit auch keine rotationsinduzierten Magnetfelder.

Wir werden sehen, daß sich diese Erwartungen mathematisch bestätigen und sich sogar noch verallgemeinern lassen. Wir betrachten demgemäß die beiden Grenzwerte:

- i.) $\gamma^2 = \alpha^2 - 1 + \epsilon$ im Limes $\epsilon \rightarrow 0$. In Gl. (2.30) wird $U_1(x)$ in diesem Grenzwert singulär und an der Stelle $r = R$ tritt ein Horizont auf.
- ii.) $\Delta\tau \sim \tau_3^3(R) - \tau_2^2(R) \rightarrow 0$, bzw. als Spezialfall darin enthalten $\alpha \rightarrow \alpha_3$, im Fall II der rotierenden äußeren Massenschale.

Wir beginnen mit Punkt ii.). Betrachten wir die Gl. (3.65) bis (3.67) für die Integrationskonstanten λ_1^H , ζ_1^H und η_3^H und Gl. (3.68) für die Determinante $(\text{Det})^H$ des Gleichungssystems aus dem wir diese Konstanten bestimmt haben. Im Limes $\Delta\tau \rightarrow 0$ bleibt der Ausdruck für $(\text{Det})^H$ im Allgemeinen endlich, d.h. $\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} (\text{Det})^H \neq 0$ (jedenfalls für solche Werte von α , β und γ , für die zwar $\Delta\tau = 0$ gilt, für die die nichtverschwindenden Terme in $(\text{Det})^H$ aber gerade ungleich Null sind). Da λ_1^H , ζ_1^H und η_3^H aber einen Faktor $\Delta\tau$ enthalten, verschwinden diese und damit alle 8 Integrationskonstanten im Grenzwert $\Delta\tau \rightarrow 0$. Im Fall II entartet dann das Gleichungssystem für alle Integrationskonstanten in ein homogenes, denn $\Delta\tau$ ist die einzige Inhomogenität dieses Systems. Mit den Integrationskonstanten verschwinden aber auch alle gravitativen und elektromagnetischen Felder, d.h. $g_i^H(r)$ bzw. \mathbf{B}^H und $A_i^H(r)$ sind identisch Null. Für den Spezialfall $\alpha \rightarrow \alpha_3$ haben wir oben bereits eine physikalisch intuitive Erklärung gefunden.

[In 1. Ordnung in q verschwindet α_3 , d.h. der Grenzwert $\alpha \rightarrow \alpha_3$ entspricht $M \rightarrow 0$, also dem Grenzfall verschwindender Gesamtmasse. Da in dieser Ordnung in q im Fall II alle Felder proportional α sind, verschwinden diese ebenso, vgl. die Ausdrücke in Abs. 4.2.1 für η_3^H , μ_3^H , λ_1^H und ζ_1^H , sowie $\bar{g}_1(\rho)$ und $\bar{A}_1(\rho)$ in einer Potenzreihenentwicklung in α : Im Innenraum der Massenschale sind η_3^H und $\mu_3^H \sim O(\alpha)$ und im Außenraum kürzen sich in $\mathbf{B}^H(r \geq R)$ und $A^H(r \geq R)$ gerade alle α -unabhängigen Terme weg.]

Für allgemeine Werte von α , β und γ , für die $\Delta\tau$ verschwindet, folgt nach den Bemerkungen oben, daß in einer lokalen Umgebung des Parameterbereichs von $\Delta\tau = 0$ somit das Magnetfeld \mathbf{B}^H und die Mitführung $A^H(r)$ ihr Vorzeichen wechseln, wenn $\Delta\tau$ gerade sein Vorzeichen wechselt. Dies bedeutet, daß bei Verletzung des zweiten Teils der schwachen Energiebedingungen, $\Delta\tau \geq 0$, die Mitführungsfunktion $A^H(r)$ von der Mit- zur Anti-Mitführung umschlägt und das induzierte Magnetfeld \mathbf{B}^H seine Orientierung relativ zur Rotationsrichtung ändert. (Man vergleiche mit dem Ein-Schalen-Fall, in dem das Vorzeichen der Integrationskonstanten $\tilde{\eta}_2$, das die Orientierung des Magnetfeldes im Schaleninnern festlegt, nicht direkt mit der Anti-Mitführung zusammenhängt. In diesem Modellsystem ist das Magnetfeld aber auch Konsequenz eines nichtverschwindenden Drehimpulses J der Schale und nicht rein gravitativ durch die Mitführung induziert!) Dies zeigt noch einmal mehr, daß die im Detail technisch aufwendige Analyse der Energiebedingungen sehr wichtig war.

