

Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter

Josephson-Kontakt-Netzwerke mit eindeutiger
Spannungsantwortfunktion

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Christoph Häußler

aus Reutlingen

2002

Tag der mündlichen Prüfung: 26. November 2002

Dekan: Prof. Dr. Herbert Müther

1. Berichterstatter: Prof. Dr. Nils Schopohl
Universität Tübingen

2. Berichterstatter: Prof. Dr. Reinhold Kleiner
Universität Tübingen

Perhaps we can predict that the measurement of magnetic fields will - by using the effects of quantum-mechanical interference - eventually become almost as precise as the measurement of wavelength of light.

R.P. Feynman et. al.^a (1964)

^a R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands in “The Feynman lectures on physics” [41].

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Überblick	1
2	Parallele supraleitende Quanten-Interferometer	17
2.1	Parallele Josephson-Kontakt-Netzwerke als supraleitende Quanten-Interferometer	18
2.2	Grundgleichungen zur Beschreibung der Dynamik von Josephson-Kontakt-Netzwerken	21
2.2.1	Das RCSJ-Modell	21
2.2.2	Stromerhaltung	22
2.2.3	Faradaysches Induktionsgesetz für äußere Schleifen, Randbedingungen	23
2.2.4	Eindeutigkeit der quantenmechanischen Paar-Wellenfunktion, Flussquantisierung	25
2.2.5	Ampèresches Durchflutungsgesetz, Induktionsmatrizen	27
2.2.6	Induktionskoeffizienten für planare Netzwerkgeometrien mit rechteckförmigen Leitern	31
2.2.7	Spannungsabfall über das Netzwerk und Faradaysches Induktionsgesetz für innere Schleifen	34
2.3	Dynamische Gleichungen zur Beschreibung paralleler Josephson-Kontakt-Netzwerke	35
2.3.1	Netzwerkgleichungen für verschwindende Induktivitäten	36
2.3.2	Netzwerkgleichungen induktiver paralleler Netzwerke	38
2.4	Spannungsantwort paralleler Netzwerke	42
2.4.1	Lösungen des Ein-Phasen-Modells für überdämpfte Kontakte	43
2.4.2	Spannungsantwort paralleler Netzwerke im Grenzfall verschwindender Induktivitäten	45
2.4.3	Strukturfaktoren, kritische Ströme und Spannungsantworten spezieller paralleler Netzwerke	48

2.4.4	Spannungsantwort induktiver paralleler Netzwerke	59
2.4.5	Abhängigkeit der Spannungsantwort von Parameterstreuungen	71
2.5	Analytische Näherung der Spannungsantwort induktiver paralleler Netzwerke mit endlichen Kontakt-Kapazitäten	76
2.5.1	Harmonische Näherung und lineares Netzwerkmodell	77
2.5.2	Die Impedanzmatrix Z induktiver paralleler Netzwerke	82
2.5.3	Grenzfälle schwach und stark induktiver Netzwerke	85
2.5.4	Implizite $\langle V \rangle$ - $\mathbf{B}^{(1)}$ -Bestimmungsgleichungen für dc SQUIDs und parallele Netzwerke	86
2.5.5	LC-Resonanzen in parallelen Netzwerken	88
2.5.6	Lösungen der analytischen Näherung für Gaußsche Netzwerke	89
2.6	Rauschenergie von parallelen Josephson-Kontakt-Netzwerken	93
2.7	Parallele Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter	95
3	Serielle supraleitende Quanten-Interferometer	105
3.1	Serielle Josephson-Kontakt-Netzwerke als supraleitende Quanten-Interferometer	106
3.2	Dynamische Gleichungen zur Beschreibung serieller Netzwerke	108
3.2.1	Grundgleichungen zur Beschreibung serieller Netzwerke	109
3.2.2	Netzwerkgleichungen für verschwindende Induktivitäten	112
3.2.3	Netzwerkgleichungen für endliche induktive Kopplung	113
3.3	Spannungsantwort serieller Netzwerke	114
3.3.1	Spannungsantwort serieller Netzwerke im Grenzfall verschwindender induktiver Kopplung	115
3.3.2	Spannungsantwort induktiver serieller Netzwerke	121
3.3.3	Abhängigkeit der Spannungsantwort von Parameterstreuungen	129
3.4	Rauschenergie serieller Josephson-Kontakt-Netzwerke	131
3.5	Serielle Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter	133
4	Erste Experimente mit Supraleitenden Quanten-Interferenz-Filtern	139
4.1	SQIFs auf der Basis metallischer Tieftemperatur-Supraleiter: SQIF-Chip-Layouts	139
4.2	Erste experimentelle Ergebnisse	145
4.2.1	Experimentelle Spannungsantwort des parallelen SQIFs	145
4.2.2	Experimentelle Spannungsantwort des seriellen SQIFs	159

5 Zusammenfassung der Ergebnisse, Diskussion und Ausblick	171
Literaturliste	188
Danksagung	203

Kapitel 1

Einführung und Überblick

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung der Frage, wie das Spannungsantwortverhalten stromgetriebener Josephson-Kontakt-Netzwerke als supraleitende Quanten-Interferometer von den Kontaktparametern und der Netzwerkgeometrie bestimmt wird. Die Schwerpunkte liegen dabei auf Parallelschaltungen von Josephson-Kontakten (parallele Netzwerke) und auf Serienschaltungen von supraleitenden Schlaufen, die jeweils zwei parallel geschaltete Josephson-Kontakte enthalten (serielle Netzwerke). In diesem einleitenden Kapitel werden diese Netzwerke eingeführt, einige wichtige Ergebnisse der bisherigen theoretischen und experimentellen Untersuchungen als Überblick zusammengefasst und der Inhalt dieser Arbeit in einer Übersicht vorgestellt.

Die vorliegende Arbeit wurde innerhalb des Forschungsschwerpunktprogramms “Nanotechnologie und Quantenelektronik” durch das Land “Baden Württemberg” gefördert. Sie entstand an der Universität Tübingen am Lehrstuhl für Theoretische Festkörperphysik von Prof. Dr. N. Schopohl und die Resultate wurden während der Zusammenarbeit mit Prof. Dr. N. Schopohl, Dr. J. Oppenländer und Dipl. Phys. T. Träuble erarbeitet [64, 65, 127, 128, 129, 130, 139].

In einem allgemeinen Sinn sind Josephson-Kontakte nichtlineare Oszillatoren, die als Basiselemente supraleitungselektronischer Schaltungen dienen. Werden mehrere Josephson-Kontakte in Netzwerken miteinander verschaltet, so entsteht ein nichtlineares System mit neuen Eigenschaften, die sich von denen einzelner Kontakte wesentlich unterscheiden. Insbesondere wenn die Kontakte in Form supraleitender Schlaufen miteinander verbunden sind, wird die kollektive Dynamik der Kontakte im Netzwerk durch die makroskopische Quantenmechanik entscheidend mitbestimmt, die im Fall von Josephson-Kontakt-Netzwerken eine starke Magnetfeldabhängigkeit der Netzwerkdynamik zur Folge hat. So bilden supraleitend parallel geschaltete Josephson-Kontakte Quanteninterferometer, in denen sich die Ströme durch die Kontakte magnetfeldabhängig überlagern. Dies führt dazu, dass stromgetriebene Netzwerke sehr sensitive Magnetfeld-Spannungs-Wandler sind, die sich für eine Vielzahl von Anwendungen (s. unten) eignen. Da die charakteristische Oszillationsfrequenz der Kontaktströme sehr groß ist (typischerweise einige GHz), spielt in Anwendungen der zeitlich gemittelte

Spannungsabfall über das Netzwerk eine zentrale Rolle.

Bei der Diskussion steht die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik paralleler und serieller Netzwerke im Vordergrund der Betrachtungen und die Frage wird beantwortet, wie die Flächenverteilung der Schleifen die Magnetfeldperiode der mittleren Spannung regiert. Den Einflüssen kapazitiver und induktiver Effekte auf die Spannungsantwort wird besondere Beachtung geschenkt, da sie den mittleren Spannungsabfall beeinflussen und zu resonanten Phänomenen führen können. Es werden theoretische Modelle erarbeitet, um aus der Kenntnis der Netzwerkgeometrie und der Kontaktparameter die Charakteristiken der Netzwerke erklären und vorhersagen zu können. Mit Hilfe der entwickelten Methoden und Verfahren können Quanteninterferometer explizit ausgelegt und konzipiert werden, damit sie Spannungsantwortfunktionen mit gewünschten Eigenschaften besitzen. Die Analyse der theoretischen Modelle zeigt, dass die qualitativen makroskopischen Quanteninterferenz-Phänomene in parallelen Netzwerken unabhängig von der Stärke der induktiven Kopplungen durch die Flächenverteilung der Schleifen regiert werden.

Die Diskussion führt auf Netzwerke mit unkonventionellen Flächenverteilungen, deren Spannungsantworten sich signifikant von denen konventioneller regulärer Netzwerke unterscheiden. So besitzen parallele und serielle Netzwerke mit unkonventionellen Flächenverteilungen eine nichtperiodische Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik, die ausschließlich in der Umgebung verschwindenden Magnetfeldes ein *eindeutiges* und signifikantes Verhalten besitzt. Aufgrund der Eindeutigkeit in der Spannungsantwort werden diese Netzwerke "Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter" (SQIF) genannt. SQIFs ermöglichen eine hochpräzise *absolute* Messung des Betrags und der Richtung externer magnetischer Felder und können beim Betrieb in ungeschirmten Umgebungen bei Anwesenheit großer Störungen wesentliche Vorteile besitzen. Im Gegensatz dazu erlauben konventionelle reguläre Netzwerke lediglich eine *relative* Magnetfeldmessung, da in ihrer periodischen Spannungsantwort kein bestimmter Magnetfeldwert besonders ausgezeichnet ist.

Es wird gezeigt, dass Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter sehr tolerant gegen Streuungen der Kontaktparameter sind und eine sehr große Robustheit gegen strukturelle Streuungen besitzen, die konventionelle reguläre Netzwerke nicht aufweisen. Dies ermöglicht die Verwendung relativ einfacher Verfahren zur Herstellung von SQIFs, was insbesondere bei der Realisierung mit Hochtemperatursupraleitern ein wesentlicher Vorteil ist. Diese Eigenschaften machen SQIFs zu neuartigen supraleitungselektronischen Bauelementen für Anwendungen wie hochsensitive (Absolutfeld-) Magnetometer, nichthysteretische Hochfrequenzverstärker und hochempfindliche Strom- und Spannungssensoren. Erste Experimente mit SQIF-Schaltungen zeigen eine erfolgreiche experimentelle Bestätigung der theoretischen Vorhersagen über die Spannungsantwort von SQIFs.

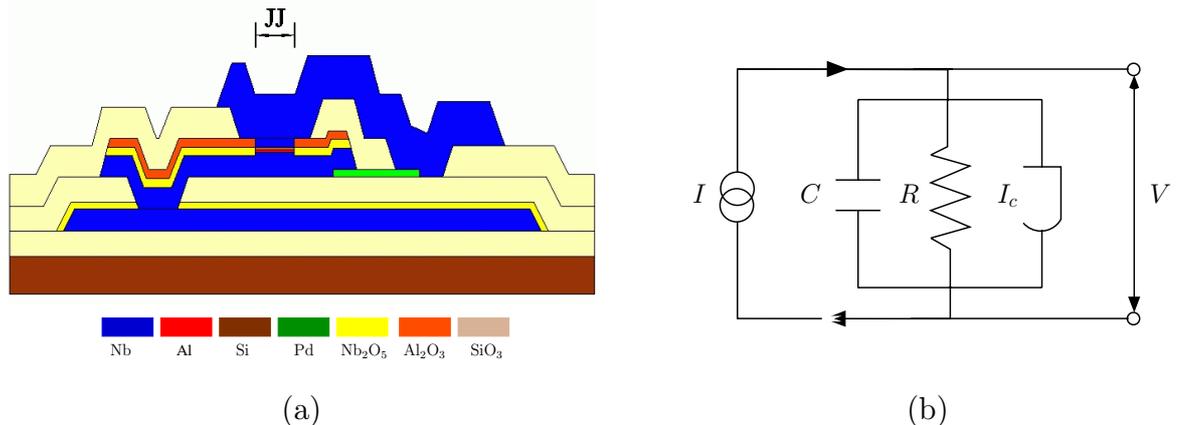


Abbildung 1.1: (a) Querschnitt durch einen einzelnen Josephson-Kontakt in Niob-Technologie. Die beiden supraleitenden Elektroden (blau) sind durch eine isolierende dünne Schicht (orange) voneinander getrennt und bilden zusammen den Tunnelkontakt. Dem Tunnelkontakt ist ein Ohmscher Widerstand (grün) extern parallel geschaltet. (b) Ersatzschaltbild eines stromgetriebenen Josephson-Kontakts im "Resistively and Capacitively Shunted Junction Model" (kurz RCSJ-Modell).

Der Josephson-Kontakt als nichtlineares Basiselement der Netzwerke

Josephson-Kontakte sind die aktiven Basiselemente supraleitender Quantenelektronik und finden Anwendung in Magnetfeldsensoren, Verstärkern, Spannungsnormalen, Detektoren, Mischern und schnell schaltenden Bauelementen in Speichern und logischen Schaltkreisen [6, 71, 95, 103, 137, 145, 165, 166]. Josephson-Kontakte bestehen aus zwei Supraleitern, die schwach aneinander gekoppelt sind, wobei die schwache Kopplung auf verschiedene Art realisiert werden kann. Mit modernen Herstellungsverfahren gefertigte Kontakte besitzen oft eine Schichtgeometrie, in der zwei supraleitende Elektroden durch eine dünne normalleitende oder isolierende Tunnelbarriere voneinander getrennt sind [35, 62, 77]. Abbildung 1.1(a) zeigt eine Skizze des Querschnitts durch einen solchen Kontakt, in der die zwei supraleitenden Elektroden aus dem Tieftemperatur-Supraleiter Niob (Nb, blau) bestehen und die Tunnelbarriere aus einer sehr dünnen isolierenden Aluminiumoxid-Schicht (Al₂O₃, orange) realisiert ist. Die isolierende Schicht besitzt typischerweise eine Dicke von mehreren zehn Atomlagen ($\approx 2\text{nm}$) und typische laterale Ausdehnungen der Tunnelbarriere sind einige μm . Dem Nb-AlO_x-Nb-Tunnelkontakt aus Abb. 1.1(a) ist ein Ohmscher Widerstand (grün) parallel geschaltet, um kapazitive Effekte zu verringern [22, 103] und dadurch Josephson-Kontakte mit nichthysteretischen Kennlinien zu erhalten (s. unten). Die Niob-Technologie ermöglicht die Herstellung von Josephson-Kontakten hoher Qualität und zeichnet sich durch sehr gute Kontrollierbarkeit und Reproduzierbarkeit der Kontaktparameter und durch eine hohe Variabilität beim Design supraleitungselektronischer Schaltkreise aus.

Für die Realisierung von Josephson-Kontakten aus Hochtemperatur-Supraleitern spielen in letzter Zeit auch andere Kontakttypen wie z.B. die Korngrenzenkontakte [59,

70, 94] eine besondere Rolle. Bei Korngrenzenkontakten wird die schwache Kopplung an der Grenzfläche (die Korngrenze) zwischen zwei Supraleitern mit unterschiedlichen Kristallorientierungen ausgenutzt. Die Grenzfläche kann dadurch erzeugt werden, dass der supraleitende Film auf einem Substrat epitaktisch abgeschieden wird, das aus zwei Bereichen mit unterschiedlichen Kristallorientierungen besteht. Da sich die Kristallstruktur des Substrats auf den supraleitenden Film vererbt, entsteht am Übergang der Kristallbereiche die Korngrenze, an der sich die Kristallstruktur des Supraleiters ändert. Die Technologie der Korngrenzenkontakte ermöglicht derzeit zwar die erfolgreiche Herstellung von Hochtemperatur dc SQUIDs [58, 94, 113, 141], sie besitzt aber eine Reihe von Nachteilen, die die Realisierung vieler komplexer supraleitungselektronischer Schaltungen sehr erschweren. Zum einen sind die Positionen der Kontakte auf dem Substrat auf die Korngrenze beschränkt und zum anderen ist eine gute Kontrollierbarkeit und Reproduzierbarkeit der Kontakte nicht gegeben. Typische Streuungen der Kontaktparameter auf einem Chip liegen bei $\pm 20\%$ [55, 113], was für viele Anwendungen sehr problematisch ist [94, 165]. Vor diesem Hintergrund wird dem Einfluss von Imperfektionen auf die Funktionalität der diskutierten Josephson-Kontakt-Netzwerke besondere Beachtung geschenkt. Da es in der vorliegenden Arbeit auf die grundlegenden Eigenschaften und die nichtlineare Dynamik der Josephson-Kontakte ankommt, wird an dieser Stelle auf eine ausführliche Wiedergabe der vielfältigen physikalischen Realisierungsmöglichkeiten der Kontakte und ihrer theoretischen Beschreibungen verzichtet und auf die Literatur verwiesen [4, 6, 24, 59, 67, 94, 103, 131, 145, 165].

In seiner Originalarbeit „Possible new effects in superconductive tunneling“ [84] entwickelte Josephson eine mikroskopische Theorie für einen supraleitenden Tunnelkontakt. Er zeigte dabei erstmals theoretisch, dass auch Cooper-Paare (mit Ladung $e^* = -2e$)¹ durch eine sehr dünne dielektrische Schicht zwischen zwei Supraleitern tunneln, so dass ein von Cooper-Paaren getragener makroskopischer Suprastrom I_s dissipationslos zwischen den Supraleitern fließen kann. Im folgenden Abschnitt werden die Josephson-Relationen eingeführt, die Aussagen über den Spannungsabfall über den Tunnelkontakt und über den Cooper-Paar-Tunnelstrom machen. Um diese grundlegenden Gleichungen zur Beschreibung zweier schwach aneinander gekoppelter Supraleiter herzuleiten, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Neben Herleitungen, die auf einer mikroskopischen Theorie basieren [28, 84], sei hier die Herleitung Feynmans erwähnt [41], die die schwache Kopplung der beiden Supraleiter des Tunnelkontakts als Störung des ungekoppelten Systems zweier separierter Supraleiter auffasst.

Bei der Interpretation der Supraleitung als ein makroskopisches Quantenphänomen wird der supraleitende Zustand durch eine makroskopische quantenmechanische Wellenfunktion beschrieben. Diese Wellenfunktion beschreibt eine makroskopische Anzahl von Elektronen, die im betrachteten Supraleiter als im gleichen quantenmechanischen Zustand „kondensiert“ angenommen werden, d.h. wir betrachten Teilchen, die eine effektive Masse und Ladung besitzen und als Gesamtheit durch eine makroskopische Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}) = \rho^{1/2}(\mathbf{r}) \cdot e^{i\theta(\mathbf{r})}$ beschreibbar sind. Hier bezeichnet $\theta(\mathbf{r})$ die Phase,

¹Als Konvention sei $e > 0$ der Betrag der Elektronladung im Vakuum.

die allen Teilchen gemein ist und $\rho(\mathbf{r})$ die Besetzungszahldichte des makroskopischen Zustandes. Legt man die Phase $\theta(\mathbf{r})$ an einem Ort \mathbf{r} im Supraleiter fest, so ist diese an jedem anderen Punkt des Supraleiters eindeutig bestimmt. In diesem Sinne besitzt die quantenmechanische Wellenfunktion makroskopischen Charakter. Im Rahmen der mikroskopischen Theorie der Supraleitung von Bardeen, Cooper und Schrieffer [3] (BCS-Theorie) werden die Teilchen effektiver Masse und Ladung als Paare von Elektronen (Cooper-Paare) identifiziert.

Werden die supraleitenden Elektroden des Tunnelkontakts mit 1 und 2 bezeichnet, so kann jede Elektrode durch eine makroskopische Wellenfunktion $\psi_1(\mathbf{r}) = \rho_1^{1/2}(\mathbf{r}) \cdot e^{i\theta_1(\mathbf{r})}$ bzw. $\psi_2(\mathbf{r}) = \rho_2^{1/2}(\mathbf{r}) \cdot e^{i\theta_2(\mathbf{r})}$ charakterisiert werden. Der Suprastrom I_s durch den Tunnelkontakt wird nun durch die eichinvariante Phasendifferenz

$$\varphi(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t) + \frac{2e}{\hbar} \int_2^1 \langle \mathbf{A}(t), d\mathbf{s} \rangle \quad (1.1)$$

der makroskopischen BCS-Paarwellenfunktionen ψ_1 und ψ_2 bestimmt und für einen idealen Supraleiter-Isolator-Supraleiter Kontakt (SIS-Kontakt) ergibt sich

$$I_s(\varphi) = I_c \sin(\varphi). \quad (1.2)$$

Hierbei bezeichnet I_c den kritischen Strom des Josephson-Kontakts, der dem maximalen dissipationslosen Suprastrom entspricht, der durch den Tunnelkontakt fließen kann. Im allgemeinen Fall hängt der kritische Strom I_c von den Materialeigenschaften des Kontakts, der Temperatur und dem Magnetfeld $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ ab. In (1.1) hängt die eichinvariante Phasendifferenz nur von der Zeit t ab und besitzt keine Ortsabhängigkeit. Dies gilt für sogenannte ‘‘punktförmige’’ Kontakte, deren räumliche Ausdehnungen (in der Barrierenebene) wesentlich kleiner als die Josephson-Eindringtiefe λ_J sind. Für punktförmige Kontakte ist die supraleitende Tunnelstromdichte räumlich über den Kontakt konstant, so dass eine skalare (eichinvariante) Phasendifferenz $\varphi(t)$ zur Charakterisierung des Kontakts ausreicht.² Da in der vorliegenden Arbeit die nichtlineare Dynamik der Netzwerke im Vordergrund stehen soll, beschränken wir uns im Folgenden auf punktförmige Kontakte. Dadurch wird sichergestellt, dass die nichtlineare Netzwerkdynamik durch die kollektiven Phänomene dominiert wird und nicht durch die intrinsische Dynamik der individuellen Kontakte.

Wird ein punktförmiger Josephson-Kontakt von einem zeitlich konstanten unterkritischen Transportstrom $I < I_c$ durchflossen, so ist der Suprastrom I_s stationär und durch $I_s = I$ gegeben. Da der Suprastrom I_s dissipationslos fließt, fällt für $I < I_c$ über dem Kontakt keine Spannung ab $V = 0$ (dc Josephson-Effekt). Die Situation ändert sich, wenn der Transportstrom I den Wert des kritischen Stroms I_c überschreitet. Dann fällt über den Kontakt eine zeitlich schnell oszillierende Spannung $V(t)$ ab, die die zeitliche

²Sind die lateralen Ausdehnungen des Josephson-Kontakts größer als λ_J , so treten räumlich über die Kontaktfläche variierende Stromdichten in den ausgedehnten Kontakten auf. In diesem Fall wird die Elektrodynamik des Kontakts durch eine nichtlineare Wellengleichung beschrieben [6, 103, 145, 165], deren charakteristische Länge die Josephson-Eindringtiefe λ_J ist (s. Abschn. 2.3.2).

Änderungsrate der zeitabhängigen eichinvarianten Phasendifferenz $\varphi(t)$ gemäß

$$\partial_t \varphi(t) = \frac{2e}{\hbar} V(t) \quad (1.3)$$

bestimmt. Dies ist die fundamentale nichtstationäre Josephson-Relation, die die Physik der schwachen Supraleitung bestimmt [84]. Nach ihr wird die mittlere Änderungsrate von φ durch den zeitlichen Mittelwert $\langle V \rangle$ der Spannung $V(t)$ bestimmt, so dass für $I > I_c$ der Suprastrom $I_s = \sin(\varphi)$ mit einer charakteristischen Frequenz ν oszilliert, die durch $\nu = 2e/h \langle V \rangle$ gegeben ist (ac Josephson-Effekt). Das charakteristische Frequenz-Spannungs-Verhältnis ist durch $\nu/\langle V \rangle = 2e/h \approx 483.6 \text{ MHz}/\mu\text{V}$ gegeben. Die Relation $h\nu = 2e\langle V \rangle$ für die mittlere Spannung eines Josephson-Kontakts legt eine spektroskopische Deutung nahe. Wird für $I > I_c$ ein Cooper-Paar von der einen supraleitenden Seite 1 zur anderen supraleitenden Seite 2 des Kontakts transportiert, so wird ein Photon der Energie $2e\langle V \rangle$ in Form eines einzelnen Quants der elektromagnetischen Strahlung frei (Josephson-Strahlung) [171]. Die Josephson-Relationen (1.2) und (1.3) beschreiben den wesentlichen Inhalt des Josephson-Effekts, dessen erstmalige Beobachtung Anderson und Rowell 1963 gelang [2].

Die Beschränkung auf punktförmige Josephson-Kontakte erlaubt es, für stromgetriebene Josephson-Kontakte zu einem einfachen Ersatzschaltbild überzugehen, welches 1968 von McCumber [110], Stewart [147] und Johnson [83] vorgeschlagen wurde. In diesem Modell wird die Dynamik des Kontakts durch eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben, die einem getriebenen gedämpften Pendel analog ist [6, 165]. Dieses sogenannte “Resistively and Capacitively Shunted Junction Model” (kurz RCSJ-Modell) beschreibt in sehr guter Näherung die dynamischen Eigenschaften einer großen Klasse von Josephson-Kontakten (vergl. etwa [103]), wozu insbesondere die oben erwähnten Korngrenzenkontakte [34, 58, 59, 70] und die extern geshunteten Nb-AlO_x-Nb-Kontakte zählen [67]. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb das RCSJ-Modell verwendet, um die Strom-Phase-Beziehungen der Josephson-Kontakte zu beschreiben. Die entwickelte Theorie der Netzwerke (insbesondere die Netzwerkgleichungen) lässt sich jedoch einfach auf andere Strom-Phase-Beziehungen erweitern.

Die Josephson-Relationen (1.2) und (1.3) beschreiben einen idealisierten Josephson-Kontakt, bei dem der gesamte Strom nur von Cooper-Paaren getragen wird. Im allgemeinen Fall eines SIS-Tunnelkontakts treten jedoch noch weitere Ströme hinzu, die in guter Näherung in einen Ohmschen Strom und einen Verschiebungsstrom aufgeteilt werden können. Der Ohmsche Anteil V/R beschreibt den Beitrag zum Gesamtstrom, der von tunnelnden Quasiteilchen getragen wird und geht in Form eines parallelen ohmschen Widerstandes R in das Modell ein. Der Verschiebungsstrom $C \cdot \dot{V}$ berücksichtigt in Form einer parallel geschalteten Kapazität C die spezielle Geometrie des Kontakts und beschreibt die elektrische Polarisierung innerhalb der Tunnelbarriere. Der Gesamtstrom, der durch einen Josephson-Kontakt fließt, ergibt sich dann als Summe der Teilströme (Cooper-Paar-, Quasiteilchen- und Verschiebungsstrom), so dass

man im Fall eines stromgetriebenen Kontakts zu einem Ersatzschaltbild übergehen kann, das in Abbildung 1.1 (b) dargestellt ist. Nimmt man den Ohmschen Widerstand R als konstant an und wendet auf diesen Schaltkreis die Kirchhoffschen Gesetze an, so ist der Strom I durch einen Josephson-Kontakt durch die Gleichung $I = C \cdot \dot{V}(t) + V(t)/R + I_c \sin \varphi(t)$ gegeben. Diese Gleichung kann mit Hilfe der Josephson-Relation (1.3) nur in Abhängigkeit von φ geschrieben werden

$$I = \frac{\hbar C}{2e} \partial_t^2 \varphi(t) + \frac{\hbar}{2eR} \partial_t \varphi(t) + I_c \sin \varphi(t). \quad (1.4)$$

Die rechte Seite von (1.4) beschreibt die Strom-Phase-Beziehung des Kontakts, die in einer dimensionslosen Formulierung in die Form

$$I = \beta_C \partial_\tau^2 \varphi(\tau) + \partial_\tau \varphi(\tau) + I_c \sin \varphi(\tau) \quad (1.5)$$

umgeschrieben werden kann, wobei mit Hilfe der Josephson-Zeit $t_J = \hbar/(2e I_c R)$ die dimensionslose Zeit $\tau = t/t_J$ eingeführt wurde. Der Parameter β_C (McCumber-Parameter) ist durch $\beta_C = RC/t_J = 2e/\hbar I_c R^2 C$ definiert und beschreibt die kapazitiven Effekte des Josephson-Kontakts. Die RCSJ-Gleichung (1.4) (bzw. (1.5)) ist eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die eichinvariante Phasendifferenz φ , deren Lösungen über die Josephson-Relationen die physikalischen Größen bestimmen.

Um die verschiedenen Lösungen der Differentialgleichung (1.5) kurz vorzustellen, beschränken wir uns vorerst auf Josephson-Kontakte mit vernachlässigbarer Kapazität C , d.h. vernachlässigbarem McCumber-Parameter $\beta_C = 0$. Wegen der Analogie des RCSJ-Modells zum getriebenen mechanischen Pendel wird diese Situation auch als überdämpfter Kontakt bezeichnet, wogegen man im Fall sehr großer McCumber-Parameter $\beta_C \gg 0$ von unterdämpften Kontakten spricht. Die Dynamik von Kontakten mit endlichem β_C wird dann im Anschluss kurz diskutiert. Die folgenden Abschnitte geben nur eine knappe Zusammenfassung der Struktur des Phasenraums der Differentialgleichung (1.5). Für eine ausführliche Diskussion der Lösungen sei hier auf [138] verwiesen. Eine Darstellung des Phasenraums für (1.5) findet sich in [40].

Für vernachlässigbare McCumber-Parameter $\beta_C \approx 0$ kann die Differentialgleichung zweiter Ordnung (1.5) durch eine Differentialgleichung erster Ordnung $I = \partial_\tau \varphi(\tau) + I_c \sin \varphi(\tau)$ approximiert werden, d.h. das RCSJ- geht in das RSJ-Modell über. Für zeitlich konstante Ströme $I \leq I_c$ besitzt diese Differentialgleichung zwei zeitlich konstante Lösungen $\varphi_1 = \arcsin(I/I_c)$ und $\varphi_2 = \pi - \arcsin(I/I_c)$ von denen nur φ_1 stabil ist. Der Fixpunkt φ_1 ist für alle Trajektorien im Phasenraum attraktiv, d.h. für $\tau \rightarrow \infty$ enden alle Trajektorien im Fixpunkt φ_1 . Diese konstante Lösung entspricht physikalisch dem Zustand verschwindender Spannung und zeitlich konstantem Cooper-Paar-Strom $I = I_s$ durch den Kontakt, d.h. dem dc Josephson-Effekt. Beim Übergang von $I \leq I_c$ zu $I > I_c$ (I wird immer noch als zeitlich konstant angenommen) verschwinden beide Fixpunkte, und es entsteht eine isolierte, stabile, global attraktive

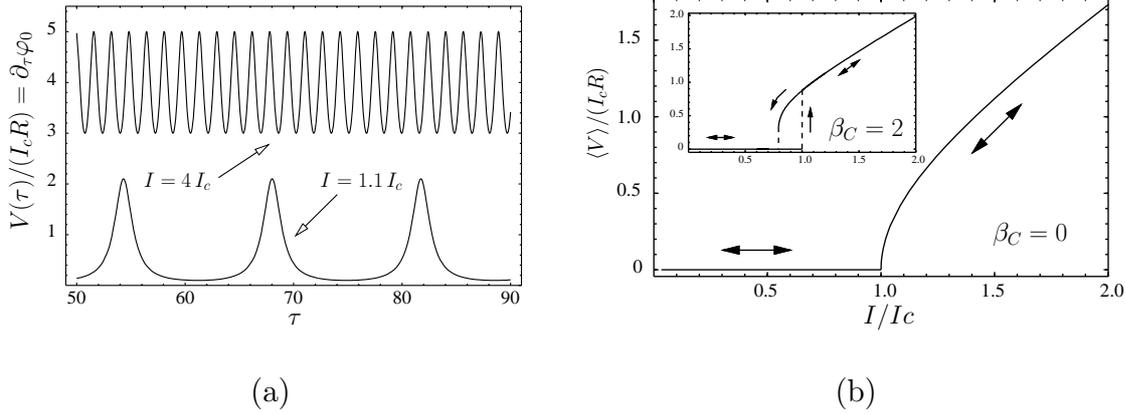


Abbildung 1.2: (a) Zeitliches Verhalten der Spannung $V(\tau)$ über einen stromgetriebenen Josephson-Kontakt mit $\beta_C = 0$ für zwei verschiedene Transportstromwerte $I/I_c = 1.1$ und $I/I_c = 4$. (b) Strom-Spannungs-Kennlinie eines Josephson-Kontakts im RCSJ-Modell. Die Pfeile geben die Richtung an, mit der die Kurve durchlaufen wird.

Lösung $\varphi_0(\tau)$, in der alle Trajektorien im Phasenraum enden [149]. Ein analytischer Ausdruck für $\varphi_0(\tau)$ findet sich z.B. in [6]. Die Lösung $\varphi_0(\tau)$ ist monoton wachsend mit $\varphi_0(\tau + T/t_J) = \varphi_0(\tau) + 2\pi$, wobei sich für die Periodendauer T durch Integration von (1.5) nach der Zeit $T = 2\pi t_J \cdot [(I/I_c)^2 - 1]^{-1/2}$ ergibt. Nach der Josephson-Relation (1.3) oszilliert die über den Kontakt abfallende Spannung $V(t)$ mit der charakteristischen Frequenz $\nu = 1/T$ und für den zeitlichen Mittelwert der Spannung folgt³ $\langle V \rangle = I_c R \sqrt{(I/I_c)^2 - 1}$. Zusammenfassend ergibt sich also für die Strom-Spannungs-Kennlinie eines stromgetriebenen überdämpften Josephson-Kontakts

$$\langle V \rangle(I) = \begin{cases} 0 & \text{für } I \leq I_c \\ I_c R \sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1} & \text{für } I > I_c. \end{cases} \quad (1.6)$$

Abbildung 1.2 zeigt in (a) das zeitliche Verhalten der Spannung $V(\tau) = I_c R \partial_\tau \varphi_0(\tau)$ über einen stromgetriebenen überdämpften ($\beta_C = 0$) Josephson-Kontakt für zwei Werte des Transportstroms I und in (b) die Strom-Spannungs-Kennlinie des Josephson-Kontakts. Für Ströme I nahe beim kritischen Strom I_c (in Abb. 1.2 (a) für $I = 1.1I_c$) gleicht das zeitliche Verhalten der Spannung $V(\tau)$ periodischen Pulsen, an denen viele Frequenzen beteiligt sind. Die charakteristische Frequenz $\nu = 2e/h \langle V \rangle$ und der zeitliche Mittelwert der Spannung $\langle V \rangle$ besitzen beide einen kleinen Wert. Wird der Transportstrom I erhöht, so wird die Schwingung immer harmonischer und die charakteristische Frequenz ν und damit $\langle V \rangle$ nehmen gemäß der Relation (1.6) zu. Wie Abb. 1.2 (b) zeigt, ist die Strom-Spannungs-Kurve von überdämpften Kontakten nichthysteretisch, d.h. für jeden Wert des Transportstroms ist die mittlere Spannung eindeutig festgelegt.

³mit $\langle V \rangle = 1/T \int_0^T dt' V(t') = \hbar/(2e) 1/T \int_0^{2\pi} d\varphi = \hbar/(2e) 2\pi/T$

Josephson-Kontakte mit endlicher Kapazität, d.h. Kontakte mit $\beta_C > 0$, werden durch die nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (1.5) beschrieben. Es ist in diesem Fall nicht mehr möglich, analytische Lösungen und analytische Ausdrücke für die mittlere am Kontakt abfallende Spannung anzugeben. Aus diesem Grund folgt eine rein qualitative Diskussion der Lösungen von Gleichung (1.5).

Während ein Kontakt mit $\beta_C < 1$ dasselbe qualitative Verhalten wie ein überdämpfter Kontakt zeigt, ändert sich die Phasenraumstruktur für Kontakte mit $\beta_C > 1$. Für $\beta_C > 1$ ist der Fixpunkt φ_1 nicht mehr für alle Ströme $I < I_c$ global attraktiv. Es existiert ein I_{c2} mit $0 < I_{c2} < I_c$, so dass für $I_{c2} < I < I_c$ neben dem stabilen Fixpunkt φ_1 eine stabile, periodische rotierende Lösung von (1.5) existiert. Befindet sich das System in der rotierenden Lösung, so fällt am Kontakt eine zeitlich variierende Spannung ab, deren Mittelwert nicht verschwindet. Die Strom-Spannungskurve ist für $I_{c2} < I < I_c$ hysteretisch. Für Transportstromwerte größer als I_c (d.h. für $I > I_c$) existiert wie im überdämpften Fall eine periodische, global attraktive Lösung $\tilde{\varphi}_0(t)$, und das System befindet sich im Spannungszustand mit $\langle V \rangle > 0$. Für die Lösung $\tilde{\varphi}_0(t)$ ist ein analytischer Ausdruck für die Periodendauer nicht mehr möglich.

Das Teilbild von Abb. 1.2 (b) zeigt die numerisch bestimmte Strom-Spannungskennlinie für einen Josephson-Kontakt mit $\beta_C = 2$. Die Pfeile geben die Richtung an, in der die Kurve durchlaufen wird. Am Startpunkt $I = 0$ befindet sich das System im Fixpunkt φ_1 , so dass am Kontakt keine Spannung abfällt. Erhöht man den Transportstrom I , so bleibt das System in φ_1 , bis bei Erreichen von I_c der Fixpunkt verschwindet. Das System geht bei Überschreiten von I_c in die rotierende Lösung $\tilde{\varphi}_0(t)$ über, d.h. es fällt am Kontakt eine endliche mittlere Spannung ab, und die I-V-Kurve zeigt bei $I = I_c$ einen Sprung. Für $I > I_c$ bleibt das System im Spannungszustand und folgt bei Änderung von I dem Spannungszustand für $I > I_c$ in Abb. 1.2 (b). Wird der Transportstrom wieder unter den kritischen Wert I_c erniedrigt, so springt die Spannung bei I_c nicht wieder auf den Wert Null zurück. Die rotierende Lösung ist für $I_{c2} < I < I_c$ stabil, d.h. das System bleibt im Spannungszustand und folgt dem oberen Spannungszustand solange $I_{c2} < I < I_c$ gilt. Unterschreitet I den Wert I_{c2} , so geht der Kontakt in den Fixpunkt φ_1 über, und die Spannung verschwindet. Die Hysterese hat ihre Ursache in der Kapazität des Tunnelkontakts, die für $\beta_C > 1$ eine genügend große "Trägheit" des Kontakts verursacht, so dass auch für unterkritische Transportströme (d.h. für $I_{c2} < I < I_c$) die oszillatorische Lösung $\tilde{\varphi}_0(t)$ (neben der stationären Lösung φ_1) stabil ist.

Parallele und serielle Josephson-Kontakt-Netzwerke

Werden mehrere Josephson-Kontakte miteinander verkoppelt, so entstehen Josephson-Kontakt-Netzwerke, deren Eigenschaften und Verhaltensweisen von denen einzelner Josephson-Kontakte wesentlich abweichen. Die neuen Eigenschaften der Netzwerke haben ihren Ursprung in den nichtlinearen Wechselwirkungen der Josephson-Kontakte, die zu kollektiven Phänomenen wie Synchronisation und Musterbildung führen [124].

Die Wechselwirkungen der Kontakte entstehen einerseits durch die direkte Verschaltung der Kontakte und werden andererseits durch die makroskopische Quantenmechanik vermittelt, die die Dynamik der supraleitenden Bereiche der Netzwerke mitregiert.

Die makroskopischen Quantenphänomene treten besonders deutlich in geschlossenen supraleitenden Strukturen auf. So ist der magnetische Fluss durch einen supraleitenden Ring in Einheiten des magnetischen Flussquants $\Phi_0 = h/(2e) \approx 2.07 \times 10^{-15} \text{ Tm}^2$ quantisiert [27, 36, 106], vorausgesetzt das Material des Rings ist dicker als die magnetische London-Eindringtiefe λ_L . Die Flussquantisierung ist eine direkte Folge der Existenz eines makroskopischen Quantenzustandes, in dem eine makroskopische Anzahl von Elektronen im Supraleiter “kondensiert” ist, und findet ihren Ursprung in einem theoretischen Argument, das zuerst von Onsager [123] im Kontext der quantisierten Zirkulation in suprafluidem ^4He formuliert wurde. Die makroskopische Wellenfunktion von Teilchen entlang eines geschlossenen Pfades besitzt notwendigerweise eine ganzzahlige Wellenlängenanzahl. Aus diesem Grund ist der elektrische Strom in einem geschlossenen supraleitenden Ring quantisiert, woraus die Quantisierung des magnetischen Flusses folgt, der diesen Ring durchsetzt [106].

Das dc SQUID als kleinstes paralleles Netzwerk

“dc Superconducting Quantum Interference Devices” (kurz dc SQUIDs) verbinden die zwei physikalischen Phänomene des Josephson-Effekts und der Flussquantisierung.⁴ dc SQUIDs zählen zu den empfindlichsten bekannten Detektoren für magnetischen Fluss und bieten damit die Möglichkeit, jede physikalische Größe zu messen, die in magnetischen Fluss transformierbar ist. Dazu gehören zum Beispiel Magnetfelder, Magnetfeldgradienten, Ströme, Spannungen, magnetische Suszeptibilität oder räumliche Verschiebungen. Daraus resultiert eine große Vielfalt von SQUID Anwendungen, die von der hochsensitiven Detektion biomagnetischer Signale (wie in der Magnetokardiographie oder Magnetoencephalographie) über empfindliche Hochfrequenzverstärker bis zur Detektion von Gravitationswellen reicht. Aufgrund dieser Vielfalt wird nachfolgend nur sehr knapp auf den Aufbau und das wesentliche Funktionsprinzip von dc SQUIDs eingegangen und ansonsten auf die ausführliche Literatur [5, 6, 21, 22, 33, 48, 66, 94, 103, 153, 165] verwiesen. Als eine Auswahl von Originalarbeiten zu dc SQUIDs seien die Literaturzitate [81, 82, 173] genannt.

dc SQUIDs bestehen aus zwei Josephson-Kontakten, die supraleitend parallel geschaltet sind und einen supraleitenden Ring formen. Abb. 1.3 (a) zeigt die Prinzipskizze eines planaren dc SQUIDs mit einem orientierten Flächenelement \mathbf{a} , das senkrecht zur SQUID-Ebene orientiert ist und dessen Betrag gleich der SQUID-Schlaufenfläche a ist $|\mathbf{a}| = a$. Das dc SQUID wird von einem Transportstrom I bestromt und befindet sich in einem primären zu messenden Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$, das von extern kontrollierten Quellen erzeugt wird. Da das dc SQUID eine planare Gestalt besitzt, ist nur die zur SQUID-Ebene senkrechte Komponente $B_{\perp}^{(1)}$ von Bedeutung. Besitzt der Transportstrom geeignete Werte ($I > 2I_c$), so fällt über dem dc SQUID eine zeitlich schnell oszillierende

⁴Das Kürzel “dc” steht für “direct current” und beschreibt den Betriebsmodus, in dem dc SQUIDs mit einem konstanten Gleichstrom (Transportstrom) betrieben werden.

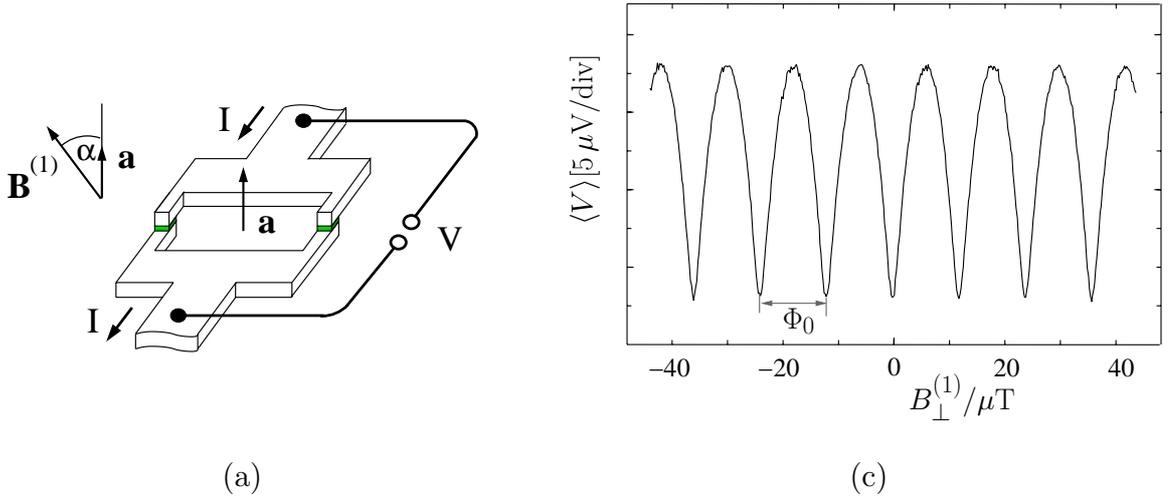


Abbildung 1.3: (a) Prinzipskizze eines stromgetriebenen dc SQUIDs zur Messung von Änderungen primärer Magnetfelder $\mathbf{B}^{(1)}$ (b) Experimentelle Φ_0 -periodische Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik eines stromgetriebenen dc SQUIDs.

Spannung $V(t)$ ab, deren zeitlicher Mittelwert $\langle V \rangle$ eine Φ_0 -periodische Funktion des primären magnetischen Flusses $\Phi^{(1)} = \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a} \rangle = B_{\perp}^{(1)} \cdot a$ ist. Werden zur Vereinfachung identische überdämpfte Kontakte mit Parameterwerten R und I_c angenommen, so ist die Spannungsantwort des dc SQUIDs im RSJ-Modell durch

$$\langle V \rangle(I, \Phi^{(1)}) = \begin{cases} 0 & I \leq I_{c,\text{SQUID}}(\Phi^{(1)}) \\ I_c R \sqrt{\left(\frac{I}{2I_c}\right)^2 - \left|\cos\left(\frac{\pi \Phi^{(1)}}{\Phi_0}\right)\right|^2} & I > I_{c,\text{SQUID}}(\Phi^{(1)}) \end{cases} \quad \text{für} \quad (1.7)$$

bestimmt (s. Abschn. 2.4.3 oder [33]). Hierbei ist $I_{c,\text{SQUID}} = 2I_c |\cos(\pi \Phi^{(1)}/\Phi_0)|$ der magnetfeldabhängige kritische Strom des dc SQUIDs, d.h. der maximale mögliche Suprastrom durch die beiden Kontakte. Die experimentelle Spannungsantwort $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ eines dc SQUIDs für einen festen Wert von I mit $I > 2I_c$ zeigt Abb. 1.3 (b). Sie ist in guter qualitativer Übereinstimmung mit dem theoretischen Modell (1.7).

In Anwendungen werden dc SQUIDs an einem Arbeitspunkt der $\langle V \rangle$ - $B_{\perp}^{(1)}$ -Kennlinie mit maximalem Transferfaktor $V_{B^{(1)}} = |\partial_{B^{(1)}} \langle V \rangle|_{\text{max}}$ betrieben, so dass eine kleine Änderung des primären Magnetfeldes eine Änderung der Spannung $\langle V \rangle$ verursacht. Durch die Messung der Spannungsänderung kann die Änderung des primären Magnetfeldes bestimmt werden. Da die SQUID Spannungsantwort Φ_0 -periodisch ist, können nur Änderungen primärer Magnetfelder bestimmt werden und eine *absolute* Messung von Magnetfeldern ist mit dc SQUIDs (zumindest direkt) nicht möglich. Ferner verursacht die periodische SQUID-Charakteristik Probleme beim Einsatz in magnetisch un abgeschirmten Umgebungen oder in Anwendungen, in denen die Amplitude des SQUID-Eingangssignals über einen großen Bereich schnell variiert. In beiden Fällen wird eine Elektronik benötigt, die den dynamischen Bereich des SQUIDs wesentlich vergrößert. Häufig wird dazu eine ‐Flux-Locked-Loop‐-Elektronik [38] verwendet, die

mit Hilfe einer Rückkoppelschaltung den SQUID als Null-Detektor für magnetischen Fluss verwendet. Auf diese Weise können die Perioden (Flussquanten) gezählt werden, über die das Eingangssignal hinwegstreicht. Solche zusätzlichen Elektroniken besitzen aber eine endliche maximale Zählrate und limitieren dadurch die maximale Frequenz-Bandbreite des SQUID-Systems auf derzeit ungefähr 10 MHz [38]. Die maximal möglichen Zählraten derzeitiger Elektroniken liegen bei $10^6 - 10^7 \Phi_0/s$ [21, 38].

Da die Abschirmströme I_{sc} , die im dc SQUID fließen, selbst ein sogenanntes sekundäres Magnetfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ erzeugen, ist das gesamte Magnetfeld \mathbf{B} am Ort des dc SQUIDs durch eine Superposition des primären und sekundären Magnetfeldes gegeben $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)}$. Sei $\Phi = \int \langle \mathbf{B}, d\mathbf{a} \rangle$ der magnetische Gesamtfluss durch die SQUID-Schleufe, so gilt $\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}$, wobei sich der sekundäre magnetische Fluss $\Phi^{(2)}$ mit Hilfe der Schlaufeninduktivität L zu $\Phi^{(2)} = L I_{sc}$ ergibt. Abhängig vom sekundären Fluss $\Phi^{(2)}$ existiert für jeden SQUID eine optimale Schlaufengröße a , wenn die Parameter im Hinblick auf die Empfindlichkeit des Systems optimiert werden [152].

Die Theorie zur Beschreibung der Dynamik von dc SQUIDs unter Berücksichtigung des magnetischen Eigenfeldes ist als spezieller Fall in den allgemeineren theoretischen Modellen dieser Arbeit enthalten und wird deshalb an dieser Stelle nicht weiter vertieft.

Parallele Josephson-Kontakt-Netzwerke

Die Erweiterung des dc SQUIDs auf eine Parallelschaltung von vielen Kontakten schlugen Feynman et. al. 1965 vor [41]. Mit Blick auf die Interferometrie in der Optik sollte ein Interferometer mit N parallel geschalteten Josephson-Kontakten nach der Vorhersage Feynmans eine wesentlich höhere Empfindlichkeit ermöglichen, als ein Interferometer aus lediglich zwei Kontakten (dc SQUID). Die $N-1$ Schleifen des Interferometers sollten nach diesem Vorschlag alle identisch sein, so dass die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik sehr scharfe signifikante Φ_0 -periodische Minima besitzt. Josephson-Kontakt-Netzwerke mit identischen Schlaufenflächen $a_i = a$ werden reguläre Netzwerke genannt und sind von wenigen Ausnahmen abgesehen (s. unten) im Mittelpunkt der bisherigen theoretischen und experimentellen Betrachtungen.

Die erhöhte Sensitivität paralleler regulärer Netzwerke (sogenannter “Superconducting Quantum Interference Gratings” oder SQUIGs) wurde 1968 von De Waele et.al. [32] und Zimmermann et.al. [173] erstmals experimentell bestätigt. Dabei wurde insbesondere in [32] die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik stromtriebener paralleler Netzwerke mit bis zu sechs Josephson-Punktkontakten experimentell untersucht und eine Verschmälerung der Spannungsminima mit zunehmender Kontaktanzahl beobachtet. Die experimentellen Spannungscharakteristiken waren in qualitativer Übereinstimmung mit dem theoretischen kritischen Strom des parallelen Netzwerks, der für identische Kontakte und unter Vernachlässigung magnetischer Eigenfelder zu

$$I_{c,\text{Netzwerk}}(B_{\perp}^{(1)}) = I_c \left| \frac{\sin(N\pi B_{\perp}^{(1)} a / \Phi_0)}{\sin(\pi B_{\perp}^{(1)} a / \Phi_0)} \right| \quad (1.8)$$

bestimmt wurde⁵. Der kritische Netzwerkstrom $I_{c,\text{Netzwerk}}(B_{\perp}^{(1)})$ besitzt für Magnetfeldwerte mit $B_{\perp}^{(1)}a/\Phi_0 \in \mathbb{Z}$ ausgeprägte Maxima⁶, die aufgrund der Interferenzeffekte proportional zu $1/N$ verschmälert sind. Die Idee mit Hilfe von SQUIGs die Sensitivität von Magnetometern zu erhöhen wurde z.B. in [114, 117, 118] weiterverfolgt. Dort wurde bereits darauf hingewiesen, dass Parameterstreuungen der Josephson-Kontakte nur kleine nachteilige Effekte auf die Verschmälерung der Maxima in $I_{c,\text{Netzwerk}}(B_{\perp}^{(1)})$ haben und damit die Empfindlichkeit des SQUIGs nur wenig beeinflussen.

Neben den Magnetometeranwendungen werden reguläre parallele Netzwerke als mögliche Drei-Tor-Bauelemente diskutiert, die vergleichbare Eigenschaften zu Halbleiterttransistoren besitzen könnten. In sogenannten diskreten Vortex-Flow-Transistoren werden parallele Netzwerke (mit meist überdämpften Kontakten) als supraleitende Schaltungen eingesetzt, die das von einem Kontrollstrom erzeugte Magnetfeld in Änderungen des kritischen Netzwerkstroms oder in Änderungen der mittleren Spannung wandeln. Solche “supraleitende Transistoren” könnten in Mikrowellenverstärkern oder als Schnittstelle zwischen Halbleiter- und Supraleiterelektroniken Anwendung finden. Als Literaturauswahl seien hier die Zitate [9, 10, 53, 54, 60, 151] genannt.

Eindimensionale parallele Netzwerke aus Josephson-Punktkontakten können in vielerlei Hinsicht als eine diskrete Version ausgedehnter Josephson-Kontakte angesehen werden [6, 103]. So treten bei ausgedehnten unterdämpften Josephson-Kontakten in Magnetfeldern Stufen in den Strom-Spannungskennlinien auf, die von Fiske [23, 43] durch die Wechselwirkung der Josephson-Stromdichte mit dem internen elektromagnetischen Feld des Kontakts als Resonator erklärt wurden. In diesem Zusammenhang wurden die resonanten Strukturen in den I - $\langle V \rangle$ -Kennlinien diskreter regulärer Netzwerke aus unterdämpften Kontakten theoretisch und experimentell untersucht [50, 51, 159, 162]. Die Messung der Magnetfeldabhängigkeit des kritischen Netzwerkstroms und der Fiske-Stufen ermöglicht zudem eine experimentelle Bestimmung der Netzwerkparameter (wie Induktivitäten und Kontakt-Kapazitäten) [163]. Desweiteren sind parallele Netzwerke diskrete Anordnungen zur Untersuchung der Vortex- und Flussdynamik in eindimensionalen Systemen [74, 160, 164]. So konnten zum Beispiel Vernichtungsprozesse und Wechselwirkungen von Soliton-Antisoliton-Paaren in parallelen Netzwerken raumzeitlich aufgelöst im Experiment beobachtet werden [47, 121]. Diese Untersuchungen bilden die Grundlage für eine mögliche Anwendung von Josephson-Kontakt-Netzwerken als logische Schaltkreise (wie die Single-Flux-Quantum (SFQ) Logiken [102]), in denen das magnetische Flussquant (das Soliton) die Aufgabe des Informationsträgers übernimmt.

Als durchstimmbare Mikrowellenquellen mit einer für verschiedene Anwendungen genügend hohen Leistungsabgabe sind seit einiger Zeit ein- und zweidimensionale Josephson-Kontakt-Netzwerke Gegenstand von Theorie und Experiment. Zu den Anwendungen dieser Höchsfrequenzquellen gehören On-Chip Oszillatoren für frequenzselekti-

⁵Für parallele reguläre Netzwerke mit großen Induktivitäten beeinflussen die magnetischen Eigenfelder den kritischen Netzwerkstrom [18, 142, 144, 157, 170].

⁶Für $B_{\perp}^{(1)}a/\Phi_0 \in \mathbb{Z}$ entspricht der magnetische Fluss $B_{\perp}^{(1)}a$ in jeder Schlaufe einem ganzzahligen Vielfachen des Flussquants Φ_0 . Mit \mathbb{Z} ist die Menge der ganzen Zahlen benannt.

ve Empfänger und für Mikroprozessoren. Das Ziel ist dabei, Netzwerkarchitekturen mit Oszillationsmustern zu finden, die optimale Mikrowellen erzeugen und gleichzeitig robust gegen Störungen und Imperfektionen sind [11, 80, 125, 124, 155, 169]. Die Synchronisationsmechanismen in Josephson-Kontakt-Netzwerken werden dabei auch anhand regulärer paralleler Netzwerke studiert [25, 26, 46, 45, 103, 156, 169].

Neben den genannten Anwendungen sind Netzwerke aus Josephson-Oszillatoren Modellsysteme für Hochtemperatur-Supraleiter. Da es zur Zeit nur möglich ist, kleine Einkristalle von Hoch- T_c -Supraleitern wie z.B. YBCO herzustellen, sind alle ausgedehnten Proben inhomogene granulare Strukturen [154]. Um die magnetischen Eigenschaften solcher granularer Proben zu diskutieren, können diese als Systeme schwach aneinander gekoppelter supraleitender Körner beschrieben werden. Die schwache Kopplung zweier direkt benachbarter Körner kann als Josephson-Kontakt modelliert werden, so dass granulare Supraleiter durch Josephson-Kontakt-Netzwerke dargestellt werden können. Zur Beschreibung der magnetischen und der Transporteigenschaften granularer Supraleiter werden neben zwei- [37, 108] und dreidimensionalen [31, 63, 79] Netzwerken auch parallele eindimensionale [19, 133, 161] Netzwerke verwendet. Für reguläre parallele Netzwerke mit großen Induktivitäten werden magnetische Hysterese-Effekte im kritischen Netzwerkstrom in [115, 116] diskutiert und eine theoretische Diskussion der statischen magnetischen Flussverteilungen findet sich in [17].

In allen bisher zitierten Arbeiten werden reguläre parallele Netzwerke mit identischen Schlaufenflächen in homogenen externen Magnetfeldern betrachtet. Die experimentell beobachteten kritischen Netzwerkströme in [49, 51, 52, 159] zeigen jedoch eine Unterdrückung der signifikanten Maxima von $I_{c,\text{Netzwerk}}(B_{\perp}^{(1)})$ für endliche externe Magnetfeldwerte, die nicht mit dem theoretischen Verhalten aus (1.8) übereinstimmt. Dies wird in [50, 52] durch eine inhomogene Magnetfeldverteilung bzw. durch eine Abweichung der Schlaufenflächen vom idealen Flächeninhalt theoretisch erklärt.

Serienschaltungen von dc SQUIDs

Einzelne dc SQUIDs besitzen eine sehr große intrinsische Sensitivität und eine sehr große Frequenzbandbreite, die von 0 Hz bis zu einigen 10^9 Hz reichen kann. Der Einsatz von dc SQUIDs wird jedoch durch ihren kleinen dynamischen Bereich ($< \Phi_0/2$), ihre kleine Ausgangsspannung und ihre kleine Ausgangsimpedanz (von $\approx 1\Omega$) kompliziert. So ist in vielen Anwendungen (wie z.B. Magnetometrie in unabgeschirmten Umgebungen) ein sehr viel größerer dynamischer Bereich erforderlich. Um dies zu erreichen, werden dc SQUIDs typischerweise im Flux-Locked-Loop Modus betrieben. Dies linearisiert zwar die Kennlinie und erhöht den dynamischen Bereich, limitiert aber gleichzeitig die Frequenzbandbreite und kompliziert die Schaltungen. Das gleiche Problem der Bandbreitenbegrenzung tritt bei Verstärkeranwendungen auf, bei denen dc SQUIDs als Eingangsstufe verwendet werden. Damit die Sensitivität des gesamten Verstärkers möglichst durch das extrem niedrige Rauschen der SQUID-Eingangsstufe limitiert wird, muss das kleine SQUID-Ausgangssignal durch Zwischenverstärker soweit verstärkt werden, bis das Rauschen des verstärkten SQUID-Signals das Rauschen der nachfolgenden Raumtemperaturelektronik (RT-Elektronik) genügend übersteigt.

Auch hier schränkt die Elektronik, die das SQUID-Ausgangssignal an die verarbeitende RT-Elektronik koppelt, das verfügbare Frequenzband (auf 0 Hz-10 MHz für FLL [38]) deutlich ein.

Zur Lösung dieses Problems schlugen Welty und Martinis [168] vor, anstatt eines einzelnen dc SQUIDs eine Serienschaltung mehrerer dc SQUIDs zu verwenden. Eine solche Serienschaltung besitzt eine wesentlich größere Ausgangsspannung und eine erhöhte Ausgangsimpedanz, so dass die Impedanzanpassung an die Halbleiter RT-Elektronik wesentlich vereinfacht wird. Um eine (wie im Fall eines einzelnen SQUIDs) Φ_0 -periodische Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik zu erhalten, sollten die SQUIDs nach [168] alle identisch sein, so dass eine kohärente Modulation der SQUIDs in der Serie durch eine gemeinsame Steuerleitung möglich ist. Solche Serienschaltungen aus *identischen* dc SQUIDs werden kurz SSAs (für "Series Arrays of dc SQUIDs") genannt und ermöglichen bei geeigneter Auslegung eine direkte Ankopplung an die RT-Elektronik ohne zusätzliche Kopplungselektroniken zu verwenden. Dies vereinfacht die Schaltungen und ermöglicht eine wesentlich vergrößerte Bandbreite (in [168] von 0 Hz-175 MHz). Als Anwendungen von SSAs werden bisher z.B. Endstufen für rauscharme Verstärker [16, 76, 101, 167, 168] bzw. Operationsverstärker [78], Magnetometer oder Ampèremeter [44, 86, 87, 97, 100, 98] und Verstärker in Antennenanwendungen [107] diskutiert und genutzt.

Die Magnetfeld-Spannungs-Kennlinien von SSAs zeigen nur dann eine exakte Φ_0 -Periodizität, wenn alle SQUID-Schlaufen identische Flächen besitzen und wenn es gelingt, den magnetischen Fluss in allen Schlaufen kohärent zu modulieren. In vielen Experimenten gelang dies nur teilweise, so dass die Spannungsantwort Φ_0 -periodische Oszillationen zeigte, deren Amplitude jedoch abhängig vom externen Feld modulierte. Diese Modulationen traten sowohl bei SSAs aus Niob [44, 87, 146, 168] als auch bei SSAs aus YBCO [97, 98, 99, 100] auf, wobei die Modulationen bei YBCO-SSAs wesentlich ausgeprägter waren. Sind die Amplitudenmodulationen zu groß, so erschwert dies die Suche nach dem optimalen Arbeitspunkt auf der Kennlinie und ein Einsatz einer FLL-Elektronik ist unpraktikabel [87]. Eine erste Betrachtung der Auswirkungen inhomogener Flusseinkopplung auf die Spannungscharakteristik von Serien aus identischen SQUIDs findet sich in [99]. Dort wird anhand eines empirischen Modells gezeigt, dass Inhomogenitäten des magnetischen Flusses die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik empfindlich stören können.

Überblick

Zum Abschluss dieses einführenden Kapitels geben die nachfolgenden Abschnitte einen Überblick über die vorliegende Arbeit. Dieser Überblick ist knapp gehalten, da das letzte Kapitel 5 eine ausführliche Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse beinhaltet.

Kapitel 2 beginnt mit der Beschreibung paralleler Josephson-Kontakt-Netzwerke und der Einführung und Diskussion der grundlegenden Gleichungen mit deren Hilfe die Dy-

namik stromgetriebener Josephson-Kontakt-Netzwerke beschrieben werden kann. Aus den Grundgleichungen werden die Netzwerkgleichungen paralleler Netzwerke explizit hergeleitet, wobei der Grenzfall vernachlässigbarer magnetischer Eigenfelder vom Fall endlicher Eigenfelder unterschieden wird. Mit Hilfe eines analytischen Strukturfaktors werden die Spannungsantworten paralleler Netzwerke diskutiert und durch numerische Simulation der vollen induktiven Netzwerkgleichungen werden die induktiven und kapazitiven Effekte und deren Einfluss auf die Spannungsantwort untersucht. Dies wird durch die Entwicklung eines analytischen Näherungsmodells ergänzt, mit dessen Hilfe insbesondere resonante Phänomene in parallelen Netzwerken untersucht werden. Auf der Basis der entwickelten theoretischen Modelle werden Netzwerke mit unkonventionellen Flächenverteilungen und *eindeutiger* sowie robuster Spannungsantwort vorgeschlagen und das Konzept des Supraleitenden Quanten-Interferenz-Filters (SQIF) wird formuliert.

Die Idee, mit Hilfe unkonventioneller Flächenverteilungen eindeutige Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken zu erzeugen, ist auch auf serielle Netzwerke aus Zwei-Kontakt-Schleifen übertragbar. Diese Betrachtungen sind Inhalt von Kapitel 3, in dem die Dynamik und die Spannungsantwort serieller Netzwerke untersucht wird. Dabei wird eine zu Kapitel 2 analoge Vorgehensweise gewählt. Aufbauend auf den für serielle Netzwerke relevanten Grundgleichungen werden die Netzwerkgleichungen explizit hergeleitet und aus deren Lösungen werden die Spannungsantworten serieller Netzwerke bestimmt. Eine analytische Lösung gelingt hierbei für den Fall vernachlässigbarer magnetischer Eigenfelder. Für den Fall endlicher induktiver Effekte werden die Spannungsantworten untersucht, die sich aus den numerischen Lösungen der vollen induktiven Netzwerkgleichungen ergeben.

Auf der Basis der theoretischen Modelle wurden Schaltungen mit parallelen und seriellen Supraleitenden Quanten-Interferenz-Filtern (SQIF) in Niob-Technologie konzipiert und entworfen. Mit dem Aufbau dieser prototypischen Schaltungen und den ersten experimentellen Ergebnissen befasst sich Kapitel 4. Die experimentell gemessenen Strom-Spannungs- sowie Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken der SQIFs werden detailliert beschrieben und mit Hilfe der theoretischen Modelle erklärt. Dabei zeigt sich, dass die ersten Experimente die theoretischen Vorhersagen über die Spannungsantwort paralleler und serieller SQIFs sehr gut bestätigen, so dass die entwickelten theoretischen Methoden gute Ausgangspunkte für weiterführende Betrachtungen sind.

Im abschließenden Kapitel 5 werden alle wesentlichen theoretischen und experimentellen Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und im Zusammenhang diskutiert. Dabei wird ein Ausblick auf zukünftige Problemstellungen, weiterführende Entwicklungen und Anwendungen von parallelen und seriellen Supraleitenden Quanten-Interferenz-Filtern gegeben.

Kapitel 2

Parallele supraleitende Quanten-Interferometer

Dieses Kapitel beginnt mit der genauen Beschreibung paralleler Josephson-Kontakt-Netzwerke und der Einführung der verwendeten Notation. Die grundlegenden Gleichungen werden diskutiert, mit deren Hilfe die Dynamik der Netzwerke beschrieben werden kann. Darauf aufbauend folgt die explizite Herleitung der Netzwerkgleichungen für parallele Netzwerke, deren Lösungen die physikalischen Größen wie die Spannungsantwort stromgetriebener Netzwerke bestimmen. Dabei werden a priori keine Einschränkungen bezüglich der individuellen Kontaktparameterwerte oder bezüglich der Schlaufenflächenverteilung des parallelen Netzwerks gemacht.

Bei der Diskussion unterscheiden wir den Grenzfall verschwindender magnetischer Eigenfelder vom Fall endlicher Eigenfelder. Dies ermöglicht für den erstgenannten Fall eine Reduktion der Netzwerkfreiheitsgrade auf einen einzigen effektiven Freiheitsgrad (Ein-Phasen-Modell) und damit eine erhebliche Vereinfachung der Netzwerkgleichungen. Aus der analytischen Lösung des Ein-Phasen-Modells für überdämpfte Kontakte wird die Spannungsantwort paralleler Netzwerke in analytischer Form bestimmt. Als zentrale Größe bestimmt dabei der komplexe Strukturfaktor das Antwortverhalten paralleler Netzwerke.

Die Frage, wie die Flächenverteilung und die Kontaktparameter die Spannungsantwort paralleler Netzwerke beeinflussen, wird anhand spezieller Netzwerke beantwortet. Dabei wird einem konventionellen regulären Netzwerk ein unkonventionelles Netzwerk mit linear zunehmenden Schlaufenflächen (ein Gaußsches Netzwerk) gegenübergestellt und die theoretisch bestimmten Spannungsantworten beider Netzwerke werden detailliert beschrieben. Die Einflüsse der magnetischen Eigenfelder (Induktivitäten) und der Kontaktkapazitäten auf die Spannungsantwort untersuchen wir anhand des Gaußschen Netzwerks, für das die induktiven Netzwerkgleichungen für verschiedene Parameterbereiche numerisch gelöst wurden. Diese Diskussion wird durch das analytische Näherungsmodell ergänzt, mit dessen Hilfe die Spannungsantwort paralleler induktiver Netzwerke mit endlichen Kontaktkapazitäten näher beschrieben und erklärt wird. Die

analytische Näherung basiert auf einem linearen Netzwerkmodell und gibt insbesondere eine Erklärung der resonanten Phänomene in parallelen Netzwerken.

Die Analyse der theoretischen Modelle führt am Ende des Kapitels auf eine neuartige Klasse von parallelen Netzwerken. Es wird gezeigt, dass parallele Netzwerke mit bestimmten unkonventionellen Flächenverteilungen eine Spannungsantwort besitzen, die ausschließlich in der unmittelbaren Umgebung verschwindenden Magnetfeldes ein signifikantes Verhalten besitzt. Netzwerke mit einer solchen eindeutigen Spannungsantwort werden "Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter" (SQIF) genannt. Die Untersuchungen ergeben, dass SQIFs aufgrund ihres Aufbaus eine sehr große Toleranz gegen strukturelle Imperfektionen der Netzwerkgeometrie besitzen, die konventionelle reguläre Netzwerke nicht aufweisen.

2.1 Parallele Josephson-Kontakt-Netzwerke als supraleitende Quanten-Interferometer

Ein generisches eindimensionales paralleles Josephson-Kontakt-Netzwerk besteht aus der Parallelschaltung einer Anzahl N von Josephson-Kontakten. Die Verbindungen zwischen den einzelnen Kontakten sind supraleitend, so dass das Netzwerk $N-1$ supraleitende Schleifen enthält, die jeweils von zwei benachbarten Kontakten gebildet werden. Im allgemeinen Fall können die Konturen der Netzwerk-Schleifen beliebige Formen und die Schleifen unterschiedliche Orientierungen besitzen, so dass das Netzwerk physikalisch eine dreidimensionale Anordnung darstellt. Da das entscheidende Charakteristikum jedoch die parallele Verschaltung der Josephson-Kontakte ist, sind diese Netzwerke in Bezug auf die Verkopplung der Kontakte eindimensionale Anordnungen. In diesem Sinn werden im Folgenden die betrachteten Netzwerke eindimensional genannt.

Um die Diskussion zu vereinfachen, werden in diesem Kapitel vorwiegend parallele Netzwerke mit planaren Schleifen betrachtet. In diesem Fall liegen die Konturen jeder Schleife jeweils in einer Ebene, so dass jeder Schleife des Netzwerks ein Normalenvektor zugeordnet werden kann. Sind zudem alle Normalenvektoren gleich orientiert, so liegt das Netzwerk vollständig in einer Ebene und wird dann als planares Netzwerk bezeichnet. Da die Dünnschichttechnologie vielfältige Möglichkeiten bietet, Josephson-Kontakt-Netzwerke auf Wafern zuverlässig herzustellen, kommt planaren Netzwerken eine besondere Bedeutung zu. Die Ergebnisse lassen sich jedoch einfach auf den allgemeinen Fall beliebiger Geometrien übertragen, in denen die Schleifen auch nichtplanare Konturen besitzen können.

Für die Josephson-Kontakte werde im Folgenden angenommen, dass sie im RCSJ Modell beschreibbar sind, d.h. jeder Kontakt im Netzwerk wird durch eine Parallelschaltung einer Kapazität C_n , eines Widerstands R_n und eines idealen Josephson-Kontakts mit kritischem Strom $I_{c,n}$ beschrieben. Dabei werden a priori keine Einschränkungen

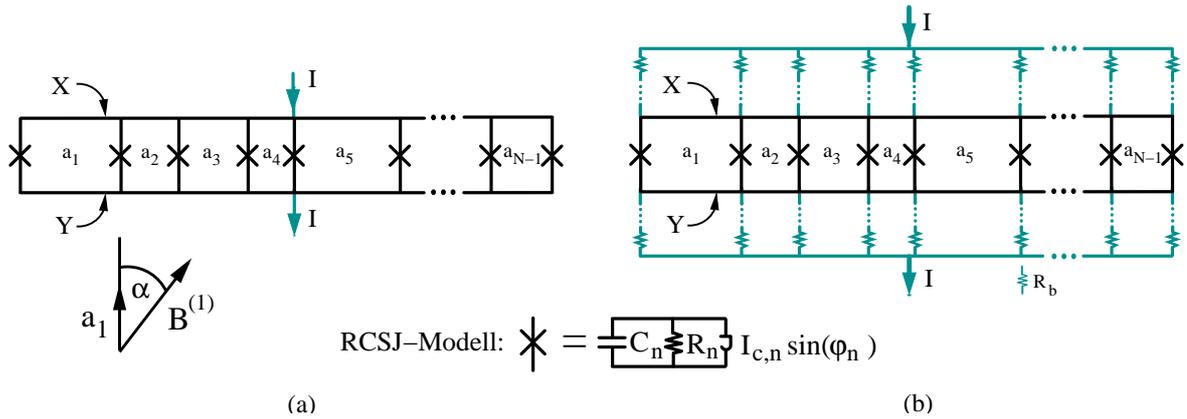


Abbildung 2.1: Ersatzschaltbilder zweier paralleler Josephson-Kontakt-Netzwerke mit jeweils N Kontakten, die durch Kreuze (\times) symbolisiert sind. Alle Kontakte sind im RCSJ-Modell beschreibbar und können jeweils unterschiedliche Parameterwerte für die Kapazitäten C_n , Widerstände R_n und kritischen Ströme $I_{c,n}$ besitzen. \mathbf{a}_m bezeichnet den Normalenvektor der m -ten Netzwerkschleufe mit Flächeninhalt $|\mathbf{a}_m|$. Die parallelen Netzwerke befinden sich in einem primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ und werden von einem Transportstrom I getrieben. Die Zuführung und Extraktion des Transportstroms I erfolgt in (a) durch zwei Knoten an den beiden Elektroden X und Y des Netzwerks und in (b) über Widerstände R_b .

gemacht, so dass jeder Kontakt eigene Parameterwerte besitzen kann und die Parameter von Kontakt zu Kontakt variieren können. Dies ermöglicht die notwendige Diskussion, welche Auswirkungen Parameterstreuungen auf das Verhalten von parallelen Netzwerken haben. Dies spielt insbesondere bei der Realisierung paralleler Netzwerke aus Hochtemperatur-Supraleitern eine bedeutende Rolle, da dort sehr große Parameterstreuungen auftreten können.

Schwerpunkt des folgenden Kapitels ist die Diskussion des Antwortverhaltens stromgetriebener paralleler Netzwerke auf externe (primäre) magnetische Felder. Der Begriff “stromgetrieben” bedeutet, dass das parallele Netzwerk über Zuführungsleitungen mit einer externen Stromquelle verbunden wird, d.h. dass das Netzwerk mit einem Transportstrom I bestromt werden kann. Unter geeignet gewählten Bedingungen können sich solche stromgetriebenen parallelen Netzwerke als Magnetfeld-Spannungs-Wandler für die hochpräzise Messung magnetischer Felder eignen. Je nachdem an welchen Knoten des Netzwerks der Transportstrom eingespeist und extrahiert wird, liegen unterschiedliche Randbedingungen für das Netzwerk vor. Da die Dynamik des Netzwerks und damit die Stromverteilung im Netzwerk bei gegebenen externen Bedingungen (wie Transportstrom und Magnetfeld) stark von den Randbedingungen abhängen [9, 60, 124], wird auf die Randbedingungen im Folgenden besonderen Wert gelegt.

Die Ersatzschaltbilder zweier planarer paralleler Netzwerke mit jeweils N Josephson-Kontakten zeigt Abbildung 2.1. In diesen Ersatzschaltbildern wird von der realen Geometrie abstrahiert und lediglich die Verschaltungen der Bauelemente (wie Josephson-Kontakte und Widerstände) sind dargestellt. Dabei sind alle *supraleitenden* Verbindungen schwarz und die *normalleitenden* Segmente grau eingefärbt. Die Josephson-

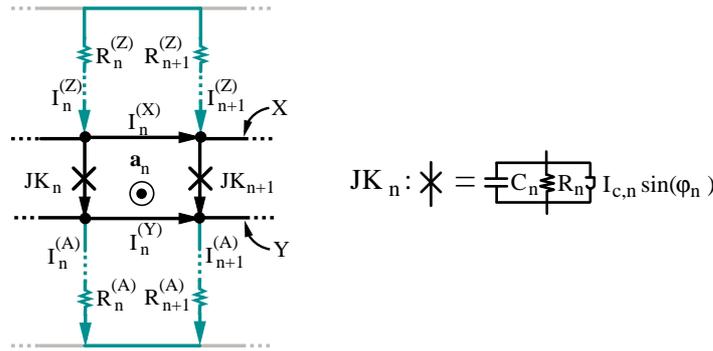


Abbildung 2.2: Ersatzschaltbild der n -ten Schlaufe des eindimensionalen parallelen Netzwerks. Die beiden benachbarten Josephson-Kontakte JK_n und JK_{n+1} sind supraleitend verbunden und bilden die n -te Schlaufe. Liegt die Schlaufe in einer Ebene, so ist \mathbf{a}_n der Normalenvektor und $|\mathbf{a}_n|$ der Flächeninhalt. Beide Kontakte sind im RCSJ-Modell beschreibbar und können jeweils unterschiedliche Parameterwerte für die Kapazitäten C_k , Widerstände R_k und kritischen Ströme $I_{c,k}$ ($k = n, n + 1$) besitzen. Die Anteile $I_k^{(Z)}$ und $I_k^{(A)}$ ($k = n, n + 1$) des Transportstroms werden durch die Widerstände $R_k^{(Z)}$ bzw. $R_k^{(A)}$ über die Knoten (\bullet) dem Netzwerk zugeführt bzw. aus dem Netzwerk extrahiert. Die Querströme in den supraleitenden Elektroden X und Y sind durch $I_n^{(X)}$ und $I_n^{(Y)}$ bezeichnet. Die Richtungen der Ströme sind durch Pfeile dargestellt.

Kontakte sind durch Kreuze (\times) symbolisiert und die Vektoren \mathbf{a}_m bezeichnen die Normalenvektoren der Netzwerkschleifen mit Flächeninhalt $|\mathbf{a}_m|$. Die Flächenverteilung $\{|\mathbf{a}_m|, 1 \leq m \leq N - 1\}$ im Netzwerk und die Parameterwerte der Josephson-Kontakte können beliebig gewählt werden.

Die beiden dargestellten Netzwerke in Abb. 2.1 unterscheiden sich durch die Art der Transportstrom-Einspeisung. In (a) wird der treibende Strom I in einen einzigen Knoten an der oberen Elektrode X zugeführt und aus einem einzigen Knoten an der unteren Elektrode Y wieder extrahiert. Im Fall (b) dagegen erfolgt die Stromzufuhr über einen Kamm von Zuleitungen, die über Widerstände R_b in gemeinsame Elektroden münden. Die Widerstände können lokal in jeder einzelnen Zuleitung oder in Form sogenannter bus-bar Widerstände realisiert werden. Im zweiten Fall erfolgt die Transportstromversorgung des parallelen Netzwerks über normaleitende Schichten, die den treibenden Strom I gemäß ihrer Widerstandsbelegung auf die Knoten des Netzwerks verteilen. Die Größe jeder dieser Widerstände kann prinzipiell beliebig gewählt werden, so dass durch eine geeignete Wahl der Transportstrom I auf unterschiedliche Weise dem Netzwerk zugeführt bzw. aus dem Netzwerk extrahiert werden kann. Ist die Streuung der Widerstände R_b jedoch gering, so ermöglicht dies eine homogene Stromzufuhr in das Netzwerk. Dadurch werden die Einflüsse der magnetischen Eigenfelder minimiert, die von einer Transportstrom-Umverteilung im Netzwerk erzeugt werden (siehe Abschnitt 2.2.3). In den experimentellen Schaltungen aus Kapitel 4 ist die Transportstromzufuhr durch kammförmige Zuleitungen gemäß Fall (b) realisiert.

Zur Einführung der verwendeten Notation zeigt Abb. 2.2 das Ersatzschaltbild der n -ten Schlaufe des parallelen Netzwerks. Die n -te Schlaufe wird durch die beiden

Josephson-Kontakte JK_n und JK_{n+1} gebildet, die durch supraleitende Elektroden X und Y verbunden sind. Die supraleitenden Bereiche sind schwarz und die normalleitenden Bereiche wieder grau gefärbt. Liegt die Schlaufe in einer Ebene so ist \mathbf{a}_n der Normalenvektor senkrecht zur Schlaufenfläche und $|\mathbf{a}_n|$ der Flächeninhalt der Schlaufe. Für den Fall einer beliebigen Schlaufengeometrie bezeichne \mathcal{S}_n die Fläche und \mathcal{C}_n die Kontur der n -ten Schlaufe. Die Teilströme im Netzwerk, die in den Segmenten von X und Y der n -ten Masche fließen, werden mit $I_k^{(X)}$ bzw. $I_k^{(Y)}$ ($k = n, n + 1$) bezeichnet. Die Ströme $I_k^{(Z)}$ bzw. $I_k^{(A)}$ ($k = n, n + 1$) sind die Ströme in den Zu- und Ableitungen, die durch die Widerstände $R_k^{(Z)}$ bzw. $R_k^{(A)}$ fließen. Die Schlaufen, die die Widerstände $R_k^{(Z)}$ und $R_{k+1}^{(Z)}$ bzw. $R_k^{(A)}$ und $R_{k+1}^{(A)}$ bilden, werden im Folgenden als äußere Maschen bezeichnet. Die supraleitenden Schlaufen mit den Kontakten werden dagegen innere Schlaufen genannt. Die positiven Stromrichtungen sind durch Pfeile dargestellt. Anhand der in Abb. 2.2 eingeführten Notation werden nun die Gleichungen zur Beschreibung eines eindimensionalen parallelen Josephson-Kontakt-Netzwerks diskutiert.

2.2 Grundgleichungen zur Beschreibung der Dynamik von Josephson-Kontakt-Netzwerken

In diesem Abschnitt werden die Gleichungen diskutiert, mit deren Hilfe die elektromagnetischen Eigenschaften von Josephson-Kontakt-Netzwerken beschrieben werden können. Dabei wird insbesondere auf eindimensionale parallele Netzwerke eingegangen, und für diese Netzwerke werden alle relevanten Gleichungen hergeleitet und deren Gültigkeitsbereiche diskutiert. Dabei kann die Geometrie des parallelen Netzwerks, d.h. die geometrische Gestalt der Schlaufen beliebig gewählt sein. Die Beschränkung auf planare Netzwerke mit einer rechteckförmigen Schlaufengeometrie ist nur im Unterabschnitt 2.2.6 zur expliziten Berechnung der Induktionskoeffizienten von Bedeutung. Die verwendete Notation wurde in Abb. 2.2 eingeführt und erläutert.

2.2.1 Das RCSJ-Modell

Der n -te Josephson-Kontakt im Netzwerk besitzt im Gültigkeitsbereich des RCSJ-Modells individuelle Parameter C_n , R_n und $I_{c,n}$ und wird durch die eichinvariante Phasendifferenz φ_n beschrieben. Hier bezeichnet C_n die Kapazität, R_n den Widerstand und $I_{c,n}$ den kritischen Strom des n -ten Kontakts. Die insgesamt N eichinvarianten Phasendifferenzen $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)\}$ sind die dynamischen Variablen, mit denen die Dynamik des parallelen Netzwerks aus N Kontakten beschrieben wird. Der Gesamtstrom I_n durch den n -ten Kontakt setzt sich nach (1.4) aus einem Verschiebungsstrom, einem ohmschen Strom und einem Suprastrom zusammen

$$I_n(\varphi_n(t)) = \frac{\hbar C_n}{2e} \partial_t^2 \varphi_n(t) + \frac{\hbar}{2e R_n} \partial_t \varphi_n(t) + I_{c,n} \sin \varphi_n(t). \quad (2.1)$$

Da das Netzwerk aus parallelgeschalteten Josephson-Kontakten besteht, ist es zweckmäßig, mit

$$I_c = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I_{c,n}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{R_n}, \quad C = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N C_n \quad (2.2)$$

mittlere Parameterwerte I_c , R und C einzuführen. Dabei bezeichnet I_c den mittleren kritischen Strom der Kontakte, $1/R$ den mittleren reziproken Widerstand und C die mittlere Kapazität aller Kontakte im Netzwerk. Mit Hilfe dieser mittleren Parameter werde nun mit

$$t_J = \frac{\hbar}{2e I_c R}, \quad \tau = \frac{t}{t_J}, \quad J_N = \frac{I}{N I_c}, \quad \beta_C = \frac{2\pi}{\Phi_0} I_c R^2 C \quad (2.3)$$

die Josephson-Zeit t_J , die dimensionslose Zeit τ , der normierte Transportstrom pro Kontakt J_N und der effektive McCumber-Parameter β_C definiert. Wird nun die Zeit t in Einheiten der Josephson-Zeit t_J gemessen, so folgt aus (2.1)-(2.3) die dimensionslose RCSJ-Gleichung

$$\frac{I_n(\varphi_n(\tau))}{I_c} = \beta_C \frac{C_n}{C} \partial_\tau^2 \varphi_n(\tau) + \frac{R}{R_n} \partial_\tau \varphi_n(\tau) + \frac{I_{c,n}}{I_c} \sin \varphi_n(\tau), \quad (n = 1, \dots, N). \quad (2.4)$$

Alle RCSJ-Gleichungen in (2.4) sind bezüglich der gemeinsamen dimensionslosen Zeit $\tau = t/t_J$ formuliert, so dass die charakteristische Frequenz des Netzwerks durch $\nu_J = 1/t_J$ gegeben ist. Die Zeit $t_J = \hbar/(2e I_c R)$ bestimmt die Zeitskala, auf der sich die Ströme und Spannungen im Netzwerk zeitlich ändern und wird ausschließlich vom Produkt der Mittelwerte I_c und R bestimmt. Im Folgenden wird Gleichung (2.4) als Strom-Phase Beziehung zur Beschreibung der Kontaktdynamik verwendet.

2.2.2 Stromerhaltung

In stromgetriebenen parallelen Netzwerken, die N Josephson-Kontakte enthalten, existieren N Josephson-Ströme I_n sowie in der speziell gewählten Art der Transportstromzufuhr jeweils N Ströme $I_n^{(Z)}$ bzw. $I_n^{(A)}$ in den Zu- und Ableitungen. Zur Vereinfachung werden diese Ströme in den Vektoren $\mathbf{I}_N = (I_1, \dots, I_N)^T$, $\mathbf{I}_N^{(Z)} = (I_1^{(Z)}, \dots, I_N^{(Z)})^T$ und $\mathbf{I}_N^{(A)} = (I_1^{(A)}, \dots, I_N^{(A)})^T$ zusammengefasst.

Der Gesamtstrom I , der durch das Netzwerk fließt, ist erhalten, d.h. I ergibt sich aus der Summe der jeweiligen Ströme

$$I = \sum_{n=1}^N I_n, \quad I = \sum_{n=1}^N I_n^{(Z)}, \quad I = \sum_{n=1}^N I_n^{(A)}. \quad (2.5)$$

Da nach dem RCSJ-Modell der Kontaktstrom I_n durch die eichinvariante Phasendifferenz φ_n am n -ten Kontakt festgelegt ist, bedeutet insbesondere die erste Gleichung in (2.5), dass der Gesamtstrom I eine *phasen-sensitive* [153] Superposition einer mesosko-

pischen Anzahl von Josephson-Strömen $I_n(\varphi_n)$ ist. Die Interferenzeffekte in parallelen Josephson-Kontakt-Netzwerken sind eine Folge dieser Superposition in der Anwesenheit von externen Magnetfeldern (s. Abschn. 2.4). Ferner folgt aus der ersten Gleichung in (2.5), dass das System $N-1$ Freiheitsgrade besitzt, da ein Josephson-Strom (im Folgenden I_N) durch die restlichen $N-1$ Ströme ausgedrückt werden kann. Bezeichne $\mathbf{I}_{N-1} = (I_1, \dots, I_{N-1})^T$ den Vektor, der die $N-1$ Freiheitsgrade beschreibt, so folgt aus (2.5)

$$\mathbf{I}_N = I (\delta_{n,N})_{1 \leq n \leq N} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{I}_{N-1}, \quad (2.6)$$

wobei für die Koeffizienten der $N \times (N-1)$ Matrix \mathbf{P} gilt: $P_{i,j} = \delta_{i,j}$ für $1 \leq i, j \leq N-1$ und $P_{N,j} = -1$ für $1 \leq j \leq N-1$.

Neben der Gesamtstromerhaltung (2.5) gilt zudem Stromerhaltung in jedem Knoten des Netzwerks. Speziell für die in Abbildung 2.2 durch das Symbol (\bullet) dargestellten Knoten lauten die Kirchhoffschen Knotenregeln für $n = 1, \dots, N$

$$I_{n-1}^{(X)} - I_n^{(X)} + I_n^{(Z)} - I_n = 0 \quad \text{und} \quad I_{n-1}^{(Y)} - I_n^{(Y)} - I_n^{(A)} + I_n = 0, \quad (2.7)$$

wobei $I_0^{(X)} = I_N^{(X)} = I_0^{(Y)} = I_N^{(Y)} = 0$ gesetzt wurde. Dies sind $2N$ Gleichungen, von denen wegen (2.5) nur $2N-2$ linear unabhängig sind. Werden die zwei Gleichungen für $n = N$ in (2.7) vernachlässigt, so lassen sich die verbleibenden $2N-2$ linear unabhängigen Gleichungen nach $\mathbf{I}_{N-1}^{(X)} = (I_1^{(X)}, \dots, I_{N-1}^{(X)})^T$ und $\mathbf{I}_{N-1}^{(Y)} = (I_1^{(Y)}, \dots, I_{N-1}^{(Y)})^T$ auflösen

$$\mathbf{I}_{N-1}^{(X)} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{I}_{N-1} - \tilde{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{I}_N^{(Z)} \quad \text{und} \quad \mathbf{I}_{N-1}^{(Y)} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{I}_{N-1} + \tilde{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{I}_N^{(A)}, \quad (2.8)$$

wobei die Koeffizienten der Matrizen \mathbf{K} und $\tilde{\mathbf{K}}$ für $1 \leq n, m \leq N-1$ durch $K_{n,m} = \tilde{K}_{n,m} = -\delta_{m \leq n}$ und für $m = N$ durch $\tilde{K}_{n,N} = 0$ gegeben sind. Damit sind die Querströme $\mathbf{I}_{N-1}^{(X)}$ und $\mathbf{I}_{N-1}^{(Y)}$, die in den beiden Elektroden X und Y fließen durch die Kontakt-Ströme \mathbf{I}_{N-1} und die Transportströme $\mathbf{I}_{N-1}^{(Z)}$ und $\mathbf{I}_{N-1}^{(A)}$ bestimmt. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass die Ströme $\mathbf{I}_N^{(A)}$ und $\mathbf{I}_N^{(Z)}$ durch die Wahl der Randbedingungen derart festgelegt werden können, dass sie nur noch von der Verteilung der Widerstände $R_n^{(A)}$ bzw. $R_n^{(Z)}$ und vom Gesamtstrom I abhängen. Für diesen Fall werden von (2.6) und (2.8) alle Ströme im Netzwerk durch die $N-1$ Freiheitsgrade \mathbf{I}_{N-1} festgelegt.

2.2.3 Faradaysches Induktionsgesetz für äußere Schlaufen, Randbedingungen

Die Stromverteilung im Netzwerk hängt stark davon ab, an welchen Knoten der Transportstrom I zugeführt und über welche Knoten I wieder extrahiert wird. Je nach Art der Stromzufuhr (und anderer externer Bedingungen) stellen sich im Netzwerk unterschiedliche Stromverteilungen ein, die verschiedene magnetische Felder erzeugen. Da diese Magnetfelder von den internen Netzwerk-Strömen erzeugt werden, werden sie im Folgenden als magnetisches Eigenfeld oder als sekundäres Magnetfeld bezeichnet.

Da das dynamische Verhalten der Netzwerke stark von diesen sekundären Magnetfeldern abhängt, spielt auf diese Weise die Art der Stromzufuhr eine große Rolle für das Antwortverhalten von parallelen Josephson-Kontakt-Netzwerken [9, 60, 124]. In diesem Abschnitt werden deshalb die Randbedingungen der Stromzufuhr diskutiert. Insbesondere werden die Bedingungen erläutert, unter denen eine homogene Zuführung des Transportstromes I realisiert werden kann, die die Dynamik des supraleitenden Josephson-Kontakt-Netzwerks nicht störend beeinflusst.

Wird das Faradaysche Induktionsgesetz entlang des geschlossenen Weges der n -ten äußeren Masche integriert, so ergibt sich mit der in Abbildung 2.2 eingeführten Notation

$$\frac{R_n^{(Z)}}{R} \frac{I_n^{(Z)}}{I_c} - \frac{R_{n+1}^{(Z)}}{R} \frac{I_{n+1}^{(Z)}}{I_c} = -\frac{2\pi}{\Phi_0} \partial_\tau \Phi_n^{(Z)}, \quad (2.9)$$

wobei $\partial_\tau \Phi_n^{(Z)}$ die Ableitung des magnetischen Flusses durch die n -ten äußere Masche nach der dimensionslosen Zeit τ ist. Nach Gleichung (2.9) ist die Summe der Spannungen entlang der äußeren Masche gleich der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses $\Phi_n^{(Z)}$ durch die Masche. Bezeichne $L_n^{(Z)}$ die Induktivität der n -ten äußeren Schlaufe, und $J_n^{(Z)}$ einen zeitlich oszillierenden Kreisstrom, so gilt $\partial_\tau \Phi_n^{(Z)} = L_n^{(Z)} \partial_\tau J_n^{(Z)}$. Da die Amplituden der zeitlich oszillierenden Ströme im Netzwerk von der Größenordnung des kritischen Stroms I_c sind und ihre charakteristische Kreisfrequenz durch $1/t_J$ gegeben ist, gilt $\partial_\tau J_n^{(Z)} \lesssim I_c$. Damit kann die rechte Seite von (2.9) mit $\partial_\tau \Phi_n^{(Z)} \lesssim L_n^{(Z)} I_c$ abgeschätzt werden.

Betrachten wir nun den Grenzfall

$$R_n^{(Z)}/R \gg \frac{2\pi}{\Phi_0} L_n^{(Z)} I_c, \quad (2.10)$$

so kann der Term $\partial_\tau \Phi_n^{(Z)}$ vernachlässigt werden, und es folgt aus (2.9) $I_n^{(Z)}/I_{n+1}^{(Z)} = R_{n+1}^{(Z)}/R_n^{(Z)}$. Wird mit $R^{(Z)} = N \left(\sum_{n=1}^N 1/R_n^{(Z)} \right)^{-1}$ der reziproke Mittelwert der Widerstände in den Zuleitungen eingeführt, so folgt aus letzterem unter Verwendung der Gesamtstromerhaltung (2.5) die Relation $I_n^{(Z)} = I/N R^{(Z)}/R_n^{(Z)}$ für alle $1 \leq n \leq N$, d.h. es gilt

$$\mathbf{I}_N^{(Z)} = \frac{I}{N} R^{(Z)} \left(\frac{1}{R_1^{(Z)}}, \dots, \frac{1}{R_N^{(Z)}} \right)^T. \quad (2.11)$$

In diesem Grenzfall großer Zuführungs-Widerstände sind die Ströme $I_n^{(Z)}$ zeitlich konstant und verteilen sich gemäß (2.11) auf die Knoten der Elektrode X . Analog zu obiger Betrachtung folgt für den Grenzfall $R_n^{(A)}/R \gg \frac{2\pi}{\Phi_0} L_n^{(A)} I_c$ mit $R^{(A)} = N \left(\sum_{n=1}^N 1/R_n^{(A)} \right)^{-1}$ als reziproker Mittelwert der Abführungs-Widerstände

$$\mathbf{I}_N^{(A)} = \frac{I}{N} R^{(A)} \left(\frac{1}{R_1^{(A)}}, \dots, \frac{1}{R_N^{(A)}} \right)^T. \quad (2.12)$$

Durch geeignete Wahl der Widerstände $R_n^{(Z)}$ und $R_n^{(A)}$ kann der Transportstrom auf verschiedene Art und Weise dem Netzwerk zugeführt bzw. aus dem Netzwerk extrahiert werden. Die ausschließliche Stromzufuhr des Transportstroms I in den k -ten Netzwerkknotten wie in Abb. 2.1 (a) kann durch den Grenzfall $R_{n \neq k}^{(Z)} \rightarrow \infty$ in (2.11) realisiert werden. Dann gilt für die Zuführungsströme $I_n^{(Z)} = I \delta_{n,k}$. Eine homogene Transportstrom-Einspeisung dagegen, wird durch die Wahl gleicher Widerstände $R_n^{(Z)} = R^{(Z)}$ erzielt, so dass aus (2.11) $\mathbf{I}_N^{(Z)} = I/N (1, \dots, 1)^T$ folgt. Im betrachteten Grenzfall großer Widerstände im Sinne von (2.10) sind insbesondere die Ströme $\mathbf{I}_N^{(Z)}$ und $\mathbf{I}_N^{(A)}$ zeitlich konstant und die Dynamik des supraleitenden Netzwerks wird durch die Anwesenheit der Widerstände $R_n^{(Z)}$ und $R_n^{(A)}$ nur gering beeinflusst. Die Verteilung der Widerstände $R_n^{(Z)}$ und $R_n^{(A)}$ bestimmt in diesem Fall nur die Verteilung des Transportstroms I auf die Netzwerkknotten in den Elektroden X und Y , sie gehen jedoch nicht explizit in die Netzwerkgleichungen zur Beschreibung der Netzwerkdynamik ein (s. Abschn. 2.3.2).

Gilt für die Widerstände $R_n^{(Z)}/R \simeq \frac{2\pi}{\Phi_0} L_n^{(Z)} I_c$, so kann der Induktionsterm $\partial_\tau \Phi_n^{(Z)}$ in (2.9) nicht vernachlässigt werden. In diesem Fall variieren die Ströme $I_n^{(Z)}$ zeitlich und die Gleichungen (2.11) und (2.12) gelten nur für die zeitlichen Mittelwerte $\langle \mathbf{I}_N^{(Z)} \rangle = \left(\langle I_1^{(Z)} \rangle, \dots, \langle I_N^{(Z)} \rangle \right)^T$, da der zeitliche Mittelwert von $\partial_\tau \Phi_n^{(Z)}$ verschwindet. In diesem Fall muss das Faradaysche Induktionsgesetz in der Form (2.9) beachtet werden und die Verteilung der Widerstände $R_n^{(Z)}$ und $R_n^{(A)}$ geht dann explizit in die Gleichungen zur Beschreibung des Netzwerks ein. Für eine Diskussion dieses Grenzfalles sei auf [63] verwiesen. Da an dieser Stelle die nichtlineare Dynamik des supraleitenden Josephson-Kontakt-Netzwerks an sich (ohne den zusätzlichen Einfluss der äußeren Maschen) im Vordergrund stehen soll, wird dieser Grenzfall hier nicht weiter vertieft.

2.2.4 Eindeutigkeit der quantenmechanischen Paar-Wellenfunktion, Flussquantisierung

Die Josephson-Kontakte im Netzwerk werden nach (1.1) durch die eichinvarianten Phasendifferenzen

$$\varphi(\tau) = \theta_1(\tau) - \theta_2(\tau) + \frac{2e}{\hbar} \int_2^1 \langle \mathbf{A}(\tau), ds \rangle$$

der makroskopischen BCS Paar-Wellenfunktion der Supraleiter zu beiden Seiten 1 und 2 des Josephson-Kontaktes beschrieben. Betrachten wir nun die n -te innere Schlaufe des Netzwerks, die aus den beiden Josephson-Kontakten mit den Phasendifferenzen $\varphi_n(\tau)$ und $\varphi_{n+1}(\tau)$ besteht (s. Abb. 2.2). Die beiden Kontakte in der Schlaufe sind durch supraleitende Leitungen verbunden, in denen für die Geschwindigkeit \mathbf{v}_s der Supraflüssigkeit die Relation $2m_e \mathbf{v}_s = \hbar \nabla \theta + 2e \mathbf{A}$ gilt [29], wobei m_e die Elektron-Masse und $e > 0$ die Elementarladung bezeichnet.¹ Sind die Ausdehnungen der supraleitenden

¹Es wird hier angenommen, dass die effektive Masse m^* der Cooper-Paare exakt durch die doppelte nackte Masse m_e eines Elektrons gegeben ist, d.h. $m^* = 2m_e$. Die Ladung e^* eines Cooper-Paars ist mit der Konvention $e > 0$ durch $e^* = -2e$ gegeben [105, 150].

Verbindungen groß gegen die magnetische (Londonsche) Eindringtiefe λ_L , so existiert in den Supraleitern ein Pfad, entlang dem \mathbf{v}_s verschwindend klein ist, so dass $\hbar\nabla\theta = -2e\mathbf{A}$ gilt. Wählt man nun unter diesen Voraussetzungen einen geschlossenen Pfad, der die n -te Schlaufe einmal umläuft, so ergibt sich

$$\varphi_{n+1}(\tau) - \varphi_n(\tau) = \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi_n(\tau) \bmod 2\pi, \quad (2.13)$$

wobei $\Phi_n(\tau)$ der im Allgemeinen zeitabhängige magnetische Fluss durch die betrachtete Schlaufe ist. Gleichung (2.13) ist die sogenannte Flussquantisierungsbedingung der n -ten Schlaufe und sagt aus, dass die eichinvarianten Phasendifferenzen φ_n benachbarter Josephson-Kontakte nach (2.13) mit dem magnetischen Fluss Φ_n durch die Schlaufe verknüpft sind. Sie ist Ausdruck der Existenz eines makroskopischen Quantenzustandes, in dem eine makroskopische Anzahl von Elektronen im Supraleiter ‘‘kondensiert’’ ist und findet ihren Ursprung in einem theoretischen Argument, das zuerst von Onsager [123] im Kontext der quantisierten Zirkulation in suprafluiden ${}^4\text{He}$ formuliert wurde. Die makroskopische Wellenfunktion von Teilchen entlang eines geschlossenen Pfades besitzt notwendigerweise eine ganzzahlige Wellenlängenanzahl entlang dieses Pfades. Aus diesem Grund ist der elektrische Strom, der in einem geschlossenen supraleitenden Ring fließt, quantisiert, woraus die Quantisierung des magnetischen Flusses folgt, der diesen Ring durchsetzt [27, 36, 106]. Da die supraleitenden Maschen des Netzwerks durch Bereiche schwacher Kopplung (die beiden Josephson-Kontakte) unterbrochen sind, wird diese strenge Quantisierung abgeschwächt und es verbleibt die Bedingung (2.13).

Die Flussquantisierungsbedingung (2.13) gilt für alle $N-1$ Schleifen des Netzwerks. Werden im Vektor $\boldsymbol{\varphi}(\tau) = (\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_N(\tau))^T$ alle eichinvarianten Phasendifferenzen zusammengefasst, so folgt aus (2.13)

$$\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\tau) = \frac{2\pi}{\Phi_0} \boldsymbol{\Phi}(\tau), \quad (2.14)$$

wobei mit $\boldsymbol{\Phi}(\tau) = (\Phi_1(\tau), \dots, \Phi_{N-1}(\tau))^T$ der Vektor der magnetischen Flüsse eingeführt wird. In (2.14) beschreibt die Netzwerkmatrix \mathbf{N} die Verteilung der Josephson-Kontakte innerhalb des Netzwerks. Im Fall des eindimensionalen Netzwerks ist \mathbf{N} eine di-diagonale $(N-1) \times N$ Matrix, deren nichtverschwindende Elemente $\mathbf{N}_{n,m}$ nach (2.13) durch $\mathbf{N}_{n,n} = -1$ und $\mathbf{N}_{n,n+1} = 1$ gegeben sind. Der magnetische Fluss Φ_n ergibt sich durch Integration des Magnetfeldes \mathbf{B} über die Fläche \mathcal{S}_n der n -ten Schlaufe

$$\Phi_n(\tau) = \int_{\mathcal{S}_n} \langle \mathbf{B}, d\mathbf{a}_n \rangle. \quad (2.15)$$

Im allgemeinen Fall kann sich dabei sowohl das Magnetfeld \mathbf{B} als auch die Orientierung des Netzwerks, d.h. \mathbf{a}_n , zeitlich ändern, so dass auch $\Phi_n(\tau)$ zeitabhängig ist. In (2.15) kann die Schlaufe mit Fläche \mathcal{S}_n eine beliebige Gestalt besitzen.

Das Magnetfeld \mathbf{B} am Ort des Netzwerks ist im allgemeinen Fall eine Superposition

des primären Magnetfeldes $\mathbf{B}^{(1)}$ und des sekundären Magnetfeldes $\mathbf{B}^{(2)}$, d.h. es gilt $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)}$. Das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ ist dabei das externe Magnetfeld, das gemessen werden soll, bzw. $\mathbf{B}^{(1)}$ wird von Strömen erzeugt, die außerhalb des Netzwerks fließen und extern kontrolliert werden können. Das sekundäre Feld $\mathbf{B}^{(2)}$ wird dagegen von den im Netzwerk fließenden Strömen erzeugt. Diese Ströme können als Superposition des sich im Netzwerk verteilenden Transportstroms und der im System fließenden Abschirmströme aufgefasst werden. Die Abschirmströme werden dabei vom Magnetfeld \mathbf{B} induziert. Dieses Eigenfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ limitiert die Empfindlichkeit realisierbarer Josephson-Kontakt-Netzwerke bezüglich der externen Magnetfelder. Der Einfluss von $\mathbf{B}^{(2)}$ auf die für Magnetfeldmessungen wichtigen Spannungsantwortfunktion der Netzwerke wird in Abschnitt 2.4.4 ausführlich diskutiert.

Analog dazu kann der magnetische Fluss Φ_n in (2.15) in einen primären Fluss $\Phi_n^{(1)} = \int_{\mathcal{S}_n} \langle \mathbf{B}^{(1)}, d\mathbf{a}_n \rangle$ und einen sekundären Fluss $\Phi_n^{(2)} = \int_{\mathcal{S}_n} \langle \mathbf{B}^{(2)}, d\mathbf{a}_n \rangle$ aufgeteilt werden. In vielen Fällen variiert das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ nur gering über die Ausdehnung des Netzwerks, da es von weit entfernten externen Strömen erzeugt wird, und die Ausdehnung typischer Netzwerke kleiner 10^{-2}m ist. In diesem Fall homogener primärer Magnetfelder, können die primären magnetischen Flüsse durch einfache Skalarprodukte

$$\boldsymbol{\Phi}^{(1)} = (\langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_{N-1} \rangle)^T \quad (2.16)$$

berechnet werden. Hier wird angenommen, dass die Netzwerkschlaufen planar sind, d.h. dass die Kontur jeder Schlaufe in einer Ebene liegt, so dass mit \mathbf{a}_k der Normalenvektor der k -ten Schlaufe mit Flächeninhalt $|\mathbf{a}_k|$ definiert werden kann. Für den Fall, dass das primäre Magnetfeld über die Ausdehnung des Netzwerks variiert, müssen die magnetischen Flüsse mit Hilfe von (2.15) durch Integration über die Schlaufenflächen \mathcal{S}_n berechnet werden. Das sekundäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ ist immer inhomogen und variiert örtlich über das Netzwerk, da es lokal von der Netzwerk-Stromverteilung erzeugt wird. Deshalb müssen die sekundären magnetischen Flüsse $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}$ immer durch explizite Integration von $\mathbf{B}^{(2)}$ über die Schlaufenflächen bestimmt werden. Die Bestimmung von $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}$ in Abhängigkeit von der Stromverteilung im Netzwerk wird im folgenden Abschnitt diskutiert.

2.2.5 Ampèresches Durchflutungsgesetz, Induktionsmatrizen

Der in die Flussquantisierungsbedingung für die n -te Schlaufe (2.13) eingehende magnetische Gesamtfluss Φ_n setzt sich zusammen aus dem primären und sekundären magnetischen Fluss $\Phi_n = \Phi_n^{(1)} + \Phi_n^{(2)}$. In diesem Abschnitt wird nun die Relation zwischen den sekundären Flüssen $\boldsymbol{\Phi}^{(2)} = (\Phi_1^{(2)}, \dots, \Phi_{N-1}^{(2)})^T$ und den Netzwerkströmen diskutiert, die die magnetischen Flüsse $\Phi_n^{(2)}$ induzieren.² Diese Relationen beschreiben die Biot-

²Die Netzwerkstromverteilung ist dabei eine Superposition des sich im Netzwerk verteilenden Transportstromes I und den Abschirmströmen, die in den Schlaufen fließen.

Savart-artigen induktiven Kopplungen zwischen den im Netzwerk fließenden Strömen [37, 63, 126].

Die Ströme, die durch das Netzwerk fließen, sind zeitlich variierende Wechselströme, die eine charakteristische Frequenz ν mit $2\pi\nu = 1/t_J$ besitzen. Wir nehmen im Folgenden an, dass die räumlichen Ausdehnungen des Netzwerks klein gegen die Wellenlänge c/ν dieser charakteristischen Frequenz ν des Systems sind. In diesem Fall können die Retardierungseffekte vernachlässigt werden, deren Ursache in der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit c elektromagnetischer Felder liegen. Die charakteristische Frequenz ν liegt dabei in der Größenordnung einiger 10 GHz, so dass die Abmessungen des Netzwerks kleiner als 10^{-2} m angenommen werden. In diesem Fall kann der Verschiebungsstrom im Ampèreschen Durchflutungsgesetz gegen die Stromdichte vernachlässigt werden, so dass in den Maxwell-Gleichungen die Relationen für die magnetischen Felder dieselbe Struktur wie in der Magnetostatik besitzen. In dieser sogenannten quasistationären Näherung gilt in Coulomb-Eichung für das Vektorpotential $\mathbf{A}^{(2)}$ des sekundären Magnetfeldes $\mathbf{B}^{(2)} = \text{rot}\mathbf{A}^{(2)}$ die Poisson-Gleichung $\Delta\mathbf{A}^{(2)} = -\mu_0\mathbf{j}$, deren Lösung durch

$$\mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (2.17)$$

gegeben ist. In Gleichung (2.17) bezeichnet $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ die Stromdichte im Netzwerk in Abhängigkeit vom Ort \mathbf{r}' . Nach dem Satz von Stokes ergibt sich aus (2.17) für den von der Stromdichte \mathbf{j} im Netzwerk erzeugten sekundären magnetischen Fluss in der n -ten Masche $\Phi_n^{(2)} = \oint_{\mathcal{C}_n} \langle \mathbf{A}^{(2)}, d\mathbf{s} \rangle$, wobei \mathcal{C}_n den Rand der Schlaufe bezeichne. Bei gegebener Stromdichteverteilung über die Leitervolumen hängen das Vektorpotential $\mathbf{A}^{(2)}$, und damit alle sekundären magnetischen Flüsse $\Phi_n^{(2)}$ nur noch von den Gesamtströmen I_n , $I_n^{(X)}$, $I_n^{(Y)}$, $I_n^{(Z)}$ und $I_n^{(A)}$ in der Anordnung ab. Dabei werden die Stromdichte \mathbf{j} und das sekundäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ zu den Strömen I_n , $I_n^{(X)}$, $I_n^{(Y)}$, $I_n^{(Z)}$ proportional. Führen wir mit $\mathbf{L}^{(J)}$, $\mathbf{L}^{(X)}$, $\mathbf{L}^{(Y)}$, $\mathbf{L}^{(Z)}$ und $\mathbf{L}^{(A)}$ die Induktionsmatrizen ein, die diese Proportionalität zwischen den sekundären magnetischen Flüssen $\Phi_n^{(2)}$ und den Strömen \mathbf{I}_N , $\mathbf{I}_{N-1}^{(X)}$, $\mathbf{I}_{N-1}^{(Y)}$, $\mathbf{I}_{N-1}^{(Z)}$ bzw. $\mathbf{I}_N^{(A)}$ beschreiben, so folgt

$$\Phi^{(2)} = \mathbf{L}^{(J)} \cdot \mathbf{I}_N + \mathbf{L}^{(X)} \cdot \mathbf{I}_{N-1}^{(X)} + \mathbf{L}^{(Y)} \cdot \mathbf{I}_{N-1}^{(Y)} + \mathbf{L}^{(Z)} \cdot \mathbf{I}_{N-1}^{(Z)} + \mathbf{L}^{(A)} \cdot \mathbf{I}_N^{(A)}, \quad (2.18)$$

wobei in (2.18) die vektorielle Schreibweise mit $\Phi^{(2)} = \left(\Phi_1^{(2)}, \dots, \Phi_{N-1}^{(2)} \right)^T$ verwendet wird. Die Diagonalelemente der Induktionsmatrizen $\mathbf{L}^{(X)}$, $\mathbf{L}^{(Y)}$ und $\mathbf{L}^{(J)}$ sowie die Nebendiagonalelemente $\mathbf{L}_{m,m+1}^{(J)}$ der Matrix $\mathbf{L}^{(J)}$ besitzen eine besondere Bedeutung. Sie beschreiben, welchen magnetischen Fluss ein Stromelement in den direkt angrenzenden Schleifen induziert. So beschreibt z.B. der Induktionskoeffizient $\mathbf{L}_{m,m}^{(J)}$ (der Koeffizient $\mathbf{L}_{m,m+1}^{(J)}$) den induktiven Einfluss des m -ten Josephson-Stromes $I_m^{(J)}$ (des $m+1$ -ten Josephson-Stromes $I_{m+1}^{(J)}$) auf die m -te Schlaufe. Diese Koeffizienten werden Selbstinduktionskoeffizienten genannt und spielen bei der Abschätzung der Stärke induktiver Effekte in Netzwerken eine große Rolle (s. (2.24)).

Mit der Definition $\mathbf{E} = (\delta_{n,N})_{1 \leq n, m \leq N}$ und mit Hilfe der Gleichungen (2.6) und (2.8)

folgt aus (2.18)

$$\begin{aligned}
 \Phi^{(2)} &= (\mathbf{L}^{(J)} \cdot \mathbf{P} + (\mathbf{L}^{(X)} - \mathbf{L}^{(Y)}) \cdot \mathbf{K}) \cdot \mathbf{I}_{N-1} + \\
 &\quad \left(-\mathbf{L}^{(X)} \cdot \tilde{\mathbf{K}} + \mathbf{L}^{(Z)} + \frac{1}{2} \mathbf{L}^{(J)} \cdot \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{I}_N^{(Z)} + \\
 &\quad \left(\mathbf{L}^{(Y)} \cdot \tilde{\mathbf{K}} + \mathbf{L}^{(A)} + \frac{1}{2} \mathbf{L}^{(J)} \cdot \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{I}_N^{(A)},
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

wobei in (2.6) wegen der Gesamtstromerhaltung $I(\delta_{n,N})_{1 \leq n \leq N} = 1/2 \mathbf{E} \cdot (\mathbf{I}_N^{(Z)} + \mathbf{I}_N^{(A)})^T$ gilt (siehe (2.5)). Die Relation (2.19) beschreibt den Zusammenhang zwischen den sekundären Flüssen $\Phi^{(2)}$ und den linear unabhängigen Strömen \mathbf{I}_{N-1} , die die $N-1$ Freiheitsgrade des Netzwerks beschreiben. Zur Vereinfachung definieren wir nun mit

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N^{(Z)} \\ \mathbf{I}_N^{(A)} \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

den Vektor der Transportstromverteilung in den Zu- und Abführungsleitungen und mit

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^{(J)} \cdot \mathbf{P} + (\mathbf{L}^{(X)} - \mathbf{L}^{(Y)}) \cdot \mathbf{K} \tag{2.21}$$

sowie

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\mathbf{L}^{(X)} \cdot \tilde{\mathbf{K}} + \mathbf{L}^{(Z)} + \frac{1}{2} \mathbf{L}^{(J)} \cdot \mathbf{E} & \mathbf{L}^{(Y)} \cdot \tilde{\mathbf{K}} + \mathbf{L}^{(A)} + \frac{1}{2} \mathbf{L}^{(J)} \cdot \mathbf{E} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

die Induktionsmatrizen \mathbf{L} und \mathbf{M} der Ströme \mathbf{I}_{N-1} und \mathbf{J} . Mit diesen Definitionen folgt aus (2.19)

$$\Phi^{(2)} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{I}_{N-1} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{J}. \tag{2.23}$$

Nach Gleichung (2.23) hängen die sekundären Flüsse $\Phi^{(2)}$ linear von den Kontaktströmen \mathbf{I}_{N-1} und der Transportstromverteilung \mathbf{J} ab. Wie in Abschnitt 2.2.3 diskutiert wurde, beschreibt \mathbf{J} in welcher Weise der Transportstrom zugeführt und extrahiert wird. Für den Fall homogener Stromzufuhr ($R_n^{(Z)} = R^{(Z)}$ und $R_n^{(A)} = R^{(A)}$) folgt $\mathbf{J} = I/N(1, \dots, 1)^T$, wenn der Grenzfall großer Widerstände $R_n^{(Z)}$ und $R_n^{(A)}$ nach (2.10) vorausgesetzt wird. Dies ist der Fall homogener Stromspeisung. Wird der Transportstrom durch eine andere Wahl der Widerstände $R_n^{(Z)}$, $R_n^{(A)}$ inhomogen in das Netzwerk eingespeist, so erzeugt der sich im Netzwerk verteilende Transportstrom zusätzliche magnetische Flüsse in den Netzwerkschleifen.

Die Induktionsmatrix \mathbf{L} in (2.23) kann als Induktionsmatrix der Abschirmströme im Netzwerk interpretiert werden, wogegen die Matrix \mathbf{M} die Umverteilung des Transportstroms \mathbf{J} im Netzwerk aufgrund des, im Allgemeinen asymmetrischen, diskreten Meissner Effekts beschreibt. Als diskreter Meissner Effekt soll hier die Umverteilung des Transportstroms in Form einer Stromerhöhung an den Netzwerkrändern verstanden werden. Die Koeffizienten der beiden Matrizen \mathbf{L} und \mathbf{M} hängen von der Geometrie

des Netzwerks und von der Geometrie der Leitungen ab. Sie können für spezielle Netzwerkgeometrien analytisch bestimmt werden.

Zur Beschreibung der $N-1$ Freiheitsgrade des Systems werden in dieser Arbeit die $N-1$ Kontaktströme \mathbf{I}_{N-1} verwendet. Die Induktionskoeffizienten $\mathbf{L}_{n,m}$ sind in (2.23) die Proportionalitätsfaktoren, die den linearen Zusammenhang zwischen den induzierten magnetischen Flüssen $\Phi^{(2)}$ und den Strömen \mathbf{I}_{N-1} beschreiben. Als eine andere Basis, die den $N-1$ dimensionalen Zustandsraum der Stromverteilung aufspannt, kann z.B. auch die Basis der $N-1$ Kreisströme $\mathbf{I}_{N-1}^* = (I_1^*, \dots, I_{N-1}^*)^T$ in den Netzwerkschleifen dienen. Diese sind dann durch eine lineare (duale) Transformation \mathbf{T} mit den Kontaktströmen \mathbf{I}_{N-1} verknüpft, d.h. es gilt $\mathbf{I}_{N-1}^* = \mathbf{T} \cdot \mathbf{I}_{N-1}$. Die zu \mathbf{L} gehörige (duale) Induktionsmatrix \mathbf{L}^* beschreibt dann durch $\Phi^{(2)} = \mathbf{L}^* \cdot \mathbf{I}^*$ den linearen Zusammenhang zwischen $\Phi^{(2)}$ und den Kreisströmen \mathbf{I}^* , d.h. sie beschreibt die induktive Kopplung der Kreisströme im Netzwerk. Der Zusammenhang zwischen den Induktionsmatrizen ist demnach durch $\mathbf{L} = \mathbf{L}^* \cdot \mathbf{T}$ gegeben, d.h. die Induktionskoeffizienten $\mathbf{L}_{m,n}$ können leicht aus den Induktionskoeffizienten $\mathbf{L}_{m,n}^*$ der dualen Induktionsmatrix \mathbf{L}^* [37, 134, 135, 158] bestimmt werden.

Ist das sekundäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ genügend groß, so beeinflussen induktive Effekte die Dynamik und somit das Antwortverhalten der Josephson-Kontakt-Netzwerke. Als dimensionsloses Maß für die Stärke dieser magnetischen Kopplung werden die Parameter

$$\beta_{L,m} = \mathbf{L}_m^{(S)} I_c / \Phi_0 \quad (2.24)$$

definiert, wobei $\mathbf{L}_m^{(S)}$ die (Selbst-) Induktivität der m -ten Schleife im Netzwerk bezeichne. Die Induktivitäten $\mathbf{L}_m^{(S)}$ der Schleifen ergeben sich durch Summation der Selbstinduktionskoeffizienten der Leiterstücke, die die jeweilige Schleife bilden, d.h. es gilt

$$\mathbf{L}_m^{(S)} = \mathbf{L}_{m,m}^{(J)} + \mathbf{L}_{m,m+1}^{(J)} + \mathbf{L}_{m,m}^{(X)} + \mathbf{L}_{m,m}^{(Y)}.$$

Die Induktionskoeffizienten $\mathbf{L}_{m,n}^{(\alpha)}$ (mit $\alpha = J, X, Y$) können für rechteckförmige Leitergeometrien, wie im folgenden Abschnitt 2.2.6 beschrieben wird, abgeschätzt werden. Der Parameter $\beta_{L,m}$ beschreibt, welchen Anteil eines Flussquants Φ_0 ein in der m -ten Schleife fließender Kreisstrom der Stärke I_c in der betrachteten Schleife induziert. Als Maß für die Stärke der induktiven Effekte, dient im Folgenden der größte Parameter $\beta_{L,\max} = \max(\beta_{L,1}, \dots, \beta_{L,N-1})$, der im Normalfall zur größten Netzwerkschleife gehört (da die Induktionskoeffizienten nicht nur von der Geometrie der Schleife abhängen, sondern ebenso von der Geometrie der Leiterstücke, kann $\beta_{L,\max}$ u.U. auch nicht zur größten Schleife gehören.). Da das Flussquant Φ_0 die charakteristische Einheit für den magnetischen Fluss in supraleitenden Schleifen ist, und die Stärke der Ströme im Netzwerk in der Größenordnung des kritischen Stroms I_c liegt, wird der Einfluss des magnetischen Eigenfeldes nicht mehr vernachlässigbar sein, sobald der Induktionsparameter $\beta_{L,\max} \simeq 1$ oder größer ist. Eindimensionale Josephson-Kontakt-Netzwerke, bei denen die magnetischen Eigenfelder eine Rolle spielen, werden im Folgenden induktive Netzwerke genannt.

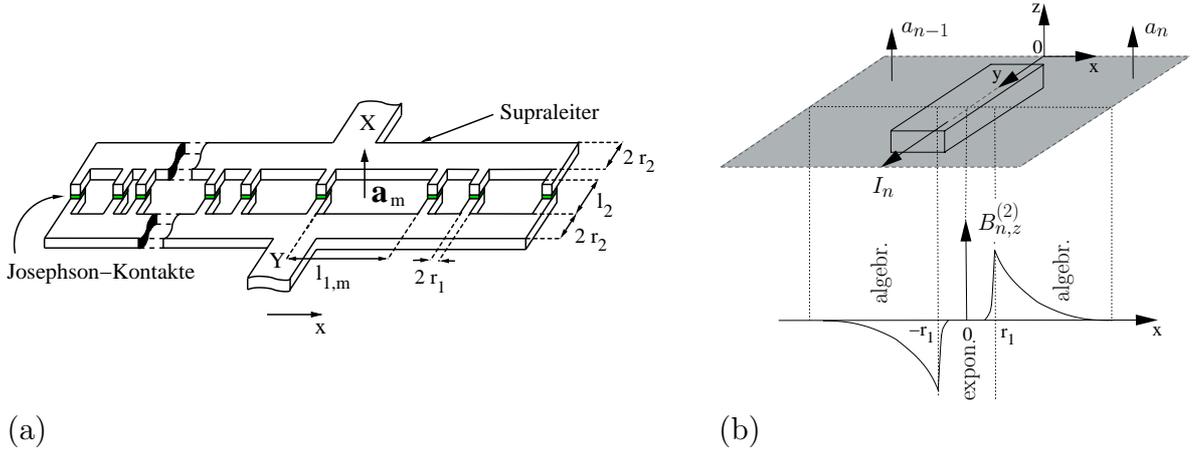


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung einer rechteckförmigen planaren Netzwerkgeometrie zur Abschätzung der Induktionskoeffizienten $L_{m,n}^{(\alpha)}$ für $(\alpha = J, X, Y, A, Z)$. (a) Die Schleifen des Netzwerks haben alle dieselbe Höhe l_2 können aber unterschiedliche Breiten $l_{1,m}$ besitzen. Die Grundseiten aller Schleifen sind kolinear angeordnet. Die Elektroden X und Y besitzen beide die Breite $2r_2$ und die Breite der supraleitenden Verbindungen, die die Josephson-Kontakte beinhalten, beträgt $2r_1$. (b) Das Stromelement I_n erzeugt ein Magnetfeld mit z -Komponente $B_{n,z}^{(2)}$, dessen qualitative x -Abhängigkeit für $z = 0$ dargestellt ist.

2.2.6 Induktionskoeffizienten für planare Netzwerkgeometrien mit rechteckförmigen Leitern

Für spezielle Netzwerkgeometrien können für die Einträge $L_{m,n}^{(\alpha)}$ der Induktionsmatrizen $L^{(\alpha)}$ (mit $\alpha = J, X, Y, A, Z$) in den Gleichungen (2.21) und (2.22) analytische Näherungen angegeben werden. Für planare Netzwerke mit rechteckförmiger Schlaufengeometrie wird in diesem Abschnitt eine Näherung für die Induktionskoeffizienten $L_{m,n}^{(J)}$ hergeleitet. Die Koeffizienten der restlichen Induktionsmatrizen $L^{(\alpha)}$ ($\alpha = X, Y, A, Z$) können dann analog zu der hier beschriebenen Rechnung näherungsweise bestimmt werden.

Die hier betrachtete Geometrie ist in Abbildung 2.3 (a) dargestellt. Das Netzwerk besteht aus Schleifen, die alle als Dünnschicht in einer Ebene mit kollearen Grundseiten angeordnet sind. Diese Geometrie entspricht den in den Experimenten realisierten Anordnungen aus Kapitel 4. Die Elektroden X und Y sind parallel zueinander im Abstand l_2 angeordnet und die Abstände $l_{1,m}$ zweier benachbarter Josephson-Kontakte können a priori beliebig gewählt sein. Beide Elektroden des Netzwerks seien $2r_2$ breit und die Breite der supraleitenden Leitungstücke, die die Josephson-Kontakte enthalten, sei $2r_1$.

Der Induktionskoeffizient $L_{m,n}^{(J)}$ ist der Proportionalitätsfaktor zwischen dem Strom I_n durch den n -ten Josephson-Kontakt und dem von diesem Strom in der m -ten Schleife induzierten magnetischen Fluss $\Phi_{m,n}^{(2)}$. Bei gegebener Stromdichteverteilung \mathbf{j}_n über das vom Strom I_n durchflossene Leiterstück kann aus (2.17) das zu \mathbf{j}_n gehörige Vektorpotential $\mathbf{A}_n^{(2)}$ und daraus das von dieser Stromdichte erzeugte Magnetfeld $\mathbf{B}_n^{(2)} = \text{rot} \mathbf{A}_n^{(2)}$

bestimmt werden. Der Induktionskoeffizient $L_{m,n}^{(J)}$ ergibt sich dann aus dem in der m -ten Schlaufenfläche erzeugten magnetischen Fluss $\Phi_{m,n}^{(2)} = \int_{S_m} \langle \mathbf{B}_n^{(2)}, d\mathbf{a}_m \rangle = \int_{C_m} \langle \mathbf{A}_n^{(2)}, d\mathbf{s}_m \rangle$ zu $L_{m,n}^{(J)} = \Phi_{m,n}^{(2)}/I_n$. Die Kontur C_m der m -ten Schlaufe muss dabei derart im Innern des Supraleiters verlaufen, dass entlang der Kontur die Suprastromdichte verschwindet. Dies ist Voraussetzung für die Gültigkeit der Flussquantisierungsbedingung (2.13).

Durch Lösen der London- und Maxwellgleichungen kann die Stromdichteverteilung \mathbf{j} (bzw. \mathbf{j}_n) über die Leitungsstücke im Netzwerk bestimmt werden, die sich für eine gegebene Geometrie bei Anwesenheit eines primären Magnetfeldes $\mathbf{B}^{(1)}$ einstellt. Für die gegebene Geometrie ist diese exakte Lösung jedoch nur durch die Verwendung numerischer Verfahren möglich. Ein Verfahren zur Bestimmung der Stromdichte \mathbf{j} , das auf die Minimierung der freien Energie des supraleitenden Systems beruht, wird in [69] diskutiert.

Um eine Abschätzung für die Größe der Induktionskoeffizienten zu finden, soll hier ein einfacherer Weg beschrieben werden. Wir betrachten dazu das Leiterelement im Netzwerk, in dem sich der n -te Josephson-Kontakt befindet und durch das der Strom I_n fließt (s. Abb. 2.3 (b)). Für die Stromdichte \mathbf{j}_n werde angenommen, dass sie zur Symmetrieachse des Leiterstücks symmetrisch ist. In diesem Fall kann das von \mathbf{j}_n außerhalb des supraleitenden Leiterstücks erzeugte Magnetfeld $\mathbf{B}_n^{(2)}$ für $(r_1 < |x|, r_2 < y < l_2 + r_2)$ durch das Magnetfeld approximiert werden, das von einem linienförmigen Stromelement der Stärke I_n und Länge $l_2 + 2r_2$ entlang der Symmetrieachse des Leiterstücks erzeugt wird. Mit der Notation aus Abb. 2.3 (b) ergibt sich somit für die z -Komponente $B_{n,z}^{(2)}$ des Magnetfeldes $\mathbf{B}_n^{(2)}$ nach Biot-Savart (für $r_1 < |x|, r_2 < y < l_2 + r_2$)

$$B_{n,z}^{(2)}(x, y, 0) \approx \frac{\mu_0 I_n}{4\pi x} \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}} + \frac{l_2 + 2r_2 - y}{\sqrt{(l_2 + 2r_2 - y)^2 + x^2}} \right). \quad (2.25)$$

Das Magnetfeld innerhalb des betrachteten supraleitenden Leiterstücks fällt vom Rand her nach Innen auf der Länge der Londonschen Eindringtiefe λ_L exponentiell ab. Sind die Ausdehnungen des Leiterstücks groß gegen λ_L , so verschwindet das Magnetfeld im Innern des Supraleiters, bis auf Randschichten der Breite λ_L . Der qualitative Verlauf der z -Komponente $B_{n,z}^{(2)}$ für $z = 0$ entlang der x -Richtung ist in Abbildung 2.3 (b) schematisch dargestellt.

Durch Integration des Magnetfeldes $B_{n,z}^{(2)}$ über die Schlaufenflächen können die von \mathbf{j}_n in den Schlaufen erzeugten magnetischen Flüsse $\Phi_{m,n}^{(2)}$ bestimmt werden. Diese Integration von $B_{n,z}^{(2)}$ über die Schlaufenflächen wird in die Bereiche innerhalb und außerhalb des Supraleiters aufgeteilt. Die Induktionskoeffizienten $L_{m,n}^{(J)}$ ergeben sich dann aus der Summe der jeweiligen Beiträge L_i und L_e , die mit dem Magnetfeld innerhalb und außerhalb des Leiters zusammenhängen. Sind die Ausdehnungen des Netzwerks groß gegen λ_L (d.h. gilt $r_1, r_2, l_{1,m}, l_2 \gg \lambda_L$) so kann L_i gegen L_e vernachlässigt werden. Im Grenzfall kleiner Abmessungen ($\simeq \lambda_L$) dagegen kann der Beitrag L_i die gleiche Größenordnung wie L_e besitzen [69]. Wir beschränken uns im Folgenden jedoch auf Situationen, in denen L_i gegen L_e vernachlässigt werden kann. Dann erstreckt sich die

Integration nur über Bereiche außerhalb des Supraleiters und es ergibt sich aus (2.25) für die Induktionskoeffizienten

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_{m,n}^{(J)} &= \frac{\Phi_{m,n}^{(2)}}{I_n} = \frac{\int_{S_m} \langle \mathbf{B}_n^{(2)}, d\mathbf{a}_m \rangle}{I_n} \\
 &\approx \frac{\mu_0}{2\pi} (-1)^{\delta_{m < n}} \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - \sqrt{x_2^2 + y_1^2} - \sqrt{x_1^2 + y_2^2} \right. \\
 &\quad \left. + y_2 \log \left(\frac{x_2 y_2 + \sqrt{x_1^2 + y_2^2}}{x_1 y_2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \right) + y_1 \log \left(\frac{x_1 y_1 + \sqrt{x_2^2 + y_1^2}}{x_2 y_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \right) \right). \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

In (2.26) bezeichnen x_1, x_2 und y_1, y_2 die x-, bzw. y-Koordinaten des Flächenanteils der m -ten Schlaufe, der sich außerhalb supraleitender Bereiche befindet. Der Ursprung der x- und y-Achse liege dabei am Knoten der Stromelemente I_n und $I_n^{(X)}$ wie in Abbildung 2.3 (b) skizziert. Das Vorzeichen von $\mathbf{L}_{m,n}^{(J)}$ richtet sich dabei nach der relativen Lage des Stromelements I_n zu der m -ten Schlaufe. Liegt die m -te Schlaufe rechts vom n -ten Stromelement ($m \geq n$), so ist $\mathbf{L}_{m,n}^{(J)}$ positiv, da die z-Richtung als positive Richtung ausgezeichnet ist. Speziell für die Schleifen, die direkt an das Stromelement I_n angrenzen, ergeben sich die sogenannten Selbstinduktionskoeffizienten $\mathbf{L}_{n,n}^{(J)}$ (bzw. $\mathbf{L}_{n-1,n}^{(J)}$) aus (2.26) durch $x_1 \rightarrow r_1, x_2 \rightarrow l_{1,n} + r_1$ (bzw. $x_2 \rightarrow l_{1,n-1} + r_1$) und $y_1 \rightarrow r_2, y_2 \rightarrow l_2 + r_2$.

Die Annahme symmetrischer Stromdichten im Innern der Leiterstücke kann für die am Rand des Netzwerks liegenden Leiterelemente ungeeignet sein [69], da dort das Eigenfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ einen stärkeren Gradienten aufweist als im Netzwerkkinnern. Für eine Abschätzung der Stärke der magnetischen Kopplung kann diese Annahme jedoch gemacht werden, falls die Asymmetrien in den Stromdichten nicht zu stark sind. Bei Geometrien, die eine große Asymmetrie in den Stromdichten erzeugen, müssen jedoch für eine gute Abschätzung der Induktionskoeffizienten dieser Leiterelemente verfeinerte Modelle wie in [61, 69] angewendet werden.

Im Folgenden werden für die Herleitung der Gleichungen zur Beschreibung induktiver paralleler Netzwerke die Näherungsrelation (2.26) für die Induktionskoeffizienten verwendet, d.h. die betrachtete Netzwerkgeometrie gleicht der in Abb. 2.3 (a) skizzierten planaren Anordnung. Bei der Wahl anderer Leitungsgeometrien müssen die Induktionskoeffizienten jeweils neu bestimmt werden, was für kompliziertere Strukturen nur numerisch möglich ist.

2.2.7 Spannungsabfall über das Netzwerk und Faradaysches Induktionsgesetz für innere Schleifen

Die Spannung, die zwischen zwei auf den Elektroden X und Y liegenden Punkten x und y abfällt, ist durch

$$V_{x \rightarrow n \rightarrow y}(t) = \int_{x \rightarrow n \rightarrow y} \langle \mathbf{E}(t), d\mathbf{s} \rangle \quad (2.27)$$

gegeben, wobei der Integrationsweg im Integral über das elektrische Feld \mathbf{E} am Punkt x auf der Elektrode X startet, den n -ten Kontakt genau einmal durchquert und am Punkt y auf der Y -Elektrode endet. Da am Ort des Netzwerks ein zeitveränderliches Magnetfeld \mathbf{B} (insbesondere ein zeitveränderliches sekundäres Magnetfeld $\mathbf{B}^{(2)}$) vorhanden ist, verschwindet nach dem Faradayschen Induktionsgesetz $rot\mathbf{E}(t) = -\partial_t\mathbf{B}(t)$ die Rotation des elektrischen Feldes nicht überall, und in (2.27) ist das Wegintegral vom gewählten Weg abhängig. Damit hängt auch die Spannung $V_{x \rightarrow n \rightarrow y}(t)$ vom gewählten Weg ab. Nehmen wir (wie bei der Herleitung der Flussquantisierungsbedingung) im Supraleiter $\mathbf{v}_s = 0$ an, so folgt aus der ersten London-Gleichung $m^*\partial_t\mathbf{v}_s = e^*\mathbf{E}$, dass im Supraleiter das elektrische Feld verschwindet. Damit bleibt in (2.27) nur die Wegintegration über die Barriere selbst übrig, d.h. es gilt

$$V_{x \rightarrow n \rightarrow y}(t) = \int_{\text{Barriere } n} \langle \mathbf{E}(t), d\mathbf{s} \rangle = V_n(t), \quad (2.28)$$

wobei $V_n(t)$ die über den n -ten Josephson-Kontakt abfallende Spannung bezeichnet.

Nach dem Faradayschen Induktionsgesetz ist nun das Wegintegral über das elektrische Feld \mathbf{E} entlang eines geschlossenen Pfades direkt mit der zeitlichen Ableitung des magnetischen Flusses $\Phi_n(t) = \int_{a_n} \langle \mathbf{B}, d\mathbf{a}_n \rangle$ durch das eingeschlossene Flächenelement verknüpft. Liegt die Spannung $V_1(t)$ über den ersten Kontakt fest, so sind die Spannungen $V_n(t)$ über die anderen Kontakte nach Faraday, (2.27) und (2.28) über

$$V_{n+1}(t) - V_n(t) = \partial_t \Phi_n(t) \quad (2.29)$$

bestimmt. Dies folgt mit $V_n(t) = \frac{\hbar}{2e} \partial_t \varphi_n(t)$ auch unmittelbar aus der zeitlichen Ableitung der Flussquantisierungsbedingung (2.13), so dass die Gleichung (2.28) mit (2.13) konsistent ist.

Da der zeitliche Mittelwert des magnetischen Flusses konstant ist,

$$\langle \Phi_n \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} 1/t \int_0^t dt' \Phi_n(t') = const.,$$

verschwindet im zeitlichen Mittel die rechte Seite in (2.29) und es folgt

$$\langle V_1 \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} 1/t \int_0^t dt' V_1(t') = \langle V_2 \rangle = \dots = \langle V_N \rangle \equiv \langle V \rangle, \quad (2.30)$$

d.h. die zeitlichen Mittelwerte der über die Kontaktbarrieren abfallenden Spannungen sind alle gleich. Dies ist die unmittelbare Folge der Parallelschaltung der Josephson-Kontakte in parallelen Netzwerken. Nach (2.30) und (2.28) ist dann $\langle V \rangle$ die zwischen den Punkten x und y (bzw. zwischen den Elektroden X und Y) abfallende mittlere Spannung.

Die mittlere Spannung $\langle V \rangle$ aus (2.30) ist die in vielen Experimenten zugängliche Messgröße. In Realität ist jedoch eine Mittelung über einen unendlich großen Zeitbereich nicht notwendig, damit (2.30) gilt. Die charakteristische Zeitskala, auf der sich die Ströme im Netzwerk ändern, ist durch die Josephson-Zeit t_J gegeben, die typischerweise im Bereich von $10^{-11} s$ liegt. Auf dieser Zeitskala ändert sich somit auch das sekundäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ und damit $\Phi^{(2)}$. Das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ besitzt in vielen Anwendungen jedoch eine sehr viel kleinere Frequenz im Vergleich zu $1/t_J$, d.h. $\Phi^{(1)}$ ändert sich auf einer Skala t_{prim} mit $t_{\text{prim}} \gg t_J$. Dies ist die typische Situation bei der Messung von Magnetfeldern mit Hilfe von Josephson-Kontakt-Netzwerken. Hier ändert sich das primäre Magnetfeld adiabatisch in Bezug auf die Oszillation der Netzwerkströme und es genügt eine Mittelung über ein Zeitintervall Δt mit $t_J \ll \Delta t \ll t_{\text{prim}}$, damit (2.30) gilt. Diese Mittelung über viele Perioden der Signalspannung $V(t)$ übernimmt im Experiment das Spannungsmessgerät, das normalerweise Signaländerungen im Bereich von $10^{-11} s$ nicht auflösen kann. In diesem Fall ist die mittlere Spannung ebenfalls zeitabhängig $\langle V \rangle(t)$ und ändert sich mit der Frequenz des primären Signals $\mathbf{B}^{(1)}(t)$.

2.3 Dynamische Gleichungen zur Beschreibung paralleler Josephson-Kontakt-Netzwerke

Die im vorigen Abschnitt 2.2 diskutierten Gleichungen sind die Grundgleichungen, mit deren Hilfe eindimensionale Josephson-Kontakt Netzwerke auf der Basis des RCSJ-Modells beschrieben werden können. In diesem Abschnitt werden nun die Netzwerkgleichungen hergeleitet, die in Form von gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen die dynamischen Gleichungen der Netzwerke darstellen. Diese Herleitung geschieht im Folgenden in zwei Schritten. Zuerst werden in 2.3.1 für den Fall verschwindender induktiver Kopplungen $\beta_{L,\text{max}} \ll 1$, d.h. im Grenzfall verschwindend kleiner Eigenfelder $\mathbf{B}^{(2)} \approx \mathbf{0}$, die $N-1$ Freiheitsgrade des Systems (s. Abschn. 2.2.2) auf *einen* einzigen effektiven Freiheitsgrad reduziert. In diesem Fall kann das Netzwerk durch eine einzige gewöhnliche Differentialgleichung beschrieben werden. Kann das magnetische Eigenfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ nicht mehr vernachlässigt werden, so ist diese Reduktion auf einen Freiheitsgrad nicht mehr möglich und alle $N-1$ Freiheitsgrade des Systems müssen berücksichtigt werden. Dieser Fall endlicher induktiver Kopplung wird in Abschnitt 2.3.2 diskutiert. Hier sind die Netzwerkgleichungen in Form eines gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungssystems der Dimension $N-1$ gegeben.

Um die Diskussion zu vereinfachen, beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf Netzwerke, die planare Schleifen besitzen. Jede Schleife besitzt dann einen Normalenvek-

tor \mathbf{a}_n , dessen Länge gleich dem Flächeninhalt a_n ist, $|\mathbf{a}_n| = a_n$. Zudem wird davon ausgegangen, dass das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ homogen über die Ausdehnungen des Netzwerks ist. Damit sind die primären magnetischen Flüsse $\Phi_n^{(1)}$ durch die Skalarprodukte $\Phi_n^{(1)} = \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_n \rangle$ gegeben. Für inhomogene Magnetfelder $\mathbf{B}^{(1)}$ und/oder nicht planare Schleifen, muss auf die Definition $\Phi_n^{(1)} = \int_{S_n} \langle \mathbf{B}^{(1)}, d\mathbf{a}_n \rangle$ zurückgegriffen werden.

2.3.1 Netzwerkgleichungen für verschwindende Induktivitäten

Sind alle Induktions-Parameter β_{L_n} der Netzwerkschleifen klein, d.h. gilt $\beta_{L_n} \ll 1$ für alle $n = 1, \dots, N-1$, so erzeugen die im Netzwerk fließenden Ströme kein signifikantes sekundäres Magnetfeld $\mathbf{B}^{(2)}$. In diesem Grenzfall verschwindender Induktivitäten ist das Magnetfeld \mathbf{B} gleich dem primären Magnetfeld $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(1)}$. Aus Gleichung (2.13) folgt dann

$$\varphi_n(\tau) = \varphi_1(\tau) + \frac{2\pi}{\Phi_0} \sum_{m=0}^{n-1} \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_m \rangle, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.31)$$

wobei $\mathbf{a}_0 \equiv \mathbf{0}$ verwendet wurde. Nach (2.31) können alle Phasenvariablen $\varphi_n(\tau)$ zugunsten einer Phasenvariable (hier $\varphi_1(\tau)$) eliminiert werden, so dass das Netzwerk mit $\phi(\tau) \equiv \varphi_1(\tau)$ nur noch einen einzigen effektiven Freiheitsgrad besitzt. Dies ermöglicht es, die Dynamik des Netzwerks mit Hilfe einer einzigen Differentialgleichung für den verbleibenden Freiheitsgrad $\phi(\tau)$ zu beschreiben.

Definieren wir mit

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{a}_m, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.32)$$

die sogenannten akkumulierten Flächen $\boldsymbol{\alpha}_n$ des Netzwerks, so kann (2.31) verkürzt als

$$\varphi_n(\tau) = \varphi_1(\tau) + \frac{2\pi}{\Phi_0} \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_n \rangle \quad (2.33)$$

geschrieben werden. Aus der Gleichung (2.5) für die Gesamtstromerhaltung $I = \sum_{n=1}^N I_n(\varphi_n(\tau))$, der Strom-Phase-Beziehung (2.4) und (2.33) folgt dann mit $\phi(\tau) = \varphi_1(\tau)$

$$\begin{aligned} J_N &= \beta_C \partial_\tau^2 \phi(\tau) + \partial_\tau \phi(\tau) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{I_{c,n}}{I_c} \sin \left(\phi(\tau) + \frac{2\pi}{\Phi_0} \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_n \rangle \right) + \\ &\quad \beta_C \frac{2\pi}{\Phi_0} \partial_\tau^2 \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{C} \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_n \rangle \right) + \frac{2\pi}{\Phi_0} \partial_\tau \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{R}{R_n} \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_n \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dies ist eine skalare Differentialgleichung für $\phi(\tau)$, die die phasen-sensitive Superposition der N Josephson-Kontakt-Ströme in der Anwesenheit primärer Magnetfelder $\mathbf{B}^{(1)}$ beschreibt. In (2.34) wurde mit $J_N = I/(NI_c)$ der auf I_c normierte Transportstrom

pro Kontakt eingeführt. Definieren wir nun mit

$$\boldsymbol{\alpha}_C = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{C} \boldsymbol{\alpha}_n, \quad \boldsymbol{\alpha}_R = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{R}{R_n} \boldsymbol{\alpha}_n \quad (2.35)$$

die gewichteten akkumulierten Flächen $\boldsymbol{\alpha}_C$ und $\boldsymbol{\alpha}_R$ des Netzwerks und mit

$$\begin{aligned} S_N(\mathbf{B}^{(1)}) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{I_{c,n}}{I_c} \exp \left[\frac{2\pi i}{\Phi_0} \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_n \rangle \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{I_{c,n}}{I_c} \exp \left[\frac{2\pi i}{\Phi_0} \sum_{m=0}^{n-1} \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_m \rangle \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\delta_N(\mathbf{B}^{(1)}) = \arg (S_N(\mathbf{B}^{(1)})) \quad (2.37)$$

den charakteristischen komplexen Strukturfaktor $S_N(\mathbf{B}^{(1)})$ mit Argument $\delta_N(\mathbf{B}^{(1)})$, dann folgt aus (2.34)

$$\begin{aligned} \beta_C \partial_\tau^2 \phi(\tau) + \partial_\tau \phi(\tau) + |S_N(\mathbf{B}^{(1)})| \sin [\phi(\tau) + \delta_N(\mathbf{B}^{(1)})] \\ = J_N - \frac{2\pi}{\Phi_0} \beta_C \partial_\tau^2 \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_C \rangle - \frac{2\pi}{\Phi_0} \partial_\tau \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_R \rangle. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Die Netzwerkgleichung (2.38) ist eine skalare gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für den verbleibenden Freiheitsgrad, der durch die Phase $\phi(\tau)$ beschrieben wird. Sie besitzt eine ähnliche Gestalt wie die RCSJ-Differentialgleichung (2.4) zur Beschreibung der einzelnen Josephson-Kontakte. Im nicht-induktiven Fall ($\beta_{L,\max} \approx 0$) kann das System aus N gekoppelten Josephson-Kontakten also auf ein effektives Modell eines einzigen virtuellen Josephson-Kontakts abgebildet werden. Dieser virtuelle Kontakt besitzt einen McCumber-Parameter $\beta_C = 2\pi/\Phi_0 I_c R^2 C$, der vom mittleren kritischen Strom I_c , vom mittleren Widerstand R und von der mittleren Kapazität C der Josephson-Kontakte abhängt (s. (2.2)). Die charakteristische Zeit in (2.38) ist die Josephsonzeit $t_J = \hbar/(2e I_c R)$, die ebenfalls von den mittleren Größen I_c und R abhängt. In der Differentialgleichung (2.38) treten als treibende Terme (rechte Seite der Differentialgleichung) der mittlere Transportstrom pro Kontakt $J_N = I/(NI_c)$, sowie Zeitableitungen der gewichteten akkumulierten magnetischen Flüsse $\Phi_R = \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_R \rangle$ und $\Phi_C = \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_C \rangle$ auf, die nach (2.35) mit der Verteilung der Widerstände R_n und Kapazitäten C_n über das Netzwerk zusammenhängen. Sie haben ihre Ursache im Faradayschen Induktionsgesetz (s. Abschn. 2.2.7), nach dem zeitlich variierende magnetische Flüsse elektromotive Kräfte erzeugen, die ohmsche Ströme ($\propto \partial_\tau \Phi_R$) und (bei Anwesenheit von Kapazitäten) Verschiebungsströme ($\propto \partial_\tau^2 \Phi_C$) zur Folge haben.

In (2.38) geht der Transportstrom I nur in Form des normierten Stroms pro Kontakt J_N ein, d.h. die Art und Weise wie I dem Netzwerk zugeführt und wieder extrahiert wird, spielt im Grenzfall verschwindender Induktivitäten keine Rolle. Das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ legt unabhängig von der Wahl der Randbedingungen über (2.31) die ei-

ch invarianten Phasendifferenzen φ_n und damit alle Ströme $I_n(\varphi_n)$ durch die Josephson-Kontakte (bis auf den verbleibenden Freiheitsgrad $\phi(\tau)$) fest. Über die Kirchhoffschen Knotenregeln legen dann die Kontaktströme \mathbf{I}_N zusammen mit den Randbedingungen alle anderen Ströme $\mathbf{I}_{N-1}^{(X)}$ und $\mathbf{I}_{N-1}^{(Y)}$ im Netzwerk fest. Der treibende Strom I verteilt sich also entsprechend dem primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ und den Randbedingungen in den beiden Elektroden X und Y um. Da Eigenfelder hier vernachlässigt werden, übt diese Umverteilung keinen Einfluss auf die Dynamik des Netzwerks aus, so dass in (2.38) die Randbedingungen nicht eingehen. Die Art der Stromzufuhr spielt jedoch eine wichtige Rolle, sobald induktive Effekte nicht mehr vernachlässigt werden können ($\beta_{L,\max} \simeq 1$), da dann das sekundäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ die Netzwerkdynamik beeinflusst und je nach Umverteilung des Stroms I in den Elektroden X und Y verschiedene Sekundärfelder $\mathbf{B}^{(2)}$ erzeugt werden.

Die in (2.36) definierte komplexe Funktion $S_N(\mathbf{B}^{(1)}) = |S_N(\mathbf{B}^{(1)})| \cdot e^{i\delta_N(\mathbf{B}^{(1)})}$ ist der für das parallele Josephson-Kontakt-Netzwerk charakteristische Strukturfaktor. Dieser hängt stark von der gewählten Flächenverteilung $\{\mathbf{a}_n, 1 \leq n \leq N-1\}$ ab und ist sehr sensitiv auf die Größe und Orientierung des primären Magnetfeldes $\mathbf{B}^{(1)}$. Insbesondere ergeben verschiedene Permutationen derselben Flächenverteilung $\{\mathbf{a}_n, 1 \leq n \leq N-1\}$ im Allgemeinen verschiedene Strukturfaktoren, so dass die Antwort des Netzwerks auf primäre Magnetfelder nach (2.38) von der Wahl und der Reihenfolge der Flächen abhängt. Der Betrag $|S_N(\mathbf{B}^{(1)})|$ des Strukturfaktors spielt in der Differentialgleichung (2.38) die Rolle des kritischen Stroms im effektiven RCSJ-Modell und das Argument $\delta_N(\mathbf{B}^{(1)})$ tritt als zusätzliche Phase in dem Term auf, der den Suprastrom durch das Netzwerk beschreibt.

Im Fall zeitlich adiabatisch variierender primärer Magnetfelder $\partial_\tau \mathbf{B}^{(1)} \approx 0$ können für verschwindenden McCumber-Parameter $\beta_C = 0$ analytische Lösungen der Differentialgleichung angegeben werden. Diese Lösungen $\phi(\tau)$ werden in Abschnitt 2.4.1 diskutiert und in 2.4.2 zur Herleitung der Abhängigkeit der mittleren Spannung $\langle V \rangle$ von I und $\mathbf{B}^{(1)}$ verwendet. In Abschnitt 2.4.3 werden dann für parallele Netzwerke mit ausgewählten Flächenverteilungen die zugehörigen Strukturfaktoren und die Spannungsantworten in Bezug auf primäre Magnetfelder diskutiert. Die in 2.4.3 ebenfalls diskutierten Spannungsantwort-Funktionen von Netzwerken mit endlichem McCumber-Parameter ($\beta_C \geq 0$) werden durch numerisches Lösen des effektiven RCSJ-Modells (2.38) bestimmt.

2.3.2 Netzwerkgleichungen induktiver paralleler Netzwerke

Sind die kritischen Ströme der Kontakte nicht klein oder sind die Induktivitäten der Netzwerkschleifen nicht vernachlässigbar, d.h. wird der Induktivitäts-Parameter $\beta_{L,\max}$ der größten Schlaufe $\beta_{L,\max} \simeq 1$ oder größer, so können die Selbst- und Gegeninduktivitäten im Netzwerk nicht mehr vernachlässigt werden und die induktiven Kopplungen der Ströme im Netzwerk müssen berücksichtigt werden.

In diesem Fall induktiver Netzwerke ist das Magnetfeld eine Superposition des primären Magnetfeldes $\mathbf{B}^{(1)}$, das von externen Strömen erzeugt wird, und dem sekundären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(2)}$, das von den im Netzwerk fließenden Strömen erzeugt wird $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)}$. Die Stromverteilung im parallelen Netzwerk ist eine Superposition des Transportstroms I , der sich im Allgemeinen inhomogen über die verschiedenen Kontakte verteilt und den Abschirmströmen, die vom Magnetfeld \mathbf{B} induziert werden. In diesem Fall endlicher induktiver Kopplungen ist eine Reduzierung auf einen Freiheitsgrad, wie in Abschnitt 2.3.1 nicht mehr möglich, d.h. nun müssen alle $N-1$ Freiheitsgrade des Systems berücksichtigt werden. Zur Beschreibung der $N-1$ Freiheitsgrade verwenden wir den Vektor $\mathbf{I}_{N-1} = (I_1, \dots, I_{N-1})^T$ der ersten $N-1$ Ströme I_n durch die Kontakte (s. Abschn. 2.2.2). Im Fall endlicher Induktivitäten ist die Induktionsmatrix \mathbf{L} aus (2.21) invertierbar, so dass aus dem Ampèreschen Gesetz (2.23)

$$\mathbf{I}_{N-1}(\varphi) = \mathbf{L}^{-1} \cdot \left(-\mathbf{M} \cdot \mathbf{J} + \Phi^{(2)} \right) \quad (2.39)$$

folgt. Der Vektor \mathbf{J} beschreibt nach (2.20) die Transportstromzufuhr und im Vektor $\Phi^{(2)}$ sind die induzierten magnetischen Flüsse zusammengefasst. Aus Gleichung (2.14) und $\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}$ folgt nun

$$\Phi^{(2)} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \mathbf{N} \cdot \varphi - \Phi^{(1)}, \quad (2.40)$$

d.h. der sekundäre magnetische Fluss $\Phi^{(2)}$ ergibt sich aus dem primären magnetischen Flussvektor $\Phi^{(1)}$ und den eichinvarianten Phasendifferenzen $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)^T$ der N Josephson-Kontakte. Zusammen liefern die Gleichungen (2.39) und (2.40) einen Ausdruck für die $N-1$ unabhängigen Ströme $\mathbf{I}_{N-1}(\varphi) = (I_1(\varphi_1), \dots, I_{N-1}(\varphi_{N-1}))^T$

$$\mathbf{I}_{N-1}(\varphi) = -\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{L}^{-1} \cdot \left(\Phi^{(1)} - \frac{\Phi_0}{2\pi} \mathbf{N} \cdot \varphi \right).$$

Die letzte Komponente I_N ergibt sich dann aus der Stromerhaltung zu $I_N(\varphi_N) = I - \sum_{n=1}^{N-1} I_n(\varphi_n)$.

Verwenden wir für die Strom-Phasen-Beziehung der Josephson-Kontakte wieder das RCSJ-Modell (s. Abschn. 2.2.1), so lautet das System der Netzwerkgleichungen für die Phasenvariablen $\varphi(\tau) = (\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_N(\tau))^T$

$$\beta_C \frac{C_n}{C} \partial_\tau^2 \varphi_n(\tau) + \frac{R}{R_n} \partial_\tau \varphi_n(\tau) + \frac{I_{c,n}}{I_c} \sin \varphi_n(\tau) = \frac{1}{I_c} \begin{cases} \left(-\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{L}^{-1} \cdot \left(\Phi^{(1)}(\tau) - \frac{\Phi_0}{2\pi} \mathbf{N} \cdot \varphi(\tau) \right) \right)_n, & 1 \leq n \leq N-1 \\ I - \sum_{k=1}^{N-1} \left(-\mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{L}^{-1} \cdot \left(\Phi^{(1)}(\tau) - \frac{\Phi_0}{2\pi} \mathbf{N} \cdot \varphi(\tau) \right) \right)_k, & n = N \end{cases} \quad (2.41)$$

wobei $(\cdot)_n$ die n -te Komponente eines Vektors bezeichne. Das Gleichungssystem (2.41) besteht aus N gekoppelten gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter

Ordnung in τ , das die Dynamik des stromgetriebenen eindimensionalen Josephson-Kontakt-Netzwerks auf der Basis des RCSJ-Modells beschreibt. Die Wahl des RCSJ-Modells ist dadurch bedingt, dass die Strom-Phase-Beziehungen $I_n(\varphi_n)$ der im Experiment verwendeten Josephson-Kontakte (s. Kapitel 4) durch dieses Modell sehr gut beschreibbar sind. Werden Kontakte mit anderen Strom-Phase-Beziehungen verwendet, so behalten die Netzwerkgleichungen weiterhin ihre Gültigkeit, wenn die linke Seite durch die neue $I_n(\varphi_n)$ -Beziehung ersetzt wird. In diesem Sinne sind die Netzwerkgleichungen (2.41) universell. In (2.41) können die Kontakt-Parameter Kapazität C_n , Widerstand R_n und kritischer Strom $I_{c,n}$ um ihre jeweiligen Mittelwerte C , R und I_c streuen. Die betrachteten Netzwerke können beliebige Geometrien und Induktivitäten besitzen und der Transportstrom I kann unter den in Abschnitt 2.2.3 gemachten Annahmen beliebig zugeführt werden, d.h. der Strom-Vektor \mathbf{J} kann je nach Wahl der Widerstände $R_n^{(Z)}$ und $R_n^{(A)}$ verschiedene Komponenten besitzen. Ferner gelten die Netzwerkgleichungen (2.41) für beliebige statische oder zeitlich variierende primäre Magnetfelder $\mathbf{B}^{(1)}(\tau)$, die in Form der primären magnetischen Flüsse $\Phi^{(1)}(\tau)$ eingehen. Durch numerische Simulationen können die Lösungen der Gleichungen (2.41) für ein gegebenes Netzwerk für festgelegte Transportströme und Magnetfelder bestimmt werden. Auf diese Weise werden in Abschnitt 2.4.4 die Spannungsantworten verschiedener Netzwerke bestimmt. Die sich aus den Lösungen $\varphi(\tau)$ der Netzwerkgleichungen (2.41) ergebenden Spannungen und Stromverteilungen im Netzwerk erfüllen alle Maxwellgleichungen (in quasistationärer Näherung, in der Retardierungseffekte vernachlässigt sind), d.h. die mit Hilfe von (2.41) berechneten physikalischen Größen sind experimentell bestimmbare Messgrößen.

Im Kontinuums-Grenzfall, d.h. im Limes verschwindender Schlaufenflächen unter Beibehaltung der lateralen Ausdehnung des Netzwerks, beschreibt Gleichung (2.41) einen einzigen sogenannten (eindimensionalen) langen Josephson-Kontakt. In diesem Fall geht $\varphi_n(t)$ nach $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(x_n, t) \rightarrow \varphi(x, t)$ in die eichinvariante Phasendifferenz $\varphi(x, t)$ über den langen Josephson-Kontakt über, wobei x die Koordinate entlang der (ausgedehnten) Barriere bezeichnet. Um diesen Kontinuumsübergang zu skizzieren, betrachten wir ein paralleles Netzwerk mit *identischen* Kontakten, homogener Stromzufuhr und *identischen* Schlaufen. Die letzte Bedingung identischer Schlaufen $l_{1,n} = l_1$, d.h. die Betrachtung regulärer Netzwerke, ist eine Voraussetzung für den Übergang von der diskreten Beschreibung zu einem kontinuierlichen Modell eines homogenen langen Kontakts.

Da ein einziger langer Kontakt betrachtet werden soll, werden die Schlaufenhöhen l_2 (s. Abb. 2.3) als sehr klein $l_2 = \Delta l_2$ angenommen. Für die Induktionsmatrizen aus (2.18) gelte $\mathbf{L}^{(J)} = \mathbf{L}^{(A)} = \mathbf{L}^{(Z)} = 0$ und $\mathbf{L}^{(X)} = -\mathbf{L}^{(Y)} = -L^{(Y)} \mathbf{1}$, so dass nur die Induktionsmatrizen der Elektroden X und Y nichtverschwindende Einträge enthalten. Diese endlichen Einträge sind die Selbstinduktionskoeffizienten $L_{n,n}^{(Y)} = -L_{n,n}^{(X)} = L^{(Y)}$, die für alle Schlaufen identisch sind. Werden für diesen Fall die induktiven Netzwerkgleichun-

gen (2.41) ausgewertet, so ergibt sich das folgende Differentialgleichungssystem

$$\beta_C \partial_\tau^2 \varphi_n(\tau) + \partial_\tau \varphi_n(\tau) + \sin \varphi_n(\tau) = \frac{I}{NI_c} + \frac{1}{\beta_L} \begin{cases} (\varphi_2(\tau) - \varphi_1(\tau))/2\pi - \Phi^{(1)}/\Phi_0, & n = 1 \\ (\varphi_{n-1}(\tau) - 2\varphi_n(\tau) + \varphi_{n+1}(\tau))/2\pi, & 2 \leq n \leq N-1 \\ (\varphi_{N-1}(\tau) - \varphi_N(\tau))/2\pi + \Phi^{(1)}/\Phi_0, & n = N \end{cases} \quad (2.42)$$

wobei $\beta_L = 2L^{(Y)}I_c/\Phi_0$ den Induktivitätsparameter des verbleibenden Induktionskoeffizienten $L^{(Y)}$ bezeichnet (der Faktor 2 berücksichtigt den induktiven Einfluss *beider* Elektroden). $\Phi^{(1)}$ ist der primäre magnetische Fluss durch eine einzige Schlaufe, der in (2.42) nur in die Differentialgleichungen für den ersten und den letzten Kontakt eingeht. Das Gleichungssystem (2.42) zeigt, dass für den speziellen Fall *regulärer* Netzwerke die inverse Induktivitätsmatrix (oder genauer die Matrix $L^{-1} \cdot \mathbf{N}$) aus (2.41) eine diskrete Differenzenapproximation des eindimensionalen Laplace-Operators darstellt.

Werden dem parallelen Netzwerk mehr und mehr Kontakte mit kleiner werdenden kritischen Strömen hinzugefügt, so können ab einer genügend großen Kontaktanzahl mit der kritischen Stromdichte j_c und der (auf μ_0 normierten) Induktivität pro Längeneinheit ℓ kontinuierliche Größen eingeführt werden. Mit den Übergängen $I_c \rightarrow j_c \Delta x$ und $L^{(Y)} \rightarrow \ell \mu_0 \Delta x$ ergibt sich die Skalierung des Induktivitätsparameters zu $\beta_L = 2L^{(Y)}I_c/\Phi_0 \rightarrow \Delta x^2/(2\pi \lambda_J^2)$, wobei mit $\lambda_J^2 = \Phi_0/(2\pi 2\ell \mu_0 j_c)$ der Parameter λ_J eingeführt wird. Mit Δx ist die skalierte Länge entlang der Elektroden bezeichnet, d.h. $\Delta x = l/N$. Für $N \rightarrow \infty$ folgt nun $\Delta x \rightarrow dx$, $I/(NI_c) \rightarrow I/(j_c l)$ und es ergibt sich $1/(2\pi \beta_L) (\varphi_{n-1} - 2\varphi_n + \varphi_{n+1}) \rightarrow \lambda_J^2 \partial_x^2 \varphi$. Die charakteristische Länge, auf der sich die Phasenvariable $\varphi(x)$ entlang der Kontaktbarriere ändert, ist also durch λ_J (die Josephson-Eindringtiefe) gegeben. Wird mit $\chi = x/\lambda_J$ die dimensionslose Länge eingeführt, so folgt für $N \rightarrow \infty$ aus (2.42)

$$\beta_C \partial_\tau^2 \varphi(\tau) + \partial_\tau \varphi(\tau) + \sin \varphi(\tau) - \partial_\chi^2 \varphi = \frac{I}{j_c l} \quad (2.43)$$

$$\partial_\chi \varphi|_{\chi=0} = \partial_\chi \varphi|_{\chi=l/\lambda_J} = \frac{2\pi}{\Phi_0} B_\perp^{(1)} \Delta l_2 \lambda_J.$$

Die Randbedingungen folgen aus den Differentialgleichungen (in (2.42)) für die erste und die N -te eichinvariante Phasendifferenz. Das primäre magnetische Feld $B_\perp^{(1)}$ geht nach (2.43) nur über die Randbedingungen in das Modell ein. Gleichung (2.43) ist eine partielle Differentialgleichung zur Beschreibung der Dynamik eines langen eindimensionalen Josephson-Kontakts. Sie ist analog zur Ferrel-Prange-Gleichung [29] im Kontinuum, die auch unter dem Namen Sine-Gordon-Modell [6, 88, 103, 112, 165] bekannt ist. Mit Hilfe von Systemen gekoppelter Sine-Gordon-Gleichungen können zudem die von Kleiner et. al. [90] entdeckten intrinsischen Josephson-Effekte in Hochtemperatursupraleitern (wie $\text{Bi}_2\text{SrCa}_2\text{Cu}_2\text{O}_8$) geeignet beschrieben werden, deren schichtförmiger

Aufbau durch gestapelte lange intrinsische Josephson-Kontakte modelliert werden kann [91, 92, 93].

Zwischen dem Sine-Gordon-Modell (2.43) und dem in dieser Arbeit diskutierten diskreten Modell der induktiven Netzwerkgleichungen (2.41) gibt es zwei wesentliche Unterschiede: die Sine-Gordon-Gleichung kann keine nichtperiodischen Strukturen beschreiben, und um Lösungen der Sine-Gordon-Gleichung zu bestimmen, muß die Eingangs- bzw. Ausgangsstromverteilung $I/(jcl)$ des Transportstroms von Hand in das Modell eingebracht werden. Dies ist im diskreten Modell der induktiven Netzwerkgleichungen (2.41) anders, da die Lösungen von (2.41) automatisch alle Randbedingungen erfüllen. Insbesondere beinhaltet das Modell (2.41) den 'diskreten' Meissner Effekt, d.h. die Verdrängung der Transportstromverteilung an die Ränder des Netzwerks, automatisch.

2.4 Spannungsantwort paralleler Netzwerke

Mit Hilfe der Differentialgleichungen aus Abschnitt 2.3 kann die Dynamik stromgetriebener paralleler Netzwerke in Anwesenheit primärer Magnetfelder $\mathbf{B}^{(1)}$ beschrieben werden. Aus den Lösungen der Netzwerkgleichungen (2.38) oder (2.41) können insbesondere die über das parallele Netzwerk abfallende Spannung $V(t)$ und ihr zeitlicher Mittelwert $\langle V \rangle$ bestimmt werden. Da die Netzwerkgleichungen vom primären Magnetfeld abhängen, sind die Lösungen und damit die Spannung $\langle V \rangle$ ebenfalls magnetfeldabhängig. Das Verhalten der mittleren Spannung bezüglich des Transportstroms und des primären Magnetfeldes, d.h. die Größe $\langle V \rangle(I, \mathbf{B}^{(1)})$, wird als Spannungsantwort des parallelen Netzwerks bezeichnet. In den folgenden Abschnitten wird diskutiert, auf welche Art und Weise die Spannungsantwort von der Flächenverteilung des Netzwerks, von den Kontaktparametern und von den induktiven Effekten abhängt.

Die Diskussion von Abschnitt 2.4 gliedert sich in zwei Teile. Der erste Teil umfasst die Abschnitte 2.4.1 bis 2.4.3, die den einfachen Fall vernachlässigbarer induktiver Effekte behandeln. In diesem Grenzfall $\beta_{L,\max} = 0$ können mit Hilfe des effektiven Ein-Phasen-Modells (2.38) sehr weitreichende Aussagen über das Verhalten der Spannungsantwort gemacht werden. Für überdämpfte Kontakte $\beta_C = 0$ ist das Ein-Phasen-Modell sogar analytisch lösbar (s. Abschn. 2.4.1) und die Spannungsantwort $\langle V \rangle(I, \mathbf{B}^{(1)})$ wird in Abschnitt 2.4.2 in analytischer Form angegeben. Dabei zeigt sich, dass die Magnetfeldabhängigkeit der mittleren Spannung über den Betrag des Strukturfaktors $|S_N(\mathbf{B}^{(1)})|$ von der Flächenverteilung des Netzwerks bestimmt wird. Für zwei spezielle parallele Netzwerke werden die Strukturfaktoren und die Spannungsantworten in Abschnitt 2.4.3 diskutiert. Im zweiten Teil wird der Einfluss des sekundären Magnetfeldes auf die Spannungsantwort studiert, d.h. die induktiven Effekte werden berücksichtigt. Die Spannungsantworten, die für den induktiven Fall $\beta_{L,\max} > 0$ durch numerische Integration der Netzwerkgleichungen (2.41) bestimmt wurden, sind in Abschnitt 2.4.4 dargestellt. Dort zeigt sich, dass die qualitativen Aussagen, die mit Hilfe des Strukturfaktors im ersten Teil gemacht wurden, auch auf die Spannungsantwort induktiver

Netzwerke zutreffen. Die Diskussion endet mit Abschnitt 2.4.5 über die Auswirkungen von Streuungen der Kontaktparameter auf die Spannungsantwort.

2.4.1 Lösungen des Ein-Phasen-Modells für überdämpfte Kontakte

In Abschnitt 2.3.1 wird für den Grenzfall vernachlässigbarer Eigenfelder ($\beta_{L,\max} \ll 1$) gezeigt, dass parallele Netzwerke nur einen einzigen Freiheitsgrad besitzen, d.h. dass parallele Netzwerke mit Hilfe eines effektiven Ein-Phasen-Modells beschreibbar sind. Die Lösungen der Differentialgleichung dieses virtuellen Josephson-Kontakts werden nun für den Fall vernachlässigbarer kapazitiver Effekte, $\beta_C = 0$, und bei Anwesenheit quasistatischer primärer Magnetfelder $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(1)}$ (und zeitunabhängiger Flächenelemente \mathbf{a}_n) diskutiert. 'Quasistatisch' bedeutet hier, dass sich das primäre Magnetfeld nur auf einer Zeitskala ändert, die wesentlich größer als die charakteristische Zeit t_J ist, d.h. das primäre Magnetfeld ändert sich zeitlich nur adiabatisch. In diesem Fall verschwinden die Zeitableitungen der akkumulierten gewichteten Flüsse $\partial_\tau \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_C \rangle = 0 = \partial_\tau \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_R \rangle$ und die Differentialgleichung (2.38) für die Phasendifferenz $\phi(\tau) = \varphi_1(\tau)$ reduziert sich auf

$$\partial_\tau \phi(\tau) + |S_N(\mathbf{B}^{(1)})| \sin[\phi(\tau) + \delta_N(\mathbf{B}^{(1)})] = J_N. \quad (2.44)$$

Gleichung (2.44) ist eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung, für die analytische Lösungen angegeben werden können. Je nach Größe des Transportstroms I existieren verschiedenartige Lösungen:

Für unterkritische Transportströme $0 < J_N \leq |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|$ existiert eine zeitunabhängige Lösung von (2.44), die durch

$$\phi(\tau) = \arcsin\left(\frac{J_N}{|S_N(\mathbf{B}^{(1)})|}\right) - \delta_N(\mathbf{B}^{(1)}) \quad (2.45)$$

gegeben ist. In diesem stationären Fall verschwinden die Spannungen V_n über die Josephson-Kontakte und alle Ströme im Netzwerk sind zeitlich konstant (bzw. die Ströme variieren wie $\mathbf{B}^{(1)}$ nur adiabatisch). Nach (2.45) und (2.31) sind speziell die Ströme durch die Kontakte durch

$$I_n = I_{c,n} \sin(\varphi_n) = I_{c,n} \sin\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_n \rangle + \vartheta_N(\mathbf{B}^{(1)}) - \delta_N(\mathbf{B}^{(1)})\right), \quad (2.46)$$

gegeben, mit den akkumulierten Flächen $\boldsymbol{\alpha}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{a}_k$ und

$$\tan(\vartheta_N(\mathbf{B}^{(1)})) = J_N / \sqrt{|S_N(\mathbf{B}^{(1)})|^2 - J_N^2}.$$

Die restlichen Ströme $I_n^{(X)}$ und $I_n^{(Y)}$ in den Elektroden X und Y ergeben sich dann aus den Kirchhoffschen Knotenregeln (2.7), d.h. die Gleichungen (2.46) zusammen mit

(2.7) beschreiben die gesamte Stromverteilung für ein gegebenes primäres Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$.

Für $J_N > |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|$ besitzt (2.44) keine stationären Lösungen mehr, d.h. der magnetfeldabhängige kritische Strom des parallelen Netzwerks ist durch

$$I_{c,\text{Netzwerk}}(\mathbf{B}^{(1)}) = NI_c |S_N(\mathbf{B}^{(1)})| \quad (2.47)$$

gegeben. $I_{c,\text{Netzwerk}}$ ist der maximale Strom, der durch das parallele Netzwerk fließen kann, ohne dass zwischen den Elektroden X und Y eine endliche Spannung abfällt. Für den Fall $I < I_{c,\text{Netzwerk}}$ fließen also ausschließlich Supraströme durch die Josephson-Kontakte. Der kritische Strom des Netzwerks in Abhängigkeit des primären Magnetfeldes, ist proportional zum Betrag $|S_N(\mathbf{B}^{(1)})|$ des komplexen Struktur factors $S_N(\mathbf{B}^{(1)})$.

Da der Struktur factor $S_N(\mathbf{B}^{(1)})$ nach (2.36) direkt von der Flächenverteilung des parallelen Netzwerks bestimmt wird, beschreibt (2.47) die Abhängigkeit des kritischen Netzwerkstroms von der Netzwerkgeometrie. Im Hinblick auf die Modellierung granularer Supraleiter mit Hilfe paralleler Netzwerke kann (2.47) auch zur Diskussion der magnetischen Eigenschaften granularer Systeme dienen. So wurden parallele Netzwerke mit irregulären Flächenverteilungen bereits von Kleiner [89] als Modelle zur Beschreibung der Magnetfeldabhängigkeit des kritischen Stroms von Josephson-Bruchkontakten aus $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ -Sintermaterialien diskutiert.

Für überkritische Transportströme $J_N > |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|$ kann die Differentialgleichung des effektiven Modells (2.44) durch elementare Integration gelöst werden. Die dadurch gewonnene exakte zeitabhängige Lösung lautet

$$\phi(\tau) = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{J_N^2 - |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|^2}{J_N^2}} \tan \left(\frac{\pi\tau}{T_B/t_J} \right) + \frac{|S_N(\mathbf{B}^{(1)})|}{J_N} \right) - \delta_N(\mathbf{B}^{(1)}), \quad (2.48)$$

wobei durch

$$T_B = \frac{2\pi t_J}{\sqrt{J_N^2 - |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|^2}} \quad (2.49)$$

die magnetfeldabhängige Periodendauer definiert ist. T_B ist über die Josephson-Relation $\hbar\partial_t\varphi(t) = 2eV(t)$ mit der mittleren über das Netzwerk abfallenden Spannung $\langle V \rangle$ verknüpft und bestimmt die Periodendauer der Spannungs- und Stromoszillationen im Netzwerk (s. folgenden Abschnitt). Die Lösung (2.48) ist eine monoton mit der (dimensionslosen) Zeit τ wachsende Funktion, die über $\varphi_n(\tau) = \phi(\tau) + 2\pi/\Phi_0 \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_n \rangle$ die zeitliche Abhängigkeit aller eichinvarianten Phasen φ_n der Kontakte im Netzwerk festlegt. Für gegebenen (normierten) Transportstrom J_N und festgelegtes primäres Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ können also für $\beta_{L,\text{max}} \approx 0$ mit (2.48) alle Kontaktströme $I_n(\varphi_n)$ und daraus (und mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln) alle Ströme im Netzwerk bestimmt werden. Auf diese Weise beschreibt die Lösung $\phi(\tau)$ aus (2.48) die ganze Dynamik des parallelen Netzwerks für den Fall $\beta_{L,\text{max}} \approx 0$.

2.4.2 Spannungsantwort paralleler Netzwerke im Grenzfall verschwindender Induktivitäten

Im vorigen Abschnitt wurde für den überdämpften Grenzfall $\beta_C = 0$ und für zeitlich adiabatische primäre Magnetfelder die Lösungen des effektiven Ein-Phasen-Modells angegeben. Aus diesen Lösungen können die nach der Josephson-Relation $V_n(t) = (\hbar/2e) \partial_t \varphi(t)$ über die Josephson-Kontakte abfallenden Spannungen V_n bestimmt werden. Für unterkritische Transportströme $0 < J_N \leq |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|$ fällt über die Kontakte keine Spannung ab, da die Lösung von (2.44) zeitlich konstant ist und somit durch die Kontakte nur Supraströme fließen. Im überkritischen Fall $J_N > |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|$ fällt eine zeitlich variierende Spannung $V_n(\tau) = \hbar/(2e t_J) \partial_\tau \phi(\tau) = I_c R \partial_\tau \phi(\tau)$ ab, die nach (2.48) durch

$$V_n(\tau) = I_c R \frac{J_N^2 - |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|^2}{J_N + |S_N(\mathbf{B}^{(1)})| \sin \left(2\pi \nu_B t_J \tau + \arcsin \left(|S_N(\mathbf{B}^{(1)})| / J_N \right) \right)} \quad (2.50)$$

gegeben ist. In (2.50) wurde mit

$$2\pi \nu_B = \frac{2\pi}{T_B} = \frac{1}{t_J} \sqrt{J_N^2 - |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|^2} \quad (2.51)$$

die charakteristische magnetfeldabhängige Oszillationsfrequenz ν_B eingeführt mit der alle Josephson-Kontakte im Netzwerk oszillieren. Da die Kontakte parallel geschaltet sind, ist diese Frequenz für alle Kontakte gleich.

Die mittlere Spannung, die über die Elektroden X und Y abfällt, ist nach Abschnitt 2.2.7 durch den zeitlichen Mittelwert der schnell oszillierenden Spannung $V_n(\tau)$ gegeben

$$\langle V \rangle = \langle V_1 \rangle = \frac{t_J}{T_B} \int_0^{T_B/t_J} d\tau' V_1(\tau') = \frac{\hbar}{2e} \frac{1}{T_B} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\hbar}{2e} \frac{2\pi}{T_B} = \frac{h}{2e} \nu_B, \quad (2.52)$$

d.h. die mittlere abfallende Spannung ist proportional zur charakteristischen Oszillationsfrequenz ν_B . Die Einstein-Planck Relation $E = h \nu_B$ legt hier eine Analogie zu einem künstlichen Atom nahe, bei dem die Abstände der Energie-Niveaus (über das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$) verstimmbar sind. Das Frequenz-Spannungs Verhältnis ist wie beim einzelnen Josephson-Kontakt durch $\nu_B / \langle V \rangle = 2e/h \approx 483.6 \text{ MHz}/\mu\text{V}$ gegeben. Aus (2.51) und (2.52) ergibt sich schließlich die mittlere Spannung in Abhängigkeit vom Transportstrom I und vom primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ zu

$$\langle V \rangle (I, \mathbf{B}^{(1)}) = \frac{h}{2e} \nu_B = I_c R \sqrt{\left(\frac{I}{N I_c} \right)^2 - |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|^2}. \quad (2.53)$$

Gleichung (2.53) wird als Spannungsantwort des parallelen Netzwerks bezeichnet und ähnelt der I - $\langle V \rangle$ -Kennlinie eines einzelnen Kontakts mit Widerstand r und kritischem Strom i_c im RSJ-Modell $\langle V \rangle = r \sqrt{I^2 - i_c^2}$ [110, 147] (s. (1.6)). Mit den Transformatio-

nen $r \rightarrow R$ und $i_c \rightarrow I_c |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|$ folgt daraus direkt (2.53), d.h. wie in Abschnitt 2.3.1 diskutiert, verhält sich (für $\beta_{L,\max} \approx 0$) das parallele Netzwerk wie ein einziger effektiver Josephson-Kontakt mit magnetfeldabhängigem kritischem Strom $I_c |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|$. Dabei sei betont, dass diese Magnetfeldabhängigkeit nicht die Fraunhofer-artige Modulation von I_c mit dem primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ ist, wie sie bei ausgedehnten Josephson-Kontakten auftritt [6, 131, 136, 145, 153, 165]. Die bisher betrachteten Netzwerke bestehen aus punktförmigen Josephson-Kontakten, deren laterale Ausdehnung wesentlich kleiner ist als die Josephson-Eindringtiefe λ_J , so dass die kritischen Ströme dieser Kontakte von $\mathbf{B}^{(1)}$ unabhängig sind. Die Magnetfeldabhängigkeit des Strukturfaktors $S_N(\mathbf{B}^{(1)})$ und der mittleren Spannung $\langle V \rangle$ in (2.53) wird von der Flächenverteilung im Netzwerk bestimmt. Sind jedoch noch zusätzlich die kritischen Ströme der Josephson-Kontakte selbst vom primären Feld abhängig $I_c = I_c(\mathbf{B}^{(1)})$, so ist (mit der Ersetzung $I_c \rightarrow I_c(\mathbf{B}^{(1)})$) die mittlere Spannung auch in diesem Fall durch die Relation (2.53) bestimmt.

Da der Strukturfaktor unabhängig von den Kontakt-Widerständen ist und die Spannung $\langle V \rangle$ nach (2.53) nur vom Mittelwert R abhängt, beeinflussen Streuungen der Widerstände R_n (bei festem Mittelwert) die Spannungsantwort nicht. Dies liegt daran, dass bei den betrachteten Netzwerken die Josephson-Kontakte parallel geschaltet sind, und somit alle ohmschen Widerstände R_n im Ersatzschaltbild zu einem einzigen mittleren Widerstand R zusammengefasst werden können. Dies ist aber nur unter der Voraussetzung vernachlässigbarer Eigenfelder $\beta_{L,\max} \ll 1$ möglich, da dann wegen (2.33) alle normalleitenden Ströme $\hbar/(2e R_n) \partial_t \varphi_n = \hbar/(2e R_n) \partial_t \phi$ in Phase sind. Aus gleichen Grund hängt für endliche Kontaktkapazitäten C_n die mittlere Spannung nur vom Mittelwert C und nicht von der Verteilung der Kapazitäten C_n ab. Nur im Fall nicht adiabatischer primärer Magnetfelder $\partial_\tau \mathbf{B}^{(1)} > 0$ gehen die Verteilungen der Widerstände R_n und Kapazitäten C_n in das effektive RCSJ-Modell ein und können über die gewichteten akkumulierten Flächen α_R und α_C die Netzwerkdynamik und somit die Spannungsantwort beeinflussen. Die explizite Verteilung der kritischen Ströme $I_{c,n}$ im Netzwerk spielt dagegen eine große Rolle, da sie über den Strukturfaktor (2.36) den kritischen Netzwerkstrom $NI_c |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|$ und damit direkt die Spannungsantwort $\langle V \rangle(\mathbf{B}^{(1)})$ beeinflusst.

Der Betrag $|S_N(\mathbf{B}^{(1)})|$ des komplexen Strukturfaktors $S_N(\mathbf{B}^{(1)})$ bestimmt die Magnetfeldabhängigkeit der mittleren Spannung $\langle V \rangle$. Dabei sind die Spannung $\langle V \rangle$ und somit die Oszillationsfrequenz ν_B des lokalen Oszillators empfindlicher bezüglich des primären Magnetfeldes $\mathbf{B}^{(1)}$ als der Strukturfaktor selbst, da in (2.53) der Betrag des Strukturfaktors $|S_N(\mathbf{B}^{(1)})|$ quadratisch eingeht. Ferner bedeutet dies wegen $S_N(-\mathbf{B}^{(1)}) = \overline{S_N(\mathbf{B}^{(1)})}$, dass die Spannungsantwort symmetrisch zu $\mathbf{B}^{(1)} = 0$ ist, d.h. es gilt $\langle V \rangle(\mathbf{B}^{(1)}) = \langle V \rangle(-\mathbf{B}^{(1)})$. Diese Symmetrieeigenschaft besitzen induktive Netzwerke im Allgemeinen nicht. Dort erzeugt der sich im Netzwerk verteilende Transportstrom ein magnetisches Eigenfeld, das diese Symmetrie bricht (s. Abschn. 2.4.4).

Die Magnetfeldabhängigkeit des kritischen Netzwerkstroms $I_{c,\text{Netzwerk}}(\mathbf{B}^{(1)})$ und der mittleren Spannung $\langle V \rangle(\mathbf{B}^{(1)})$ wird nach (2.47) und (2.53) ausschließlich durch die

Abhängigkeit des Strukturfaktors von $\mathbf{B}^{(1)}$ bestimmt. Damit kann durch eine Diskussion der Periodizitätseigenschaften von $S_N(\mathbf{B}^{(1)})$ bezüglich $\mathbf{B}^{(1)}$ ein Ausdruck für Magnetfeldperiode der beiden Größen $I_{c,\text{Netzwerk}}$ und $\langle V \rangle$ hergeleitet werden. Zur Vereinfachung beschränken wir uns dabei auf planare Netzwerke, bei denen alle Schleifen in einer Ebene liegen. Sei \mathbf{n} der Normaleneinheitsvektor dieser Ebene und bezeichne a_n den Flächeninhalt der n -ten Schleife, so gilt für die Flächennormalen $\mathbf{a}_n = a_n \mathbf{n}$. Bezeichne ferner $B_{\perp}^{(1)}$ die Projektion des primären Magnetfeldes auf die Netzwerkebene $B_{\perp}^{(1)} = \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{n} \rangle$ und $P_{B^{(1)}}$ die Periode von $I_{c,\text{Netzwerk}}$ und $\langle V \rangle$, so dass

$$\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)}) = \langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)} + P_{B^{(1)}}) \quad \text{und} \quad I_{c,\text{Netzwerk}}(B_{\perp}^{(1)}) = I_{c,\text{Netzwerk}}(B_{\perp}^{(1)} + P_{B^{(1)}}) \quad (2.54)$$

gilt. Wählen wir $B_{\perp}^{(1)} = 0$ als Startpunkt und erhöhen ausgehend davon das primäre Magnetfeld $B_{\perp}^{(1)}$, so wird die Periode $P_{B^{(1)}}$ bei dem Wert von $B_{\perp}^{(1)}$ erreicht, für den die Werte aller akkumulierten Flüsse in (2.36) (wieder) ganzzahlige Vielfache des Flussquants Φ_0 annehmen³

$$P_{B^{(1)}} = \min \left[B_{\perp}^{(1)} > 0 \left| \sum_{m=1}^n \frac{B_{\perp}^{(1)} \cdot a_m}{\Phi_0} \varepsilon \mathbb{N}; \quad \forall n = 1, \dots, N-1 \right. \right]. \quad (2.55)$$

Mit der Definition des größten gemeinsamen Teilers einer Menge $\{q_1, \dots, q_M\}$ positiver reeller Zahlen q_n

$$ggT(q_1, \dots, q_M) = ggT(q_n) = \max \left[p \varepsilon \mathbb{R}^+ \left| \frac{q_n}{p} \varepsilon \mathbb{N}; \quad \forall n = 1, \dots, M \right. \right] \quad (2.56)$$

und der Relation $ggT(q_n) = ggT(\sum_{m=1}^n q_m)$ folgt aus (2.55) für die Periode $P_{B^{(1)}}$ eines planaren parallelen Netzwerks

$$P_{B^{(1)}} = \frac{\Phi_0}{ggT(a_1, \dots, a_{N-1})}. \quad (2.57)$$

Die Periode $P_{\Phi^{(1)}}$ bezüglich eines auf die Fläche a bezogenen Flusses $\Phi^{(1)} = B_{\perp}^{(1)} \cdot a$ ergibt sich daraus zu $P_{\Phi^{(1)}} = P_{B^{(1)}} \cdot a$. Nach (2.57) haben die Parameter der Josephson-Kontakte keinen Einfluss auf $P_{B^{(1)}}$ und ausschließlich die Wahl der Schleifenflächen a_n bestimmt die Magnetfeldperiodizität der Größen $I_{c,\text{Netzwerk}}$ und $\langle V \rangle$. Dabei spielt für $P_{B^{(1)}}$ die explizite Verteilung der Flächen keine Rolle. Werden bei einer gegebenen Wahl der Flächen, die Flächen lediglich permutiert, so ändert dies die Periode $P_{B^{(1)}}$ nicht. (Eine derartige Permutation ändert aber sehr wohl die $\langle V \rangle(\mathbf{B}^{(1)})$ - bzw. $I_{c,\text{Netzwerk}}(\mathbf{B}^{(1)})$ -Kennlinien (s. Abschn. 2.4.4)). Gleichung (2.57) zeigt zudem, dass durch eine geschickte Wahl der Schleifenflächen a_n die Magnetfeldperiode P_B sehr groß werden kann. Dies deutet bereits an, dass parallele Netzwerke derart ausgelegt werden können, dass sie eine eindeutige $\langle V \rangle$ - $\mathbf{B}^{(1)}$ -Kennlinie besitzen. Derartige Netzwerke

³Die Menge der natürlichen Zahlen ist hier mit \mathbb{N} , die Menge der ganzen Zahlen mit \mathbb{Z} und die Menge der reellen positiven Zahlen mit \mathbb{R}^+ bezeichnet.

werden in Abschnitt 2.7 ausführlicher diskutiert, da sie für die hochpräzise *absolute* Messung magnetischer Felder verwendet werden können.