In Bezug auf die Mitföhrungseigenschaften rotierender Schalen mit kosmologischen Randbedingungen (anstelle der asymptotisch flachen Minkowski-Metrik) existiert ein sehr ähnliches Ergebnis von Klein [12]: Auch hier ist die Verletzung der Energiebedingung $\Delta\tau \geq 0$ Ursache für eine Mitführung der lokalen Inertialsysteme entgegengesetzt der Rotationsrichtung.

Wir betrachten nun den allgemeinen Kollapsfall in Punkt i.). Hier divergieren die nachstehenden Größen für $\gamma^2 = \alpha^2 - 1 + \epsilon$ und $\epsilon \rightarrow 0$ wie folgt: $\Delta\tau$ und $(\text{Det})^I$ wie ϵ^{-2} , C_2 , C_3 , $\tau_3^3(R)$, $R\delta\bar{g}'(R\delta)$, N , \tilde{N} und $3\delta(\text{Det})^H/\Delta\tau$ wie ϵ^{-1} , $\bar{g}(R\delta)$ und $\bar{A}(R\delta)$ wie $\log \epsilon^{-1}$. Mit diesem Divergenzverhalten berechnen sich die Integrationskonstanten im Fall I und II für $\epsilon \rightarrow 0$ folgendermaßen: Die Konstanten ζ_1 verschwinden, für ζ_2 , λ_2 und η_2 , η_3 resultieren endliche Werte und μ_2 und μ_3 divergieren wie ϵ^{-1} . Aus letzterem folgt daher, daß die Ausdrücke $\mu_i - C_3$ endlich sind.

Für die Mitführungsfunktionen in den Fällen I und II gilt daher $A^I(r \leq R) = A^H(r \leq R) \equiv 1$. Für die Gesamtmitführung des Zwei-Schalen-System im Innern der Massenschale ergibt sich für endliche Werte von $\bar{\omega}^I$ und ω^H (bzw. für endliche Werte von \bar{J}^I und J^H) somit $\Omega = \omega A = \omega^I A^I + \omega^H A^H = (\bar{\omega}^I/C_3)A^I + \omega^H A^H = \omega^H A^H$. Allein die Mitführung

durch die äußere rotierende Massenschale, also die „kosmische“ Materieverteilung, legt die Trägheitsstruktur der lokalen Inertialsysteme fest und nur die Rotation bezüglich dem „Universum“ ist von Bedeutung. Messen wir die Magnetfelder \mathbf{B}^I und \mathbf{B}^{II} bezüglich einem Beobachter im Innern der Massenschale, dann müssen wir dort alle Magnetfelder mit $C_3^{-1} \sim \epsilon$ skalieren. Diese verschwinden dann im Kollapslimites $\epsilon \rightarrow 0$, denn $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2/C_3$, $\tilde{\eta}_2$, $\tilde{\eta}_3$ und $\tilde{\zeta}_2$ sind null, da die auf Koordinatenzeit t bezogenen Konstanten wie oben betont endliche Werte besitzen.