2.4.3 Strukturfaktoren, kritische Ströme und Spannungsantworten spezieller paralleler Netzwerke

Für homogene primäre Magnetfelder $\mathbf{B}^{(1)}$ und planare parallele Netzwerke mit speziell gewählten Flächenverteilungen werden im Folgenden die zugehörigen Strukturfaktoren $S_N(\mathbf{B}^{(1)})$ und die daraus folgenden kritischen Ströme $I_{c,\text{Netzwerk}}(\mathbf{B}^{(1)})$ und Spannungsantwortfunktionen $\langle V \rangle(I, \mathbf{B}^{(1)})$ diskutiert.

Wir beginnen die Diskussion mit dem kleinsten parallelen Josephson-Kontakt-Netzwerk, dem sogenannten dc SQUID (s. Abb. 1.3 (a)). Die Abkürzung SQUID steht dabei für 'Superconducting Quantum Interference Device' und "dc" bezeichnet die Betriebsart, da dc SQUIDs in einer Vielzahl von Anwendungen mit einem zeitlich konstanten Transportstrom I ("direct current") betrieben werden. dc SQUIDs sind Ein-Schlaufen-Quanteninterferometer und bestehen aus $N = 2$ parallel geschalteten Josephson-Kontakten, die gemeinsam eine Schlaufe mit Flächeninhalt a definieren. Bezeichne \mathbf{a} (mit $|\mathbf{a}| = a$) das orientierte Flächenelement der planaren SQUID-Schlaufe, so besitzt der Strukturfaktor nach (2.36) die einfache Form

$$S_2(\mathbf{B}^{(1)}) = \frac{1}{2} \left(\frac{I_{c,1}}{I_c} + \frac{I_{c,2}}{I_c} \exp \left(\frac{2\pi i}{\Phi_0} \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a} \rangle \right) \right). \quad (2.58)$$

Werden zur Vereinfachung identische überdämpfte Kontakte angenommen, d.h. $I_{c,1} = I_{c,2} = I_c$, so folgt für den kritischen Strom des dc SQUIDs die bekannte Relation [33]

$$I_{c,\text{SQUID}}(\Phi^{(1)}) = 2I_c |S_2(\mathbf{B}^{(1)})| = 2I_c |\cos(\pi \Phi^{(1)}/\Phi_0)|, \quad (2.59)$$

wobei $\Phi^{(1)} = \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a} \rangle$ den magnetischen Fluss durch die SQUID-Schlaufe bezeichnet. Für überkritische Transportströme folgt daraus die Spannungsantwortfunktion des dc SQUIDs zu

$$\langle V \rangle(I, \mathbf{B}^{(1)}) = I_c R \sqrt{\left(\frac{I}{2I_c} \right)^2 - \left| \cos \left(\pi \frac{\langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a} \rangle}{\Phi_0} \right) \right|^2}. \quad (2.60)$$

Dies ist die bekannte Abhängigkeit der dc SQUID Ausgangsspannung vom Transportstrom und vom primären magnetischen Fluss [33] (s. (1.7)). Für konstant gehaltenen Transportstrom I ist die Ausgangsspannung Φ_0 -periodisch bezüglich $\Phi^{(1)}$ und besitzt für ganzzahlige Vielfache des Flussquants $\Phi^{(1)} = n \Phi_0$ Minima und für $\Phi^{(1)} = n \Phi_0/2$ Maxima (s. Abb. 1.3 (b)). Diese Spannungsmodulation wird verwendet, um mit Hilfe von dc SQUIDs sehr empfindlich Magnetfelder zu detektieren [6, 5, 21, 22, 48, 94, 165]. Da die Spannungsantwort von dc SQUIDs jedoch Φ_0 -periodisch ist, können SQUID-Magnetometer (mit $N = 2$) nicht zur *absoluten* Messung magnetischer Felder verwendet werden. Mit Ein-Schlaufen-Quanteninterferometern sind nur *relative* Magnetfeldmessungen möglich.

Betrachten wir nun ein reguläres periodisches Netzwerk aus N_r identischen überdämpften Josephson-Kontakten $R_n = R$, $I_{c,n} = I_c$, $C_n = 0$ und $N_r - 1$ identischen Schlaufenflächen $\mathbf{a}_m = \mathbf{a}$ (mit $1 \leq n \leq N$ und $1 \leq m \leq N - 1$), so dass $\langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_m \rangle = \Phi^{(1)} = \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a} \rangle$ unabhängig vom Index m . $\Phi^{(1)}$ ist der auf eine Schlaufe bezogene primäre magnetische Fluss. In diesem Fall wird der Strukturfaktor $S_{N_r}(\Phi^{(1)}) \equiv S_{N_r}(\mathbf{B}^{(1)})$ eine geometrische Reihe, und es folgt

$$S_{N_r}(\Phi^{(1)}) = \frac{1}{N_r} \sum_{n=1}^{N_r} \exp\left(2\pi i \frac{\Phi^{(1)}}{\Phi_0} (n-1)\right) = \frac{\sin\left(\pi \frac{\Phi^{(1)}}{\Phi_0} N_r\right)}{N_r \sin\left(\pi \frac{\Phi^{(1)}}{\Phi_0}\right)} \exp\left[\pi i \frac{\Phi^{(1)}}{\Phi_0} (N_r - 1)\right]. \quad (2.61)$$

Der kritische Strom des regulären Netzwerks ergibt sich daraus zu

$$I_{c,\text{Netzwerk}}(\Phi^{(1)}) = N_r I_c |S_{N_r}(\Phi^{(1)})| = I_c \left| \frac{\sin\left(\pi \frac{\Phi^{(1)}}{\Phi_0} N_r\right)}{\sin\left(\pi \frac{\Phi^{(1)}}{\Phi_0}\right)} \right|, \quad (2.62)$$

d.h. man erhält die bekannte Relation für reguläre Netzwerke [32]. Für ein Netzwerk mit $N_r = 11$ Kontakten ist in Abb. 2.4 (a) die Magnetfeldabhängigkeit des kritischen Stroms nach (2.62) dargestellt. Die Breite der ausgeprägten Maxima von $I_{c,\text{Netzwerk}}$ sind proportional zu $1/N_r$ verschmälert (s. unten) und die Periode ist durch das Flussquant Φ_0 gegeben. Diese Periode des kritischen Stroms besitzen nach (2.57) (unabhängig von N_r) alle regulären Netzwerke, wenn der magnetische Fluss auf die elementare Schlaufenfläche bezogen wird (d.h. $\Phi^{(1)} = \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a} \rangle$). Neben der tatsächlichen Periode $P_{\Phi^{(1)}} = \Phi_0$, die einem Eindringen eines zusätzlichen Flussquants Φ_0 in jede der N_r Schlaufen entspricht, existiert noch eine weitere kleinere (Quasi-) Periode $P'_{\Phi^{(1)}} = \Phi_0/N_r$. Diese zweite Periode $P'_{\Phi^{(1)}}$ entspricht dem Eindringen des magnetischen Flusses in das Interferometer als Ganzem. Zwischen zwei benachbarten Hauptmaxima liegen demnach $N_r - 2 = 9$ Nebenmaxima und $N_r - 1 = 10$ Nebenminima. Die Abhängigkeit (2.62) gleicht der eines Beugungsmusters aus der Optik, wenn ebene Wellen auf ein Gitter mit N_r identischen sehr schmalen Öffnungen treffen.

Gleichung (2.62) gilt nur für den Fall verschwindender Induktivitäten $\beta_{L,\text{max}} = 0$. Im Fall endlicher induktiver Kopplungen können mehrere stabile stationäre Stromzustände existieren, für die keine Spannung über die Elektroden des Netzwerks abfällt. Jeder dieser stationären Zustände besitzt seinen eigenen Stabilitätsbereich, der neben der Art der Stromzufuhr und der Größe der Induktivitäten von der Größe des Transportstroms I und vom primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ abhängt. Der maximale Suprastrom, der durch das Netzwerk fließen kann, hängt deshalb zusätzlich zu I und $\mathbf{B}^{(1)}$ vom stationären Zustand ab, in dem sich das Netzwerk gerade befindet. Für eine ausführliche Diskussion der kritischen Stöme induktiver regulärer Netzwerke sei an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen [17, 18, 115, 116, 142, 144, 157, 170].

Die Diskussion regulärer Netzwerke ermöglicht den Übergang von einem parallelen Netzwerk mit diskreten Josephson-Kontakten zu einem einzigen "langen" Kontakt. Betrachtet man in (2.62) den Grenzübergang $N_r \rightarrow \infty$ unter der Bedingung einer

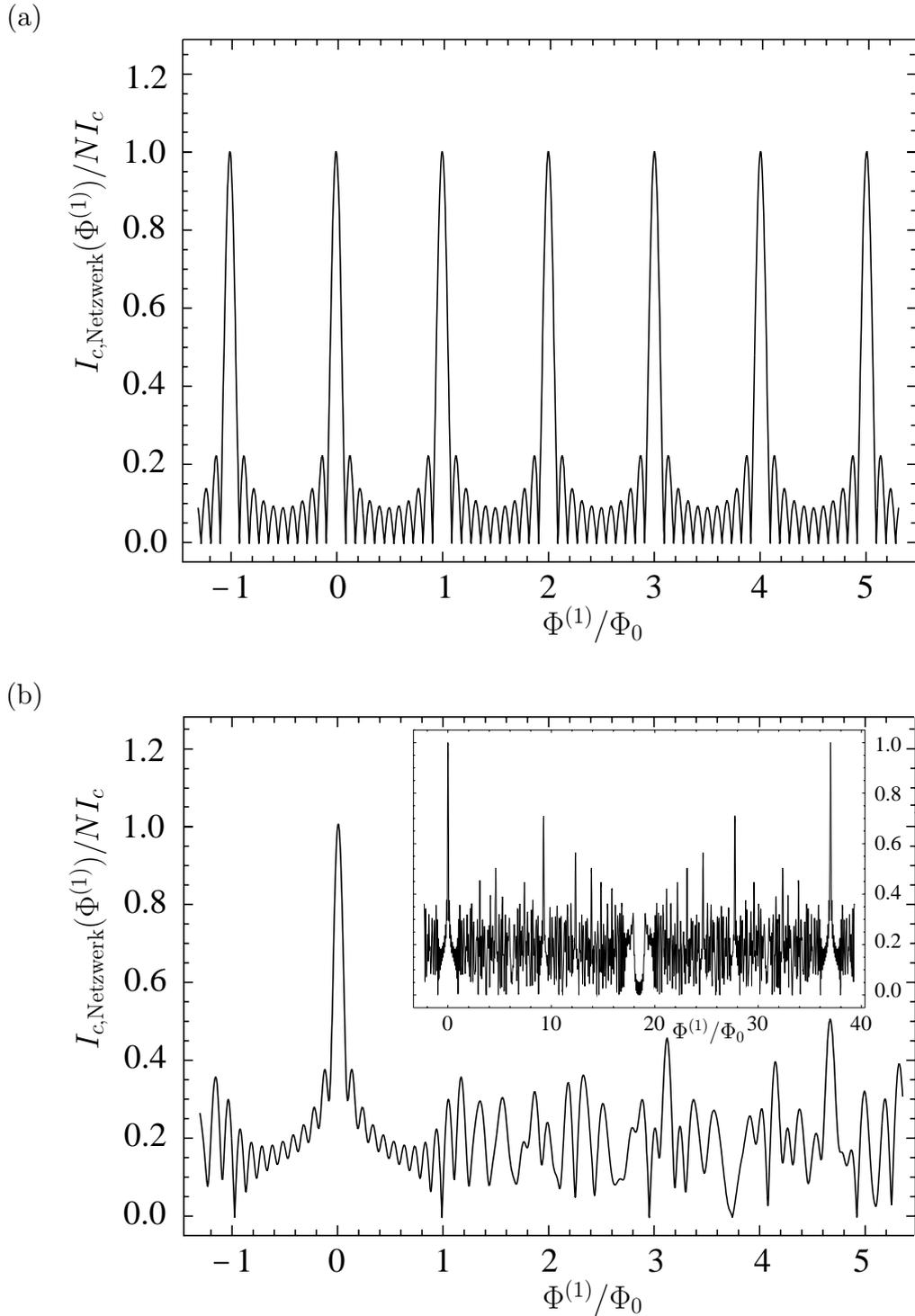


Abbildung 2.4: Theoretischer kritischer Strom $I_{c,\text{Netzwerk}}(\Phi^{(1)})$ des parallelen Netzwerks für verschwindende Induktivitäten in Abhängigkeit vom primären magnetischen Fluss $\Phi^{(1)}$ durch die größte Schlaufe: (a) reguläres periodisches Netzwerk mit $N_r = 11$ identischen Kontakten, (b) Gaußsches Netzwerk mit $N_G = 20$ Kontakten und gleicher Gesamtfläche wie reguläres Netzwerk aus (a). Der kritische Strom besitzt im regulären Fall (a) eine Periode Φ_0 wogegen das Gaußsche Netzwerk in (b) die Periode $(2N_G - 3)\Phi_0 = 37\Phi_0$ besitzt. Die größte Schlaufenfläche $|a_{r,\text{max}}|$ des regulären Netzwerks ist mit $|a_{r,\text{max}}| = 0.98 |a_{G,\text{max}}|$ mit der größten Schlaufenfläche $|a_{G,\text{max}}|$ des Gaußschen Netzwerks vergleichbar.

konstanten Gesamtfläche $\mathbf{a}_{tot} = (N_r - 1) \mathbf{a} = const.$, so erhält man den kritischen Strom $i_c(\Phi_{tot})$ eines einzelnen Josephson-Kontaktes mit endlicher Gesamtfläche \mathbf{a}_{tot} und Maximalwert i_c

$$i_c(\Phi_{tot}) = i_c \left| \sin \left(\pi \frac{\Phi_{tot}}{\Phi_0} \right) / \left(\pi \frac{\Phi_{tot}}{\Phi_0} \right) \right|. \quad (2.63)$$

Gleichung (2.63) kann mit dem Fraunhofer Diffraktionsmuster aus der Optik verglichen werden und beschreibt das Experiment von Rowell [136].⁴ Eindimensionale Josephson-Kontakt-Netzwerke gehen nach dem hier beschriebenen Grenzübergang also in Josephson-Kontakte mit endlicher Ausdehnung über, d.h. das Ein-Phasen-Modell wie in Abschnitt 2.3.1 beschrieben, zeigt hier die richtige Asymptotik. Lässt man in (2.47) die anfangs gemachte Annahme punktförmiger Kontakte (d.h. $I_{c,n}$ magnetfeldunabhängig) fallen, so beschreibt die Kombination von (2.63) mit (2.47) ein Netzwerk, in dem die kritischen Ströme der Kontakte endliche Ausdehnung besitzen. In diesem Fall ist der resultierende maximale Suprastrom $I_{c,Netzwerk}$ des Netzwerks eine Überlagerung des Diffraktionsmusters (2.47) mit dem Fraunhofermuster der einzelnen Josephson-Kontakte [30].

Eine $I_{c,Netzwerk}\mathbf{B}^{(1)}$ -Charakteristik mit einer viel größeren Periode bezüglich des primären Magnetfeldes besitzt ein Josephson-Kontakt-Netzwerk, in dem die orientierten Flächenelemente \mathbf{a}_m nach der Relation $\mathbf{a}_m = (2m - 1) \mathbf{a}_1$ linear anwachsen ($1 \leq m \leq N_G$). Nehmen wir auch hier vereinfachend identische Kontakte mit $I_{c,n} = I_c$ an, so ergibt sich wegen $\sum_{m=1}^n 2m - 1 = n^2$ der Strukturfaktor zu

$$S_{N_G}(\mathbf{B}^{(1)}) = \frac{1}{N_G} \sum_{n=0}^{N_G-1} \exp \left[\frac{2\pi i}{\Phi_0} \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_1 \rangle n^2 \right]. \quad (2.64)$$

Der Strukturfaktor S_{N_G} besitzt hier also die spezielle Form einer Reihe, wie sie bereits von Gauß untersucht wurden [140]. Aus diesem Grund werden solche Anordnungen im Folgenden Gaußsche Netzwerke genannt. Die Gesamtfläche eines Gaußschen Netzwerks ist durch $\sum_{m=1}^{N_G-1} (2m - 1) |\mathbf{a}_1| = (N_G - 1)^2 |\mathbf{a}_1|$ gegeben, wobei \mathbf{a}_1 das kleinste und $\mathbf{a}_{N_G-1} = (2N_G - 3) \mathbf{a}_1$ das größte Flächenelement bezeichnen. Abbildung 2.4 (b) zeigt die Magnetfeldabhängigkeit des kritischen Stroms für ein Gaußsches Netzwerk mit $N_G = 20$ Kontakten.

Um einen sinnvollen Vergleich zwischen zwei Netzwerken zu erhalten, sollten beide möglichst die gleiche Gesamtfläche besitzen und die maximalen Flächen beider Netzwerke sollten wegen induktiver Effekte mit der einer optimal gewählten SQUID-Schlaufenfläche übereinstimmen. Sind beide Kriterien erfüllt, so besitzen die Netzwerke eine vergleichbare Magnetfeldsensitivität. Beide Kriterien zusammen implizieren, für $N \gg 1$, dass das Gaußsche Netzwerk im Vergleich zum regulären Netzwerk doppelt so viele Josephson-Kontakte besitzt $N_G \simeq 2N_r$. Die Netzwerke aus Abbildung 2.4 sind so

⁴Dieses Experiment zeigt die Fraunhofer-artige Magnetfeldabhängigkeit des kritischen Stroms eines einzelnen ausgedehnten Josephson-Tunnelkontakts.

gewählt, dass sie beide oben genannten Kriterien erfüllen. Der magnetische Fluss $\Phi^{(1)}$ bezieht sich in beiden Fällen jeweils auf die größte Netzwerkschleufe. Da beide Netzwerke mit $|\mathbf{a}_{r,\max}| = 0.98 |\mathbf{a}_{G,\max}|$ vergleichbare maximale Flächen $|\mathbf{a}_{r,\max}|$ und $|\mathbf{a}_{G,\max}|$ besitzen, sind die jeweils zu $\Phi^{(1)}$ gehörigen Magnetfelder der Abbildungen 2.4 (a) und (b) ebenfalls vergleichbar.

Abbildung 2.4 zeigt, dass sich der kritische Strom des Gaußschen Netzwerks deutlich von dem des regulären Netzwerks unterscheidet. Die Periode des Gaußschen Netzwerks ist nach (2.57) wegen $ggT(a_1, \dots, a_{N_G-1}) = a_1 = a_{N_G-1}/(2N_G - 3)$ durch $P_{\Phi^{(1)}} = (2N_G - 3) \Phi_0 = 37\Phi_0$ gegeben und damit wesentlich größer als die Periode des regulären Netzwerks, die durch das Flussquant Φ_0 gegeben ist. Eine ganze Periode $I_{c,\text{Netzwerk}}\text{-}\Phi^{(1)}$ -Charakteristik des Gaußschen Netzwerks zeigt die Teilabbildung in Abb. 2.4 (b). Dort ist am Beispiel der ersten Periode deutlich zu sehen, dass der kritische Strom des Gaußschen Netzwerks zwischen den verbleibenden Maxima bei $\Phi^{(1)} = 0, \pm 37\Phi_0, \pm 74\Phi_0, \dots$ bis auf wenige lokale Nebenminima deutlich reduziert ist. Diese verbleibenden lokalen Nebenminima treten dann auf, wenn nur in einem Teil der Schleifen die Bedingung $\Phi_n^{(1)}/\Phi_0 \in \mathbb{Z}$ (zumindest teilweise) erfüllt ist. Durch die Verwendung einer größeren Anzahl von Netzwerkschleifen und geeigneter Flächenverteilungen können die Modulationen des kritischen Netzwerk-Stroms außerhalb der verbleibenden (globalen) Maxima noch weiter reduziert werden.

Die $I_{c,\text{Netzwerk}}\text{-}\Phi^{(1)}$ -Charakteristik des Gaußschen Netzwerks besitzt dagegen in der Nähe der verbleibenden globalen Maxima bei $\Phi^{(1)} = 0, \pm 37\Phi_0, \pm 74\Phi_0, \dots$ einen mit der Charakteristik des regulären Netzwerks qualitativ vergleichbaren Verlauf. Dies liegt daran, dass für diese $\Phi^{(1)}$ -Werte bei beiden Netzwerken die magnetischen Flüsse in *allen* Schleifen ganzzahlige Vielfache des elementaren Flussquants Φ_0 sind: $\Phi_n^{(1)}/\Phi_0 \in \mathbb{Z}$ für alle $n = 1, \dots, N_G-1$.

Mit dem Konzept des Strukturfaktors können im Grenzfall $\beta_{L,\max} \ll 1$ der maximale Suprastrom $I_{c,\text{Netzwerk}}(\mathbf{B}^{(1)})$ und die Spannungsantwortfunktion $\langle V \rangle(\mathbf{B}^{(1)})$ gegebener paralleler Netzwerke mit wenig Aufwand berechnet werden. Da der Strukturfaktor mit (2.36) einfach bestimmt werden kann, ist es bei gegebener Flächenverteilung leicht möglich die Eigenschaften und Kennlinien der vorgegebenen Netzwerke zu ermitteln. Nun ist häufig die umgekehrte Aufgabe zu lösen, d.h. es sollen Netzwerke synthetisiert werden, die ganz bestimmte gewünschte Eigenschaften besitzen. Für eine deduktive Vorgehensweise zur Lösung dieses Problems sind Regeln nötig, die ausgehend von den gewünschten Eigenschaften die möglichen Flächenverteilungen eingrenzen. In Abschnitt 2.7 werden notwendige Bedingungen für die Flächenverteilungen angegeben, so dass die zugehörigen parallele Netzwerke eine eindeutige und signifikante Spannungsantwortfunktion bezüglich des primären Magnetfeldes besitzen. Um nun allgemeinere und vor allem hinreichende Bedingungen herzuleiten, damit z.B. die Nebenmaxima der $I_{c,\text{Netzwerk}}\text{-}\mathbf{B}^{(1)}$ -Charakteristik in vorgegebenen Magnetfeldintervallen eine vorgegebene Höhe nicht überschreiten, bedarf es einer zahlentheoretischen Analyse des komplexen Strukturfaktors. Eine solche strenge Analyse wird in dieser Arbeit nicht gegeben und bedarf weiterer Untersuchungen. An dieser Stelle sollen jedoch zwei Beispiele gegeben

werden, dass Strukturfaktoren interessante Eigenschaften besitzen. Betrachten wir den Strukturfaktor des Gaußschen Netzwerks (2.64) mit N Kontakten. Ist der magnetische Fluss, der die kleinste Schlaufe durchsetzt, durch ein rationales Vielfaches eines halben Flussquants $\Phi_0/2$ gegeben, d.h. gilt $\Phi_1 = \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_1 \rangle = (M/N) (\Phi_0/2)$, so kann der Strukturfaktor $S_N^{(M)} \equiv S_N(\mathbf{B}^{(1)})$ durch ein Ergebnis von Gauß [104] bestimmt werden

$$S_N^{(M)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\pi i \frac{M}{N} n^2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{N \cdot M}} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-\pi i \frac{N}{M} m^2}. \quad (2.65)$$

Die Periode des Gaußschen Netzwerks kann direkt aus (2.65) abgelesen werden. Sie ist wegen $S_N^{(M+2N)} = S_N^{(M)}$ durch $(2N/N) (\Phi_0/2) = \Phi_0$ gegeben, wenn der primäre Fluss auf die kleinste Fläche bezogen wird. Beziehen wir den primären Fluss wieder auf die größte Fläche, so erhalten wir daraus das bereits bekannte Resultat $P_{\Phi^{(1)}} = (2N-3) \Phi_0$. Ist speziell $M = 2$, d.h. der magnetische Fluss Φ_1 ist durch $\Phi_1 = 1/N \Phi_0$ gegeben, so separiert der Strukturfaktor sogar [140]

$$S_N^{(M=2)} = (-1)^{\frac{(N_1-1)(N_2-1)}{4}} S_{N_1}^{(M=2)} S_{N_2}^{(M=2)}, \quad (2.66)$$

wenn die Anzahl N der Josephson-Kontakte das Produkt zweier Primzahlen N_1 und N_2 ist $N = N_1 N_2$. Diese Ergebnisse zeigen, dass die Eigenschaften Gaußscher Netzwerke durch die Gesetze der Zahlentheorie bestimmt werden.

Ist für gegebenes primäres Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ der Transportstrom I größer als der maximal mögliche Suprastrom $I_{c,\text{Netzwerk}}(\mathbf{B}^{(1)}) = N I_c |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|$, so fällt über die Elektroden des Netzwerks eine zeitlich variierende Spannung ab, deren Mittelwert $\langle V \rangle$ durch (2.53) bestimmt ist. In diesem Fall wird der Transportstrom I als überkritisch bezeichnet. Für die beiden oben beschriebenen Netzwerke sind die Spannungsantworten in Abb. 2.5 dargestellt, wobei der primäre magnetische Fluß $\Phi^{(1)}$ durch die größte Netzwerkschleife als Abszisse gewählt ist. Der Transportstrom wurde in beiden Fällen zu $I = 1.1 N I_c$ knapp größer als der maximal mögliche subkritische Suprastrom $\max(I_{c,\text{Netzwerk}}) = N I_c$ gewählt, so dass $\langle V \rangle$ für alle Werte des primären Magnetfeldes nicht verschwindet, d.h. es gilt $\langle V \rangle \neq 0, \forall \Phi^{(1)}$.

Abb. 2.5 (a) zeigt die mittlere Spannung des regulären Netzwerks mit $N_r = 11$ Kontakten. Sie ist nach (2.53) und (2.62) durch die Relation

$$\langle V \rangle (I, \Phi^{(1)}) = I_c R \sqrt{\left(\frac{I}{N_r I_c} \right)^2 - \left| \frac{\sin \left(\pi \frac{\Phi^{(1)}}{\Phi_0} N_r \right)}{N_r \sin \left(\pi \frac{\Phi^{(1)}}{\Phi_0} \right)} \right|^2}. \quad (2.67)$$

gegeben und besitzt dieselbe Periode wie der kritische Strom aus (2.62), d.h. auch $\langle V \rangle$ ist Φ_0 -periodisch. Aufgrund dieser Periodizität können Magnetfelder mit Magnetometern auf der Basis von regulären Netzwerken nur relativ gemessen werden und eine direkte *absolute* Magnetfeldmessung ist nicht möglich. Bei ganzzahligen Werten von Φ_0

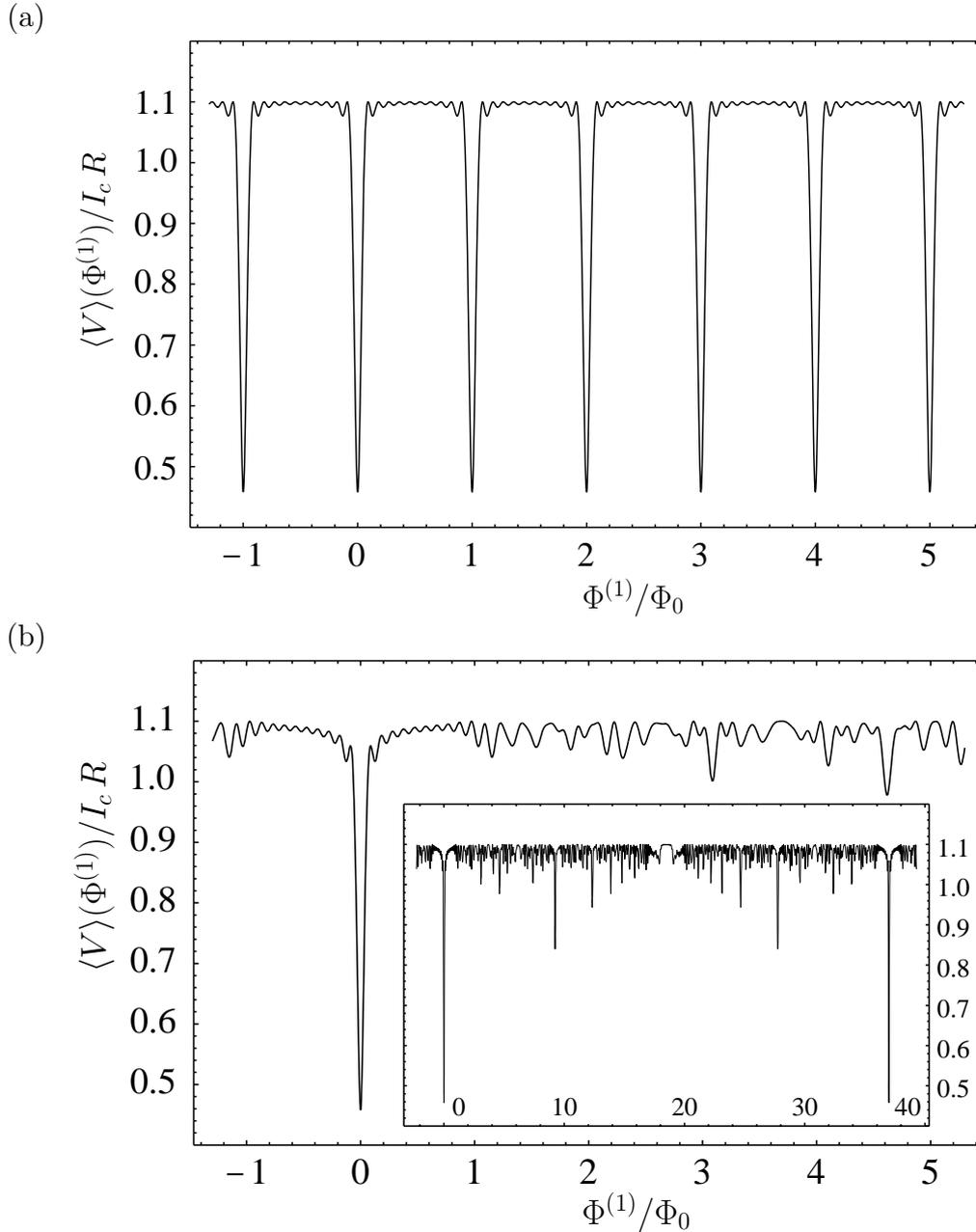


Abbildung 2.5: Theoretische Spannungsantwort $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ des parallelen Netzwerks für den Fall verschwindender Induktivitäten in Abhängigkeit vom primären magnetischen Fluss $\Phi^{(1)}$ durch die größte Schlaufe: (a) reguläres periodisches Netzwerk mit $N_r = 11$ Kontakten, (b) Gaußsches Netzwerk mit $N_G = 20$ Kontakten und gleicher Gesamtfläche wie reguläres Netzwerk aus (a). Die Ausgangsspannung besitzt im regulären Fall (a) eine Periode Φ_0 wogegen das Gaußsche Netzwerk in (b) die Periode $(2N_G - 3)\Phi_0 = 37\Phi_0$ besitzt. Die größte Schlaufenfläche $|a_{r,\max}|$ des regulären Netzwerks ist mit $|a_{r,\max}| = 0.98 |a_{G,\max}|$ mit der größten Schlaufenfläche $|a_{G,\max}|$ des Gaußschen Netzwerks vergleichbar. In beiden Fällen wurde der Transportstrom zu $I = 1.1 N I_c$ gewählt.

wird die mittlere Spannung minimal, d.h. sie besitzt für die primären Magnetfeldwerte Minima für die der kritische Netzwerkstrom maximal ist. Für $I = 1.1 N_I I_c$ sind die Werte dieser globalen Minima durch $\langle V \rangle_{\min} = I_c R \sqrt{(I/(N_r I_c))^2 - 1} \approx 0.46 I_c R$ gegeben. Der maximale Spannungsabfall $\langle V \rangle_{\max} = I_c R (I/(N_r I_c)) = 1.1 I_c R$ dagegen wird für Magnetfeldwerte erreicht, für die der kritische Strom des Netzwerks verschwindet (s. (2.53)). Dies ist nach (2.62) für $\Phi^{(1)} = n/N_r \Phi_0$ mit $1 \leq n \leq N_r - 1$ der Fall. Demnach liegen zwischen zwei benachbarten globalen Minima jeweils $N_r - 1$ Maxima.

In Abb. 2.5 (b) ist die Spannungsantwort des Gaußschen Netzwerks mit $N_G = 20$ Kontakten in Abhängigkeit des primären Magnetfeldes dargestellt. Sie besitzt eine um $(2N_G - 3)$ größere Periode bezüglich $\Phi^{(1)}$ im Vergleich zum regulären Netzwerk, d.h. die globalen Minima treten nun bei $\Phi^{(1)} \approx 0, \pm(2N_G - 3)\Phi_0, \dots = 0, \pm 37\Phi_0, \dots$ auf. Die extremalen Spannungswerte bleiben unverändert gleich denen des regulären Netzwerks, d.h. $\langle V \rangle_{\min} = 0.46 I_c R$ und $\langle V \rangle_{\max} = 1.1 I_c R$. Da die Grundfläche des Gaußschen Netzwerks mit der des regulären Netzwerks aus (a) identisch ist, und die maximalen Flächen beider Netzwerke vergleichbar sind, besitzen beide Netzwerke auch vergleichbare Magnetfeldempfindlichkeiten. Dies bedeutet, dass sich die Modulationen von $\langle V \rangle$ in der Nähe der globalen Minima (für $\Phi^{(1)} \approx 0, \pm 37\Phi_0, \dots$) qualitativ nur gering unterscheiden, so dass dort auch die Transferfaktoren $V_{\Phi^{(1)}} = |\partial \langle V \rangle / \partial \Phi^{(1)}|_{\max}$ vergleichbar groß sind.

Die globalen Minima bei $\Phi^{(1)} = kP_{\Phi^{(1)}}$ treten bei primären Magnetfeldwerten auf, für die der magnetische Fluss in jeder Schlaufe des Netzwerks einem ganzzahligen Vielfachen des Flussquants Φ_0 entspricht. In diesem Fall überlagern sich die Ströme durch die Kontakte kohärent, so dass der mittlere Spannungsabfall für $\Phi^{(1)} = kP_{\Phi^{(1)}}$ minimal wird. Kommt es nun außerhalb der globalen Minima zu einer *teilweisen* kohärenten Superposition der Kontaktströme, so können zusätzliche signifikante lokale Minima in der $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ -Kurve auftreten. Abbildung 2.5 (b) zeigt jedoch, dass dies beim Gaußschen Netzwerk nicht der Fall ist. Alle lokalen Nebenminima unterscheiden sich signifikant von den globalen Minima, so dass die Magnetfeldwerte mit $\Phi^{(1)} = kP_{\Phi^{(1)}}$ eindeutig ausgezeichnet sind. Es sei noch angemerkt, dass die in der $I_{c,\text{Netzwerk}}\text{-}\Phi^{(1)}$ -Charakteristik des Gaußschen Netzwerks innerhalb einer Periode auftretenden Nebenextrema (s. Abb. 2.4) in der Spannungsantwortfunktion weniger ausgeprägt auftreten, da in $\langle V \rangle$ der Betrag des kritischen Netzwerkstroms quadratisch eingeht.

Die Abhängigkeit der Spannungsantwort des Gaußschen Netzwerks vom Transportstrom I zeigt Abbildung 2.6. Der Transportstrom wird bei $I = 0.2 N_G I_c$ beginnend in Schritten von $0.3 N_G I_c$ bis $2.0 N_G I_c$ erhöht. Für den kleinsten Wert $I = 0.2 N_G I_c$ existieren noch Bereiche des primären Magnetfeldes, für die die mittlere Spannung $\langle V \rangle$ verschwindet, d.h. für diese Werte von $\Phi^{(1)}$ ist der Transportstrom I kleiner als der kritische Strom $I_{c,\text{Netzwerk}}$ des Netzwerks. In den Fällen $I = 0.5 N_G I_c$ und $I = 0.8 N_G I_c$ dagegen verschwindet die Spannung (im dargestellten Bereich) nur in einer kleinen Umgebung Nahe $\Phi^{(1)} = 0$. Erst für $I > N_G I_c$ ist der treibende Strom für alle Magnetfeldstärken größer als $I_{c,\text{Netzwerk}}$, so dass für alle $\Phi^{(1)}$ -Werte eine endliche Spannung $\langle V \rangle > 0$ abfällt. In diesem Fall besitzt die Spannungsantwort für

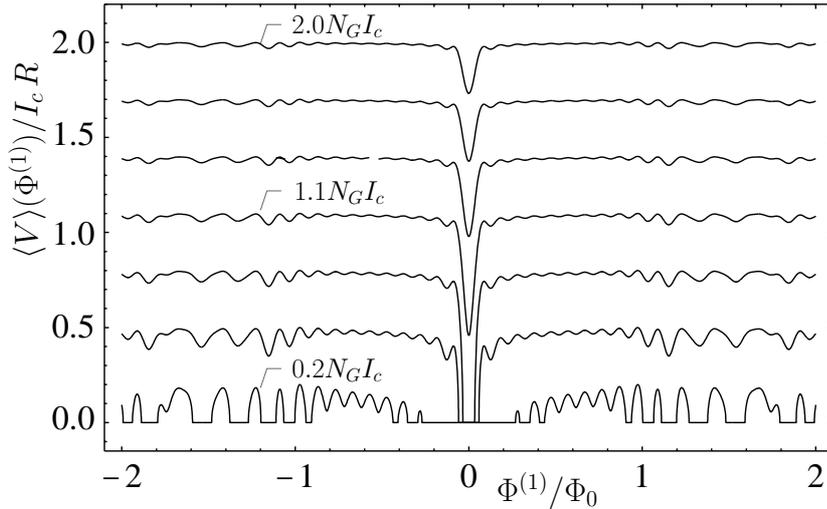


Abbildung 2.6: Theoretische Spannungsantwort $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ des Gaußschen Netzwerks mit überdämpften Kontakten für verschwindende Induktivitäten und verschiedene Werte des Transportstroms. Der Transportstrom wird bei $I = 0.2 N_G I_c$ beginnend in Schritten von $0.3 N_G I_c$ bis $2.0 N_G I_c$ erhöht. $\Phi^{(1)}$ ist der vom primären Magnetfeld durch die größte Schlaufe induzierte magnetische Fluss.

verschwindendes primäres Magnetfeld $\Phi^{(1)} = 0$ ein definiertes Minimum, das innerhalb einer Periode $|\Phi^{(1)}| < P_{\Phi^{(1)}}$ eindeutig ist. Der Spannungshub, d.h. die Differenz zwischen $\langle V \rangle_{\min} = \langle V \rangle(\Phi^{(1)} = 0)$ und $\langle V \rangle_{\max}$, und damit die Transferfunktion $V_{\Phi^{(1)}} = \left| \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial \Phi^{(1)}} \right|_{\max}$ (im Intervall $-\Phi_0/2 < \Phi^{(1)} < \Phi_0/2$) nehmen für wachsende Werte des treibenden Stroms I ab und verschwinden im Grenzfall großer Transportströme $I \gg N_G I_c$. Maximale Transferfaktoren werden (bei Kennlinien mit definiertem globalem Minimum ($I > N_G I_c$)) demnach für Transportströme erreicht, die nur gering oberhalb des kritischen Stroms bei $\Phi^{(1)} = 0$ liegen, d.h. für $I \approx N_G I_c$. Die Abhängigkeit des maximalen Transferfaktors $V_{\Phi^{(1)}}$ von I ist in Abb. 2.7 (a) für überkritische Werte des Transportstroms $I > N_G I_c$ dargestellt. Er besitzt für $I = N_G I_c$ den Wert $V_{\Phi^{(1)}} \approx 19 I_c R / \Phi_0$ und nimmt mit wachsendem I monoton ab, bis der Transferfaktor für große Werte von I verschwindet.

Anhand der Spannungsantwort (2.67) des regulären Netzwerks kann sehr leicht das Verhalten des Transferfaktors $V_{\Phi^{(1)}}$ in Abhängigkeit des Transportstroms I und der Anzahl N_r der Josephson-Kontakte bestimmt werden. Um in diesem Fall einen exakten Ausdruck für die maximale Steigung $V_{\Phi^{(1)}} = \left| \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial \Phi^{(1)}} \right|_{\max}$ in der Nähe der globalen Minima zu bestimmen, müssen transzendente Gleichungen gelöst werden, so dass wir uns an dieser Stelle mit einer Näherung begnügen. Für überkritische Transportströme $I > N_r I_c$ und nicht zu kleine N_r (d.h. $N_r \gtrsim 5$) kann in guter Näherung mit $\Phi^{(1)} = \Phi_0 / (N_r \pi)$ der Wert des primären magnetischen Flusses angegeben werden, für den die zweite Ableitung $\partial_{\Phi^{(1)}}^2 \langle V \rangle$ verschwindet. Der maximale Transferfaktor ergibt sich somit näherungsweise zu

$$V_{\Phi^{(1)}} = \left| \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial \Phi^{(1)}} \right|_{\max} \approx \left| \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial \Phi^{(1)}} \right|_{\Phi^{(1)} = \Phi_0 / (N_r \pi)}. \quad (2.68)$$

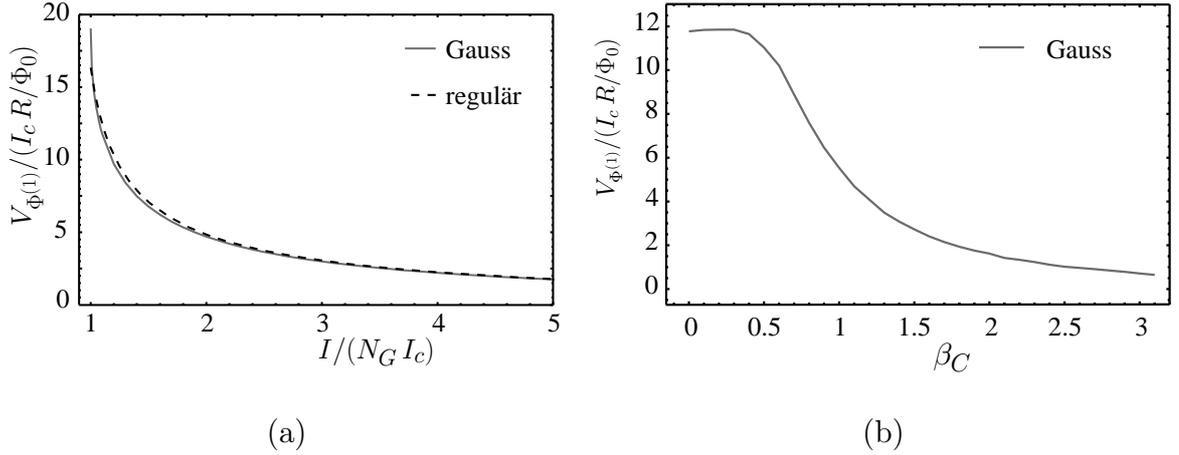


Abbildung 2.7: Numerisch bestimmter maximaler Transferfaktor $V_{\Phi^{(1)}} = |\partial_{\Phi^{(1)}} \langle V \rangle|_{\max}$ des Gaußschen Netzwerks mit $N_G = 20$ für verschwindende Induktivitäten: (a) $V_{\Phi^{(1)}}$ in Abhängigkeit des Transportstromes I für $\beta_C = 0$ und (b) $V_{\Phi^{(1)}}$ in Abhängigkeit des McCumber-Parameters β_C für $I = 1.1 N_G I_c$. Abb. (a) zeigt zusätzlich die Näherung (2.69) für $V_{\Phi^{(1)}}$ des regulären Netzwerks mit $N_r = 11$ (gestrichelte Kurve).

Die Steigung am Ort $\Phi_0/(N_r \pi)$ kann nun nach $1/N_r$ entwickelt werden und es ergibt sich

$$V_{\Phi^{(1)}} \approx \frac{I_c R}{\Phi_0} \frac{0.8}{\sqrt{(I/(N_r I_c))^2 - 0.71}} N_r + \mathcal{O}(1/N_r). \quad (2.69)$$

Der maximale Transferfaktor $V_{\Phi^{(1)}}$ skaliert also mit der Anzahl N_r der Kontakte. Aus dieser Proportionalität folgt zudem, dass die Breite der globalen Minima von $\langle V \rangle$ bei $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$ mit $1/N_r$ skaliert. Dasselbe Skalierungsverhalten gilt für den kritischen Netzwerkstrom (2.62). Diese Verschmälerung ist die Folge davon, dass es sich bei parallelen Netzwerken um Interferometer handelt, in denen N Josephson-Ströme interferieren. Dies ist analog zur Interferometrie in der Optik, wo die Anzahl N der interferierenden Wellenzüge die Breite der Intensitätsmaxima im Beugungsmuster bestimmt.

Der Transferfaktor $V_{\Phi^{(1)}}$ in (2.69) bezieht sich auf den magnetischen Fluss $\Phi^{(1)}$ durch eine der Netzwerkschleifen mit Flächeninhalt a . Die tatsächliche Magnetfeldempfindlichkeit wird nun durch den Transferfaktor $V_{B^{(1)}} = \left| \partial \langle V \rangle / \partial B_{\perp}^{(1)} \right|_{\max}$ bestimmt, der sich wegen $\Phi^{(1)} = B_{\perp}^{(1)} \cdot a$ aus $V_{B^{(1)}} = a V_{\Phi^{(1)}}$ ergibt. Zur Vereinfachung werde hier angenommen, dass das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ parallel zur Flächennormale \mathbf{a} der Schleife orientiert ist. Damit ergibt sich für $N_r \gg 1$ aus (2.69), dass $V_{B^{(1)}}$ proportional zur Gesamtfläche $A_{tot} = (N_r - 1) a \approx N_r a$ des regulären Netzwerks ist

$$V_{B^{(1)}} \approx \frac{I_c R}{\Phi_0} \frac{0.8}{\sqrt{(I/(N_r I_c))^2 - 0.71}} A_{tot}. \quad (2.70)$$

Mit zunehmender Gesamtfläche des Netzwerks wächst der Transferfaktor $V_{B^{(1)}}$ bezüglich des primären Magnetfeldes. Da der Näherungsausdruck (2.70) auf der Gleichung (2.67)

basiert, gilt diese Aussage nur im Grenzfall $\beta_{L,\max} \rightarrow 0$, d.h. für den Grenzfall verschwindender Induktivitäten. Da der Einfluss induktiver Effekte mit der Größe des Netzwerks stark zunimmt, ist die Voraussetzung $\beta_{L,\max} \approx 0$ ab einer bestimmten Größe des Netzwerks nicht mehr erfüllt. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass für $\beta_{L,\max} \gg 1$ der Transferfaktor $V_{\Phi^{(1)}}$ und damit auch $V_{B^{(1)}}$ aufgrund induktiver Kopplungen verschwinden.

Gleichung (2.69) beschreibt zudem die Abhängigkeit des Transferfaktors des regulären Netzwerks vom treibenden Strom I . Für große Transportströme verhält sich $V_{\Phi^{(1)}}$ proportional zu $(I/(N_r I_c))^{-1}$, d.h. umgekehrt proportional zum Transportstrom pro Kontakt $I/(N_r I_c)$. In Abbildung 2.7 (a) ist diese Abhängigkeit in Form der gestrichelten Kurve für das reguläre Netzwerk mit $N_r = 11$ Kontakten eingezeichnet. Sie stimmt sehr gut mit der Kurve des Gaußschen Netzwerks überein. Dies liegt daran, dass beide Netzwerke identische Gesamtflächen A_{tot} besitzen und in beiden Fällen der magnetische Fluss $\Phi^{(1)}$ auf die gleiche Fläche bezogen ist (nämlich jeweils auf die maximale Fläche, die jedoch bei beiden Netzwerken gleich groß sind). Verallgemeinert bedeutet dies, dass unabhängig vom speziellen Netzwerk der maximale Transferfaktor im Wesentlichen von der Gesamtfläche A_{tot} des Netzwerks (und von I) bestimmt wird.

Bis hierher wurden ausschließlich Netzwerke mit überdämpften Kontakten betrachtet, bei denen die kapazitiven Effekte in den Josephson-Kontakten vernachlässigbar sind, so dass $\beta_C = 0$ gilt. Die Abhängigkeit der Spannungsantwort $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ vom McCumber-Parameter β_C wird nun für den Fall verschwindender induktiver Kopplungen diskutiert. Wir beschränken uns hier dabei auf die Spannungsantwort des Gaußschen Netzwerks mit $N_G = 20$ Kontakten und den Fall überkritischen Transportstroms $I = 1.1 N_G I_c$ sowie statischer bzw. adiabatischer primärer Magnetfelder.

Im Fall endlicher Kapazität der Josephson-Kontakte ($\beta_C > 0$) kann die Differentialgleichung (2.38) nicht mehr analytisch gelöst und somit die mittlere Spannung $\langle V \rangle$ nicht aus einer analytischen Lösung $\phi(t)$ bestimmt werden. In diesem Fall kann (2.38) numerisch gelöst, und aus der Lösung die Spannung $\langle V \rangle$ numerisch bestimmt werden. Da Gleichung (2.38) eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit ist, kann die numerische Integration mit bekannten Methoden wie dem Verfahren von Runge-Kutta einfach ausgeführt werden. Abbildung 2.8 zeigt das Ergebnis einer solchen numerischen Integration. Für das Gaußsche Netzwerk ist die Spannungsantwort $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ für verschiedene Werte des McCumber-Parameters β_C dargestellt. Der Wert des Transportstromes beträgt $I = 1.1 N_G I_c$ und β_C wird bei $\beta_C = 0.3$ beginnend in Schritten von 0.3 bis zum maximalen Wert $\beta_C = 2.1$ erhöht.

Während sich $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ für $\beta_C \leq 0.3$ nur gering von der Spannungsantwort im überdämpften Fall $\beta_C = 0$ unterscheidet (vgl. Abb. 2.8 mit Abb. 2.5), ändert sich die Situation für größere β_C -Werte ($\beta_C > 0.3$). Die Modulation der Spannung $\langle V \rangle$ in Abhängigkeit von $\Phi^{(1)}$ wird gedämpft, insbesondere wächst der minimale Spannungswert $\langle V \rangle_{\min} = \langle V \rangle(\Phi^{(1)} = 0)$ mit zunehmendem β_C , und nähert sich für sehr große Werte von β_C dem maximalen möglichen Wert $1.1 I_c R$ an. Der maximale Wert $\langle V \rangle_{\max}$ der Spannungsantwort dagegen, ist nahezu unabhängig von β_C und im dargestellten

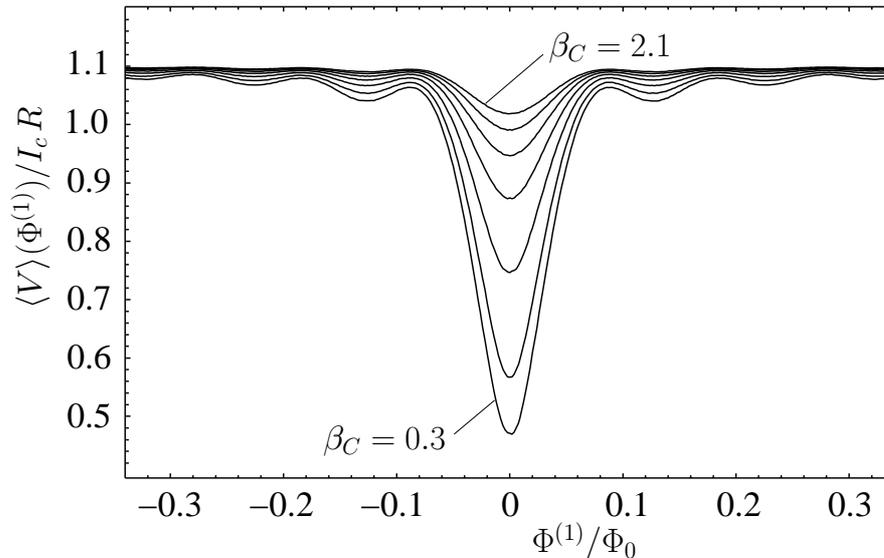


Abbildung 2.8: Theoretische Spannungsantwort $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ des Gaußschen Netzwerks mit $N_G = 20$ für verschiedene Werte des McCumber-Parameters β_C und für verschwindende Induktivitäten. Der McCumber-Parameter β_C wird bei $\beta_C = 0.3$ beginnend in Schritten von 0.3 bis $\beta_C = 2.1$ erhöht. $\Phi^{(1)}$ ist der vom primären Magnetfeld durch die größte Schleife induzierte magnetische Fluss. Der Transportstrom beträgt $I = 1.1 N_G I_c$.

Bereich durch $\langle V \rangle_{\max} \approx 1.1 I_c R$ gegeben. Im Fall verschwindender Induktivitäten verringern kapazitive Effekte also den Spannungshub $\langle V \rangle_{\max} - \langle V \rangle_{\min}$ und damit den Transferfaktor $V_{\Phi^{(1)}} = \left| \partial \langle V \rangle / \partial \Phi^{(1)} \right|_{\max}$. Die Abhängigkeit des maximalen Transferfaktors $V_{\Phi^{(1)}}$ vom McCumber-Parameter β_C (für $I = 1.1 N_G I_c$) ist in Abb. 2.7 (b) dargestellt. Wird für einen festen Wert des Transportstroms der McCumber-Parameter von $\beta_C = 0$ beginnend erhöht, so ändert sich der Transferfaktor bis $\beta_C \approx 0.4$ nicht, nimmt aber dann für anwachsende Werte monoton mit wachsendem β_C ab, und verschwindet für große β_C -Werte. Abb. 2.7 zeigt den maximalen Transferfaktor des Gaußschen Netzwerks mit $N_G = 20$ Kontakten. Der Transferfaktor des regulären Netzwerks mit $N_r = 11$ Kontakten ist auch in diesem Fall wieder fast identisch mit dem Transferfaktor des Gaußschen Netzwerks, vorausgesetzt beide Netzwerke besitzen vergleichbar große Gesamtflächen.

2.4.4 Spannungsantwort induktiver paralleler Netzwerke

Ohne induktive Kopplungen kann die Dynamik des parallelen Netzwerks durch das in Abschnitt 2.3.1 diskutierte effektive Ein-Phasen-Modell beschrieben werden. Dies ermöglicht im Fall überdämpfter Kontakte ($\beta_C = 0$) die Herleitung analytischer Ausdrücke für die Spannungsantwort $\langle V \rangle(I, \mathbf{B}^{(1)})$ (s. Abschn. 2.4.2) und im Fall endlicher McCumber Parameter ($\beta_C > 0$) die einfache Bestimmung von $\langle V \rangle(I, \mathbf{B}^{(1)})$ durch numerisches Lösen der Differentialgleichung (2.38).

Ist das von den im Netzwerk fließenden Strömen erzeugte sekundäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ nicht vernachlässigbar, so ist das magnetische Gesamtfeld \mathbf{B} nicht mehr nur durch

das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ gegeben, sondern ist eine Superposition des primären und sekundären Feldes $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)}$. Dies ist der Fall, wenn die β_L -Parameter der Netzwerkschlaufen (s. Abschn. 2.2.5) $\beta_L \simeq 1$ oder größer werden, d.h. wenn $\beta_{L,\max} \simeq 1$ gilt. Dann induzieren die Ströme, die in der Größenordnung von I_c liegen, sekundäre magnetische Flüsse $\Phi_n^{(2)}$ der Größenordnung Φ_0 , so dass nun das magnetische Eigenfeld die Dynamik der Netzwerke beeinflusst. Solche Netzwerke mit $\beta_{L,\max} \simeq 1$ werden aus diesem Grund induktive Netzwerke genannt.

Im Fall induktiver paralleler Netzwerke können die Flussquantisierungsbedingungen (2.13) für die eichinvarianten Phasendifferenzen $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)^T$ nicht mehr nach einer einzigen Phasenvariablen aufgelöst werden, wie dies bei der Herleitung des effektiven Ein-Phasen-Modells möglich war (s. Abschn. 2.3.1). Nun hängt in (2.13) das magnetische Feld \mathbf{B} vom induzierten Feld $\mathbf{B}^{(2)}$ und damit über die Netzwerkströme wieder von den dynamischen Variablen φ ab. Werden induktive Effekte berücksichtigt, so wird die Dynamik des parallelen Netzwerks durch das Gleichungssystem (2.41) beschrieben, das in Abschnitt 2.3.2 hergeleitet wurde. Dieses Gleichungssystem besteht aus N gekoppelten gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die N Phasenvariablen $\varphi(\tau) = (\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_N(\tau))^T$, die die einzelnen Josephson-Kontakte (z.B. im RCSJ-Modell) beschreiben. Um das Antwortverhalten induktiver Netzwerke zu bestimmen, muss in diesem allgemeinen Fall das Gleichungssystem numerisch gelöst werden. Da es sich um gewöhnliche Differentialgleichungen handelt, kann die Aufgabe, Lösungen für eine vorgegebene Situation (d.h. I und $\mathbf{B}^{(1)}$ sind bekannt) zu finden, als Anfangswertproblem formuliert werden. Hierbei wird ausgehend von Startwerten für die dynamischen Variablen (und ggf. deren ersten Zeitableitungen) das Differentialgleichungssystem mit einem geeigneten Verfahren schrittweise integriert. Die Anfangsbedingungen werden dabei so gewählt, dass sie die physikalischen Randbedingungen (wie Stromerhaltung, vorgegebenes I und $\mathbf{B}^{(1)}$, etc.) erfüllen. Bei der numerischen Integration ist die Auswertung der rechten Seite der Differentialgleichung (2.41) nicht sehr aufwendig, da es sich um einfache Matrix-Vektor-Multiplikationen handelt. Da es sich bei (2.41) zusätzlich um ein nichtsteifes Differentialgleichungssystem handelt, sind als Lösungsverfahren einfache explizite Einschrittverfahren [148] verwendbar. Die nachfolgend diskutierten numerischen Ergebnisse wurden mit einem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung erzielt.

Aus den numerisch gewonnenen Lösungen $\varphi_n(\tau)$ können mit den Gleichungen aus Abschnitt 2.2 die physikalischen Größen, wie die Ströme im Netzwerk, der kritischer Netzwerkstrom $I_{c,\text{Netzwerk}}$, die über die Kontakte abfallenden Spannungen, die mittlere Spannung $\langle V \rangle$, etc. bestimmt werden. Wir beschränken uns im Folgenden auf die Diskussion der Spannungsantwort, insbesondere auf die Abhängigkeit der mittleren Spannung $\langle V \rangle$ vom primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$, da dies die entscheidende physikalische Messgröße für die Magnetometrie ist. Die Spannung $\langle V \rangle$ kann direkt aus den Lösungen $\varphi_n(\tau)$ mit Hilfe der Relation

$$\langle V \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dt' V_n(t') = \frac{\hbar}{2e} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(t) - \varphi_n(0)}{t} = I_c R \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(\tau) - \varphi_n(0)}{\tau} \quad (2.71)$$

bestimmt werden. Der Limes $t \rightarrow \infty$ kann dabei durch eine Integration über eine genügende Anzahl von Perioden T_B der oszillierenden Spannung $V_n(t)$ ersetzt werden (s. (2.49)). Da in einem parallelen Netzwerk über alle Kontakte dieselbe mittlere Spannung $\langle V \rangle$ abfällt, ist der Limes in (2.71) von der Wahl der Phasenvariablen $\varphi_n(\tau)$ unabhängig, d.h. für alle $1 \leq n \leq N$ gleich.

Am Beispiel eines Gaußschen Netzwerks werden im Folgenden die Einflüsse induktiver und kapazitiver Effekte auf die Spannungsantwortfunktion $\langle V \rangle(\mathbf{B}^{(1)})$ diskutiert. Zur Vereinfachung nehmen wir dazu in diesem Abschnitt an, dass alle Josephson-Kontakte des Netzwerks identische Parameter besitzen, d.h. es gilt $I_{c,n} = I_c$, $R_n = R$ und $C_n = C$. Die Diskussion der Auswirkungen von Parameterstreuungen folgt in Abschnitt 2.4.5. Ferner wird der Transportstrom mit $I = 1.1 N_G I_c$ auf einen festen Wert knapp über dem maximalen kritischen Wert $N_G I_c$ gewählt, so dass die mittlere Spannung für alle Werte des primären Magnetfeldes endlich ist. Die Stromzufuhr erfolge homogen, d.h. in jeden der jeweils N_G Knoten der Elektroden X bzw Y wird der gleiche Stromanteil zugeführt bzw. extrahiert: $I_n^{(\alpha)} = I/N_G = 1.1 I_c$ mit $\alpha \in \{A, Z\}$. Eine solche homogene Stromzufuhr kann durch eine geeignete Wahl der Widerstände $R_n^{(Z)}$ und $R_n^{(A)}$ (s. Abschn. 2.2.3) erreicht werden. Das Gaußsche Netzwerk bestehe aus $N_G = 20$ Kontakten und besitze eine planare Geometrie mit rechteckförmigen Schlaufenflächen wie sie in Abb. 2.3 dargestellt ist. Sei l die charakteristische Länge, bezüglich der die Abstände im Netzwerk gemessen werden, so werden für das Gaußsche Netzwerk folgende Maße gewählt:

$$l_{1,\max} = 20 l, \quad l_{1,\min} = \frac{20}{2N_G - 3} l \approx 0.54 l, \quad l_2 = 10 l. \quad (2.72)$$

Mit Hilfe der in (2.26) angegebenen Näherung kann mit (2.72) der Induktionsparameter $\beta_{L,\max}$ der größten Schlaufe zu

$$\beta_{L,\max} = 2.69 \cdot 10^{-3} \frac{l}{\mu\text{m}} \frac{I_c}{\mu\text{A}}$$

angegeben werden. Für typische Werte $l = 1 \mu\text{m}$ und $I_c = 100 \mu\text{A}$, ergibt sich $\beta_{L,\max} \approx 0.27$. Werden im Folgenden Netzwerke mit verschiedenen Werten des Induktionsparameters $\beta_{L,\max}$ diskutiert, so sind dies Netzwerke mit verschieden groß gewähltem l bzw. I_c , die jedoch alle die gewählte Geometrie (2.72) besitzen.

Spannungsantwort induktiver paralleler Netzwerke mit überdämpften Kontakten

Wir beginnen die Diskussion der Spannungsantwort induktiver Netzwerke für den Fall überdämpfter Kontakte ($\beta_C = 0$). Für verschieden starke magnetische Kopplung zeigt Abb. 2.9 die Magnetfeldabhängigkeit der mittleren Spannung, die über das Gaußsche Netzwerk abfällt. Im Teilbild (a) wird der Induktionsparameter von $\beta_{L,\max} = 0$ beginnend bis $\beta_{L,\max} = 4.3$ erhöht. Das Teilbild (b) zeigt für $\beta_{L,\max} = 0$ und $\beta_{L,\max} = 0.7$ eine

ganze Periode der Spannungsantwort. Das Teilbild in Abb. 2.9 (b) zeigt eine Skizze der Flächenverteilung des Gaußschen Netzwerks, bei dem die Schlaufenflächen linear zunehmen. Als wichtiges Ergebnis zeigt Abb. 2.9, dass die Anwesenheit von magnetischen Eigenfeldern das *qualitative* Verhalten von $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ nicht verändert. Insbesondere werden die Periodizitätseigenschaften und das qualitative Verhalten von $\langle V \rangle$ in der Umgebung verschwindenden Magnetfeldes $\Phi^{(1)} = 0$ nicht wesentlich verändert. Zudem treten keine zusätzlichen signifikanten Minima aufgrund einer teilweisen kohärenten Superposition der Kontaktströme auf, deren Spannungswerte in der Nähe der minimalen Werte $\langle V \rangle(\Phi^{(1)} = 0)$ liegen. Dies kann dadurch verstanden werden, dass die Induktionsmatrix L eine Funktion der Geometrie des Netzwerks (und der Leiterstücke) ist, da diese Geometrie (zusammen mit den London-Gleichungen, die das Eindringen des magnetischen Feldes in den Supraleiter beschreiben) die räumliche Stromverteilung bestimmt. Die Induktionsmatrix L und der Strukturfaktor werden also beide wesentlich von der geometrischen Struktur des Netzwerks bestimmt. Auf diese Weise existiert eine implizite Relation zwischen L und dem Strukturfaktor S_N , so dass letztendlich auch in induktiven Netzwerken die *Netzwerkgeometrie* die Spannungsantwort festlegt.

Während die Details der Spannungsantwort von der Induktionsmatrix L bestimmt werden, zeigt sich hier, dass das Konzept des Strukturfaktors ein sehr nützliches Konzept ist, um die grundlegenden Interferenz-Eigenschaften verschiedener Netzwerk-Konfigurationen zu bestimmen. Dabei hat das Strukturfaktor-Konzept den Vorteil, dass eine qualitative Analyse der elektrodynamischen Eigenschaften von parallelen Netzwerken ohne umfangreiche numerische Rechnungen durchführbar ist. Sollen jedoch detaillierte quantitative Ergebnisse bestimmt werden, so ist die Simulation der induktiven Netzwerkgleichungen (2.41) notwendig. Eine solche Simulation ist dann natürlich zeitaufwendiger und rechenintensiver.

Das magnetische Eigenfeld, das von den Netzwerkströmen erzeugt wird, bestimmt die Details und den quantitativen Verlauf der $\langle V \rangle(\mathbf{B}^{(1)})$ -Kennlinie. Ein Vergleich der Spannungsantwort für vernachlässigbares Eigenfeld $\beta_{L,\max} \ll 1$ mit der für endliches $\beta_{L,\max} > 0$ zeigt, dass sich die $\langle V \rangle(\mathbf{B}^{(1)})$ -Kennlinie glättet, d.h. dass kleine Nebenminima verschwinden und nur die grobe Struktur erhalten bleibt. Zudem verringert sich mit zunehmenden $\beta_{L,\max}$ der Spannungshub $\langle V \rangle_{\max} - \langle V \rangle_{\min}$ und somit der Transferfaktor $V_{\Phi^{(1)}} = \left| \partial \langle V \rangle / \partial \Phi^{(1)} \right|_{\max}$ (s. Abb. 2.9 (a)). Der Grund hierfür liegt in den zusätzlichen Freiheitsgraden, die das System im Fall endlicher induktiver Kopplung zur Verfügung hat. Während für $\beta_{L,\max} = 0$ die Differenzen der Phasendifferenzen φ_n in der Flussquantisierungsbedingung (2.14) ausschließlich vom den primären magnetischen Flüssen $\Phi_n^{(1)}$ festgelegt werden, tritt in (2.14) im Fall $\beta_{L,\max} > 0$ anstelle von $\Phi_n^{(1)}$ der magnetische Gesamtfluss $\Phi_n = \Phi_n^{(1)} + \Phi_n^{(2)}$. Da Φ_n auch den induzierten magnetischen Fluss $\Phi_n^{(2)}$ enthält, der über (2.23) von den Netzwerkströmen und somit wieder von den Phasendifferenzen φ_n abhängt, besitzt das System im Fall nichtverschwindender Eigenfelder zusätzliche Freiheitsgrade. Für $\beta_{L,\max} > 0$ können sich deshalb die Ströme im Netzwerk derart umverteilen, dass in der gegebenen Situation möglichst wenig Energie dissipiert wird, d.h. dass der Spannungsabfall $\langle V \rangle$ möglichst klein wird.

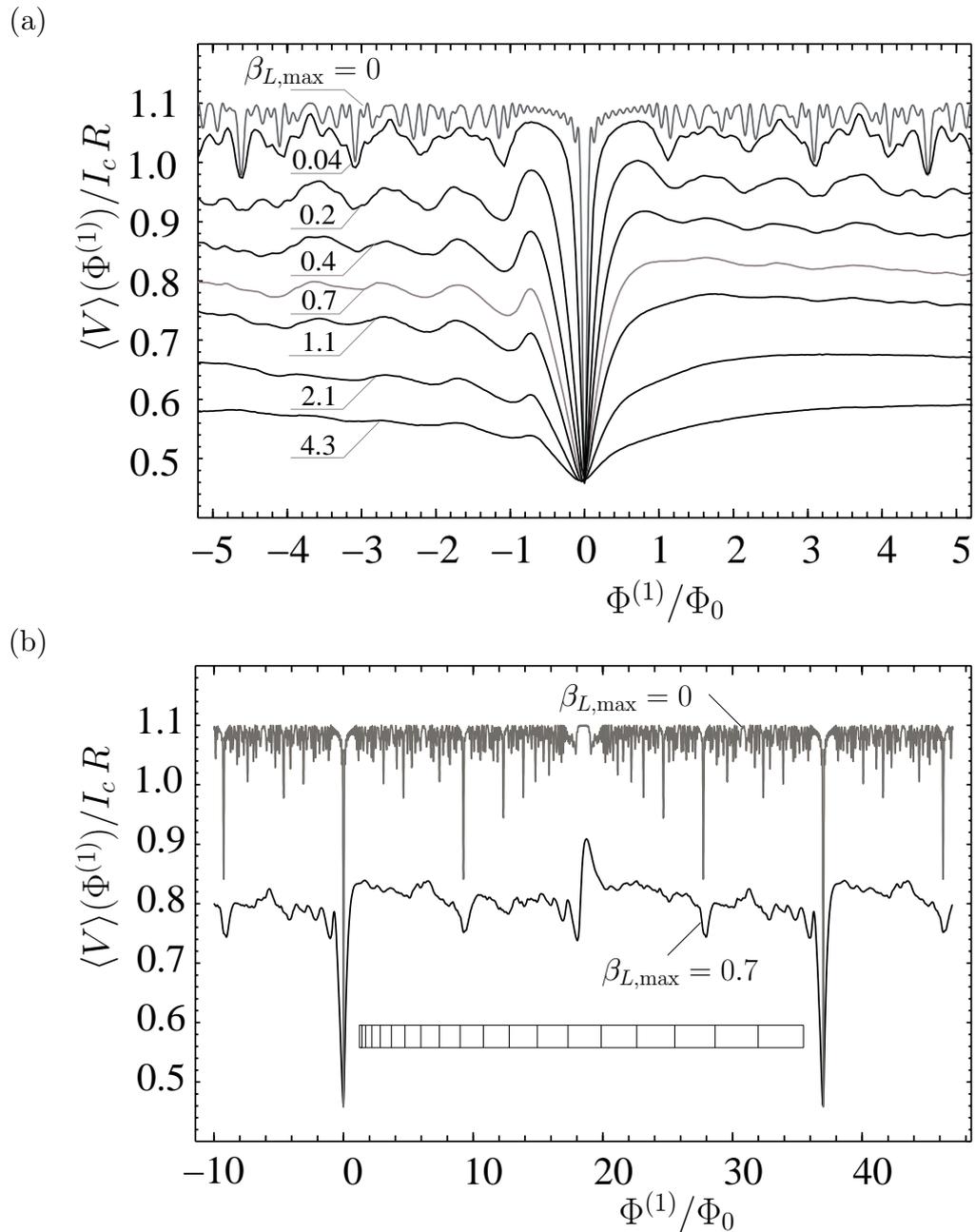


Abbildung 2.9: Theoretische Spannungsantwort $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ des Gaußschen Netzwerks mit $N_G = 20$ Kontakten für verschwindenden McCumber-Parameter $\beta_C = 0$ und verschiedene Werte des Induktionsparameters $\beta_{L,\max}$. $\Phi^{(1)}$ ist der vom primären Magnetfeld durch die größte Schleife induzierte magnetische Fluss. Der Transportstrom beträgt $I = 1.1 N_G I_c$. Die Flächenverteilung des Netzwerks ist schematisch in (b) skizziert.

Ausnahmen bilden die primären Magnetfeldwerte, für die der primäre magnetische Fluss ein ganzzahliges Vielfaches der Periode ist, also für $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$ mit k ganzzahlig. In diesem Fall hat das magnetische Eigenfeld nur einen geringen Einfluss auf den Wert des Spannungsabfalls $\langle V \rangle_{\min} = \langle V \rangle(\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}})$. Da für Magnetfeldwerte mit $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$ alle Ströme durch die Josephson-Kontakte (quasi) in Phase oszillieren, verschwinden die von der Netzwerkstromverteilung in den Schleifen induzierten sekundären magnetischen Flüsse fast vollständig $\Phi_n^{(2)} \approx 0$. Für $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$ hat demnach das magnetische Eigenfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ keinen großen Einfluss auf die Dynamik des Netzwerks, so dass der Spannungswert $\langle V \rangle_{\min}$ unabhängig von $\beta_{L,\max}$ ist. Nur für große $\beta_{L,\max}$ -Werte verschiebt sich der minimale Spannungswert $\langle V \rangle_{\min}$ geringfügig in Richtung negativer $\Phi^{(1)}$ -Richtung.

Für $\beta_{L,\max} \ll 1$ sind die $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ -Kennlinien aller Netzwerke symmetrisch bezüglich $\Phi^{(1)} \rightarrow -\Phi^{(1)}$. Für das Gaußsche Netzwerk zeigt die Spannungsantwort für endliche induktive Kopplung jedoch eine Asymmetrie bezüglich $\Phi^{(1)} \rightarrow -\Phi^{(1)}$. Diese Asymmetrie rührt von der Asymmetrie des magnetischen Eigenfeldes her, da die Geometrie eines Gaußschen Netzwerks stark irregulär ist (s. Geometrie in Teilbild aus Abb. 2.9 (b)). Dadurch erzeugt die durch das Netzwerk fließende Transportstromverteilung ein asymmetrisches magnetisches Eigenfeld. Diese Asymmetrie tritt besonders deutlich bei der halben Periode $\Phi^{(1)} = P_{\Phi^{(1)}}/2$ auf (s. Abb. 2.9 (b)), da dort die Abschirmströme und damit der Einfluss des magnetischen Eigenfeldes maximal sind. Soll das Netzwerk z.B. als Magnetfeldsensor verwendet werden, kann diese Asymmetrie erwünscht sein, da sie es ermöglicht, die Richtung des zu messenden primären Magnetfeldes zu bestimmen. Die Symmetrie der Spannungsantwort in Abb. (2.9) ist nicht vollständig gebrochen, sie besitzt eine Rest-Symmetrie. Es können jedoch Schaltungen auf der Basis von parallelen Netzwerken aufgebaut werden, deren $\langle V \rangle$ - $\mathbf{B}^{(1)}$ -Charakteristik ein stufenförmiges Verhalten besitzt [130], so dass dort die Symmetrie vollständig gebrochen ist (s. Abschn. 4.2).

Ist bei parallelen Netzwerken eine symmetrischere $\langle V \rangle$ - $\mathbf{B}^{(1)}$ -Kennlinie erwünscht, so kann dies durch eine Permutation der Flächen erreicht werden. Werden dadurch die großen und kleinen Flächen gleichmässig im Netzwerk verteilt, so ist das magnetische Eigenfeld symmetrischer, und die Spannungsantwort zeigt nur noch eine kleine Asymmetrie bezüglich $\Phi^{(1)} \rightarrow -\Phi^{(1)}$. Abb. 2.10 zeigt die Spannungsantwort eines Netzwerks mit einer permutierten Gaußschen Flächenverteilung. Die Schleifenflächen gleichen denen des Gaußschen Netzwerks aus Abb. 2.9, nur sind sie innerhalb des Netzwerks so angeordnet, dass eine nahezu gleichmässige Verteilung großer und kleiner Flächen realisiert ist. Die gewählte Flächenverteilung ist im Teilbild von Abb. 2.10 (b) als Skizze dargestellt. Die durch die Permutation der Flächen erreichte Symmetrie der Spannungsantwort ist zwar nicht perfekt, sie hat jedoch im Vergleich zur Spannungsantwort des Gaußschen Netzwerk deutlich zugenommen. Insbesondere besitzt die $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ -Kennlinie in der Nähe der globalen Minima eine symmetrische Form im Vergleich zur asymmetrischen Form beim rein Gaußschen Netzwerk. Die in Abb. 2.9 bei der halben Periode $\Phi^{(1)} = P_{\Phi^{(1)}}/2$ deutlich zu erkennende Asymmetrie tritt im

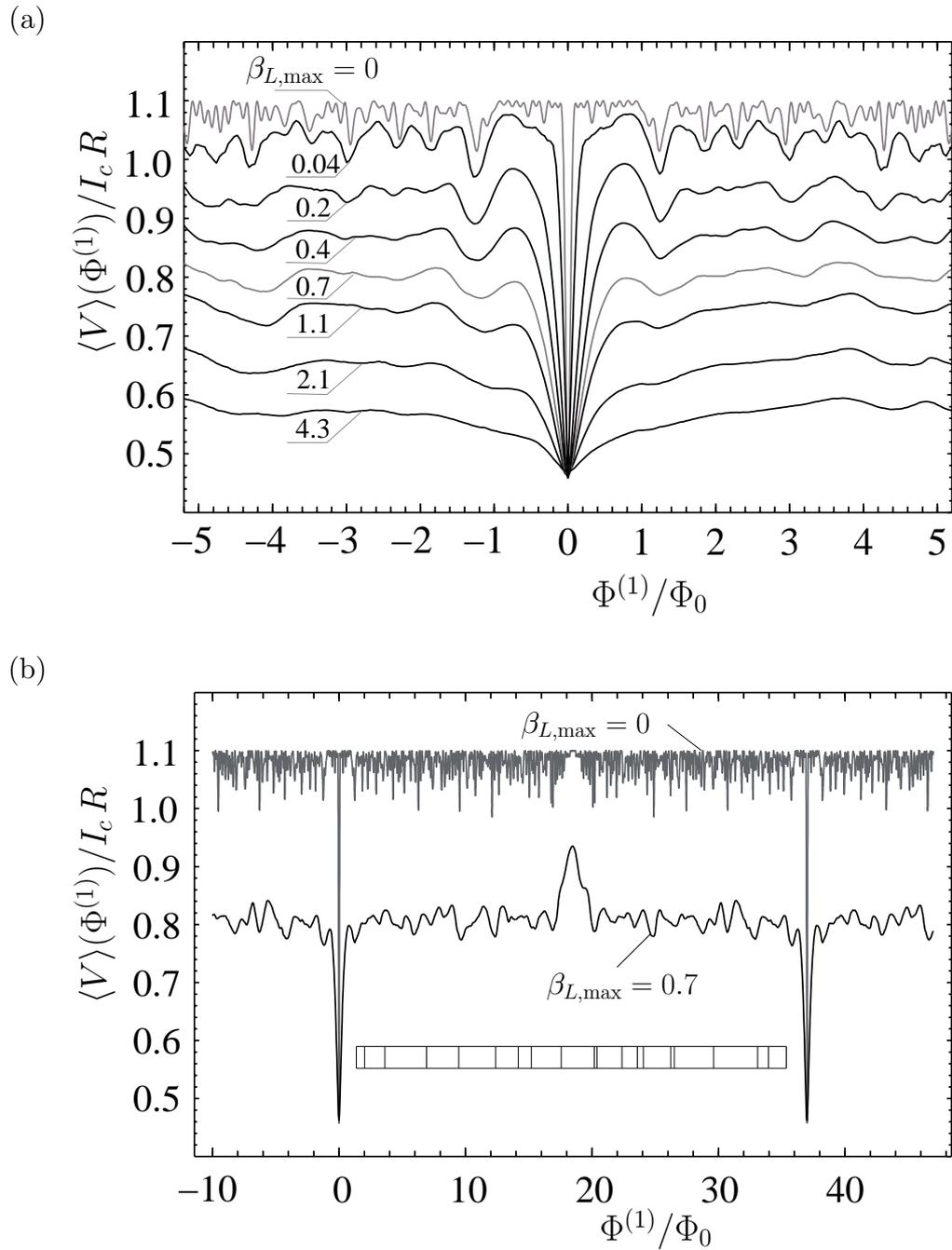


Abbildung 2.10: Theoretische Spannungsantwort $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ des Gaußschen Netzwerks mit $N_G = 20$ und permutierten Flächen für verschwindenden McCumber-Parameter $\beta_C = 0$ und verschiedene Werte des Induktionsparameters $\beta_{L,\max}$. $\Phi^{(1)}$ ist der vom primären Magnetfeld durch die größte Schlaufe induzierte magnetische Fluss. Der Transportstrom beträgt $I = 1.1N_G I_c$. Die Flächenverteilung des Netzwerks ist schematisch in (b) skizziert.

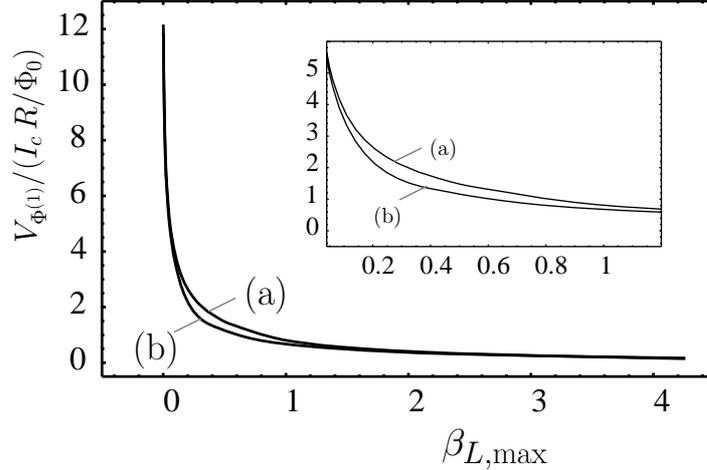


Abbildung 2.11: Maximaler Transferfaktor $V_{\Phi^{(1)}} = |\partial_{\Phi^{(1)}}\langle V \rangle|_{\max}$ (im Bereich $-\Phi_0/2 \leq \Phi^{(1)} \leq \Phi_0/2$) der Gaußschen Netzwerke mit $N_G = 20$ überdämpften ($\beta_C = 0$) Kontakten in Abhängigkeit des Induktionsparameters $\beta_{L,\max}$ für $I = 1.1N_G I_c$: (a) ohne und (b) mit permutierten Schlaufenflächen.

permutierten Fall Abb. 2.10 nur noch stark abgeschwächt auf.

Es sei an dieser Stelle betont, dass nach Abschnitt 2.4.2 beide Netzwerke, d.h. das Gaußsche Netzwerk mit permutierten Flächen und das ursprüngliche reine Gaußsche Netzwerk, unterschiedliche Strukturparameter besitzen und deshalb auch für $\beta_{L,\max} = 0$ bereits unterschiedliche Spannungsantworten zeigen. Dies zeigt ein Vergleich der Kennlinien für $\beta_{L,\max} = 0$, die in den Abbildungen 2.9 und 2.10 grau eingefärbt sind. Die für $\beta_{L,\max} = 0$ bei beiden Netzwerken existierende Symmetrie bezüglich $\Phi^{(1)} \rightarrow -\Phi^{(1)}$ wird jedoch im Fall merklicher induktiver Kopplung nur von solchen induktiven Netzwerken (näherungsweise) erhalten, die ein symmetrisches magnetisches Eigenfeld besitzen. Dies sind z.B. parallele Netzwerke mit einer symmetrischen oder einer nahezu gleichmässigen Flächenverteilung.

Der Vergleich der $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ -Kennlinien aus den Abbildungen 2.9 (a) und 2.10 (a) zeigt zudem, dass die asymmetrische Kennlinie des rein Gaußschen Netzwerks für bestimmte $\beta_{L,\max}$ -Werte einen größeren maximalen Transferfaktor $V_{\Phi^{(1)}} = |\partial_{\Phi^{(1)}}\langle V \rangle|_{\max}$ besitzt als das Netzwerk mit permutierter Flächenverteilung. Die Transferfaktoren $V_{\Phi^{(1)}}$ der Netzwerke sind hierbei definiert als die maximalen Steigungen der $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ -Kennlinien im Bereich des globalen Minimums, d.h. im Intervall $-\Phi_0/2 \leq \Phi^{(1)} \leq \Phi_0/2$. Für beide Netzwerke zeigt Abb. 2.11 die numerisch bestimmten maximalen Transferfaktoren $V_{\Phi^{(1)}}$ in Abhängigkeit des Induktivitätsparameters $\beta_{L,\max}$.

Sie unterscheiden sich besonders deutlich für induktive Kopplungen mittlerer Stärke $0 < \beta_{L,\max} < 1$, sind jedoch in den Grenzfällen $\beta_{L,\max} \rightarrow 0$ und $\beta_{L,\max} \rightarrow \infty$ gleich. Für verschwindende Induktivitäten $\beta_{L,\max} \rightarrow 0$ sind die Transferfaktoren $V_{\Phi^{(1)}}$ beider Netzwerke gleich, da dann die (für beide Netzwerke gleiche) Gesamtfläche A_{tot} den Transferfaktor $V_{\Phi^{(1)}}$ bestimmt (siehe (2.70)). Sie erreichen für $\beta_{L,\max} = 0$ ihren maximalen Wert $V_{\Phi^{(1)}} \approx 12 I_c R/\Phi_0$ in Übereinstimmung mit Abb. 2.7. Für zunehmende Stärke der induktiven Kopplungen sinken die maximalen Transferfaktoren und verschwinden

im Grenzfall $\beta_{L,\max} \rightarrow \infty$, da dann ausschließlich die sekundären Magnetfelder die magnetischen Flüsse in den Schlaufen bestimmen und dadurch die mittlere Spannung insensitive auf primäre Magnetfelder wird.

Spannungsantwort induktiver paralleler Netzwerke mit Kontakten endlicher Kapazität, LC-resonante Spannungsantwort

Abschließend wird der allgemeine Fall diskutiert, d.h. es werden parallele Netzwerke betrachtet, bei denen sowohl die induktiven Effekte magnetischer Eigenfelder als auch die kapazitiven Effekte in den Josephson-Kontakten berücksichtigt werden. Da an dieser Stelle der Haupteinfluss der induktiven und kapazitiven Effekte diskutiert werden soll, beschränken wir uns hier auf das Gaußschen Netzwerke mit permutierter Flächenverteilung und symmetrischer Spannungsantwort bezüglich $\Phi^{(1)} \rightarrow -\Phi^{(1)}$.

Abb. 2.12 zeigt die aus den Netzwerkgleichungen (2.41) durch numerische Integration bestimmte Spannungsantwort des Netzwerks für festen McCumber Parameter $\beta_C = 1.1$ und verschiedene Induktionsparameter $\beta_{L,\max}$. Abb. 2.12 (a) zeigt den bereits in Abb. 2.8 diskutierten Fall verschwindender Induktivitäten ($\beta_{L,\max} = 0$). Diese $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ -Kennlinie besitzt den gleichen qualitativen Verlauf wie im Fall überdämpfter Kontakte ($\beta_C = 0$), d.h. ein eindeutiges globales Minimum $\langle V \rangle_{\min}$ bei $\Phi^{(1)} = 0$. Wird nun für konstant gehaltenes $\beta_C = 1.1$ der Induktionsparameter $\beta_{L,\max}$ erhöht, so ändert sich die Kennlinie signifikant, sobald beide (d.h. induktive und kapazitive) Effekte genügend stark sind. In diesem Fall zeigt die Kennlinie in der Nähe von $\langle V \rangle(\Phi^{(1)} = 0)$ (bzw. in der Nähe von $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$ mit k ganzzahlig) zwei ausgeprägte Minima, die symmetrisch zu einem lokalen Maximum von $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ bei $\Phi^{(1)} = 0$ liegen. Wie in Abschnitt 2.5 erläutert wird, handelt es sich hierbei um eine LC-Resonanz, die von den im Netzwerk vorhandenen Kapazitäten und Induktivitäten erzeugt wird. Aus diesem Grund wird im Folgenden dieser Modus als resonanter ac-Modus bezeichnet und der Fall, in dem die $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ -Kennlinie ein eindeutiges (globales) Minimum besitzt, als nicht-resonanter ac-Modus. Die Abkürzung 'ac' steht hier für 'alternating current' und betont, dass das Netzwerk mit überkritischem Transportstrom $I > N_G I_c$ betrieben wird und die Spannungen und Ströme des Netzwerks zeitlich oszillieren.

Um eine Vorstellung zu erhalten, wie diese LC-Resonanzen zustande kommen, sollen hier nur kurz die Ursachen qualitativ diskutiert werden. Eine detaillierte quantitative Diskussion folgt in Abschnitt 2.5. Abbildung 2.12 (a) zeigt, dass der Spannungswert $\langle V \rangle(\Phi^{(1)} = 0)$ auch für endliche $\beta_C > 0$ nur sehr schwach von der Stärke $\beta_{L,\max}$ der magnetischen Kopplung abhängt. Die Ursache liegt hierfür in den Abschirmströmen, die in den Netzwerkschlaufen bei Anwesenheit endlicher primärer Magnetfelder oszillieren. Für $\Phi^{(1)} = 0$ (bzw. für $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$ mit k ganzzahlig) tritt Phase-Locking auf, d.h. alle Phasenvariablen φ_n des parallelen Netzwerks oszillieren (fast) in Phase. Als Folge davon sind auch die Ströme durch die Josephson-Kontakte in Phase, so dass für $\Phi^{(1)} = 0$ induktive Effekte eine untergeordnete Rolle spielen, und der $\langle V \rangle(\Phi^{(1)} = 0)$ -Spannungswert im Wesentlichen nur von der Kapazität β_C abhängt (s.

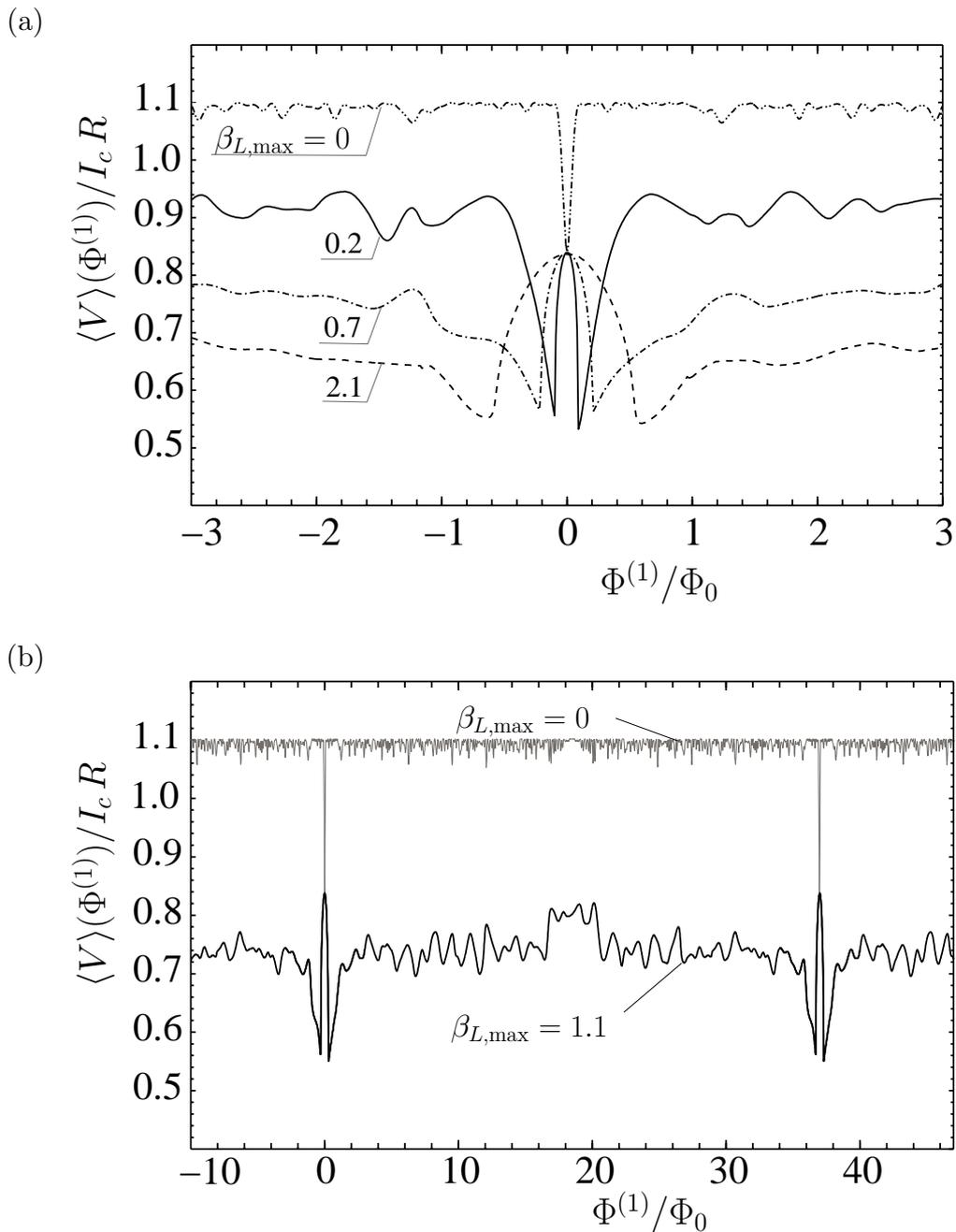


Abbildung 2.12: Theoretische Spannungsantwort $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ des Gaußschen Netzwerks mit $N_G = 20$ Kontakten und permutierten Flächen für festen McCumber-Parameter $\beta_C = 1.1$ und verschiedene Werte des Induktionsparameters $\beta_{L,\max}$ in (a) bzw. $\beta_{L,\max} = 1.1$ in (b). $\Phi^{(1)}$ ist der vom primären Magnetfeld durch die größte Schlaufe induzierte magnetische Fluss. Der Transportstrom beträgt $I = 1.1N_G I_c$.

Abb. 2.12). Für $\Phi^{(1)} \neq 0$ jedoch machen sich die Abschirmströme bemerkbar. Dann ist die Stromverteilung im Netzwerk eine Superposition der Transportstromverteilung mit der Abschirmstromverteilung, die in den Netzwerkschleifen in Form von Kreisströmen mit der Frequenz $\nu(\Phi^{(1)}) = (2e/h) \langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ oszillieren. Diese Abschirmströme können nun in resonanter Weise die LC-Kreise im Netzwerk anregen, die von den Kapazitäten der Josephson-Kontakte und den im Netzwerk verteilten Induktivitäten gebildet werden. Dies ist der Grund, weshalb die Spannungsantwort $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ für $\Phi^{(1)} \neq 0$ von beiden Parametern β_C und $\beta_{L,\max}$ abhängt.

Man betrachte nun eine einzelne Schleife mit Schleifeninduktivität β_L , die zwei Josephson-Kontakte mit identischen Parametern β_C , I_c und R enthält (d.h. ein dc SQUID). In diesem Fall ist die Resonanzfrequenz des Systems durch $\nu^{(\text{res})} = (2e/h) I_c R (\pi \beta_L \beta_C)^{-1/2}$ gegeben [39], wie in Abschnitt 2.5 hergeleitet wird. Für typische Werte $\beta_C = 1.1$ und $\beta_L = 0.7$ ist damit die Resonanzfrequenz durch $0.64 (2e/h) I_c R$ gegeben, d.h. die Resonanzfrequenz kann für Transportstromwerte erreicht werden, die leicht größer als der kritische Strom $2I_c$ sind. In diesem Fall kann die LC-Resonanz im SQUID angeregt werden, und es treten in der $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ -Kennlinie des SQUID resonante Strukturen auf [39, 64]. In einem parallelen Netzwerk aus $N-1$ Schleifen existiert nun eine Vielzahl verschiedener resonanter Moden aufgrund der speziellen Induktivitätsbelegung und Kapazitätsverteilung. Besitzen diese Impedanzen (d.h. die Parameter $\beta_{C,n}$ und $\beta_{L,n}$) geeignete Werte, so können die im Netzwerk oszillierenden Abschirmströme einige dieser resonanter Moden simultan anregen. Da die Stärke und die Frequenz der Abschirmströme vom primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ und vom Transportstrom I abhängen, hängt es von $\mathbf{B}^{(1)}$ und von der Stärke von I ab, welche resonanten Moden angeregt werden. Die Form der Spannungsantwort hängt also wesentlich vom Auftreten resonanter Moden ab. Auf diese Weise können die in Abbildung 2.12 dargestellten Spannungskurven qualitativ verstanden werden. Eine quantitative Analyse folgt in Abschnitt 2.5.

Abb. 2.12 (b) zeigt eine ganze Periode der Spannungsantwort des Netzwerks für $(\beta_C, \beta_{L,\max}) = (1.1, 0.7)$ und $(\beta_C, \beta_{L,\max}) = (0, 0)$. Ein Vergleich der beiden Spannungsantworten zeigt, dass auch im LC-resonanten ac-Modus die Periode der Spannungskurve erhalten bleibt. Die im nicht-resonanten ac-Modus eindeutigen (globalen) Minima bei $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$ (mit k ganzzahlig) werden im LC-resonanten Fall zu Maxima bei $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$, die von symmetrisch zu $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$ liegenden Minima umgeben sind. In beiden Fällen sind die primären Magnetfeldwerte, für die $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$ gilt, eindeutig ausgezeichnet. Es sei betont, dass weder induktive noch kapazitive Effekte die Periodizität der Spannungsantwort beeinflussen. Sie ist von den Kontaktparametern und den Induktivitäten unabhängig und nach (2.57) ausschließlich durch die gewählte Flächenverteilung bestimmt. Die Form der $\langle V \rangle$ - $\mathbf{B}^{(1)}$ -Charakteristiken hängt jedoch sehr stark von den Parametern $\beta_{C,n}$, $I_{c,n}$, R_n und $\beta_{L,n}$ ab.

Die Ausbildung der LC-resonanten Spannungsantwort in der Umgebung von $\Phi^{(1)} = 0$ zeigt Abb. 2.13. Für festes $\beta_{L,\max} = 1.1$ und konstanten Transportstrom $I = 1.1 N_G I_c$ wird der McCumber Parameter bei $\beta_C = 0.1$ beginnend in Schritten von 0.1 bis $\beta_C = 2.1$ erhöht. Für Kontakte mit kleinem McCumber-Parameter $\beta_C = 0.1$ und $\beta_C = 0.2$

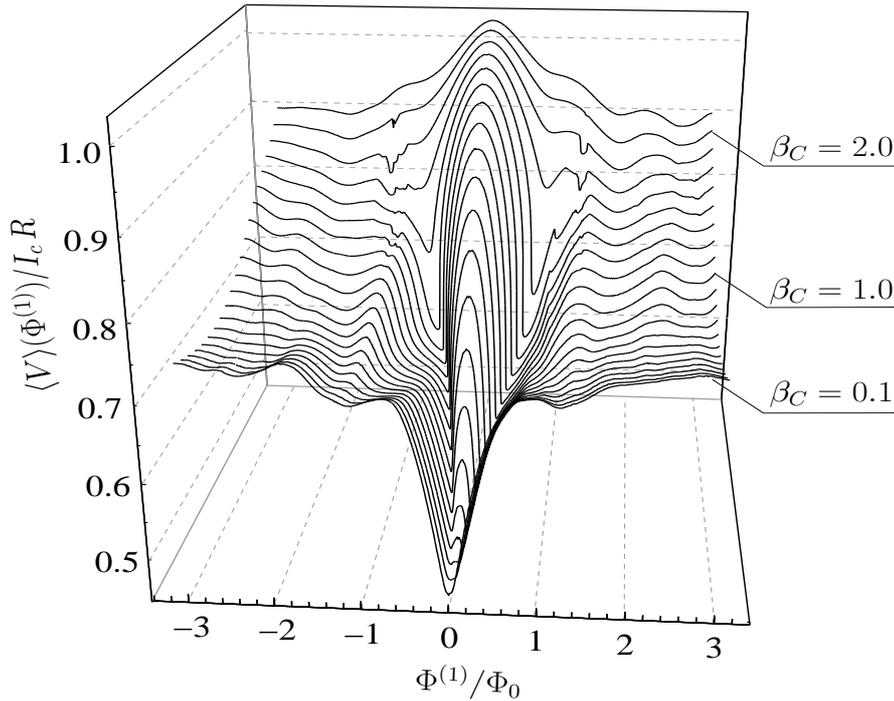


Abbildung 2.13: Theoretische Spannungsantwort $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ des Gaußschen Netzwerks mit $N_G = 20$ Kontakten und permutierten Flächen für verschiedene McCumber-Parameter β_C und festen Wert des Induktionsparameters $\beta_{L,\max} = 1.1$. $\Phi^{(1)}$ ist der vom primären Magnetfeld durch die größte Schlaufe induzierte magnetische Fluss. Der Transportstrom beträgt $I = 1.1 N_G I_c$. Der McCumber-Parameter wird bei $\beta_C = 0.1$ beginnend in Schritten von 0.1 bis zu $\beta_C = 2.1$ erhöht.

operiert das Netzwerk im nicht-resonanten ac-Modus, d.h. es existiert ein eindeutiges Minimum von $\langle V \rangle$ bei $\Phi^{(1)} = 0$. Für wachsende Kapazität β_C bildet sich bei $\Phi^{(1)} = 0$ ein lokales Maximum heraus, und die Spannungsantwort zeigt für $0.4 \leq \beta_C \leq 1.7$ die LC-resonante 'hutförmige' Struktur. Für noch größere Werte der Kapazität $\beta_C \geq 1.8$ verschwinden dann die beiden lokalen Minima und es bildet sich ein eindeutiges (globales) Maximum aus. Die Höhe dieses Maximums nimmt dann mit zunehmendem McCumber-Parameter $\beta_C \geq 2.0$ ab, d.h. die Spannungsmodulation verschwindet im Grenzfall großer Kapazitäten.

Der treibende Strom I bestimmt die mittlere Spannung und damit die Oszillationsfrequenz ν_B der Ströme und Spannungen im Netzwerk. Je größer der Wert des Transportstromes desto größer ist diese Frequenz ν_B . Damit resonante Strukturen in der Spannungsantwort auftreten, muss ν_B in der Nähe der Resonanzfrequenzen $\nu_k^{(\text{res})}$ liegen. Da die Resonanzfrequenzen $\nu_k^{(\text{res})}$ mit abnehmendem $\beta_C \beta_L$ -Produkt zunehmen (s. Abschn. 2.5), treten für kleinere Induktionskoeffizienten $\beta_{L,\max} < 1.1$ (bei festen β_C) die Resonanzen bei größeren Transportstromwerten auf.

Der LC-resonante Modus bietet die Möglichkeit die Magnetfeldsensitivität von parallelen Netzwerken zu erhöhen. So besitzen die in Abb. 2.13 dargestellten ac-resonanten Spannungs-kennlinien einen größeren Transferfaktor als die nicht-resonanten Kennlini-

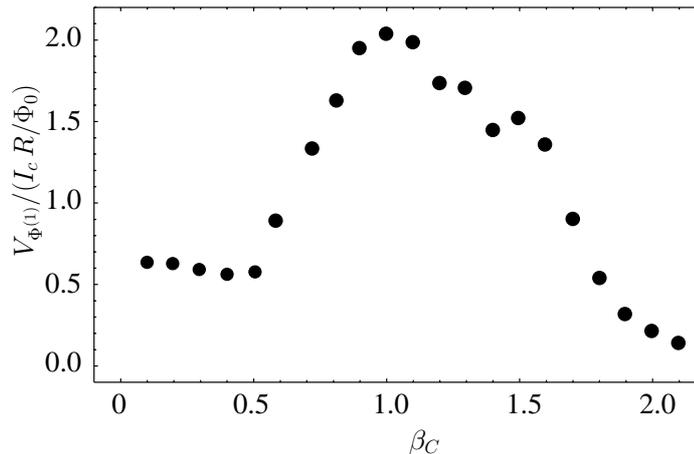


Abbildung 2.14: Maximaler Transferfaktor $V_{\Phi^{(1)}}$ des Gaußschen Netzwerks aus Abb. 2.13 für $\beta_{L,\max} = 1.1$ und für spezielle Werte von β_C .

en. Abb. 2.14 zeigt die numerisch bestimmten maximalen Transferfaktoren $V_{\Phi^{(1)}} = |\partial_{\Phi^{(1)}} \langle V \rangle|_{\max}$ des Gaußschen Netzwerks für $\beta_{L,\max} = 1.1$ in Abhängigkeit von β_C .

Für kleine Werte des McCumber-Parameters $\beta_C \leq 0.5$ sind die maximalen Transferfaktoren durch $V_{\Phi^{(1)}} \approx 0.6 I_c R / \Phi_0$ gegeben. Der gleiche Wert ergibt sich aus Abb. 2.11 für $\beta_{L,\max} = 1.1$ und $\beta_C = 0$. Für $0.6 \leq \beta_C \leq 1.7$ jedoch besitzen die $\langle V \rangle$ - $\Phi^{(1)}$ -Kennlinien an den Flanken der 'hutförmigen' Struktur einen bis zu 3 mal größere Steigung als im überdämpften Fall $\beta_C = 0$. Die ac-resonanten Kennlinien ermöglichen also 'große' induktive Kopplungen $\beta_{L,\max} > 1$ (und damit große effektive Flächen), ohne dass dadurch der Transferfaktor und der Hub der Spannungsantwort verschwindet. Dies ermöglicht eine sehr gute Ankopplung der Netzwerke an Signal- oder Pickup-Spulen. LC-Resonanzen in parallelen Netzwerken können also dazu ausgenutzt werden, Sensoren mit erhöhter Magnetfeldsensitivität zu realisieren.

In Abschnitt 2.5 wird eine analytische Näherung vorgestellt, die es ermöglicht, die Spannungsantwort von induktiven parallelen Netzwerken mit endlichen Kontaktkapazitäten zu bestimmen. Die dort gewonnenen Näherungslösungen ermöglichen dann auch eine nähere quantitative Analyse der LC-Resonanzen.

2.4.5 Abhängigkeit der Spannungsantwort von Parameterstreuungen

Bei der experimentellen Realisierung supraleitungselektronischer Schaltungen, die Josephson-Kontakte enthalten, treten Streuungen auf, die die Leistungsfähigkeit oder die Funktionsfähigkeit der Schaltungen beeinträchtigen können. So sind z.B. bei supraleitungselektronischen Logiken (wie Rapid-Single-Flux-Quantum (RSFQ) Schaltungen) genau definierte Parameterwerte der Josephson-Kontakte für die Funktionsfähigkeit der Schaltungen notwendig. Bei der folgenden Diskussion von Josephson-Kontakt-Netzwerken als magnetfeldsensitive Sensoren sollen zwei Arten von Streuungen unter-

schieden werden. Die sogenannten strukturellen Streuungen beschreiben die Imperfektionen der geometrischen Strukturen der Netzwerke, d.h. insbesondere die Abweichungen der Ausdehnungen und der Position der supraleitenden Schichten der Schaltungen vom gewollten Design. Diese Streuungen entstehen zwangsläufig bei der Strukturierung und Herstellung der Netzwerke. Die Parameterstreuungen dagegen beziehen sich auf Streuungen der Parameterwerte der Josephson-Kontakte, die bei experimentellen Schaltungen alle verschiedene Widerstandswerte R_n , Kapazitäten C_n und kritische Ströme $I_{c,n}$ besitzen. Die strukturellen Streuungen beeinflussen im Wesentlichen die Magnetfeldabhängigkeit und -periode des kritischen Stroms und der Spannungsantwort, da die Geometrie des Netzwerks die magnetischen Flüsse in den Netzwerkschleifen bestimmt. Der Einfluss struktureller Streuungen auf die Eigenschaften eindimensionaler Netzwerke wird im Abschnitt 2.7 diskutiert. Die folgende Diskussion in diesem Abschnitt beschränkt sich auf den Einfluss von Parameterstreuungen der Kontakte auf die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik von parallelen Netzwerken. Diese Betrachtungen sind insbesondere im Hinblick auf die Verwendung von Hochtemperatur-Supraleitern (wie YBCO etc.) zum Bau von Josephson-Kontakt-Netzwerken sehr wichtig. Bei dc SQUIDS aus Hochtemperatursupraleitern z.B. können unterschiedliche Kontaktparameter zu asymmetrischen Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken mit reduzierten Transferfaktoren $V_{B(1)} = |\partial_{B(1)} \langle V \rangle|_{\max}$ im Vergleich zu symmetrischen Kennlinien von SQUIDS mit identischen Kontakten führen [120].

Die Möglichkeit kontrollierte und reproduzierbare Josephson-Kontakte herzustellen ist bei Tieftemperatur-Supraleitern mit der Niob-Aluminiumoxid-Niob ($Nb-Al_2O_3-Nb$) Technologie gegeben [35, 62, 77]. Leider existiert bis heute keine vergleichbare Technologie für Hochtemperatur-Supraleiter. Die Gründe hierfür liegen in der sehr komplexen Kristallstruktur von Hoch- T_c -Materialien (wie z.B. Yttrium-Barium-Kupfer-Oxid (YBCO)). Da sie epitaktisch auf ein Substrat aufgewachsen werden, ist die Wahl der verwendbaren Materialien und Techniken eingeschränkt. Ferner liegt ihre Kohärenzlänge ξ im Bereich von nm, d.h. ξ ist im Vergleich zur Kohärenzlänge von Niob sehr kurz. Aus diesem Grund sind die supraleitenden Eigenschaften von Hoch- T_c -Materialien sehr sensitiv auf strukturelle und chemische Änderungen auf atomarer Skala. Um Josephson-Kontakte aus Hoch- T_c -Materialien zu fertigen, sind deshalb gut definierte Barrieren mit hoher kristalliner Qualität und Homogenität nötig. Alle bisher verwendeten konventionellen Verfahren ermöglichen nur eine eingeschränkte Kontrollierbarkeit und Reproduzierbarkeit der Kontaktparameter [94]. Typische Werte der Parameter I_c und R streuen auf einem einzelnen Chip um $\pm 20\%$ und variieren noch stärker von Chip zu Chip [94]. Bei den häufig verwendeten Bikristall-Kontakten aus YBCO [59, 70] werden Standardabweichungen des $I_c R$ -Produkts im Bereich von 20% angegeben [55, 113]. Sie haben unter anderem ihren Ursprung in der Variation der Qualität der Korngrenze [111].

Bei den bisher diskutierten Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken eindimensionaler Josephson-Kontakt Netzwerke wurde davon ausgegangen, dass alle Kontakte identisch sind, d.h. alle die gleichen Parameterwerte für R , I_c und C besitzen. Die in den

Abschnitten 2.3.1 und 2.3.2 diskutierten allgemeinen Netzwerkgleichungen sind jedoch von allgemeiner Natur und lassen auch den Fall streuender Parameterwerte zu.

Beginnen wir die Diskussion wieder mit dem Fall verschwindender magnetischer Eigenfelder. Das virtuelle Ein-Phasen-Modell (siehe Abschn. 2.3.1) zeigt, dass die Mittelwerte der Kontaktparameter die Größen sind, die in diesem Fall die Netzwerkdynamik und damit die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken im Wesentlichen bestimmen. In Gleichung (2.38) ist die Zeit auf die charakteristische Josephson-Zeit t_J normiert ($\tau = t/t_J$), die nach (2.3) vom mittleren kritischen Strom I_c und vom mittleren Widerstand R abhängt. Die jeweiligen Verteilungen der Kontaktparameter ($R_n, I_{c,n}, C_n$ für $n = 1, \dots, N$) über das Netzwerk gehen in (2.38) als Gewichte in die akkumulierten Flächen α_R und α_C sowie in den Strukturfaktor S_N des Netzwerks ein. Im speziellen geht die Widerstandsverteilung in α_R , die Kapazitätsverteilung in α_C und die Verteilung der kritischen Ströme in S_N ein.

Sind nur statische (bzw. zeitlich adiabatisch variierende) primäre Magnetfelder anwesend, dann verschwinden die zeitabhängigen Terme auf der rechten Seite von (2.38), die die akkumulierten Flächen enthalten. Dann gehen die Verteilungen der Widerstände und der Kapazitäten über die Netzwerk-Kontakte nicht mehr in Gleichung (2.38) ein und nur noch die Streuung der kritischen Ströme bleibt (über den Strukturfaktor S_N) in (2.38) erhalten. Dies bedeutet, dass in diesem Fall die Spannungsantwort $\langle V \rangle(\mathbf{B}^{(1)})$ nur noch von den Mittelwerten R , C und I_c sowie von der Verteilung der kritischen Ströme abhängt. Sie ist für überdämpfte Kontakte ($C = 0$) durch (2.53) gegeben und kann für Kontakte mit $C > 0$ aus (2.38) durch numerische Integration bestimmt werden. Da die individuellen kritischen Ströme $I_{c,n}$ nur als Gewichte in den Strukturfaktor S_N eingehen, beeinflusst die Streuung der kritischen Ströme die Periode $P_{B^{(1)}}$ der Spannungsantwort bezüglich primärer Magnetfelder nicht und $P_{B^{(1)}}$ ist auch hier durch (2.57) gegeben. Zudem nimmt der Betrag des Strukturfaktors $|S_N(\mathbf{B}^{(1)})|$ für Magnetfeldwerte mit $B_{\perp}^{(1)} = k \cdot P_{B^{(1)}}$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) seinen maximalen Wert $|S_N(k \cdot P_{B^{(1)}})| = 1$ an, so dass die globalen Hauptminima der Spannungsantwort $\langle V \rangle(\mathbf{B}^{(1)})$ unverändert bei $B_{\perp}^{(1)} = k \cdot P_{B^{(1)}}$ bleiben. Demnach beeinflussen Parameterstreuungen die Periodizitätseigenschaften nicht.

Die Periodizitätseigenschaften werden jedoch stark von den strukturellen Streuungen beeinflusst (s. Abschn. 2.7). Für das Gaußsche Netzwerk zeigt Abbildung 2.15 (a) die Magnetfeldabhängigkeit der mittleren Spannung $\langle V \rangle$ und des kritischen Netzwerkstroms $I_{c,\text{Netzwerk}}$ für den Fall, dass die kritischen Ströme $I_{c,n}$ um jeweils $\pm X\%$ um ihren Mittelwert streuen. Die Mittelwerte R und I_c sind für beide Fälle gleich gewählt. Abb. 2.15 (a) zeigt deutlich dass sich der kritische Netzwerkstrom $I_{c,\text{Netzwerk}}$ nur leicht ändert, und der qualitative Verlauf nicht von der Streuung der kritischen Ströme beeinflusst wird. Das Hauptmaximum bei $\Phi^{(1)} = 0$ bleibt erhalten, und nur die Werte der Nebenmaxima werden von der expliziten Verteilung der kritischen Ströme beeinflusst. Da der kritische Netzwerkstrom in (2.53) quadratisch eingeht, überträgt sich dieses Verhalten noch verstärkt auf die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik des Netzwerks. Obwohl die kritischen Ströme um $X = \pm 50\%$ um ihren Mittelwert schwanken, bleibt die Span-

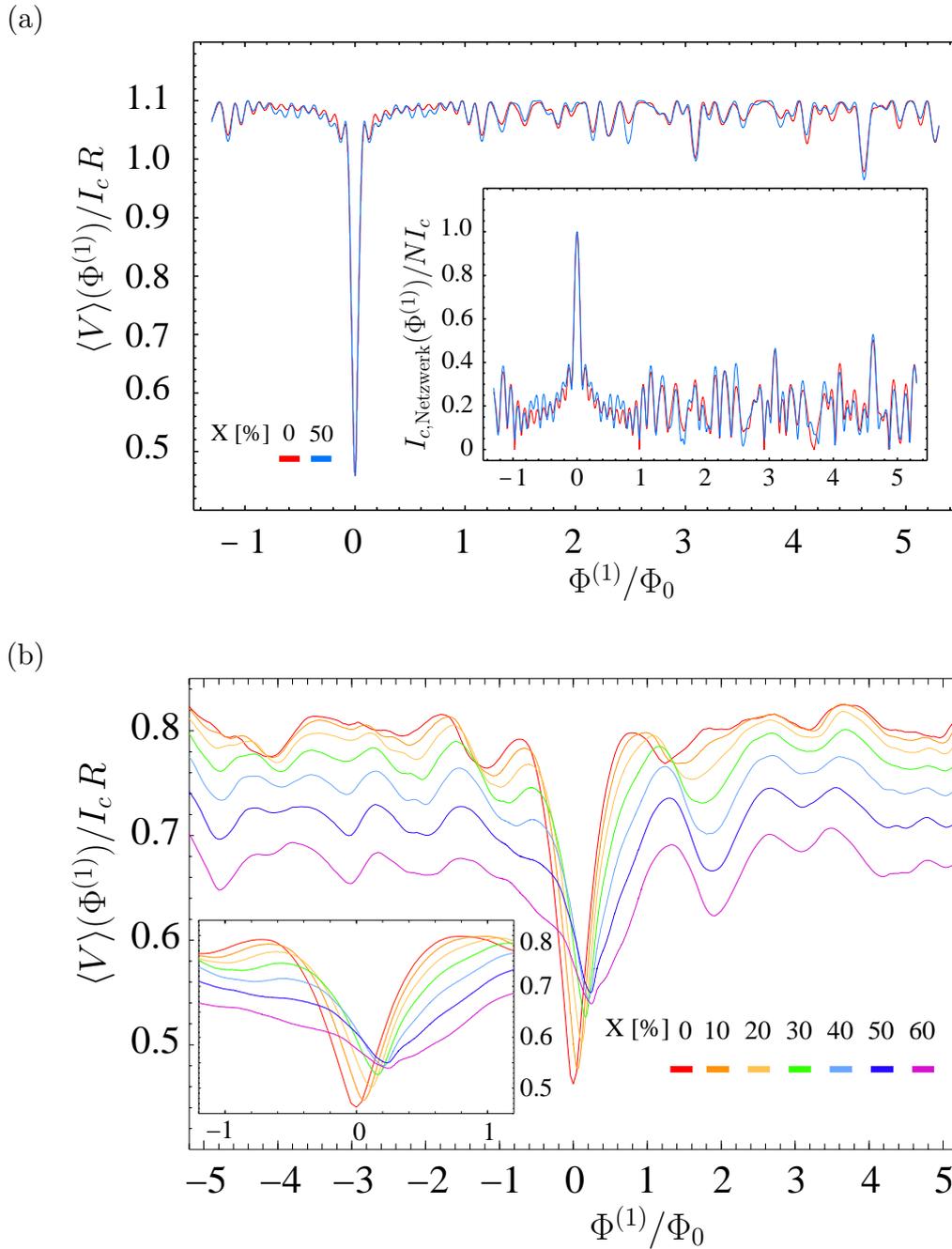


Abbildung 2.15: Einfluss von Parameterstreuungen auf die theoretische Spannungsantwort $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ des Gaußschen Netzwerks (mit $N_G = 20$ und permutierten Flächen): (a) im Fall überdämpfter Kontakte $\beta_C = 0$ und vernachlässigbarer Eigenfelder $\beta_{L, \text{max}} = 0$, (b) für $\beta_C = 0$ und $\beta_{L, \text{max}} = 0.7$. Die Werte der Parameter (d.h. der Widerstände R_n und der kritischen Ströme $I_{c, n}$) streuen um $\pm X$ Prozent um die jeweiligen Mittelwerte. Die Mittelwerte der Kontaktparameter (und damit auch die $I_c R$ -Produkte) sind in allen Fällen identisch. Im Inset der Abbildung (a) ist zudem die Magnetfeldabhängigkeit des kritischen Netzwerkstroms $I_{c, \text{Netzwerk}}(\Phi^{(1)})$ dargestellt. $\Phi^{(1)}$ ist der vom primären Magnetfeld durch die größte Schlaufe induzierte magnetische Fluss. Der Transportstrom beträgt $I = 1.1 N_G I_c$.

nungsantwort (fast) unverändert. Dieses Verhalten der parallelen Netzwerke für den Fall verschwindender Eigenfelder ($\beta_{L,max} = 0$) deutet bereits darauf hin, dass solche Netzwerke robuste und sehr fehlertolerante Systeme sind, die ihre Funktionsfähigkeit trotz imperfekter Josephson-Kontakte beibehalten (s. auch [49, 114, 117]).

Sind die magnetischen Eigenfelder nicht mehr vernachlässigbar klein, hängt die Spannungsantwort vom jeweiligen Eigenfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ des gewählten Netzwerks ab. Da $\mathbf{B}^{(2)}$ von den im Netzwerk fließenden Strömen erzeugt wird, und diese von der Verteilung der Kontaktparameter (R_n , $I_{c,n}$ und C_n) im Netzwerk abhängt, hängt auch die Spannungsantwort im Fall $\beta_{L,max} > 0$ von den jeweiligen Streuungen *aller* Parameter (d.h. von R_n , $I_{c,n}$ und C_n) ab. Zur Vereinfachung beschränkt sich die folgende Diskussion auf nicht-resonante Spannungsantworten von Netzwerken mit überdämpften Kontakten. Abbildung 2.15 (b) zeigt die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik eines Gaußschen Netzwerks mit einer induktiven Kopplung mittlerer Stärke $\beta_{L,max} = 0.7$. Sowohl die Widerstände R_n als auch die kritischen Ströme $I_{c,n}$ wurden um $\pm X\%$ um deren Mittelwerte R und I_c gestreut. Die Mittelwerte sind für alle in Abb. 2.15 betrachteten Fällen gleich groß gewählt, so dass auch die $I_c R$ -Produkte in allen Fällen identisch sind. Sind die Parameterstreuungen nicht zu stark ($X \leq 50\%$), so bleibt auch im Fall $\beta_{L,max} > 0$ das qualitative Verhalten unverändert. Insbesondere treten durch die Streuung der Parameter keinen neuen signifikanten Minima auf und das globale Minimum bei $\Phi^{(1)} = 0$ verschwindet nicht. Erst für sehr große Parameterstreuungen ($X > 60\%$) beginnt die Signifikanz der Eindeutigkeit der Spannungsantwort in der Nähe von $\Phi^{(1)} = 0$ kleiner zu werden und das globale Minimum beginnt zu verschwinden. Auch die außerhalb des dargestellten Magnetfeldbereichs liegenden Hauptminima von $\langle V \rangle$ (für $B_{\perp}^{(1)} = k \cdot P_{B(1)}$ mit $|k| \geq 1$) werden (für $X \leq 50\%$) nicht von Parameterstreuungen zerstört und zeigen ein identisches Verhalten zum dargestellten Minimum bei $\Phi^{(1)} = 0$. Die Periodizitätseigenschaften werden also auch hier (d.h. für $\beta_{L,max} > 0$) nicht von den Parameterstreuungen sondern nur von den strukturellen Streuungen (s. Abschnitt 2.7) beeinflusst. Für größer werdende Abweichungen X vom Mittelwert verringert sich der Spannungshub $\Delta V = \langle V \rangle_{\max} - \langle V \rangle_{\min}$ und damit der maximale Transferfaktor $V_{\Phi^{(1)}} = |\partial_{\Phi^{(1)}} \langle V \rangle|_{\max}$ weiter. Ferner verstärkt sich für zunehmende Inhomogenität X die Asymmetrie bezüglich $\Phi^{(1)} \rightarrow -\Phi^{(1)}$ und die Lage des Hauptminimums verschiebt sich zu positiven $\Phi^{(1)}$ -Werten. Die Gründe hierfür liegen im magnetischen Eigenfeld $\mathbf{B}^{(2)}$, das durch die inhomogene Parameterverteilung im dargestellten Fall asymmetrisch wird. Die Ströme verteilen sich im Netzwerk abhängig von der Verteilung der Kontakt-Parameter um und erzeugen dadurch ein asymmetrisches magnetisches Feld.

Die Tatsache, dass selbst parallele Netzwerke mit großen Parameterstreuungen ($X = \pm 50\%$) immer noch eine eindeutige Kennlinie Nahe des signifikanten Minimums bei $\Phi^{(1)} = 0$ besitzen und der Transferfaktor $V_{\Phi^{(1)}}$ selbst von großen Inhomogenitäten nur leicht verkleinert wird, macht diese Netzwerke interessant im Hinblick auf eine Realisierung aus Hochtemperatur-Supraleitern.

2.5 Analytische Näherung der Spannungsantwort induktiver paralleler Netzwerke mit endlichen Kontakt-Kapazitäten

In Abschnitt 2.4.2 wurde für parallele Netzwerke mit überdämpften Kontakten und vernachlässigbaren Induktivitäten die Spannungsantwortfunktion $\langle V \rangle$ analytisch berechnet (s. (2.53)). Dies gelang mit Hilfe des Ein-Phasen-Modells, wie es in 2.3.1 hergeleitet und diskutiert wurde. Für den Fall, dass die Eigenfelder im Netzwerk nicht vernachlässigt werden können, wurden im vorigen Abschnitt 2.4.4 die sich aus den Lösungen der gekoppelten Differentialgleichungen (2.41) ergebenden Spannungsantworten der induktiven Netzwerke angegeben. Für diesen allgemeinen Fall endlicher Induktivitäten und endlicher Kontakt-Kapazitäten wird nun in diesem Abschnitt eine analytische Näherung zur Bestimmung der $\langle V \rangle$ - $\mathbf{B}^{(1)}$ -Kennlinien diskutiert. Diese Näherung beruht darauf, dass aufgrund der Parallelschaltung alle Kontakte im Netzwerk mit derselben magnetfeldabhängigen Frequenz ν_B (s. (2.52)) schwingen.

Um die Diskussion zu vereinfachen, beschränken wir uns hier auf homogene parallele Netzwerke, in denen alle Kontakte identisch sind, d.h. alle Kontakte besitzen gleiche Widerstände $R_k = R$, Kapazitäten $C_k = C$ und kritische Ströme $I_{c,k} = I_c$. Zudem seien alle Netzwerkschlaufen planar und das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ sei homogen über die Ausdehnungen des Netzwerks, so dass die primären magnetischen Flüsse $\Phi_n^{(1)}$ durch einfache Skalarprodukte $\Phi_n^{(1)} = \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_n \rangle$ gegeben sind. Ferner sei vorausgesetzt, dass die Netzwerke von einem homogen zugeführten Transportstrom getrieben werden. Bei solchen Randbedingungen ist die Umverteilung des Treiberstroms I im Netzwerk gering, so dass I im Wesentlichen nur durch die Leiterstücke fließt, die Josephson-Kontakte enthalten. In diesem Fall erzeugt das von der Transportstromverteilung induzierte Magnetfeld nur vernachlässigbare magnetische Flüsse in den Netzwerkschleifen und die sekundären magnetischen Flüsse $\Phi_n^{(2)}$ werden hauptsächlich von der Abschirmstromverteilung aus oszillierenden Kreisströmen erzeugt. Da hier nur Aussagen über die Spannungsantwort von parallelen Netzwerken an sich gemacht werden sollen, abstrahieren wir von den tatsächlichen Randbedingungen, wie sie in Abschnitt 2.2.3 diskutiert wurden und nehmen im Folgenden generische Randbedingungen an. Dies bedeutet, dass in jeden Knoten der Elektrode X der N -te Teil des Treiberstroms I zugeführt wird und am gegenüberliegenden Knoten der Elektrode Y wieder extrahiert wird. In Abb. 2.16 ist ein planares paralleles Netzwerk mit generischen Randbedingungen dargestellt.

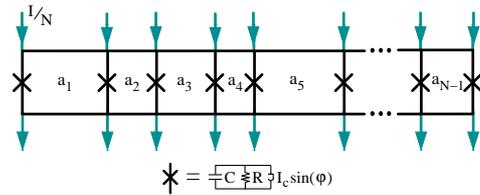


Abbildung 2.16: Paralleles Netzwerk mit generischen Randbedingungen. Jeder Kontakt (\times) wird vom N -ten Teil des Transportstroms I/N durchflossen.

Um eine Bestimmungsgleichung für die Spannungsantwort von Netzwerken mit beliebig starken induktiven ($\beta_{L,\max}$) und kapazitiven (β_C) Kopplungen herzuleiten, gehen wir wie folgt vor. Aus den Flussquantisierungsbedingungen für die Netzwerkschleifen und der Tatsache, dass alle Kontakte mit derselben charakteristischen Frequenz ν_B oszillieren, wird ein Ansatz für die Zeitabhängigkeit der eichinvarianten Phasendifferenzen $\varphi_n(t)$ gewonnen. Aus diesem Ansatz können die Spannungen und Ströme der Josephson-Kontakte bestimmt werden. Mit Hilfe eines linearen Netzwerkmodells können dann die noch zu bestimmenden Größen dieses Ansatzes (wie Amplituden und Phasen) festgelegt werden. Eine implizite Bestimmungsgleichung für die mittlere Spannung in Abhängigkeit vom treibenden Strom I und vom primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ ergibt sich anschließend aus einer Bilanz der im Netzwerk verbrauchten mittleren Leistung.

Eine zentrale Relation dieser Herleitung ist die Flussquantisierungsbedingung (2.13), da sie die Differenz der eichinvarianten Phasendifferenzen $\varphi_n(t)$ bestimmt. Sie geht hier in ihrer zeitlich gemittelten Form ein, in der die (zeitlich gemittelten) sekundären magnetischen Flüsse gegen die primären magnetischen Flüsse vernachlässigt werden können. Auf diese Weise bestimmen ausschließlich die primären Flüsse (über die zeitlich gemittelten Differenzen der Variablen $\varphi_n(t)$) die Phasenlagen der Supraströme untereinander. Die Phasenlagen und Amplituden der über die Kontakte abfallenden Spannungen ergeben sich dann aus einem linearen Netzwerkmodell. In diesem Modell werden die Supraströme der Josephson-Kontakte als Stromquellen aufgefasst, die mit der fundamentalen Frequenz $\nu_B = 2e/h \langle V \rangle$ zeitlich oszillieren und deren Phasenlage durch das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ festgelegt wird. Die Antwort des verbleibenden linearen Netzwerks aus Kapazitäten C_n , Widerständen R_n und Induktivitäten auf eine solche Anregung durch N phasenverschobene Stromquellen kann mit Hilfe einer Impedanzmatrix Z beschrieben werden.

Ähnliche analytische Näherungsmodelle wurden bereits für dc SQUIDS [39, 109, 172] und *reguläre* parallele Netzwerke im Zusammenhang mit Fiske Moden [162, 163] und der Erzeugung von Mikrowellen [25, 156] diskutiert. Das hier vorgestellte Modell beinhaltet eine Erweiterung auf parallele Netzwerke mit *beliebigen* Flächenverteilungen und konzentriert sich auf die Bestimmung der Spannungsantworten sowie der Erklärung *LC*-resonanter Phänomene.

2.5.1 Harmonische Näherung und lineares Netzwerkmodell

Ansatz für die eichinvarianten Phasendifferenzen φ_n

Für überkritische Transportstromwerte fällt in parallelen Netzwerken über alle Josephson-Kontakte dieselbe mittlere Spannung $\langle V \rangle$ ab, und alle Kontakte oszillieren mit der gleichen charakteristischen magnetfeldabhängigen Frequenz ν_B (s. (2.52)). Wird die mittlere Spannung $\langle V \rangle$ in Einheiten von $I_c R$ gemessen und bezeichnen wir den normierten mittleren Spannungsabfall mit $\langle v \rangle$, d.h. $\langle v \rangle \equiv \langle V \rangle / (I_c R)$, so ist die charakte-

ristische Frequenz des parallelen Netzwerks nach

$$\omega_B = 2\pi\nu_B = \frac{2e}{\hbar} \langle V \rangle = \frac{2e}{\hbar} I_c R \langle v \rangle = \frac{1}{t_J} \langle v \rangle \quad (2.73)$$

direkt über die Josephson-Zeit t_J mit der mittleren Spannung verknüpft (s. (2.52)). Berücksichtigen wir nur diese Grundfrequenz ω_B und vernachlässigen alle höheren harmonischen Komponenten, so kann folgender Ansatz für die Zeitabhängigkeit der N eichinvarianten Phasendifferenzen φ_n gemacht werden

$$\varphi_n(t) \approx \omega_B t + \theta_n \sin(\omega_B t + \gamma_n) + \varphi_n^{(0)}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (2.74)$$

Nach diesem Ansatz sind die Phasendifferenzen im zeitlichen Mittel wachsende Funktionen, denen harmonische Schwingungen gleicher Frequenz ω_B aber unterschiedlicher Amplituden θ_n und Phasenlagen γ_n überlagert sind. Nach (2.74) ist die mittlere Spannung dann wie in (2.73) gefordert für alle Kontakte gleich und durch $\langle v \rangle = t_J \langle d/dt \varphi_n(t) \rangle = t_J \omega_B$ gegeben. In den folgenden Absätzen geht es nun darum, die Amplituden θ_n und Phasendifferenzen γ_n sowie die Konstanten $\varphi_n^{(0)}$ zu bestimmen.

Da nach Voraussetzung generische Randbedingungen gegeben sind, verteilt sich der Transportstrom nur gering im Netzwerk um. Es kann also näherungsweise angenommen werden, dass die Transportstromverteilung keinen relevanten Teil zum sekundären magnetischen Fluss beiträgt. Das sekundäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ wird dann ausschließlich von den im Netzwerk oszillierenden Abschirm-Kreisströmen erzeugt. Nehmen wir an, dass die Oszillation dieser Kreisströme (quasi-) harmonisch ist, so verschwindet der zeitliche Mittelwert des sekundären Magnetfeldes und das Gesamtmagnetfeld ist im zeitlichen Mittel durch das primäre Feld $\mathbf{B}^{(1)}$ gegeben. Betrachten wir nun die Flussquantisierungsbedingungen (2.13) für die $N-1$ Schleifen im zeitlichen Mittel, so ergibt sich wegen $\langle \varphi_{n+1} - \varphi_n \rangle = \varphi_{n+1}^{(0)} - \varphi_n^{(0)}$

$$\varphi_n^{(0)} = \varphi_1^{(0)} + \frac{2\pi}{\Phi_0} \sum_{m=0}^{n-1} \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_m \rangle = \varphi_1^{(0)} + \frac{2\pi}{\Phi_0} \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_n \rangle, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (2.75)$$

d.h. die zeitlich konstanten Anteile in (2.74) ergeben sich aus den akkumulierten magnetischen Flüssen $\langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_n \rangle$ (siehe (2.32)). Wie der folgende Absatz zeigt, werden die Phasenlagen der oszillierenden Supraströme durch die magnetfeldabhängigen Konstanten $\varphi_n^{(0)}$ bestimmt.

Mittlerer Spannungsabfall und Suprastrom

Aus dem gewählten Ansatz (2.73) und (2.74) ergibt sich nun der normierte Spannungsabfall $v_n(t) = (I_c R)^{-1} \frac{\hbar}{2e} \frac{d}{dt} \varphi_n(t)$ über den n -ten Kontakt zu

$$v_n(t) = \langle v \rangle + \underbrace{\theta_n \langle v \rangle \cos(\omega_B t + \gamma_n)}_{v_n^{(rf)}(t)}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (2.76)$$

Die Spannung $v_n(t)$ über den n -ten Kontakt ist also in diesem Model durch eine harmonische rf-Spannung $v_n^{(rf)}$ mit Amplitude $\theta_n \langle v \rangle$ gegeben, die um den mittleren Spannungswert $\langle v \rangle$ oszilliert. Die Phasenlage von $v_n(t)$ ist durch γ_n gegeben und a priori für alle Kontakte verschieden. Nur die Oszillationsfrequenz ist für alle Spannungen identisch und durch ω_B gegeben.

Nehmen wir an, dass die Funktionswerte der Besselfunktionen erster Art mit Ordnung $k \geq 2$ für alle Amplituden θ_n (mit $1 \leq n \leq N$) vernachlässigbar sind, d.h. $J_k(\theta_n) \approx 0$ für $1 \leq n \leq N$ und $k \geq 2$, so kann der normierte Suprastrom $i_n^{(s)} \equiv I_n^{(s)}/I_c = \sin(\varphi_n)$ durch den n -ten Kontakt durch

$$i_n^{(s)}(t) \approx \underbrace{J_1(\theta_n) \sin(\gamma_n - \varphi_n^{(0)})}_{\langle i_n^{(s)} \rangle} + \underbrace{J_0(\theta_n) \sin(\omega_B t + \varphi_n^{(0)})}_{i_n^{(rf)}(t)} \quad (2.77)$$

approximiert werden. Der erste Term $\langle i_n^{(s)} \rangle$ in dieser Näherung ist der (normierte) mittlere Suprastrom durch den n -ten Kontakt und der zweite Term $i_n^{(rf)}(t)$ beschreibt den (normierten) zeitlich variierenden rf-Anteil des Suprastroms. Die Abkürzung "rf" steht für "radio frequency" und beschreibt hier die mit einer hohen Frequenz oszillierenden physikalischen Größen. Es sei an dieser Stelle betont, dass nach (2.77) und (2.75) die Phasenlagen der rf-Stromanteile durch das primäre Magnetfeld festgelegt werden. Verwenden wir (2.75) und nehmen vereinfachend an, dass alle rf-Ströme dieselbe Amplitude besitzen, d.h. $J_0(\theta_n) \approx j_0$, so ergibt sich der folgende Ausdruck für die zeitlich variierenden rf-Ströme $\mathbf{i}^{(rf)}(t) = \left(i_1^{(rf)}(t), \dots, i_N^{(rf)}(t) \right)^T$

$$\mathbf{i}^{(rf)}(t) \approx j_0 \operatorname{Im} \left[\exp(i(\omega_B t + \varphi_1^{(0)})) \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)}) \right], \quad (2.78)$$

wobei mit

$$\mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \exp\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} i \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_1 \rangle\right) \\ \exp\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} i \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \rangle\right) \\ \vdots \\ \exp\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} i \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_{N-1} \rangle\right) \end{pmatrix} = \left(\exp\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} i \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_n \rangle\right) \right)_{1 \leq n \leq N} \quad (2.79)$$

der komplexe Strukturvektor $\mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})$ eingeführt wurde. Die Komponenten des Strukturvektors sind (bis auf den Faktor N) durch die Glieder des Strukturfaktors aus (2.36) gegeben, d.h. es gilt $S_N = 1/N \sum_{n=1}^N (\mathbf{S}_N)_n$.

Lineare Netzwerk-Theorie

Die rf-Supraströme im Netzwerk sind durch (2.78) gegeben, d.h. sie besitzen alle dieselbe Amplitude j_0 und ihre Phasenlage wird durch die Komponenten des komplexen Strukturvektors und damit vom primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ bestimmt. Denkt

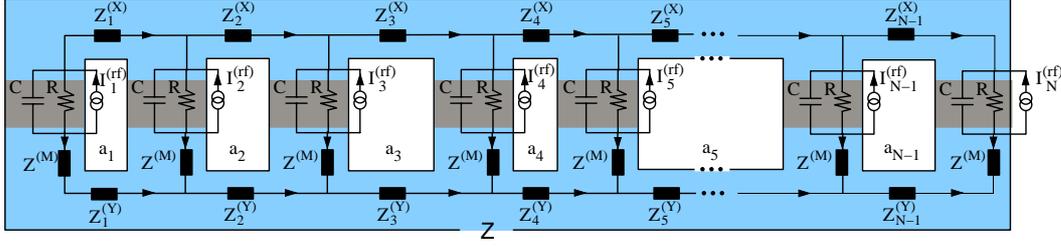


Abbildung 2.17: Ersatzschaltbild des parallelen Josephson-Kontakt-Netzwerks mit N Kontakten. Jeder Kontakt wird durch die Parallelschaltung einer rf-Stromquelle $I^{(rf)} = I_c i^{(rf)}$ mit einem Ohmschen Widerstand R und einer Kapazität C modelliert. Die Impedanzmatrix Z des Ersatzschaltbildes umfasst den grau markierten Bereich. Die positiv gewählten Stromrichtungen sind durch Pfeile dargestellt.

man sich nun jeden Kontakt als Parallelschaltung einer rf-Stromquelle $i_n^{(rf)}$ mit einem Ohmschen Widerstand R und einer Kapazität C [25, 39, 172], so kann das parallele Netzwerk auf das in Abb. 2.17 dargestellte Ersatzschaltbild abgebildet werden. Die N rf-Supraströme werden also als externe Stromquellen aufgefasst, die ein lineares Netzwerk (in Abb. 2.17 grau eingefärbt) aus Widerständen R , Kapazitäten C und Induktivitäten $Z_k^{(\alpha)}$ (mit $\alpha = X, Y, M$) treiben. Wie im Ersatzschaltbild dargestellt, beziehen sich die Induktivitäten $Z_k^{(\alpha)}$ auf die Leiterstücke der Elektroden $\alpha = X, Y$ bzw. auf die 'mittleren' Leiterstücke, die die Josephson-Kontakte enthalten $\alpha = M$. Alle Impedanzen des linearen Netzwerks können nun in einer komplexen Impedanzmatrix Z zusammengefasst werden. Diese Matrix Z ist frequenzabhängig, da das lineare Netzwerk Reaktanzen enthält und beschreibt in komplexer Notation das Ohmsche Gesetz, d.h. den Zusammenhang zwischen den rf-Strömen $i_n^{(rf)}$ und rf-Spannungen $v_n^{(rf)}$

$$\mathbf{v}^{(rf)}(t) = \frac{Z}{R} \cdot \mathbf{i}^{(rf)}(t). \quad (2.80)$$

Dabei bezeichnen $\mathbf{v}^{(rf)}(t) \equiv (v_1^{(rf)}(t), \dots, v_N^{(rf)}(t))^T$ und $\mathbf{i}^{(rf)}(t) \equiv (i_1^{(rf)}(t), \dots, i_N^{(rf)}(t))^T$ die Vektoren der normierten rf-Spannungen bzw. normierten rf-Ströme. Mit (2.78) ergibt sich nun aus (2.80)

$$\mathbf{v}^{(rf)}(t) = j_0 \frac{1}{R} \text{Im}[\exp(i(\omega_B t + \varphi_1^{(0)})) (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)}))], \quad (2.81)$$

d.h. die über die Kontakte abfallenden rf-Spannungen hängen über den Vektor $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})$ direkt vom primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ ab. (2.81) kann nun derart umgeformt werden, dass die rf-Spannungen $v_n^{(rf)}(t)$ dieselbe Gestalt wie in (2.76) besitzen

$$v_n^{(rf)}(t) = j_0 \frac{1}{R} |(Z \cdot \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)}))_n| \cos(\omega_B t + \varphi_1^{(0)} + \delta_n - \frac{\pi}{2}), \quad (2.82)$$

wobei mit $\delta_n = \arg(Z \cdot \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)}))_n$ das Argument der n -ten Komponente des komplexen Vektors $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})$ definiert wurde. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann nun der Anfangswert der Phase $\varphi_1^{(0)}$ auf einen beliebigen Wert festgelegt werden. Nach

(2.77) entspricht dies lediglich der Festlegung der Phasenlage des rf-Stroms $i_1^{(rf)}$ am ersten Kontakt. Wählen wir $\varphi_1^{(0)} = \pi/2$, so folgen aus dem Vergleich der Ausdrücke (2.76) und (2.82) die Amplituden θ_n und Phasen γ_n

$$\theta_n \approx j_0 \frac{|(\mathbf{Z} \cdot \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)}))_n|}{R \langle v \rangle} \quad \text{und} \quad \gamma_n = \delta_n = \arg(\mathbf{Z} \cdot \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})_n), \quad 1 \leq n \leq N. \quad (2.83)$$

Die n -te Komponente des Vektors $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})$ bestimmt durch ihren Betrag die Amplitude θ_n und durch ihr Argument die Phase γ_n der rf-Spannung $v_n^{(rf)}$, bzw. die Amplitude und Phase der eichinvarianten Phasendifferenz $\varphi_n(t)$. Als einzige Unbekannte verbleibt nun noch die Amplitude j_0 der rf-Ströme $\mathbf{i}^{(rf)}$. Ist sie bekannt, sind alle Größen θ_n , γ_n und $\varphi_n^{(0)}$ durch (2.83) und (2.75) festgelegt. Die eichinvarianten Phasendifferenzen $\varphi_n(t)$ ergeben sich dann aus (2.74), die Spannungen $v_n(t)$ an den Kontakten aus (2.76) und die Supraströme $i_n^{(s)}(t)$ sind durch (2.77) festgelegt. Im folgenden Absatz wird die Amplitude j_0 aus der Leistungsbilanz bestimmt und eine implizite Gleichung zur Bestimmung der mittleren Spannung $\langle V \rangle = I_c R \langle v \rangle$ hergeleitet.

Leistungsbilanz und implizite Bestimmungsgleichung für die mittlere Spannung

Sind die Widerstände $R_n = R$ der Josephson-Kontakte die einzigen Ohmschen Widerstände im Netzwerk, so wird die gesamte Leistung in diesen Widerständen verbraucht. Die verbrauchte mittlere Leistung ergibt sich einerseits aus dem Transportstrom I und der mittleren Spannung $\langle V \rangle$ zu $I \langle V \rangle$ und andererseits aus dem zeitlichen Mittelwert über die momentan an den Kontakten verbrauchte Leistung. In dimensionslosen Größen lautet die Leistungsbilanz

$$N J_N \langle v \rangle = \sum_{n=1}^N \frac{1}{T_B} \int_0^{T_B} v_n(t)^2 dt, \quad (2.84)$$

wobei $J_N = I/(NI_c)$ den normierten treibenden Strom pro Kontakt bezeichnet und $T_B = 1/\nu_B$ die Periodendauer der zeitlich variierenden (normierten) Spannungen $v_n(t)$ ist. Da über alle Kontakte dieselbe mittlere Spannung abfällt, ist T_B für alle Kontakte gleich. Die linke Seite in (2.84) ist die Leistung, die von der Stromquelle aufgebracht wird, die das Netzwerk mit Strom versorgt, und die rechte Seite ist die an den Kontaktwiderständen verbrauchte mittlere Leistung. Verwenden wir (2.76) und (2.83), so ergibt sich aus (2.84)

$$J_N \langle v \rangle = \langle v \rangle^2 + \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \theta_n^2 = \langle v \rangle^2 + \frac{1}{2} j_0^2 \frac{\|\mathbf{Z} \cdot \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})\|^2}{NR^2}. \quad (2.85)$$

Für verschwindendes primäres Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{0}$ sind nach Abschnitt 2.5.2 im Grenzfall vernachlässigbarer Induktivitäten und Kapazitäten alle Einträge der Impe-

danzmatrix durch $Z_{k,n} = R/N$ (für $1 \leq k, n \leq N$) gegeben (s. (2.100)) und für alle Komponenten des Strukturvektors gilt $(S_N)_n = 1$. Die Amplitude j_0 kann nun durch die Forderung festgelegt werden, dass Gleichung (2.85) konsistent zur Lösung $\langle v \rangle^2 = J_N^2 - 1$ wird, die für diesen Grenzfall nach (2.53) gilt⁵. Auf diese Weise ergibt sich die Amplitude j_0 zu

$$j_0 = \sqrt{2\langle v \rangle \left(\sqrt{\langle v \rangle^2 + 1} - \langle v \rangle \right)}. \quad (2.86)$$

Aus den Gleichungen (2.85) und (2.86) folgt nun die implizite Gleichung für die mittlere normierte Spannung $\langle v \rangle$

$$J_N = \langle v \rangle + \left(\sqrt{\langle v \rangle^2 + 1} - \langle v \rangle \right) \frac{\|Z \cdot \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})\|^2}{NR^2}. \quad (2.87)$$

In Gleichung (2.87) gehen neben der mittleren Spannung $\langle v \rangle$ nur noch extern kontrollierte Größen wie der treibende Strom J_N und das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ ein. Ist für ein gegebenes paralleles Netzwerk die Impedanzmatrix Z bekannt, so kann (2.87) für gegebene Werte für J_N und $\mathbf{B}^{(1)}$ numerisch gelöst werden und daraus die Spannungsantwort des Netzwerks $\langle V \rangle = I_c R \langle v \rangle$ als Funktion von I und $\mathbf{B}^{(1)}$ bestimmt werden. Dabei ist zu beachten, dass in (2.87) die Einträge der Impedanzmatrix Z von der Frequenz ω_B (und damit wegen (2.73) von der mittleren Spannung $\langle v \rangle$) abhängen, da die komplexen induktiven bzw. kapazitiven Impedanzen des Netzwerks frequenzabhängig sind. Im folgenden Abschnitt wird für parallele Netzwerke die explizite Form der Impedanzmatrix hergeleitet.

2.5.2 Die Impedanzmatrix Z induktiver paralleler Netzwerke

Für das Ersatzschaltbild des linearen Netzwerks aus Abb. 2.17 kann die Impedanzmatrix Z explizit bestimmt werden. Da Z den linearen Zusammenhang zwischen den rf-Spannungen $v_n^{(rf)}(t)$ und den rf-Supraströmen $i_n^{(rf)}(t)$ beschreibt, beziehen sich alle folgenden Impedanzmatrizen ebenfalls ausschließlich auf die jeweiligen zeitlich *oszillierenden* Stromanteile.

Zur Herleitung von Z werden folgende Impedanz-Matrizen definiert ($1 \leq l, m \leq N-1$)

$$Z^{(RC)} = Z^{(RC)} \mathbf{N}, \quad Z^{(M)} = Z^{(M)} \mathbf{N}, \quad Z_{l,m}^{(X)} = Z_m^{(X)} \delta_{l,m}, \quad Z_{l,m}^{(Y)} = Z_m^{(Y)} \delta_{l,m}, \quad (2.88)$$

wobei \mathbf{N} die in (2.14) eingeführte di-diagonale $(N-1) \times N$ Matrix ist, deren nicht-

⁵Die Amplitude j_0 kann auch aus der Forderung bestimmt werden, dass für $\beta_{L,\max} = 0$ und $\beta_C = 0$ Gl. (2.85) konsistent zu (2.53) ist, und zwar für beliebige Werte von $\mathbf{B}^{(1)}$. Die Amplitude j_0

ist dann durch $j_0 = \sqrt{\frac{2\langle v \rangle}{|S_N(\mathbf{B}^{(1)})|^2} \left(\sqrt{\langle v \rangle^2 + |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|^2} - \langle v \rangle \right)}$ gegeben und damit *explizit* magnetfeldabhängig. Dieses Ausdruck für j_0 würde jedoch selbst für $\beta_{L,\max} \rightarrow \infty$ zu magnetfeldabhängigen mittleren Spannungen führen (s. Abschn. 2.5.3).

verschwindende Elemente $\mathbf{N}_{n,m}$ durch $\mathbf{N}_{n,n} = -1$ und $\mathbf{N}_{n,n+1} = 1$ gegeben sind. In (2.88) bezeichnet $Z^{(RC)}$ die Impedanz der RC -Glieder der Josephson-Kontakte und $Z^{(M)}$, $Z_m^{(X)}$, $Z_m^{(Y)}$ sind die Impedanzen der Leitungsstücke im Ersatzschaltbild (siehe Abb. 2.17). Dabei nehmen wir an, dass alle Impedanzen der Leitungsstücke, die die Kontakte enthalten, identisch sind $Z_k^{(M)} = Z^{(M)}$. Die Impedanzen $Z_m^{(X)}$ und $Z_m^{(Y)}$ der Segmente der X - bzw. Y -Elektroden dagegen können verschieden sein, und von Schlaufe zu Schlaufe variieren. Im allgemeinen Fall sind die Impedanzen $Z^{(M)}$, $Z_m^{(X)}$, $Z_m^{(Y)}$ beliebig und ihre Reaktanzen können kapazitiven und/oder induktiven Charakter besitzen.

Mit Hilfe der in (2.88) eingeführten Matrizen und der in Abb. 2.17 festgelegten Stromrichtungen können die Kirchhoffschen Regeln in Matrix-Form wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{(RC)} &= \mathbf{I}^{(M)} + \mathbf{I}^{(rf)}, & \mathbf{I}^{(X)} &= -\mathbf{I}^{(Y)}, & \mathbf{I}^{(M)} &= \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{I}^{(X)} \\ & & & & & (2.89) \\ Z^{(RC)} \cdot \mathbf{I}^{(RC)} + Z^{(X)} \cdot \mathbf{I}^{(X)} + Z^{(M)} \cdot \mathbf{I}^{(M)} - Z^{(Y)} \cdot \mathbf{I}^{(Y)} &= 0, \end{aligned}$$

wobei die ersten drei Gleichungen die $3N-1$ unabhängigen Knotenregeln (Stromerhaltung in jedem Knoten) sind und die letzte Gleichung die $N-1$ Maschenregeln beinhaltet. Die Vektoren $\mathbf{I}^{(\alpha)} = \left(I_1^{(\alpha)}, I_2^{(\alpha)}, \dots \right)^T$ fassen die jeweiligen rf -Anteile der Ströme im Netzwerk für $\alpha = (X, M, Y, RC, rf)$ zusammen (siehe Abb. 2.17). Durch Umformen der Gleichungen (2.89) können nun die Ströme $\mathbf{I}^{(RC)}$ durch die rf -Ströme $\mathbf{I}^{(rf)}$ dargestellt werden. Aus dieser linearen Abhängigkeit zwischen $\mathbf{I}^{(RC)}$ und $\mathbf{I}^{(rf)}$ und mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes in der Form $\mathbf{V}^{(rf)} = Z^{(RC)} \cdot \mathbf{I}^{(RC)} = Z \cdot \mathbf{I}^{(rf)}$ ergibt sich schließlich folgender Ausdruck für die komplexe Impedanzmatrix Z

$$Z \equiv Z^{(RC)} \left[\mathbf{1} + (Z^{(RC)} + Z^{(M)}) \mathbf{N}^T (Z^{(X)} + Z^{(Y)})^{-1} \mathbf{N} \right]^{-1} \left[\mathbf{1} + Z^{(M)} \mathbf{N}^T (Z^{(X)} + Z^{(Y)})^{-1} \mathbf{N} \right]. \quad (2.90)$$

Hier wurde vorausgesetzt, dass bei Netzwerken mit induktiver Kopplung die Impedanzkoeffizienten $Z^{(M)}$, $Z_m^{(X)}$ und $Z_m^{(Y)}$ ($m = 1, \dots, N-1$) (zumindest teilweise) induktiven Charakter und somit endliche Werte besitzen. In diesem Fall ist dann die Matrix $Z^{(X)} + Z^{(Y)}$ invertierbar. Definieren wir nun die Matrix

$$\mathbf{Q} \equiv Z^{(M)} \mathbf{N}^T (Z^{(X)} + Z^{(Y)})^{-1} \mathbf{N}, \quad (2.91)$$

die die Impedanzverteilung im Netzwerk beschreibt, so erhält Z die Gestalt

$$Z = Z^{(RC)} \left[\mathbf{1} + \frac{Z^{(RC)} + Z^{(M)}}{Z^{(M)}} \mathbf{Q} \right]^{-1} [\mathbf{1} + \mathbf{Q}] = Z^{(M)} \left[\frac{Z^{(M)}}{Z^{(RC)}} \mathbf{1} + \mathbf{Q} [\mathbf{1} + \mathbf{Q}]^{-1} \right]^{-1}. \quad (2.92)$$

Der zweite Ausdruck in (2.92) deutet bereits die resonanz-ähnliche Struktur von Z an, die in Abschnitt 2.5.5 näher untersucht wird. Die Koeffizienten der symmetrischen Matrix $Z^{(M)} (Z^{(X)} + Z^{(Y)})^{-1}$ haben die einfache Gestalt $Z^{(M)} / (Z_m^{(X)} + Z_m^{(Y)}) \delta_{l,m}$, so

dass \mathbf{Q} einfach berechnet werden kann. Da die Matrizen $Z^{(X)}$ und $Z^{(Y)}$ symmetrisch sind, ist auch die (i.a. komplexe) $N \times N$ Matrix \mathbf{Q} symmetrisch ($Q_{m,n} = Q_{n,m}$) und deshalb normal. Fasst man \mathbf{Q} als Darstellung einer Abbildung $Q : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ auf, so existiert eine Orthonormalbasis \mathcal{B} für \mathbb{C}^N aus Eigenvektoren von \mathbf{Q} und es gilt

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^N q_k |\mathbf{q}_k\rangle\langle\mathbf{q}_k|, \quad (2.93)$$

wobei $|\mathbf{q}_k\rangle\langle\mathbf{q}_k|$ den Projektor auf den k -ten normierten Eigenvektor $\mathbf{q}_k \in \mathcal{B}$ von \mathbf{Q} zum (i.a. komplexen) Eigenwert q_k bezeichnet. Mit dieser Darstellung von \mathbf{Q} folgt aus (2.92)

$$\mathbf{Z} = \sum_{k=1}^N Z^{(M)} \left(\frac{Z^{(M)}}{Z^{(RC)}} + \frac{q_k}{q_k + 1} \right)^{-1} |\mathbf{q}_k\rangle\langle\mathbf{q}_k|. \quad (2.94)$$

Damit lässt sich das Normquadrat $\|\mathbf{Z} \cdot \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})\|^2$ wie folgt darstellen

$$\frac{\|\mathbf{Z} \cdot \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})\|^2}{NR^2} = \left| \frac{Z^{(M)}}{R} \right|^2 \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| \frac{Z^{(M)}}{Z^{(RC)}} + \frac{q_k}{q_k + 1} \right|^{-2} |\langle\mathbf{q}_k, \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})\rangle|^2. \quad (2.95)$$

Die Bestimmungsgleichung (2.87) für die mittlere Spannung erhält damit schließlich die einfache Form

$$J_N = \langle v \rangle + \left(\sqrt{\langle v \rangle^2 + 1} - \langle v \rangle \right) \left| \frac{Z^{(M)}}{R} \right|^2 \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| \frac{Z^{(M)}}{Z^{(RC)}} + \frac{q_k}{q_k + 1} \right|^{-2} |\langle\mathbf{q}_k, \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})\rangle|^2. \quad (2.96)$$

Die in (2.96) auftretenden komplexen Impedanzkoeffizienten $Z^{(\alpha)}$ mit $\alpha = (X, M, Y, RC)$ sind im Allgemeinen frequenzabhängig (s. folgenden Abschnitt) und damit Funktionen der mittleren normierten Spannung $\langle v \rangle$. Aus diesem Grunde kann Gleichung (2.96) nicht analytisch gelöst werden und stellt damit eine implizite Bestimmungsgleichung für $\langle v \rangle$ dar, die numerisch gelöst werden muss.

Der Vorteil der hier diskutierten Näherung besteht darin, dass durch Lösen einer einzigen impliziten Gleichung die Spannungsantwort von Netzwerken mit induktiven und kapazitiven Kopplungen näherungsweise bestimmt werden kann. Im Vergleich dazu ist die Bestimmung der $\langle V \rangle$ - $\mathbf{B}^{(1)}$ -Kennlinien aus den Netzwerkgleichungen (2.41) wesentlich aufwendiger, da hierbei für eine Vielzahl von Magnetfeldwerten (Stützpunkten) ein System gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen gelöst werden muss, um dann aus diesen Lösungen die mittlere Spannung $\langle V \rangle$ zu berechnen. Gleichung (2.96) ermöglicht es also, das qualitative Verhalten der mittleren Spannung als Funktion von $\mathbf{B}^{(1)}$ und I zu bestimmen und deren Abhängigkeit von den Stärken der induktiven bzw. kapazitiven Effekte auf einfache Weise zu analysieren.

Impedanzkoeffizienten

Um die kapazitiven und induktiven Kopplungen im Netzwerk zu beschreiben, verwenden wir im Folgenden die dimensionslosen Parameter der Form

$$\beta_{C_0} = \frac{2\pi}{\Phi_0} I_c C_0 R^2 \quad \text{und} \quad \beta_{L_0} = \frac{L_0 I_c}{\Phi_0}. \quad (2.97)$$

Der Parameter β_{C_0} beschreibt dabei die Stärke einer Kapazität C_0 im Netzwerk und der dimensionslose Induktivitäts-Parameter β_{L_0} bezeichnet die dimensionslose Größe einer Induktivität L_0 . Für $C_0 = C$ entspricht β_{C_0} dem McCumber-Parameter der Josephson-Kontakte mit Kapazität C . Mit Hilfe dieser Parameter können die komplexen Koeffizienten der Impedanzmatrizen aus (2.88) dargestellt werden. Für induktive (L -artige), RC -artige und LC -artige Impedanzen erhalten wir

$$\begin{aligned} Z^{(L)} &= i\omega_B L = (2\pi i \langle v \rangle \beta_L) R, & Z^{(RC)} &= \frac{1}{\frac{1}{R} + i\omega_B C} = \frac{1}{1 + i \langle v \rangle \beta_C} R, \\ Z^{(LC)} &= \frac{1}{\frac{1}{i\omega_B L} + i\omega_B C} = \frac{2\pi i \langle v \rangle \beta_L}{1 - 2\pi \langle v \rangle^2 \beta_C \beta_L} R. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Alle Impedanzkoeffizienten sind komplex und abhängig von der mittleren normierten Spannung $\langle v \rangle$.

2.5.3 Grenzfälle schwach und stark induktiver Netzwerke

Sind die induktiven Effekte im Netzwerk dominant $|Z^{(\alpha)}| \gg |Z^{(RC)}|$ (mit $\alpha = M, X, Y$), so folgt aus (2.92) für die Impedanzmatrix $\mathbf{Z} \approx Z^{(RC)} \cdot \mathbf{1}$, d.h. ausschließlich die RC -Glieder bestimmen den Zusammenhang zwischen $\mathbf{v}^{(rf)}$ und $\mathbf{i}^{(rf)}$. Aus (2.79) und (2.98) folgt damit

$$\frac{\|\mathbf{Z} \cdot \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})\|^2}{NR^2} = \left| \frac{Z^{(RC)}}{R} \right|^2 = \frac{1}{1 + \langle v \rangle^2 \beta_C^2},$$

so dass in diesem stark induktiven Fall die implizite Bestimmungsgleichung (2.87)

$$J_N = \langle v \rangle + \frac{\sqrt{\langle v \rangle^2 + 1} - \langle v \rangle}{1 + \langle v \rangle^2 \beta_C^2} \quad (2.99)$$

lautet. Gleichung (2.99) ist unabhängig vom primären Feld $\mathbf{B}^{(1)}$, so dass die mittlere Spannung in diesem Fall magnetfeldunabhängig ist und nur noch vom treibenden Strom J_N (und β_C) bestimmt wird⁶. Dieses Ergebnis folgt auch aus der numerischen Simulation der Netzwerkgleichungen in Abschnitt 2.4.4. Zudem zeigt sich hier, dass stark induktive parallele Netzwerke eine zu einem einzelnen Josephson-Kontakt äquivalente (von $\mathbf{B}^{(1)}$ unabhängige) I - $\langle V \rangle$ -Kennlinie besitzen: für den Fall überdämpfter Kontakte

⁶Wäre die Amplitude j_0 *explizit* abhängig vom primären Magnetfeld (s. Fussnote zu Gleichung (2.86)), so würde sich hier trotz $\beta_{L,\max} \rightarrow \infty$ eine von $\mathbf{B}^{(1)}$ abhängige mittlere Spannung $\langle v \rangle$ ergeben und somit ein falsches Ergebnis.

$\beta_C = 0$ folgt aus (2.99) die bekannte Abhängigkeit $\langle v \rangle = \sqrt{J_N^2 - 1}$ und für kapazitiv dominierte Kontakte $\beta_C \gg 1$ die Ohmsche Kennlinie $\langle v \rangle = J_N$ (für den Spannungszustand mit $\langle v \rangle > 0$) [110, 147, 165].

Im entgegengesetzten Grenzfall vernachlässigbarer Induktivitäten $Z^{(\alpha)} \approx 0$ (mit $\alpha = M, X, Y$) kann die Impedanzmatrix \mathbf{Z} nicht mehr wie in (2.90) bestimmt werden, da die Matrix $\mathbf{Z}^{(X)} + \mathbf{Z}^{(Y)}$ nicht mehr invertierbar ist. Da in diesem Fall das Netzwerk im Ersatzschaltbild aus einer reinen Parallelschaltung von N identischen RC -Gliedern besteht, folgt für die Impedanzmatrix

$$\mathbf{Z} = \frac{Z^{(RC)}}{N} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

Die Matrix \mathbf{Z} kann auch aus den Kirchhoffschen Gleichungen (2.89) abgeleitet werden: sie liefern durch Umformung einen linearen Zusammenhang zwischen $\mathbf{I}^{(RC)}$ und $\mathbf{I}^{(rf)}$, woraus mit Hilfe von $\mathbf{V}^{(rf)} = Z^{(RC)} \cdot \mathbf{I}^{(RC)} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}^{(rf)}$ die Impedanzmatrix \mathbf{Z} bestimmt werden kann. Aus (2.79) und (2.98) folgt nun mit (2.100)

$$\frac{\|\mathbf{Z} \cdot \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})\|^2}{NR^2} = \left| \frac{Z^{(RC)}}{R} \right|^2 |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|^2 = \frac{|S_N(\mathbf{B}^{(1)})|^2}{1 + \langle v \rangle^2 \beta_C^2},$$

wobei $\mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})$ der Strukturvektor ist und $S_N(\mathbf{B}^{(1)})$ der Strukturfaktor. In diesem Grenzfall $\beta_{L,\max} = 0$ ergibt sich die implizite Bestimmungsgleichung für $\langle v \rangle$ zu

$$J_N = \langle v \rangle + \frac{\sqrt{\langle v \rangle^2 + 1} - \langle v \rangle}{1 + \langle v \rangle^2 \beta_C^2} |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|. \quad (2.101)$$

Diese Gleichung liefert zwar im überdämpften Fall $\beta_C = 0$ nicht das exakte Ergebnis $\langle v \rangle = \sqrt{J_N^2 - |S_N(\mathbf{B}^{(1)})|^2}$ nach (2.53), die damit bestimmten mittleren Spannungen weichen aber z.B. für $J_N = 1.1$ lediglich um maximal 5% von der exakten Lösung ab. Für $|S_N(\mathbf{B}^{(1)})| = 1$ und $|S_N(\mathbf{B}^{(1)})| = 0$ stimmen die beiden Lösungen sogar exakt überein.

2.5.4 Implizite $\langle V \rangle$ - $\mathbf{B}^{(1)}$ -Bestimmungsgleichungen für dc SQUIDS und parallele Netzwerke

Für dc SQUIDS als einfachste parallele Netzwerke mit $N = 2$ Kontakten und für parallele Netzwerke mit *rein* induktiven Impedanzen $Z^{(\alpha)}$ für ($\alpha = X, M, Y$) werden im Folgenden die impliziten Gleichungen zur Bestimmung der Spannungsantwort $\langle V \rangle(\mathbf{B}^{(1)})$ hergeleitet. Für alle nachfolgenden Beispiele besitzen die Impedanzen der RC -Glieder im Netzwerk die Form $Z^{(RC)} = R/(1 + i\langle v \rangle\beta_C)$, wobei β_C den McCumber-Parameter der Josephson-Kontakte bezeichnet.

dc SQUIDS mit Schleifen-Induktivität L und Streukapazität C_S

Wir beginnen die Diskussion mit dem dc SQUID, dessen Schleife eine Schleifeninduktivität L und eine dazu parallelgeschaltete Streukapazität C_S besitze. Um die Impedanzmatrix Z für diesen Fall mit Hilfe der \mathbf{Q} -Matrix berechnen zu können, muss $Z^{(M)} \neq 0$ und $Z_1^{(X)} + Z_1^{(Y)} \neq 0$ gelten. Nur dann sind die Matrizen \mathbf{Q} aus (2.91) und Z aus (2.92) sinnvoll bestimmbar. Da wir jedoch für den einfachen Fall einer einzigen Schleife nur *einen* nichtverschwindenden Impedanzkoeffizienten annehmen wollen, werden hier folgende Koeffizienten gewählt (siehe [39])

$$Z_1^{(X)} = Z^{(LC_S)} = \frac{2\pi i \langle v \rangle \beta_L}{1 - 2\pi \langle v \rangle^2 \beta_{C_S} \beta_L} R, \quad Z^{(M)} = Z_1^{(Y)} = 0. \quad (2.102)$$

In diesem Fall kann die Z -Matrix aus (2.90) bestimmt werden und es ergibt sich

$$Z = \frac{Z^{(RC)}}{Z^{(LC_S)} + 2Z^{(RC)}} \begin{pmatrix} Z^{(RC)} + Z^{(LC_S)} & Z^{(RC)} \\ Z^{(RC)} & Z^{(RC)} + Z^{(LC_S)} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für $\|Z \cdot \mathbf{S}_2(\mathbf{B}^{(1)})\|^2$ der Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{\|Z \cdot \mathbf{S}_2(\mathbf{B}^{(1)})\|^2}{2R^2} &= \left| \frac{Z^{(RC)}}{R} \right|^2 \left(\cos^2(\pi \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a} \rangle) + \frac{|Z^{(LC_S)}|^2}{|Z^{(LC_S)} + 2Z^{(RC)}|^2} \sin^2(\pi \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a} \rangle) \right) \\ &= \frac{\cos^2(\pi \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a} \rangle)}{1 + (\beta_{C_S} \langle v \rangle)^2} + \frac{(\sin(\pi \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a} \rangle) \beta_L \langle v \rangle)^2}{(1/\pi - \beta_L (\beta_{C_S} + 2\beta_{C_S}) \langle v \rangle)^2 + (\beta_L \langle v \rangle)^2}, \end{aligned} \quad (2.103)$$

wobei \mathbf{a} das orientierte Flächenelement der SQUID-Schleife bezeichnet. Aus der Kombination der Gleichung (2.87) mit (2.103) ergibt sich dieselbe implizite Gleichung für $\langle v \rangle$ wie in [39]. Dort werden die Spannungs-Kennlinien von dc SQUIDS mit Hilfe dieser impliziten Gleichung ausführlich analysiert.

Im Fall verschwindender Streukapazität $C_S = 0$ kann Gleichung (2.103) auch mit Hilfe der \mathbf{Q} -Matrix einfach bestimmt werden. In diesem Fall sind die Impedanz-Koeffizienten $Z_1^{(X)}$, $Z^{(M)}$ und $Z_1^{(Y)}$ rein induktiver Art, d.h. wir können die Koeffizienten zu

$$Z^{(\alpha)} = i\omega_B L^{(\alpha)} = (2\pi i \langle v \rangle \beta_{L^{(\alpha)}}) R, \quad (2.104)$$

wählen, wobei mit $L^{(\alpha)}$ (mit $\alpha = X, M, Y$) die jeweiligen Induktivitäten mit den zugehörigen Parametern $\beta_{L^{(\alpha)}}$ bezeichnet sind. Für die \mathbf{Q} -Matrix folgt damit aus (2.91)

$$\mathbf{Q} = \frac{L^{(M)}}{L^{(X)} + L^{(Y)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.105)$$

d.h. in diesem Fall ist die Matrix \mathbf{Q} nicht von der Spannung $\langle v \rangle$ abhängig. Die Eigenwerte von \mathbf{Q} ergeben sich aus (2.105) zu $q_1 = 0$ und $q_2 = 2L^{(M)} / (L^{(X)} + L^{(Y)})$. Die zu q_1 und q_2 gehörigen normierten Eigenvektoren sind $\mathbf{q}_1 = 1/\sqrt{2}(1, 1)$ und

$\mathbf{q}_2 = 1/\sqrt{2}(-1, 1)$. Bezeichnet L die Induktivität der SQUID-Schleife und β_L den zugehörigen Parameter, so gilt $\beta_L = \beta_{L^{(X)}} + 2\beta_{L^{(M)}} + \beta_{L^{(Y)}}$, woraus $q_2/(q_2+1) = 2\beta_{L^{(M)}}/\beta_L$ folgt. Zusammen mit

$$|\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{S}_2(\mathbf{B}^{(1)}) \rangle|^2 = 2 \cos^2(\pi \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a} \rangle) \quad \text{und} \quad |\langle \mathbf{q}_2, \mathbf{S}_2(\mathbf{B}^{(1)}) \rangle|^2 = 2 \sin^2(\pi \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a} \rangle)$$

folgt dann aus (2.95) für $\|\mathbf{Z} \cdot \mathbf{S}_2(\mathbf{B}^{(1)})\|^2$ das gleiche Resultat wie in (2.103) für $\beta_{C_S} = 0$.

Parallele Netzwerk mit rein induktiven Impedanzen $Z^{(X)}$, $Z^{(M)}$ und $Z^{(Y)}$

Für den Fall, dass mit Ausnahme der RC -Glieder alle Impedanzen im Netzwerk rein induktiven Charakter besitzen (für $m = 1, \dots, N-1$)

$$Z_m^{(X)} = i\omega_B L_m^{(X)}, \quad Z^{(M)} = i\omega_B L^{(M)} = (2\pi i \langle v \rangle \beta_{L^{(M)}}) R, \quad Z_m^{(Y)} = i\omega_B L_m^{(Y)} \quad (2.106)$$

hängt die \mathbf{Q} -Matrix des Netzwerks nur von den Verhältnissen $L^{(M)}/(L_m^{(X)} + L_m^{(Y)})$ der Induktionskoeffizienten $L^{(\alpha)}$ ab, d.h. \mathbf{Q} ist nur noch von der Geometrie des Netzwerks und den Leitergeometrien abhängig. Insbesondere sind in diesem Fall alle Einträge von \mathbf{Q} (und damit alle Eigenwerte q_k) reelle Zahlen, und \mathbf{Q} ist von der Frequenz ω_B und damit von $\langle V \rangle$ unabhängig. Für gegebene Induktionskoeffizienten (d.h. für eine gegebene Netzwerkgeometrie) können damit die Eigenwerte und Eigenvektoren von \mathbf{Q} leicht numerisch bestimmt werden. Aus den Impedanzkoeffizienten (2.106) sowie den Eigenwerten $\{q_k\}$ und normierten Eigenvektoren $\{\mathbf{q}_k\}$ von \mathbf{Q} ergibt sich dann aus (2.96) folgende implizite Gleichung für $\langle v \rangle$

$$J_N = \langle v \rangle + \left(\sqrt{\langle v \rangle^2 + 1} - \langle v \rangle \right) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\beta_{L^{(M)}}^2 \langle v \rangle^2 |\langle \mathbf{q}_k, \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)}) \rangle|^2}{\left(\frac{1}{2\pi} \frac{q_k}{q_k+1} - \beta_{L^{(M)}} \beta_C \langle v \rangle^2 \right)^2 + \beta_{L^{(M)}}^2 \langle v \rangle^2}. \quad (2.107)$$

Die Lösungen dieser Gleichung für Gaußsche Netzwerke mit $N_G = 20$ Kontakten werden in Abschnitt 2.5.6 dargestellt und diskutiert. Sie stimmen sehr gut mit den aus den Netzwerkgleichungen (2.41) bestimmten Spannungsantwortfunktionen überein.

2.5.5 LC-Resonanzen in parallelen Netzwerken

Für parallele Netzwerke mit rein induktiven Impedanzen $Z_m^{(X)}$, $Z_m^{(Y)}$ und $Z^{(M)}$ kann die mittlere Spannung $\langle v \rangle$ aus der impliziten Gleichung (2.107) bestimmt werden. Hierin werden die magnetfeldabhängigen Terme $|\langle \mathbf{q}_k, \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)}) \rangle|^2$ mit Vorfaktoren gewichtet arithmetisch gemittelt. Erfüllt die mittlere Spannung $\langle v \rangle$ die Relation

$$\frac{1}{2\pi} \frac{q_k}{q_k+1} - \beta_{L^{(M)}} \beta_C \langle v \rangle^2 = 0, \quad (2.108)$$

so wird der zugehörige Term $|\langle \mathbf{q}_k, \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)}) \rangle|$ in diesem arithmetischen Mittelwert besonders stark gewichtet. In diesem Sinne soll an dieser Stelle von 'Resonanz' gesprochen werden, und die Spannungswerte, die (2.108) erfüllen, werden aus diesem Grund mit $\langle v \rangle_k^{(\text{res})}$ bezeichnet. Löst man (2.108) nach $\langle v \rangle$ auf, so ergibt sich

$$\langle v \rangle_k^{(\text{res})} \equiv \sqrt{\frac{q_k}{q_k + 1} \frac{1}{2\pi \beta_{L^{(M)}} \beta_C}}, \quad k = 1, \dots, N \quad (2.109)$$

woraus sich mit Hilfe der Relation $\omega = 2e/\hbar \langle v \rangle I_c R$ die Resonanzfrequenz der rf-Supraströme

$$\omega_k^{(\text{res})} = \frac{2e}{\hbar} \langle v \rangle_k^{(\text{res})} I_c R = \sqrt{\frac{q_k}{q_k + 1} \frac{1}{L^{(M)} C}}, \quad k = 1, \dots, N \quad (2.110)$$

ergibt. Über diese Relation hängt das Spektrum der Q-Matrix (d.h. die Eigenwerte q_k) mit den Resonanzfrequenzen $\omega_k^{(\text{res})}$ zusammen. Da aufgrund der speziellen Form der Q-Matrix $q_N = 0$ ein Eigenwert (zum Eigenvektor $\mathbf{q}_N = 1/\sqrt{N}(1, \dots, 1)$) ist, besitzt jedes Netzwerk aus N Josephson-Kontakten im Allgemeinen $N-1$ Resonanzfrequenzen $\{\omega_k^{(\text{res})}, k = 1, \dots, N-1\}$. Dies bedeutet, dass die Anzahl der Resonanzfrequenzen durch die Schlaufenanzahl gegeben ist. So besitzt die Matrix Q des dc SQUID aus Abschnitt 2.5.4 einen nichtverschwindenden Eigenwert $q_2 = 2L^{(M)}/(L^{(X)} + L^{(Y)})$, so dass sich die Resonanzfrequenz mit $L = L^{(X)} + 2L^{(M)} + L^{(Y)}$ zu

$$\omega_{\text{SQUID}}^{(\text{res})} = \sqrt{\frac{2}{LC}} \quad (2.111)$$

ergibt, wenn L die Schlaufeninduktivität ist und C die Kapazität der Josephson-Kontakte bezeichnet. Der Faktor 2 rührt davon her, dass im Ersatzschaltbild des dc SQUID die effektive Gesamtkapazität des LC-Schwingkreises durch $C/2$ gegeben ist.

Da die Matrix Q von den Verhältnissen $L^{(M)}/(L_m^{(X)} + L_m^{(Y)})$ der Induktionskoeffizienten abhängt, werden die Eigenwerte q_k von Q von *allen* im Netzwerk anwesenden Induktivitäten $L^{(M)}$, $L_m^{(X)}$ und $L_m^{(Y)}$ ($m = 1, \dots, N-1$) bestimmt. Auf diese Weise hängt das Eigenfrequenzspektrum $\Sigma^{(\text{res})} = \{\omega_k^{(\text{res})}, k = 1, \dots, N-1\}$ des parallelen Netzwerks von *allen* Induktivitäten ab.

2.5.6 Lösungen der analytischen Näherung für Gaußsche Netzwerke

Für das bereits in Abschnitt 2.4.3 vorgestellte Gaußsche Netzwerke soll das Resonanzfrequenzspektrum $\Sigma^{(\text{res})}$ für verschiedene Parameterwerte dargestellt werden. Wir können dazu vereinfachend annehmen, dass die Induktionskoeffizienten der Leiterstücke im Netzwerk proportional zu ihrer Länge sind, d.h. es gilt für die Induktionskoeffizienten

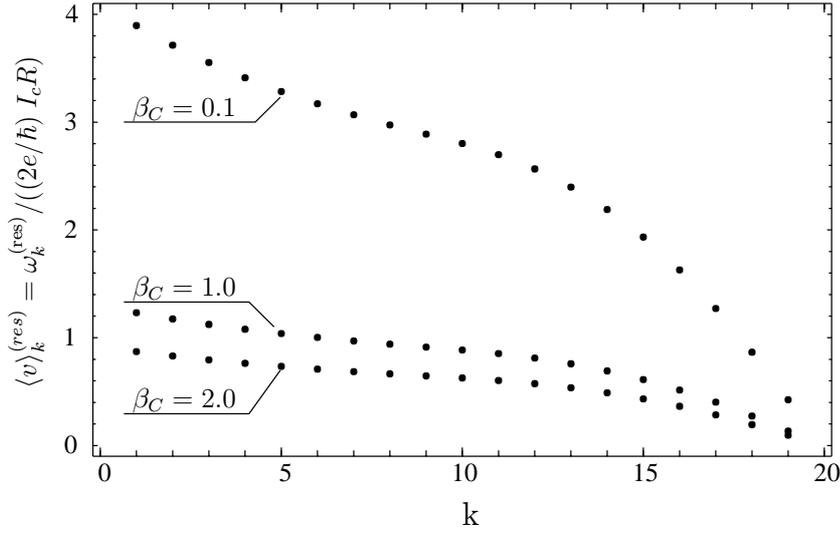


Abbildung 2.18: Resonanzfrequenzspektrum $\Sigma^{(res)}$ des Gaußschen Netzwerks mit $N_G = 20$ Kontakten und permutierten Flächen für festen Induktivitätsparameter $\beta_{L_m} = 0.1$ und $\beta_C = 0.1, 1.0, 2.0$. Die Induktionskoeffizienten der Leiterstücke $L_m^{(X)}$ und $L_m^{(Y)}$ sind proportional zu ihrer Länge gewählt, d.h. $L_m^{(X)} = L_m^{(Y)} \propto (2m - 1) / (2N_G - 3)$ für $(m = 1, \dots, N_G - 1)$. Dies entspricht einer Netzwerkgeometrie wie sie in Abb. 2.17 schematisch dargestellt ist.

$L_m^{(X)} = L_m^{(Y)} \propto (2m - 1) / (2N_G - 3)$ für $(m = 1, \dots, N_G - 1)$. Abbildung 2.18 zeigt das Resonanzspektrum für verschiedene Werte des McCumber-Parameters β_C und festen Wert des Induktivitätsparameters $\beta_{L_m} = 0.1$. Das Gaußsche Netzwerk besitzt $N_G - 1 = 19$ verschiedene Resonanzfrequenzen, die in Abb. 2.18 der Größe nach geordnet sind. Sie sind zwischen der maximalen Resonanzfrequenz $\omega_{\max}^{(res)}$ und verschwindender Frequenz $\omega = 0$ annähernd gleichmässig verteilt, so dass kein Frequenzbereich und damit auch kein Spannungsbereich besonders bevorzugt ist. Wie (2.110) beschreibt, erstreckt sich $\Sigma^{(res)}$ für abnehmende Kapazitäten zu höheren Werten hin, und die Abstände zwischen zwei aufeinander folgenden Resonanzfrequenzen vergrößern sich. Besitzen die Induktions- und Kapazitätsparameter β_{L_m} bzw. β_C jedoch geeignete Werte, so liegen alle Resonanzfrequenzen in einem eng begrenzten Intervall. Für $\beta_C = 1.0$ zum Beispiel liegt $\Sigma^{(res)}$ im Frequenzintervall $0 \leq \omega^{(res)} / ((2e/\hbar) I_c R) \leq 1.2$. Besitzt in diesem Fall der treibende Strom $I = J_N N I_c$ einen geeigneten Wert, so oszilliert das Netzwerk mit einer charakteristischen Frequenz ω_B innerhalb dieses Intervalls, so dass die resonanten Moden angeregt werden können.⁷ Nach (2.78) legt nun das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ die Phasenlage der rf-Supraströme fest und wählt dadurch die Moden aus, die tatsächlich angeregt werden. Auf diese Weise bestimmt das primäre Magnetfeld für vorgegebenes I die Oszillationsfrequenz des Netzwerks und wir gelangen zu einer Spannungsantwort, die vom treibenden Strom I , dem primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ und vom Resonanzspektrum des Netzwerks abhängt.

Die mit Hilfe der impliziten Gleichung (2.107) bestimmte Spannungsantwort des Gaußschen Netzwerks zeigen die Abbildungen 2.19 und 2.20. In beiden Abbildungen ist der

⁷d.h. in diesem Fall fällt über das Netzwerk eine mittlere Spannung $\langle v \rangle$ ab, die im (zum Frequenzintervall äquivalenten) Spannungsintervall $0 \leq \langle v \rangle \leq 1.2$ liegt.

Wert des treibenden Stroms zu $I = 1.1N_G I_c$ gewählt und der Induktionsparameter ist durch $\beta_{L_m} = 0.1$ gegeben. Abb. 2.19 zeigt den Vergleich der Spannungsantworten, die auf zwei unterschiedliche Weisen berechnet sind. Die durchgezogenen Kennlinien sind die Lösungen der harmonischen Näherung, d.h. sie erfüllen (2.107). Die gestrichelten Kennlinien wurden durch numerische Integration der Netzwerkgleichungen (2.41) gewonnen, die die Dynamik aller $N-1$ Freiheitsgrade beschreibt. Für alle drei dargestellten Fälle (a) $\beta_C = 0.1$, (b) $\beta_C = 1.0$ und (c) $\beta_C = 2.0$ stimmen die genäherten $\langle V \rangle - \Phi^{(1)}$ -Kennlinien qualitativ sehr gut mit den 'exakten' Kennlinien überein, d.h. mit Hilfe der harmonischen Näherung können insbesondere die resonanten Strukturen in den Spannungsantworten von parallelen Netzwerken qualitativ erklärt werden.

Für $\beta_C = 0.1$ besitzt die Spannungsantwort bei $\Phi^{(1)} = 0$ ein signifikantes Minimum und es treten keine resonanten Strukturen auf. In diesem Fall werden also unter den gegebenen Bedingungen keine resonanten Moden angeregt, so dass sich das Netzwerk im nicht-resonanten ac-Modus befindet (s. Abschn. 2.4.4). Dies liegt daran, dass für die gegebenen Parameterwerte $(\beta_C, \beta_{L_m}) = (0.1, 0.1)$ das Resonanzfrequenzspektrum nach Abb. 2.18 bei zu hohen Frequenzen liegt. Damit ist die charakteristische Oszillationsfrequenz ω_B des Netzwerks zu klein, um Resonanzen anzuregen. Dies ändert sich für größere Werte des McCumber-Parameters. Für $\beta_C = 1.0$ zeigen beide Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken bei $\Phi^{(1)} = 0$ ein signifikantes Maximum, das von zwei scharfen Minima symmetrisch umgeben wird. In diesem Fall (b) liegt die charakteristische Frequenz ω_B im Intervall der Resonanzfrequenzen (s. Abb. 2.18), so dass die oszillierenden Abschirmströme simultan mehrere resonante Moden anregen können und das Netzwerk damit im resonanten ac-Modus betrieben wird. Da die Stärke und die Frequenz der Ströme durch das externe Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ bestimmt werden, hängt es von $\mathbf{B}^{(1)}$ und vom Treiberstrom I ab, welche Moden tatsächlich angeregt werden. Wird der McCumber-Parameter mit $\beta_C = 2.0$ nun noch weiter erhöht, so zeigt die Spannungsantwort keine Hut-artige resonante Struktur mehr und bei $\Phi^{(1)} = 0$ verbleibt ein im Vergleich zu den Fällen (a) und (b) wenig ausgeprägtes globales Maximum. In diesem Fall (c) ist die Oszillationsfrequenz ω_B für alle Werte von $\Phi^{(1)}$ größer als jede der Resonanzfrequenzen $\omega_k^{(\text{res})}$, und die resonanten Moden bleiben inaktiv.

Abbildung 2.20 zeigt die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik des Gaußschen Netzwerks in Abhängigkeit von β_C nach der impliziten Gleichung (2.107). Der McCumber-Parameter β_C wird bei $\beta_C = 0.1$ beginnend in Schritten von 0.1 bis $\beta_C = 2.1$ erhöht. Um eine Aussage über die Qualität der Näherung zu machen, muss Abb. 2.20 mit Ergebnissen (s. Abb. 2.13) der numerischen Simulation der Netzwerkgleichungen (2.41) verglichen werden. Auch dieser Vergleich zeigt, dass die Lösungen der analytischen Näherung qualitativ mit den 'exakten' Resultaten aus Abb. 2.13 übereinstimmen und sich lediglich die Details der Kennlinien unterscheiden. So zeigen die Kennlinien der Näherungslösungen nach Abb. 2.20 größere Spannungsmodulationen und die lokalen Extrema der Kennlinien sind ausgeprägter ausgebildet. Dies liegt insbesondere an den folgenden verwendeten Näherungen des Modells: (1) die rf-Spannungen und rf-Ströme in (2.76) bzw. (2.77) oszillieren harmonisch mit der Grundfrequenz ω_B und

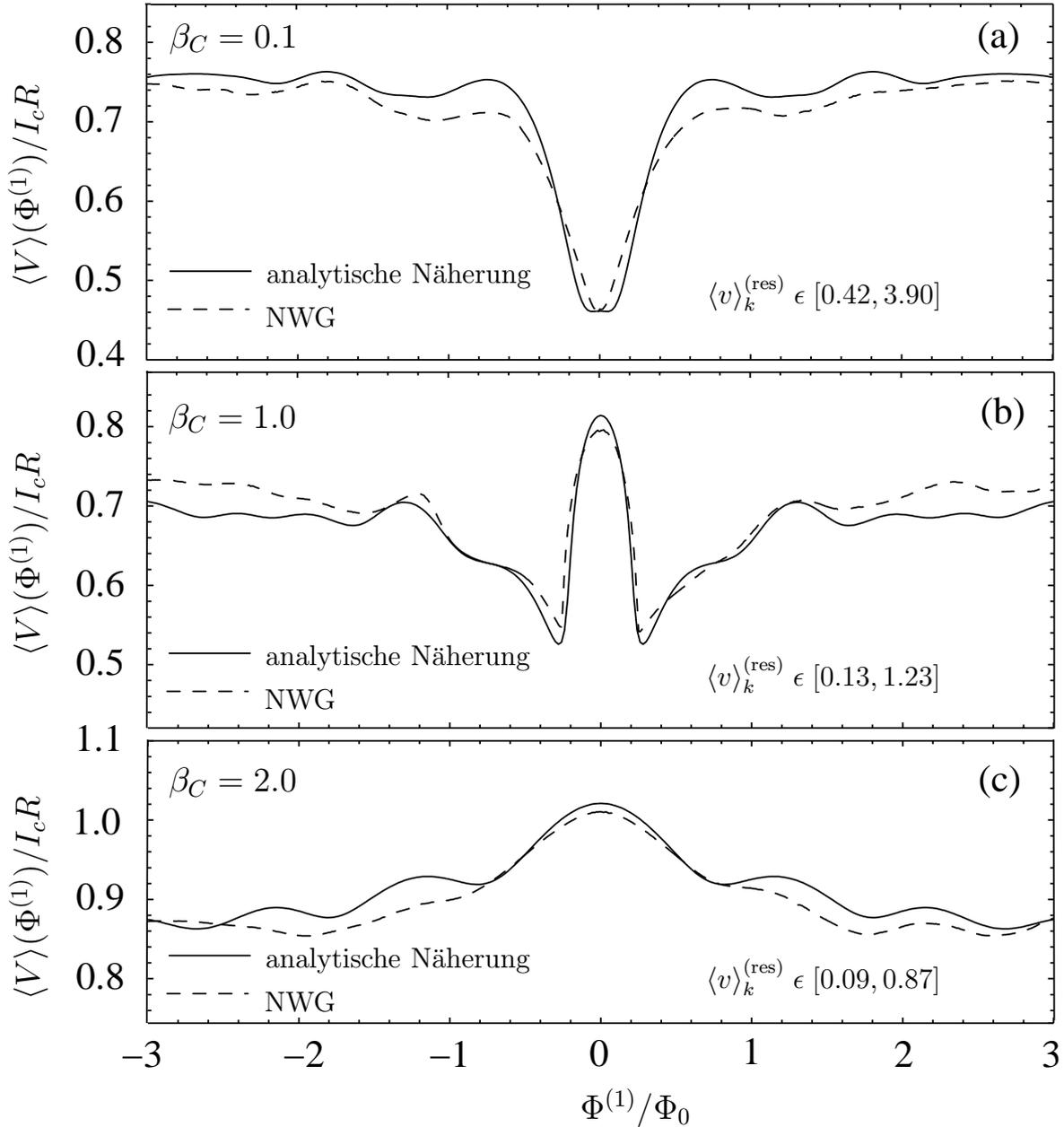


Abbildung 2.19: Theoretische Spannungsantwort $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ des Gaußschen Netzwerks mit $N_G = 20$ Kontakten und permutierten Flächen für verschiedene McCumber-Parameter $\beta_C = 0.1, 1.0, 2.0$ und festen Wert des Induktionsparameters $\beta_{L_m} = 0.1$. Dargestellt ist ein Vergleich der analytischen Näherung (2.107) (durchgezogene Linien) mit den Resultaten der numerischen Simulation der Netzwerkgleichungen (NWG), die die Dynamik aller N_G-1 Freiheitsgrade beschreiben (s. (2.41)) (gestrichelte Linien). Die Intervalle der Resonanzspannungen $\langle v \rangle_k^{(\text{res})}$ aus Abb. 2.18 sind für alle drei Fälle angegeben. Der Transportstrom beträgt $I = 1.1N_G I_c$ und $\Phi^{(1)}$ bezeichnet den primären magnetischen Fluss durch die größte Netzwerkschleife.