Zusammengefaßt erhalten wir demnach im Gravitationskollaps der äußeren rotierenden Massenschale folgendes Bild:

$$A(r \leq R) \equiv 1, \quad (4.40)$$

$$\mathbf{B}(r \leq R) \equiv 0, \quad (4.41)$$

also perfekte Mitführung inertialer Bezugssysteme bezüglich der Rotation der Massenschale und Verschwinden der „inneren“ Magnetfelder. Dies ist exakt das Resultat des Kollapsfalles im Ein-Schalen-Modell. Vergleichen wir aber mit unseren Ergebnissen in 1. Ordnung in q (also für kleine Ladungen) in Abs. 4.2.1, so erhielten wir dort im Limes $\alpha \rightarrow 1$ für die mit C_3^{-1} skalierten Felder $\mathbf{B}^I(r \leq R) \neq 0$ und $\mathbf{B}^{II}(r \leq R) \equiv 0$, aufgrund der nichtverschwindenden Konstanten $\tilde{\eta}_3^I = \eta_3^I/C_3$, $\tilde{\eta}_2^I$, $\tilde{\lambda}_2^I$ und $\tilde{\zeta}_2^I$. Dieses widersprüchliche Resultat zeigt jedoch nur, daß die Hintereinanderausführung der beiden Grenzwerte $\epsilon \rightarrow 0$ (für $\gamma^2 = 0$ entspricht dies gerade $\alpha \rightarrow 1$) und $\gamma \rightarrow 0$ nicht vertauscht.

Im Außenraum schließlich ist im Kollapsfall die einzige nichtverschwindende Integrationskonstante $\lambda_1^{II} = 6(1 + \alpha)^2$. Und dies ist identisch der Wert von λ_1 im Ein-Schalen-System in Gl. (4.1). Wir können also die Ergebnisse aus Abs. 4.1.2, das sind Gl. (4.2) bis (4.4), direkt übernehmen und erhalten demgemäß für einen im Unendlichen fixierten inertialen Beobachter

$$\mathbf{B}(r > R) = \mathbf{B}_{\text{Kerr-Newman}}, \quad (4.42)$$

$$A(r > R) = A_{\text{Kerr-Newman}}, \quad (4.43)$$

also wieder die Kerr-Newman-Felder in niedrigster Ordnung J^{II} (siehe [40], Kap. 33.2–33.3).

Da mit den Magnetfeldern \mathbf{B}^I und \mathbf{B}^{II} auch ein magnetisches Moment verbunden ist, können wir dieses wichtige Resultat auch folgendermaßen formulieren: Das „intrinsische“ Dipolmoment \tilde{m}^I (proportional $\tilde{J}^I \neq 0$) verschwindet im Kollaps, das „induzierte“ Dipolmoment m^{II} (proportional Drehimpuls $J^{II} \neq 0$) bleibt bestehen und entspricht dem magnetischen Moment der Kerr-Newman-Klasse, $m^{II} = m_{\text{Kerr-Newman}} = 2 \cdot (qJ^{II}/2M)$. In 1. Ordnung q ergeben sich völlig entsprechende Aussagen, siehe [20] und [54].

Kapitel 5

Ausblick und weiterführende Fragestellungen

Die Analyse der in M und q exakten Ergebnisse des vorherigen Abschnitts hat gezeigt, wie schwierig es ist, aufgrund der komplexen Abhängigkeiten der Integrationskonstanten von allen Modellparametern physikalisch interpretierbare Resultate für beliebige Werte von M und q zu finden. Dies ist nur in zwei (wichtigen) Grenzfällen, darunter dem Kollapsfall gelungen. Nichtsdestotrotz ist es natürlich möglich, daß innerhalb der Modellklasse der Zwei-Schalen-Konfigurationen in Anwesenheit von starken gravitativen und elektromagnetischen Feldern weitere physikalisch wichtige und neue Phänomene existieren.