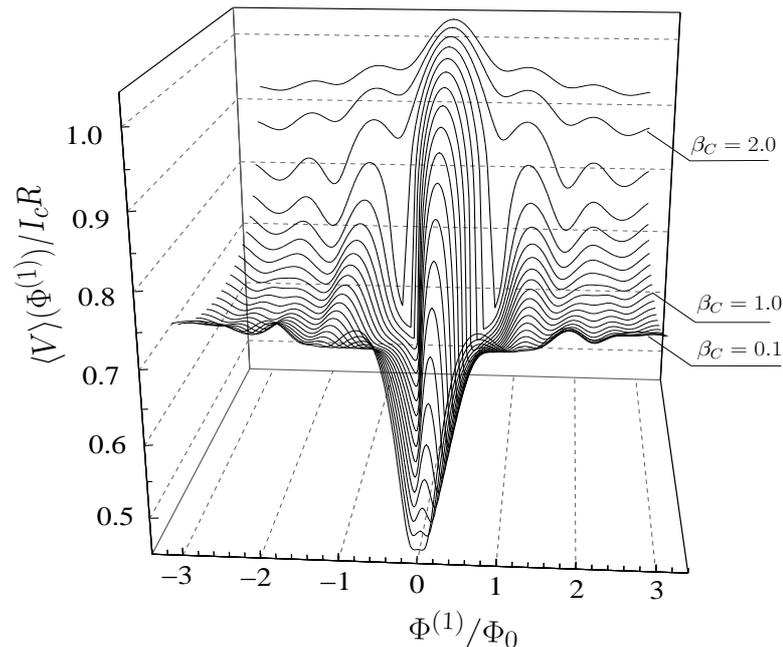


Abbildung 2.20: Theoretische Spannungsantwort $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ des Gaußschen Netzwerks mit $N_G = 20$ Kontakten und permutierten Flächen für verschiedene McCumber-Parameter β_C und festen Wert des Induktionsparameters $\beta_{L_m} = 0.1$. Die Kennlinien sind Lösungen der impliziten Gleichung (2.107) der harmonischen Näherung. Der Transportstrom beträgt $I = 1.1N_G I_c$ und der McCumber-Parameter wird bei $\beta_C = 0.1$ beginnend in Schritten von 0.1 bis $\beta_C = 2.1$ erhöht. $\Phi^{(1)}$ bezeichnet den primären magnetischen Fluss durch die größte Schlaufenfläche.

alle höheren harmonischen Komponenten werden vernachlässigt; (2) der Einfluss des sekundären magnetischen Felds $\mathbf{B}^{(2)}$ wird ausschließlich in Form von Induktivitäten in 'lumped element'-Näherung berücksichtigt, d.h. die Induktivitäten im verwendeten Ersatzschaltbild (s. Abb. 2.17) sind als punktförmige konzentrierte Induktivitäten modelliert. In Realität sind die Oszillationen der Spannungen und Ströme jedoch anharmonisch und das von den Strömen im Netzwerk induzierte sekundäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ ist langreichweitig, d.h. im allgemeinen Fall induziert ein Stromelement in *allen* Schlaufen des Netzwerks magnetischen Fluss. Im Gegensatz zum Näherungsmodell sind die beiden letztgenannten Punkte in den Netzwerkgleichungen (2.41) enthalten, so dass die Lösungen von (2.41) die vollständige Netzwerkdynamik beschreiben und in diesem Sinne die 'exakten' $\langle V \rangle$ - $\mathbf{B}^{(1)}$ -Kennlinien liefern.

2.6 Rauschenergie von parallelen Josephson-Kontakt-Netzwerken

Im Hinblick auf Anwendungen von parallelen SQIFs ist die Frage der Sensitivität dieser Netzwerke von zentraler Bedeutung. Deshalb soll an dieser Stelle die spektrale Energiedichte $\mathcal{E}_N(\nu)$ eines parallelen Netzwerks mit N Kontakten abgeschätzt werden. Da

wir am Skalierungsverhalten von $\mathcal{E}_N(\nu)$ bezüglich N interessiert sind, wird für diese Abschätzung vereinfachend angenommen, dass die Schleifen im Netzwerk alle vergleichbar groß sind und alle Josephson-Kontakte identische Parameterwerte besitzen.

Die Rauschquellen bei extern geshunteten Kontakten sind durch die Shunt-Widerstände gegeben für deren Leistungsspektrum bei thermischem Rauschen unkorreliertes Nyquist Rauschen angenommen werden kann. Die Ströme durch einen einzelnen überdämpften Josephson-Kontakt erzeugen eine spektrale Leistungsdichte der Spannung, die durch

$$\mathcal{S}_V^{(J)}(\nu) = \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{I_c}{I}\right)^2\right) 4k_B T R \left(\frac{R_d}{R}\right)^2 \quad (2.112)$$

gegeben ist [21, 22], wobei für die Frequenz ν angenommen wird, dass sie sehr viel kleiner ist als die Josephson-Frequenz $\nu_J = 1/t_J$. Der erste Term in (2.112) ist das Spannungsrauschen, das der Rauschstrom im dynamischen Widerstand $R_d = \partial\langle V \rangle / \partial I$ erzeugt und der zweite Term ($\propto (I_c/I)^2$) stammt vom Spannungsrauschen bei der Frequenz $\nu_J \pm \nu$, das vom Josephson-Kontakt aufgrund seiner inhärenten Nichtlinearität auf die Messfrequenz ν heruntergemischt wird. Werden nun N Josephson-Kontakte parallel geschaltet, so addieren sich die spektralen Leistungsdichten der einzelnen Kontakte, da die Rauschquellen alle als unkorreliert angenommen werden können. Für die spektrale Leistungsdichte $\mathcal{S}_{V,N}(\nu)$ des parallelen SQIFs folgt daraus

$$\mathcal{S}_{V,N}(\nu) = N \mathcal{S}_V^{(J)}(\nu) = \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{N I_c}{I}\right)^2\right) 4k_B T R \left(\frac{R_d}{R}\right)^2 N, \quad (2.113)$$

wobei $I/(N I_c)$ den Transportstrom pro Josephson-Kontakt bezeichnet. Für typische Werte des Transportstroms $I = 1.1 N I_c$ folgt für den dynamischen Widerstand R_d des parallelen Netzwerks am Ort maximaler Transferfunktion $R_d \approx 1.2 R$. Für $N = 2$, d.h. für eine einzelne Schleife (konventioneller dc SQUID) folgt damit aus (2.113) für $I = 2.2 I_c$ die bekannte Relation $\mathcal{S}_V^{(0)}(\nu) \equiv \mathcal{S}_{V,2}(\nu) \approx 16 k_B T R$ [152].

Um zu einem Ausdruck für die spektrale Energiedichte des parallelen Netzwerks zu kommen, starten wir mit einer Wiederholung der bekannten Relationen für den dc SQUID. Mit Hilfe der Leistungsdichte der Spannung $\mathcal{S}_V^{(0)}(\nu)$ kann die Magnetfeldauflösung eines dc SQUIDs durch $\mathcal{S}_B^{(0)}(\nu) = \mathcal{S}_V^{(0)}(\nu)/V_{B(1)}^2$ angegeben werden, wobei $V_{B(1)}$ den maximalen Transferfaktor des dc SQUIDs als Magnetfeld-Spannungs-Wandler bezeichnet. Die spektrale Rauschenergiedichte des dc SQUIDs folgt dann zu

$$\mathcal{E}^{(0)}(\nu) = \frac{a^2}{2L^{(S)} V_{B(1)}^2} \mathcal{S}_V^{(0)}(\nu) \quad (\text{dc SQUID}), \quad (2.114)$$

wobei a die Schleifenfläche und $L^{(S)}$ die Schleifeninduktivität des dc SQUIDs bezeichnen [21, 22].

Betrachten wir nun ein reguläres paralleles Netzwerk mit N Kontakten, in dem jede der Schleifen die Induktivität $L^{(S)}$ besitzt und in dem die induktiven Kopplungen zwischen

den verschiedenen Schleifen gering ist. Die letzte Bedingung ist für die Leiter-förmigen Netzwerkgeometrien aus Abb. 2.3 nicht erfüllt. Es können jedoch Netzwerkgeometrien gefunden werden, für die die induktive Kopplung benachbarter Schleifen erheblich reduziert wird, während die funktionale Flächenverteilung des Netzwerks erhalten bleibt. Nach (2.70) ist die maximale Transferfunktion des parallelen Netzwerks proportional zur Gesamtfläche und skaliert deshalb mit N , d.h. es gilt $V_{B^{(1)}} \propto N$. Ebenso skaliert die spektrale Leistungsdichte der Spannung mit der Anzahl N der Kontakte (s. (2.113)), d.h. $\mathcal{S}_{V,N} \propto N$. Da die Rauschströme in den einzelnen Schleifen des parallelen Netzwerks fließen, bleiben die Induktivität $L^{(S)}$ und die Schleifenfläche a in (2.114) beim Übergang vom dc SQUID zum parallelen Netzwerk konstant. Die Kombination des Skalierungsverhaltens von $V_{B^{(1)}}$ und $\mathcal{S}_{V,N}$ mit (2.114) führt auf den folgenden Ausdruck für die spektrale Rauschenergie des parallelen Netzwerks

$$\mathcal{E}_N(\nu) = \alpha \frac{1}{N} \mathcal{E}^{(0)}(\nu) \quad (\text{paralleles Netzwerk}), \quad (2.115)$$

wobei die Konstante α von den induktiven Kopplungen der Schleifen untereinander abhängt. Damit skaliert die spektrale Rauschenergie eines regulären parallelen Netzwerks mit $1/N$. Dieses Skalierungsverhalten besitzen auch parallele Netzwerke, in denen die Schleifenflächen variieren und damit die Schleifen verschiedene Induktivitäten besitzen $L_i^{(S)} \neq L_j^{(S)}$. Auch in diesem Fall skalieren die Größen $V_{B^{(1)}}$ und $\mathcal{S}_{V,N}$ mit der Kontaktanzahl N , so dass für die spektrale Rauschenergie (2.115) gilt und lediglich die Konstante α einen anderen Wert besitzt. Die diskutierten Rauscheigenschaften deuten darauf hin, dass es mit Hilfe paralleler Netzwerke möglich ist, in Anwendungen eine höhere Empfindlichkeit zu erreichen als mit SQUIDs.

2.7 Parallele Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter

Die Diskussion der Spannungsantwort eindimensionaler stromgetriebener Josephson-Kontakt-Netzwerke in Abschnitt 2.4 zeigt, dass die Wahl der Schleifenflächen und deren Verteilung die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik wesentlich bestimmt. Insbesondere die Periode $P_{B^{(1)}}$ der Spannungsantwort $\langle V \rangle$ bezüglich der Normalkomponente $B_{\perp}^{(1)}$ des primären Magnetfeldes $\mathbf{B}^{(1)}$ wird nach (2.57) durch die Flächen $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N-1}\}$ der Netzwerkschleifen festgelegt.⁸ Das Beispiel des Gaußschen Netzwerks mit linear zunehmenden Flächeninhalten zeigt bereits, dass es parallele Netzwerke gibt, deren Periode sehr viel größer ist als die Periode $P_{\Phi^{(1)}} = \Phi_0$ regulärer Netzwerke. In diesem Abschnitt wird nun gezeigt, dass parallele Netzwerke derart ausgelegt werden können, dass ihre Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik eine sehr große Periode besitzt, die

⁸Es werden an dieser Stelle wieder planare Netzwerke angenommen, so dass die Flächennormalen \mathbf{n}_i aller Schleifen parallel sind $\mathbf{n}_i = \mathbf{n}$. Zudem sei das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ homogen über die Ausdehnungen des Netzwerks, so dass für die Normalkomponente des primären Magnetfeldes $B_{\perp}^{(1)} = \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{n} \rangle$ gilt.

größer ist als die in typischen Anwendungen auftretenden maximalen primären Magnetfeldwerte $\left|B_{\perp}^{(1)}\right|_{\max}$, und dass zugleich die Spannungsantwort innerhalb des relevanten Messbereichs $\left|B_{\perp}^{(1)}\right| \leq \left|B_{\perp}^{(1)}\right|_{\max}$ ein eindeutiges signifikantes Verhalten bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ besitzt. Derartige Netzwerke sind besonders interessant, da sie zur absoluten Messung des primären Magnetfeldes $B_{\perp}^{(1)}$ verwendet werden können. Das signifikante Verhalten bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ kann ein globales Minimum (im nicht-resonanten ac-Modus) oder eine Hut-artige Struktur mit zwei ausgeprägten globalen Minima bzw. ein einziges globales Maximum (im resonanten ac-Modus) sein (siehe Abschn. 2.4, Abbildungen 2.12 und 2.13). Welches Verhalten die Spannungsantwort in der Nähe von $B_{\perp}^{(1)} = 0$ zeigt, hängt von den Kontakt-Parametern $C_n, R_n, I_{c,n}$, der Stärke der induktiven Kopplungen $\beta_{L,\max}$ und der Größe des Transportstroms I ab. Um die Notation im Folgenden zu vereinfachen, wird auch für die *zwei* globalen Minima im resonanten ac-Modus stellvertretend der Begriff “Extremum” verwendet.

Wir beginnen die Diskussion mit der Betrachtung eines parallelen Netzwerks, dessen Spannungsantwort eine Periode $P_{B^{(1)}}$ besitzt. Sind nicht zu große magnetische Eigenfelder anwesend, so besitzt die Spannungsantwort für primäre Magnetfelder $\mathbf{B}^{(1)}$, deren Werte in der Nähe von Vielfachen einer Periode liegen $B_{\perp}^{(1)} = n \cdot P_{B^{(1)}}$ (mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) das oben beschriebene eindeutige und signifikante Verhalten. Für $B_{\perp}^{(1)} = n \cdot P_{B^{(1)}}$ folgt nämlich aus (2.13), dass die eichinvarianten Phasendifferenzen φ_n der Josephson-Kontakte bis auf Vielfache von 2π (fast) identisch sind $\varphi_n \approx \varphi_1 \bmod 2\pi$ und damit die Ströme $I_n(\varphi_n)$ durch die Kontakte in Phase oszillieren (wodurch die vom magnetischen Eigenfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ induzierten magnetischen Flüsse minimal werden $\Phi_n^{(2)} \approx 0$, so dass für $B_{\perp}^{(1)} = n \cdot P_{B^{(1)}}$ auch unter Berücksichtigung induktiver Effekte $\Phi_n = \Phi_n^{(1)} + \Phi_n^{(2)} \approx n \cdot \Phi_0$ gilt). Diese kohärente Superposition der Kontaktströme im Netzwerk führt im Fall des nicht-resonanten ac-Modus zum Minimum und im Fall des resonanten ac-Modus zur resonanten Struktur der Spannungsantwort $\langle V \rangle$ für $B_{\perp}^{(1)} = n \cdot P_{B^{(1)}}$. Um also ein Netzwerk mit einer möglichst großen Magnetfeldperiode zu erhalten, muss für endliche primäre Magnetfeldwerte $B_{\perp}^{(1)} \neq 0$ verhindert werden, dass sich die Kontaktströme kohärent überlagern. Dies ist nach (2.57) durch eine geeignete Wahl der Netzwerkflächen möglich. Um ein Netzwerk zu erhalten, dessen Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik eine beliebige vorgegebene Periode $P_{B^{(1)}}$ besitzt, müssen nach Gleichung (2.57) die Flächeninhalte der Netzwerkschleifen $a_n = |\mathbf{a}_n|$, derart gewählt werden, dass ihr größter gemeinsamer Teiler ggT den Wert $ggT(a_1, \dots, a_{N-1}) = \Phi_0/P_{B^{(1)}}$ annimmt. Im Fall inkommensurabler Flächen, die keinen endlichen ggT besitzen (d.h. im Grenzfall $ggT \rightarrow 0$) sind die Spannungsantworten der zugehörigen Netzwerke sogar nicht mehr periodisch, d.h. die Periode $P_{B^{(1)}}$ divergiert ($P_{B^{(1)}} \rightarrow \infty$). Solche Netzwerke mit $P_{B^{(1)}} \rightarrow \infty$ sind besonders interessant, da sie im gesamten Magnetfeldbereich $\left|B_{\perp}^{(1)}\right| < \infty$ nur in der Nähe verschwindenden primären Magnetfeldes $B_{\perp}^{(1)} = 0$ eine eindeutige Spannungsantwort besitzen. Wichtig ist hierbei, dass die Netzwerke mit $P_{B^{(1)}} \rightarrow \infty$ bei geeigneter Auslegung ihre Sensitivität beibehalten. Dies liegt daran, dass der Transferfaktor $V_{B^{(1)}}$ nach (2.70) in erster Näherung nur

von der Gesamtfläche A_{tot} des Netzwerks abhängt, so dass für vorgegebenes A_{tot} die Flächenverteilung derart gewählt werden kann, dass der $ggT(a_1, \dots, a_{N-1})$ sehr klein wird.

Nun erzwingt die Inkommensurabilität der Flächenverteilung in einem parallelen Netzwerk zwar streng mathematisch eine beliebig große Periode der Spannungsantwort $P_{B(1)} \rightarrow \infty$, sie erzwingt aber nicht, dass für endliche primäre Magnetfeldwerte $B_{\perp}^{(1)} \neq 0$ eine *teilweise* Kohärenz der Kontaktströme verhindert wird. Eine solche teilweise Kohärenz würde z.B. in der Spannungsantwort von parallelen Netzwerken im nicht-resonanten ac-Modus zu signifikanten Nebenminima bei endlichen primären Magnetfeldwerten führen. In diesem Fall, ist das Minimum von $\langle V \rangle$ bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ zwar eindeutig aber nicht signifikant. Ein solches Verhalten tritt z.B. auf, wenn sich die Schlaufenflächen nur gering voneinander unterscheiden (s. Abb. 2.23). Damit sich das globale Minimum also signifikant von den (lokalen) Nebenminima unterscheidet, müssen die Schlaufenflächen im Netzwerk genügend stark voneinander abweichen.

Zusammenfassend muss die Verteilung der Flächeninhalte der Netzwerkschlaufen folgende zwei Eigenschaften besitzen, damit eine kohärente Superposition der Kontaktströme im Netzwerk für endliche primäre Magnetfelder $B_{\perp}^{(1)}$ verhindert wird:

- (A). Die Flächeninhalte der Schlaufen a_n müssen *inkommensurabel* gewählt sein, d.h. es existiert kein größter gemeinsamer Teiler (ggT). Dies verhindert eine (streng mathematische) Periodizität der Spannungsantwort.
- (B). Die Größe der kleinsten Schlaufe a_{min} unterscheidet sich stark von der Größe der größten Schlaufe a_{max} , und die Größe aller anderen Schlaufen sind derart zwischen a_{min} und a_{max} verteilt, dass keine bestimmte Schlaufengröße bevorzugt wird. Dies verhindert, dass für $B_{\perp}^{(1)} \neq 0$ die Kontaktströme sich teilweise kohärent überlagern, d.h. dass in der Spannungsantwort für endliche primäre Magnetfelder zusätzliche signifikante Extrema auftreten.

Diese beiden Eigenschaften sind notwendige Bedingungen für die globale Eindeutigkeit und Signifikanz der Spannungsantwort bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$. Sie sind jedoch keine hinreichenden Bedingungen. Die Untersuchung verschiedener Netzwerke mit unkonventionellen Flächenverteilungen zeigt, dass es Flächenverteilungen nach (A) und (B) gibt, so dass die Spannungsantwort (im nicht-resonanten ac-Modus) zusätzliche Minima besitzt, deren Werte sich kaum vom Minimum bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ unterscheiden. Das Auftreten dieser Minima wird für zunehmende Anzahl der Netzwerkschlaufen seltener. Bis jetzt fehlt jedoch noch eine direkte Verknüpfung zwischen der Flächenverteilung und dem Auftreten dieser zusätzlichen signifikanten Minima. Das Problem ist hier, dass die Anzahl der Kombinationen der Kontaktströme, die zu einer teilweise kohärenten Superposition führen, exponentiell mit der Flächenanzahl anwächst. Es besteht jedoch Hoffnung, dass mit Hilfe der Zahlentheorie für bestimmte Konfigurationen wie z.B. für Gaußsche Netzwerke dieses Problem gelöst werden kann.

Das in Abschnitt 2.4 diskutierte Gaußsche Netzwerk erfüllt zwar die Bedingung (B) aber nicht Bedingung (A), da die Flächen kommensurabel sind. Da (A) nicht erfüllt ist, besitzt das Gaußsche Netzwerk eine endliche Periode $P_{B^{(1)}}$, die jedoch sehr groß sein kann. Die Folge der Erfüllung der Bedingung (B) ist, dass die Spannungsantwort innerhalb einer Periode $n P_{B^{(1)}} < B_{\perp}^{(1)} < (n+1) P_{B^{(1)}}$ keine signifikante Struktur besitzt, die ein einfaches Auffinden der Magnetfeldwerte mit $B_{\perp}^{(1)} = n P_{B^{(1)}}$ (n ganzzahlig) in Frage stellt.

Flächenverteilungen, die beide Eigenschaften (A) und (B) besitzen, werden als unkonventionell bezeichnet. Besitzt ein paralleles Netzwerk eine solche unkonventionelle Flächenverteilung, so ist für geeignet gewählte Transportstromwerte I die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ in der Umgebung des globalen Extremums bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ eine eindeutige Funktion von $B_{\perp}^{(1)}$. Es sei betont, dass diese Eigenschaft der Spannungsantwort nur von der Wahl der Flächen abhängt, und unabhängig von den Parametern der Josephson-Kontakte im Netzwerk ist. Ferner ist die Einschränkung auf die zur Netzwerkebene senkrechte Magnetfeldkomponente $B_{\perp}^{(1)}$ lediglich eine Folge der Beschränkung auf planare Netzwerke, für die alle orientierten Flächenelemente \mathbf{a}_n der Netzwerkschleifen dieselbe Orientierung besitzen. Im allgemeinen Fall können die Flächennormalen in verschiedene Richtungen weisen, so dass aus der Menge $\{\mathbf{a}_m, 1 \leq m \leq N - 1\}$ eine Vektorbasis des dreidimensionalen Raums gewonnen werden kann. Solche Netzwerke sind dann ebenfalls sensitiv auf die Orientierung des primären Magnetfeldevektors $\mathbf{B}^{(1)}$ und bei unkonventioneller Flächenverteilung besitzt ihre Spannungsantwort ein eindeutiges und signifikantes Verhalten bei $\mathbf{B}^{(1)} = 0$. Aufgrund dieser Eigenschaft werden solche speziellen parallelen Netzwerke mit unkonventioneller Geometrie als parallele *Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter* (SQIF) bezeichnet. Sie können zur hochpräzisen *absoluten* Messung des Betrags, der Richtung und der Phase eines primären Magnetfeldsignals $\mathbf{B}^{(1)}(t)$ verwendet werden. Durch Kontrollströme, die durch geeignet orientierte Magnetfeldspulen fließen, kann z.B. am Ort des SQIFs ein magnetisches Kontrollfeld \mathbf{B}_c erzeugt werden, das sich dem primär zu messenden Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ überlagert. Die Kontrollströme sind dann, für den Fall, dass das Kontrollfeld das primäre Feld kompensiert $\mathbf{B}_c = -\mathbf{B}^{(1)}$, dem primären Feld proportional. Prinzipiell kann also durch Messung der Kontrollströme auf diese Weise der gesamte Magnetfeldvektor $\mathbf{B}^{(1)}(t)$ bestimmt werden.

Anhand der speziellen Netzwerke, die in den experimentellen Schaltungen realisiert sind (siehe Kapitel 4), werden im Folgenden die Eigenschaften von Supraleitenden Quanten-Interferenz-Filtern sowie von regulären Netzwerken diskutiert. Es werden die theoretischen Vorhersagen über die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik dieser Schaltungen vorgestellt, die sich aus der numerischen Integration der Netzwerkgleichungen (2.41) ergeben. Da das experimentelle Design der realisierten Netzwerke in Kapitel 4 ausführlich dargestellt wird, sollen hier nur die für diesen Abschnitt relevanten Daten angegeben werden. Das experimentelle SQIF-Netzwerk besteht aus $N = 30$ Josephson-Kontakten und damit 29 Schleifen. Jede Schleife des Netzwerks besitzt eine Höhe l_2 von $l_2 = 6.5\mu\text{m}$ und die Schleifenbreiten $l_{1,n}$ variieren von $l_{1,\text{min}} = 4.5\mu\text{m}$

für die kleinste Fläche bis $l_{1,\max} = 25.5\mu\text{m}$ für die größte Fläche (vgl. mit Abb. 2.3). Die effektive Gesamtfläche des SQIFs, d.h. die Summe aller Schlaufenflächen beträgt $2717\mu\text{m}^2$. Die Schlaufen sind im Netzwerk derart angeordnet, dass die sekundären Magnetfelder keine signifikante Asymmetrie in der Spannungsantwort in der Nähe von $B_{\perp}^{(1)} = 0$ erzeugen. Das reguläre Netzwerk besteht aus $N_r = 16$ identischen Schlaufen der Höhe $l_2 = 6.5\mu\text{m}$ und der Breite $l_{1,n} = 25.5\mu\text{m}$, so dass die Gesamtfläche von $2652\mu\text{m}^2$ mit der des SQIF-Netzwerks fast übereinstimmt. Bei beiden Netzwerken sind die Josephson-Kontakte in Standard $Nb\text{-}AlO_x\text{-}Nb$ -Technologie hergestellt und jedem Kontakt ist ein Shunt-Widerstand mit $R = 0.8\Omega$ parallel geschaltet, damit die Kontakte nicht-hysteretisch sind und definierte ohmsche Widerstände besitzen. Die Parameter $I_{c,n}$ und $\beta_{C,n}$ sind im Design für alle Kontakte identisch zu $I_{c,n} = I_c \approx 190\mu\text{A}$ und $\beta_{C,n} = \beta_C \approx 0.5$ gewählt. Damit ergibt sich ein $I_c R$ -Produkt von $I_c R \approx 152\mu\text{V}$. Die Geometrien der Netzwerke sind derart gewählt, dass die β_L -Parameterwerte zwischen $\beta_{L,\min} \approx 0.1$ (für die kleinste Schlaufe) und $\beta_{L,\max} \approx 0.5$ (für die größte Schlaufe) liegen. Um eine möglichst homogene Transportstromversorgung des Netzwerks zu erreichen, wird I über ohmsche Widerstände R_b dem Netzwerk zugeführt und wieder abgeführt. Da die Zuführungswiderstände bei einer geeigneten Auslegung die Spannungsantwort des Netzwerks nur gering beeinflussen, wurden sie bei der theoretischen Berechnung der folgenden Ergebnisse nicht berücksichtigt. Damit die folgenden Ergebnisse direkt mit den in Abschnitt 4.2 vorgestellten Messergebnissen der Experimente verglichen werden können, sind der mittlere Spannungsabfall $\langle V \rangle$ in Einheiten von Volt, der treibende Strom I in Ampère und das primäre Magnetfeld $B_{\perp}^{(1)}$ in Einheiten von Tesla angegeben.

Angenommen bei der Strukturierung der supraleitenden Schichten auf dem Substrat seien beim verwendeten Prozess nur Positionen auf einem Raster mit einer Kantenlänge $\Delta l = 0.5\mu\text{m}$ möglich. Dann sind die möglichen Flächenverteilungen stark eingeschränkt. Gehen wir vorerst davon aus, dass die im Design vorgesehene Positionierung der supraleitenden Bereiche *exakt* realisiert wird, so besitzt das reguläre Netzwerk eine periodische Spannungsantwort mit einer Periode von $P_{B^{(1)}}^{(reg)} = \Phi_0 / (6.5 \cdot 25.5\mu\text{m}^2) = 12.5\mu\text{T}$. Ferner erzwingt die Einschränkung $\Delta l = 0.5\mu\text{m}$, dass nur Flächenverteilungen möglich sind, die zwar die Bedingung (B) erfüllen, aber nicht die Bedingung (A). Da die Schlaufenflächen unter der gemachten Voraussetzung kommensurabel sind, besitzen alle realisierbaren Netzwerke eine endliche Magnetfeldperiode $P_{B^{(1)}}^{(theo)}$. Der maximale Wert von $P_{B^{(1)}}^{(theo)}$ folgt nun aus folgender Betrachtung: der minimal mögliche $ggT(a_1, \dots, a_{N-1})$ aller realisierbaren Flächenverteilungen ist durch Δl^2 gegeben, woraus sich eine maximal mögliche Magnetfeldperiode der Spannungsantworten von $P_{B^{(1)}}^{(theo)} = \Phi_0 / \Delta l^2 \approx 8.3\text{mT}$ ergibt. Da bei den hier realisierten Netzwerkgeometrien die Höhe für alle Netzwerkschlaufen mit $l_2 = 6.5\mu\text{m}$ gleich gewählt wurde, gilt $\min(ggT(a_1, \dots, a_{N-1})) = \Delta l l_2$, so dass sich die theoretische Periode auf $P_{B^{(1)}}^{(theo)} = \Phi_0 / \Delta l l_2 \approx 0.64\text{mT}$ verringert. Dies bedeutet, dass die theoretische Magnetfeldperiode des SQIF-Netzwerks durch 0.64mT gegeben ist. Es sei betont, dass dieser Wert für $P_{B^{(1)}}^{(theo)}$ ein theoretischer Wert ist, der nur für den Fall gilt, dass die Flächeninhalte der Schlaufen *exakt* in den experimentellen Netzwerken realisiert wer-

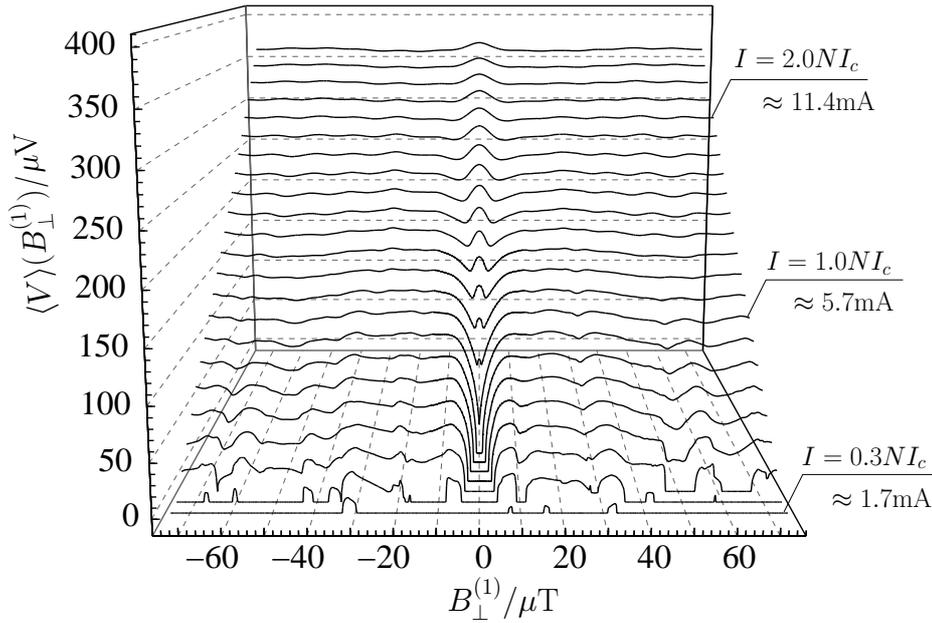


Abbildung 2.21: Theoretische Spannungsantwort $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ des SQIFs mit $N = 30$ Josephson-Kontakten. Der Transportstrom I wird bei $I = 0.3 N I_c \approx 1.7 \text{ mA}$ beginnend in Schritten von $0.1 N I_c$ bis zum maximalen Wert $I = 2.4 N I_c \approx 13.6 \text{ mA}$ erhöht.

den. Im Folgenden wird vorerst davon ausgegangen, dass diese exakte Realisierung machbar ist, und die mit Hilfe der Netzwerkgleichungen (2.41) numerisch bestimmten $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ -Kennlinien des oben beschriebenen SQIF-Netzwerks werden vorgestellt. Anschließend daran wird der Einfluss herstellungsbedingter Abweichungen der Netzwerkgeometrie vom Design diskutiert, d.h. die Auswirkungen struktureller Streuungen auf die Spannungsantworten der Netzwerke werden studiert. Hier zeigt sich, dass bereits sehr kleine strukturelle Streuungen der Schlaufenflächen diese theoretisch endliche Periodizität völlig zerstören, so dass aus diesem Grund das SQIF-Netzwerk bereits hier zurecht als Supraleitender Quanten-Interferenz-Filter bezeichnet wird.

Abbildung 2.21 zeigt die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik des parallelen SQIFs in der Umgebung von $B_{\perp}^{(1)} = 0$ für verschiedene Werte des Transportstromes. Dieser wird bei $I = 0.3 N I_c \approx 1.7 \text{ mA}$ beginnend bis zum Wert $I = 2.4 N I_c \approx 13.6 \text{ mA}$ erhöht. Für kleine Werte von I , für die der Transportstrom pro Josephson-Kontakt I/N Werte kleiner I_c besitzt, existieren Magnetfeldbereiche, innerhalb denen keine Spannung $\langle V \rangle$ über das Netzwerk abfällt. Für diese Magnetfeldwerte ist der kritische Netzwerkstrom $I_{c,\text{Netzwerk}}$ größer als I und durch die Kontakte fließen ausschließlich zeitunabhängige Supraströme, so dass $\langle V \rangle = 0$ ist. Für alle Transportströme I mit $I/(N I_c) \leq 1.0$ zeigt Abb. 2.21 insbesondere, dass in der nahen Umgebung von $B_{\perp}^{(1)} = 0$ ein Bereich mit $\langle V \rangle = 0$ existiert. Dies bedeutet, dass der kritische Netzwerkstrom bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ seinen maximalen Wert besitzt, wie dies bereits Abb. 2.4 für das Gaußsche Netzwerk zeigt. Übersteigt der Transportstrom den Wert $I/(N I_c) \geq 1.0$, so ist der Spannungsabfall $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ für alle primären Magnetfeldwerte größer Null. Speziell für $I/(N I_c) = 1.0$ besitzt die $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ -Kennlinie ein signifikantes Minimum bei

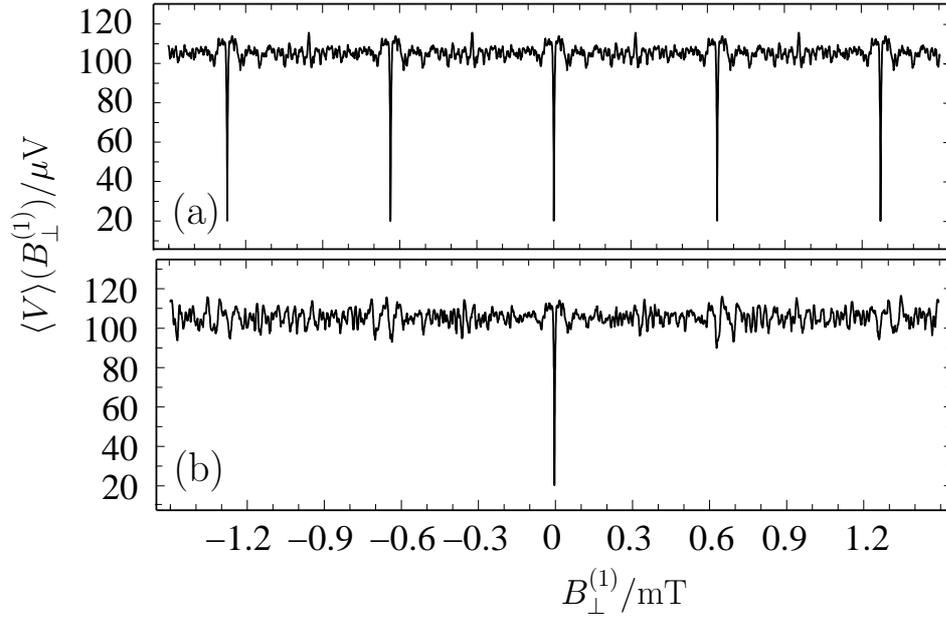


Abbildung 2.22: Theoretische Spannungsantwort $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ des planaren SQIF-Netzwerks mit $N = 30$ für $I = 1.0 N I_c \approx 5.7 \text{ mA}$. Entsprechen die Flächeninhalte der Schleifen dem vorgegebenen Design, so besitzt die Spannungsantwort eine endliche Periode und kein Minimum ist ausgezeichnet (Teilbild (a)). Weicht die tatsächliche Flächenverteilung unsystematisch von der Verteilung in (a) ab, so verschwinden alle Minima bei endlichen Magnetfeldwerten und nur das eindeutige Minima bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ bleibt erhalten (Teilbild (b)). Die Flächen in (b) weichen maximal um $\pm 2\%$ von den Flächeninhalten in (a) ab.

verschwindendem primären Magnetfeld. In diesem Fall befindet sich das Netzwerk in einem nicht-resonanten ac-Modus (siehe Abschn. 2.4.4 und 2.5). Für anwachsende I bildet sich dann in der Umgebung von $B_{\perp}^{(1)} = 0$ eine Hut-artige Struktur aus, d.h. ein lokales Maximum, das von zwei scharfen Minima zu jeder Seite symmetrisch umgeben wird. Dies ist die LC-resonante Struktur in der Spannungsantwort, d.h. das Netzwerk wird im LC-resonanten ac-Modus betrieben. Das lokale Maximum wird für größer werdende I immer ausgeprägter bis für Werte von $I/(N I_c) \geq 1.7$ die beiden Minima an Signifikanz verlieren das Maximum sogar dominant wird. Für sehr große Werte $I/(N I_c) > 2.4$ verschwindet dann die Modulation der $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ -Kennlinie und der Spannungsabfall wird magnetfeldunabhängig. Dann sind die Ströme durch die Kontakte hauptsächlich ohmscher Natur.

Abb. 2.22 (a) zeigt die $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ -Kennlinie des SQIF-Netzwerks über einen Magnetfeldbereich $|B_{\perp}^{(1)}| \leq 1.5 \text{ mT}$, d.h. über einen Bereich, der größer ist als die vierfache theoretische Periode $P_{B^{(1)}}^{(\text{theo})}$. Dargestellt ist die Spannungsantwort für den Fall, dass das SQIF-Netzwerk im nicht-resonanten ac-Modus betrieben wird. Der Transportstrom ist mit $I = 1.0 N I_c \approx 5.7 \text{ mA}$ knapp über dem kritischen Strom des Netzwerks gewählt, damit der Spannungshub $\Delta V = V_{\max} - V_{\min}$ maximal wird. Da wir von einer *exakten* Realisierung der Schleifenflächen ausgegangen sind, zeigt die Spannungsantwort die vorhergesagte Periodizität $P_{B^{(1)}}^{(\text{theo})} \approx 0.64 \text{ mT}$. Dies ist die Folge davon, dass die

Flächenverteilung in diesem Fall die Bedingung (A) nicht erfüllt. Da das Netzwerk aber die zweite Bedingung (B) erfüllt (die Schlaufenflächen sind gleichmässig zwischen a_{\min} und a_{\max} verteilt), besitzt die $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ -Kennlinie eine eindeutige und signifikante Struktur in den Umgebungen von $B_{\perp}^{(1)} = n \cdot P_{B^{(1)}}^{\text{(theo)}}$ (mit n ganzzahlig). Im dargestellten Fall $I/(NI_c) = 1.0$ sind dies die eindeutigen globalen Minima.

Nun unterliegen bei der Herstellung der supraleitenden Schaltungen alle Größen, d.h. insbesondere die Kontakt-Parameter C_n , R_n und $I_{c,n}$ und die Flächeninhalte der Netzwerkschleifen Streuungen. Der Einfluss der Streuungen der Kontakt-Parameter auf die $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ -Kennlinie wurde in Abschnitt 2.4.5 diskutiert. Dort wurde gezeigt, dass das Verhalten der Spannungsantwortfunktion selbst durch große Abweichungen X der einzelnen Kontaktparameter von ihren Mittelwerten R , I_c und β_C (für $X < 50\%$) nur quantitativ aber nicht qualitativ beeinflusst wird. Insbesondere bleibt die Periodizität erhalten, d.h. in diesem Sinne beeinflussen Streuungen der Kontaktparameter die Spannungsantwort nur lokal. Die strukturellen Streuungen (d.h. die Streuungen in der Netzwerkgeometrie) haben nun auf die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ -Kennlinie einen ganz anderen Einfluss. Weichen bei Herstellung der supraleitenden Schaltungen die Schichten auf dem Substrat von den designten Strukturen ab, so entsprechen die tatsächlichen Schlaufenflächen nicht den Strukturiereten. Liegt keine systematische strukturelle Streuung vor, so bedeutet dies, dass die tatsächliche Flächenverteilung des SQIF-Netzwerks nun die Bedingung (A) erfüllt, d.h. die Flächeninhalte der Schleifen sind inkommensurabel. Die Spannungsantwort des SQIF-Netzwerks besitzt dann ein einziges eindeutiges Minimum (im nicht resonanten ac-Modus) bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ und alle Minima bei endlichen Magnetfeldwerten $B_{\perp}^{(1)} = n \cdot P_{B^{(1)}}$ für $n \neq 0$ verschwinden für genügend starke strukturelle Streuungen. Abbildung 2.22 (b) zeigt die Spannungsantwort des Netzwerks über den Magnetfeldbereich $|B_{\perp}^{(1)}| \leq 1.5\text{mT}$ für den Fall, daß die Flächeninhalte der Schleifen um maximal $\pm 2\%$ von den Flächeninhalten im Fall (a) abweichen. Für endliche Magnetfeldwerte $|B_{\perp}^{(1)}| > 0$ treten in der Nähe der Minima von $\langle V \rangle$ im Fall (a) in (b) nur noch wenig signifikante Strukturen in der $\langle V \rangle$ - $B_{\perp}^{(1)}$ -Kennlinie auf. Diese Strukturen unterscheiden sich kaum mehr von ihrer näheren Umgebung, so dass in (b) für $|B_{\perp}^{(1)}| > 0$ die Schwankungen der mittleren Spannung $\langle V \rangle$ außerhalb des globalen Minimums bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ unverändert klein bleiben. Die Gestalt des globalen Minimums bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ hingegen bleibt im Vergleich zu (a) nahezu unverändert, d.h. seine Form wird von strukturellen Streuungen nur wenig beeinflusst. Dies bedeutet insbesondere, dass der Spannungshub ΔV und der maximale Transferfaktor $V_{B^{(1)}} = \left| \partial_{B_{\perp}^{(1)}} \langle V \rangle \right|_{\max}$ in der Umgebung von $B_{\perp}^{(1)} = 0$ von strukturellen Streuungen nicht beeinflusst werden.

Da bei der Herstellung der supraleitenden Schaltungen die Strukturen nicht perfekt realisiert werden können, ist zu erwarten dass das oben beschriebene experimentelle SQIF-Netzwerk die in Abb. 2.22 (b) dargestellte Spannungsantwort besitzt. Als Kriterium für das Verschwinden aller globalen Minima für endliche Magnetfeldwerte kann angegeben werden, dass die Summe aller Flächenfluktuationen die Größe der kleinsten

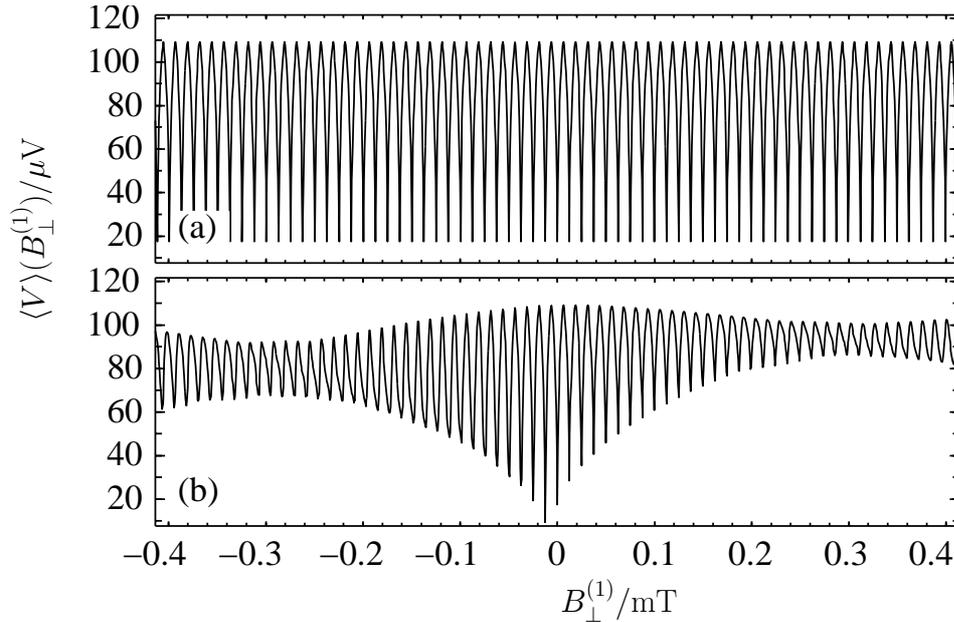


Abbildung 2.23: Theoretische Spannungsantwort $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ des planaren regulären Netzwerks mit $N_r = 17$ Kontakten für $I = 1.0 N I_c \approx 3.2 \text{ mA}$. Sind die Schleifenflächen alle identisch, so ist die Spannungsantwort Φ_0 -periodisch (Teilbild (a)). In (b) weichen die Schleifenflächen um maximal $\pm 2\%$ von den idealen regulären Flächeninhalten ab und es resultiert ein irreguläres Muster von Minima verschiedener Amplituden.

Schleifenfläche erreicht. Die Spannungsantwort ist dann nichtperiodisch und in der Umgebung von $B_{\perp}^{(1)} = 0$ eine eindeutige Funktion des primären Magnetfeldes $B_{\perp}^{(1)}$, so dass es sich dann bei diesem Netzwerk um einen *Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter* nach obiger Definition handelt. In Kapitel 4 werden die experimentell bestimmten Spannungsantworten der realisierten Netzwerke vorgestellt und diskutiert. Diese Ergebnisse zeigen, dass es sich bei diesen Schaltungen tatsächlich um SQIFs handelt.

Die Eigenschaften (A) und (B) einer unkonventionellen Flächenverteilung ändern sich durch zusätzliche unsystematische Streuungen der Flächen nicht. Aus diesem Grund sind SQIF-Netzwerke Struktur-stabil, d.h. das qualitative Verhalten ihrer Spannungsantwort ist insensitiv bezüglich Abweichungen in der Flächenverteilung.

Reguläre Netzwerke besitzen dagegen keinerlei struktureller Stabilität. Sind die Schleifenflächen nicht alle exakt identisch, so zeigt die Spannungsantwort eine irreguläre Periodizität von Minima unterschiedlicher Amplitude. Für $I = 1.0 N I_c$ zeigt Abb. 2.23 die $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ -Kennlinien des regulären Netzwerks, für den Fall dass die Schleifen exakt identisch sind (Teilbild (a)) und für den Fall dass die Schleifenflächen um maximal $\pm 2\%$ unsystematisch vom idealen Flächeninhalt abweichen (im Teilbild (b)). Während im Idealfall aus Abb. 2.23 (a) die Spannungsantwort Φ_0 -periodisch ist und die Minima der Spannungsantwort identisch sind, ist die Spannungsantwort aus (b) durch Φ_0 -periodische Minima charakterisiert deren Amplituden durch das aperiodische Interferenzmuster der Flächenfluktuationen moduliert werden. Die Kennlinie im Fall (b) ermöglicht vermutlich keinen geeigneten Betriebsmodus.

In Abb. 2.23 (b) sind die Fluktuationen der Schlaufenflächen in dem Sinne klein, dass ihre Summe kleiner als die minimale Fläche im Netzwerk ist. Wird die Amplitude der Flächenstreuung weiter erhöht, so verschwinden in der Spannungsantwort die Minima für $|B_{\perp}^{(1)}| > 0$ in irregulärer Weise. Erreicht die Summe der Fluktuationen die Größenordnung der größten Schlaufenfläche, so erhalten wir natürlich wieder eine unkonventionelle Flächenverteilung nach (A) und (B).

Kapitel 3

Serielle supraleitende Quanten-Interferometer

Die Diskussion eindimensionaler *paralleler* Josephson-Kontakt-Netzwerke in Kapitel 2 ergab, dass die qualitative Magnetfeldabhängigkeit der Spannungsantwort wesentlich von der gewählten Flächenverteilung abhängt. Insbesondere zeigte sich, dass die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik paralleler Netzwerke mit unkonventioneller Flächenverteilung (s. Abschn. 2.7) bezüglich des primären Magnetfeldes $\mathbf{B}^{(1)}$ nicht-periodisch ist und nur in der Umgebung verschwindenden primären Magnetfeldes ein signifikantes Verhalten besitzt. So ist im nicht resonanten ac-Modus die mittlere Spannung in der Umgebung eines globalen Minimums bei $\mathbf{B}^{(1)} = 0$ eine eindeutige Funktion von $\mathbf{B}^{(1)}$.

In diesem Kapitel wird nun gezeigt, dass sich diese Eindeutigkeit der Spannungsantwort auch mit sogenannten *seriellen* Netzwerken erreichen lässt. Unter einem seriellen Netzwerk wird im Folgenden eine Serienschaltung aus M supraleitenden Schleifen verstanden, die jeweils zwei parallel geschaltete Josephson-Kontakte enthalten. Um die dynamischen Gleichungen serieller Netzwerke herzuleiten, verfahren wir wie im vorigen Kapitel. Aufbauend auf den an serielle Netzwerke angepassten Grundgleichungen werden die Netzwerkgleichungen explizit hergeleitet. Dabei werden der Grenzfall vernachlässigbarer magnetischer Eigenfelder und der Fall endlicher Eigenfelder unterschieden. Für verschwindende Eigenfelder kann das Ein-Phasen-Modell auf jede einzelne der Schleifen angewandt werden, wodurch eine wesentliche Vereinfachung der Netzwerkgleichungen erreicht wird. Hier ergeben sich M entkoppelte Differentialgleichungen für die M Netzwerkschleifen. Müssen die magnetischen Eigenfelder berücksichtigt werden, so wird die volle Dynamik serieller Netzwerke mit $N = 2M$ Kontakten durch ein System aus N gekoppelten Differentialgleichungen beschrieben.

Durch Lösen der Netzwerkgleichungen werden nachfolgend die Spannungsantworten serieller Netzwerke studiert. Um die Abhängigkeit der Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik von der Flächenverteilung der Schleifen zu diskutieren, wird ein konventionelles reguläres Netzwerk einem seriellen Netzwerk mit linear zunehmenden Schleifen-

flächen (arithmetisches Netzwerk) gegenübergestellt. Daran anschließend werden anhand des arithmetischen Netzwerks die Einflüsse induktiver und kapazitiver Effekte auf die Spannungsantwort untersucht. Dazu wurden die vollen induktiven Netzwerkgleichungen für das arithmetische Netzwerk numerisch gelöst. Für die Erklärung resonanter Phänomene wird auf die im vorigen Kapitel erarbeiteten Konzepte und Modelle zurückgegriffen. Als Ergebnis ergibt die Diskussion folgendes Bild: wie im Fall paralleler Netzwerke wird die qualitative Magnetfeldabhängigkeit der mittleren Spannung serieller Netzwerke von der Flächenverteilung regiert. Die Kontaktparameter beeinflussen die Spannungsantwort lediglich quantitativ und Streuungen in diesen Parametern zerstören die wesentlichen Eigenschaften der Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik (wie die Magnetfeldperiode) nicht.

Das Kapitel endet mit einer Erweiterung des Konzepts der unkonventionellen Flächenverteilung auf serielle Netzwerke. So besitzen auch serielle Netzwerke mit unkonventionellen Flächenverteilungen nur in der Umgebung von $\mathbf{B}^{(1)} = 0$ ein signifikantes Verhalten und aufgrund dieser Eindeutigkeit werden solche Netzwerke serielle SQIFs genannt. Auch serielle SQIFs besitzen neben einer hohen Imperfektionstoleranz gegen Parameterstreuungen eine sehr große Robustheit gegen strukturelle Streuungen, die reguläre serielle Netzwerke nicht aufweisen.

3.1 Serielle Josephson-Kontakt-Netzwerke als supraleitende Quanten-Interferometer

Ein serielles Netzwerk besteht aus einer Serienschaltung supraleitender Schlaufen, die jeweils zwei parallel geschaltete Josephson-Kontakte enthalten. Abbildung 3.1 zeigt in (a) eine mögliche Realisierung und in (b) das zugehörige Ersatzschaltbild eines seriellen Netzwerks. Im dargestellten speziellen Beispiel (a) liegen alle Schlaufen in einer gemeinsamen Ebene und zwei benachbarte Schlaufen grenzen direkt aneinander. Da die Geometrie des realisierten seriellen Netzwerks aus Kapitel 4 der in Abb. 3.1 (a) skizzierten Geometrie ähnelt, wählen wir für die nachfolgende Diskussion von Anfang an eine solche planare Leiter-Geometrie. Die Annahme planarer Netzwerke erlaubt es, dass jeder Schlaufe ein Normalenvektor \mathbf{a}_m zugeordnet werden kann, dessen Betrag $a_m = |\mathbf{a}_m|$ gleich der Schlaufenfläche ist. Dies vereinfacht die explizite Berechnung des magnetischen Eigenfeldes der im Netzwerk fließenden Stromverteilung. Im Hinblick auf die Realisierung serieller Netzwerke mit Dünnschichttechnologien kommt planaren Netzwerken eine besondere Bedeutung zu. Im allgemeinen Fall können die Schlaufen jedoch beliebig orientiert sein, die Schlaufenkonturen eine beliebige Gestalt besitzen und die Abstände zwischen den einzelnen Schlaufen beliebig gewählt werden. Die nachfolgende theoretische Beschreibung serieller Netzwerke läßt sich auch auf diesen allgemeinen Fall beliebiger Geometrien anwenden. Die explizite Bestimmung des sekundären magnetischen Eigenfeldes aus der Netzwerkstromverteilung kann sich dann jedoch entsprechend aufwendiger gestalten.

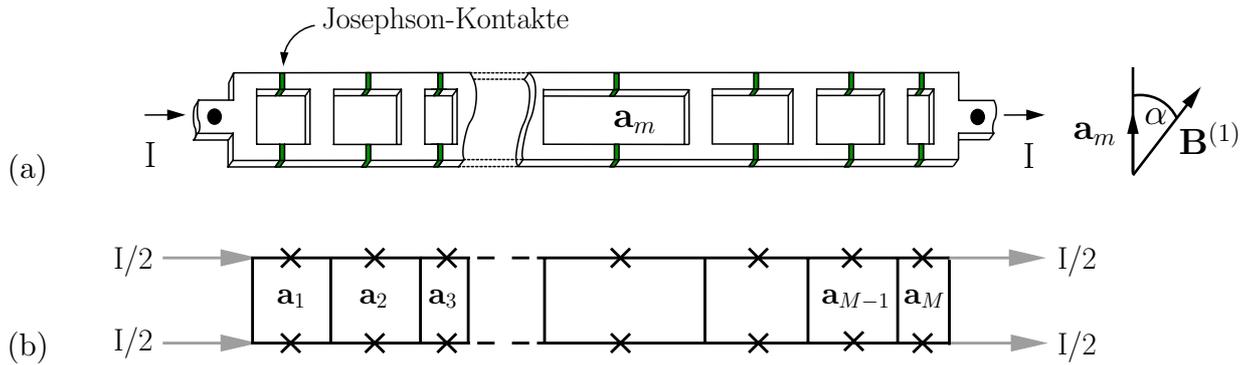


Abbildung 3.1: Serielles Netzwerk aus M Schlaufen, die jeweils zwei parallel geschaltete Josephson-Kontakte enthalten: (a) Schematische Darstellung (b) Ersatzschaltbild. Die Josephson-Kontakte sind in (a) durch grau gefärbte Bereiche dargestellt und in (b) durch Kreuze (\times) symbolisiert. Das Netzwerk befindet sich in einem primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ und wird von einem Transportstrom I getrieben. \mathbf{a}_m bezeichnet den Normalenvektor der m -ten Schlaufe mit Flächeninhalt $|\mathbf{a}_m|$.

Abstrahieren wir von der speziellen Geometrie des Netzwerks kann die Verschaltung der Josephson-Kontakte durch das in Abb. 3.1 (b) angegebene Ersatzschaltbild dargestellt werden. Die supraleitenden Verbindungen sind schwarz dargestellt und die Josephson-Kontakte sind durch Kreuze (\times) symbolisiert. Die Flächenverteilung der Schlaufen im Netzwerk $\{a_m = |\mathbf{a}_m|, 1 \leq m \leq M\}$ kann beliebig gewählt werden. Dem seriellen Netzwerk wird ein Transportstrom I an der ersten Schlaufe zugeführt und an der M -ten Schlaufe wieder extrahiert. Jeder der $2M$ Josephson-Kontakte wird damit von einem Teil des Transportstroms durchflossen. Die Art der Transportstromeinspeisung an den Randschlaufen spielt bei *seriellen* Netzwerken aufgrund ihrer Geometrie (im Gegensatz zu parallelen Netzwerken, s. Abschn. 2.2.3) eine untergeordnete Rolle. Wir nehmen deshalb an, dass der Transportstrom I symmetrisch zugeführt wird, wie dies in Abb. 3.1 (b) dargestellt ist.

In einem geeigneten Betriebsmodus sind stromgetriebene serielle Netzwerke Magnetfeld-Spannungs-Wandler, die sich für eine Vielzahl von Anwendungen (wie Magnetometer, Strom- und Spannungsmessgeräte, Verstärker etc.) eignen. Der Schwerpunkt der folgenden Abschnitte ist die Diskussion des Antwortverhaltens serieller Netzwerke auf externe elektromagnetische Felder. Eine zentrale Rolle spielt dabei die Abhängigkeit der mittleren über das Netzwerk abfallenden Spannung $\langle V \rangle$ vom externen Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ (und vom Transportstrom I). Es zeigt sich, dass die Netzwerk-Flächenverteilung $\{a_m, 1 \leq m \leq M\}$ auch hier die Spannungsantwort $\langle V \rangle(\mathbf{B}^{(1)})$ bestimmt und dass serielle Netzwerke mit unkonventionellen Flächenverteilungen (s. Abschn. 3.5) besondere $\langle V \rangle$ - $(\mathbf{B}^{(1)})$ Kennlinien besitzen. Um die elektromagnetischen Eigenschaften serieller Netzwerke zu berechnen, gehen wir wie in Kapitel 2 davon aus, dass die Josephson-Kontakte im RCSJ-Modell beschreibbar sind. Im diskutierten Modell können die Kontaktparameter (R_n , $I_{c,n}$ und C_n) dabei variieren, so dass der Einfluss von Parametersteuungen auf das Antwortverhalten der seriellen Netzwerke studiert werden kann.

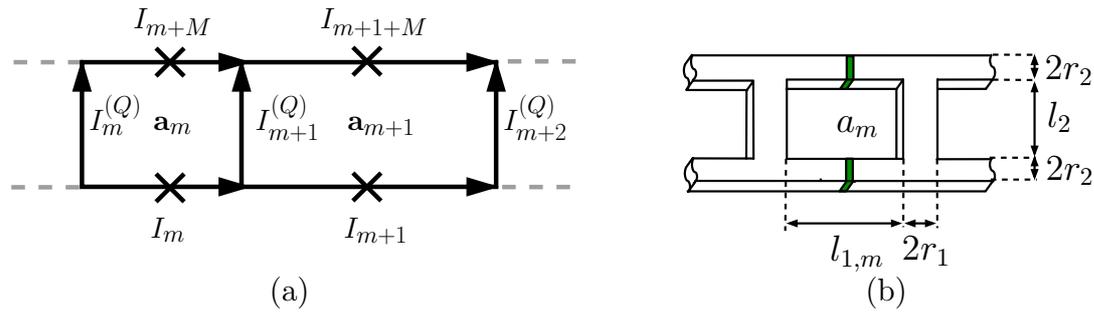


Abbildung 3.2: Definition der Notation: (a) Segment des Ersatzschaltbildes. Die m -te Schleife mit Flächeninhalt a_m wird von den zwei Josephson-Kontakten m und $m + M$ gebildet. Die Ströme durch die Kontakte (\times) werden mit I_m bzw. I_{m+M} bezeichnet und die Querströme mit $I_m^{(Q)}$. (b) Segment eines seriellen Netzwerks mit rechteckförmiger planarer Geometrie. Die Schleifen besitzen alle die gleiche Höhe l_2 aber unterschiedliche Breiten $l_{1,m}$.

Um die nachfolgend verwendete Notation einzuführen, zeigt Abb. 3.2 (a) ein Segment aus dem Ersatzschaltbild des seriellen Netzwerks. Die m -te Schleife mit Flächeninhalt a_m wird von den Josephson-Kontakten m und $m + M$ gebildet. Die Ströme durch die Kontakte werden mit I_m bzw. I_{m+M} bezeichnet und die Querströme mit $I_m^{(Q)}$. Die positiven Stromrichtungen sind durch Pfeile dargestellt. Für eine Abschätzung der Stärke der induktiven Kopplungen, d.h. für eine Abschätzung der Induktionskoeffizienten, wird die rechteckförmige planare Geometrie aus Abb. 3.2 (b) verwendet. Die Schleifen besitzen alle dieselbe Höhe l_2 , können aber unterschiedliche Breiten $l_{1,m}$ besitzen. Die supraleitenden Leitungsstücke, die die Kontakte enthalten, besitzen die Breite $2r_2$ und die Querleitungen die Breite $2r_1$. Für die dargestellte Geometrie können die Induktionskoeffizienten analog zu Abschnitt 2.2.6 näherungsweise bestimmt werden.

Anhand der hier eingeführten Notation werden im folgenden Abschnitt die Gleichungen zur Beschreibung der Dynamik serieller Netzwerke diskutiert.

3.2 Dynamische Gleichungen zur Beschreibung serieller Netzwerke

Die allgemeinen Grundgleichungen zur Beschreibung von Josephson-Kontakt-Netzwerken sind bei der Diskussion paralleler Netzwerke eingeführt worden. Im folgenden Abschnitt wird deshalb nur die explizite Gestalt der für serielle Netzwerke notwendigen Grundgleichungen diskutiert. Für eine ausführlichere Diskussion der Grundgleichungen sei auf Kapitel 2 verwiesen. Die Herleitung der dynamischen Gleichungen serieller Netzwerke folgt in den daran anschließenden Abschnitten 3.2.2 und 3.2.3.

3.2.1 Grundgleichungen zur Beschreibung serieller Netzwerke

RCSJ-Modell

Serielle Netzwerke bestehen aus einer Anzahl N von Josephson-Kontakten. Jeder Kontakt besitzt im Rahmen des RCSJ-Modells die individuellen Parameter kritischer Strom $I_{c,n}$, Widerstand R_n und Kontaktkapazität C_n . Um die im Netzwerk auftretenden Ströme und Spannungen geeignet normieren zu können, ist es zweckmäßig mit $I_c = 1/N \sum_{n=1}^N I_{c,n}$, $R^{-1} = 1/N \sum_{n=1}^N R_n^{-1}$ und $C = 1/N \sum_{n=1}^N C_n$ mittlere Parameterwerte I_c , R und C einzuführen. Dabei bezeichnet I_c den mittleren kritischen Strom der Kontakte, $1/R$ den mittleren reziproken Widerstand und C die mittlere Kapazität *aller* Kontakte im Netzwerk. Mit Hilfe dieser mittleren Parameter wird nun mit $t_J = \hbar/(2e I_c R)$ die Josephson-Zeit t_J , mit $\tau = t/t_J$ die dimensionslose Zeit τ und mit $\beta_C = 2\pi/\Phi_0 I_c R^2 C$ der effektive McCumber-Parameter β_C definiert. Wird die Zeit t in Einheiten der Josephson-Zeit t_J gemessen, so folgen die dimensionslosen RCSJ-Gleichungen

$$\frac{I_n(\varphi_n(\tau))}{I_c} = \beta_C \frac{C_n}{C} \partial_\tau^2 \varphi_n(\tau) + \frac{R}{R_n} \partial_\tau \varphi_n(\tau) + \frac{I_{c,n}}{I_c} \sin \varphi_n(\tau), \quad (n = 1, \dots, N). \quad (3.1)$$

Die eichinvariante Phasendifferenz φ_n legt nach (3.1) den Strom $I_n(\varphi_n)$ durch den n -ten Kontakt fest. Alle RCSJ-Gleichungen in (3.1) sind bezüglich der gemeinsamen dimensionslosen Zeit $\tau = t/t_J$ formuliert, so dass $t_J = \hbar/(2e) 1/(I_c R)$ die charakteristische Zeit des Netzwerks ist und $\nu_J = 1/t_J$ die charakteristische Frequenz. Sie wird ausschließlich vom Produkt der Mittelwerte I_c und R bestimmt. Im Folgenden wird Gleichung (3.1) als Strom-Phase Beziehung zur Beschreibung des n -ten Kontaktstroms verwendet.

Stromerhaltung

Das serielle Netzwerk besteht aus insgesamt M supraleitenden Schlaufen, die jeweils zwei parallel geschaltete Josephson-Kontakte enthalten. Die Ströme durch die beiden Kontakte der m -ten Schlaufe müssen sich jeweils zum Transportstrom I addieren, da für jede Schlaufe Gesamtstromerhaltung gilt

$$I = I_m + I_{m+M}, \quad 1 \leq m \leq M. \quad (3.2)$$

Dies bedeutet, dass die insgesamt $N = 2M$ Kontakte des seriellen Netzwerks M Freiheitsgrade besitzen. Sind die Ströme I_n durch die Kontakte mit $1 \leq n \leq M$ bekannt, so sind die Ströme durch die verbleibenden I_n Kontakte mit $M + 1 \leq n \leq N$ durch die M Gleichungen (3.2) festgelegt. Im Folgenden werden die Ströme $\{I_n, 1 \leq n \leq M\}$

zur Beschreibung der M Freiheitsgrade gewählt.¹ Mit den Definitionen

$$\mathbf{I}_N = (I_1, \dots, I_N)^T \quad \text{und} \quad \mathbf{I}_M = (I_1, \dots, I_M)^T \quad (3.3)$$

sind im Vektor \mathbf{I}_N die Gesamtheit *aller* N Kontaktströme und im Vektor \mathbf{I}_M die insgesamt M unabhängigen Kontaktströme zusammengefasst. Die Gleichungen (3.2) für die Stromerhaltung in jeder Schlaufe können mit (3.3) in kompakter Vektornotation geschrieben werden

$$\mathbf{I}_N = (I_1, \dots, I_M, I - I_1, \dots, I - I_M)^T = \mathbf{P} \cdot \mathbf{I}_M + I (\delta_{m>M})_{1 \leq m \leq N}, \quad (3.4)$$

wobei mit $\mathbf{P} = (\mathbf{1}_{M \times M}, -\mathbf{1}_{M \times M})^T$ die $N \times M$ Matrix eingeführt wird, die die Verschaltung der Kontakte im Netzwerk beschreibt. Die Querströme $I_k^{(Q)}$ können ebenfalls aus den unabhängigen Kontaktströmen $\{I_n, 1 \leq n \leq M\}$ bestimmt werden. Die Kirchhoffschen Knotenregeln lauten in diesem Fall (s. Abb. 3.2)

$$I_m^{(Q)} = I_{m-1} - I_m + \frac{I}{2} (\delta_{m,1} - \delta_{m,M+1}), \quad 1 \leq m \leq M+1, \quad (3.5)$$

wobei $I_{M+1} = I_0 \equiv 0$ gesetzt wurde. In Vektorschreibweise folgt dann für den Vektor der Querströme $\mathbf{I}_{M+1}^{(Q)} \equiv (I_1^{(Q)}, \dots, I_{M+1}^{(Q)})^T$

$$\mathbf{I}_{M+1}^{(Q)} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{I}_M + \frac{I}{2} (\delta_{m,1} - \delta_{m,M+1})_{1 \leq m \leq M+1}, \quad (3.6)$$

wobei die nichtverschwindenden Einträge der $(M+1) \times M$ Matrix \mathbf{K} durch $\mathbf{K}_{n,n} = -1$ und $\mathbf{K}_{n+1,n} = 1$ gegeben sind. Der zweite Term der rechten Seite in (3.6) beschreibt die Transportstromzufuhr an der ersten und M -ten Schlaufe. Mit Hilfe der Gleichungen (3.4) und (3.6) sind alle Ströme des seriellen Netzwerks durch die unabhängigen Ströme \mathbf{I}_M und den Transportstrom I ausgedrückt.

Flussquantisierung

In jeder der M Schlaufen im Netzwerk sind die eichinvarianten Phasendifferenzen der beiden Josephson-Kontakte über die Flussquantisierungsbedingung (2.13) mit dem magnetischen Fluss durch die jeweilige Schlaufe verknüpft. Für die m -te Schlaufe ergibt sich unter den in Abschnitt 2.2.4 gemachten Annahmen

$$\varphi_{m+M}(\tau) - \varphi_m(\tau) = \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi_m(\tau) = \frac{2\pi}{\Phi_0} (\Phi_m^{(1)}(\tau) + \Phi_m^{(2)}(\tau)), \quad (3.7)$$

¹Die Stromverteilung im Netzwerk kann auch als eine Superposition der Transportstromverteilung mit einer Abschirmstromverteilung aus *Kreisströmen* in den Schlaufen aufgefasst werden. In diesem Fall bilden die insgesamt M Kreisströme eine unabhängige Basis zur Beschreibung der M Freiheitsgrade des seriellen Netzwerks.

wobei $\Phi_m = \Phi_m^{(1)} + \Phi_m^{(2)}$ den magnetischen Gesamtfluss, $\Phi_m^{(1)}$ den primären und $\Phi_m^{(2)}$ den sekundären magnetischen Fluss durch die m -te Schlaufe bezeichnen. Der primäre Fluss $\Phi_m^{(1)}$ wird dabei von externen Strömen erzeugt und kann (zumindest prinzipiell) kontrolliert werden. Der sekundäre magnetische Fluss $\Phi_m^{(2)}$ wird dagegen von der internen im Netzwerk fließenden Stromverteilung erzeugt. Ist das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ homogen über die Ausdehnungen des planaren seriellen Netzwerks, können die primären magnetischen Flüsse durch einfache Skalarprodukte $\Phi_m = \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_m \rangle$ bestimmt werden.² Die sekundären Flüsse $\Phi_m^{(2)}$ müssen durch explizite Integration des sekundären Magnetfeldes $\mathbf{B}^{(2)}$ über die Schlaufenflächen bestimmt werden, da $\mathbf{B}^{(2)}$ von der Netzwerkstromverteilung lokal erzeugt wird und somit immer inhomogen ist.

In vektorieller Schreibweise folgt aus (3.7) mit den Definitionen $\Phi^{(1)} = \left(\Phi_1^{(1)}, \dots, \Phi_M^{(1)} \right)^T$ und $\Phi^{(2)} = \left(\Phi_1^{(2)}, \dots, \Phi_M^{(2)} \right)^T$

$$\Phi^{(2)} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \mathbf{N} \cdot \varphi - \Phi^{(1)}, \quad (3.8)$$

wobei $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)^T$ der Vektor aller eichinvarianten Phasendifferenzen ist und \mathbf{N} die $M \times N$ -Matrix $\mathbf{N} = (-\mathbf{1}_{M \times M}, \mathbf{1}_{M \times M})$ bezeichnet.

Ampèresches Durchflutungsgesetz

In quasistationärer Näherung (s. Abschnitt 2.2.5) ist das sekundäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ zu den in den Leitungen des seriellen Netzwerks fließenden Strömen $\{I_n, 1 \leq n \leq N\}$ und $\{I_m^{(Q)}, 1 \leq m \leq M + 1\}$ proportional und für die sekundären magnetischen Flüsse gilt

$$\Phi^{(2)} = \mathbf{L}^{(J)} \cdot \mathbf{I}_N + \mathbf{L}^{(Q)} \cdot \mathbf{I}_{M+1}^{(Q)}. \quad (3.9)$$

Die Matrizen $\mathbf{L}^{(J)}$ und $\mathbf{L}^{(Q)}$ sind die Induktionsmatrizen des seriellen Netzwerks. Der Koeffizient $\mathbf{L}_{m,n}^{(J)}$ (bzw. $\mathbf{L}_{m,n}^{(Q)}$) beschreibt, welchen magnetischen Fluss das n -te Stromelement I_n (bzw. $I_n^{(Q)}$) in der m -ten Schlaufe erzeugt. Die Induktionskoeffizienten $\mathbf{L}_{m,n}^{(\alpha)}$ (mit $\alpha = \{J, Q\}$) können für einfache Geometrien analytisch bestimmt werden. Für die in Abbildung 3.2 (b) dargestellte Geometrie mit rechteckförmigen Leiterelementen werden in Abschnitt 2.2.6 Näherungsausdrücke für die Induktionskoeffizienten hergeleitet. Diese Relationen werden im Folgenden zur Bestimmung der $\mathbf{L}_{m,n}^{(\alpha)}$ -Koeffizienten verwendet. Als dimensionsloses Maß für die Stärke der induktiven Kopplungen werden die Parameter

$$\beta_{L,m} = \frac{\mathbf{L}_m^{(S)} I_c}{\Phi_0} \quad (3.10)$$

²Im allgemeinen Fall inhomogener primärer Magnetfelder $\mathbf{B}^{(1)}$ oder für beliebige Schlaufengeometrien, gilt $\Phi_m = \int_{S_m} \langle \mathbf{B}^{(1)}, d\mathbf{a}_m \rangle$.

definiert, wobei $\mathbf{L}_m^{(S)}$ die (Selbst-) Induktivität der m -ten Schlaufe ist. Der maximale β_L -Parameter $\beta_{L,\max} = \max\{\beta_{L,1}, \dots, \beta_{L,M}\}$ wird im Folgenden bei der Diskussion induktiver Effekte als Maß verwendet.

Mit Hilfe von (3.4) und (3.6) kann der sekundäre Flussvektor aus (3.9) durch die unabhängigen Ströme \mathbf{I}_M und den Transportstrom I ausgedrückt werden

$$\Phi^{(2)} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{I}_M + I \mathbf{m}, \quad (3.11)$$

wobei

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^{(J)} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{L}^{(Q)} \cdot \mathbf{K} \quad (3.12)$$

und

$$\mathbf{m} = \mathbf{L}^{(J)} \cdot (\delta_{m>M})_{1 \leq m \leq N} + \mathbf{L}^{(Q)} \cdot (\delta_{m,1} - \delta_{m,M+1})_{1 \leq m \leq M+1} \quad (3.13)$$

definiert werden. Die sekundären Flüsse hängen also linear von den unabhängigen Kontaktströmen \mathbf{I}_M und dem Transportstrom I ab. Die $M \times M$ -Matrix \mathbf{L} ist die Induktionsmatrix des seriellen Netzwerks und der Vektor $I \mathbf{m}$ beschreibt den induktiven Einfluss des sich im Netzwerk verteilenden Transportstroms I .

3.2.2 Netzwerkgleichungen für verschwindende Induktivitäten

Im Grenzfall verschwindender induktiver Effekte, d.h. für $\beta_{L,\max} \approx 0$, kann für jede der M Schlaufen ein effektives Ein-Phasen-Modell (s. Abschn. 2.3.1) angegeben werden d.h. die zwei parallel geschalteten Kontakte einer Schlaufe können auf einen einzigen effektiven Josephson-Kontakt abgebildet werden. Im Fall $\beta_{L,\max} \approx 0$ verschwindet $\Phi^{(2)}$ und aus der Flussquantisierung (3.7) folgt, dass für jede Schlaufe eine einzige eichinvariante Phasendifferenz ausreicht, um die Dynamik der jeweiligen Schlaufe zu beschreiben. Wählen wir $(\phi_1, \dots, \phi_M) \equiv (\varphi_1, \dots, \varphi_M)$ als die dynamischen Variablen aus, die die M Freiheitsgrade beschreiben, so folgen die restlichen Phasendifferenzen $(\varphi_{M+1}, \dots, \varphi_N)$ aus $\varphi_{m+M} = \varphi_m + 2\pi/\Phi_0 \Phi_m^{(1)}$ mit $1 \leq m \leq M$. Analog zur Diskussion in Abschnitt 2.3.1 folgt dann für die Differentialgleichung des Ein-Phasen-Modells der m -ten Schlaufe

$$\begin{aligned} \beta_C \frac{\tilde{C}_m}{C} \partial_\tau^2 \phi_m(\tau) + \frac{R}{R_m} \partial_\tau \phi_m(\tau) + \frac{\tilde{I}_{c,m}}{I_c} |S_{2,m}(\mathbf{B}^{(1)})| \sin[\phi_m(\tau) + \delta_{2,m}(\mathbf{B}^{(1)})] \\ = \frac{I}{2I_c} - \frac{2\pi}{\Phi_0} \beta_C \frac{\tilde{C}_m}{C} \partial_\tau^2 \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_{C,m} \rangle - \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{R}{R_m} \partial_\tau \langle \mathbf{B}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}_{R,m} \rangle. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Jede der M Schlaufen besitzt dabei einen eigenen Strukturfaktor

$$S_{2,m}(\mathbf{B}^{(1)}) = \frac{1}{2} \left(\frac{I_{c,m}}{\tilde{I}_{c,m}} + \frac{I_{c,m+M}}{\tilde{I}_{c,m}} \exp\left(\frac{2\pi i}{\Phi_0} \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_m \rangle\right) \right), \quad 1 \leq m \leq M \quad (3.15)$$

mit Argument $\delta_{2,m}(\mathbf{B}^{(1)}) = \arg(S_{2,m}(\mathbf{B}^{(1)}))$ und eigene gewichtete Flächen

$$\alpha_{C,m} = \frac{1}{2} \frac{C_{m+M}}{\tilde{C}_m} \mathbf{a}_m \quad \text{und} \quad \alpha_{R,m} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{R}_m}{R_{m+M}} \mathbf{a}_m, \quad 1 \leq m \leq M.$$

In (3.14) sind alle Differentialgleichungen bezüglich derselben dimensionslosen Zeit $\tau = t/t_J$ formuliert, die über $t_J = \hbar/(2eI_c R)$ mit den Mittelwerten I_c und R über *alle* Kontakte zusammenhängt. Aus diesem Grund müssen die verschiedenen Terme der Differentialgleichung (3.14) mit den Mittelwerten über die Parameter der beiden Kontakte der m -ten Schlaufe

$$\tilde{C}_m = \frac{1}{2}(C_m + C_{m+M}), \quad \tilde{I}_{c,m} = \frac{1}{2}(I_{c,m} + I_{c,m+M}), \quad \tilde{R}_m^{-1} = \frac{1}{2}(R_m^{-1} + R_{m+M}^{-1}) \quad (3.16)$$

(mit $1 \leq m \leq M$) gewichtet werden.

Die effektiven RCSJ-Gleichungen (3.14) sind M skalare nichtgekoppelte nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Als treibende Terme treten der mittlere Transportstrom pro Kontakt $I/(2I_c)$ sowie die Zeitableitungen der gewichteten magnetischen Flüsse $\Phi_{R,m} = \langle \mathbf{B}^{(1)}, \alpha_{R,m} \rangle$ und $\Phi_{C,m} = \langle \mathbf{B}^{(1)}, \alpha_{C,m} \rangle$ auf. Sie haben ihren Ursprung im Faradayschen Induktionsgesetz, nach dem zeitlich variierende magnetische Flüsse elektromotive Kräfte erzeugen, die ohmsche Ströme ($\propto \partial_\tau \Phi_{R,m}$) und Verschiebungsströme ($\propto \partial_\tau^2 \Phi_{R,m}$) zur Folge haben. Für jede der M Schlaufen können diese Gleichungen getrennt voneinander gelöst werden und aus den Lösungen $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_M)^T$ die gewünschten physikalischen Größen bestimmt werden.

3.2.3 Netzwerkgleichungen für endliche induktive Kopplung

Ist das magnetische Eigenfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ nicht mehr vernachlässigbar klein, d.h. gilt $\beta_{L,\max} > 0$, so verschwinden in den Flussquantisierungsbedingungen (3.7) die sekundären magnetischen Flüsse $\Phi_m^{(2)}$ nicht. In diesem Fall ist eine Abbildung auf effektive Ein-Phasen-Modelle wie im vorigen Abschnitt nicht mehr möglich. Im induktiven Fall kann jedoch Gleichung (3.11) nach den unabhängigen Kontaktströmen \mathbf{I}_M aufgelöst werden

$$\mathbf{I}_M = \mathbf{L}^{-1} \cdot \left(-I \mathbf{m} + \boldsymbol{\Phi}^{(2)} \right).$$

Der sekundäre Flussvektor $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}$ hängt nun gemäß der Flussquantisierung (3.8) von den eichinvarianten Phasenvariablen $\boldsymbol{\varphi}$ und vom primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ ab und es folgt

$$\mathbf{I}_M = -\mathbf{L}^{-1} \cdot I \mathbf{m} - \mathbf{L}^{-1} \cdot \left(\boldsymbol{\Phi}^{(1)} - \frac{\Phi_0}{2\pi} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varphi} \right). \quad (3.17)$$

Die restlichen Kontaktströme I_{M+1}, \dots, I_N ergeben sich aus der Stromerhaltung in jeder Schlaufe $I_{m+M} = I - I_m$ für $1 \leq m \leq M$. Mit Hilfe des RCSJ-Modells (3.1)

ergeben sich schließlich die Netzwerkgleichungen aus (3.17) zu

$$\beta_C \frac{C_m}{C} \partial_\tau^2 \varphi_m(\tau) + \frac{R}{R_m} \partial_\tau \varphi_m(\tau) + \frac{I_{c,m}}{I_c} \sin \varphi_m(\tau) = \frac{1}{I_c} \begin{cases} \left(-\mathbf{L}^{-1} \cdot I \mathbf{m} - \mathbf{L}^{-1} \cdot \left(\Phi^{(1)}(\tau) - \frac{\Phi_0}{2\pi} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\tau) \right) \right)_m, & 1 \leq m \leq M \\ I - \left(-\mathbf{L}^{-1} \cdot I \mathbf{m} - \mathbf{L}^{-1} \cdot \left(\Phi^{(1)}(\tau) - \frac{\Phi_0}{2\pi} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varphi}(\tau) \right) \right)_{m-M}, & M+1 \leq m \leq N \end{cases} \quad (3.18)$$

Die Netzwerkgleichungen sind ein System aus N gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen für die dynamischen Variablen $\boldsymbol{\varphi}$. Sie beschreiben die Dynamik des seriellen Netzwerks auf der Basis des RCSJ-Modells. Sie gelten unter den gemachten Annahmen für serielle Netzwerke mit beliebiger Geometrie, für statische oder zeitlich variierende primäre Magnetfelder $\mathbf{B}^{(1)}(\tau)$ und für beliebige Transportstromwerte I . Die sich aus Lösungen $\boldsymbol{\varphi}(\tau)$ der Netzwerkgleichungen ergebenden Spannungen und Stromverteilungen erfüllen die Maxwellgleichungen (in quasistationärer Näherung), d.h. die mit Hilfe von (3.18) bestimmbaren physikalische Größen sind experimentell verifizierbare Messgrößen.

3.3 Spannungsantwort serieller Netzwerke

Aus den im vorigen Abschnitt hergeleiteten Netzwerkgleichungen können die Spannungsantwortfunktionen serieller Netzwerke bestimmt werden. Die Spannungsantwortfunktion beschreibt die Abhängigkeit der über das gesamte serielle Netzwerk abfallenden mittleren Spannung $\langle V \rangle$ vom Transportstrom I und vom primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$. Für planare serielle Netzwerke und homogene primäre Magnetfelder wird in den folgenden Abschnitten die Magnetfeldabhängigkeit von $\langle V \rangle$ für verschiedene serielle Netzwerke diskutiert. In Abschnitt 3.3.1 wird für den Fall vernachlässigbarer Eigenfelder ($\beta_{L,\max} = 0$) und überdämpfter Kontakte ($\beta_C = 0$) explizite Ausdrücke für $\langle V \rangle(I; \mathbf{B}^{(1)})$ angegeben und im anschließenden Abschnitt 3.3.2 der Einfluss induktiver ($\beta_{L,\max} > 0$) und kapazitiver ($\beta_C > 0$) Effekte auf $\langle V \rangle$ diskutiert. Für das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ wird angenommen, dass seine zeitliche Variation im Vergleich zur charakteristischen Frequenz der Josephson-Kontakte adiabatisch ist. Dies bedeutet, dass sich die mittlere Spannung $\langle V \rangle$ ebenfalls mit der Frequenz des primären Signals $\mathbf{B}^{(1)}(t)$ zeitlich ändern kann.

Für ein serielles Netzwerk aus M Schlaufen ergibt sich die Gesamtspannung aus der Summe der einzelnen mittleren Spannungen $\langle V \rangle_m$ über die Schlaufen

$$\langle V \rangle(I, \mathbf{B}^{(1)}) = \sum_{m=1}^M \langle V \rangle_m(I, \mathbf{B}^{(1)}). \quad (3.19)$$

Die mittlere Spannung, die über die m -te Schlaufe abfällt, ergibt sich zu

$$\langle V \rangle_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt' V_m(t') = \frac{\hbar}{2e} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_m(t) - \varphi_m(0)}{t} = I_c R \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\varphi_m(\tau) - \varphi_m(0)}{\tau}. \quad (3.20)$$

Die eichinvarianten Phasendifferenzen $\varphi_m(\tau)$ sind dabei die Lösungen der Netzwerkgleichungen (3.14) bzw. (3.18).

3.3.1 Spannungsantwort serieller Netzwerke im Grenzfall verschwindender induktiver Kopplung

Für verschwindende induktive Kopplungen $\beta_{L,\max} = 0$ und überdämpfte Kontakte $\beta_C = 0$, kann für jede der M Schlaufen eine Lösung des Ein-Phasen-Modells (3.14) angegeben werden (s. Abschn. 2.4.1). Aus diesen Lösungen können analog zu Abschnitt 2.4.2 die mittleren Spannungen $\langle V \rangle_m$ über die einzelnen Netzwerkschlaufen bestimmt werden. Für die Spannung über die m -te Schlaufe ergibt sich

$$\langle V \rangle_m(I, \mathbf{B}^{(1)}) = \tilde{I}_{c,m} \tilde{R}_m \sqrt{\left(\frac{I}{2\tilde{I}_{c,m}}\right)^2 - |S_{2,m}(\mathbf{B}^{(1)})|^2}, \quad (3.21)$$

wobei \tilde{R}_m und $\tilde{I}_{c,m}$ nach (3.16) die Mittelwerte der Kontaktparameter der m -ten Schlaufe sind und $S_{2,m}(\mathbf{B}^{(1)})$ nach (3.15) den Strukturfaktor der m -ten Schlaufe bezeichnet. Gleichung (3.21) gilt für den Fall, dass der Transportstrom I größer als der kritische Strom $I_{c,\text{Schlaufe } m}(\mathbf{B}^{(1)}) = 2\tilde{I}_{c,m} |S_{2,m}(\mathbf{B}^{(1)})|$ der m -ten Schlaufe ist, d.h. für überkritische Ströme $I > I_{c,\text{Schlaufe } m}$. Für unterkritische Transportströme $I \leq I_{c,\text{Schlaufe } m}$ fällt keine Spannung über die m -te Schlaufe ab, $\langle V \rangle_m = 0$, d.h. in diesem Fall fließen durch die beiden jeweiligen Kontakte ausschließlich Supraströme. Für den einfachen Fall identischer Parameter in Schlaufe m , besitzt der Strukturfaktor die einfache Form $|S_{2,m}(\mathbf{B}^{(1)})| = |\cos(\pi \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_m \rangle / \Phi_0)|$, so dass sich der kritische Strom der m -ten Schlaufe zu

$$I_{c,\text{Schlaufe } m}(\mathbf{B}^{(1)}) = 2\tilde{I}_{c,m} \left| \cos\left(\pi \frac{\langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{a}_m \rangle}{\Phi_0}\right) \right| \quad (3.22)$$

ergibt.

Die Gesamtspannung $\langle V \rangle$ ergibt sich nach (3.19) aus der Summe der Spannungen $\langle V \rangle_m$ zu

$$\langle V \rangle(I, \mathbf{B}^{(1)}) = \sum_{m=1}^M \tilde{I}_{c,m} \tilde{R}_m \sqrt{\left(\frac{I}{2\tilde{I}_{c,m}}\right)^2 - |S_{2,m}(\mathbf{B}^{(1)})|^2}, \quad (3.23)$$

wobei angenommen wird, dass der Transportstrom I für alle M Schlaufen überkritisch ist. Unterschreitet I den kritischen Strom einiger Schlaufen, so ist in (3.23) nur über die Schlaufen zu summieren, für die $I > I_{c,\text{Schlaufe } m}$ gilt. Gleichung (3.23) gilt für den

Grenzfall $\beta_{L,\max} = 0$, viele mit Hilfe von (3.23) gewonnenen Aussagen gelten jedoch (zumindest qualitativ) auch für serielle Netzwerke mit induktiven Kopplungen $\beta_{L,\max} > 0$. Da (3.23) mit geringem Aufwand auswertbar ist, spielt sie für die Bestimmung des Antwortverhaltens serieller Netzwerke eine wichtige Rolle.

Mit Hilfe von Gleichung (3.23) kann ein Ausdruck für die Periode $P_{B^{(1)}}$ der mittleren Spannung $\langle V \rangle$ bezüglich des primären Magnetfeldes $\mathbf{B}^{(1)}$ bestimmt werden. Die relevante Komponente von $\mathbf{B}^{(1)}$ ist dabei der zur Netzwerkebene senkrechte Anteil $B_{\perp}^{(1)} = \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{n} \rangle$, wobei \mathbf{n} den Normalenvektor des planaren Netzwerks bezeichnet. Nach (3.15) besitzt der Strukturfaktor $S_{2,m}(\mathbf{B}^{(1)})$ der m -ten Schlaufe bezüglich $B_{\perp}^{(1)}$ die Periode $P_{B^{(1)},m} = \Phi_0 / |\mathbf{a}_m|$, d.h. für die mittlere Spannung der m -ten Schlaufe gilt $\langle V \rangle_m(B_{\perp}^{(1)}) = \langle V \rangle_m(B_{\perp}^{(1)} + P_{B^{(1)},m})$. Die Periode $P_{B^{(1)},m}$ ist also durch den primären Magnetfeldwert gegeben, der in der Schlaufe m genau ein magnetisches Flussquant Φ_0 erzeugt. Da sich die Gesamtspannung $\langle V \rangle$ aus der Summe der Schlaufenspannungen $\langle V \rangle_m$ ergibt, ist die Periode $P_{B^{(1)}}$ des gesamten seriellen Netzwerks durch den $B_{\perp}^{(1)}$ -Wert gegeben, der in *jeder* der M Netzwerkschleifen ein ganzzahliges Vielfaches von Φ_0 an magnetischem Fluss erzeugt. Nach Abschnitt 2.4.2 ist damit die Periode bezüglich $B_{\perp}^{(1)}$ durch

$$P_{B^{(1)}} = \frac{\Phi_0}{ggT(a_1, \dots, a_M)} \quad (3.24)$$

gegeben.³ Demnach besitzen also parallele und serielle Netzwerke mit gleicher Flächenverteilung $\{a_1, \dots, a_M\}$ dieselbe Magnetfeldperiode $P_{B^{(1)}}$, die nach (3.24) ausschließlich von der Wahl der Schlaufenflächen abhängt. Die Parameter der Josephson-Kontakte haben keinen Einfluss auf $P_{B^{(1)}}$. Wie im Fall paralleler Netzwerke zeigt sich hier, dass durch eine geschickte Wahl der Schlaufenflächen die Magnetfeldperiode serieller Netzwerke sehr groß werden kann und es deutet sich an, dass serielle Netzwerke derart ausgelegt werden können, dass sie eine eindeutige $\langle V \rangle$ - $\mathbf{B}^{(1)}$ -Kennlinie besitzen. Derartige serielle Netzwerke werden in Abschnitt 3.5 ausführlicher diskutiert, da sie für die hochpräzise absolute Messung magnetischer Felder verwendet werden können.

Die Spannungsantwortfunktionen von zwei verschiedenen seriellen Netzwerken werden im Folgenden diskutiert. Das eine serielle Netzwerk besteht aus M_r Schleifen mit identischen Flächen a und wird deshalb regulär genannt. Die Flächeninhalte des zweiten Netzwerks mit M_a Schleifen wachsen dagegen gemäß

$$a_m = \frac{m}{M_a} a, \quad 1 \leq m \leq M_a \quad (3.25)$$

linear an, so dass dieses Netzwerk arithmetisch genannt wird. Um die beiden Netzwerke sinnvoll miteinander vergleichen zu können, wählen wir die Flächenverteilungen derart, dass die maximalen Flächen und die Gesamtflächen beider Netzwerke jeweils identisch sind. Die erste Forderung identischer maximaler Flächen ist bereits erfüllt und die zweite Forderung gleicher Gesamtflächen kann durch geeignete Wahl der Schlaufenan-

³Die Periode $P_{\Phi^{(1)}}$ bezüglich eines auf die Fläche a bezogenen Flusses $\Phi^{(1)} = B_{\perp}^{(1)} \cdot a$ ergibt sich dann zu $P_{\Phi^{(1)}} = P_{B^{(1)}} \cdot a$.

zahlen M_a und M_r erfüllt werden. Die Gesamtfläche des arithmetischen Netzwerks ist durch $A_{\text{tot},a} = a(M_a + 1)/2$ gegeben, so dass $A_{\text{tot},a}$ mit der Gesamtfläche $A_{\text{tot},r} = a M_r$ des regulären Netzwerks übereinstimmt, sobald $(M_a + 1)/2 = M_r$ gilt. Wir wählen für die nun folgende Diskussion $M_r = 26$ und $M_a = 51$ und beschränken uns zur Vereinfachung auf den Fall identischer überdämpfter Josephson-Kontakte (d.h. $C_m = 0$, $R_m = R$ und $I_{c,m} = I_c$). Um die verschiedenen Spannungsantworten direkt miteinander vergleichen zu können, wird der primäre magnetische Fluss $\Phi^{(1)}$ in allen diskutierten Fällen auf die maximale Fläche a bezogen, d.h. es gilt $\Phi^{(1)} = B_{\perp}^{(1)} \cdot a$.

Abbildung 3.3 (a) zeigt die Spannungsantwort des regulären Netzwerks für den Transportstromwert $I = 2.2 I_c$. Da das reguläre Netzwerk aus lauter gleichen Flächen a besteht, ergibt sich die Spannungsantwort aus (3.22) und (3.23) zu

$$\langle V \rangle(I, \Phi^{(1)}) = M_r I_c R \sqrt{\left(\frac{I}{2I_c}\right)^2 - \left|\cos\left(\pi \frac{\Phi^{(1)}}{\Phi_0}\right)\right|^2}, \quad (3.26)$$

d.h. es ergibt sich einfach die M_r -fache Spannung einer einzelnen Schlaufe. Die mit der Serienschaltung erzielte Vergrößerung des Spannungshubs $\Delta V = \langle V \rangle_{\text{max}} - \langle V \rangle_{\text{min}} \approx 16.6 I_c R$ und des maximalen Transferfaktors $V_{\Phi^{(1)}} = \partial_{\Phi^{(1)}} \langle V \rangle|_{\text{max}}$ um den Faktor M_r im Vergleich zum Ein-Schleifen SQUID macht serielle Netzwerke für viele Anwendungen sehr attraktiv (s. Kapitel 1). Der große Spannungshub ΔV ermöglicht eine (leichtere) Ankopplung an die nachfolgende konventionelle Elektronik und der vergrößerte Transferfaktor $V_{\Phi^{(1)}}$ erhöht die Sensitivität der Anordnung. Da das Netzwerk aus lauter gleich großen Schleifen besteht, ist die Periode der Spannungsantwort (3.26) durch das Flussquant $P_{\Phi^{(1)}} = \Phi_0$ gegeben (s. (3.24)). Nach (3.26) liegen die Minima der mittleren Spannung $\langle V \rangle_{\text{min}} \approx M_r I_c R \sqrt{(I/(2I_c))^2 - 1} \approx 12 I_c R$ bei ganzzahligen Werten und die Maxima $\langle V \rangle_{\text{max}} \approx M_r I_c R I/(2I_c) \approx 28.6 I_c R$ bei halbganzzahligen Werten des Flussquants. Aufgrund dieser Periodizität erlauben Magnetometer auf der Basis von regulären Netzwerken nur *relative* Messungen des primären Magnetfeldes.

Die Spannungsantwort des arithmetischen Netzwerks besitzt eine gänzlich andere Abhängigkeit bezüglich des primären Magnetfeldes $B^{(1)}$. Da die "sinusförmigen" Spannungsantworten $\langle V \rangle_m$ der Schleifen wegen der unterschiedlichen Flächeninhalte alle verschiedene Perioden bezüglich des primären Magnetfeldes besitzen, besitzt die Spannungsantwort des arithmetischen Netzwerks eine Periode, die sehr viel größer ist als die des regulären Netzwerks. Nach (3.24) ist die Periode durch $P_{\Phi^{(1)}} = M_a \Phi_0 = 51 \Phi_0$ gegeben. Die Spannungsantwort des arithmetischen Netzwerks für $I = 2.2 I_c$ ist in Abb. 3.3 (b) dargestellt. Sie besitzt signifikante globale Minima bei $\Phi^{(1)} = n \cdot P_{\Phi^{(1)}}$ (mit n ganzzahlig), da für diese Werte des primären magnetischen Flusses *alle* Spannungen $\langle V \rangle_m$ über die einzelnen Schleifen simultan minimal sind. Außerhalb der globalen Minima dagegen treten nur noch wenig signifikante lokale Minima und Maxima auf und die mittlere Spannung $\langle V \rangle$ zeigt nur eine 'geringe' Modulationen um einen mittleren Spannungswert \bar{V} . Dies bedeutet, dass außerhalb der globalen Minima keine partiell kohärenten Superpositionen der Spannungsantworten $\langle V \rangle_m$ der einzelnen Schleifen auftreten. Der Spannungswert \bar{V} liegt mit $\bar{V} \approx 41.3 I_c R$ deutlich über dem Spannungs-

wert $\langle V \rangle_{\min} \approx M_a I_c R \sqrt{(I/(2I_c))^2 - 1} \approx 23.5 I_c R$ der globalen Minima.

Da die Anzahl der Schleifen M_a beim arithmetischen Netzwerk größer ist als im regulären Fall, besitzt der mittlere Spannungsabfall in Abb. 3.3 (b) höhere Werte als im Fall (a). Aus gleichem Grund ist der Spannungshub des arithmetischen Netzwerks mit $\Delta V = \langle V \rangle_{\max} - \langle V \rangle_{\min} \approx 21.5 I_c R$ größer als der des regulären Netzwerks mit $\Delta V \approx 16.6 I_c R$. Da beide Netzwerke jedoch gleich große Gesamtflächen besitzen, sind die maximalen Transferfaktoren $V_{\Phi^{(1)}} = |\partial_{\Phi^{(1)}} \langle V \rangle|_{\max}$ beider Netzwerke annähernd gleich groß. Der maximale Transferfaktor ergibt sich im regulären Fall zu $V_{\Phi^{(1)}} = 52.4 I_c R / \Phi_0$ und für den arithmetischen Fall erhält man $V_{\Phi^{(1)}} = 47.6 I_c R / \Phi_0$. Dies bedeutet, dass beide Netzwerke bezüglich primärer Magnetfelder eine vergleichbare Empfindlichkeit besitzen.

Für eine genügend große Anzahl von Elementen in einem arithmetischen Netzwerk ist die Flussverteilung über die einzelnen Schleifen gleichmässig zwischen $\Phi_{\min}^{(1)}$ und $\Phi_{\max}^{(1)}$ verteilt. Sei $\kappa = \Phi_{\min}^{(1)} / \Phi_{\max}^{(1)} = a_{\min} / a_{\max}$ der Flächenverteilungskoeffizient, $f = \pi \Phi_{\max}^{(1)} / \Phi_0 = \pi \Phi^{(1)} / \Phi_0$ die Frustration der größten Netzwerkschleife und $\langle V \rangle_0 = I_c R \sqrt{(I/2I_c)^2 - 1}$ der mittlere Spannungsabfall einer einzigen Schleife für verschwindendes primäres Magnetfeld. Beschränkt man die Frustration f auf das Periodizitätsintervall $|f| \leq \pi M_a / 2$, so kann die mittlere Gesamtspannung $\langle V \rangle$ als eine Funktion von f durch ein Integral approximiert werden

$$\langle V \rangle \approx \frac{M_a I_c R}{\Phi_{\max} - \Phi_{\min}} \int_{\Phi_{\min}}^{\Phi_{\max}} \sqrt{\left(\frac{I}{2I_c}\right)^2 - \left|\cos\left(\frac{\pi \Phi^{(1)}}{\Phi_0}\right)\right|^2} d\Phi^{(1)} = M_a \langle V \rangle_0 \frac{E(f, m) - E(\kappa f, m)}{(1 - \kappa)f}, \quad (3.27)$$

wobei $m = -(I_c R \langle V \rangle_0)^2$ und $E(f, m)$ das elliptische Integral zweiter Ordnung bezeichnet [1]. Diese Näherungsrelation wird für zunehmende Schleifenanzahl immer besser, stimmt jedoch bereits für $M_a = 51$ sehr gut mit dem exakten Ergebnis (3.23) überein. Abbildung 3.4 zeigt den Vergleich der analytischen Näherung (3.27) mit der theoretischen Spannungsantwort nach (3.23). Für den Transportstromwert $I = 2.2I_c$ ergibt sich der mittlere Spannungsabfall auf dem oberen Spannungsast zu $\bar{V} = 0.81 I_c R M_a \approx 41.3 I_c R$.

Gleichung (3.23) beschreibt ebenfalls die Abhängigkeit der mittleren Gesamtspannung $\langle V \rangle$ serieller Netzwerke vom Transportstrom I . Dabei ist zu beachten, dass in (3.23) nur über die Schleifen zu summieren ist, für die der Transportstrom I größer ist als der kritische Strom $I_{c, \text{Schleife } m}$ der jeweiligen Schleife. Für $I \leq I_{c, \text{Schleife } m}(\mathbf{B}^{(1)})$ verschwindet der Spannungsbeitrag $\langle V \rangle_m$ der zugehörigen Schleife m zur Gesamtspannung. Wird also der Transportstrom für einen gegebenen primären Magnetfeldvektor $\mathbf{B}^{(1)}$ bei $I = 0$ beginnend erhöht, so schalten nacheinander die Schleifen in den Spannungszustand $\langle V \rangle_m > 0$, sobald der Transportstrom den jeweiligen kritischen Schleifenstrom überschreitet. Ab dem Transportstromwert $\max(I_{c, \text{Schleife } m}, 1 \leq m \leq M)$ fällt dann über *alle* M Schleifen eine nichtverschwindende mittlere Spannung ab. Nach (3.22) nehmen die kritischen Stöme aller Schleifen für verschwindendes primäres Ma-

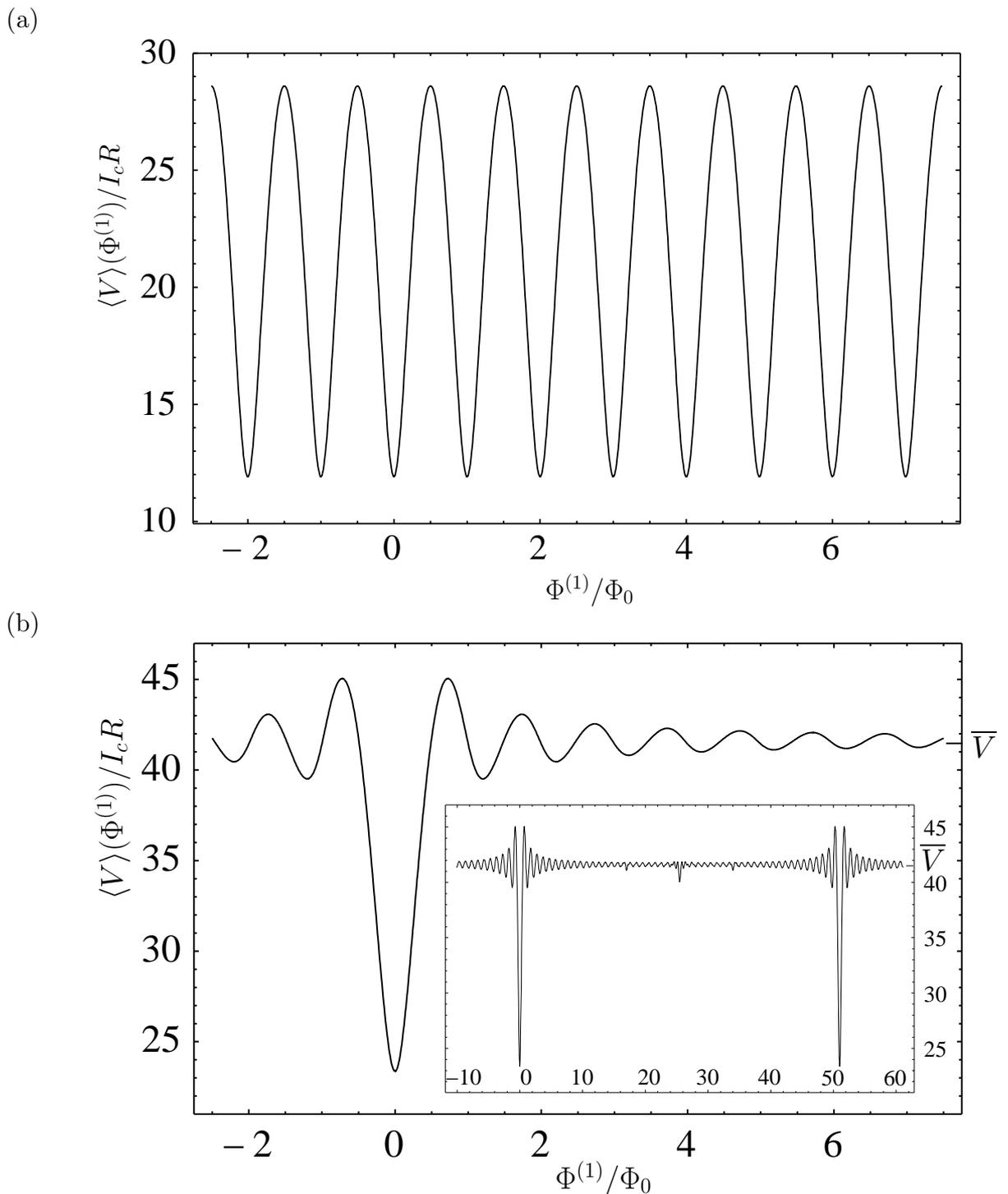


Abbildung 3.3: Theoretische Spannungsantwort serieller Netzwerke mit überdämpften Kontakten im Grenzfall verschwindender Induktivitäten $\beta_{L,\max} = 0$ für den Transportstromwert $I = 2.2 I_c$: (a) reguläres Netzwerk mit $M_r = 26$ Schlaufen, (b) arithmetisches Netzwerk mit $M_a = 51$ Schlaufen. Beide Netzwerke besitzen identische Gesamtflächen und die größte Schlaufenfläche des arithmetischen Netzwerks gleicht der größten Schlaufenfläche des regulären Netzwerks. Die mittlere Spannung ist im regulären Fall (a) Φ_0 -periodisch wogegen das arithmetische Netzwerk in (b) die Periode $M_a \Phi_0 = 51 \Phi_0$ besitzt.

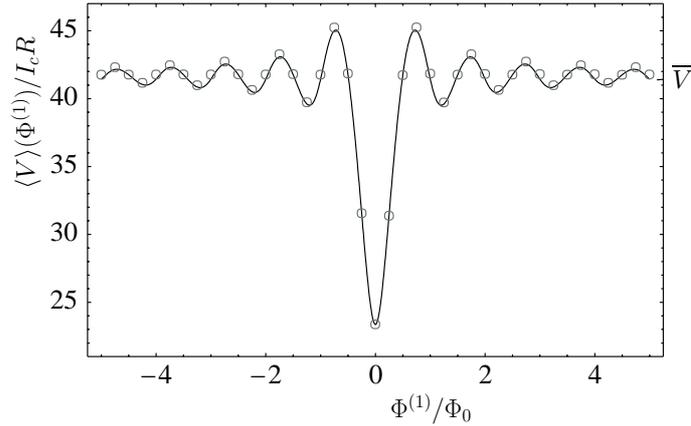


Abbildung 3.4: Spannungsantwort des arithmetischen Netzwerks mit $M_a = 51$ Schleifen und $N_a = 102$ überdämpften Kontakten im Grenzfall $\beta_{L,\max} = 0$. Die theoretische Kurve (durchgezogene Linie, nach (3.23)) wird mit der analytischen Näherung (Kreise, nach (3.27)) verglichen. Der Transportstrom beträgt $I = 2.2 I_c$.

gnetafeld⁴ $\mathbf{B}^{(1)} = 0$ simultan ihren maximalen Wert $I_{c,\text{Schleufe } m}(\mathbf{B}^{(1)} = 0) = 2\tilde{I}_{c,m}$ an. Für $I > \max(2\tilde{I}_{c,m}, 1 \leq m \leq M)$ sind deshalb für beliebige primäre Magnetfelder $\mathbf{B}^{(1)}$ alle Schleifen im Spannungszustand $\langle V \rangle_m > 0$. Streuen die mittleren kritischen Ströme $\tilde{I}_{c,m}$ der Schleifen nicht zu sehr, so ist für Transportwerte in der Umgebung von $I \approx \max(2\tilde{I}_{c,m}, 1 \leq m \leq M)$ der maximale Spannungshub ΔV der Gesamtspannung bezüglich einer Variation von $\mathbf{B}^{(1)}$ erreicht, da dann auch alle mittleren Schleifen- spannungen $\langle V \rangle_m$ maximal mit $\mathbf{B}^{(1)}$ modulieren. Wird der Transportstrom weit über diesen Wert erhöht $I \gg \max(2\tilde{I}_{c,m}, 1 \leq m \leq M)$, so dominieren die Normalanteile der Kontaktströme und die Strom-Spannungsrelation (3.23) wird eine Ohmsche Kennlinie

$$\langle V \rangle(I, \mathbf{B}^{(1)}) \approx \frac{I}{2} \sum_{m=1}^M \tilde{R}_m, \quad \text{für } I \gg \max(2\tilde{I}_{c,m}, 1 \leq m \leq M).$$

In diesem Fall hängt die Spannungsantwort nicht mehr vom primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ ab, d.h. das serielle Netzwerk wird insensitive auf externe Magnetfelder.

Bis hierher wurden ausschließlich serielle Netzwerke mit überdämpften Kontakten $\beta_C = 0$ diskutiert. Besitzen die Josephson-Kontakte endliche Kapazitäten $\beta_C > 0$ können die Differentialgleichungen des effektiven RCSJ-Modells (3.14) nicht mehr analytisch gelöst werden, und die Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ müssen numerisch bestimmt werden. Für den nicht-induktiven ($\beta_{L,\max} = 0$) aber kapazitiven Fall kann aus diesen Lösungen die Spannungsantwort des seriellen Netzwerks aus (3.19) und (3.20) gewonnen werden. Hier zeigt sich das gleiche Bild wie bei der Diskussion paralleler Netzwerke in Abschnitt 2.4.3. Dort wird anhand des parallelen Gaußschen Netzwerks gezeigt, dass die Kontaktkapazitäten zu einer Verringerung des Spannungshubs der $\langle V \rangle$ - $\Phi^{(1)}$ Kennlinie führen. Abb. 2.8 zeigt, dass der minimale Spannungswert $\langle V \rangle_{\min}$ für zunehmenden

⁴bzw. für $B_{\perp}^{(1)} = n \cdot P_{B^{(1)}}$ mit n ganzzahlig

McCumber-Parameter β_C zunimmt und für große Werte von β_C die Spannungsmodulation bezüglich des primären Magnetfeldes verschwindet. Auf gleiche Weise verringern sich im Fall serieller Netzwerke die Spannungsmodulationen der mittleren Spannungen $\langle V \rangle_m$ über die einzelnen Schlaufen, wenn die Stärke der kapazitiven Effekte zunimmt. Für wachsendes β_C (und $\beta_{L,\max} = 0$) nimmt die Modulation der Gesamtspannung serieller Netzwerke bezüglich $\Phi^{(1)}$ dann ebenfalls ab. Der qualitative Verlauf und die Magnetfeldperiode der Spannungsantwort sind dagegen unabhängig von β_C . Der Fall, dass sowohl kapazitive als auch induktive Kopplungen in seriellen Netzwerken berücksichtigt werden müssen (d.h. $\beta_C > 0$ und $\beta_{L,\max} > 0$), wird im folgenden Abschnitt diskutiert.

3.3.2 Spannungsantwort induktiver serieller Netzwerke

Die im vorigen Abschnitt 3.3.1 diskutierten Relationen gelten unter der Voraussetzung, dass die magnetischen Eigenfelder vernachlässigbar klein sind. Diese Voraussetzung ist erfüllt, wenn der Parameter $\beta_{L,\max} = \max \left(L_m^{(S)} I_c / \Phi_0, 1 \leq m \leq M \right)$ verschwindet oder genügend klein ist. Dann erzeugen die im Netzwerk fließenden Ströme (die in der Größenordnung I_c liegen) nur vernachlässigbare sekundäre magnetische Flüsse in den Netzwerkschlaufen und das gesamte Magnetfeld \mathbf{B} ist durch das primäre Magnetfeld bestimmt $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(1)}$. Wird der $\beta_{L,\max}$ -Parameter jedoch $\beta_{L,\max} \simeq 1$ oder größer, so sind die sekundären magnetischen Flüsse in der Größenordnung des Flussquants Φ_0 , und das magnetische Eigenfeld beeinflusst die Dynamik des seriellen Netzwerks.

Um für den Fall induktiver serieller Netzwerke mit $\beta_{L,\max} > 0$ die Spannungsantwort zu bestimmen, müssen die Netzwerkgleichungen (3.18) numerisch gelöst werden. Da diese Gleichungen vom gleichen Typ sind wie im Fall paralleler Netzwerke, kann analog zu Abschnitt 2.4.4 vorgegangen werden. Aus den numerisch gewonnenen Lösungen $\varphi_m(t)$ können dann die physikalischen Größen wie Ströme und Spannungen im Netzwerk bestimmt werden. Insbesondere können mit (3.20) die mittleren Spannungen $\langle V \rangle_m$ über die einzelnen Schlaufen bestimmt werden, woraus sich mit Hilfe von (3.19) die Gesamtspannung des seriellen Netzwerks ergibt.

Am Beispiel des arithmetischen Netzwerks werden im Folgenden die Einflüsse induktiver und kapazitiver Effekte auf die Spannungsantwort $\langle V \rangle(\mathbf{B}^{(1)})$ diskutiert. Wir nehmen dazu in diesem Abschnitt an, dass alle Josephson-Kontakte identische Parameter besitzen (d.h. $I_{c,m} = I_c$, $R_m = R$ und $C_m = C$). Der Einfluss von Parameterstreuungen wird im anschließenden Abschnitt 3.3.3 behandelt. Um möglichst große Spannungsmodulationen zu erhalten, wird der Transportstrom mit $I = 2.2I_c$ knapp über dem Wert gewählt, für den unabhängig vom Wert des primären Magnetfeldes über alle Schlaufen eine endliche Spannung abfällt $\langle V \rangle_m > 0$. Das arithmetische Netzwerk besitzt eine planare Schlaufengeometrie, wie sie in Abb. 3.1 (a) dargestellt ist. Die insgesamt $M_a = 51$ Flächeninhalte der Schlaufen wachsen gemäß

$$a_m = 200 l^2 m / M_a$$

linear an, wobei l die charakteristische Länge ist, bezüglich der die Abstände im Netzwerk gemessen werden. Der Induktionsparameter $\beta_{L,\max}$ der größten Schlaufe kann zu

$$\beta_{L,\max} \approx 2.16 \cdot 10^{-3} \frac{l}{\mu\text{m}} \frac{I_c}{\mu\text{A}}$$

angegeben werden, wobei die Induktionskoeffizienten mit Hilfe der in Abschnitt 2.2.6 gemachten Näherung abgeschätzt wurden. Für typische Werte $l = 1\mu\text{m}$ und $I_c = 100\mu\text{A}$ ergibt sich $\beta_{L,\max} \approx 0.22$. Da die Größe der Schlaufenflächen oder die kritischen Ströme auch viel größer gewählt werden können, erstreckt sich der relevante Bereich für $\beta_{L,\max}$ auch zu Werten $\beta_{L,\max} \gg 1$.

Zu Anfang gehen wir von überdämpften Josephson-Kontakten aus, d.h. $\beta_C = 0$. Abb. 3.5 zeigt die Spannungsantwort des induktiven arithmetischen Netzwerks für verschiedene Werte des Induktionsparameters. In Abb. 3.5 (b) ist die mittlere Spannung $\langle V \rangle$ bezüglich des primären magnetischen Flusses $\Phi^{(1)}$ über den Magnetfeldbereich einer ganzen Periode dargestellt. Als wichtiges Ergebnis zeigt Abb. 3.5 (b), dass sich das *qualitative* Verhalten von $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ durch den Einfluss magnetischer Eigenfelder nicht ändert. Die Spannungsantwort besitzt für endliche Induktivitäten dieselbe Periode $P_{\Phi^{(1)}} = 51\Phi_0$ und für die Magnetfeldwerte mit $\Phi^{(1)} = n \cdot P_{\Phi^{(1)}}$ besitzt die Spannungsantwort globale Minima. Außerhalb der globalen Minima moduliert für $\beta_{L,\max} = 0.86$ die mittlere Spannung wie im Fall $\beta_{L,\max} = 0$ um einen mittleren Spannungswert \bar{V} . Im Vergleich zum nicht-induktiven Fall besitzen diese Spannungsmodulationen eine kleinere Amplitude und der mittlere Wert \bar{V} ist für endliche Induktivitäten erniedrigt. Dennoch liegt für $\beta_{L,\max} = 0.86$ der Spannungswert \bar{V} mit $\bar{V} \approx 35I_c R$ deutlich über dem minimalen Spannungswert $\langle V \rangle_{\min} \approx 23.5 I_c R$. Für Induktivitäten mit $0 \leq \beta_{L,\max} \leq 3.43$ zeigt Abb. (a) die Spannungskenlinie in der Umgebung des globalen Minimums bei $\Phi^{(1)} = 0$. In allen Fällen unterscheidet sich der Wert des Minimums $\langle V \rangle_{\min}$ signifikant vom Spannungswert \bar{V} . Für zunehmendes $\beta_{L,\max}$ nimmt \bar{V} ab und die Amplituden der Spannungsmodulationen verringern sich. Dies liegt daran, dass sich mit zunehmendem $\beta_{L,\max}$ -Parameter die Eigeninduktivitäten der Netzwerkschlaufen erhöhen, was zu einer Verringerung der Modulationen der einzelnen Schlaufenspannungen $\langle V \rangle_m$ führt. Zudem wächst mit $\beta_{L,\max}$ die induktive Kopplung der Schlaufen untereinander, da in der gewählten Geometrie die Schlaufen räumlich unmittelbar benachbart sind. Dies führt insbesondere zu einer Abnahme der Modulationsamplitude von $\langle V \rangle$ auf dem oberen \bar{V} -Spannungsast. Durch eine räumliche Trennung der einzelnen Schlaufen kann die induktive Kopplung der Schlaufen untereinander deutlich verringert bzw. verhindert werden.

Im Gegensatz zu \bar{V} ist der minimale Spannungswert $\langle V \rangle_{\min} = \langle V \rangle(\Phi^{(1)} = 0)$ unabhängig von der Stärke der induktiven Kopplung und für alle Werte von $\beta_{L,\max}$ durch $\langle V \rangle_{\min} = M_a I_c R \sqrt{(I/(2I_c)^2 - 1} \approx 23.5 I_c R$ gegeben. Diese Unabhängigkeit liegt daran, dass für verschwindendes primäres Magnetfeld $\Phi^{(1)} = 0$ die beiden Ströme durch die Josephson-Kontakte einer Schlaufe in Phase oszillieren, so dass für $\Phi^{(1)} = 0$ der sekundäre magnetische Fluss in jeder Schlaufe und damit der Einfluss von Indukti-

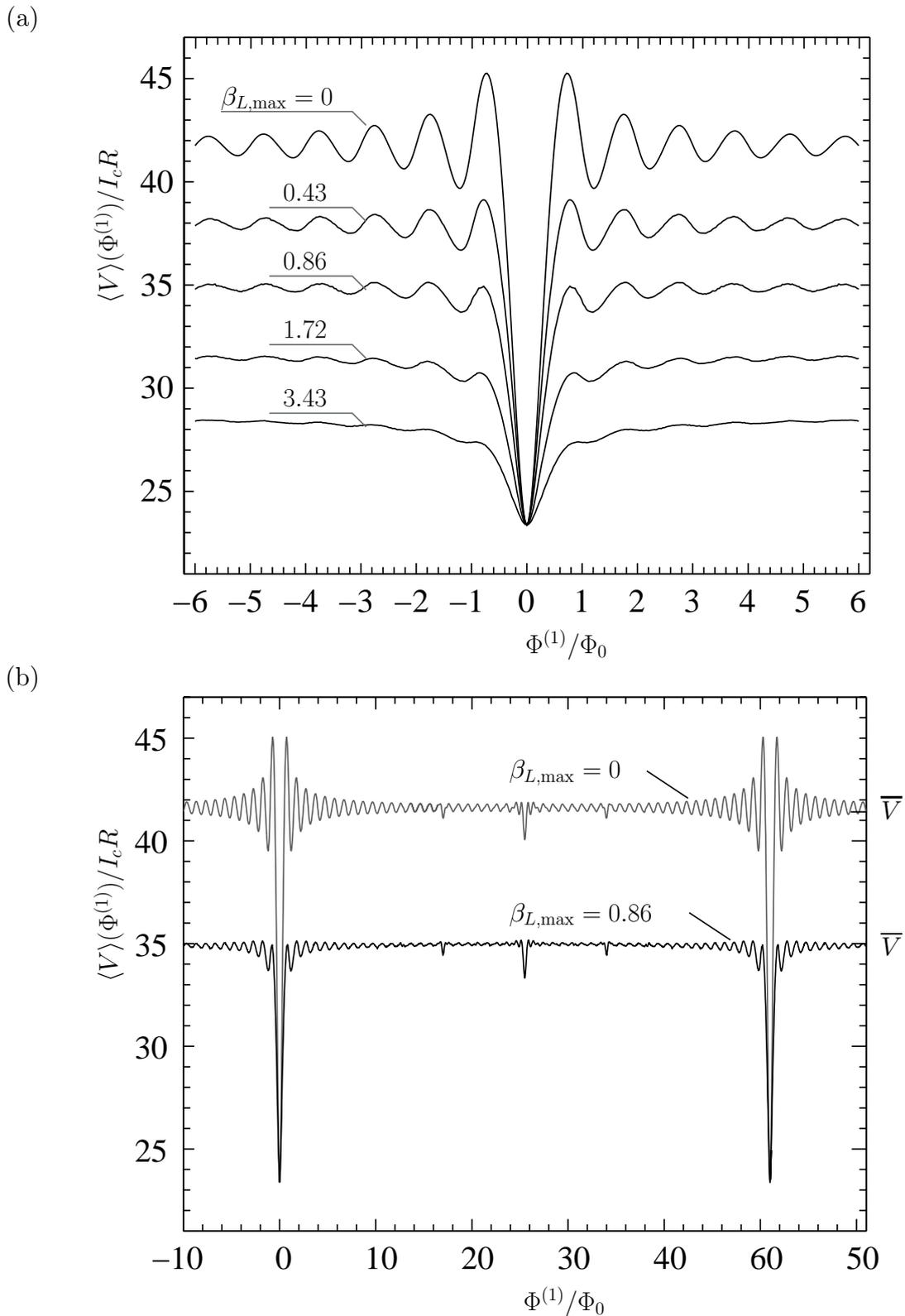


Abbildung 3.5: Theoretische Spannungsantwort des arithmetischen Netzwerks mit $M_a = 51$ Schleifen und $N_a = 102$ überdämpften Kontakten für verschiedene Werte des Induktionsparameters $\beta_{L,\max}$. Der Transportstrom besitzt den Wert $I = 2.2 I_c$.

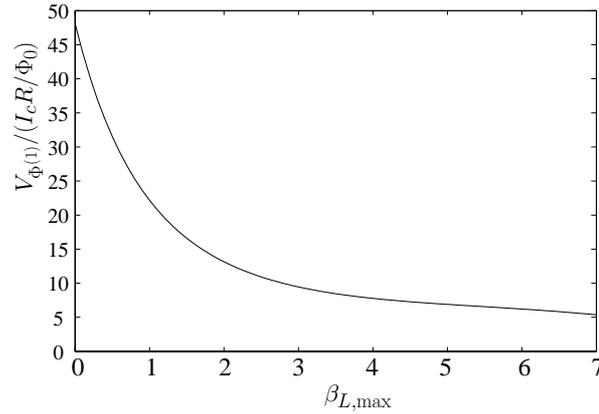


Abbildung 3.6: Maximaler Transferfaktor $V_{\Phi^{(1)}} = |\partial_{\Phi^{(1)}} \langle V \rangle|_{\max}$ (im Bereich $-\Phi_0 \leq \Phi^{(1)} \leq \Phi_0$) des arithmetischen Netzwerks mit $M_a = 51$ Schlaufen und $N_a = 102$ überdämpften Kontakten in Abhängigkeit des Induktionsparameters $\beta_{L, \max}$ für $I = 2.2 I_c$.

vitäten verschwindet. Ebenfalls unabhängig von den induktiven Kopplungen ist die Symmetrie der Spannungsantwort bezüglich der Richtung des primären Magnetfeldes, d.h. bezüglich $\Phi^{(1)} \rightarrow -\Phi^{(1)}$. Dies liegt an der speziell gewählten Netzwerkgeometrie (s. Abb. 3.1 (a)) und der Annahme identischer Josephson-Kontakte. In diesem Fall ist das serielle Netzwerk symmetrisch bezüglich einer Drehung um 180° um die Längsachse, so dass durch $\Phi^{(1)} \rightarrow -\Phi^{(1)}$ wieder die gleiche Situation entsteht. Diese Symmetrie wird jedoch explizit gebrochen, wenn die Parameter der Kontakte streuen. Dann ist die Spannungsantwort des seriellen Netzwerk nicht mehr vollständig symmetrisch bezüglich $\Phi^{(1)} \rightarrow -\Phi^{(1)}$ (s. Abb. 3.9).

Abb. 3.5 (a) zeigt, dass mit wachsenden Induktivitäten der mittlere Spannungswert \bar{V} des oberen Spannungsastes und damit der maximale Transferfaktor $V_{\Phi^{(1)}} = |\partial_{\Phi^{(1)}} \langle V \rangle|_{\max}$ der Spannungsantwort abnimmt. Die Abhängigkeit des maximalen Transferfaktors von $\beta_{L, \max}$ zeigt Abb. 3.6. Der Transferfaktor besitzt für verschwindende Induktivitäten den Maximalwert $V_{\Phi^{(1)}} \approx 47.6 I_c R / \Phi_0$ und hat für $\beta_{L, \max} = 7$ bereits um eine Größenordnung abgenommen.

Als wichtiges Ergebnis dieses Abschnitts soll nochmals betont werden, dass die induktiven Kopplungen der Schlaufen die *qualitative* Magnetfeldabhängigkeit der mittleren Spannung nicht ändern, sondern nur einen *quantitativen* Einfluss auf $\langle V \rangle$ haben. Dies bedeutet, dass die in Abschnitt 3.3.1 hergeleiteten Relationen für den Grenzfall $\beta_{L, \max} = 0$ auch Aussagen für den induktiven Fall $\beta_{L, \max} > 0$ ermöglichen. Dies ist selbst dann möglich, wenn die Induktivitäten sehr groß sind, d.h. für $\beta_{L, \max} > 1$. Im Vergleich zur Bestimmung der Lösungen der induktiven Netzwerkgleichungen (3.18) sind die Gleichungen für $\beta_{L, \max} = 0$ mit einem sehr viel geringeren Aufwand auswertbar. Aus diesem Grund sind die Gleichungen des Grenzfalls $\beta_{L, \max} = 0$ sehr wertvoll für eine qualitative Analyse des Spannungsantwortverhaltens serieller Netzwerke. Für eine optimale Auslegung serieller Netzwerke bezüglich ihrer Magnetfeldsensitivität ist jedoch eine genaue quantitative Analyse der Kennlinien erforderlich. Für diese quantitative Analyse müssen dann die induktiven Effekte berücksichtigt werden.

Spannungsantwort induktiver serieller Netzwerke mit endlichen Kontakt-Kapazitäten

Im allgemeinen Fall besitzen Josephson-Kontakte in Netzwerken eine endliche Kapazität, so dass für jeden Kontakt $\beta_{c,m} > 0$ gilt. Wir diskutieren nun, welchen Einfluss diese Kapazitäten auf die Spannungsantwort induktiver serieller Netzwerke haben. Die Spannungsantworten können für diesen Fall mit $\beta_C > 0$ und $\beta_{L,\max} > 0$ durch numerisches Lösen der Netzwerkgleichungen (3.18) bestimmt werden. Für das arithmetische Netzwerk mit identischen Kontakten (s. Abschn. 3.3.2) zeigt Abb. 3.7 (a) das Ergebnis einer solchen numerischen Integration für Induktivitäten mittlerer Stärke $\beta_{L,\max} = 0.86$ und für verschiedene Werte des McCumber-Parameters $0.5 \leq \beta_C \leq 3.0$. Besitzt der McCumber-Parameter mit $\beta_C = 0.5$ einen kleinen Wert, so ergibt sich eine $\langle V \rangle$ - $\Phi^{(1)}$ -Charakteristik, die dem überdämpften Fall $\beta_C = 0$ qualitativ gleicht. $\langle V \rangle$ besitzt ein globales Minimum bei $\Phi^{(1)} = 0$ und moduliert außerhalb dieses Minimums mit einer kleinen Amplitude um einen mittleren Spannungswert \bar{V} . Für größere Werte von β_C zeigt die Spannungsantwort ein qualitativ neues Verhalten. Bei $\Phi^{(1)} = 0$ bildet sich für $\beta_C \geq 0.8$ ein lokales Maximum aus, das durch zwei symmetrisch liegende scharfe Minima umgeben wird. Für zunehmende Größe der Kapazitäten bildet sich diese Hut-artige Struktur weiter aus, d.h. aus dem lokalen Maximum wird ein globales Maximum, das sich von seiner Umgebung signifikant abhebt. Zwischen $0.8 \leq \beta_C \leq 1.5$ nimmt dabei die "Breite" des Maximums und der Spannungshub $\Delta V = \langle V \rangle_{\max} - \langle V \rangle_{\min}$ mit zunehmendem β_C zu. Wird ausgehend von $\beta_C = 1.5$ der McCumber-Parameter bis $\beta_C = 3.0$ weiter erhöht, so verschwindet die Hut-artige Struktur wieder und es verbleibt ein wenig ausgeprägtes Maximum. Das gleiche Verhalten bezüglich β_C zeigt die Spannungsantwort für primäre Magnetfeldwerte mit $\Phi^{(1)}$ in der Umgebung von $\Phi^{(1)} = n \cdot P_{\Phi^{(1)}}$, d.h. die Periodizität von $\langle V \rangle(\Phi^{(1)})$ bleibt erhalten. Abb. 3.7 (b) zeigt eine ganze Periode der Spannungsantwort für $\beta_{L,\max} = 0.86$ und $\beta_C = 1.5$.

Die beschriebene Hut-artige Struktur der Spannungsantwort kann mit Hilfe des in Kapitel 2.5 entwickelten linearen Netzwerkmodells erklärt werden. Im arithmetischen seriellen Netzwerk sind die Flächen der Schleifen unterschiedlich ausgelegt, so dass jede Schleife eine individuelle Induktivität $L_m^{(S)}$ besitzt. Jede Schleife besitzt damit eine eigene Resonanzfrequenz, die nach (2.111) durch $\omega_m^{(\text{res})} = \sqrt{2/(L_m^{(S)}C)}$ gegeben ist, wobei C die Kapazität der Josephson-Kontakte bezeichnet. Mit jeder dieser Resonanzfrequenz ist über

$$\langle V \rangle_m^{(\text{res})} = \frac{\hbar}{2e} \omega_m^{(\text{res})} = I_c R \sqrt{\frac{1}{\pi \beta_{L,m} \beta_C}} \quad (3.28)$$

eine Resonanzspannung gegeben, wobei $\beta_{L,m} = L_m^{(S)} I_c / \Phi_0$ der Selbstinduktionskoeffizient der m -ten Schleife ist (s. 3.10). Schleifen mit großer Selbstinduktivität besitzen demnach kleine Resonanzspannungen $\langle V \rangle_m^{(\text{res})}$ und umgekehrt. Besitzt der Transportstrom durch die m -te Schleife einen geeigneten Wert, so liegt die mittlere Schleifen-spannung $\langle V \rangle_m$ in der Nähe der Resonanzspannungen $\langle V \rangle_m^{(\text{res})}$ und in der Spannungsantwort der m -ten Schleife treten LC-resonante Strukturen auf [39, 64]. In diesem

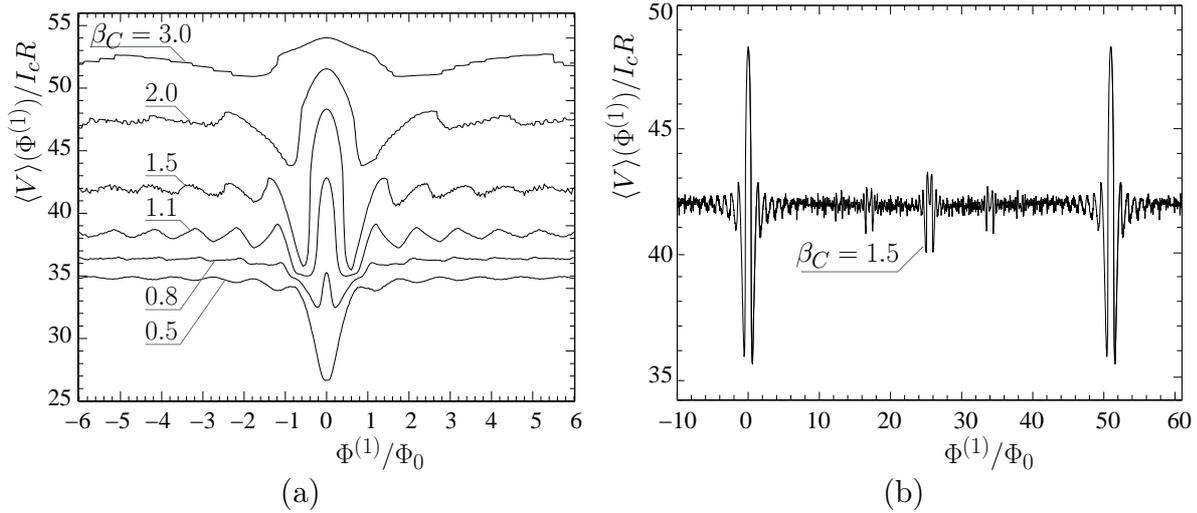


Abbildung 3.7: Theoretische Spannungsantwort des arithmetischen Netzwerks mit $M_a = 51$ Schleifen und $N_a = 102$ Kontakten für verschiedene Werte des McCumber-Parameters β_C und festen Wert des Induktionsparameters $\beta_{L,\max} = 0.86$. Der Transportstrom beträgt $I = 2.2 I_c$.

Fall befindet sich die betreffende Schleife m im sogenannten resonanten ac-Modus (s. Abschn. 2.4.4 und Abschn. 2.5.6). Für geeignete Parameterwerte von β_C und $\beta_{L,m}$ kann dann die Spannungsantwort $\langle V \rangle_m$ ihre (normale) “sinusförmige” Magnetfeldabhängigkeit verlieren und sich in eine resonante Spannungsantwort ändern, die bei ganzzahligen Flusswerten ($\Phi_m = n \cdot \Phi_0$ mit n ganzzahlig) *Maxima* besitzt. Im Fall des seriellen arithmetischen Netzwerks hängt es nun vom Transportstrom und von den speziellen Parameterwerten β_C und $\beta_{L,m}$ ab, welche Schleifen im resonanten und welche im nicht-resonanten ac-Modus arbeiten. Für den Fall, dass beide Betriebsmodi im Netzwerk anwesend sind, kommt es zur oben beschriebenen Hut-förmigen Struktur, wie nun anhand der Spannungsantwort für $\beta_C = 0.8$ näher beschrieben wird.

Für bestimmte Schleifen des seriellen arithmetischen Netzwerks zeigt Abb. 3.8 die Magnetfeldabhängigkeit der mittleren Spannungen $\langle V \rangle_m$. Der Transportstrom I fließt dabei durch alle Schleifen des seriellen Netzwerks und besitzt den Wert $I = 2.2 I_c$, so dass alle Schleifen im Spannungszustand $\langle V \rangle_m > 0$ sind. Deutlich zu sehen sind die unterschiedlichen Perioden der Schlaufenspannungen aufgrund der verschiedenen Schlaufenflächen. Die kleinste Schleife besitzt dabei die größte Periode und für anwachsende Schlaufenflächen verringert sich die Periode stetig. Ferner zeigt sich, dass die Schleifen in unterschiedlichen Betriebsmodi arbeiten. Die Spannungsantworten der kleinen Schleifen mit $m < 12$ zeigen in Abb. 3.8 eine “sinusförmige” Magnetfeldabhängigkeit mit Minima bei $\Phi^{(1)} = 0$, d.h. diese Schlaufen befinden sich im nicht-resonanten ac-Modus⁵. Die größeren Schleifen $m = 22, 36, 50$ dagegen arbeiten im resonanten ac-Modus, d.h. ihre Spannungsantwort wird bei $\Phi^{(1)} = 0$ (lokal) maximal. In der Summe $\langle V \rangle = \sum_{m=1}^{M_a} \langle V \rangle_m$ erzeugen die Schlaufenspannungen bei $\Phi^{(1)} = 0$ dann

⁵Anmerkung zu Abb. 3.8 (b): die Reduktion des Spannungshubs für wachsende m (mit $1 \leq m \leq 12$) ist auf die Zunahme der Schlaufeninduktivitäten mit wachsender Schlaufenfläche zurückzuführen.

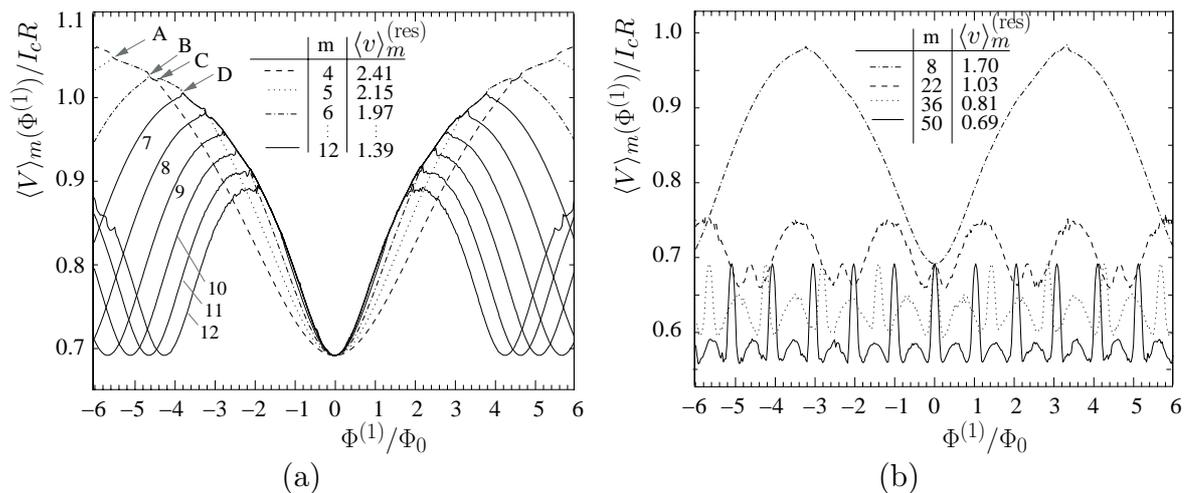


Abbildung 3.8: Theoretische Spannungsantworten einzelner Schlaufen des arithmetischen Netzwerks mit $M_a = 51$ Schlaufen und $N_a = 102$ Kontakten für $\beta_C = 0.8$ und $\beta_{L,\max} = 0.86$. Die normierten Resonanzspannungen $\langle v \rangle_m^{(res)} = \langle V \rangle_m^{(res)}/(I_c R)$ der einzelnen Schlaufen sind zusammen mit der zugehörigen Schlaufennummer m aufgelistet. Der Transportstrom beträgt $I = 2.2 I_c$

die signifikante Hut-förmige Struktur in der Gesamtspannung $\langle V \rangle$, wie sie Abb. 3.7 zeigt. Wichtig ist dabei, dass alle Schlaufenspannungen nur bei $\Phi^{(1)} = 0$ simultan extremal werden⁶, so dass $\langle V \rangle$ nur bei $\Phi^{(1)} = 0$ ein signifikantes Verhalten besitzt und ansonsten lediglich mit geringer Amplitude um den mittleren Spannungswert \bar{V} moduliert.

Diese Beobachtungen sind im Einklang mit dem Modell der LC-Resonanzen. Der McCumber-Parameter β_C und der maximale Induktivitätsparameter $\beta_{L,\max}$ besitzen die Werte $\beta_C = 0.8$ und $\beta_{L,\max} = 0.86$, so dass nach (3.28) für die größte Schlaufe (mit $m = M_a$ und $\beta_{L,M_a} = \beta_{L,\max}$) die Resonanzspannung durch $\langle V \rangle_{M_a}^{(res)} \approx 0.68 I_c R$ gegeben ist. Da alle anderen Schlaufen mit $m < M_a$ kleinere Induktivitätsparameter $\beta_{L,m}$ besitzen, gilt für ihre Resonanzspannungen $\langle V \rangle_m^{(res)} > \langle V \rangle_{M_a}^{(res)}$. Die kleinste Schlaufe $m = 1$ besitzt mit $\beta_{L,1} \approx 0.02$ eine Resonanzspannung $\langle V \rangle_1^{(res)} \approx 4.46 R I_c$, die um ungefähr das sechsfache größer ist als die der größten Schlaufe. In Abb. 3.8 sind die auf $I_c R$ normierten Resonanzspannungen der zu den dargestellten Kurven gehörigen Schlaufen angegeben. Um die LC-Resonanzen der Schlaufen anregen zu können, müssen die Schlaufenspannungen $\langle V \rangle_m$ in der Nähe der jeweiligen Resonanzspannungen $\langle V \rangle_m^{(res)}$ liegen. Da für $I = 2.2 I_c$ die Werte der einzelnen Schlaufenspannungen kleiner als $I/2 R = 1.1 I_c R$ sind, können alle Resonanzen mit $\langle V \rangle_m^{(res)} > 1.1 I_c R$ nicht (oder nur sehr schlecht) angeregt werden. Dies trifft auf die Resonanzspannungen mit $m \leq 12$ zu, so dass diese Schlaufen im nicht-resonanten ac-Modus arbeiten, wie dies Abb. 3.8 zeigt. Bei den Schlaufen mit $m \geq 22$ liegen die Spannungen $\langle V \rangle_m$ dagegen in der Nähe der Resonanzspannungen, so dass diese Resonanzen angeregt werden können und die betreffenden Schlaufen im resonanten ac-Modus operieren.

⁶bzw. bei allen primären magnetischen Flusswerten $\Phi^{(1)} = n \cdot P_{\Phi^{(1)}}$ mit n ganzzahlig.

Das dargestellte Szenario lässt sich nun auch auf die anderen Fälle aus Abb. 3.7 (a) übertragen. Dort sind für festen Wert des Transportstroms $I = 2.2I_c$ und festem $\beta_{L,\max}$ unterschiedliche Werte für den McCumber-Parameter gewählt. Wird ausgehend vom Wert $\beta_C = 0.8$ der McCumber-Parameter β_C erhöht, so verschieben sich die Resonanzfrequenzen der Schleifen zu kleineren Werten hin und neue Schleifen gehen in den resonanten ac-Modus über. Damit wird die Hut-Struktur ausgeprägter, wie dies in Abb. 3.7 (a) für $\beta_C = 1.1$ und $\beta_C = 1.5$ dargestellt ist. Wird β_C noch weiter erhöht, so nimmt der Spannungshub ΔV wieder ab, da die Spannungsmodulationen der einzelnen Schleifen selbst mit β_C abnehmen. Für $\beta_C = 3.0$ sind die Modulationen der Gesamtspannung $\langle V \rangle$ bezüglich $\Phi^{(1)}$ stark reduziert und das serielle Netzwerk befindet sich auf dem Ohmschen Ast mit $\langle V \rangle \approx M_a I / 2 R = 56.1 I_c R$.

Bei genauer Betrachtung der Spannungsantwort des arithmetischen Netzwerks in Abb. 3.7 (a) fällt auf, dass die Kennlinien nicht mehr vollständig glatt sind und eine "zackige" Feinstruktur besitzen. Im gewählten Fall zeigt sich diese Feinstruktur besonders stark für die Werte $\beta_C = 1.5$ und $\beta_C = 2.0$. Diese Feinstruktur tritt nur bei induktiven seriellen Netzwerken auf und ist im nicht-induktiven Fall $\beta_{L,\max} = 0$ nicht vorhanden. Die Erklärung für diese Feinstruktur findet sich in Abb. 3.8 (a), die die Magnetfeldabhängigkeiten einzelner Schlaufenspannungen $\langle V \rangle_m$ zeigt. Verfolgen wir den Spannungsverlauf der Schleifen $m = 4, \dots, 7$ so sind die Spannungen bei $\Phi^{(1)} = -6\Phi_0$ alle verschieden. Am mit "A" gekennzeichneten Punkt jedoch laufen die Spannungen der Schleifen $m = 4$ und $m = 5$ zusammen $\langle V \rangle_4 = \langle V \rangle_5$ und besitzen ab dann einen identischen Verlauf. Am Punkt B schließt sich diesen beiden Spannungen der mittlere Spannungsabfall der sechsten Schleife $\langle V \rangle_6$ an und bis zum Punkt C gilt $\langle V \rangle_4 = \langle V \rangle_5 = \langle V \rangle_6$. Bei C verlässt $\langle V \rangle_4$ den gemeinsamen Verlauf und bis zum Erreichen des Punktes D verlaufen $\langle V \rangle_5$ und $\langle V \rangle_6$ gemeinsam. Dort verbindet sich $\langle V \rangle_7$ mit $\langle V \rangle_5 = \langle V \rangle_6$, d.h. ab dann gilt $\langle V \rangle_5 = \langle V \rangle_6 = \langle V \rangle_7$. In bestimmten Intervallen des primären magnetischen Flusses $\Phi^{(1)}$ sind also die Schlaufenspannungen bestimmter Gruppen benachbarter Schleifen identisch. Die Gleichheit bedeutet, dass die Josephson-Kontakte dieser Schleifen mit derselben charakteristischen Frequenz oszillieren, d.h. dass diese Kontakte synchronisiert sind. Welche Schlaufengruppen mit identischer Spannung sich bilden (bzw. welche Gruppe von Josephson-Kontakten synchronisieren), hängt dabei vom primären magnetischen Fluss $\Phi^{(1)}$ ab. Bei Variation von $\Phi^{(1)}$ können Schleifen zu einer Gruppe hinzukommen bzw. sie wieder verlassen. Jedesmal, wenn sich neue Gruppen synchronisieren bzw. wieder desynchronisieren, weichen die betreffenden Schlaufenspannungen von ihren "idealen" Verläufen ab. Auf diese Weise kommt es zur Feinstruktur in der Magnetfeldabhängigkeit der Gesamtspannung $\langle V \rangle$.

Die für die Synchronisation der Josephson-Kontakte verantwortliche Wechselwirkung ist die induktive Kopplung der Schleifen. Dabei gibt es im Wesentlichen zwei Gründe dafür, dass gerade die Kontakte benachbarter Schleifen synchronisieren. Zum einen unterscheiden sich die Flächen benachbarter Schleifen im arithmetischen Netzwerk nur gering, so dass die Schlaufenspannungen nur geringfügig andere Perioden bezüglich

$\Phi^{(1)}$ besitzen. Die Folge davon ist, dass sich die “idealen” $\langle V \rangle_m(\Phi^{(1)})$ -Kennlinien dieser Schlaufen in einem flachen Winkel schneiden. Zum anderen ist die induktive Kopplung bei benachbarten Schlaufen am stärksten, da sie (bei der gewählten Geometrie) ein Leitersück gemeinsam haben. Wichtig ist dabei, dass benachbarte Schlaufen nur dann genügend stark induktiv gekoppelt sind, wenn die beiden Kontaktströme einer Schlaufe *nicht* in Phase oszillieren. Nur dann existiert in dieser Schlaufe ein oszillierender Abschirm-Kreisstrom, der in angrenzenden Schlaufen einen sekundären magnetischen Fluss induziert und somit die Schlaufen induktiv koppelt. Dies ist auch der Grund dafür, dass die Kontakte zweier Schlaufen m und $m + 1$ nur in der Nähe der Kennlinien-Schnittpunkte synchronisieren, für die die primären magnetischen Flüsse $\Phi_m^{(1)}$ und $\Phi_{m+1}^{(1)}$ in der Nähe von $n \cdot \Phi_0/2$ liegen (n ganzzahlig).

Die Synchronisation gekoppelter Josephson-Kontakte wurde bereits vielfach in der Literatur diskutiert. Die Gründe für das große Interesse liegen in der (potentiellen) Anwendung von Netzwerken aus einer großen Anzahl synchron und kohärent oszillierender Josephson-Kontakte. Diese ermöglichen den Bau von Generatoren für Mikrowellen, die bei geringer Linienbreite über einen großen Frequenzbereich durchstimmbare sind. Es wird an dieser Stelle nur kurz auf einige Arbeiten eingegangen, die unmittelbar mit der obigen Diskussion in Verbindung stehen und ansonsten wird auf die Literatur verwiesen [26, 80, 103, 124, 169].

Eine Analyse der Synchronisation gekoppelter Josephson-Kontakte mit Hilfe einer Störungstheorie wird in [80] diskutiert. Dort wird insbesondere die Synchronisation zweier seriell geschalteter Kontakte untersucht, die über eine parallel geschaltete Impedanz elektromagnetisch gekoppelt sind. In den Strom-Spannungskennlinien dieser seriellen Kontakte treten Strukturen auf, die den in Abb. 3.8 dargestellten $\langle V \rangle_m - \Phi^{(1)}$ -Kennlinien der Schlaufen in der Umgebung des Synchronisations-Intervalls ähnlich sind. Diese Ähnlichkeit beruht darauf, dass jede Schlaufe im seriellen Netzwerk auf einen einzelnen effektiven Kontakt abgebildet werden kann (s. effektives Ein-Phasen-Modell), so dass in diesem Bild die induktiv gekoppelten Schlaufen als elektromagnetisch gekoppelte effektive Kontakte verstanden werden können. Experimente zu Synchronisationseffekten bei zwei induktiv gekoppelten dc SQUIDS finden sich in [13, 14, 20]. Dort finden sich Ergebnisse zu Spannungsangleichungen sowohl in Strom-Spannungs- als auch in Magnetfeld-Spannungskennlinien. Analytische Ergebnisse zur Theorie der Schlaufensynchronisation in regulären seriellen Netzwerken werden in [7, 8] diskutiert. Experimentelle Ergebnisse zur Mikrowellenerzeugung induktiv gekoppelter serieller dc SQUIDS sind in [85] beschrieben.

3.3.3 Abhängigkeit der Spannungsantwort von Parameterstreuungen

Bei der experimentellen Realisierung von Josephson-Netzwerken treten Imperfektionen auf, die die Leistungsfähigkeit der Schaltungen beeinträchtigen können. Um die

Auswirkungen von Imperfektionen auf die Eigenschaften der Netzwerke zu untersuchen, unterscheiden wir zwei Arten von Streuungen. Bei den strukturellen Streuungen handelt es sich um Abweichungen der geometrischen Strukturen vom gewollten Design. Diese Streuungen entstehen bei der Strukturierung und Herstellung der Netzwerke. Die Parameterstreuungen beschreiben dagegen die Tatsache, dass jeder Kontakt individuelle Parameterwerte für den kritischen Strom, den Widerstand und die Kapazität besitzt. Da die strukturellen Streuungen die Flächeninhalte der Netzwerkschleifen betreffen, beeinflussen sie insbesondere die Abhängigkeit der Spannungsantwort vom primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ und die Periode $P_{B^{(1)}}$. Der Einfluss struktureller Streuungen auf das Antwortverhalten serieller Netzwerke wird in Abschnitt 3.5 diskutiert. Die Auswirkungen von Parameterstreuungen auf die $\langle V \rangle$ - $\Phi^{(1)}$ -Kennlinien werden im Folgenden anhand des arithmetischen seriellen Netzwerks untersucht, das bereits in den Abschnitten 3.3.1 und 3.3.2 diskutiert wurde. Die insgesamt $N_a = 2M_a = 102$ Josephson-Kontakte besitzen alle unterschiedliche kritische Ströme $I_{c,n}$ und individuelle Ohmsche Widerstände R_n . Zur Vereinfachung werden die Kontakte als überdämpft angenommen, d.h. es gilt $C_n = 0$. Die Mittelwerte über alle Kontakte werden mit I_c und R bezeichnet und die Mittelwerte der Parameter über die einzelnen Schleifen mit $\tilde{I}_{c,m}$ und \tilde{R}_m (s. (3.16)).

Für vernachlässigbare induktive Kopplungen $\beta_{L,\max} = 0$ ist die mittlere Spannung über das serielle Netzwerk durch (3.23) bestimmt, und die Spannungen über die einzelnen Schleifen sind durch (3.21) gegeben. Bei den Spannungen $\langle V \rangle_m$ über die Schleifen führt eine Streuung der Kontaktparameter zu einer Änderung der Amplituden in den $\langle V \rangle_m$ - $\mathbf{B}^{(1)}$ -Kennlinien, da sich die maximalen kritischen Schleifenströme $I_{c,\text{Schleife } m}$ und die mittleren Schleifenparameter $\tilde{I}_{c,m}$ und \tilde{R} ändern. Dagegen ändern sich die Perioden der Spannungen $\langle V \rangle_m$ durch Parameterstreuungen nicht und alle Schleifenspannungen werden weiterhin bei $\mathbf{B}^{(1)} = 0$ simultan minimal. Damit behält auch die Gesamtspannung $\langle V \rangle$ trotz Parameterstreuungen bei $\Phi^{(1)} = 0$ (bzw. bei $\Phi^{(1)} = n \cdot P_{\Phi^{(1)}}$) das globale Minimum bei und die Magnetfeldabhängigkeit von $\langle V \rangle$ ändert sich nur quantitativ aber nicht qualitativ.

Diese Aussagen gelten auch für den Fall, dass induktive Effekte berücksichtigt werden. Abbildung 3.9 zeigt die Spannungsantwort des arithmetischen Netzwerks mit $\beta_{L,\max} = 0.86$ in der Umgebung des globalen Minimums bei $\Phi^{(1)} = 0$. Die Parameterwerte der Kontakte streuen um $\pm X$ Prozent um ihre Mittelwerte I_c bzw. R . Die Mittelwerte I_c und R sind für alle in Abb. 3.9 betrachteten Fälle gleich groß gewählt, so dass auch die $I_c R$ -Produkte in allen Fällen identisch sind und die Kennlinien unmittelbar miteinander vergleichbar sind. Abb. 3.9 zeigt, dass selbst für große Parameterstreuungen mit $X = 60\%$ das globale Minimum bei $\Phi^{(1)} = 0$ erhalten bleibt und kaum an Signifikanz verliert. Für wachsende Abweichungen X von den Mittelwerten nehmen die Modulationen von $\langle V \rangle$ auf dem oberen \bar{V} -Spannungsast zu und die $\langle V \rangle$ - $\Phi^{(1)}$ Charakteristiken werden asymmetrisch bezüglich $\Phi^{(1)} \rightarrow -\Phi^{(1)}$, da nun diese Symmetrie durch die Parameterstreuungen gebrochen wird. Ferner verringern sich mit zunehmender Streuung X der Spannungshub ΔV und der mittlere Spannungs-

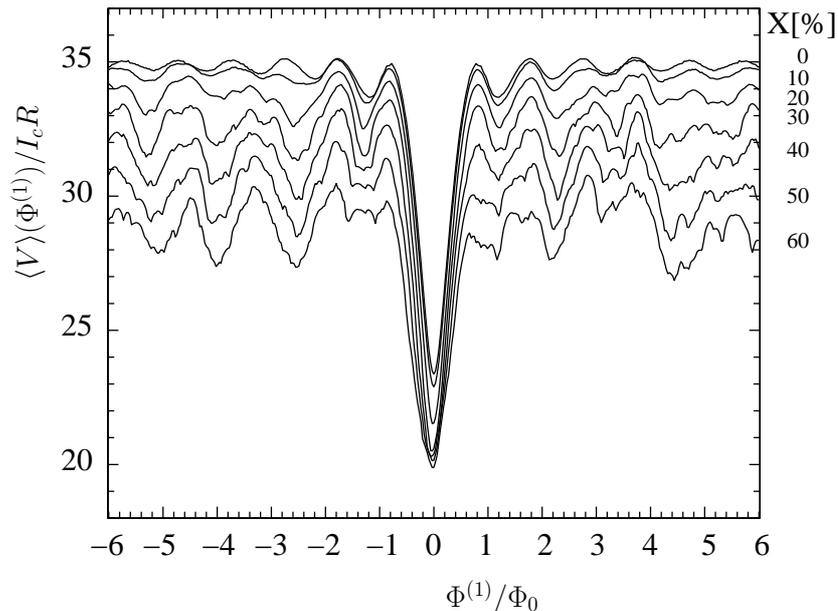


Abbildung 3.9: Einfluss von Parameterstreuungen auf die theoretische Spannungsantwort des arithmetischen Netzwerks mit $M_a = 51$ Schlaufen und $N_a = 102$ überdämpften Kontakten für $\beta_{L,\max} = 0.86$. Die Werte der Parameter (d.h. der Widerstände R_m und kritischen Ströme $I_{c,m}$) streuen um $\pm X$ Prozent um die jeweiligen Mittelwerte. Die Mittelwerte R und I_c der Parameter sind in allen Fällen identisch. Der Transportstrom beträgt $I = 2.2 I_c$.

wert \bar{V} . Der maximale Transferfaktor $V_{\Phi^{(1)}}$ (im Intervall $-1 \leq \Phi^{(1)} \leq 1$) ist jedoch von den Streuungen nahezu unbeeinflusst, d.h. die Magnetfeldsensitivität des seriellen Netzwerks wird durch Parameterstreuungen nur wenig beeinträchtigt.

Die Eigenschaft serieller Netzwerke, dass ihre Spannungsantworten sehr robust gegen Streuungen der Kontaktparameter sind, macht serielle Netzwerke besonders für supraleitende Schaltungen aus Hochtemperatursupraleitern interessant. Die gefundenen Ergebnisse deuten darauf hin, dass die bei der Herstellung von Josephson-Kontakten aus Hochtemperatursupraleitern auftretenden Streuungen der Parameterwerte die Funktionalität der seriellen Netzwerke nicht beeinträchtigen.

3.4 Rauschenergie serieller Josephson-Kontakt-Netzwerke

In Anlehnung an die Diskussion der Rauscheigenschaften paralleler Netzwerke in Abschnitt 2.6 wird in diesem Absatz kurz das Skalierungsverhalten der spektralen Rauschenergie serieller Netzwerke diskutiert. Diese Frage ist im Hinblick auf die Anwendungen von seriellen Netzwerken sehr wichtig, da die spektrale Rauschenergie $\mathcal{E}_N(\nu)$ ein Maß für die Magnetfeldsensitivität der seriellen Netzwerke ist. Um dieser Frage nachzugehen, betrachten wir den einfachen Fall eines regulären seriellen Netzwerks, in dem alle Schlaufen dieselbe Schlaufeninduktivität $L^{(S)}$ besitzen und alle Kontakte überdämpft

sind sowie identische Parameterwerte besitzen. Die induktiven Kopplungen der einzelnen Schleifen untereinander soll sehr klein sein, so dass die Schleifen unabhängig voneinander arbeiten. Dies kann durch eine genügend große räumliche Separation der Schleifen erreicht werden. Ferner sei die betrachtete Frequenz ν wesentlich kleiner als die Josephson-Frequenz, d.h. $\nu \ll \nu_J = 1/t_J$.

Die dominanten Rauschquellen in seriellen Netzwerken mit extern geshunteten Josephson-Kontakten sind die Shunt-Widerstände für deren Leistungsspektrum bei thermischem Rauschen unkorreliertes Nyquist-Rauschen angenommen werden kann. Die spektrale Leistungsdichte der Spannung $\mathcal{S}_V^{(J)}(\nu)$ über einen einzelnen Josephson-Kontakt ist dann durch die Gleichung (2.112) gegeben. Da die Rauschquellen im Netzwerk als unkorreliert angenommen werden, ist die spektrale Leistungsdichte des seriellen Netzwerks durch $\mathcal{S}_{V,N}(\nu) = N \mathcal{S}_V^{(J)}(\nu)$ gegeben, d.h. $\mathcal{S}_{V,N}(\nu)$ skaliert mit N . Da das serielle Netzwerk ein Magnetfeld-Spannungs-Wandler ist, kann mit Hilfe des maximalen Transferfaktors $V_{B(1)}$ und $\mathcal{S}_{V,N}(\nu)$ die Magnetfeldauflösung zu $\mathcal{S}_{B,N}(\nu) = \mathcal{S}_{V,N}(\nu)/V_{B(1)}^2$ bestimmt werden. Die Größe $\sqrt{\mathcal{S}_{B,N}(\nu)}$ kann als die primäre Magnetfeldänderung (pro Hertz Bandbreite) aufgefasst werden, die im seriellen Netzwerk eine Spannungsänderung der Größe $\sqrt{\mathcal{S}_{V,N}(\nu)}$ erzeugt, vorausgesetzt das serielle Netzwerk wird am Arbeitspunkt mit maximalem Transferfaktor betrieben. Auf diese Weise ist $\sqrt{\mathcal{S}_{B,N}(\nu)}$ ein Maß für die minimale Änderung des primären Magnetfeldes, die mit dem seriellen Netzwerk noch detektierbar ist.

Da sich bei einem regulären seriellen Netzwerk die Schlaufenspannungen addieren (s. (3.23)), skaliert der Spannungshub und der maximale Transferfaktor $V_{B(1)}$ mit der Anzahl der Schleifen und damit mit der Anzahl der Josephson-Kontakte $V_{B(1)} \propto N$. Wird nun das Skalierungsverhalten der Größen $\mathcal{S}_{B,N}(\nu)$ und $V_{B(1)}$ mit dem Ausdruck für die spektrale Rauschenergie $\mathcal{E}^{(0)}(\nu)$ (nach (2.114)) für eine einzelne dc SQUID-Schleife kombiniert, so folgt für die spektrale Energiedichte $\mathcal{E}_N(\nu)$ des seriellen Netzwerks

$$\mathcal{E}_N(\nu) = \alpha \frac{1}{N} \mathcal{E}^{(0)}(\nu) \quad (\text{serielles Netzwerk}), \quad (3.29)$$

wobei die Konstante α von den verbleibenden induktiven Kopplungen der Schleifen untereinander abhängt. Die spektrale Rauschenergie serieller Netzwerke skaliert nach (3.29) also gemäß $1/N$ mit der Kontaktanzahl N . Diese Relation bleibt auch dann gültig, wenn die Schleifen unterschiedliche Größen und damit unterschiedliche Schlaufeninduktivitäten $L_i \neq L_j$ besitzen. Auch in diesem allgemeinen Fall skalieren $\mathcal{S}_{V,N}(\nu)$ und $V_{B(1)}$ mit N , so dass für die spektrale Rauschenergie Gleichung (3.29) gilt und lediglich die Konstante α einen anderen Wert annimmt. Diese Rauscheigenschaften deuten darauf hin, dass mit Hilfe serieller Josephson-Kontakt-Netzwerke die Empfindlichkeit in Anwendungen erhöht werden kann.

3.5 Serielle Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter

Die Spannungsantwort serieller Netzwerke hängt von den Parametern der Josephson-Kontakte und von der Flächenverteilung des Netzwerks ab. Die Kontaktparameter bestimmen im Wesentlichen die *quantitative* Magnetfeldabhängigkeit der $\langle V \rangle$ - $\mathbf{B}^{(1)}$ -Kennlinien und haben keinen Einfluss auf das *qualitative* Verhalten⁷, d.h. insbesondere die Magnetfeldperioden $P_{B^{(1)}}$ der $\langle V \rangle$ - $B_{\perp}^{(1)}$ -Kennlinien⁸ sind von den Kontaktparametern unabhängig. Die Periodizitätseigenschaften werden von der Verteilung der Schlaufenflächen im Netzwerk bestimmt (s. (3.24)). Die Flächenverteilung legt fest, für welche Werte des primären Magnetfeldes $\mathbf{B}^{(1)}$ eine kohärente Superposition der einzelnen Schlaufenspannungen auftritt. In der Umgebung dieser $B_{\perp}^{(1)}$ -Werte besitzt die Gesamtspannung des seriellen Netzwerks signifikante Strukturen, die je nach Größe der Induktionsparameter $\beta_{L,n}$ und der Kontakt-Kapazitäten $\beta_{C,n}$ globale Minima oder Maxima sein können (s. Abschn. 3.3.2).

Die Magnetfeldperiode $P_{\Phi^{(1)}}$ hängt nach (3.24) reziprok vom größten gemeinsamen Teiler der Flächen $ggT(a_1, \dots, a_M)$ ab. Bei Netzwerken mit geeignet gewählten Flächenverteilungen kann die Periode $P_{\Phi^{(1)}}$ aus diesem Grund sehr viel größer werden als Φ_0 . Beispiele für Netzwerke mit $P_{\Phi^{(1)}} \gg \Phi_0$ sind die arithmetischen Netzwerke aus Abschnitt 3.3, deren Flächen gemäß (3.25) linear anwachsen. In diesem Fall gilt $ggT = a/M_a$ und damit $P_{\Phi^{(1)}} = M_a \Phi_0$, wenn der primäre magnetische Fluss $\Phi^{(1)}$ auf die größte Schlaufe $a_{M_a} = a$ bezogen wird. Besonders interessant sind nun die seriellen Netzwerke deren Flächen inkommensurabel gewählt sind, so dass der größte gemeinsame Teiler der Flächen verschwindet. In diesem Fall divergiert die Magnetfeldperiode $P_{B^{(1)}} \rightarrow \infty$ und die Spannungsantwort eines solchen Netzwerks ist im gesamten Magnetfeldbereich $|B_{\perp}^{(1)}| < \infty$ nur in der Nähe von $B_{\perp}^{(1)} = 0$ eindeutig. Diese Eindeutigkeit ist Folge davon, dass alle Schlaufenspannungen für verschwindendes Magnetfeld $B_{\perp}^{(1)} = 0$ simultan extremal sind. Bei inkommensurablen Flächen ist dies *nur* für $B_{\perp}^{(1)} = 0$ gegeben und für endliche Magnetfeldwerte ist eine kohärente Superposition nicht mehr möglich. Wichtig ist hierbei, dass bei geeigneter Auslegung die Netzwerke mit $P_{B^{(1)}} \rightarrow \infty$ ihre Magnetfeldsensitivität in der Umgebung von $B_{\perp}^{(1)} = 0$ beibehalten. Dies liegt daran, dass die Magnetfeldsensitivität serieller Netzwerke von der Gesamtfläche des Netzwerks bestimmt wird und die explizite Flächenverteilung für die Magnetfeldsensitivität von untergeordneter Bedeutung ist.

Die Inkommensurabilität der Flächen erzwingt streng mathematisch eine beliebig große Periode der Spannungsantwort. Sie erzwingt aber nicht, dass es für $B_{\perp}^{(1)} \neq 0$ zu einer *teilweisen* Kohärenz der einzelnen Schlaufenspannungen $\langle V \rangle_m$ kommen kann. Dies würde bedeuten dass, die Gesamtspannung $\langle V \rangle$ für endliche Magnetfeldwerte $B_{\perp}^{(1)} \neq 0$

⁷Abb. 3.9 zeigt, dass eine Streuung der Kontaktparameter den mittleren Spannungswert $\langle V \rangle$ und die "Feinstruktur" der Kennlinien ändert. Das globale signifikante Minimum von $\langle V \rangle$ bei $\Phi^{(1)} = 0$ bleibt jedoch selbst für große Parameterstreuungen erhalten.

⁸Wir gehen von planaren Netzwerken aus und nehmen homogene primäre Magnetfelder an. In diesem Fall bezeichnet $B_{\perp}^{(1)}$ die Komponente des primären Magnetfeldes $\mathbf{B}^{(1)}$, die parallel zur Netzwerknormalen \mathbf{n} ist, d.h. $B_{\perp}^{(1)} = \langle \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{n} \rangle$.

ebenfalls signifikante Strukturen besitzt, die vom Verhalten bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ kaum zu unterscheiden wären. Ein solches Verhalten tritt z.B. auf, wenn sich die Schlaufenflächen nur gering voneinander unterscheiden (s. Abb. 3.12). Damit sich die Spannungsantwort in der Nähe von $B_{\perp}^{(1)} = 0$ *signifikant* vom Verhalten für $|B_{\perp}^{(1)}| > 0$ abhebt, müssen die Flächen zudem genügend stark voneinander abweichen. Analog zum Fall paralleler Netzwerke (s. Abschn. 2.7) ergeben sich insgesamt zwei notwendige Bedingungen dafür, dass die $\langle V \rangle$ - $B_{\perp}^{(1)}$ -Kennlinien serieller Netzwerke ausschließlich für verschwindende primäre Magnetfelder signifikant und eindeutig sind: (A) die Flächeninhalte der Schlaufen müssen inkommensurabel sein und (B) die kleinste Fläche muss sich von der größten Fläche stark unterscheiden und keine bestimmte Schlaufengröße darf bevorzugt werden. Die arithmetischen Netzwerke erfüllen die Bedingung (B) aber nicht Bedingung (A). Da (B) erfüllt ist, ist das Verhalten der Spannungsantwort in der Umgebung von $\Phi^{(1)} = n \cdot P_{\Phi^{(1)}}$ (n ganzzahlig) signifikant und es treten innerhalb einer Periode $n \cdot P_{\Phi^{(1)}} < \Phi^{(1)} < (n+1) \cdot P_{\Phi^{(1)}}$ keine weiteren signifikanten Strukturen auf, die ein Auffinden der Magnetfeldwerte mit $\Phi^{(1)} = n \cdot P_{\Phi^{(1)}}$ in Frage stellen. Da die Bedingung (A) nicht erfüllt ist, besitzen arithmetische Netzwerke eine endliche Periode $P_{\Phi^{(1)}}$, die jedoch sehr groß sein kann.

Flächenverteilungen, die beide Bedingungen (A) und (B) erfüllen, werden unkonventionell genannt. Besitzt ein seriell Netzwerke eine solche unkonventionelle Flächenverteilung, so ist die mittlere Spannung $\langle V \rangle$ für geeignet gewählte Transportstromwerte ausschließlich in der Umgebung von $B_{\perp}^{(1)} = 0$ eine eindeutige Funktion von $B_{\perp}^{(1)}$. Aufgrund dieser Filtereigenschaft werden solche Netzwerke als serielle Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter (SQIF) bezeichnet. Sie können aufgrund der Eindeutigkeit ihrer Spannungsantwort zur *absoluten* Messung primärer Magnetfelder verwendet werden. So kann z.B. mit einer Anordnung von geeigneten Spulen ein Magnetfeld erzeugt werden, das sich dem zu messenden primären Magnetfeld überlagert. Das serielle SQIF-Netzwerk ermöglicht dann die genaue Bestimmung des Kompensationsfeldes $\mathbf{B}^{(c)}$ mit $B_{\perp}^{(1)} + B_{\perp}^{(c)} = 0$. Aus den Kompensationsströmen und der Spulengeometrie kann dann die Komponente $B_{\perp}^{(1)}$ des primären Magnetfeldes bestimmt werden. Eine vollständige Messung des Vektors $\mathbf{B}^{(1)}$ erfordert eine SQIF-Anordnung, die alle Richtungen des dreidimensionalen Raums abdeckt. Dies kann durch drei einzelne planare SQIFs realisiert werden, oder durch ein einziges SQIF-Netzwerk, bei dem die Normalenvektoren der Flächen eine Basis des dreidimensionalen Raums bilden.

Anhand des speziellen seriellen Netzwerks, das in den experimentellen Schaltungen realisiert ist, werden nachfolgend die Eigenschaften serieller SQIFs diskutiert. Die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken wurden durch numerische Integration der Netzwerkgleichungen (3.18) bestimmt. Da das Design der experimentellen Schaltungen in Abschnitt 4.1 ausführlich dargestellt wird, genügt hier eine kurze Beschreibung der hier relevanten Daten. Das Netzwerk besteht aus $M = 29$ Schlaufen, d.h. insgesamt $N = 58$ Josephson-Kontakten. Die Schlaufenflächen des seriellen Netzwerks sind zwischen der minimalen Fläche $a_{\min} = 29.25 \mu\text{m}^2$ und der maximalen Fläche $a_{\max} = 165.75 \mu\text{m}^2$ verteilt und die Gesamtfläche aller $M = 29$ Schlaufen beträgt

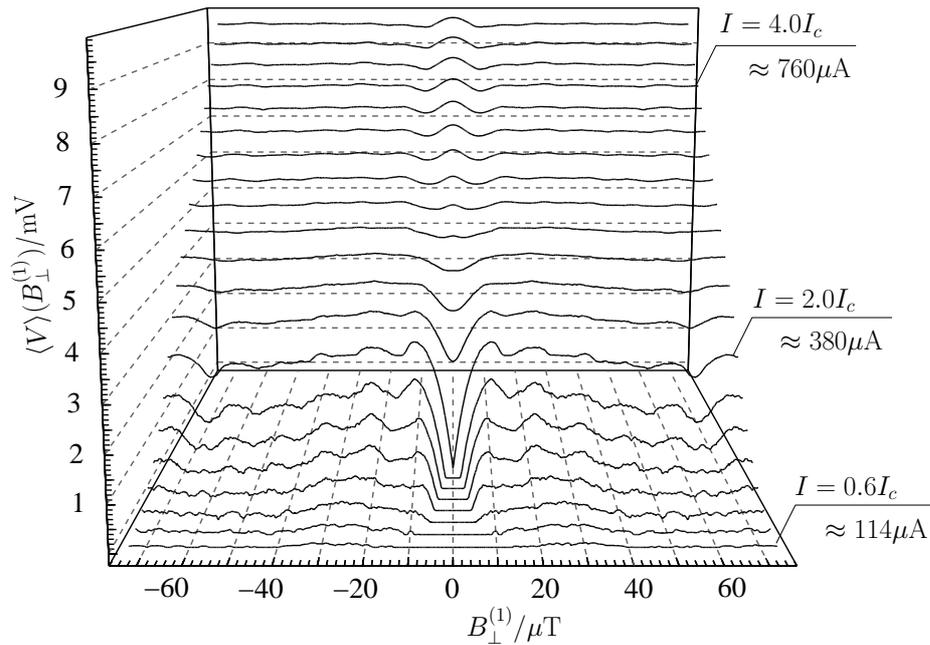


Abbildung 3.10: Theoretische Spannungsantwort $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ des seriellen SQIFs mit $M = 29$ Schlaufen und $N = 58$ Josephson-Kontakten. Der Transportstrom I wird bei $I = 0.6 I_c \approx 114 \mu\text{A}$ beginnend in Schritten von $0.2 I_c$ bis zum maximalen Wert $I = 4.6 I_c \approx 874 \mu\text{A}$ erhöht.

$A_{\text{tot}} = 2717 \mu\text{m}^2$. Die gewählte Flächenverteilung entspricht der des parallelen Netzwerks aus Abschnitt 2.7. Die Josephson-Kontakte sind in Standard $Nb\text{-}AlO_x\text{-}Nb$ Technologie hergestellt und jeder Kontakt besitzt einen kritischen Strom $I_c = 190 \mu\text{A}$, einen Shunt-Widerstand $R = 0.8 \Omega$ und einen McCumber-Parameter $\beta_C \approx 0.5$. Die Induktivitätsparameter der Schlaufen besitzen Werte zwischen $\beta_{L,\text{min}} \approx 0.1$ für die kleinste Schlinge und $\beta_{L,\text{max}} \approx 0.5$ für die größte Schlinge. Da es sich um ein explizites Design eines seriellen Netzwerks handelt, werden im Folgenden alle Größen in SI-Einheiten angegeben, d.h. die mittlere Spannung in Einheiten von Volt, der Transportstrom in Ampère und das primäre Magnetfeld $B_{\perp}^{(1)}$ in Tesla. Für die numerischen Rechnungen wurden für alle Kontakte identische Parameter angenommen.

Abbildung 3.10 zeigt die theoretische Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik des seriellen Netzwerks in der Umgebung von $B_{\perp}^{(1)} = 0$ für verschiedene Werte des Transportstroms I . Dieser wird bei $I = 0.6 I_c \approx 114 \mu\text{A}$ beginnend in Schritten von $0.2 I_c$ bis zum Wert $I = 4.6 I_c \approx 874 \mu\text{A}$ erhöht. Da I per Definition den Gesamtstrom durch das serielle Netzwerk bezeichnet, ist der mittlere Strom pro Kontakt durch $I/2$ gegeben. Für kleine Werte des Transportstroms $I < 2I_c$, für die der mittlere Strom pro Kontakt kleiner I_c ist, existiert ein Magnetfeldbereich innerhalb dem keine Spannung über das serielle Netzwerk abfällt $\langle V \rangle = 0$. Für diese Werte des primären Magnetfeldes sind die kritischen Ströme aller Schlingen größer als I , so dass durch alle Kontakte ausschließlich Supraströme fließen. Dieser $B_{\perp}^{(1)}$ -Bereich verschwindender Spannung wird für zunehmende Werte von I immer kleiner, bis bei Erreichen von $I = 2.0 I_c$ der Spannungsabfall $\langle V \rangle$ nur noch bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ verschwindet. Für alle Transportströme $I > 2.0 I_c$ ist der

mittlere Spannungsabfall dann für alle Magnetfeldwerte endlich $\langle V \rangle > 0$. Liegt I im Intervall $2.0 I_c \leq I \leq 2.8 I_c$, so besitzt die Spannungsantwort bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ ein signifikantes Minimum, das für Transportströme $I \approx 2.0 I_c$ am deutlichsten ausgeprägt ist. Der Spannungshub, d.h. die Differenz zwischen dem minimalen und maximalen Spannungswert $\langle V \rangle_{\min} = \langle V \rangle(0)$ bzw. $\langle V \rangle_{\max}$ nimmt für zunehmenden Transportstrom I ab. Mit $\langle V \rangle_{\max}$ wird dabei der Spannungswert bezeichnet, der am direkt zu $\langle V \rangle_{\min}$ benachbarten Maximum erreicht wird. Der maximale Spannungshub für $I = 2.0 I_c$ beträgt $\Delta V \approx 3 \text{ mV}$ und ist ungefähr um das 30-fache größer als der des parallelen Netzwerks aus Abschn. 2.7. Der Faktor ≈ 30 ist damit zu erklären, da es sich beim seriellen Netzwerk um eine Serienschaltung von $M = 29$ Schlaufen handelt. Wird der Transportstrom über den Wert $I = 2.8 I_c$ erhöht, so bildet sich in der Umgebung von $B_{\perp}^{(1)} = 0$ eine Hut-förmige Struktur aus, d.h. ein lokales Maximum bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$, das von zwei Minima zu jeder Seite symmetrisch umgeben wird. In diesem Fall liegen die charakteristischen Frequenzen der Josephson-Ströme in der Nähe der Resonanzfrequenzen einiger Schlaufen. Die LC-Resonanzen in diesen Schlaufen werden durch die oszillierenden Ströme angeregt, so dass die betreffenden Schlaufen im ac-resonanten Modus arbeiten. Wie in Abschnitt 3.3.2 erklärt wurde, führt dies zur Hut-förmigen Struktur in der Spannungsantwort des seriellen Netzwerks. Da für $I = 2.8 I_c$ nur wenige Schlaufen im ac-resonanten Modus sind, ist das lokale Maximum nur schwach ausgeprägt. Bei weiterer Erhöhung von I "schalten" immer mehr Schlaufen in den resonanten Modus und das lokale Maximum hebt sich signifikant von den umliegenden Minima ab. Für sehr große Werte $I > 4.6 I_c$ wird die Modulation der Gesamtspannung wieder kleiner, bis sie für $I \gg I_c$ ganz verschwindet. Dann zeigt das serielle Netzwerk ohmsches Verhalten $\langle V \rangle \approx M R I / 2$ und die Gesamtspannung $\langle V \rangle$ wird unabhängig vom primären Magnetfeld.

Abb. 3.11 zeigt die Spannungsantwort des seriellen Netzwerks über einen großen Magnetfeldbereich. Abb. 3.11 (a) gilt für den Fall, dass das Design der Schlaufenflächen exakt realisiert werden kann. In diesem Fall besitzt die Spannungsantwort eine endliche Periode, da bei der Strukturierung der supraleitenden Schichten beim verwendeten Prozess nur Positionen auf einem Raster der Kantenlänge $\Delta l = 0.5 \mu\text{m}$ zulässig sind. Da die Flächenverteilung des seriellen Netzwerks der Flächenverteilung des parallelen Netzwerks aus Abschn. 2.7 gleicht, besitzen beide Netzwerke dieselbe theoretische Magnetfeldperiode von $P_{B^{(1)}}^{(\text{theo})} \approx 0.64 \text{ mT}$. Es sei betont, dass dieser Wert ein theoretischer Wert ist, der nur für den Fall gilt, dass die Schlaufenflächen im Experiment exakt dem Design entsprechen. Dann erfüllt das serielle Netzwerk zwar nicht Bedingung (A) aber Bedingung (B) ist erfüllt, so dass die Spannungsantwort zwar eine endliche Periode $P_{B^{(1)}}$ besitzt, sich in Abb. 3.11 (a) die verbleibenden Minima bei $B_{\perp}^{(1)} = n \cdot P_{B^{(1)}}$ aber signifikant abheben.

Aufgrund der imperfekten Realisierung des Netzwerks bei der Herstellung streuen die tatsächlichen Schlaufenflächen bei der experimentellen Schaltung. Diese strukturellen Streuungen haben einen entscheidenden Einfluss auf die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik des seriellen Netzwerks. Abb. 3.11 (b) zeigt die Spannungsantwort

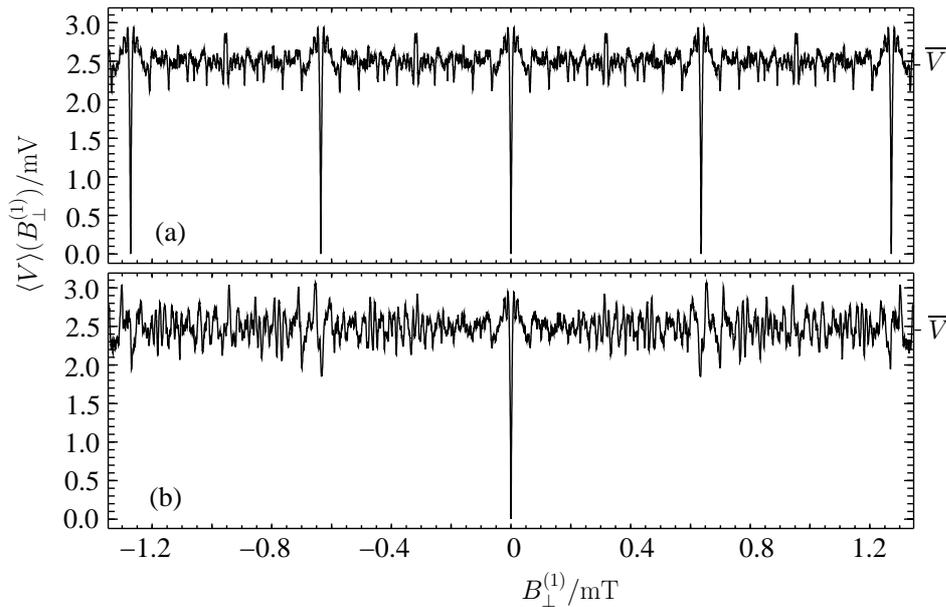


Abbildung 3.11: Theoretische Spannungsantwort $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ des seriellen SQIFs mit $N = 58$ Josephson-Kontakten für $I = 2.0 I_c \approx 380 \mu A$. Entsprechen die Schlaufenflächen exakt dem vorgegebenen Design, so besitzt die Spannungsantwort eine endliche Periode und kein Minimum ist ausgezeichnet (Teilbild (a)). Weichen die Flächen unsystematisch von den Flächen in (a) ab, so verschwinden alle Minima bei endlichen Magnetfeldwerten und nur das Minimum bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ bleibt erhalten. Die Flächen in (b) weichen um maximal $\pm 2\%$ von den Flächen in (a) ab.

nachdem die Flächeninhalte um maximal 2% unsystematisch um ihren vorigen Wert gestreut wurden. Aufgrund der unsystematischen Streuung sind die Flächeninhalte nun inkommensurabel, so dass die Magnetfeldperiode $P_{B^{(1)}}$ divergiert. Dies bedeutet, dass alle Minima bei endlichen Magnetfeldwerten verschwinden und ausschließlich das Minimum bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ erhalten bleibt. Für alle endlichen Magnetfeldwerte $|B_{\perp}^{(1)}| > 0$ moduliert die mittlere Spannung nun mit kleiner Amplitude um den mittleren Wert \bar{V} . Dies gilt selbst für die Magnetfeldwerte $B_{\perp}^{(1)} = n \cdot P_{B^{(1)}}$, an denen im Fall (a) globale Minima auftreten. Die Gestalt des globalen Minimums bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ hingegen wird von den strukturellen Streuungen (fast) nicht beeinflusst. Der Spannungshub ΔV , der maximale Transferfaktor $V_{B^{(1)}} = \left| \partial_{B_{\perp}^{(1)}} \langle V \rangle \right|_{\max}$ und somit die Magnetfeldsensitivität bleiben dort erhalten.

Die experimentellen Ergebnisse aus Abschn. 4.2.2 zeigen, dass die experimentellen seriellen Netzwerke tatsächlich nur bei $B_{\perp}^{(1)}$ eine signifikante Struktur besitzen, die je nach Wert des Transportstroms I ein globales Minimum oder ein Maximum sein kann. Dies bestätigt, dass es sich bei den experimentellen Schaltungen tatsächlich um Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter handelt und die realisierte Flächenverteilung tatsächlich unkonventionell ist.

Abschließend wird noch der Fall diskutiert, dass ein serielles Netzwerk die Bedingung inkommensurabler Flächen (A) erfüllt aber die Bedingung wesentlich verschiedener

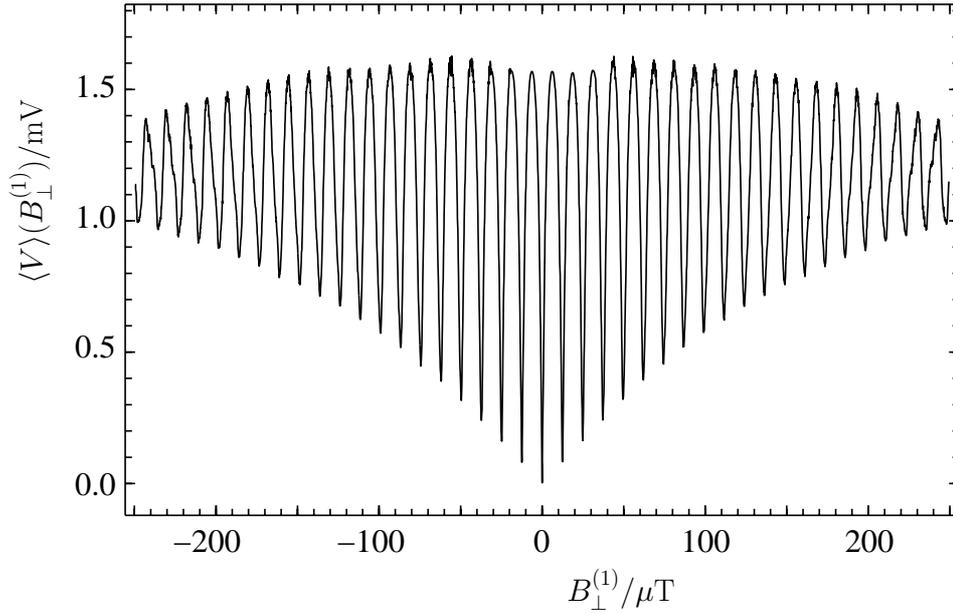


Abbildung 3.12: Theoretische Spannungsantwort $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ des regulären Netzwerks mit $M = 16$ Schlaufen und $N = 32$ Josephson-Kontakten. Die Flächen der Schlaufen weichen um maximal $\pm 2\%$ von den idealen regulären Flächeninhalten ab. Der Transportstrom I beträgt $I = 2.0 I_c \approx 380 \mu\text{A}$.

Flächen (B) verletzt wird. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn bei einem regulären Netzwerk die Schlaufenflächen unsystematisch vom idealen Flächeninhalt abweichen. Dann ergibt sich zwar streng mathematisch eine unendlich große Periode $P_{B(1)} \rightarrow \infty$, aber die Spannungsantworten besitzen kein signifikant ausgezeichnetes Extremum. Abb. 3.12 zeigt die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik eines regulären seriellen Netzwerks, bei dem die Flächeninhalte um maximal $\pm 2\%$ streuen. Die Spannungsantwort besitzt eine Φ_0 -periodische Struktur von Minima, deren Amplituden durch das aperiodische Interferenzmuster der Flächenfluktuationen moduliert werden (siehe z.B. [87, 97, 98]). Eine derartige Kennlinie erlaubt vermutlich keinen einfachen geeigneten Betriebsmodus. Wird die Abweichung der Flächen untereinander noch weiter erhöht, so verschwinden auch hier die Minima für endliche Magnetfelder $|B_{\perp}^{(1)}| > 0$, da dann eine unkonventionelle Flächenverteilung entsteht. Dies ist dann erfüllt, wenn die Summe der Flächenfluktuationen die Größenordnung einer Schlaufenfläche erreicht.

Das folgende Kapitel beschreibt die experimentellen SQIF-Schaltungen in Niob-Technologie und die mit diesen SQIFs gewonnenen ersten experimentellen Ergebnisse.