Interessant wäre es, die Resultate auf die 2. Ordnung in der Winkelgeschwindigkeit ω fortzusetzen und durch geeignete zentrifugale Korrekturen der Massen- und Ladungsverteilungen Flachheit im Innern der geladenen Schale zu garantieren. Dann besitzt jedenfalls der Innenraum eine korrekte Trägheitsstruktur. Im Zwischenbereich ist die Raumzeit durch die stark gravitierenden Ladungen gekrümmt. Neben dem Einfluß der elektrostatischen Feldenergie auf die Mitführung in diesem Bereich treten in 2. Ordnung ω auch prinzipiell die Auswirkungen der magnetischen Feldenergie $\sim \omega^2$ hinzu. Man kann etwa untersuchen, ob diese das Verhalten der Mitführung qualitativ ähnlich beeinflusst, wie die elektrostatische Feldenergie, die ein Ansteigen der Mitführung im Zwischenbereich zur Konsequenz hatte. Darüber hinaus wäre ein Vergleich mit den elektrischen Quadrupolfeldern bei Ehlers und Rindler [16] im Schwachfeldlimites und bei Cohen und Toton [30] in der Testfeldapproximation möglich. (Nur das elektrostatische Coulombfeld erfährt in 2. Ordnung ω eine Korrektur. Die induzierten Magnetfelder der 1. Ordnung ω bleiben dagegen in dieser Ordnung unverändert.)

Insbesondere wäre es physikalisch wichtig, die am Ende der Einleitung aufgestellte Vermutung, daß das Resultat perfekter Mitführung der lokalen Inertialsysteme und freien Teilchen im Gravitationskollaps der (langsam) rotierenden Massenschale völlig unabhängig von allen in ihrem Innern befindlichen physikalischen Feldern erreicht wird, an weiteren Feldern zu testen. So könnte man diese durch die elektromagnetischen Felder bestätigte Hypothese etwa an Skalarfeldern untermauern.

Über diese Machschen Fragestellungen hinaus eröffnen sich zunächst in mathematischer Sicht weitere Richtungen, deren Analyse sehr lohnenswert ist. So ist es Pfister [34] für allgemeine stationäre Störungen beliebiger Drehimpulsquantenzahlen l und beider Paritätsklassen bereits gelungen, die auf den extremen Reissner-Nordström-Fall $q^2 = M^2$ eingeschränkten Resultate von Bičák [31] auf beliebige Werte von M und q zu erweitern. Diese für die allgemeine Störungstheorie der Reissner-Nordström-Lösung, und für die im Grenzwert $q = 0$ darin enthaltene Störungstheorie der Schwarzschild-Geometrie, wichtigen Ergebnisse sind auch in physikalischer Hinsicht bedeutend. Man denke etwa an Fragen nach der (linearen) Stabilität dieser Lösungsklassen. Während Pfister [34] im

Schwarzschild-Fall aus den Rekursionsrelationen eines Potenzreihenansatzes in ρ der allgemeinen stationären Störungen explizite Darstellungen für die dabei auftretenden Entwicklungskoeffizienten angeben konnte, ist dies für $q \neq 0$ bisher noch nicht gelungen.

Eines der zentralen und zugleich sehr überraschenden Resultate der Analyse des Einschalen-Modells war die Übereinstimmung des Wertes $G \approx 2$ des gyromagnetischen Faktors für weite Bereiche des Parameterraumes dieses Systems und für weitere fundamentale Lösungsklassen der Allgemeinen Relativitätstheorie mit denen der Quantentheorie, wie etwa der Dirac-Theorie. Um die Hypothese zu belegen, daß diese Koinzidenz tatsächlich nicht zufälliger Natur ist und ihr unter Umständen eine wesentliche Bedeutung bei einer Vereinheitlichung der Einsteinschen Gravitationstheorie mit der Quantentheorie zukommen könnte, ist es wichtig, zunächst zu klären, ob auch für andere, rotierende, geladene, massebehaftete Konfigurationen, und nicht nur für die in dieser Arbeit betrachteten Schalen-artigen Modelle, G -Faktoren in der Nähe von 2 resultieren. Man denke etwa an ausgedehnte Vollkörper mit allgemeinen Zustandgleichungen.