Kapitel 4

Erste Experimente mit Supraleitenden Quanten-Interferenz-Filtern

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der ersten Experimente mit Supraleitenden Quanten-Interferenz-Filtern (SQIF) vorgestellt und diskutiert. Diese Ergebnisse wurden an einem parallelen und einem seriellen prototypischen SQIF gewonnen, die mit Hilfe der theoretischen Modelle der vorigen Kapitel konzipiert wurden, um die theoretischen Vorhersagen zu überprüfen. Zu Beginn werden die zwei Layouts der experimentellen SQIF-Schaltungen vorgestellt und die relevanten Parameter der Schaltungen (wie Kontaktparameter und geometrische Abmessungen) werden erläutert. Nachfolgend werden die Strom-Spannungs- und Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken des parallelen und des seriellen SQIFs präsentiert. Es wird gezeigt, dass die experimentellen Spannungsantworten der beiden SQIFs die theoretischen Vorhersagen bestätigen.

4.1 SQIFs auf der Basis metallischer Tieftemperatur-Supraleiter: SQIF-Chip-Layouts

Auf der Basis der in den vorigen Kapiteln 2 und 3 entwickelten Theorie wurden Schaltungen mit parallelen und seriellen Supraleitenden Quanten-Interferenz-Filtern entworfen und gefertigt.¹ Die Chips wurden in einer Standard Niob-Technologie hergestellt, die vier strukturierbare supraleitende Schichten zulässt. Bei der Strukturierung der supraleitenden Schichten sind Positionen auf einem Raster der Kantenlänge $\Delta l = 0.5 \mu\text{m}$ möglich. Zur Herstellung supraleitungselektronischer Schaltungen eignet sich Niob besonders gut, da es mit $T_{c,\text{Niob}} = 9.2\text{K}$ eine sehr hohe Sprungtemperatur unter den Tieftemperatursupraleitern besitzt und als metallischer Supraleiter thermisch stabil

¹Die Chips wurden von HYPRES Inc. anhand vorgegebener Layouts gefertigt.

ist. Damit behalten die supraleitenden Schaltungen auch nach einer Vielzahl thermischer Zyklen ihre Eigenschaften und ihre Funktionalität bei. Die Tunnelkontakte wurden durch Niob-Aluminiumoxid-Niob (kurz Nb-Al₂O₃-Nb) Übergänge realisiert, die beim verwendeten Prozess mit einer hohen Reproduzierbarkeit und Definierbarkeit der Kontaktparameter herstellbar sind. Die fertigen Schaltungen befinden sich auf einem Silizium-Substrat der Größe 5mm × 5mm.

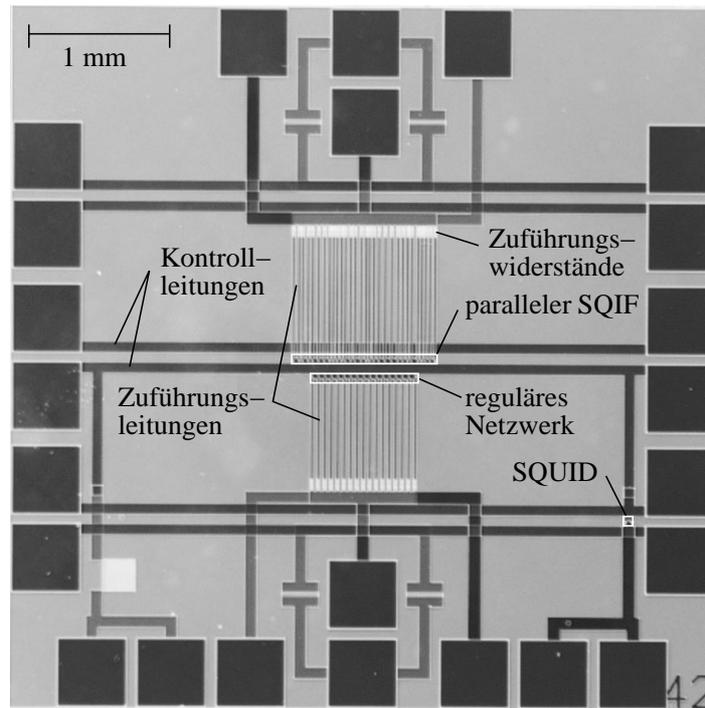
Die in diesem Kapitel beschriebenen SQIF-Chips sind prototypische Schaltungen, d.h. die Designs der Schaltungen wurden mit dem Ziel entworfen, die prinzipiellen Vorhersagen der theoretischen Modelle experimentell zu überprüfen. Aus diesem Grund sind die gebauten SQIFs nicht auf Empfindlichkeit optimiert. Die nachfolgend diskutierten Kennlinien und Messwerte der SQIFs (wie Transferfaktor und Spannungshub) sind deshalb nicht optimal. Durch geeignete Auslegung der SQIF-Schaltungen können diese Werte noch wesentlich verbessert werden. Für die Realisierung der SQIF-Prototypen wurde der Niob-Prozess gewählt, da er mit vier supraleitenden Schichten auch komplizierte Schaltungen ermöglicht.² Die hohe Qualität und Güte der Schaltungen in Niob-Technologie sind nach den theoretischen Vorhersagen für eine Realisierung von Supraleitenden Quanten-Interferenz-Filtern nicht notwendig aber für den Bau prototypischer Schaltungen von Vorteil.

Abb. 4.1 (a) zeigt eine Fotografie des experimentellen Chips, der einen parallelen SQIF mit $N = 30$ Josephson-Kontakten, ein reguläres Netzwerk mit $N_r = 17$ Kontakten, ein dc SQUID und mehrere Leitungen besitzt. Die Leitungen können einzeln an externe Messgeräte und Stromversorgungen angeschlossen werden. Eine mikroskopische Aufnahme eines Chip-Segments mit Teilen des SQIFs und des regulären Netzwerks ist in Abb. 4.1 (b) dargestellt. Der parallele SQIF befindet sich in der Chipmitte und wird von zwei identischen Kontrollleitungen umgeben. Die Kontrollleitungen verlaufen in gleichen Abständen parallel zu den Elektroden des SQIFs und können zur Erzeugung eines lokalen Magnetfeldes bestromt werden. Dem parallelen SQIF gegenüber, an die untere Kontrollleitung angrenzend, liegt das reguläre Netzwerk. Beide Netzwerke besitzen Leitungen mit denselben Dimensionen und den gleichen Abstand zur unteren Kontrollleitung. Auf diese Weise kann die Spannungsantwort des parallelen SQIFs direkt mit Hilfe der Spannungsantwort des regulären Netzwerks kalibriert werden. Das dc SQUID befindet sich am rechten Chiprand und besitzt ebenfalls zwei Kontrollleitungen, so dass die Spannungsantwort des dc SQUID ebenfalls zur Kalibration verwendet werden kann.

Die insgesamt $M = 29$ Schlaufenflächen des parallelen SQIFs variieren zwischen dem kleinsten Flächeninhalt $a_{\min} = 4.5 \mu\text{m} \times 6.5 \mu\text{m}$ und dem größten Flächeninhalt $a_{\max} = 25.5 \mu\text{m} \times 6.5 \mu\text{m}$. Die unterschiedlichen Flächeninhalte der Schlaufen des SQIFs sind in Abb. 4.1 (b) deutlich zu erkennen. Die effektive Gesamtfläche des SQIFs, d.h. die Summe aller Schlaufenflächen, beträgt $2717 \mu\text{m}^2$. Die Schlaufen sind im Netz-

²Bei der Verwendung von Hochtemperatursupraleitern wie YBCO steht häufig nur eine einzige supraleitende Schicht zur Verfügung. Dies schränkt die Klasse realisierbarer supraleitungselektronischer Schaltungen deutlich ein.

(a)



(b)

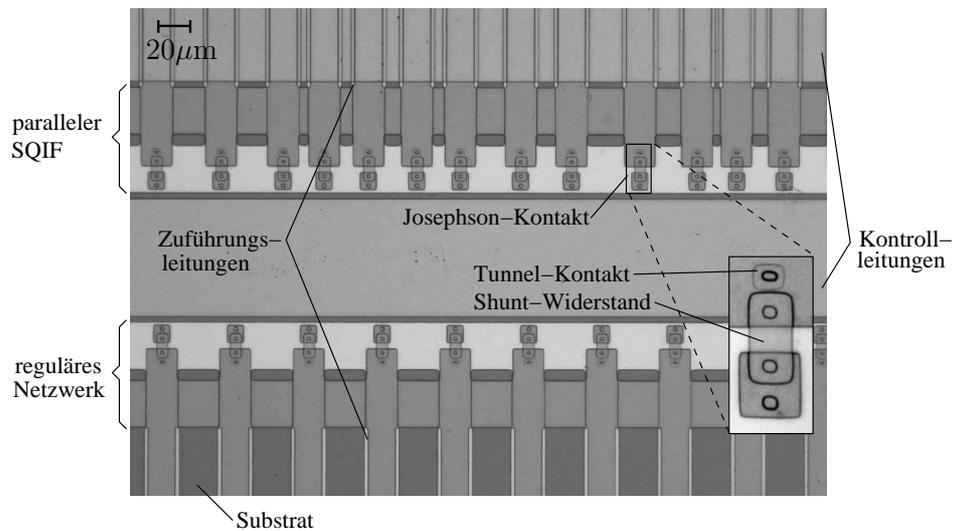


Abbildung 4.1: (a) Fotografie des experimentellen Chips mit dem parallelen Quanten-Interferenz-Filter. Der parallele SQIF befindet sich in der Chipmitte und besitzt $N = 30$ Josephson-Kontakte, d.h. insgesamt $M = 29$ Schlaufen. Dem SQIF gegenüber liegt ein paralleles reguläres Netzwerk mit $N_r = 17$ Josephson-Kontakten. Mit Hilfe des regulären Netzwerks und des dc SQUIDs am rechten Chiprand können die Schaltungen kalibriert werden. Die Schaltungen wurden in Niob-Dünnschichttechnologie hergestellt. (b) Fotografie eines Segments des experimentellen Chips. Der parallele SQIF (oben) und das reguläre Netzwerk (unten) liegen sich gegenüber und können getrennt voneinander über die Zuführungsleitungen bestromt werden. Zwischen den beiden Netzwerken verläuft eine der beiden Kontrollleitungen, zur Erzeugung eines lokalen magnetischen Kontrollfeldes. Jedem Josephson-Kontakt ist ein externer ohmscher Widerstand (Shunt-Widerstand) parallelgeschaltet.

werk derart angeordnet, dass die sekundären Magnetfelder der Netzwerkstromverteilung keine signifikante Asymmetrie besitzen. Dies stellt sicher, dass die Spannungsantwort in der Nähe verschwindenden primären Magnetfeldes $B_{\perp}^{(1)} = 0$ nahezu symmetrisch ist. Das reguläre Netzwerk besteht aus $M_r = 16$ identischen Schlaufen, die jeweils den Flächeninhalt $a = 25.5 \mu\text{m} \times 6.5 \mu\text{m}$ besitzen. Damit ist der Flächeninhalt einer Schlaufe des regulären Netzwerks identisch mit der maximalen Schlaufenfläche a_{max} des SQIFs. Die effektive Gesamtfläche des regulären Netzwerks beträgt $2652 \mu\text{m}^2$ und stimmt nahezu mit der Gesamtfläche des SQIFs überein. Dies ermöglicht einen direkten Vergleich der Spannungsantwort des SQIFs mit der Spannungsantwort des regulären Netzwerks. Das dc SQUID besteht aus einer einzigen Schlaufe mit zwei Josephson-Kontakten und besitzt ebenfalls eine Schlaufenfläche von $a = 25.5 \mu\text{m} \times 6.5 \mu\text{m} = 165.75 \mu\text{m}^2$.

Bei allen drei Netzwerken sind die Josephson-Kontakte in Standard Nb-Al₂O₃-Nb-Mehrlagentechnik hergestellt und jedem Kontakt ist ein Dünnschicht-Widerstand mit $R = 0.8 \Omega$ extern parallel geschaltet. Damit sind die Kontakte nicht-hysteretisch und besitzen konstante Ohmsche Widerstände. Das Verhalten der verwendeten Kontakte ist sehr gut mit Hilfe des RCSJ-Modells modellierbar [67], das als Strom-Phase-Beziehung bei der theoretischen Beschreibung der Netzwerke in den Kapiteln 2 und 3 verwendet wurde. Mit Hilfe der theoretischen Modelle wurden die Kontakt-Parameter für die SQIF-Schaltungen optimiert. Die mikroskopische Aufnahme eines Kontaktes ist in Abb. 4.1 (b) dargestellt. Die laterale Ausdehnungen eines Tunnelkontaktes betragen $4 \mu\text{m} \times 5 \mu\text{m}$, woraus sich die Werte der Kontakt-Parameter ergeben. Die Werte der kritischen Ströme der Kontakte $I_{c,n}$ und die McCumber-Parameterwerte $\beta_{C,n}$ sind im Design für alle Kontakte identisch zu $I_c = I_{c,n} \approx 190 \mu\text{A}$ und $\beta_{C,n} = \beta_C \approx 0.5$ (d.h. $C \approx 1.35 \text{ pF}$) gewählt. Damit ergibt sich ein $I_c R$ -Produkt von $I_c R \approx 152 \mu\text{V}$. Die Geometrien der Netzwerke sind derart gewählt, dass die β_L -Parameter Werte zwischen $\beta_{L,\text{min}} \approx 0.1$ (d.h. $L_{\text{min}}^{(s)} \approx 1.1 \text{ pH}$) für die kleinste Schlaufe a_{min} und $\beta_{L,\text{max}} \approx 0.5$ (d.h. $L_{\text{max}}^{(s)} \approx 5.4 \text{ pH}$) für die größte Schlaufe a_{max} besitzen. Mit diesen Parameterwerten ergibt sich die charakteristische Frequenz der Netzwerke zu $\nu = (2e/h) I_c R \approx 73.5 \text{ GHz}$. Für die Resonanzfrequenzen der größten und kleinsten Schlaufe a_{max} und a_{min} folgt aus (2.111) $\nu_{a_{\text{max}}}^{(\text{res})} = 83.1 \text{ GHz}$ und $\nu_{a_{\text{min}}}^{(\text{res})} = 185.7 \text{ GHz}$. Damit liegt die charakteristische Frequenz ν in der gleichen Größenordnung wie die Resonanzfrequenzen der LC-Resonanzen des parallelen SQIFs, des regulären Netzwerks und des dc SQUIDs, so dass bei allen drei Netzwerken LC-resonante Spannungsantworten zu erwarten sind.

Um eine möglichst homogene Transportstromversorgung des SQIFs und des regulären Netzwerks zu erreichen, sind die Transportstromleitungen bei beiden Netzwerken kammförmig ausgelegt. Damit entsprechen die experimentellen Netzwerke dem in Kapitel 2 diskutierten theoretischen Modell (s. Abb. 2.1 (b)). Dabei liegen die Zuführungsleitungen direkt über den Extraktionsleitungen, so dass der Transportstrom keine zusätzlichen sekundären Magnetfelder in der Umgebung der Netzwerke erzeugt (s. Abb. 4.1 (b)). Mit einer derartigen gespiegelten Stromzufuhr wird der Einfluss des Transportstroms auf die Dynamik der Netzwerke minimiert. Am Ende jedes Kamms, weit entfernt von

den Netzwerken, münden die Transportstromleitungen über Ohmsche Widerstände in eine gemeinsame Elektrode. Diese Widerstände sind die Zuführungswiderstände $R_n^{(Z)}$ und $R_n^{(A)}$ aus Abschnitt 2.2.3. Ihre Werte sind im Design zu $R_n^{(Z)} = R_n^{(A)} = 0.25 \Omega$ gewählt. Der Wert für die Zuführungswiderstände wurde absichtlich kleiner als der Wert der Ohmschen Shunt-Widerstände $R = 0.8 \Omega$ gewählt, damit der zusätzliche Spannungsabfall über die Widerstände $R_n^{(Z)}$ und $R_n^{(A)}$ nicht größer ist als der zu erwartende mittlere Spannungsabfall $\langle V \rangle$ über die Netzwerke. Der Spannungsabfall über die Zuführungswiderstände wurde bei allen im Folgenden vorgestellten Messergebnissen subtrahiert.³

Abbildung 4.2 zeigt eine Fotografie des experimentellen Niob-Chips, der den seriellen Quanten-Interferenz-Filter enthält. Teilabbildung (a) zeigt die ganze Schaltung und in (b) ist eine mikroskopische Aufnahme eines SQIF-Segments dargestellt. Der serielle SQIF besitzt $N = 58$ Josephson-Kontakte und damit $M = 29$ Schlaufen. Der serielle SQIF befindet sich in der Mitte des Chips und kann über die Zuführungsleitungen bestromt werden. Zu beiden Seiten des seriellen SQIFs verlaufen parallel zwei identische Kontrollleitungen, die durch Bestromung zur Erzeugung eines lokalen Magnetfeldes verwendet werden können. Die Gradientenleitungen am linken und rechten Rand können zur Kompensation oder Erzeugung eines magnetischen Gradientenfeldes dienen. Am rechten Rand des Chips befindet sich zwischen den beiden Kontrollleitungen ein dc SQUID, der als Referenz-SQUID dient. Die Abstände zwischen dem dc SQUID und den Kontrollleitungen sind identisch mit den Abständen zwischen dem seriellen SQIF und den Kontrollleitungen. Damit kann die Spannungsantwort des dc SQUIDs zur Kalibration der Spannungsantworten des SQIFs verwendet werden. Die Schlaufenverteilung des seriellen SQIFs ist gleich der oben beschriebenen Schlaufenverteilung des parallelen SQIFs. Die Josephson-Kontakte des seriellen SQIFs sind von gleicher Bauart und besitzen dieselben Parameter wie beim parallelen SQIF. Die Zuführungs-, Kontroll-, und Gradientenleitungen haben untereinander keinen galvanischen Kontakt und können somit unabhängig voneinander bestromt werden.

³Der Spannungsabgriff erfolgt beim gewählten Design *vor* den Zuführungswiderständen, d.h. der Spannungsabfall über die Widerstände $R_n^{(Z)}$ und $R_n^{(A)}$ wird mitgemessen. In einem modifizierten Design könnte die Spannung $\langle V \rangle$ über das Netzwerk auch *direkt* an den Elektroden des Netzwerks abgegriffen werden.

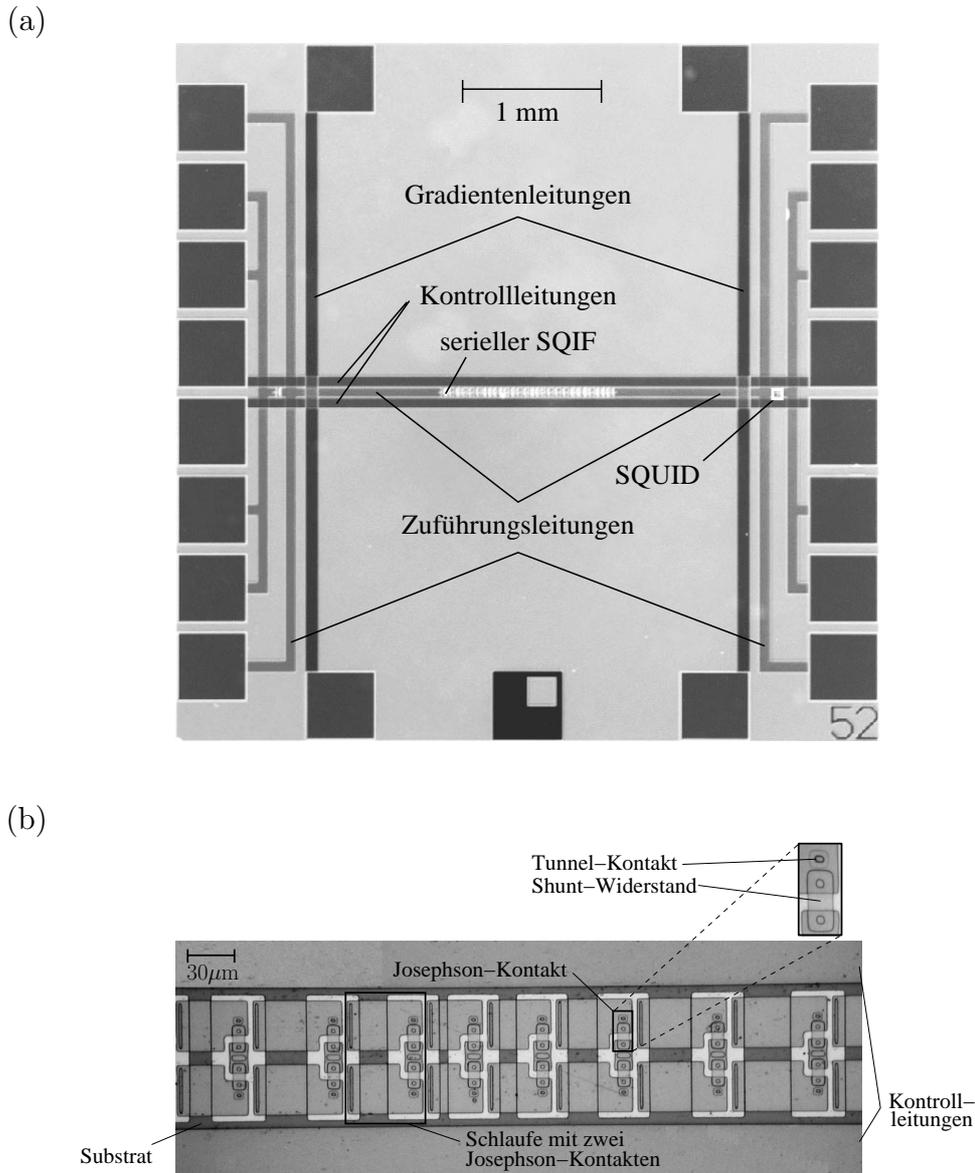


Abbildung 4.2: (a) Fotografie des experimentellen Chips mit dem seriellen Quanten-Interferenz-Filter. Der serielle SQIF befindet sich in der Chipmitte und besitzt $N = 58$ Josephson-Kontakte, d.h. insgesamt 29 Schlaufen. Der SQIF kann über die Zuführungsleitungen bestromt werden und die beiden Kontrollleitungen dienen zur Erzeugung eines lokalen magnetischen Kontrollfeldes am Ort des SQIFs. Mit Hilfe des dc SQUIDS am rechten Chiprand kann der serielle SQIF kalibriert werden. Die Schaltung wurde in Niob-Dünnschichttechnologie hergestellt. (b) Fotografie eines Segments des experimentellen SQIFs. Zu beiden Seiten des SQIFs verlaufen parallel die Kontrollleitungen. Jedem Josephson-Kontakt ist ein externer ohmscher Widerstand (Shunt-Widerstand) parallelgeschaltet.

4.2 Erste experimentelle Ergebnisse

Die nachfolgend diskutierten experimentellen Ergebnisse wurden an den SQIF-Schaltungen der Abbildungen 4.1 und 4.2 gewonnen. Bei den Messungen befanden sich die SQIF-Chips in einem Helium-Kryostaten und wurden lokal durch Kryoperm-Schirme magnetisch abgeschirmt. Trotz dieser Abschirmung existierte am Ort des Chips ein magnetisches Restfeld $\mathbf{B}^{(\text{ext})}$, das aufgrund imperfekter Abschirmung übrig blieb oder von Quellen innerhalb der Abschirmung stammte. Zur Erzeugung eines kontrollierbaren Magnetfeldes $\mathbf{B}^{(c)}$ wurden die Kontrollleitungen auf den Chips bestromt. Damit war das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ am Ort der Netzwerke eine Superposition der Magnetfelder $\mathbf{B}^{(\text{ext})}$ und $\mathbf{B}^{(c)}$, d.h. $\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{B}^{(\text{ext})} + \mathbf{B}^{(c)}$. Da es sich bei den experimentellen Schaltungen um planare Netzwerke handelt, sind nur die Komponenten $B_{\perp} = \langle \mathbf{B}, \mathbf{n} \rangle$ senkrecht zur Chip-Normalen \mathbf{n} von Bedeutung. Zur Kalibration der Messkurven bezüglich des magnetischen Kontrollfeldes $B_{\perp}^{(c)}$ wurde im Fall des parallelen SQIFs die Spannungsantwort des regulären Netzwerks verwendet und im Fall des seriellen SQIFs die Spannungsantwort des Referenz-SQUIDs. Dabei wurde bei der Umrechnung des Kontroll-Stroms $I^{(c)}$ in das Magnetfeld $B_{\perp}^{(c)}$ ein homogenes Feld $\mathbf{B}^{(c)}$ angenommen.⁴ Dies bedeutet, dass $B_{\perp}^{(c)}$ im Folgenden der Normalenkomponente eines effektiven homogenen Kontrollfeldes entspricht. Die Kontroll- und Transportströme der Netzwerke wurden von externen Stromquellen erzeugt und alle Spannungsantworten wurden mittels einer Vierpunkt-Messung bestimmt. Die nachfolgend vorgestellten experimentellen Resultate waren in vielen Experimenten und über einen Zeitraum von mehreren Monaten identisch reproduzierbar und auch nach einer Vielzahl von thermischen Zyklen unverändert. Dies bedeutet, dass die Niob-Chips und die SQIF-Schaltungen zuverlässig einsetzbar sind und ihre Eigenschaften beibehalten.

4.2.1 Experimentelle Spannungsantwort des parallelen SQIFs

Abbildung 4.3 zeigt die experimentellen Transportstrom-Spannungs-Charakteristiken des parallelen SQIFs. Bei jeder Kurve wurde für einen festen Wert des magnetischen Kontrollfeldes $B_{\perp}^{(c)}$ die mittlere Spannung $\langle V \rangle$ über den SQIF in Abhängigkeit des Transportstroms I gemessen. Im Teilbild 4.3 (a) ist in einer dreidimensionalen Darstellung eine I - $\langle V \rangle$ -Kurvenschar für den Magnetfeldbereich $|B_{\perp}^{(c)}| \leq 50 \mu\text{T}$ dargestellt. Für jede der Kennlinien existiert ein Bereich des Transportstroms, für den keine Spannung über das Netzwerk abfällt. Beim maximalen Wert des Transportstroms, für den bei festem $B_{\perp}^{(c)}$ die Spannung noch verschwindet, ist der kritische Netzwerkstrom $I_{c,\text{SQIF}}$ erreicht. Wie Abb. 4.3 (a) zeigt, hängt der kritische Strom $I_{c,\text{SQIF}}$ vom Magnetfeld $B_{\perp}^{(c)}$ ab. Er nimmt in der Nähe von $B_{\perp}^{(c)} = 0$ seinen maximalen Wert $\max(I_{c,\text{SQIF}}) \approx 5.7 \text{ mA}$ an und ist für *alle* $|B_{\perp}^{(c)}| > 0$ signifikant kleiner $I_{c,\text{SQIF}} < 5.0 \text{ mA}$. Die Tatsache, dass

⁴In Wirklichkeit ist das vom Strom $I^{(c)}$ erzeugte Magnetfeld $\mathbf{B}^{(c)}$ inhomogen und nimmt mit zunehmendem Abstand von der Kontrollleitung ab. Entlang der Kontrollleitung kann jedoch angenommen werden, dass das Magnetfeld $\mathbf{B}^{(c)}$ nicht variiert.

das Maximum von $I_{c,\text{SQIF}}$ in Abb. 4.3 in der Nähe von $B_{\perp}^{(c)} = 0$ auftritt, bedeutet, dass das externe magnetische Restfeld $B_{\perp}^{(\text{ext})}$ bei dieser Messung sehr klein war und somit $B_{\perp}^{(1)} \approx B_{\perp}^{(c)}$ galt.

Die Magnetfeldabhängigkeit des kritischen Netzwerkstroms $I_{c,\text{SQIF}}$ im Experiment kann mit Hilfe des magnetfeldabhängigen Strukturfaktors $S_{\text{SQIF}}(\mathbf{B}^{(1)})$ erklärt werden. Das Strukturfaktor-Modell aus Abschnitt 2.3.1 ist strenggenommen nur für den Fall $\beta_{L,\text{max}} = 0$ gültig, liefert jedoch auch für endliche Induktivitäten $\beta_{L,\text{max}} > 0$ qualitativ richtige Aussagen. In diesem Modell ist der kritische Netzwerkstrom über den Strukturfaktor S_{SQIF} des parallelen SQIFs mit der Flächenverteilung des Netzwerks verknüpft und es gilt nach (2.47) $I_{c,\text{SQIF}}^{(\text{theo})} = NI_c |S_{\text{SQIF}}|$. Die unkonventionelle Flächenverteilung von SQIFs erzwingt nun die Eindeutigkeit des kritischen Netzwerkstroms bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ und die Unterdrückung von $I_{c,\text{SQIF}}^{(\text{theo})}$ für $|B_{\perp}^{(1)}| > 0$, genauso wie es die experimentellen Kennlinien aus Abb. 4.3 zeigen. Für $B_{\perp}^{(1)} = 0$ gilt $|S_{\text{SQIF}}| = 1$, so dass für $B_{\perp}^{(1)} = 0$ der maximale kritische Netzwerkstrom $\max(I_{c,\text{SQIF}}^{(\text{theo})}) = NI_c$ erreicht wird. Der theoretische Wert $\max(I_{c,\text{SQIF}}^{(\text{theo})}) = NI_c$ stimmt für $I_c = 190 \mu\text{A}$ exakt mit dem experimentellen Wert $\max(I_{c,\text{SQIF}}) \approx 5.7 \text{ mA}$ überein, so dass die Josephson-Kontakte des experimentellen SQIFs einen mittleren kritischen Strom von $I_c \approx 190 \mu\text{A}$ besitzen.

Wird der Transportstrom über den kritischen Wert $I_{c,\text{SQIF}}$ erhöht, so fällt in Abb. 4.3 für alle Werte des Magnetfeldes $B_{\perp}^{(c)}$ eine endliche mittlere Spannung ab $\langle V \rangle > 0$, d.h. der SQIF arbeitet im resistiven Modus. Alle I - $\langle V \rangle$ -Kennlinien des SQIFs zeigen im resistiven Modus ausgeprägte Stufen, die unabhängig vom Wert des magnetischen Kontrollfeldes auftreten. Zusätzlich zu den ausgeprägten Stufen sind in Abb. 4.3 weitere kleinere Stufen zu erkennen, deren Existenz von $B_{\perp}^{(c)}$ abhängt. Bevor die Ursachen für das Auftreten der I - $\langle V \rangle$ -Stufen diskutiert werden, sei erwähnt, dass die Spannungsantwort des SQIFs trotz der Stufen die in Kapitel 2 vorhergesagten Eigenschaften besitzt. Schneidet man in Gedanken die Kurvenschar in Abb. 4.3 (a) für feste Werte des Transportstroms I parallel zur $B_{\perp}^{(c)}$ -Achse, so ergibt sich für diese Werte von I die Spannungsantwort in Abhängigkeit von $B_{\perp}^{(c)}$. Die genaue Betrachtung von Abb. 4.3 zeigt dabei, dass für bestimmte Werte von I die $\langle V \rangle$ - $B_{\perp}^{(c)}$ -Kennlinien in der Nähe von $B_{\perp}^{(c)} = 0$ (d.h. bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$) ein eindeutiges und signifikantes Verhalten besitzen. Sowohl das eindeutige Minimum als auch die Hut-förmige Struktur der LC-resonanten Spannungsantwort (s. Abschn. 2.7) treten im Experiment auf. Die experimentellen $\langle V \rangle$ - $B_{\perp}^{(c)}$ -Kennlinien werden in den nachfolgenden Betrachtungen noch ausführlich diskutiert und mit den theoretischen Vorhersagen verglichen (s. Seite 150 ff.).

Wie Abb. 4.1 zeigt, liegt der parallele SQIF zwischen zwei Kontrollleitungen, die parallel zu den Elektroden auf beiden Seiten des SQIFs verlaufen. Diese beiden Kontrollleitungen bilden eine supraleitende koplanare Streifenleitung, die als Resonator wirkt. Die fundamentale Mode dieses Resonators kann vom zeitlich oszillierenden Anteil der über das Netzwerk abfallenden Spannung $V(t)$ angeregt werden. Die Grundwelle dieser koplanaren Streifenleitung entspricht der Grundwelle bei Gegentaktanregung von gekoppelten Mikrostripenleitungen ohne leitender Grundplatte [96]. Ist der Resonator in

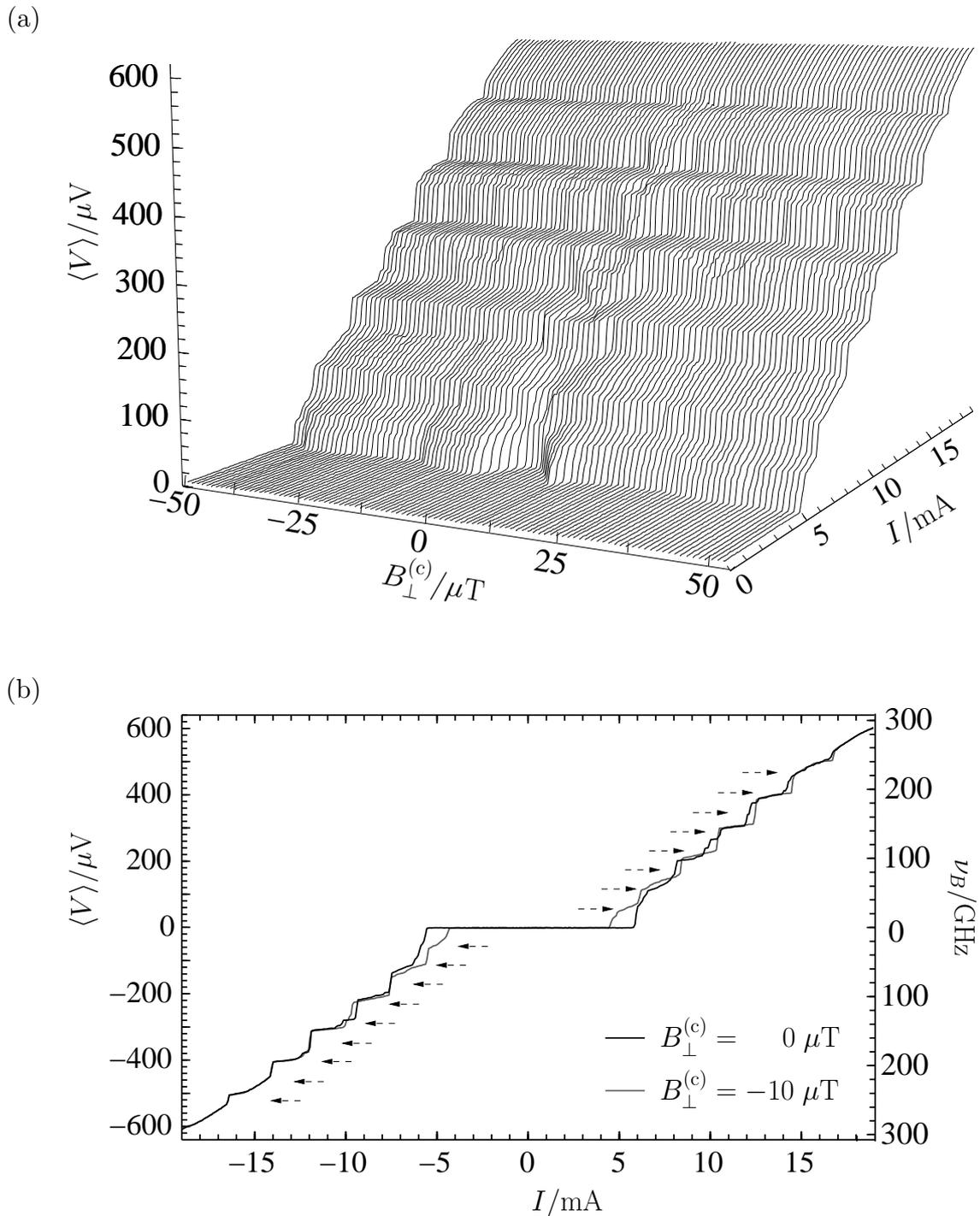


Abbildung 4.3: Experimentelle Strom-Spannungs-Kennlinien des parallelen SQIFs: (a) für verschiedene feste Werte des Magnetfeldes $B_{\perp}^{(c)}$ und (b) für $B_{\perp}^{(c)} = 0 \mu T$ bzw. $B_{\perp}^{(c)} = -10 \mu T$. Die Pfeile in (b) markieren die theoretischen Spannungswerte der I - $\langle V \rangle$ -Stufen, die von der Resonanz der koplanaren Streifenleitung erzeugt werden. In (a) und (b) wurde die an den Zuführungs-Widerständen abfallende Spannung vom experimentell bestimmten Spannungsabfall subtrahiert.

seiner fundamentalen Mode mit Frequenz ν_{f0} angeregt, so wird in das SQIF-Netzwerk eine Mikrowelle der Frequenz ν_{f0} rückgekoppelt. Da der Q-Faktor des supraleitenden Mikrostreifen-Resonators sehr groß ist, ist die Amplitude der rückgekoppelten Mikrowelle groß genug, um Spannungsstufen in den I - $\langle V \rangle$ -Kennlinien des SQIFs hervorzurufen. Der mittlere Spannungsabfall $\langle V \rangle$ des SQIFs ist über die Josephson-Relation $\langle V \rangle = h/(2e) \nu_B$ mit der charakteristischen Frequenz ν_B der Spannung $V(t)$ verknüpft. Kommt die charakteristische Frequenz ν_B in die Nähe eines ganzzahligen Vielfachen der Resonanzfrequenz ν_{f0} , so wird der Resonator stark angeregt. Die I - $\langle V \rangle$ -Stufen finden sich deshalb in der Nähe der Spannungswerte $V_{\text{Stufe},k} = k h/(2e) \nu_{f0}$ mit ($k = 1, 2, 3, \dots$). Bezeichne c die Vakuumlichtgeschwindigkeit und sei ε_{eff} die substratabhängige effektive Permittivitätszahl, so ist der theoretische Wert der Fundamentalfrequenz des Resonators durch $\nu_{f0}^{(\text{theo})} = c/(2L\sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}})$ gegeben, wobei L die Länge der Mikrostreifen ist. Mit $L = 4.1$ mm und $\varepsilon_{\text{eff}} \approx 1.7$ [96] ergibt sich $\nu_{f0}^{(\text{theo})} \approx 28$ GHz.

In Abbildung 4.3 sind sechs ausgeprägte I - $\langle V \rangle$ -Stufen vorhanden. Die erste I - $\langle V \rangle$ -Stufe ist nicht stark ausgebildet, da der Resonator nicht angeregt werden kann, bevor die Josephson-Frequenz ν_B die Resonanzfrequenz ν_{f0} erreicht. Wie Teilabbildung 4.3 (b) zeigt, sind die charakteristischen Frequenzen der ausgeprägten Stufen in akzeptablen Einklang mit dem theoretischen Wert $\nu_{f0}^{(\text{theo})} \approx 28$ GHz. Lediglich die I - $\langle V \rangle$ -Stufen zu den theoretischen Spannungswerten $\pm V_{\text{Stufe},3}$ und $\pm V_{\text{Stufe},6}$ treten im Experiment nicht auf oder sind wie $+V_{\text{Stufe},6}$ nur schwach ausgeprägt. Die ausgeprägten I - $\langle V \rangle$ -Stufen der SQIF-Schaltung zeigen zwei Besonderheiten. Zum einen besitzen die Stufenplateaus endliche Steigungen. Zum anderen treten diese Stufen für alle Werte des primären Magnetfeldes auf und die Positionen der Stufen ändern sich für $|B_{\perp}^{(c)}| > 0$ (d.h. für $|B_{\perp}^{(1)}| > 0$) qualitativ nicht. Lediglich die Breiten der Stufenplateaus und die Feinstruktur der Stufen hängen vom primären Magnetfeld ab. Die endliche Plateausteigung kann dadurch erklärt werden, dass die Resonanzkurve des Mikrostreifen-Resonators eine endliche Breite besitzt und dadurch die Rückkoppelfrequenz ν_{f0} nicht exakt festliegt. Dies bedeutet, dass der Resonator in einem Frequenzband angeregt werden kann und dadurch die Stufenspannung $V_{\text{Stufe},k}$ variiert. Die Erklärung für die Magnetfeldunabhängigkeit der Existenz der Stufen liegt in der Art der Anregung des Mikrostreifen-Resonators und in der Art der Rückkopplung der Mikrowelle in den SQIF. Der Mikrowellen-Resonator wird vom SQIF *selbst* angeregt und die Rückkopplung der Mikrowelle erfolgt über das elektrische und magnetische Resonatorfeld, da der parallele SQIF sensitiv auf *beide* Felder ist. Diese Situation ist gänzlich verschieden zur Einstrahlung einer externer Mikrowelle fester Frequenz, die nur elektrisch an die Josephson-Kontakte ankoppelt (s. z.B. [68]). In diesem Fall rein elektrischer Ankopplung würde (im Rahmen des effektiven Ein-Phasen-Modells) die Plateaubreite der auftretenden Shapiro-Stufen [143] mit dem Betrag des Strukturfaktors $|S_{\text{SQIF}}(B_{\perp}^{(1)})|$ variieren, da der kritische Strom des SQIFs direkt proportional zu $|S_{\text{SQIF}}(B_{\perp}^{(1)})|$ ist.⁵ Da der Strukturfaktor sehr sensitiv auf das primäre Magnetfeld ist,

⁵Für einen einzelnen Josephson-Kontakt mit kritischem Strom I_c ist die Plateaubreite der n -

müssten die Stufenbreiten mit $B_{\perp}^{(1)}$ variieren und im Fall von SQIFs für endliche Magnetfeldwerte $|B_{\perp}^{(1)}| > 0$ stark reduziert sein. Abb. 4.3 (a) zeigt, dass dies nicht der Fall ist und die Stufenbreiten für $|B_{\perp}^{(c)}| > 0$ (in Abb. 4.3 gilt $B_{\perp}^{(c)} \approx B_{\perp}^{(1)}$ s. oben) nahezu magnetfeldunabhängig sind. Dies deutet darauf hin, dass die Stufen im vorliegenden Fall (zumindest teilweise) vom hochfrequenten Resonator-Magnetfeld induzierte Stufen sind. Zur Klärung dieser These sind weiterführende Betrachtungen notwendig.

Neben den ausgeprägten Stufen sind noch eine Vielzahl zusätzlicher kleinerer Sub-Stufen in den I - $\langle V \rangle$ -Kennlinien vorhanden. Die Existenz und die Eigenschaften dieser Stufen hängen vom primären Magnetfeld ab. So treten die Sub-Stufen nur für ganz bestimmte Werte des primären Magnetfeldes auf und ihre Lage und Plateaubreiten sind magnetfeldabhängig. Die Sub-Stufen werden durch Resonanzen verursacht, die von supraleitenden geometrischen Strukturen mit kleineren Abmessungen als L stammen. Für höhere Frequenzen können diese Sub-Stufen auch von LC-Resonanzen im SQIF-Netzwerk herrühren. Besonders stark ausgeprägte Sub-Stufen finden sich in der Nähe von $B_{\perp}^{(c)} = 0$, d.h. in der Umgebung von $B_{\perp}^{(1)} = 0$. Abb. 4.3 (b) zeigt zwei I - $\langle V \rangle$ -Kennlinien für $B_{\perp}^{(c)} = 0 \mu\text{T}$ und für $B_{\perp}^{(c)} = -10 \mu\text{T}$. Während bei der Kennlinie für endliches $B_{\perp}^{(c)}$ fast ausschließlich die großen ausgeprägten I - $\langle V \rangle$ -Stufen auftreten, finden sich in der Kennlinie für verschwindendes $B_{\perp}^{(c)}$ die zusätzlichen kleinen Sub-Stufen. Der Grund liegt darin, dass die Amplitude der Spannungsszillation der Josephson-Kontakte für $B_{\perp}^{(1)} = 0$ (d.h. in Abb. 4.3 für $B_{\perp}^{(c)} \approx 0$) maximal wird und für zunehmendes primäres Magnetfeld stark abnimmt. Dadurch werden besonders für $B_{\perp}^{(1)} = 0$ verstärkt resonante geometrische Strukturen angeregt, was zu einem Auftreten von Stufen führt.

Eine genaue Betrachtung der I - $\langle V \rangle$ -Kurvenschar in Abb. 4.3 (a) und (b) zeigt, dass die Spannungsantworten asymmetrisch sind, d.h. dass $\langle V \rangle(-B_{\perp}^{(1)}) \neq \langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ gilt. Diese Asymmetrie hat ihren Ursache im sekundären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(2)}$ des SQIFs. Das sekundäre Magnetfeld wird von der Transportstromverteilung und von Abschirmströmen erzeugt, die in den Schleifen des SQIFs fließen. Das sekundäre Magnetfeld ist nicht symmetrisch bezüglich $B_{\perp}^{(1)} \rightarrow -B_{\perp}^{(1)}$, da die unkonventionelle Flächenverteilung nichthomogen ist. Aufgrund der Asymmetrie der Spannungsantwort $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ hängt die charakteristische Frequenz ν_B des SQIF-Netzwerks ebenfalls von der Richtung des primären Magnetfeldes ab. Dies spielt eine entscheidende Rolle für die Existenz stufenförmiger Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken, die in der Umgebung der ausgeprägten I - $\langle V \rangle$ -Stufen auftreten (s. unten).

In Kapitel 2 wurden theoretische Vorhersagen über die Spannungsantwort des experimentellen SQIFs gemacht. Abb. 2.21 zeigt die theoretischen Magnetfeld-Spannungskurven des parallelen SQIFs für verschiedene Werte des Transportstroms. Bei der Berechnung der theoretischen Kennlinien wurden die resonanten geometrischen Strukturen nicht berücksichtigt, die für die oben beschriebenen Stufen verantwortlich sind.

ten I - $\langle V \rangle$ -Stufe bei externer Einstrahlung einer Mikrowelle $V^{(\text{ext})}(t) = V_1^{(\text{ext})} \cos(\omega^{(\text{ext})}t)$ durch $I_c J_n(2eV_1^{(\text{ext})}/(\hbar\omega^{(\text{ext})}))$ gegeben, wobei J_n die n -te Besselfunktion erster Art bezeichnet.

Insbesondere der Mikrostreifen-Resonator wurde nicht in das theoretische Modell einbezogen, so dass die ausgeprägten I - $\langle V \rangle$ -Stufen in den Spannungsantworten von Abschnitt 2.7 nicht auftreten. Sieht man jedoch von den I - $\langle V \rangle$ -Stufen ab, so zeigen die experimentellen Spannungsantworten das theoretisch vorhergesagte Verhalten. Um dies zu zeigen, werden im Folgenden die Magnetfeld-Spannungskurven des parallelen SQIFs für bestimmte Werte des Transportstroms I diskutiert und anschließend mit den Ergebnissen des theoretischen Modells verglichen.

Abbildung 4.4 (a) zeigt die experimentell gemessene Spannungsantwort des parallelen SQIFs für den Transportstromwert $I = 5.7 \text{ mA}$. Für diesen Wert von I erreicht der Spannungshub sein Maximum. Die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik ist in sehr guter qualitativer Übereinstimmung mit der theoretischen Vorhersage. Sie zeigt ein eindeutiges signifikantes Minimum, das sich in der Nähe verschwindenden Kontrollfeldes $B_{\perp}^{(c)} = 0$ befindet. Für diesen Wert des Transportstroms arbeitet der parallele SQIF also im nicht-resonanten ac-Modus. Außerhalb des Minimums, d.h. für endliche Magnetfeldwerte $|B_{\perp}^{(c)}| > 0$, moduliert die mittlere Spannung $\langle V \rangle$ mit kleiner Amplitude um den mittleren Spannungswert $\bar{V} \approx 70 \mu\text{V}$. Der im Experiment maximal ausgefahrene Magnetfeldbereich betrug $|B_{\perp}^{(c)}| = 1000 \mu\text{T}$. Innerhalb dieses Bereichs traten keine weiteren signifikanten Minima in der Spannungsantwort auf. Deshalb kann das experimentelle Josephson-Kontakt-Netzwerk zurecht als Quanten-Interferenz-Filter nach der Definition aus Abschnitt 2.7 bezeichnet werden. Im Minimum der Spannungsantwort beträgt der Spannungsabfall $\langle V \rangle_{\min} \approx 6 \mu\text{V}$ und mit einem maximalen Spannungswert von $\langle V \rangle_{\max} \approx 77 \mu\text{V}$ ergibt sich der Spannungshub des SQIFs zu $\Delta V = \langle V \rangle_{\max} - \langle V \rangle_{\min} \approx 71 \mu\text{V}$.

Das eindeutige Minimum in Abb. 4.4 (a) befindet sich zwar in der Nähe verschwindenden Kontrollfeldes, aber es liegt nicht exakt bei $B_{\perp}^{(c)} = 0$. Abb. 4.4 (b) zeigt die Spannungsantwort in der unmittelbaren Umgebung von $B_{\perp}^{(c)} = 0$ für verschiedene Werte des Transportstroms. Dieser wurde bei $I = 4.8 \text{ mA}$ beginnend in Schritten von 0.2 mA bis zum Wert $I = 5.8 \text{ mA}$ erhöht. Für $I = 5.8 \text{ mA}$ ist der Transportstrom knapp größer als der maximale kritische Netzwerkstrom $\max(I_{c,\text{SQIF}})$, so dass für alle Werte von $B_{\perp}^{(c)}$ eine endliche Spannung abfällt. Für alle anderen Werte $I \leq 5.6 \text{ mA}$ ist I kleiner als $\max(I_{c,\text{SQIF}})$ und die mittlere Spannung verschwindet in einem für I charakteristischen $B_{\perp}^{(c)}$ -Bereich. In diesen $B_{\perp}^{(c)}$ -Bereichen sind die Kontakte subkritisch und alle Ströme im Netzwerk sind Supraströme. Alle Kurven in Abb. 4.4 (b) liegen symmetrisch zum Magnetfeldwert $B_{\perp}^{(c)} \approx 1 \mu\text{T}$. Insbesondere die Spannungsantwort für $I = 5.8 \text{ mA}$ besitzt ihr Minimum bei $B_{\perp}^{(c)} \approx 1 \mu\text{T}$. Daraus kann geschlossen werden, dass im Kryostat während der Messung ein magnetisches Restfeld der Stärke $B_{\perp}^{(\text{ext})} \approx -1 \mu\text{T}$ existierte. Für $B_{\perp}^{(c)} \approx 1 \mu\text{T}$ kompensierte das Magnetfeld der Kontrollleitung das Restfeld $B_{\perp}^{(\text{ext})}$, so dass dadurch das primäre Magnetfeld verschwand $B_{\perp}^{(1)} = B_{\perp}^{(c)} + B_{\perp}^{(\text{ext})} = 0$ und die nicht-resonante Spannungsantwort des parallelen SQIFs minimal wurde.

Alle Kurven in Abb. 4.4 (b) liegen symmetrisch zu $B_{\perp}^{(c)} \approx 1 \mu\text{T}$ und bei Änderung von I tritt keine Verschiebung der Spannungscharakteristiken auf. Zudem ergaben sich exakt dieselben spiegelsymmetrischen Spannungsantworten, wenn der Transport-

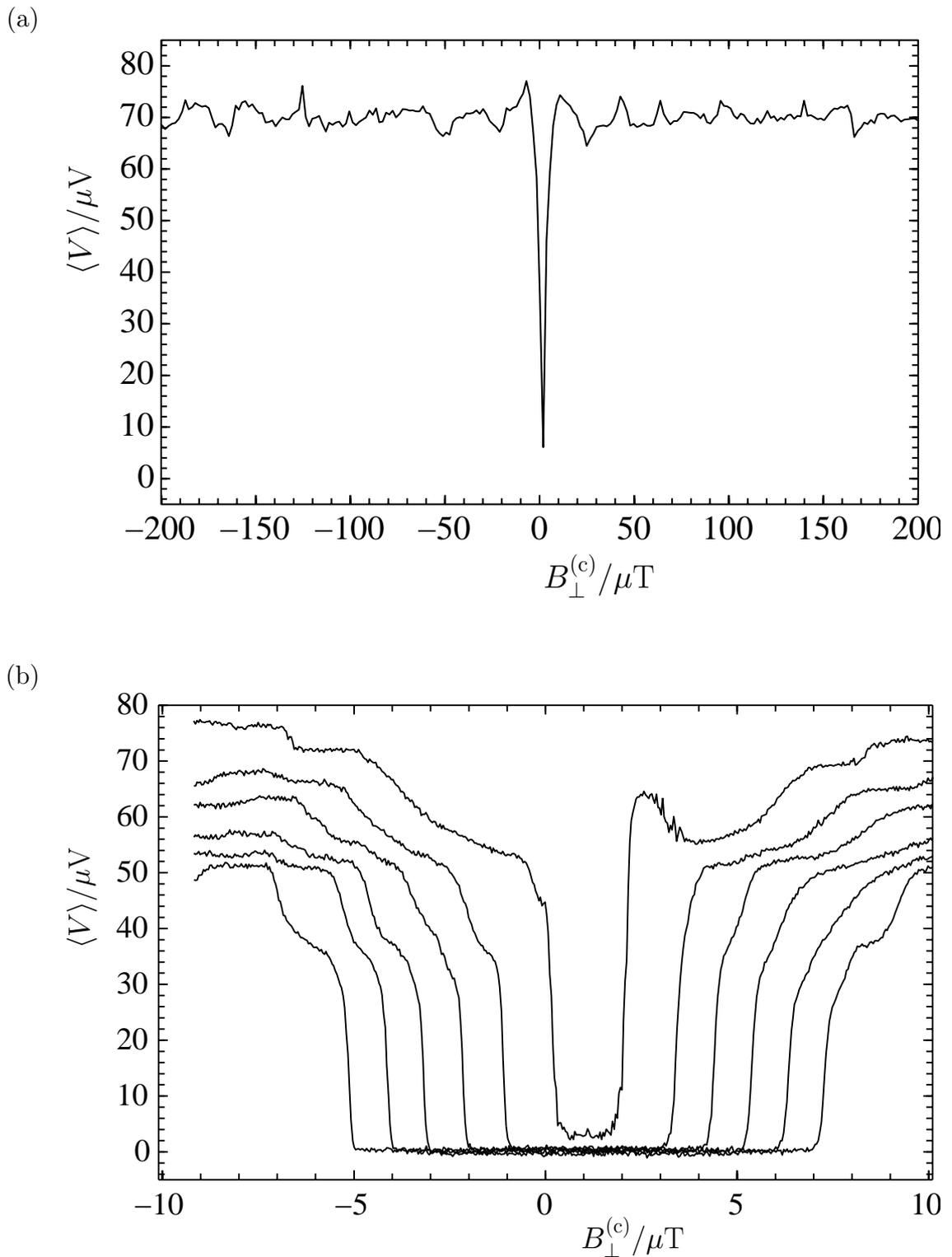


Abbildung 4.4: Experimentelle Spannungsantwort des parallelen SQIFs in Abhängigkeit des Kontroll-Magnetfeldes $B_{\perp}^{(c)}$. In (a) ist der Wert des Transportstroms mit $I = 5.7$ mA knapp größer als der kritische Netzwerkstrom. In (b) ist ein Detail der Spannungsantwort in der unmittelbaren Umgebung von $B_{\perp}^{(ext)} = 0$ dargestellt. Der Transportstrom wurde bei $I = 4.8$ mA beginnend in Schritten von 0.2 mA bis $I = 5.8$ mA erhöht.

strom umgekehrt wurde, d.h. für $I \rightarrow -I$. Daraus kann geschlossen werden, dass die Transportstromverteilung kein starkes sekundäres Magnetfeld erzeugt, das den Ort des signifikanten Minimums verschieben würde. Die Methode der gespiegelten Stromzufuhr minimiert also erfolgreich den Einfluss der Transportstromverteilung. Die in den Spannungsantworten auftretenden Asymmetrien für größere Werte des magnetischen Kontrollfeldes wird durch Abschirmströme verursacht, die in den SQIF-Schleifen fließen. Da alle Schleifen verschieden sind, sind auch die Abschirmströme in verschiedenen Schleifen verschieden groß. Trotz dass die Schleifen speziell so angeordnet wurden, dass dieser Effekt minimiert wird, lässt sich die Asymmetrie nicht vollständig unterdrücken. Da die auftretende Asymmetrie der Spannungscharakteristiken bezüglich $B_{\perp}^{(1)} \rightarrow -B_{\perp}^{(1)}$ schwach sind, spielen sie in der Praxis keine relevante Rolle.

Anhand der Kennlinien in Abb.4.4 (b) können die Eigenschaften der Spannungsantwort des parallelen SQIFs bestimmt werden. Für leicht überkritische Werte des Transportstroms $I = 5.8 \text{ mA}$ besitzt der Spannungshub einen Wert von $\Delta V \approx 60 \mu\text{V}$, wobei für $\langle V \rangle_{\text{max}}$ der Spannungsabfall des lokalen Maximums bei $B_{\perp}^{(c)} = 2.5 \mu\text{T}$ gewählt wurde. Die Breite des Minimums beim Spannungsabfall von $\langle V \rangle = 40 \mu\text{V}$ besitzt den Wert $\Delta B \approx 2 \mu\text{T}$. Der maximale Transferfaktor $V_{B^{(c)}} = \left| \partial_{B_{\perp}^{(c)}} \langle V \rangle \right|_{\text{max}}$ des parallelen SQIFs war im Experiment für diesen Transportstromwert durch $V_{B^{(c)}} \approx 200 \text{ V/T}$ gegeben. Die Spannungsantworten für kleinere Werte von I besitzen zum Teil noch größere Transferfaktoren bis 220 V/T (für $I \approx 5.35 \text{ mA}$). Für vergleichbare Werte von $I/(NI_c)$ besaß die Spannungsantwort des Referenz-SQUIDs einen Spannungshub von $\Delta V_{\text{SQUID}} \approx 30 \mu\text{V}$ und einen maximalen Transferfaktor $V_{B^{(c)},\text{SQUID}} \approx 13 \text{ V/T}$. Da das Skalierungsverhalten der Spannungsantworten bezüglich der Gesamtfläche A_{tot} von besonderem Interesse ist, vergleichen wir die Transferfaktoren der beiden Netzwerke. Nach (2.70) skaliert der Transferfaktor theoretisch mit der Gesamtfläche des Netzwerks. Die Gesamtfläche des SQIFs ist um den Faktor 16 größer als die Schleifenfläche des dc SQUIDs. Der Wert $13 \text{ V/T} \times 16 = 208 \text{ V/T}$ des Transferfaktors der aus dieser Flächenrelation und dem Transferfaktor des dc SQUIDs folgt, ist in guter Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert $V_{B^{(c)}} \approx 200 \text{ V/T}$ für den SQIF.

Der Unterschied des Spannungshubs des dc SQUIDs zum Spannungshub des parallelen SQIFs ist bemerkenswert, da die Größe der maximalen SQIF-Schleife mit der Größe der SQUID-Schleife übereinstimmt. Der Spannungshub des SQIFs ist ungefähr doppelt so groß wie der Spannungshub des SQUIDs. Dieser Unterschied kann wie folgt theoretisch erklärt werden. Für eine geeignete Wahl der SQIF-Schleifenverteilung und bei geschickter geometrischer Anordnung der SQIF-Geometrie können die induktiven Einflüsse wesentlich reduziert werden. Diese Reduktion wird durch die teilweise destruktive Superposition der Abschirmströme im SQIF-Netzwerk erzeugt, die in Form von Kreisströmen in den Schleifen fließen. Auf diese Weise ist die Reduktion des Spannungshubs infolge induktiver Kopplungen bei SQIFs im Vergleich zu dc SQUIDs wesentlich kleiner.

Die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken mit eindeutigen Minimum bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ treten auf, wenn der parallele SQIF im nicht-resonanten ac-Modus arbeitet. Dies ist

beim experimentellen SQIF der Fall, wenn der Transportstrom Werte besitzt, die nicht wesentlich größer sind als der maximale kritische Netzwerkstrom $\max(I_{c,\text{SQIF}})$. Dann ist die charakteristische Frequenz ν_B der Josephson-Kontakte zu klein, um die LC -Resonanzen im Netzwerk anzuregen. Nach Abschnitt 2.5 werden die LC -Schwingkreise von den Induktivitäten der SQIF-Leiterelemente und den Kapazitäten der Josephson-Kontakte gebildet. Die experimentellen Spannungsantworten aus Abb. 4.4 sind alle nicht-resonante Kennlinien. Für genügend große Werte von I wird die Frequenz ν_B jedoch groß genug, um LC -Resonanzen anzuregen und für bestimmte Werte des primären Magnetfeldes treten in der Nähe von $B_{\perp}^{(1)} = 0$ resonante Strukturen in der Spannungsantwort auf. In diesem Fall arbeitet der parallele SQIF im resonanten ac-Modus (s. Abschn. 2.5.6). Nach den theoretischen Ergebnissen aus Abschnitt 2.7 besitzt die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik des parallelen SQIFs dann bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$ ein lokales Maximum, das von zwei scharfen Minima symmetrisch umgeben wird.

Abb. 4.5 zeigt die experimentelle Spannungsantwort des parallelen SQIFs für Transportstromwerte, die deutlich größer sind als $\max(I_{c,\text{max}}) = 5.7$ mA. Der Transportstrom wurde bei $I = 7.35$ mA beginnend in Schritten von 0.1 mA bis zum Wert $I = 7.85$ mA erhöht. Für diesen Bereich des Transportstroms befindet sich der SQIF auf der zweiten I - $\langle V \rangle$ -Stufe und die dritte I - $\langle V \rangle$ -Stufe ist nach Abb. 4.3 noch nicht ganz erreicht. Für $I \leq 7.45$ mA besitzt der SQIF eine nicht-resonante Spannungsantwort mit eindeutigem Minimum bei $B_{\perp}^{(c)} \approx -1 \mu\text{T}$.⁶ Wird I mit $I = 7.55$ mA über diesen Wert erhöht, so bildet sich bei $B_{\perp}^{(c)} \approx -1 \mu\text{T}$ ein lokales Maximum aus, das von zwei scharfen Minima umgeben wird. Der parallele SQIF arbeitet für $I = 7.55$ mA im resonanten ac-Modus. Für noch größere Transportstromwerte prägt sich die resonante Hut-förmige Struktur in der Spannungsantwort weiter aus. Für $I = 7.85$ mA erreicht das Maximum mit $\langle V \rangle_{\text{max}} \approx 184 \mu\text{V}$ sogar einen größeren Wert als $\bar{V} \approx 166 \mu\text{V}$. In diesem Fall handelt es sich vermutlich nicht mehr nur um eine reine LC -Resonanz im SQIF-Netzwerk, sondern um eine zusätzliche Einwirkung des Mikrostreifen-Resonators, der für Magnetfeldwerte nahe $B_{\perp}^{(c)} = 0$ angeregt wird. Wird I über den Wert von 7.85 mA vergrößert, so verschwindet die LC -resonante Spannungsantwort wieder (in Abb. 4.5 nicht dargestellt), da dann die Mikrowelle des angeregten Mikrostreifen-Resonators (s. oben) die Hut-förmige Struktur zerstört.

Das LC -resonante Verhalten des parallelen SQIFs ist ebenfalls anhand Abb. 4.3 (a) zu erkennen, wenn man die I - $\langle V \rangle$ -Kurven entlang der $B_{\perp}^{(c)}$ -Achse schneidet und daraus die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken gewinnt. Kurz vor Erreichen der dritten I - $\langle V \rangle$ -Stufe bildet sich in den I - $\langle V \rangle$ -Kennlinien in der Nähe von $B_{\perp}^{(c)} = 0$ die LC -resonante Struktur aus, die bei Erreichen der dritten I - $\langle V \rangle$ -Stufe wieder verschwindet. Dies ist der in Abb. 4.5 dargestellte Fall. Ferner zeigt diese Analyse von 4.3 (a), dass der parallele SQIF auch auf höheren I - $\langle V \rangle$ -Stufen LC -resonantes Verhalten zeigt. So finden sich vor Erreichen der vierten bis siebten I - $\langle V \rangle$ -Stufe ebenfalls LC -resonante Spannungsantworten, deren Ausprägung mit zunehmenden Werten des

⁶Dies bedeutet, dass während des Experiments im Kryostat ein magnetisches Restfeld der Stärke $B_{\perp}^{(\text{ext})} \approx +1 \mu\text{T}$ vorhanden war.

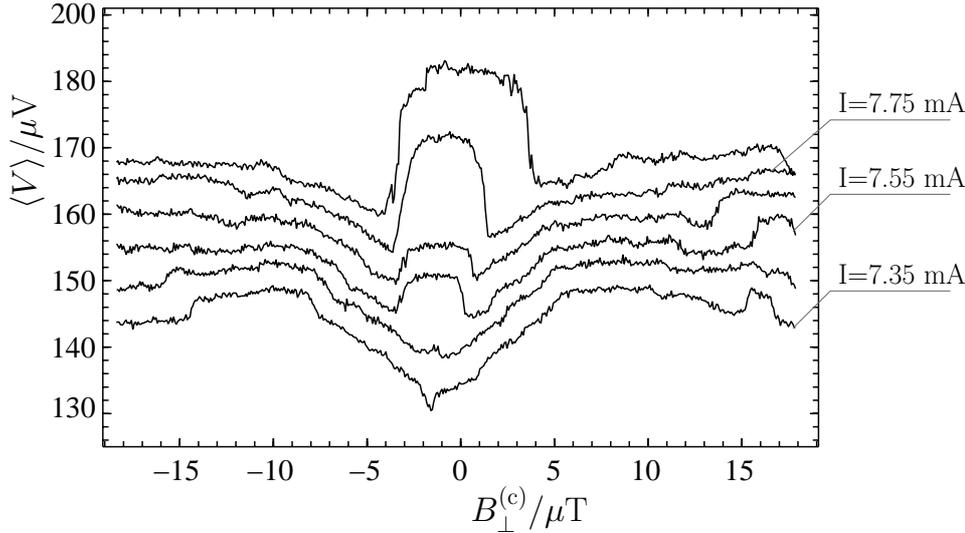


Abbildung 4.5: $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(c)})$ -Kennlinien für feste Werte von I . Der Transportstrom wurde bei $I = 7.35 \text{ mA}$ beginnend in Schritten von 0.1 mA bis $I = 7.85 \text{ mA}$ erhöht. Für $I \geq 7.55 \text{ mA}$ arbeitet der parallele SQIF im resonanten ac-Modus und die Spannungsantwort zeigt die Hut-förmige Struktur.

Transportstroms immer mehr abnimmt. Dies ist in Einklang mit der theoretischen Vorhersage aus Abb. 2.21, nach der die LC -Resonanzen bis $I \approx 2.5 NI_c \approx 14.3 \text{ mA}$ auftreten.

Die LC -Resonanzen in parallelen SQIFs ermöglichen selbst für große Werte des Transportstroms I noch große Transferfaktoren der Spannungsantworten. Die Transferfaktoren der LC -resonanten Kennlinien aus Abb. 4.5 sind für $I = 7.75 \text{ mA}$ durch $V_{B^{(c)}} \approx 40 \text{ V/T}$ und für $I = 7.85 \text{ mA}$ durch $V_{B^{(c)}} \approx 80 \text{ V/T}$ gegeben. Sie sind damit zwar kleiner als der Transferfaktor des SQIFs im nicht-resonanten Betriebsmodus $V_{B^{(c)}} \approx 200 \text{ V/T}$, aber um den Faktor 3 (bzw. 6) größer als der Transferfaktor des dc SQUIDs mit $V_{B^{(c)},\text{SQUID}} \approx 13 \text{ V/T}$.

In Abb. 4.6 ist die nicht-resonante Spannungsantwort des parallelen SQIFs zusammen mit der Spannungsantwort des regulären Netzwerks mit $N_r = 16$ identischen Schlaufen dargestellt. Der Transportstrom wurde für beide Netzwerke so eingestellt, dass die Spannungsantworten einen maximalen Hub besaßen. Zur Erzeugung des magnetischen Kontrollfeldes wurde in beiden Fällen die gleiche Kontrollleitung bestromt. Die Kontrollleitung liegt exakt zwischen den beiden Netzwerken und besitzt zu beiden denselben Abstand (s. Abb. 4.1). Die periodischen Anteile der Spannungsantwort des regulären Netzwerks besitzen die Periode Φ_0 . Auf diese Weise kann das magnetische Feld, das vom Kontrollstrom erzeugt wird, für beide Netzwerke simultan kalibriert werden.

Die Spannungsantwort des regulären Netzwerks ist durch Φ_0 -periodische Minima mit unterschiedlichen Spannungshüben charakterisiert. Für ein perfektes reguläres Netzwerk und ein homogenes primäres Magnetfeld sollten die Minima und die Spannungshübe jedoch exakt identisch sein. Der Grund für das Abweichen der Spannungsantwort

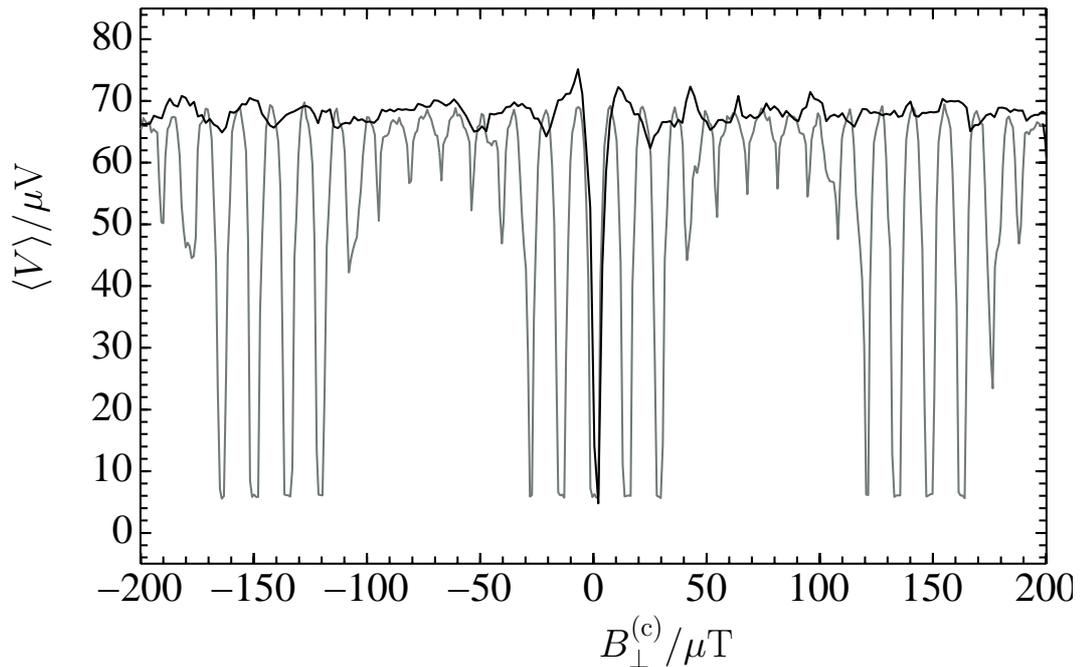


Abbildung 4.6: Experimentelle Spannungsantwort des parallelen SQIFs (schwarz) und des regulären Netzwerks (grau). Der Transportstrom besitzt die Werte $I = 5.7\text{mA}$ (paralleler SQIF) und $I = 3.2\text{mA}$ (reguläres Netzwerk), so dass der Transportstrom pro Kontakt in beiden Fällen $\approx 190\mu\text{A}$ beträgt. Beide Netzwerke besitzen (fast) identische Gesamtflächen.

von der idealen Form exakt identischer Minima kann eine Streuung der Schlaufenflächen sein. Die theoretische Analyse in Abschnitt 2.7 ergab, dass selbst kleine Abweichungen der Schlaufenflächen von der idealen Gleichheit unterschiedliche Minima in der Spannungsantwort zur Folge haben (s. Abb. 2.23). Solche aperiodischen Muster treten aber auch dann auf, wenn das primäre Magnetfeld nicht exakt homogen ist und Gradienten besitzt. Wird die Aperiodizität durch unsystematische Flächenstreuungen verursacht, so sollten die Spannungshübe der Minima nach Abb. 2.23 mit dem primären Magnetfeld variieren. Die experimentelle Spannungscharakteristik in Abb. 4.6 zeigt jedoch Gruppen von Minima, die alle gleiche Spannungshübe besitzen. Dies legt den Schluss nahe, dass die Aperiodizität der Spannungsantwort des regulären Netzwerks hauptsächlich durch Magnetfeldgradienten verursacht wurde. Diese Gradienten müssen jedoch klein sein, da sonst das eindeutige Minimum der SQIF-Spannungsantwort ebenfalls reduziert wäre, was aber nicht der Fall ist. Die große Empfindlichkeit der Spannungscharakteristiken regulärer Netzwerke auf Magnetfeldgradienten wurde bereits in [32, 50] diskutiert. Die Spannungsantwort regulärer Netzwerke ist nicht strukturstabil und es kann daher nicht erwartet werden, dass reguläre Netzwerke in der Praxis einen einfachen Operationsmodus ermöglichen. Im Gegensatz dazu ist die Spannungsantwort des SQIFs strukturstabil. Weder Streuungen der Flächenverteilung oder der Kontakt-Parameter noch zumutbare Magnetfeldgradienten beeinflussen oder verhindern einen einwandfreien Betrieb des SQIFs.

Das reguläre Netzwerk und der parallele SQIF besitzen beide fast identische Gesamt-

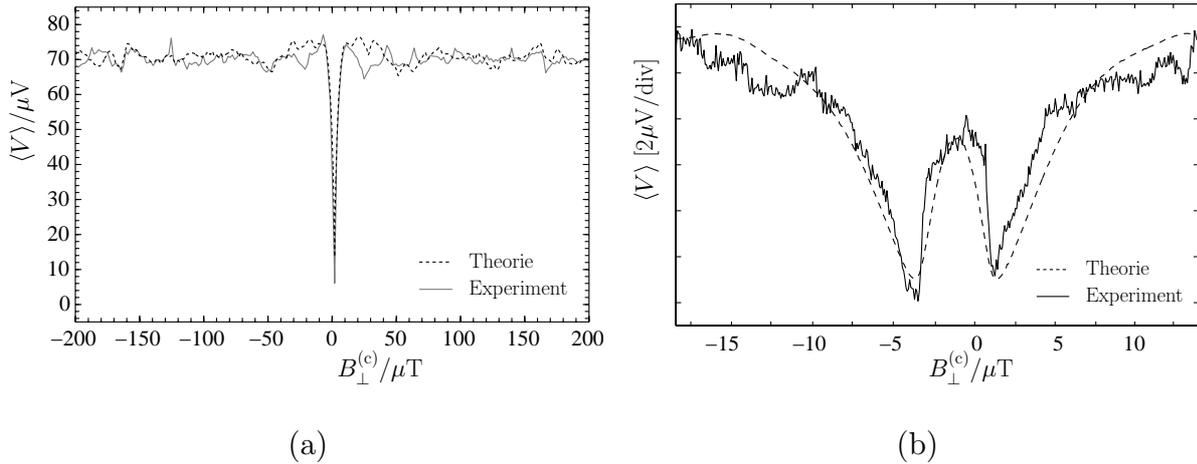


Abbildung 4.7: Vergleich der experimentellen $\langle V \rangle$ - $B_{\perp}^{(c)}$ -Kennlinien des parallelen SQIFs mit den theoretischen Vorhersagen. In (a) arbeitet der parallele SQIF für $I = 5.7$ mA im nicht-resonanten ac-Modus und in (b) für $I = 7.7$ mA im resonanten ac-Modus. In beiden Fällen stimmen die theoretischen Ergebnisse sehr gut mit den Experimenten überein.

flächen. Nach den theoretischen Vorhersagen besitzen damit beide Netzwerke vergleichbare Empfindlichkeiten bezüglich des primären Magnetfeldes. Werden beide Netzwerke derart bestromt, dass die Transportströme pro Kontakt $I/(NI_c)$ gleiche Werte annehmen, so besitzen beide Netzwerke nach (2.70) identische maximale Transferfaktoren. Dies wird nach Abb. 4.6 durch das Experiment sehr gut bestätigt. Ferner besitzt das reguläre Netzwerk mit $\Delta V \approx 62 \mu\text{V}$ einen zum SQIF vergleichbar großen Spannungshub. Dies bedeutet, dass die induktiven Effekte in beiden Netzwerken einen vergleichbaren Einfluss besitzen.

Die experimentellen Ergebnisse werden nun anhand Abb. 4.7 mit den theoretischen Ergebnissen verglichen. Die theoretischen Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken wurden durch numerische Integration der Netzwerkgleichungen (2.41) bestimmt. Für alle Parameter des Netzwerks und der Josephson-Kontakte wurden dazu die Parameter des experimentellen SQIFs verwendet (s. Abschn. 4.1). Abb. 4.7 (a) zeigt den Vergleich der experimentellen mit der theoretischen Kennlinie für den Fall, dass der parallele SQIF im nicht-resonanten ac-Modus betrieben wird. Für beide Fälle wurde der Wert des Transportstroms mit $I = 5.7$ mA gleich dem maximalen kritischen Netzwerkstrom $\max(I_{c,\text{SQIF}})$ gewählt. Die theoretische Kurve wurde um das im Experiment vorhandene Restfeld $|B_{\perp}^{(\text{ext})}| \approx 1 \mu\text{T}$ verschoben und mit dem Faktor 0.7 skaliert. Mit dieser Skalierung wurde berücksichtigt, dass der experimentelle Spannungshub ΔV und die Variationen der mittleren Spannung um den \bar{V} -Spannungswert kleiner sind als es die Vorhersage in Abschnitt 2.7 ergab. Die Reduktion von ΔV im Experiment kann dadurch erklärt werden, dass die Induktivitäten der experimentellen Schaltung leicht größer sind als im Design. Zudem verändert der Mikrostreifen-Resonator die experimentelle Spannungsantwort des parallelen SQIFs.

Der Vergleich in Abb. 4.7 (a) zeigt eine sehr gute qualitative Übereinstimmung

zwischen Experiment und Theorie. Lediglich die Feinstrukturen für $|B_{\perp}^{(c)}| > 0$, d.h. die Variationen der Spannungsantwort um den \bar{V} -Spannungswert stimmen nicht exakt überein. Dies bedeutet, dass die effektive Flächenverteilung im experimentellen SQIF von der Flächenverteilung im Design leicht abweicht. Der Gründe hierfür liegen in der imperfekten Realisierung der supraleitenden Schichten und darin, dass die supraleitenden Schichten der Schaltung magnetische Felder inhomogen in die Netzwerkschlaufen fokussieren. Dies führt zu einer neuen effektiven Schlaufenverteilung, die eine leicht veränderte Spannungsantwort des parallelen SQIFs erzeugt.

Abb. 4.7 (b) zeigt den Vergleich der experimentellen mit der theoretischen Spannungsantwort des parallelen SQIFs im resonanten ac-Modus. Für diesen Vergleich wurde der Transportstrom mit $I = 1.35 NI_c \approx 7.7 \text{ mA}$ so eingestellt, dass er einen Wert mit genügendem Abstand zur dritten I - $\langle V \rangle$ -Stufe besaß und somit der Einfluss des Mikrostreifen-Resonators gering war. Dies ermöglicht einen sinnvollen Vergleich zwischen Experiment und Theorie, da das theoretische Modell aus Abschnitt 2.3.2 den Mikrostreifen-Resonator nicht beinhaltet. Zudem wurden für Abb. 4.7 (b) im theoretischen Modell die Dämpfung der Zuführungswiderstände $R_n^{(Z)}$ und $R_n^{(A)}$ berücksichtigt, da diese die LC -Resonanzen dämpfen [39]. Da im Experiment am Ort des parallelen SQIFs ein Restfeld der Stärke $B_{\perp}^{(\text{ext})} \approx +1 \mu\text{T}$ vorhanden war, wurde die theoretische Kurve ebenfalls um $1 \mu\text{T}$ verschoben. Abb. 4.7 (b) zeigt eine gute qualitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment für den Fall, dass der SQIF im resonanten ac-Modus arbeitet.

Zum Abschluss der Diskussion der experimentellen Ergebnisse des parallelen SQIFs zeigt Abb. 4.8 eine dreidimensionale Darstellung des typischen Verhaltens der Spannungsantwort in der Nähe einer I - $\langle V \rangle$ -Stufe (hier der Nähe der dritten I - $\langle V \rangle$ -Stufe). Für jede der dargestellten Kennlinien besitzt der Transportstrom einen festen Wert. Vor Erreichen der dritten I - $\langle V \rangle$ -Stufe arbeitet der parallele SQIF zuerst im nicht-resonanten ac-Modus. Die nicht-resonanten Kennlinie sind in Abb. 4.8 mit (A) bezeichnet. Bei Erhöhung des Transportstroms I geht der SQIF in den LC -resonanten ac-Modus über und die Spannungsantworten zeigen die dafür charakteristische hutförmige Struktur in der Umgebung von $B_{\perp}^{(c)} = 0$. Diese LC -resonanten Kennlinien sind mit (B) benannt. Für einen kleinen aber endlichen Transportstrombereich in der Umgebung von $I = 7.9 \text{ mA}$ besitzt der parallele SQIF dann stufenförmige Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken. Zur Übersichtlichkeit ist in Abb. 4.8 nur eine einzige dieser stufenförmigen Kurven (C) dargestellt. Für Magnetfeldwerte $B_{\perp}^{(c)} < -4 \mu\text{T}$ befindet sich die mittlere Spannung $\langle V \rangle$ auf dem Plateau der zweiten I - $\langle V \rangle$ -Stufe. Die mittlere Spannung $\langle V \rangle$ moduliert auf diesem unteren Spannungszweig der stufenförmigen Kennlinie mit kleiner Amplitude um einen mittleren Wert \bar{V}_1 . Für zunehmendes Magnetfeld $B_{\perp}^{(c)}$ verlässt die stufenförmige Kennlinie das Plateau der zweiten I - $\langle V \rangle$ -Stufe bei $B_{\perp}^{(c)} \approx -4 \mu\text{T}$ und geht bei $B_{\perp}^{(c)} \approx -2.5 \mu\text{T}$ auf das nachfolgende Plateau der dritten I - $\langle V \rangle$ -Stufe über. Für $B_{\perp}^{(c)} > -2.5 \mu\text{T}$ variiert $\langle V \rangle$ auf dem sogenannten oberen Spannungszweig um den mittleren Wert \bar{V}_2 . Mit $\Delta V = \bar{V}_2 - \bar{V}_1 \approx 50 \mu\text{V}$ resultiert daraus ein mittlerer Transferfaktor von $\approx 30 \text{ V/T}$. Die Josephson-Frequenz in der

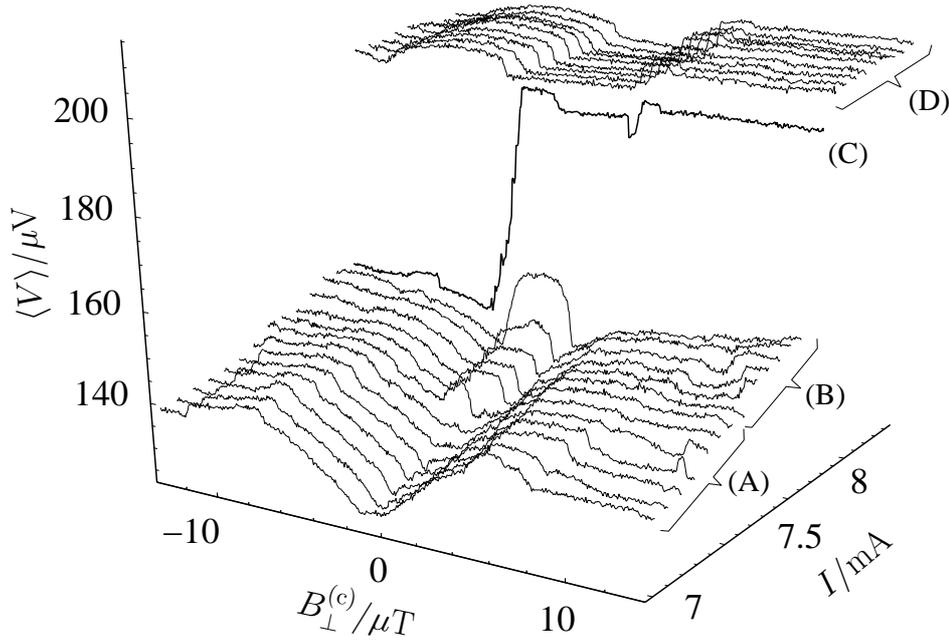


Abbildung 4.8: Verhalten der experimentellen $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(c)})$ -Kennlinien des parallelen SQIFs in der Nähe der dritten I - $\langle V \rangle$ -Stufe. Für jede Kurve besitzt der Transportstrom I einen festen Wert.

Stufenmitte beträgt $\nu_B \approx 85$ GHz. Nach den stufenförmigen Kennlinien (C) besitzt der parallele SQIF bei weiterer Erhöhung von I die Kennlinien (D). Diese verlaufen vollständig auf der dritten I - $\langle V \rangle$ -Stufe und die mittlere Spannung der Kennlinien (D) varriert im Vergleich zu (C) nur noch gering mit $B_{\perp}^{(c)}$.

Für festgelegten Transportstrom I , so dass $\langle V \rangle$ in der Nähe einer I - $\langle V \rangle$ -Stufe liegt, gibt es verschiedene mögliche Szenarien, wie sich das SQIF-Netzwerk in der Umgebung von $B_{\perp}^{(1)} = 0$ verhält [130]. Bei Variation des primären Magnetfeldes sind verschiedene Übergänge zwischen den benachbarten Stufenplateaus denkbar, da die charakteristische Josephson-Frequenz ν_B der Kontakte und die Amplitude des oszillierenden Spannungsanteils von $V(t)$ vom primären Magnetfeld $B_{\perp}^{(1)}$ abhängen (s. Seite 149). So kann $\langle V \rangle$ zum Beispiel für $B_{\perp}^{(1)} < 0$ auf dem unteren Plateau liegen und in der Nähe von $B_{\perp}^{(1)} = 0$ auf das obere Plateau wechseln wie dies bei Kennlinie (C) in Abb. 4.8 der Fall ist. Für $B_{\perp}^{(1)} > 0$ ist möglich, dass $\langle V \rangle$ bei einem bestimmten Wert von $B_{\perp}^{(1)}$ das obere Plateau wieder verlässt und zum unteren zurückkehrt. Dies ist bei der Kennlinie (C) in Abb. 4.8 nicht der Fall. Dort verbleibt für $B_{\perp}^{(1)} > 0$ die mittlere Spannung auf dem oberen Spannungszweig. Ebenfalls ist denkbar, dass $\langle V \rangle$ für $B_{\perp}^{(1)} < 0$ auf dem oberen und für $B_{\perp}^{(1)} > 0$ auf dem unteren Spannungszweig liegt. Welche dieser Möglichkeiten im Experiment auftreten, d.h. welcher Spannungszustand für welchen Wert von $B_{\perp}^{(1)}$ stabil ist, hängt vom sekundären Magnetfeld und von der SQIF-Flächenverteilung ab. Die inhomogene Flächenverteilung des SQIFs erzeugt ein asymmetrisches sekundäres magnetisches Eigenfeld $B^{(2)}(B_{\perp}^{(1)}) \neq B^{(2)}(-B_{\perp}^{(1)})$, wodurch

die Spannungsantwort $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(1)})$ und die charakteristische Frequenz ν_B ebenfalls von der Richtung des primären Magnetfeldes abhängig werden. Dies ermöglicht, dass bei bestimmten Werten von I im Bereich $B_{\perp}^{(1)} > 0$ nur der obere Spannungszweig und für $B_{\perp}^{(1)} < 0$ nur der untere Spannungszweig stabil ist. Ein hysteretisches Verhalten in den stufenförmigen $\langle V \rangle$ - $B_{\perp}^{(1)}$ -Kennlinien ist nicht zu erwarten, da für festen Wert von I und festgelegte SQIF-Flächenverteilung das sekundäre Magnetfeld der Transportstromverteilung festgelegt ist und das sekundäre Magnetfeld der Abschirmstromverteilung deterministisch von $B_{\perp}^{(1)}$ abhängt.

Im Experiment traten die stufenförmigen Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken an verschiedenen I - $\langle V \rangle$ -Stufen auf. Bei allen stufenförmigen Kennlinien blieben die beiden Spannungsniveaus bis zu Magnetfeldwerten $|B_{\perp}^{(c)}| \approx 1000 \mu\text{T}$ stabil. Zudem traten in den Experimenten keine hysteretischen $\langle V \rangle$ - $B_{\perp}^{(c)}$ -Kennlinien oder zufällige Übergänge zwischen zwei Spannungszweigen auf. Dies bedeutet, dass die stufenförmigen Spannungsantworten strukturstabil sind, d.h. dass in ihrer Umgebung keine qualitativ verschiedenen Spannungsantworten auftreten.

4.2.2 Experimentelle Spannungsantwort des seriellen SQIFs

Abb. 4.9 zeigt die experimentellen Transportstrom-Spannungs-Charakteristiken des seriellen SQIFs aus Abb. 4.2. Jede Kennlinie wurde für einen festen Wert des magnetischen Kontrollfeldes $B_{\perp}^{(c)}$ aufgenommen. Die Teilabbildung 4.9 (a) zeigt die I - $\langle V \rangle$ -Kurvenschar für den Magnetfeldbereich $|B_{\perp}^{(c)}| \leq 110 \mu\text{T}$. Anhand der dreidimensionalen Darstellung ist deutlich erkennbar, dass die I - $\langle V \rangle$ -Kennlinien vom magnetischen Kontrollfeld abhängen und dass sich die I - $\langle V \rangle$ -Kennlinien in der Umgebung von $B_{\perp}^{(c)} = 0$ signifikant von den anderen Kennlinien unterscheiden. So ist in der Nähe von $B_{\perp}^{(c)} = 0$ der kritische Strom des seriellen SQIFs deutlich größer als der kritische Strom für endliche Magnetfelder $|B_{\perp}^{(c)}| > 0$, d.h. der kritische Netzwerksstrom $I_{c,\text{SQIF}}$ besitzt bei $B_{\perp}^{(c)} \approx 0$ ein eindeutiges und signifikantes Maximum. Dies bedeutet, dass das serielle Netzwerk eine unkonventionellen Flächenverteilung besitzt, d.h. dass das experimentelle Netzwerk ein serieller Quanten-Interferenz-Filter ist. Die Tatsache, dass das signifikante Maximum von $I_{c,\text{SQIF}}$ bei $B_{\perp}^{(c)} \approx 0$ auftritt, bedeutet, dass das externe magnetische Restfeld $B_{\perp}^{(\text{ext})}$ im Experiment sehr klein war, so dass $B_{\perp}^{(1)} \approx B_{\perp}^{(c)}$ gilt. Der maximale kritische Netzwerksstrom für $B_{\perp}^{(c)} \approx 0$ ergab sich im Experiment zu $\max(I_{c,\text{SQIF}}) \approx 300 \mu\text{A}$ (s. Abb. 4.9 (b)) und für *alle* $|B_{\perp}^{(c)}| > 0$ wurde der Wert von $250 \mu\text{A}$ nie überschritten. Aus dem maximalen Wert von $I_{c,\text{SQIF}}$ kann der mittlere kritische Strom der Josephson-Kontakte zu $I_c \approx \max(I_{c,\text{SQIF}})/2 \approx 150 \mu\text{A}$ abgeschätzt werden. Dieser Wert ist kleiner als der im Design vorgesehene Wert von $190 \mu\text{A}$.

Beim seriellen SQIF besitzt jede der M Schleifen einen eigenen magnetfeldabhängigen kritischen Strom $I_{c,\text{Schleufe } m}$. Überschreitet der Transportstrom den Wert $I_{c,\text{Schleufe } m}$, so schaltet die Schleife m in den Spannungszustand $\langle V \rangle_m > 0$. Der kritische Netzwerksstrom $I_{c,\text{SQIF}}$ ist beim seriellen SQIF erreicht, wenn der Transportstrom I den klein-

sten Wert der kritischen Schlaufenströme $\min(I_{c,\text{Schlaufe } m}, 1 \leq m \leq M)$ überschreitet, d.h. es gilt $I_{c,\text{SQIF}} = \min(I_{c,\text{Schlaufe } m}, 1 \leq m \leq M)$. Für endliche Magnetfelder $|B_{\perp}^{(c)}| \approx |B_{\perp}^{(1)}| > 0$ sind alle $I_{c,\text{Schlaufe } m}$ verschieden, da die Schlaufen alle verschiedene Flächeninhalte besitzen. Bei Erhöhen von I über $I_{c,\text{SQIF}}$ hinaus schalten die einzelnen Schlaufen nacheinander in den Spannungszustand. Für $|B_{\perp}^{(c)}| > 0$ und kurz nach Überschreiten von $I_{c,\text{SQIF}}$ steigt die mittlere Spannung $\langle V \rangle$ deshalb nur langsam mit I an (s. Abb. 4.9) und die I - $\langle V \rangle$ -Kennlinien sind bei $I_{c,\text{SQIF}}$ abgerundet.⁷ Für verschwindendes Magnetfeld $B_{\perp}^{(1)} = 0$ besitzen alle Schlaufen dagegen identische kritische Ströme, so dass bei $I_{c,\text{SQIF}}$ alle Schlaufen simultan resistiv werden. Dies bewirkt einen schnellen Anstieg der mittleren Spannung $\langle V \rangle$, sobald $I_{c,\text{SQIF}}$ für $B_{\perp}^{(c)} \approx 0$ überschritten wird. Das schnelle Ansteigen von $\langle V \rangle$ bei $I_{c,\text{SQIF}}$ für $B_{\perp}^{(c)} \approx 0$ ist in Abb. 4.9 (b) besonders gut zu sehen.

Für überkritische Werte des Transportstroms $I > I_{c,\text{SQIF}}$ treten in den I - $\langle V \rangle$ -Kennlinien ausgeprägte Stufen auf. Da sich der serielle SQIF während des Experiments in einer abgeschirmten Umgebung befand und von außerhalb der Abschirmung keine externe Mikrowelle eingestrahlt wurde, müssen die I - $\langle V \rangle$ -Stufen von der SQIF-Schaltung selbst erzeugt worden sein. Der Mechanismus für die Entstehung der Stufen kann wie folgt erklärt werden. Der zeitlich oszillierende Anteil der Spannung $V(t)$, die über dem seriellen SQIF abfällt, regt eine resonante geometrische Struktur auf dem SQIF-Chip an. Ist der Resonator in einer Mode mit Resonanzfrequenz ν_{f_0} angeregt, so wird in den seriellen SQIF eine Mikrowelle derselben Frequenz ν_{f_0} rückgekoppelt. Ist die Amplitude dieser Rückkopplung groß genug, werden Spannungsstufen in der I - $\langle V \rangle$ -Charakteristik des SQIFs hervorgerufen. Der Resonator kann nur dann effizient angeregt werden, wenn die charakteristische Frequenz ν_B des seriellen SQIFs einem ganzzahligen Vielfachen der Resonanzfrequenz ν_{f_0} entspricht. Unter der Annahme, dass *alle* M Schlaufen des seriellen Netzwerks auf die Frequenz ν_{f_0} synchronisieren, treten die I - $\langle V \rangle$ -Stufen bei den Spannungswerten $V_{\text{Stufe},k} = k M h / (2e) \nu_{f_0}$ (mit $k = 1, 2, 3, \dots$) auf. Im Teilbild (b) sind die I - $\langle V \rangle$ -Kennlinien für die Magnetfeldwerte $B_{\perp}^{(c)} = 0 \mu\text{T}$ und $B_{\perp}^{(c)} = 12.5 \mu\text{T}$ dargestellt. Für eine Resonanzfrequenz $\nu_{f_0} = 19.5 \text{ GHz}$ sind die theoretischen Spannungswerte $V_{\text{Stufe},k}$ mit Pfeilen angedeutet. Mit Ausnahme von $V_{\text{Stufe},1}$ stimmen die theoretischen Werte $V_{\text{Stufe},k}$ gut mit den experimentellen Spannungswerten der I - $\langle V \rangle$ -Stufen überein. Die erste Stufe fehlt, da der Resonator nicht angeregt werden kann, bevor die Josephson-Frequenz ν_B die Resonanzfrequenz ν_{f_0} erreicht hat.