Dazu wäre auch die oben bereits erwähnte Weiterführung der Störungsrechnung bis zur 2. Ordnung in ω nützlich. Ist der Wert $G \approx 2$ rotierender geladener Massenschalen auch hinsichtlich einer Variation der Winkelgeschwindigkeit robust, oder ergeben sich etwa durch zentrifugale Korrekturterme und differentielle Rotation in höheren Ordnungen in ω Abweichungen vom bisher gefundenen qualitativen Verhalten des gyromagnetischen Faktors? In diese Richtung einer Analyse des G -Faktors physikalisch realistischer, schnell rotierender Körper in der Allgemeinen Relativitätstheorie zielt ein aktuelles numerisches Projekt einer auf diesem Gebiet ausgewiesenen Gruppe um E.ourgoulhon und J. Novak in Meudon, Frankreich. Auch im Rahmen exakter Lösungsmethoden gelang es z.B. Klein [55] physikalisch wichtige Modellklassen rotierender Scheiben auf solche mit Ladungen zu erweitern, und es beginnen nun Untersuchungen hinsichtlich des gyromagnetischen Faktors solcher Körper. Diese sind umso mehr von Bedeutung, als diese Lösungsklassen eine der wenigen physikalisch realistischen bekannten Lösungen der Einstein-Gleichungen sind, die exakt in der Winkelgeschwindigkeit sind.

Und aus einer ganz anderen Richtung, aber immer noch innerhalb der Allgemeinen Relativitätstheorie, gibt es neuste Vermutungen von Newman [56] auf der Basis rein klassischer Argumente, daß jedes massebehaftete geladene Elementarteilchen mit Spin einen gyromagnetischen Faktor mit Wert 2 besitzt. So ist auch im Rahmen quantenfeldtheoretischer Betrachtungen zu geladenen massiven Spinteilchen mit Spin $s > \frac{1}{2}$ nicht entschieden, welcher Wert des gyromagnetischen Faktors zu einer konsistenten Beschreibung dieser Teilchen führt. Es gibt aber Vorschläge und Hinweise, daß für alle „elementaren“ Teilchen beliebigen Spins, insbesondere für das W -Boson, auf der Basis einer nichtminimalen Kopplung an das elektromagnetische Feld der Wert $G = 2$ bevorzugt wird [45]. So sind also auch in der Quantentheorie zum gyromagnetischen Faktor noch nicht alle Fragen abschließend beantwortet, aber mit den Worten von Deser [57] „... it is reasonable to speculate that $G = 2$ is germane to all spins.“

Literaturverzeichnis

- [1] H. Thirring, *Über die Wirkung rotierender, ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie*. Phys. Z. **19**, 33 (1918); Phys. Z. **22**, 29 (1921). [erratum]
- [2] J. Lense, H. Thirring, *Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie*. Phys. Z. **19**, 156 (1918).
- [3] R. U. Sexl, H. K. Urbantke, *Gravitation und Kosmologie*. (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 1995), Kap. 4.5.
- [4] E. Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*. (Brockhaus, Leipzig, 1883).
- [5] A. Einstein, *Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie*. Ann. Phys. (Leipzig) **55**, 241 (1918).
- [6] J. Barbour, H. Pfister (Eds.), *Mach's Principle—From Newton's Bucket to Quantum Gravity*. Einstein Studies, Volume 6 (Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1995).
- [7] D. R. Brill, J. M. Cohen, *Rotating Masses and Their Effect on Inertial Frames*. Phys. Rev. **143**, 1011 (1966).
- [8] H. Pfister, K. H. Braun, *Induction of correct centrifugal force in a rotating mass shell*. Class. Quantum Grav. **2**, 909 (1985).
- [9] A. Einstein, *Gibt es eine Gravitationswirkung, die der elektrodynamischen Induktionswirkung analog ist?* Vierteljahrschrift für gerichtliche Medizin und öffentliches Sanitätswesen **44**, 37 (1912).
- [10] H. Pfister, K. H. Braun, *A mass shell with flat interior cannot rotate rigidly*. Class. Quantum Grav. **3**, 335 (1986).
- [11] H. Pfister, *Rotating mass shells with flat interiors*. Class. Quantum Grav. **6**, 487 (1989).
- [12] C. Klein, *Rotational perturbations and frame dragging in a Friedmann universe*. Class. Quantum Grav. **10**, 1619 (1993).
- [13] S. Hengge, *Ein Modell zur Mitführung bei linearer Beschleunigung*. Diplomarbeit, Universität Tübingen (1997).
- [14] I. Ciufolini, J. A. Wheeler, *Gravitation and Inertia*. (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1995), Kap. 6.1–2.
- [15] W. Rindler, *Essential Relativity—Special, General, and Cosmological*. (Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1977), Kap. 1.16 (Fig.1.3).
- [16] J. Ehlers, W. Rindler, *An Electromagnetic Thirring Problem*. Phys. Rev. D **4**, 3543 (1971).
- [17] K.-D. Hofmann, *Über Wechselwirkungen von Gravitation und elektromagnetischem Feld gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie*. Z. Phys. **166**, 567 (1962).
- [18] J. M. Cohen, *Electromagnetic Fields and Rotating Masses*. Phys. Rev. **148**, 1264 (1966).
- [19] J. Ehlers, W. Rindler, *A gravitationally induced (Machian) magnetic field*. Phys. Lett. **32A**, 257 (1970).
- [20] J. M. Cohen, J. Tiomno, R. M. Wald, *Gyromagnetic Ratio of a Massive Body*. Phys. Rev. D **7**, 998 (1973).
- [21] C. Briggs, J. M. Cohen, G. L. DeWolffson, L. S. Kegeles, *Slowly rotating bodies with arbitrary charge in general relativity*. Phys. Rev. D **23**, 1235 (1981).
- [22] E. Mustafa, J. M. Cohen, K. R. Pechenick, *Angular Momentum, Magnetic Moment, and g-Factor in General Relativity*. Int. J. Theor. Phys. **26**, 1189 (1987).
- [23] B. Hoffmann, *On the Spherically Symmetric Field in Relativity (II)*. Quart. J. Math. **3**, 226 (1932).
- [24] H. Stephani, *Allgemeine Relativitätstheorie*. (3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1988), Kap. 7.5/8.3/19.6.
- [25] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*. (Cambridge

- University Press, London, 1973), Kap. 4.3.
- [26] S. W. Hawking, *Gravitational Radiation in an Expanding Universe*. J. Math. Phys. **9**, 598 (1968).
 - [27] J. Bičák, B. G. Schmidt, *Self-Gravitating Fluid Shells And Their Nonspherical Oscillations in Newtonian Theory*. Astrophys. J. **521**, 708 (1999).
 - [28] P. Gnadig, Z. Kunszt, P. Hasenfratz, J. Kutli, *Dirac's Extended Electron Model*. Ann. Phys. (N.Y.) **116**, 380 (1978).
 - [29] W. Kundt, M. Truemper, *Orthogonal Decomposition of Axi-symmetric Stationary Spacetimes*. Z. Phys. **192**, 419 (1966).
 - [30] J. M. Cohen, E. T. Toton, *Rotating Magnetic Neutron Stars in General Relativity*. Ann. Phys. (N.Y.) **87**, 244 (1974).
 - [31] J. Bičák, *Stationary interacting fields around an extreme Reissner-Nordström black hole*. Phys. Lett. **64A**, 279 (1977).
 - [32] J. Bičák, L. Dvořák, *Stationary electromagnetic fields around black holes. III. General solutions and the fields of current loops near the Reissner-Nordström black hole*. Phys. Rev. D **22**, 2933 (1980).
 - [33] M. King, H. Pfister, *Electromagnetic Thirring problems*. Phys. Rev. D **63**, 104004 (2001).
 - [34] H. Pfister, *Allgemeine stationäre Störungen der Reissner-Nordström-Lösung*. preprint (2002).
 - [35] W. Israel, *Source of the Kerr Metric*. Phys. Rev. D **2**, 641 (1970).
 - [36] J. M. Cohen, D. R. Brill, *Further Examples of «Machian» Effects of Rotating Bodies in General Relativity*. Nuovo Cimento B **56**, 209 (1968).
 - [37] J. Bardeen, *A Variational Principle for Rotating Stars in General Relativity*. Astrophys. J. **162**, 71 (1970).
 - [38] J. Katz, D. Lynden-Bell, J. Bičák, *Instantaneous inertial frames but retarded electromagnetism in rotating relativistic collapse*. Class. Quantum Grav. **15**, 3177 (1998).
 - [39] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996), Kap. V, § 26 Ergänzung: Maximum- und Minimumsprinzipien.
 - [40] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*. (W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1973).
 - [41] B. Carter, *Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields*. Phys. Rev. **174**, 1559 (1968).
 - [42] H. Pfister, M. King, *Der gyromagnetische Faktor in der Quantentheorie und in der Allgemeinen Relativitätstheorie*. preprint (2002).
 - [43] J. M. Lévy-Leblond, *Nonrelativistic Particles and Wave Equations*. Comm. Math. Phys. **6**, 286 (1967).
 - [44] C. R. Hagen, W. J. Hurley, *Magnetic Moment of a Particle with Arbitrary Spin*. Phys. Rev. Lett. **24**, 1381 (1970).
 - [45] S. Ferrara, M. Porrati, V. L. Telegdi, *$g = 2$ as the natural value of the tree-level gyromagnetic ratio of elementary particles*. Phys. Rev. D **46**, 3529 (1992).
 - [46] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. (John Wiley & Sons, New York, 1975), Kap. 11.11.
 - [47] J. M. Cohen, E. Mustafa, *Can classical physics give g -Factors > 1 ?* Phys. Lett. **115A**, 265 (1986).
 - [48] H. P. Siegel, *Inadequacy of the gyromagnetic theorem*. Am. J. Phys. **44**, 344 (1976).
 - [49] F. J. Ernst, *Charged Version of Tomimatsu-Sato Spinning-Mass Field*. Phys. Rev. D **7**, 2520 (1973).
 - [50] C. Reina, A. Treves, *Gyromagnetic ratio of Einstein-Maxwell fields*. Phys. Rev. D **11**, 3031 (1975).
 - [51] P. C. Aichelburg, F. Embacher, *Exact superpartners of $N = 2$ supergravity solitons*. Phys. Rev. D **34**, 3006 (1986).
 - [52] D. Lynden-Bell, J. Katz, J. Bičák, *Mach's principle from the relativistic constraint equati-*

- ons. Mon. Not. R. Astron. Soc.* **272**, 150 (1995).
- [53] W. Ullrich, *Zum Gravitationskollaps einer rotierenden Massenschale*. Diplomarbeit, Universität Tübingen (1995); A. King, *Erzeugung von Gravitationswellen beim Kollaps einer rotierenden Staubschale*. Diplomarbeit, Universität Tübingen (1999).
- [54] R. M. Wald, *Electromagnetic Fields and Massive Bodies*. *Phys. Rev. D* **6**, 1476 (1972).
- [55] C. Klein, *Harrison transformation of hyperelliptic solutions and charged dust disks*. *Phys. Rev. D* **65**, 084029 (2002).
- [56] E. T. Newman, *Classical, geometric origin of magnetic moments, spin-angular momentum, and the Dirac gyromagnetic ratio*. *Phys. Rev. D* **65**, 104005 (2002).
- [57] S. Deser, A. Waldron, *Inconsistencies of massive charged gravitating higher spins*. *Nucl. Phys. B* **631**, 369 (2002).

Lebenslauf

Name Markus King
Geboren 09.06.1970 in Göppingen

Ausbildung

1977–1981 Albert-Schweitzer-Grundschule in Göppingen
1981–1990 Mörike-Gymnasium in Göppingen
10. Mai 1990 Allgemeine Hochschulreife
10/1991–02/1998 Studium der Physik (Diplom) an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
17. März 1994 Vordiplom in Physik
07/1996–07/1997 Anfertigung der Diplomarbeit „*Zum elektromagnetischen Thirring-Problem*“ am Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen unter Anleitung von Prof. Dr. H. Pfister
13. Februar 1998 Diplom in Physik
02/1998–01/2002 Anfertigung der Dissertation „*Rotierende geladene Massenschalen in der Allgemeinen Relativitätstheorie*“ am Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen unter Anleitung von Prof. Dr. H. Pfister.
Stipendium des Landes Baden-Württemberg nach dem Landesgraduiertenförderungsgesetz

Wehrdienst

07/1990–06/1991 Grundwehrdienst in Regen und Ulm

Beschäftigungen

10/2000–07/2001 Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Tübingen
10/2001–02/2002 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen
10/2000–12/2000 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Physik der Universität Hohenheim
08/2001–09/2001

Akademische Lehrer

M. Baake, M. Baumann, H.-D. Ebert, F. Gönnenwein, H. Fischer, J. Frauendiener, F. Hasselbach, R. Hübener, E. Kasper, H. Kaul, P. Kramer, B. Kümmerer, H. Lichte, H. Pfister, H. Reinhardt, H. Ruder, R. Schief, G. Staudt, J. Strähle.

Veröffentlichungen

M. King, H. Pfister, *Electromagnetic Thirring problems*. Phys. Rev. D **63**, 104004 (2001).

M. King, H. Pfister, *On Electromagnetic Thirring Problems*. In A. Macias, J. L. Cervantes-Cota, C. Lämmerzahl (Eds.): *Exact Solutions and Scalar Fields in Gravity—Recent Developments*. Proceedings of IV. Mexican Meeting on Exact Solutions and Scalar Fields in Gravity, October 2–6, 2000, Mexico City, Mexico. Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2001.

H. Pfister, M. King, *Rotating charged mass shell: Dragging, ant dragging, and the gyromagnetic ratio*. Phys. Rev. D **65**, 084033 (2002).

Danksagung

Zuallererst möchte ich mich ganz herzlich bei Prof. Dr. Herbert Pfister bedanken. Zum einen für die Überlassung des interessanten Themas, für viele hilfreiche Hinweise und gemeinsame Diskussionen in einer sehr angenehmen und persönlichen Atmosphäre und zum anderen für seine fortlaufende Unterstützung, die dazu beigetragen hat diese Arbeit zustandezubringen. So verdanke ich ihm und Prof. Dr. Helmut Kaul auch eine zweijährige Förderung durch ein Stipendium nach dem Landesgraduiertenförderungsgesetz. Prof. Dr. Jürgen Ehlers danke ich ebenso herzlich für die Übernahme des Koreferats.

Ein besonderer Dank gilt Priv. Doz. Dr. Jörg Frauendiener für viele wertvolle Anregungen und insbesondere für sein anhaltendes Interesse am Gelingen dieser Promotion.

Bedanken möchte ich mich auch bei den Mitgliedern und ehemaligen Mitgliedern der Arbeitsgruppe, Dr. Christian Klein, Dr. Urs Michael Schaudt und Thomas Müller und darüber hinaus bei Heiko Elster, Thomas Fuß, Christoph Häußler und Matthias Hein für die freundliche Unterstützung und überhaupt für die wirklich nette Zeit mit ihnen am Institut für Theoretische Physik.

Zum Schluß ein dickes Dankeschön an Regina Belz für zahlreiche Korrekturen, an Mark Pröhl für den \LaTeX -support und an meinen Bruder Andreas, ohne dessen unermüdlichen Einsatz in der Endphase der Promotion die Arbeit nicht rechtzeitig fertiggestellt worden wäre.