Die Resonanzfrequenz $\nu_{f_0} = 19.5 \text{ GHz}$ stimmt nicht mit der theoretischen Resonanzfrequenz $\nu_{f_0} = 28 \text{ GHz}$ der koplanaren Streifenleitung mit Länge $L = 4.1 \text{ mm}$ (s. Seite 148) überein, die bei der parallelen SQIF-Schaltung vermutlich als Resonator wirkte und die bei der seriellen SQIF-Schaltung ebenfalls in Form der beiden Kontrollleitungen vorliegt (s. Abb. 4.2). Da es sich beim seriellen SQIF um eine kleinere Resonanzfrequenz handelt, besitzt dort die resonante geometrische Struktur eine größere Dimension

⁷Diese Abrundung der I - $\langle V \rangle$ -Kennlinien bei $I_{c,\text{SQIF}}$ (für $|B_{\perp}^{(c)}| > 0$) tritt beim parallelen SQIF nicht auf (s. Abb. 4.3), da dort aufgrund der Parallelschaltung alle Kontakte gemeinsam resistiv werden.

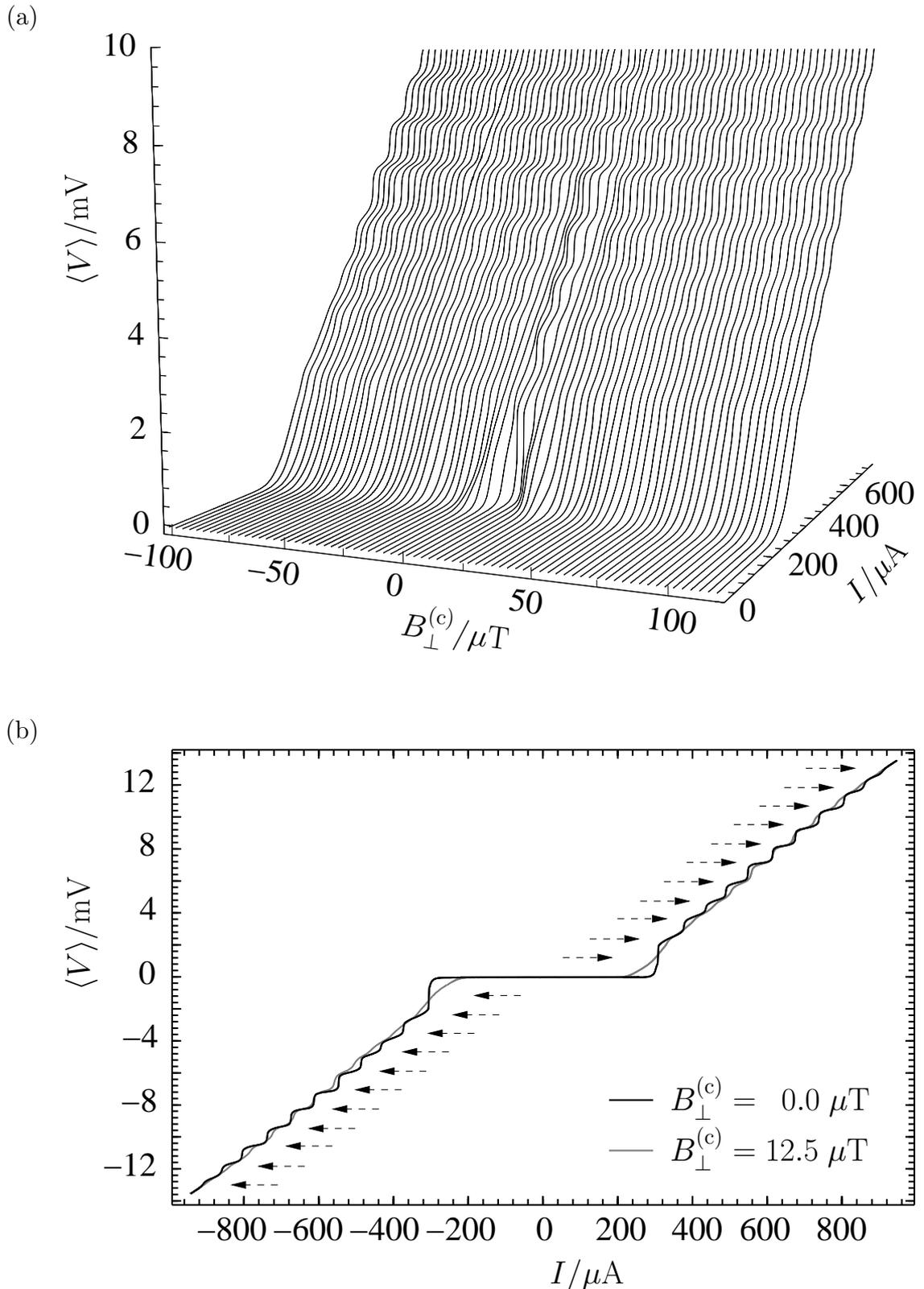


Abbildung 4.9: Experimentelle Strom-Spannungs-Kennlinien des seriellen SQIFs: (a) für verschiedene feste Werte des Magnetfeldes $B_{\perp}^{(c)}$ und (b) für $B_{\perp}^{(c)} = 0 \mu\text{T}$ bzw. $B_{\perp}^{(c)} = 12.5 \mu\text{T}$. Die Stufen werden durch vom SQIF induzierte Resonanzen erzeugt. In (b) sind die theoretischen Spannungswerte $V_{\text{Stufe},k} = k M h / (2e) \nu_{f0}$ (mit $k = 1, 2, 3, \dots$) markiert, die der Resonanzfrequenz $\nu_{f0} = 19.5 \text{ GHz}$ entsprechen.

als L . Als Resonator im Design aus Abb. 4.2 kommen zum Beispiel die H-förmigen Strukturen in Betracht, die von den Zuführungsleitungen zusammen mit dem seriellen SQIF gebildet werden. Zur Klärung der Frage, welche geometrische Struktur vom seriellen SQIF resonant angeregt wird, sind weiterführende Betrachtungen notwendig.

In der Umgebung von $B_{\perp}^{(c)} = 0$ treten in den I - $\langle V \rangle$ -Kennlinien *alle* I - $\langle V \rangle$ -Stufen $k = 2, 3, 4, \dots$ auf und die Stufen sind besonders prägnant ausgebildet. Für $|B_{\perp}^{(c)}| > 0$ dagegen sind nur die höheren I - $\langle V \rangle$ -Stufen $k = 5, 6, 7, \dots$ vorhanden (s. Abb. 4.9 (a)) und die zweite, dritte und vierte Stufe sind für $|B_{\perp}^{(c)}| > 0$ gar nicht oder nur schwach ausgeprägt. Anders ausgedrückt, bedeutet dies, dass für kleine Transportströme (in Abb. 4.9 für $I < 500 \mu\text{A}$) die Existenz der Stufen vom primären Magnetfeld abhängt und für große Transportströme (für $I > 500 \mu\text{A}$) die Stufen magnetfeldunabhängig auftreten. Für den Transportstromwert von $500 \mu\text{A}$, ab dem ein qualitativ neues Verhalten eintritt, entspricht der Transportstrom pro Kontakt ungefähr dem 1.7-fachen Wert des kritischen Stroms eines einzelnen Kontakts $I_c \approx 150 \mu\text{A}$. Der Grund für die Existenz aller I - $\langle V \rangle$ -Stufen nahe $B_{\perp}^{(c)} = 0$ (oder besser nahe $B_{\perp}^{(1)} = 0$) liegt darin, dass dort die mittleren Schlaufenspannungen $\langle V \rangle_k$ unabhängig von I (fast) identisch sind $\langle V \rangle_1 \approx \langle V \rangle_2 \approx \dots \approx \langle V \rangle_M$. Damit sind auch die charakteristischen Frequenzen aller Schlaufen gleich und alle Josephson-Kontakte im Netzwerk oszillieren mit derselben Frequenz. Dieser Oszillationszustand erzeugt eine große Amplitude der Gesamtspannung $V(t)$ über den seriellen SQIF, die die resonante Struktur leicht anregen kann, so dass I - $\langle V \rangle$ -Stufen auftreten. Die gleiche Situation mit $\langle V \rangle_1 \approx \langle V \rangle_2 \approx \dots \approx \langle V \rangle_M$ entsteht für große Transportstromwerte $I > 500 \mu\text{A}$, da dann alle Josephson-Kontakte nahe ihres Ohmschen Verhaltens sind und damit unabhängig von $B_{\perp}^{(c)}$ mit derselben Frequenz oszillieren. Deshalb treten die I - $\langle V \rangle$ -Stufen für $I > 500 \mu\text{A}$ unabhängig vom Magnetfeld $B_{\perp}^{(c)}$ auf. Für $|B_{\perp}^{(c)}| > 0$ und $I < 500 \mu\text{A}$ sind die Schlaufenspannungen $\langle V \rangle_k$ jedoch alle voneinander verschieden, da die Schlaufen unterschiedliche Flächen besitzen und damit alle $\langle V \rangle_k$ mit anderer Periode bezüglich $B_{\perp}^{(c)}$ modulieren. Die Josephson-Kontakte verschiedener Schlaufen oszillieren deshalb mit unterschiedlichen Frequenzen und keine Resonanz wird angeregt. Für kleine Transportströme $I < 500 \mu\text{A}$ und endliche Magnetfelder $|B_{\perp}^{(c)}| > 0$ treten deshalb keine I - $\langle V \rangle$ -Stufen auf.

Die "Plateaus" aller I - $\langle V \rangle$ -Stufen des seriellen SQIFs besitzen eine endliche Steigung. Dies kann zum einen dadurch erklärt werden, dass die Resonanzkurve des Resonators eine endliche Breite besitzt und dadurch die Resonanzfrequenz ν_{f_0} nicht eindeutig festliegt. Dies bedeutet, dass der Resonator in einem Frequenzband angeregt werden kann und dadurch die Stufenspannung $V_{\text{Stufe},k}$ variiert. Zum anderen müssen beim seriellen SQIF nicht alle Schlaufenspannungen auf die gemeinsame Frequenz ν_{f_0} synchronisieren. Je nach Wert des Transportstroms und des primären Magnetfeldes können die einzelnen Schlaufen auf die Frequenz ν_{f_0} synchronisieren oder mit einer eigenen charakteristischen Frequenz oszillieren. Die Schlaufen reagieren dabei alle verschieden, da sich ihre Flächeninhalte unterscheiden. So existieren I - $\langle V \rangle$ -Stufen mit geringer Plateausteigung (in Abb. 4.9 z.B. die sechste oder siebte Stufe), so dass für diese

Transportstromwerte sehr viele der Schleifen synchronisiert sind. Andere I - $\langle V \rangle$ -Stufen besitzen dagegen eine deutlich größere Plateau-steigung, was auf eine kleinere Gruppe synchronisierter Schleifen hinweist. Ferner sind die Kanten der I - $\langle V \rangle$ -Stufen beim seriellen SQIF abgerundet, was darauf hindeutet, dass dort nach und nach die einzelnen Schleifen synchronisieren. Dies ist im Gegensatz zu den I - $\langle V \rangle$ -Stufen des parallelen SQIFs. Da beim parallelen SQIF die Kontakte stark gekoppelt sind, sind die I - $\langle V \rangle$ -Stufen nicht abgerundet (s. Abb. 4.3) und besitzen scharfe Kanten. Beim parallelen SQIF oszillieren die Kontakte aufgrund der Parallelschaltung mit einer gemeinsamen charakteristischen Frequenz und können damit nur gemeinsam synchronisieren.

Anhand der I - $\langle V \rangle$ -Kennlinien aus Abb. 4.9 ist bereits das eindeutige und signifikante Verhalten der Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken des seriellen SQIFs erkennbar. Auf die experimentellen $\langle V \rangle$ - $B_{\perp}^{(c)}$ -Kennlinien wird nun in den folgenden Absätzen näher eingegangen. Abb. 4.10 zeigt eine dreidimensionale Darstellung der experimentellen $\langle V \rangle$ - $B_{\perp}^{(c)}$ -Kennlinien. Jede Kennlinie wurde für einen festen Wert des Transportstroms I aufgenommen. Der Transportstrom wurde bei $I = 225 \mu\text{A}$ beginnend in Schritten von $6 \mu\text{A}$ bis zum Wert $I = 627 \mu\text{A}$ erhöht. Die ersten fünf I - $\langle V \rangle$ -Stufen (mit $k = 2, \dots, 6$) sind in der dreidimensionalen Darstellung deutlich erkennbar, da die $\langle V \rangle$ - $B_{\perp}^{(c)}$ -Kennlinien auf den Plateaus der I - $\langle V \rangle$ -Stufen "dichter" liegen.

Für kleine Werte $I = 225 \mu\text{A}$ liegt der Transportstrom für alle Magnetfeldwerte $B_{\perp}^{(c)}$ unter dem kritischen Strom des seriellen SQIFs $I_{c,\text{SQIF}}$, so dass keine Spannung abfällt $\langle V \rangle = 0$. In diesem Fall sind alle Ströme im seriellen Netzwerk Supraströme. In der Umgebung von $B_{\perp}^{(c)} = 0$ ist $I_{c,\text{SQIF}}$ maximal, so dass bei Erhöhen von I in diesem Bereich die mittlere Spannung weiterhin verschwindet $\langle V \rangle = 0$. Bei Erreichen von $I = 309 \mu\text{A}$ hat der Transportstrom dann den maximalen kritischen Netzwerkstrom überschritten, so dass für alle primären Magnetfeldwerte eine endliche Spannung $\langle V \rangle > 0$ abfällt. Die Magnetfeld-Spannungs-Kennlinie für $I = 309 \mu\text{A}$ zeigt ein eindeutiges signifikantes Minimum bei $B_{\perp}^{(c)} \approx 0$, das zu beiden Seiten von zwei Maxima umgeben wird. Für größere Magnetfelder $|B_{\perp}^{(c)}| > 10 \mu\text{T}$ moduliert die mittlere Spannung mit verminderter Amplitude um den mittleren Spannungswert $\bar{V} \approx 1.0 \text{ mV}$. Diese Kennlinie mit eindeutigem Minimum wird nachfolgend noch näher beschrieben.

Wird der Transportstrom über den Wert von $I = 309 \mu\text{A}$ auf $I = 327 \mu\text{A} \approx 2.18 I_c$ erhöht, so bildet sich am Ort des vorigen Minimums ein lokales Maximum aus, das von zwei scharfen Minima symmetrisch umgeben wird. Als Erklärung für das Zustandekommen dieser Hut-förmigen Struktur könnte man anführen, dass einige der Schleifen bereits im LC -resonanten Modus arbeiten. Die LC -Resonanzen in einzelnen Schleifen sind in Abschnitt 3.5 die Erklärung für das Auftreten ähnlich aussehender Hut-förmiger Strukturen in den theoretischen Spannungsantworten (s. Abb. 3.10). Das Problem hierbei ist, dass in den theoretischen Ergebnissen die resonanten Strukturen in der Spannungsantwort erst bei höheren Transportstromwerten $I > 3.0 I_c$ auftreten und deutlich geringer ausgeprägt sind. So sind die Minima der Hut-förmigen Strukturen in den theoretischen Spannungsantworten nicht besonders scharf und die

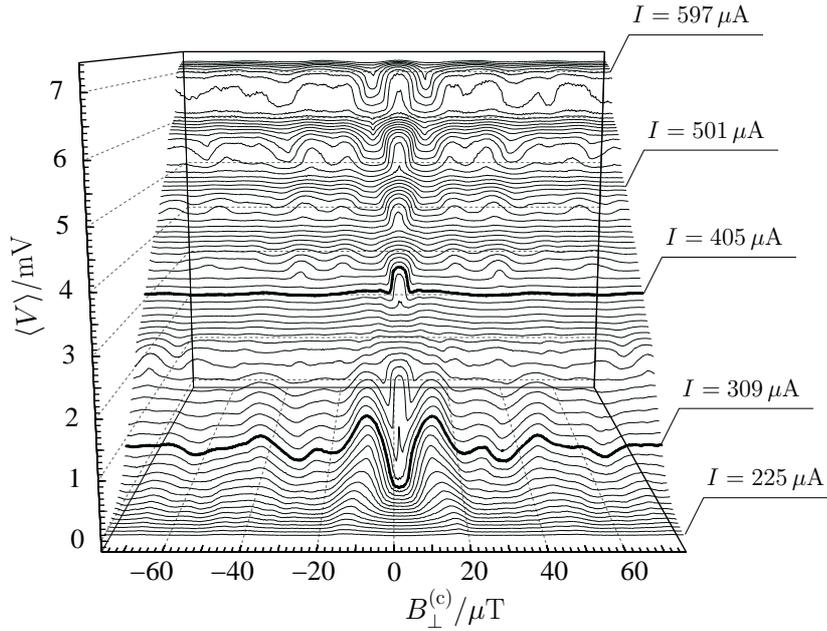


Abbildung 4.10: Experimentelle $\langle V \rangle(B_{\perp}^{(c)})$ -Kennlinien des seriellen SQIFs für verschiedene feste Werte des Transportstroms I . Der Transportstrom wurde bei $I = 225 \mu\text{A}$ beginnend in Schritten von $6 \mu\text{A}$ bis $I = 627 \mu\text{A}$ erhöht. Deutlich erkennbar sind die ersten fünf I - $\langle V \rangle$ -Stufen. Die hervorgehobenen Kennlinien für $I = 309 \mu\text{A}$ und $I = 405 \mu\text{A}$ sind in Abb. 4.11 vergrößert dargestellt.

maximalen Transferfaktoren sind deutlich kleiner. Dies legt den Schluss nahe, dass die Hut-förmigen Strukturen im Experiment keine (reinen) LC -resonanten Strukturen sind. Hier sei daran erinnert, dass die LC -resonanten Strukturen aus Abschnitt 3.5 durch *interne* LC -Resonanzen im SQIF-Netzwerk erzeugt werden.⁸

Im Experiment treten die Hut-förmigen $\langle V \rangle$ - $B_{\perp}^{(c)}$ -Kennlinien nahe den I - $\langle V \rangle$ -Stufen auf. Da die I - $\langle V \rangle$ -Stufen von einem Zusammenspiel des seriellen SQIFs mit einem Resonator der SQIF-Schaltung stammen, handelt es sich bei den Hut-förmigen Spannungsantwort im Experiment vielmehr um eine Auswirkung dieser *externen* Resonanz. Ein weiteres Argument hierfür ist, dass die resonante Struktur in der Spannungsantwort für höhere Transportströme $I = 339 \mu\text{A}$ verschwindet und die Spannungsantwort nur noch sehr gering mit $B_{\perp}^{(c)}$ moduliert. Für $I = 339 \mu\text{A}$ befindet sich die mittlere Spannung $\langle V \rangle$ auf dem Plateau der zweiten I - $\langle V \rangle$ -Stufe. Dieses Verhalten wiederholt sich auf allen weiteren I - $\langle V \rangle$ -Stufen, d.h. bei weiterem Erhöhen von I wechseln sich die Spannungsantworten mit resonantem Maximum mit den (fast) magnetfeldunabhängigen Spannungsantworten auf den Stufenplateaus ab (s. Abb. 4.10).

Um das Zustandekommen der resonanten Spannungsantworten mit signifikantem und eindeutigem Maximum bei $B_{\perp}^{(c)} = 0$ (d.h. bei $B_{\perp}^{(1)} = 0$) näher zu verstehen, muss das Zusammenspiel des seriellen SQIFs mit einem vom SQIF selbst erregbaren Resonator näher untersucht werden. Dazu ist es insbesondere notwendig, das Verhalten serieller

⁸Die resonanten Schwingkreise werden von den Netzwerk-Induktivitäten L und den Kontaktkapazitäten C gebildet.

Josephson-Kontakt-Netzwerke in elektromagnetischen Feldern zu untersuchen, deren Frequenz in der Größenordnung der Josephson-Frequenz ν_B liegt. Das in Abschnitt 3.2 diskutierte theoretische Modell eignet sich auch zur Beschreibung der Dynamik serieller Netzwerke in hochfrequenten externen Feldern, so dass auf dieser Basis weiterführende Betrachtungen möglich sind.

Die in Abb. 4.10 hervorgehobenen Spannungsantworten sind in Abb. 4.11 für einen größeren Bereich des magnetischen Kontrollfeldes vergrößert dargestellt. Abb. 4.11 (a) zeigt die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik für den Transportstromwert $I = 309 \mu\text{A}$, der knapp größer ist als der maximale kritische Strom des SQIFs. Die mittlere Spannung besitzt bei $B_{\perp}^{(c)} \approx 1.5 \mu\text{T}$ ihr signifikantes und eindeutiges Minimum. Daraus kann geschlossen werden, dass am Ort des seriellen SQIFs im Experiment ein externes magnetisches Restfeld der Stärke $B_{\perp}^{(\text{ext})} \approx -1.5 \mu\text{T}$ herrschte, so dass am Ort des Minimums das primäre Magnetfeld verschwand $B_{\perp}^{(1)} = B_{\perp}^{(\text{ext})} + B_{\perp}^{(c)} \approx 0$. Das eindeutige Minimum mit $\langle V \rangle_{\text{min}} \approx 0.23 \text{ mV}$ wird von zwei Maxima mit $\langle V \rangle_{\text{max}} \approx 1.5 \text{ mV}$ symmetrisch umgeben. Daraus resultiert ein maximaler Spannungshub von $\Delta V \approx 1.27 \text{ mV}$. Die Breite des Minimums bei $\Delta V/2$ beträgt $\Delta B \approx 6.5 \mu\text{T}$ und der maximale Transferfaktor ist durch $V_{B^{(c)}} \approx 500 \text{ V/T}$ gegeben. Für größere Magnetfeldwerte moduliert die mittlere Spannung mit einer kleinen Amplitude von $\approx 0.2 \text{ mV}$ um einen mittleren Spannungswert von $\bar{V} \approx 1.0 \text{ mV}$.

Für leicht höhere Transportstromwerte $I = 318 \mu\text{A}$ (in Abb. 4.11 nicht dargestellt) erreicht der maximale Transferfaktor mit $V_{B^{(c)}} \approx 700 \text{ V/T}$ sogar noch größere Werte. Die Werte der maximalen Transferfaktoren des seriellen SQIFs sind um den Faktor zwei bis drei größer als der maximale Transferfaktor des parallelen SQIFs mit $V_{B^{(c)}} \approx 200 \text{ V/T}$ (s. Seite 152). Diese Vergrößerung des Transferfaktors des seriellen SQIFs ist auf die resonante Kopplung des seriellen SQIFs mit dem Resonator zurückzuführen. Diese resonante Kopplung ist für die Bildung der I - $\langle V \rangle$ -Stufen verantwortlich und führt zu einer Vergrößerung von $V_{B^{(c)}}$.

Abb. 4.11 (b) zeigt die experimentelle Spannungsantwort für $I = 402 \mu\text{A}$. Für diesen Wert des Transportstroms besitzt die Spannungsantwort bei $B_{\perp}^{(c)} \approx 1.5 \mu\text{T}$ ein signifikantes Maximum. Der maximale Spannungswert $\langle V \rangle_{\text{max}}$ liegt auf der dritten I - $\langle V \rangle$ -Stufe und tritt bei gleichem Wert des magnetischen Kontrollfeldes auf wie das Minimum der Spannungsantwort aus Abb. 4.11 (a), so dass auch hier auf ein magnetisches Restfeld der Stärke $B_{\perp}^{(\text{ext})} \approx -1.5 \mu\text{T}$ geschlossen werden kann. Außerhalb des Maximums moduliert die mittlere Spannung mit einer Amplitude von $\approx 30 \mu\text{V}$ um den mittleren Spannungswert $\bar{V} \approx 3.14 \text{ mV}$. Der Spannungshub des Maximums beträgt $\Delta V \approx 0.5 \text{ mV}$ und der maximale Transferfaktor kann zu $V_{B^{(c)}} \approx 700 \text{ V/T}$ angegeben werden.

Die Spannungsantwort mit signifikantem Maximum kommt durch eine Kopplung des seriellen SQIFs an die fundamentale Mode der resonanten geometrischen Struktur der SQIF-Schaltung zustande. Für Magnetfeldwerte außerhalb des Maximums (d.h. für $|B_{\perp}^{(1)}| > 0$) und für $I = 402 \mu\text{A}$ oszillieren die Josephson-Kontakte verschiedener Schleifen mit unterschiedlichen charakteristischen Frequenzen (s. oben), so dass der

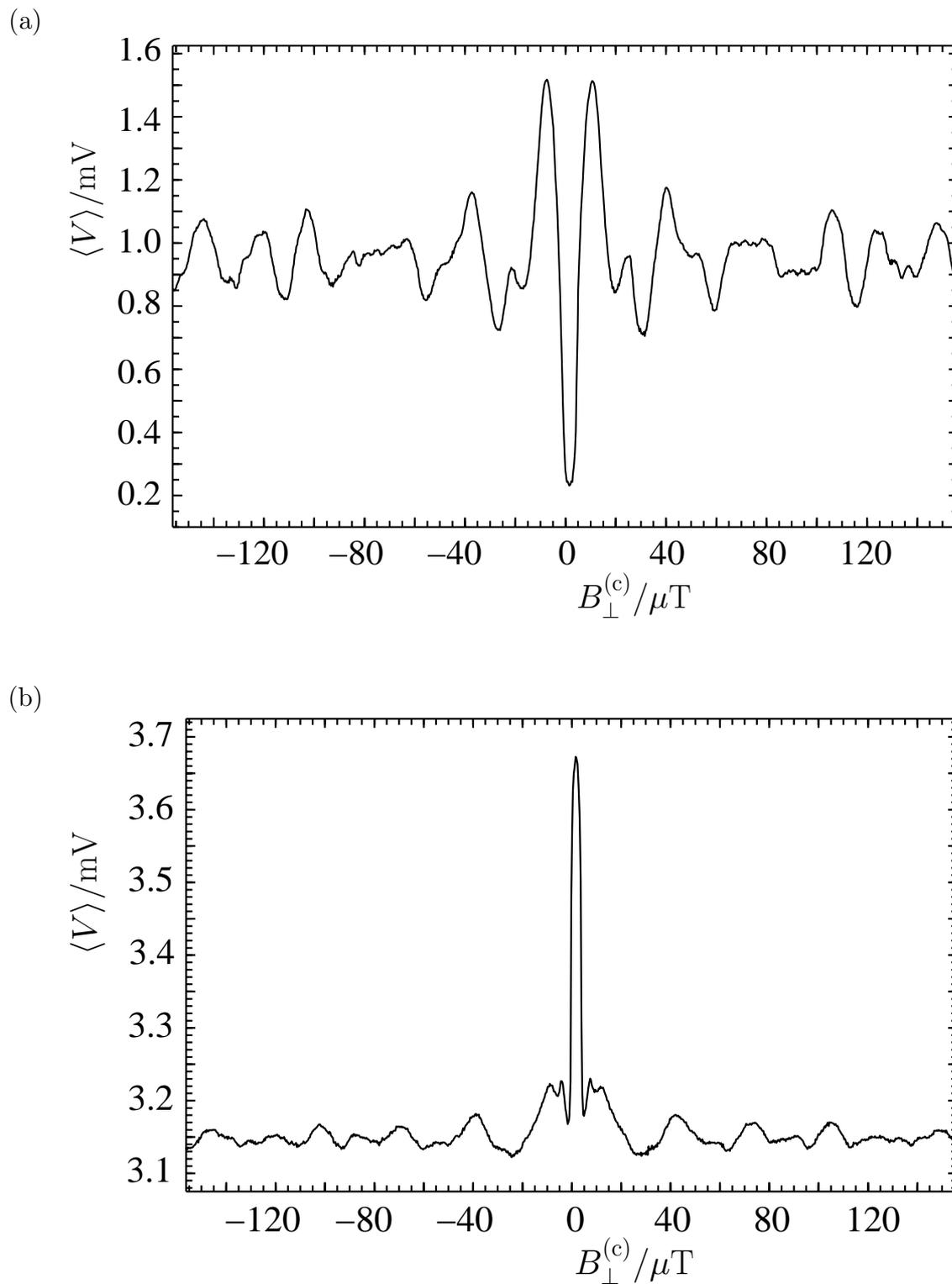


Abbildung 4.11: Experimentelle Spannungsantwort des seriellen SQIFs in Abhängigkeit des magnetischen Kontrollfeldes $B_{\perp}^{(c)}$. In (a) ist der Wert des Transportstroms mit $I = 309 \mu\text{A}$ knapp größer als der kritische Netzwerkstrom. In (b) besitzt der serielle SQIF für $I = 402 \mu\text{A}$ eine resonante Spannungsantwort.

Resonator nicht angeregt wird und über den seriellen SQIF die mittlere Spannung \bar{V} abfällt. Bei $B_{\perp}^{(c)} \approx 1.5 \mu\text{T}$ (d.h. für $|B_{\perp}^{(1)}| = 0$) wird dann die fundamentale Mode mit Resonanzfrequenz ν_{f_0} angeregt, da dort die Josephson-Kontakte mit einer gemeinsamen charakteristischen Frequenz oszillieren (s. oben). Ist die Resonanz angeregt, synchronisieren die Josephson-Kontakte auf die Resonanzfrequenz ν_{f_0} und es kommt zu einer Vergrößerung der mittleren Spannung und damit zur Ausbildung des Maximums. Ein Vergleich der Spannungsantworten aus Abb. 4.11 (a) und (b) zeigt, dass die resonante Spannungsantwort aus (b) trotz eines kleineren Spannungshubs den größeren maximalen Transferfaktor besitzt. Dies bedeutet, dass der Mechanismus der resonanten Rückkopplung sehr sensitiv auf primäre Magnetfelder ist und dadurch Spannungsantworten mit sehr hohen Transferfaktoren erzeugt werden können.

Unabhängig vom Wert des Transportstroms zeigen die Spannungsantworten des seriellen SQIFs eine hohe Symmetrie bezüglich $B_{\perp}^{(1)} \rightarrow -B_{\perp}^{(1)}$ (s. Abb. 4.10 und Abb. 4.11). Dies ist darauf zurückzuführen, dass das sekundäre Magnetfeld des seriellen SQIFs diese Symmetrie besitzt. Das sekundäre Magnetfeld wird von der Transportstromverteilung und von den Abschirmströmen erzeugt, die in den Schlaufen des seriellen SQIFs fließen. Trotz dass alle Schlaufenflächen im seriellen SQIF verschieden sind, bildet die leiterförmige Geometrie des seriellen SQIFs (s. Abb. 4.2) und der spiegelsymmetrische Aufbau der SQIF-Schaltung eine Anordnung, die symmetrisch bezüglich einer Umkehr der Orientierung des primären Magnetfeldes ist. Die noch verbleibende sehr geringe Asymmetrie in den Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken sind eine Folge von Imperfektionen der Schaltung. So können Streuungen in den Kontaktparametern oder leicht vom Design abweichende Leitungsführungen Asymmetrien im sekundären Magnetfeld oder im magnetischen Restfeld erzeugen.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird die nicht-resonante experimentelle Spannungsantwort des seriellen SQIFs mit der theoretischen Vorhersage verglichen. In Kapitel 3 wurde das theoretische Modell zur Beschreibung der Dynamik und des Antwortverhaltens serieller Netzwerke diskutiert. Durch numerische Integration der Netzwerkgleichungen (3.18) wurden die theoretischen Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken des seriellen SQIFs berechnet und bereits in Abschnitt 3.5 diskutiert (s. Abb. 3.10). Für alle Parameter des Netzwerks und der Josephson-Kontakte wurden dazu die Parameter des experimentellen SQIFs aus Abschnitt 4.1 verwendet. Das theoretische Modell aus Kapitel 3 beinhaltet den Resonator der experimentellen SQIF-Schaltung nicht, die im Experiment zur Bildung der I - $\langle V \rangle$ -Stufen führte, d.h. es beschreibt das Verhalten des seriellen SQIFs ohne die resonante Rückkopplung. Aus diesem Grund treten die I - $\langle V \rangle$ -Stufen in der theoretischen Vorhersage in Abb. 3.10 nicht auf. Um dennoch einen Vergleich zwischen Theorie und Experiment machen zu können, beschränken wir uns im Folgenden auf einen Transportstromwert nahe des maximalen kritischen Netzwerkstroms, für den im Experiment die Resonanzen nicht dominant sind.

Abb. 4.12 zeigt die theoretische und experimentelle Spannungsantwort des seriellen SQIFs aus Abb. 4.2. Für beide Fälle wurde der Wert des Transportstroms mit $I = 318 \mu\text{A}$ knapp über dem experimentellen Wert des maximalen kritischen Netz-

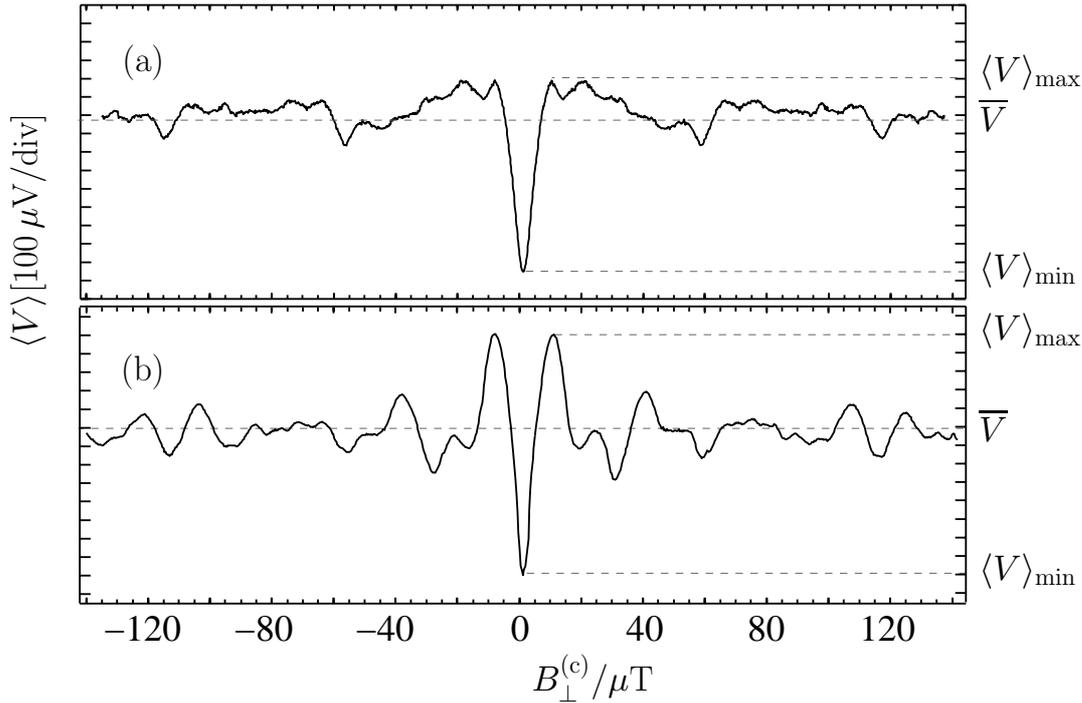


Abbildung 4.12: Vergleich der experimentellen $\langle V \rangle - B_{\perp}^{(c)}$ -Kennlinie (b) des seriellen SQIFs mit der theoretischen Vorhersage (a). In beiden Fällen ist der Transportstrom mit $I = 318 \mu\text{A}$ knapp größer als der kritische Netzwerkstrom. Abgesehen von den Maxima bei $B_{\perp}^{(c)} \approx \pm 10 \mu\text{T}$ stimmt das theoretische Ergebnis qualitativ mit dem Experiment überein.

werkstroms gewählt. In der theoretischen Kennlinie wurde berücksichtigt, dass im Experiment der mittlere kritische Strom der Kontakte mit $I_c \approx 150 \mu\text{A}$ (s. Seite 159) geringer ausfiel als der im Design vorgesehene Wert von $I_c = 190 \mu\text{A}$. Ferner wurde die theoretische Kurve um das im Experiment vorhandene Restfeld von $|B_{\perp}^{(\text{ext})}| \approx 1.5 \mu\text{T}$ verschoben.

Abgesehen von den Maxima bei $B_{\perp}^{(c)} \approx \pm 10 \mu\text{T}$ zeigt Abb. 4.12 eine qualitative Übereinstimmung der Theorie mit dem Experiment. Die Spannungsantworten zeigen beide das signifikante und eindeutige Minimum $\langle V \rangle_{\min}$ bei $B_{\perp}^{(c)} \approx 1.5 \mu\text{T}$ und modulieren außerhalb des Minimums mit kleiner Amplitude um ihren mittleren Spannungswert \bar{V} . Die Spannungsdifferenzen zwischen minimalem Spannungswert $\langle V \rangle_{\min}$ und der mittleren Spannung \bar{V} auf dem oberen Spannungsast $\delta V = \bar{V} - \langle V \rangle_{\min}$ besitzen in beiden Fällen gleiche Werte $\delta V^{(\text{theo})} \approx \delta V^{(\text{exp})} \approx 800 \mu\text{V}$. Eine weitere Übereinstimmung der Kennlinien ist die Breite ΔB des Minimums bei $\delta V/2$. Sie ergibt sich bei der theoretischen und der experimentellen Kennlinie zu $\Delta B^{(\text{theo})} \approx \Delta B^{(\text{exp})} \approx 7 \mu\text{T}$. Trotz der Übereinstimmung von δV und ΔB stimmen die maximalen Transferfaktoren nicht überein. Der experimentelle Transferfaktor ist mit $V_{B^{(c)}}^{(\text{exp})} \approx 600 \text{V/T}$ um das Dreifache größer als der theoretische Wert $V_{B^{(c)}}^{(\text{theo})} \approx 200 \text{V/T}$. Eine mögliche Ursache für diese Abweichung der maximalen Transferfaktoren können die bereits diskutierten Resonanzen sein, die nur im Experiment auftreten.

Nur eine sehr geringe Übereinstimmung zeigen die Feinstrukturen der theoretischen

und der experimentellen Spannungsantworten. So treten in der theoretischen Spannungsantwort die beiden symmetrisch zum Minimum liegenden Maxima nicht auf und außerhalb des Minimums sind die Modulationen der mittleren Spannung um \bar{V} deutlich geringer als im Experiment. Lediglich die lokalen Minima auf dem \bar{V} -Spannungsast bei den Magnetfeldwerten $B_{\perp}^{(c)} \approx \pm 60 \mu\text{T}$ und $B_{\perp}^{(c)} \approx \pm 115 \mu\text{T}$ stimmen in beiden Fällen überein. Die Abweichungen in den Feinstrukturen der Spannungsantworten bedeutet, dass die effektive Flächenverteilung im experimentellen SQIF von der vorgesehenen Flächenverteilung im Design abweicht. Dies ist gegeben, da die supraleitenden Schichten der experimentellen Schaltung die primären magnetischen Felder auf spezifische Weise in die Schleifen des seriellen SQIFs fokussieren. Dies erzeugt im Experiment eine renormierte effektive Flächenverteilung, die eine andere Spannungsantwort zur Folge hat. Für verbesserte theoretische Modelle zur Beschreibung von seriellen SQIFs ist eine genauere Bestimmung der effektiven Flächenverteilung notwendig.

Kapitel 5

Zusammenfassung der Ergebnisse, Diskussion und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Theorie zur Beschreibung der Spannungsantwortfunktion supraleitender nichtlinearer Josephson-Kontakt-Netzwerke entwickelt. Die betrachteten Netzwerke sind supraleitende Quanten-Interferometer und bestehen aus der Parallel- oder Serienschaltung einer Vielzahl von supraleitenden Schlaufen, die jeweils von zwei Josephson-Kontakten gebildet werden. Durch die explizite Ableitung und Analyse von Netzwerkgleichungen wurde bestimmt, wie der zeitliche Mittelwert der Spannung über stromgetriebene Netzwerke vom äußeren Magnetfeld und vom Transportstrom abhängt und wie die Spannungsantwort von der Flächenverteilung der Netzwerkschlaufen bestimmt wird. Dabei zeigte sich, dass Netzwerke mit einer unkonventionellen und insbesondere nichtperiodischen Flächenverteilung eine Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik besitzen, die nur in der Umgebung verschwindender Magnetfeldwerte signifikant und eindeutig ist. Aufgrund dieser Eigenschaft wurden Netzwerke mit unkonventionellen Flächenverteilungen als *Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter* (SQIF) bezeichnet. Die theoretischen Vorhersagen wurden im Experiment mit SQIF-Schaltungen bestätigt, die auf der Basis der entwickelten theoretischen Modelle konzipiert wurden. In diesem letzten Kapitel werden die Ergebnisse der Arbeit nochmals zusammengefasst und im Hinblick auf die potentielle Anwendung der SQIF-Netzwerke als neuartige supraleitungselektronische Bauelemente diskutiert. Dabei werden mögliche interessante Einsatzbereiche von SQIFs erörtert und weiterführende Untersuchungen und Problemstellungen aufgezeigt.

Parallele und serielle Josephson-Kontakt-Netzwerke

Der Ausgangspunkt für diese Arbeit war die Frage, wie die Spannungsantwortfunktion stromgetriebener Josephson-Kontakt-Netzwerke durch die Netzwerkstruktur (d.h. die Art der Verschaltung der Josephson-Kontakte) bestimmt wird und wie die Systemparameter die Spannungsantwort beeinflussen. Bisher gelang eine weitreichende Beantwortung dieser Frage nur für sehr kleine Netzwerke wie einer Parallelschaltung

zweier Kontakte (dc-SQUID). In ihrer allgemeinen Form ist diese Frage nur sehr schwer zu beantworten, da Josephson-Kontakte nichtlineare Oszillatoren sind und die Kontakte in Netzwerken nicht nur über die Ströme und Spannungen gekoppelt sind, sondern ebenfalls über die quantenmechanische Bedingung der Flussquantisierung. Aus diesem Grund wurden in dieser Arbeit Netzwerkstrukturen betrachtet, die eine Weiterentwicklung der einfachen Geometrie des dc-SQUIDs sind. Dies ist zum einen das parallele Netzwerk, in dem eine Anzahl von N Josephson-Kontakten supraleitend parallel geschaltet sind, und zum anderen das serielle Netzwerk aus supraleitenden Schleifen, die jeweils zwei parallel geschaltete Kontakte enthalten. Die Josephson-Kontakte wurden als punktförmig angenommen, so dass die Kontakte selbst keinen inneren Freiheitsgrad besitzen und die kollektive Dynamik der verkoppelten Josephson-Kontakte die Dynamik des Netzwerks ausmacht. Auf diese Weise standen die Geometrie des Netzwerks (d.h. insbesondere die Flächenverteilung der Schleifen) und die Systemparameter (wie Induktivitäten und die Kontaktparameter) im Vordergrund der Analyse. Zur Beschreibung der Dynamik eines einzelnen Josephson-Kontakts wurde das "Resistively and Capacitively Shunted Junction Model" (RCSJ-Modell) gewählt, da es in sehr guter Näherung das dynamische Verhalten einer großen Klasse von Josephson-Kontakten beschreibt. Zu dieser Klasse zählen insbesondere die in den experimentellen Schaltungen verwendeten extern geshunteten Niob-Kontakte. Die entwickelte Theorie (insbesondere die Netzwerkgleichungen) zur Beschreibung paralleler und serieller Netzwerke ist jedoch universell und auch auf andere Strom-Phase-Beziehungen der Josephson-Kontakte übertragbar.

Theoretische Beschreibung paralleler und serieller Netzwerke

Zur Beschreibung der Dynamik und des Spannungsantwortverhaltens von Josephson-Kontakt-Netzwerken wurden ausgehend von grundlegenden Gleichungen theoretische Modelle für parallele und serielle Netzwerke entwickelt, wobei als dynamische Variablen die eichinvarianten Phasendifferenzen der Josephson-Kontakte dienten. Eine zentrale Rolle bei der Herleitung der theoretischen Modelle spielte die quantenmechanische Bedingung der Flussquantisierung, nach der die Differenz der Phasendifferenzen zweier Kontakte einer Netzwerkschleife proportional zum gesamten eingeschlossenen magnetischen Fluss ist, der im allgemeinen Fall vom primären externen Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ und von sekundären magnetischen Eigenfeldern $\mathbf{B}^{(2)}$ erzeugt wird. Für eine systematische Analyse wurde zwischen Netzwerken mit vernachlässigbaren sekundären magnetischen Eigenfeldern ($\beta_{L,\max} = 0$) und Netzwerken mit endlichen induktiven Kopplungen ($\beta_{L,\max} > 0$) unterschieden. Dies ermöglichte für den Fall $\beta_{L,\max} = 0$ die Entwicklung eines einfachen Modells, das die grundlegenden Interferenzeigenschaften paralleler Netzwerke beschreibt ("Ein-Phasen-Modell"), und darauf aufbauend die Diskussion, welche Auswirkungen die selbstinduzierten magnetische Eigenfelder auf die Dynamik und auf die Spannungsantwort der Netzwerke haben. Die Diskussion der induktiven Effekte erfolgte einerseits anhand der induktiven Netzwerkgleichungen, die die volle nichtlineare Dynamik der Netzwerke beschreiben und andererseits durch die Entwicklung und Her-

leitung eines analytischen Modells zur Bestimmung der Spannungsantwort induktiver Netzwerke, das die Zeitabhängigkeit der Josephson-Oszillation harmonisch nähert und nur die charakteristische Grundfrequenz der Kontakte berücksichtigt. Die theoretischen Modelle und die Ergebnisse ihrer Analyse werden nun im Folgenden nocheinmal zusammengefasst.

Für den Grenzfall vernachlässigbarer magnetischer Eigenfelder ermöglichte die Flussquantisierungsbedingung die Reduktion der N Freiheitsgrade eines parallelen Netzwerks auf einen einzigen effektiven Freiheitsgrad. Dabei wird das parallele Netzwerk auf einen einzigen virtuellen Josephson-Kontakt abgebildet, so dass die Dynamik des gesamten Netzwerks durch eine einzige gewöhnliche nichtlineare RCSJ-artige Differentialgleichung für die verbleibende Phasenvariable beschreibbar ist. Die treibenden Terme der Differentialgleichung sind der Transportstrom und elektromotive Terme, die die zeitliche Variation des primären Magnetfeldes beinhalten. Als zentrale Größe des “Ein-Phasen-Modells” wurde der komplexe Strukturfaktor $S_N(\mathbf{B}^{(1)})$ des parallelen Netzwerks eingeführt, der sehr sensitiv vom extern kontrollierbaren primären Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ abhängt und von der Flächenverteilung der Schleifen im Netzwerk bestimmt wird. Jedes parallele Netzwerk besitzt einen eigenen charakteristischen Strukturfaktor, der zudem sensitiv auf Permutationen der Schleifenflächen ist. Der Vorteil dieses Modells ist, dass eine effektive und numerisch einfach zu lösende gewöhnliche Differentialgleichung ausreicht, um die Eigenschaften paralleler Netzwerke (mit $\beta_{L,\max} = 0$) für den allgemeinen Fall beliebiger zeitlich variierender magnetischer Felder und beliebiger Werte der Kontaktparameter zu untersuchen.

Für den Fall überdämpfter Kontakte und quasistatischer primärer Magnetfelder wurde die Differentialgleichung des “Ein-Phasen-Modells” analytisch gelöst und aus der Lösung die Spannungsantwortfunktion paralleler Netzwerke für beliebige Werte und Verteilungen der Kontaktparameter und für beliebige Flächenverteilungen in analytischer Form bestimmt. Dabei zeigte sich, dass der kritische Strom des parallelen Netzwerks proportional zum Betrag des Strukturfaktors ist und ebenso die mittlere Spannung über das parallele Netzwerk ausschließlich über den Betrag des Strukturfaktors vom primären Magnetfeld abhängt. Damit kontrolliert alleinig die Flächenverteilung der parallelen Netzwerke die qualitative Magnetfeldabhängigkeit der Spannungsantwort und insbesondere die Periode der mittleren Spannung bezüglich des primären Magnetfeldes. Die Kontaktparameter beeinflussen die Spannungsantwort lediglich quantitativ und bestimmen die mittlere Spannung nur über ihre Mittelwerte. Variationen der Kontaktparameter oder mögliche Parameterstreuungen haben damit keinen Einfluss auf das qualitative Verhalten der Spannungsantwort.

Das “Ein-Phasen-Modell” paralleler Netzwerke ist auf jede einzelne der M Schleifen eines seriellen Netzwerks anwendbar. Im Grenzfall verschwindender magnetischer Eigenfelder und überdämpfter Kontakte kann damit die Spannungsantwort serieller Netzwerke für beliebige Flächenverteilungen und beliebige Parameterwerte in analytischer Form angegeben werden. Die Spannungsantwort ergibt sich aus der Summe der Spannungen über die einzelnen Schleifen, die abhängig von den Schleifenflächen und

den Kontaktparametern alle verschieden sein können. Als wichtiges Ergebnis ergab sich ebenfalls bei seriellen Netzwerken, dass die Flächenverteilung im Wesentlichen das qualitative Verhalten der Spannungsantwort kontrolliert und insbesondere die Magnetfeldperiode bestimmt.

Sind die kritischen Ströme der Josephson-Kontakte nicht klein oder sind die Eigen- und Gegeninduktivitäten im Netzwerk nicht vernachlässigbar, so müssen die Biot-Savart-artigen induktiven Kopplungen zwischen den im Netzwerk fließenden Strömen berücksichtigt werden.¹ In diesem Fall sind die sekundären magnetischen Eigenfelder genügend groß und induktive Effekte beeinflussen die Dynamik und somit das Antwortverhalten der Josephson-Kontakt-Netzwerke.

Bei induktiven Netzwerken müssen alle N Freiheitsgrade der N Josephson-Kontakte berücksichtigt werden und eine Reduktion der Freiheitsgrade wie im Fall des “Ein-Phasen-Modells” ist nicht mehr möglich. In dieser Arbeit wurden für parallele und serielle Netzwerke mit induktiven Kopplungen die Netzwerkgleichungen zur Beschreibung der Dynamik explizit abgeleitet. Dabei wurde das Ampèresche Durchflutungsgesetz in quasistationärer Näherung verwendet, d.h. Retardierungseffekte wurden vernachlässigt. In ihrer allgemeinen Form sind die induktiven Netzwerkgleichungen für beliebige Werte und Verteilungen der Kontaktparameter gültig und lassen beliebige Flächenverteilungen zu. Ferner wurden keine Einschränkungen bezüglich der zeitlichen Abhängigkeit des primären Magnetfeldes gemacht, so dass prinzipiell auch zeitlich variierende primäre Magnetfelder betrachtet werden können. Für die Induktionskoeffizienten, die die Stärke der induktiven Kopplungen beschreiben, wurden für symmetrische Leitungs- und planare leiterförmige Netzwerkgeometrien Näherungsausdrücke explizit hergeleitet, so dass die Netzwerkgleichungen in numerischer Form vorlagen und numerisch gelöst werden konnten. Aus den Lösungen wurden die Spannungsantworten spezieller paralleler und serieller Netzwerke für überdämpfte und unterdämpfte Kontakte sowie für verschieden starke induktive Kopplungen bestimmt und diskutiert. Da die induktiven Netzwerkgleichungen die volle Dynamik der Netzwerke beschreiben, erfüllen die Lösungen die (quasistationären) Maxwellgleichungen und die mit Hilfe der Lösungen bestimmten physikalischen Größen sind experimentell verifizierbare Messgrößen. Eine exakte analytische Behandlung der induktiven Netzwerkgleichungen ist im Allgemeinen nicht möglich, da sie durch ein System von N gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen für die N eichinvarianten Phasendifferenzen gegeben sind.

Da die induktiven Netzwerkgleichungen nur durch numerische Verfahren exakt lösbar sind und die numerische Integration der N gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen rechenintensiv ist, ist eine solche Analyse der Spannungsantwortfunktion entsprechend aufwendig. Aus diesem Grund und mit dem Ziel ein besseres Verständnis der Auswirkungen induktiver und kapazitiver Effekte in Josephson-Kontakt-Netzwerken zu erhalten, wurde ein analytisches Näherungsmodell zur Bestimmung der Spannungsantwort paralleler induktiver Netzwerke entwickelt. Der Ausgangspunkt für diese

¹Ein Kriterium für die Notwendigkeit der Beachtung induktiver Effekte ist, dass der Induktivitätsparameter der größten Netzwerkschleife $\beta_{L,\max} \simeq 0.1$ oder größer ist.

Näherung ist die Tatsache, dass in parallelen Netzwerken alle Kontakte mit derselben charakteristischen magnetfeldabhängigen Frequenz ν_B oszillieren. Dies ermöglicht zusammen mit der zeitlich gemittelten Flussquantisierung einen Ansatz für die zeitliche Entwicklung der eichinvarianten Phasendifferenzen. Mit der Beschränkung auf die Grundfrequenz ν_B und unter Vernachlässigung aller höheren Harmonischen können aus dem gewählten Ansatz die Spannungen und Ströme im Netzwerk bestimmt werden. Dabei ergab sich, dass innerhalb des Modells die relativen Phasenlagen der Supraströme der Kontakte ausschließlich durch das primäre Magnetfeld bestimmt werden. Werden die insgesamt N Supraströme der Josephson-Kontakte als separate Stromquellen aufgefasst, die mit der Grundfrequenz ν_B harmonisch oszillieren und feste magnetfeldabhängige Phasenlagen besitzen, so können die magnetfeldabhängigen Phasen und Amplituden der über die Kontakte abfallenden Spannungen mit Hilfe eines linearen Netzwerkmodells bestimmt werden. Dieses lineare Netzwerkmodell beschreibt mit Hilfe einer frequenzabhängigen Impedanzmatrix \mathbf{Z} die Antwort des verbleibenden Netzwerks aus Kontaktkapazitäten, Widerständen und Induktivitäten auf eine solche Anregung durch N phasenverschobene Stromquellen. Die implizite Bestimmungsgleichung für die mittlere Spannung in Abhängigkeit vom primären Magnetfeld und vom Transportstrom I ergibt sich letztlich aus einer Bilanz der im parallelen Netzwerk verbrauchten mittleren Leistung. Die zentrale Größe der Bestimmungsgleichung ist der komplexe magnetfeldabhängige Strukturvektor $\mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})$, dessen Komponenten durch die einzelnen Glieder des Strukturfaktors $S_N(\mathbf{B}^{(1)})$ bestimmt werden. Er bestimmt über den Betrag des Vektors $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})$ die Magnetfeldabhängigkeit der Spannungsantwort. Für beliebig starke induktive und kapazitive Kopplungen kann die Spannungsantwort von Netzwerken mit beliebigen Flächenverteilungen durch Lösen der impliziten Bestimmungsgleichung näherungsweise bestimmt werden. Diese Näherungen besitzen eine gute Übereinstimmung mit den (exakten) theoretischen Spannungsantworten, die mit Hilfe der induktiven Netzwerkgleichungen gewonnen wurden.

Für induktive parallele Netzwerke wurde die komplexe Impedanzmatrix \mathbf{Z} explizit bestimmt und gezeigt, dass \mathbf{Z} in orthogonale Projektionen zerlegt werden kann. Diese Projektionen projizieren auf die orthogonalen Eigenräume einer symmetrischen komplexen Matrix \mathbf{Q} , die die Impedanzverteilung in parallelen Netzwerken beschreibt. Diese Zerlegung von \mathbf{Z} ermöglicht eine sehr einfache Bestimmung des Vektors $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{S}_N(\mathbf{B}^{(1)})$ und damit eine einfache Auswertung der impliziten Bestimmungsgleichung für die Spannungsantwort der parallelen Netzwerke. Ferner konnte gezeigt werden, dass mit Hilfe der Eigenwerte der Matrix \mathbf{Q} die Resonanzfrequenzen der resonanten Moden in parallelen Netzwerken bestimmt werden können. Die Induktivitäten der Leiterelemente und die Kapazitäten der Josephson-Kontakte bilden LC -artige Schwingkreise, deren Moden durch die in den Netzwerkschleifen oszillierenden Ströme angeregt werden können, vorausgesetzt dass die Induktivitäten und Kapazitäten geeignete Werte besitzen. Die Anzahl der im Allgemeinen (selbst bei regulären Netzwerken) verschiedenen Resonanzfrequenzen ist durch die Schleifenanzahl $N-1$ gegeben. Da die Amplituden und die Oszillationsfrequenz ν_B der oszillierenden Kreisströme durch das primäre Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ determiniert werden, hängt es von Magnetfeld $\mathbf{B}^{(1)}$ und vom Transportstrom ab,

welche Moden angeregt werden. Von den insgesamt $N-1$ Moden können dabei auch mehrere resonante Moden simultan angeregt werden (resonanter ac-Modus), die dann in der Spannungsantwort paralleler Netzwerke in charakteristischer Weise resonante Strukturen hervorrufen. Da serielle Netzwerke aus Schleifen parallel geschalteter Kontakte bestehen, können dort ebenfalls resonante Strukturen in der Spannungsantwort auftreten, wenn einzelne oder mehrere Schleifen resonant angeregt werden.

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Bild: das “Ein-Phasen-Modell” beschreibt auf der Basis des Strukturfaktors die grundlegenden qualitativen Interferenzeigenschaften paralleler und serieller Josephson-Kontakt-Netzwerke und ermöglicht weitreichende Aussagen über das qualitative Verhalten der Spannungsantwort dieser Netzwerke. Da sich diese grundlegenden Eigenschaften auch auf induktive Netzwerke übertragen, ist der Strukturfaktor ein sehr nützliches Werkzeug zur einfachen Analyse und zur Konstruktion von Netzwerken mit spezifischen Spannungsantwortfunktionen. Quantitative Aussagen über die Spannungsantwort von Netzwerken mit endlichen Induktivitäten und Kapazitäten sind mit Hilfe des analytischen Näherungsmodells möglich. Dieses Modell ermöglicht insbesondere die Erklärung und Bestimmung der LC -resonanten Spannungsantworten mit Hilfe einer einfach auszuwertenden impliziten Bestimmungsgleichung für die mittlere Spannung. Soll die “exakte” Spannungsantwort eines induktiven Netzwerks bestimmt werden, müssen die induktiven Netzwerkgleichungen numerisch gelöst werden. Dieser Weg ist der Aufwendigste, die aus den numerischen Lösungen gewonnenen Spannungsantworten sind dann jedoch in dem Sinne “exakt”, dass sie mit den Maxwell-Gleichungen konsistent sind und direkt mit experimentellen Messungen verglichen werden können.

Theoretische Spannungsantwort paralleler und serieller Netzwerke, Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter (SQIF)

Mit Hilfe der oben beschriebenen theoretischen Modelle wurden die Spannungsantworten paralleler und serieller Netzwerke bestimmt und analysiert. Dabei wurde insbesondere auf die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken der Netzwerke Wert gelegt und untersucht, wie diese von den Kontaktparametern sowie den Induktivitäten abhängen und wie sie von der Flächenverteilung der Netzwerkschleifen bestimmt werden. Für diese Diskussion wurde im Wesentlichen zwischen zwei Klassen von Netzwerken unterschieden, die sich durch die Eigenschaften ihrer Flächenverteilung unterscheiden. Dies ist zum einen die Klasse der konventionellen regulären Netzwerke, in denen alle Schleifenflächen identisch sind und zum anderen die Netzwerkkategorie mit irregulären Flächenverteilungen, die durch verschieden große Netzwerkschleifen charakterisiert sind. Als Vertreter der letzteren Klasse wurden irreguläre Flächenverteilungen gewählt, in denen die Schleifenflächen linear zwischen der kleinsten Fläche a_{\min} und der größten Fläche a_{\max} zunehmen. Das parallele Netzwerk mit linear zunehmenden Schleifenflächen wurde als Gaußsches Netzwerk und das entsprechende serielle Netzwerk als arithmetisches Netzwerk bezeichnet. Die Diskussion der Spannungsantworten

dieser Netzwerke führte auf ganz spezielle irreguläre Flächenverteilungen, die als unkonventionell bezeichnet wurden. Besitzt ein Netzwerk eine solche unkonventionelle Flächenverteilung, so ist die Spannungsantwort bezüglich des primären Magnetfeldes nichtperiodisch und nur in der Umgebung verschwindenden Magnetfeldes signifikant und eindeutig. Diese Netzwerke mit unkonventionellen Flächenverteilungen wurden Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter getauft. Dieser Abschnitt gibt eine Zusammenfassung und einen Überblick über die theoretischen Spannungsantworten der genannten Netzwerke. Dabei werden zuerst die Eigenschaften zusammengestellt, die sowohl parallele als auch serielle Netzwerke besitzen und erst nachfolgend werden die Unterschiede paralleler und serieller Netzwerke diskutiert.

Theoretische Spannungsantwort paralleler und serieller Netzwerke

Als wichtiges Ergebnis ergab sich, dass die qualitative Magnetfeldabhängigkeit der Spannungsantwort der Netzwerke alleinig von der Flächenverteilung der Netzwerkschlaufen festgelegt wird. Es konnte gezeigt werden, dass die Magnetfeldperiode der mittleren Spannung vom Kehrwert des größten gemeinsamen Teilers der Schlaufenflächen bestimmt wird. So besitzen reguläre Netzwerke eine Magnetfeldperiode, die durch das magnetische Flussquant $P_{\Phi^{(1)}} = \Phi_0$ gegeben ist, wenn der primäre magnetische Fluss $\Phi^{(1)}$ auf eine einzige Schlaufenfläche bezogen wird. Das Gaußsche und das arithmetische Netzwerk besitzen dagegen eine sehr viel größere Periode, die in beiden Fällen linear mit der Kontaktanzahl (bzw. Schlaufenanzahl) zunimmt. So ist die Periode des Gaußschen Netzwerks mit N_G Kontakten durch $P_{\Phi^{(1)}} = (2N_G - 3)\Phi_0$ gegeben und damit um den Faktor $(2N_G - 3)$ größer als die des regulären Netzwerks. Dabei sei betont, dass für einen sinnvollen Vergleich des regulären parallelen Netzwerks mit dem Gaußschen Netzwerk (bzw. für den Vergleich des regulären seriellen Netzwerks mit dem arithmetischen Netzwerk) die Gesamtflächen und die maximalen Schlaufenflächen der Netzwerke jeweils identisch gewählt wurden und sich der primäre magnetische Fluss $\Phi^{(1)}$ auf die identische maximale Fläche a_{\max} bezog. Trotz der unterschiedlichen Magnetfeldperioden besitzen beide Netzwerke in der Umgebung der Magnetfeldbereiche mit $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$ (k ganzzahlig) vergleichbare Magnetfeldsensitivitäten, d.h. insbesondere gleiche maximale Transferfaktoren $V_{\Phi^{(1)}} = |\partial_{\Phi^{(1)}} \langle V \rangle|_{\max}$. Dies liegt daran, dass der maximale Transferfaktor im Wesentlichen von der effektiven Gesamtfläche des Netzwerks abhängt, die für die verglichenen Netzwerke identisch ist. Die Magnetfeldperiode kann also ohne einen Verlust der Magnetfeldsensitivität durch die Flächenverteilung kontrolliert werden.

Die große Magnetfeldperiode der Gaußschen und arithmetischen Netzwerke kommt dadurch zustande, dass jede Schlaufe einzeln betrachtet eine eigene Magnetfeldperiode besitzt, die sich von den Perioden aller anderen Schlaufen unterscheidet. Nur für die Werte des primären Magnetfeldes, für die alle primären magnetischen Flüsse in den jeweiligen Netzwerkschlaufen ganzzahlige Vielfache des magnetischen Flussquants sind, d.h. für $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$ (mit k ganzzahlig), kommt es in parallelen Netzwerken zu einer konstruktiven Superposition der phasensensitiven Josephson-Ströme und in seriellen Netzwerken zu einer kohärenten Superposition der einzelnen mittleren Schlau-

fenspannungen. Deshalb unterscheidet sich das Verhalten der Spannungsantwort für $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$ signifikant vom Verhalten zwischen diesen Magnetfeldwerten. Während die mittlere Spannung innerhalb einer Periode $k P_{\Phi^{(1)}} < \Phi^{(1)} < (k + 1) P_{\Phi^{(1)}}$ nur mit stark verminderter Amplitude um einen mittleren Spannungswert \bar{V} moduliert, besitzt sie bei $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$ ein signifikantes Verhalten. Dieses signifikante Verhalten hängt stark von den Werten der Kontaktkapazitäten und der Stärke der induktiven Kopplungen im Netzwerk ab. Liegt die charakteristische Frequenz mit der die Josephson-Kontakte oszillieren außerhalb des Resonanzfrequenzspektrums der LC -resonanten Moden, so arbeitet das Netzwerk im nicht-resonanten ac-Modus und die Spannungsantwort besitzt bei $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$ signifikante globale Minima. Dies ist immer der Fall, wenn die Induktivitäten im Netzwerk vernachlässigbar klein sind oder wenn das Netzwerk nur überdämpfte Kontakte besitzt. Kommt die charakteristische Frequenz (durch geeignete Einstellung des Transportstroms) in den Bereich oder in die Nähe des Resonanzfrequenzspektrums, so können unter geeigneten Bedingungen in einem parallelen Netzwerk eine oder mehrere resonante Moden der LC -Schwingkreise angeregt werden, und das Netzwerk² arbeitet im LC -resonanten ac-Modus. In diesem Fall treten bei $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$ lokale Maxima auf, die jeweils von zwei scharfen Minima zu beiden Seiten symmetrisch umgeben werden. Für beide Betriebsmodi (LC -resonant und nicht-resonant) konnten die Spannungsantworten der Netzwerke durch das analytische Näherungsmodell quantitativ sehr gut beschrieben werden und die Lösungen der analytischen Näherung stimmten für alle Parameterbereiche sehr gut mit den "exakten" Spannungsantworten der induktiven Netzwerkgleichungen überein.

Durch explizites Lösen der induktiven Netzwerkgleichungen wurden die Spannungsantworten des Gaußschen und des arithmetischen Netzwerks für verschieden starke induktive Kopplungen und für verschiedene Werte des McCumber-Parameters numerisch bestimmt. Dabei zeigte sich, dass die Magnetfeldperiode und das qualitative Verhalten von den induktiven und kapazitiven Effekten nicht beeinflusst wird und ausschließlich die Flächenverteilung (d.h. die Netzwerkgeometrie) die grundlegenden Interferenzeigenschaften festlegt. Nur die Details der Spannungsantwort und das quantitative Verhalten werden vom magnetischen Eigenfeld und den Kontaktkapazitäten bestimmt.

Für Netzwerke im nicht-resonanten ac-Modus bewirken die Induktivitäten und Kapazitäten eine Reduktion des Spannungshubs und damit eine Reduktion des maximalen Transferfaktors bei den Magnetfeldwerten mit $\Phi^{(1)} = k P_{\Phi^{(1)}}$. Diese Reduktion des maximalen Transferfaktors mit zunehmender Stärke der Schlaufeninduktivität tritt ebenso in konventionellen dc SQUIDS auf. Der Bereich der Schlaufengröße, für den dc SQUIDS geeignet funktionieren, ist aus diesem Grund stark eingeschränkt. Für eine effiziente Ankopplung des dc SQUIDS an eine Einkoppel- oder Signalspule ist jedoch eine möglichst große Schlaufenfläche und damit eine große Schlaufeninduktivität von Vorteil. Dieses Problem könnte mit Hilfe von parallelen Netzwerken gelöst werden. Es wurde für parallele Netzwerke im LC -resonanten ac-Modus gezeigt, dass die

²oder im Fall des seriellen Netzwerks: einzelne Schlaufen oder eine Gruppe von mehreren Schlaufen

maximalen Transferfaktoren der LC -resonanten Spannungsantworten selbst für große Netzwerk-Induktivitäten nicht degradieren. Auf diese Weise erscheint es möglich, dass ohne einen Verlust der Netzwerkfunktion große Gesamtflächen realisierbar sind und dadurch eine sehr starke Kopplung des parallelen Netzwerks (des parallelen SQIFs) mit der Einkoppeleinheit erreicht werden kann.

Für viele supraleitungselektronische Schaltungen (wie RSFQ-Schaltungen oder Q-Bits) sind genau definierte Parameterwerte für die Funktionsfähigkeit der Schaltkreise notwendig. Bei vielen Herstellungsprozessen sind jedoch die Replikation und die Herstellung von Josephson-Kontakten mit exakt definierten Parameterwerten nur mit sehr hohem Aufwand oder nur sehr eingeschränkt möglich. Dies trifft insbesondere auf Josephson-Kontakte aus Hochtemperatursupraleitern zu, bei denen die Parameterstreuungen auf einem einzigen Chip typischerweise $\pm 20\%$ betragen und von Chip zu Chip noch viel größer sein können. Kontakttypen sind zum Beispiel die häufig verwendeten Korngrenzenkontakte oder Kontakte vom “step-edge”- bzw. “ramp-edge”-Typ. Vor diesem Hintergrund wurde der Einfluss von Parameterstreuungen auf die Spannungsantwort paralleler und serieller Netzwerke untersucht.

Als Ergebnis der Diskussion des “Ein-Phasen-Modells” ergab sich, dass im Wesentlichen nur die Mittelwerte der Kontaktparameter in die Spannungsantwort eingehen. Dies bedeutet, dass Parameterstreuungen in parallelen und seriellen Netzwerken (mit $\beta_{L,\max} = 0$) nur einen geringen Einfluss auf die Spannungsantwort haben. Für induktive Gaußsche und arithmetische Netzwerke mit überdämpften Kontakten ergab die Analyse der Netzwerkgleichungen, dass selbst große Parameterstreuungen bis $\pm 60\%$ um die Mittelwerte nicht die grundlegenden Eigenschaften der Spannungsantwort zerstören und die Funktionalität nur sehr gering beeinträchtigen. Dies bedeutet, dass sich zwar Details der Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik durch Parameterstreuungen ändern, dass aber die qualitative Magnetfeldabhängigkeit der mittleren Spannung erhalten bleibt. Ihre Robustheit gegen eine Streuung der Kontaktparameter macht diese Netzwerke sehr interessant im Hinblick auf eine Realisierung aus Hochtemperatursupraleitern.

Für den Einsatz paralleler oder serieller Netzwerke in möglichen Anwendungen ist die Frage der Sensitivität und der Rauscheigenschaften von großer Bedeutung. Für beide Netzwerktypen wurde gezeigt, dass der maximale Transferfaktor proportional zur Gesamtfläche des Netzwerks ist. Sind also die M einzelnen Schlaufen eines Netzwerks derart ausgelegt, dass sie jeweils mit der Fläche einer bezüglich der Magnetfeldsensitivität optimierten dc SQUID-Schleife vergleichbar sind, so ist der maximale Transferfaktor des Netzwerks um den Faktor M größer als der maximale Transferfaktor des optimierten dc SQUIDs. Damit skaliert der maximale Transferfaktor des Netzwerks mit der Anzahl N der Josephson-Kontakte. Unter Verwendung dieses Skalierungsverhaltens konnte gezeigt werden, dass die spektrale Energiedichte für weisses Spannungsrauschen proportional zu $1/N$ mit der Kontaktanzahl N abnimmt. Hierfür wurde davon ausgegangen, dass das thermische Rauschen der Netzwerke durch unkorreliertes Nyquist-Rauschen der Shunt-Widerstände der Kontakte verursacht wird.

Die Rauscheigenschaften von dc SQUIDs aus Hochtemperatursupraleitern sind neben dem weissen Rauschen oft durch das niederfrequente $1/f$ -Rauschen bestimmt. Dieses $1/f$ -Rauschen wird von gepinnten magnetischen Flusswirbeln erzeugt, die sich in den Hochtemperatursupraleitern bewegen, aus denen die Anordnungen aufgebaut sind. Insbesondere wenn zusätzliche supraleitende Strukturen verwendet werden, um primären magnetischen Fluss in die SQUID-Schleife zu fokussieren, nimmt das $1/f$ -Rauschen aufgrund der vergrößerten Anzahl der Flusswirbel stark zu. Mit Hilfe paralleler oder serieller Netzwerke könnte dieses Problem vermindert werden, da bei Netzwerken weniger supraleitendes Material benötigt wird, um dieselbe Magnetfeldsensitivität wie bei konventionellen Anordnungen (z.B. bei einem dc-SQUID mit Washer-Design) zu erreichen. Dadurch würde die Anzahl der Flusswirbel stark reduziert. Zudem sind die Bewegungen der Flusswirbel zumindest teilweise unkorreliert, da die Supraleiter Materialinhomogenitäten besitzen. Damit kann das Argument (teilweise) unkorrelierter Rauschquellen auch auf das Spannungsrauschen angewandt werden, das die Flusswirbel erzeugen. Auf diese Weise kann erwartet werden, dass das Signal-Rausch-Verhältnis mit zunehmender Anzahl der Schleifenflächen zunimmt, auch wenn rauschende Flusswirbel anwesend sind.

Die obige Zusammenfassung zeigt, dass parallele und serielle Netzwerke Quanten-Interferometer sind, deren Spannungsantworten in ähnlicher Art und Weise von den Parametern des Netzwerks abhängen und von diesen kontrolliert werden. Sie besitzen jedoch auch wesentliche Unterschiede. In parallelen Netzwerken interferieren eine mesoskopische Anzahl von Josephson-Strömen und die Spannungsantwort in Anwesenheit eines primären Magnetfeldes kommt durch eine phasensensitive Superposition dieser Ströme zustande³. Parallele Netzwerke sind in diesem Sinne echte Viel-Kontakt-Quanteninterferometer, in denen *alle* Kontakte mit der gleichen magnetfeldabhängigen charakteristischen Frequenz ν_B oszillieren und die mittlere Spannung über alle Kontakte identisch ist. Die Interferenz der N Josephson-Ströme führt im Fall $\beta_{L,\max} = 0$ zu einer $1/N$ -Verschmälerung der ausgeprägten Minima in der Spannungsantwort. Serielle Netzwerke bestehen dagegen aus einer großen Anzahl von Zwei-Kontakt-Quanteninterferometern (den einzelnen Schleifen) und ihre Spannungsantwort kommt durch eine Addition der einzelnen Schlaufenspannungen zustande. Im allgemeinen Fall unterscheiden sich die Spannungsantworten der Schleifen, so dass die Kontakte verschiedener Schleifen mit unterschiedlichen charakteristischen Frequenzen oszillieren. Die Addition der Schlaufenspannungen führt zu einer Vergrößerung des Gesamtspannungshubs, der proportional zur Schlaufenanzahl ist. Diese Vergrößerung der Ausgangsspannung ist von besonderer Bedeutung, da sie die direkte Ankopplung serieller Netzwerke an konventionelle Raumtemperatur-Elektronik ermöglicht.

Im Hinblick auf Anwendungen muss bedacht werden, dass parallele Netzwerke aufgrund der Parallelschaltung einen um den Faktor $1/N$ verkleinerten ohmschen Widerstand $\langle V \rangle / I$ im Vergleich zu einem einzelnen Kontakt besitzen. Serielle Netzwerke besitzen

³diese phasensensitive Superposition ermöglicht es, parallele Netzwerke für sensitive Tests der Paarungssymmetrie in unkonventionellen Supraleitern zu verwenden.

dagegen einen um die Schlaufenanzahl M vergrößerten ohmschen Widerstand $\langle V \rangle / I$ im Vergleich zu einer einzelnen Schlaufe. Dies bedeutet, dass mit seriellen Netzwerken größere externe Lasten betrieben werden können. Durch eine Kombination beider Prinzipien, d.h. einer Serienschaltung paralleler Netzwerke, kann die Impedanz des Netzwerks auch an die Impedanz einer externen Last angepasst werden.

Parallele und serielle Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter

Die Analyse des Zusammenhangs zwischen der Flächenverteilung der Netzwerkschlaufen und der Spannungsantwort der Netzwerke führte zu der Synthese einer Klasse von Flächenverteilungen, die Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken mit ganz besonderen Eigenschaften erzeugen. Dies sind die sogenannten *unkonventionellen* Flächenverteilungen, die durch zwei notwendige Eigenschaften ausgezeichnet sind: (A) die Flächeninhalte der Schlaufen sind inkommensurabel gewählt (d.h. es existiert kein größter gemeinsamer Teiler) sowie (B) die Flächen sind gleichmässig zwischen der kleinsten Fläche a_{\min} und der größten Fläche a_{\max} (mit $a_{\min} \ll a_{\max}$) verteilt. Besitzt ein paralleles oder seriell Netzwerke eine solche unkonventionelle Flächenverteilung, so besitzt das Netzwerk eine nichtperiodische Spannungsantwort, die nur in der Umgebung verschwindenden primären Magnetfeldes $\mathbf{B}^{(1)} = 0$ ein eindeutiges und signifikantes Verhalten besitzt.⁴ Für endliche Magnetfelder $|\mathbf{B}^{(1)}| > 0$ moduliert die mittlere Spannung mit einer kleinen reduzierten Amplitude um einen mittleren Spannungswert \bar{V} . Aufgrund dieser Eigenschaften wurden Netzwerke mit unkonventionellen Flächenverteilungen Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter (SQIF) getauft. SQIFs erlauben im Prinzip eine absolute hochsensitive Messung der Phase, des Betrags und der Richtung magnetischer Felder und unterscheiden sich damit signifikant von konventionellen (regulären) Netzwerken, deren Φ_0 -periodische Spannungsantworten prinzipiell nur relative Magnetfeldmessungen ermöglichen.

Die Eigenschaft (A) verhindert eine (strenge) Magnetfeldperiodizität und die Eigenschaft (B) stellt sicher, dass für endliche primäre Magnetfeldwerte $|\mathbf{B}^{(1)}| > 0$ zusätzliche Minima (im nicht-resonanten ac-Modus) auf dem \bar{V} -Ast der Spannungsantwort auftreten, deren Werte sich kaum vom Minimum bei $\mathbf{B}^{(1)} = 0$ unterscheiden. Es sei aber nochmals betont, dass (A) und (B) nur notwendige Bedingungen für die ausschließliche Signifikanz bei $\mathbf{B}^{(1)} = 0$ sind und keine hinreichenden Bedingungen. So gibt es unkonventionelle Flächenverteilungen, die auch für $|\mathbf{B}^{(1)}| > 0$ signifikante Minima besitzen, die beim parallelen Netzwerk durch eine partielle kohärente Superpositionen der Josephson-Ströme und beim seriellen Netzwerk durch eine partielle kohärente Überlagerung der mittleren Schlaufenspannungen verursacht wird. Das Auftreten von Nebenminima kann mit einer (versteckten) quasi-Periodizität der Flächenverteilung verknüpft sein und wird mit zunehmender Schlaufenanzahl stark unterdrückt.

Die regulären, Gaußschen und arithmetischen Netzwerke besitzen alle Spannungsantworten mit einer (im Gaußschen und arithmetischen Fall zwar großen aber) endli-

⁴Je nachdem, in welchem Betriebsmodus das Netzwerk arbeitet, besitzt das Netzwerk bei $\mathbf{B}^{(1)} = 0$ ein eindeutiges Minimum (nicht-resonanter ac-Modus) oder die Hut-förmige Struktur (im LC-resonanten ac-Modus).

chen theoretischen Magnetfeldperiode. Diese strenge Periodizität tritt aber nur dann im Experiment auf, wenn die Flächenverteilungen dieser Netzwerke exakt realisierbar sind. Eine solche Exaktheit bei der Herstellung ist aber insbesondere im Fall von Hochtemperatur-Supraleitern derzeit nur mit sehr hohem Aufwand bei der Strukturierung und der Fabrikation der Schaltungen möglich. In dieser Arbeit wurde deshalb untersucht, welche Einflüsse Streuungen der Netzwerkflächenverteilung (z.B. aufgrund einer imperfekten Realisierung) auf die Spannungsantwort der parallelen und seriellen Netzwerke haben. Da diese Streuungen die Netzwerkgeometrie betreffen, wurden sie strukturelle Streuungen genannt.

Treten bei konventionellen regulären Netzwerken kleine unsystematische strukturelle Streuungen auf, so zeigt die Spannungsantwort (im nicht-resonanten ac-Modus) eine irreguläre Periodizität von Minima unterschiedlicher Amplitude, d.h. der idealerweise Φ_0 -periodischen Spannungsantwort überlagern sich Schwebungen, die vom aperiodischen Interferenzmuster der Flächenmodulationen erzeugt werden. Bei einer starken Ausprägung dieser Schwebungen ermöglichen solche Kennlinien in vielen Anwendungen vermutlich keinen geeigneten Betriebsmodus. Bei regulären Netzwerken muss also die Güte der Reproduzierbarkeit der Schlaufen sehr groß sein, da die regulären Netzwerke sonst ihre ursprüngliche Funktionalität verlieren.

Ein gänzlich anderes Verhalten besitzen die Gaußschen und arithmetischen Netzwerke, in denen die Flächen von Natur aus unterschiedlich sind. Es wurde gezeigt, dass eine bereits kleine zusätzliche unsystematische Streuungen der Flächenverteilung zu einer unkonventionellen Flächenverteilung führt. Dies bedeutet, dass diese Netzwerke bei Anwesenheit struktureller Streuungen zu SQIFs werden, d.h. dass sie das oben beschriebene eindeutige Verhalten zeigen, so dass ihre Spannungsantwort nur noch bei $\mathbf{B}^{(1)} = 0$ signifikant und eindeutig ist. Alle Minima, die bei reinen Gaußschen und arithmetischen Netzwerke für endliche Magnetfeldwerte auftraten, verschwinden beim Übergang zum SQIF.

Werden die Flächen einer unkonventionellen Flächenverteilung durch unsystematische Streuungen verändert, so ist die neue Flächenverteilung wieder unkonventionell. Deshalb ändert sich die Spannungsantwort eines SQIFs qualitativ nicht, wenn die Flächen aufgrund einer Imperfektion nicht exakt realisiert werden. In diesem Sinne sind SQIFs strukturstabil, d.h. strukturelle Abweichungen von der designten Geometrie zerstören die Funktionalität des SQIFs nicht. Diese Strukturstabilität besitzen reguläre Netzwerke nicht.

Erste Experimente mit SQIFs

Um die theoretischen Vorhersagen zu überprüfen, wurden auf der Basis der entwickelten theoretischen Modelle parallele und serielle SQIF-Netzwerke entworfen. Die prototypischen Schaltungen wurden mit Niob-Technologie realisiert und waren nicht auf Empfindlichkeit optimiert, so dass die ersten Messergebnisse nur erste Anhaltspunkte für die Leistungsfähigkeit von SQIFs sind. Der parallele und der serielle SQIF besitzen jeweils

29 Schlaufen und insgesamt $N = 30$ bzw. $N = 58$ überdämpfte Josephson-Kontakte. Als wichtiges Ergebnis der ersten Experimente ergab sich, dass die experimentellen Spannungsantworten der SQIFs die theoretisch vorhergesagten Eigenschaften besitzen und damit Absolutfeldsensoren sind. Die Spannungsantwort des regulären parallelen Netzwerks mit $N = 16$ Kontakten war dagegen aperiodisch, was die strukturelle Instabilität regulärer Netzwerke bestätigte. Die experimentellen Kennlinien waren über einen Zeitraum von mehreren Monaten identisch reproduzierbar und auch nach einer Vielzahl thermischer Zyklen unverändert. Bereits die SQIF-Prototypen waren also zuverlässig einsetzbar.

Der parallele SQIF besaß im nicht-resonanten ac-Modus eine Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik mit eindeutigem und signifikantem Minimum bei $\mathbf{B}^{(1)} = 0$ und im LC -resonanten ac-Modus die Hut-förmige resonante Spannungsantwort. Die mit Hilfe der induktiven Netzwerkgleichungen numerisch bestimmten Spannungsantworten konnten das experimentelle Verhalten der SQIFs qualitativ und quantitativ gut beschreiben. Für geeignet eingestellte Transportstromwerte besaß das eindeutige Minimum der nicht-resonanten experimentellen Spannungsantwort einen Spannungshub von $\Delta V \approx 70 \mu\text{V}$ und bei $\Delta V/2$ eine Breite von $\Delta B \approx 2 \mu\text{T}$. Der maximale Transferfaktor dieser Kennlinie betrug $V_B \approx 200 \text{ V/T}$ und war damit um den Faktor 16 größer als der maximale Transferfaktor des Referenz-SQUIDs mit $V_B \approx 13 \text{ V/T}$. Dies bestätigte sehr gut das theoretische Skalierungsverhalten der Netzwerke. Im LC -resonanten ac-Modus ergaben die Experimente einen maximalen Transferfaktor von $V_B \approx 80 \text{ V/T}$ und die resonante Hut-förmige Struktur trat im Experiment bei den theoretisch ermittelten Transportstromwerten auf.

Die Spannungsantwort der experimentellen SQIF-Schaltung zeigte zudem ausgeprägte I - $\langle V \rangle$ -Stufen in den Strom-Spannungs-Kennlinien, die die Spannungsantwort beeinflussten. Die I - $\langle V \rangle$ -Stufen konnten mit dem Modell erklärt werden, dass der zeitlich oszillierende Anteil der über das parallele Netzwerk abfallenden Spannung die fundamentale resonante Mode der koplanaren Streifenleitung anregt, die von zwei Kontrollleitungen auf dem Chip gebildet wird. Durch die Rückkopplung des elektromagnetischen Resonatorfeldes in den parallelen SQIF werden I - $\langle V \rangle$ -Stufen hervorgerufen, die aufgrund ihres Erzeugungsmechanismus besondere Eigenschaften besitzen. Dies sind z.B. eine endliche Steigung und eine sehr geringe Magnetfeldabhängigkeit, was sie von bekannten Shapiro-Stufen deutlich unterscheidet. Für ein detailliertes Verständnis der Entstehung der I - $\langle V \rangle$ -Stufen bei parallelen Netzwerken sind weitere Betrachtungen notwendig und von besonderem Interesse, da das Zusammenspiel des parallelen SQIFs mit einem Resonator neue Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken ermöglicht. So traten in der Nähe der I - $\langle V \rangle$ -Stufen nichtperiodische *stufenförmige* Magnetfeld-Spannungs-Charakteristiken stabil und robust auf, die nur bei einem fixen Wert des primären Magnetfeldes von einem Spannungswert V_1 auf einen anderen Spannungswert V_2 mit steiler Flanke wechseln und für alle anderen Magnetfeldwerte (nahezu) konstant sind. Typische Werte dieser sigmoidalen Kennlinien waren $\Delta V \approx 50 \mu\text{V}$ für den Spannungshub und $V_B \approx 30 \text{ V/T}$ für den Transferfaktor.

Der serielle SQIF zeigte ebenfalls die erwartete Spannungsantwort. Für leicht überkritische Transportströme besaß die mittlere Spannung bei $\mathbf{B}^{(1)} = 0$ ihr eindeutiges signifikantes Minimum. Der maximale Spannungshub $\Delta V = \langle V \rangle_{\max} - \langle V \rangle_{\min}$ betrug $\Delta V \approx 1.27 \text{ mV}$ und die Spannungsdifferenz zwischen dem \bar{V} -Spannungswert und $\langle V \rangle_{\min}$ lag bei $\delta V \approx 800 \mu\text{V}$. Der Spannungshub δV und die Breite des Minimums $\Delta B \approx 6.5 \mu\text{T}$ bei $\delta V/2$ stimmen sehr gut mit dem theoretischen Ergebnis überein. Lediglich die Feinstrukturen der experimentellen und theoretischen Kennlinien unterschieden sich, was durch eine auf Flussfokussierung zurückzuführende Renormierung der effektiven Flächenverteilung erklärbar ist. Die maximalen Transferfaktor lagen im Experiment je nach Wert des Transportstroms im Bereich von $V_B \approx 500 \text{ V/T}$ bis $V_B \approx 700 \text{ V/T}$. Diese Werte sind um den Faktor 3 größer als die theoretisch bestimmten Werte. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass auch bei der seriellen SQIF-Schaltung im Experiment selbstinduzierte I - $\langle V \rangle$ -Stufen in der Spannungsantwort auftraten, die von einer Wechselwirkung des seriellen SQIFs mit einer resonanten geometrischen Struktur der Schaltung erzeugt wurden. Die Stufenlandschaft konnte durch das Resonatormodell qualitativ erklärt werden, sie bedarf aber ebenfalls noch einer quantitativen detaillierten Analyse. Die selbstinduzierten I - $\langle V \rangle$ -Stufen führten auch beim seriellen SQIF zu einer neuartigen Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik. Diese resonanten Kennlinien traten bei höheren Transportstromwerten in der Nähe der I - $\langle V \rangle$ -Stufen auf und zeichneten sich durch ein scharfes signifikantes eindeutiges Maximum bei $\mathbf{B}^{(1)} = 0$ aus. Sie besaßen mit $\Delta V \approx 0.5 \text{ mV}$ zwar einen kleineren Spannungshub als die Minima der nicht-resonanten Kennlinien aber mit $V_B \approx 700 \text{ V/T}$ einen vergleichbar großen maximalen Transferfaktor.

Kürzlich gelang Schultze et. al. am Institut für Physikalische Hochtechnologie e.V. (IPHT) in Jena die erfolgreiche Herstellung der ersten parallelen und seriellen SQIFs aus Hochtemperatursupraleitern. Die Kennlinien beider SQIFs zeigten in einer stabilen Weise das vorhergesagte Verhalten und besaßen eindeutige signifikante Minima. Die SQIFs wurden mit konventionellen Verfahren aus einer $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ -Schicht auf einem SrTiO_3 Bikristall-Substrat hergestellt und mit "Ar ion beam etching" strukturiert. Die Josephson-Kontakte wurden durch Korngrenzenkontakte mit einer Stegbreite von $2 \mu\text{m}$ realisiert. Der parallele SQIF besitzt 30 Schlaufen und seine Spannungsantwort zeigte einen Spannungshub von $\Delta V \approx 60 \mu\text{V}$, der mit dem theoretischen Wert sehr gut übereinstimmt. Die serielle SQIF-Schaltung besteht aus insgesamt 51 Schlaufen mit linear zunehmenden Flächeninhalten und einer Fluss-Einkoppelschleufe, die aus einem großen Washer mit Loch gebildet wird.⁵ Schultze et. al. bestimmten den experimentellen Spannungshub des seriellen SQIFs zu $\Delta V = 695 \mu\text{V}$ und der maximale Transferfaktor erreichte Werte von $V_B = 3.2 \times 10^4 \text{ V/T}$. Die Experimente wurden in einer abgeschirmten Umgebung bei 77 K (Flüssig-Stickstoff-Temperatur) gemacht. Erste Messungen der Magnetfeldsensitivität für weisses Rauschen ergaben eine obere Grenze von $\sqrt{S_B(\nu)} < 187 \text{ fT}/\sqrt{\text{Hz}}$. Nimmt man den experimentellen Wert für

⁵Da die supraleitende Einkoppelschleufe magnetischen Fluss einfangen kann, ist diese Konfiguration für die absolute Messung magnetischer Felder ungeeignet.

den maximalen Transferfaktor, so liegt dieser Wert für die Magnetfeldsensitivität nur um das 1.5-fache höher als der theoretisch zu erwartende Wert nach Abschnitt 3.4. Diese Beobachtung zeigt, dass Gleichung (3.29) das Skalierungsverhalten der seriellen Netzwerke für weisses Rauschen richtig beschreibt.

Bisher gelang noch keine endgültige Bestimmung der Magnetfeldsensitivität der SQIFs. Insbesondere fehlt die Messung des $1/f$ -Rauschens für sehr kleine Frequenzen, da dafür eine direkt gekoppelte "Flux-Locked-Loop"-Elektronik entwickelt werden muss, die die großen Spannungshübe der SQIFs verarbeiten kann. Es ist jedoch zu erwarten, dass keine qualitativen Unterschiede zwischen dem $1/f$ -Rauschen eines SQIFs und dem eines SQUIDs auftreten. Diese Rausch-Messungen müssen in zukünftigen Experimenten durchgeführt werden. Dabei ist das genaue Skalierungsverhalten und die möglichen Unterschiede des Rauschens verschiedener Typen von Kennlinien von besonderem Interesse.

SQIFs als neuartige supraleitungselektronische Bauelemente

Fasst man die bisherige Diskussion zusammen, so zeichnen sich SQIFs durch die Eindeutigkeit der Spannungsantwort, eine große Imperfektionstoleranz und eine mögliche erhöhte Sensitivität im Vergleich zu konventionellen dc SQUIDs aus. SQIFs besitzen eine große Robustheit gegen Parameterstreuungen und eine große Stabilität gegen strukturelle Streuungen. Dies ermöglicht den Einsatz einfacher konventioneller Technologien und die Verwendung von Hochtemperatur-Supraleitern zur Herstellung von SQIFs. Diese Eigenschaften machen SQIFs zu einer neuartigen Klasse von supraleitungselektronischen Bauelementen, die für eine Vielzahl von Anwendungen interessant sind. Die erarbeiteten theoretischen Modelle bilden dabei die Grundlage für die Entwicklung und Auslegung von SQIF-Schaltungen, deren Magnetfeld-Spannungs-Charakteristik auf die jeweilige Anwendung angepasst und optimiert werden kann. Für den Betrieb von SQIFs kann auf die konventionelle Kryotechnologie und bekannte experimentelle Aufbauten zurückgegriffen werden, die bei herkömmlichen dc SQUID-Anwendungen eingesetzt werden. Abschließend werden einige Anwendungsmöglichkeiten und offene Fragestellungen aufgezeigt.

Die Eindeutigkeit der Spannungsantwort und die hohe Magnetfeldsensitivität machen SQIFs für Magnetometer-Anwendungen besonders interessant. Diese beiden Eigenschaften ermöglichen es (zumindest prinzipiell), mit Hilfe von SQIFs magnetische Felder *absolut* und mit einer sehr hohen Präzision zu messen. Dabei können SQIFs mit explizit asymmetrischen Kennlinien (wie die stufenförmige Charakteristik) auch die Richtung externer Magnetfelder detektieren. Für einen Einsatz in ungeschirmter Umgebung sollten SQIF-Magnetometer gegenüber konventionellen SQUID-Magnetometern große Vorteile besitzen, da die Spannungsantwort von SQIFs einen *eindeutigen* Bezugspunkt besitzt. Geht der Arbeitspunkt bei einer Messung aufgrund einer großen Störung verloren, so kann der Arbeitspunkt beim SQIF nach der Störung wieder einfach aufgefunden werden. Bei konventionellen dc SQUIDs mit periodischen Kennlinien ist dies nicht

möglich, da bei einer Übersteuerung der Arbeitspunkt verloren geht.

Die bisherige Diskussion beschränkte sich auf planare Netzwerke, in denen alle Schlaufen in einer Ebene liegen. Diese Netzwerke detektieren die Komponente eines primären Magnetfeldes, die parallel zum Normalenvektor der Netzwerkebene ist. Die entwickelten theoretischen Modelle gelten jedoch auch ganz allgemein für den Fall, dass die Schlaufen alle verschiedene Orientierungen besitzen. Werden SQIFs in einer dreidimensionalen Anordnung so ausgelegt, dass sie auf alle drei Raumrichtungen sensitiv sind, so kann mit einer solchen Anordnung ebenfalls die Richtung magnetischer Felder bestimmt werden. Durch eine Messung der Kompensationsströme, die durch geeignet orientierte Kompensationsspulen fließen, können alle drei Komponenten eines primären externen Magnetfeldes absolut bestimmt werden. Eine besondere Bedeutung für solche Kompensationsmessungen hat die Frage, wie die Spannungsantworten paralleler und serieller SQIFs von den räumlichen Gradienten magnetischer Felder abhängen. Diese Frage betrifft zum einen die möglichen Imperfektionen der Kompensationsfelder, die die Sensitivität einer Absolutfeldmessung limitieren und zum anderen die Möglichkeiten der Messung von magnetischen Gradientenfeldern mit Hilfe von geeignet ausgelegten SQIFs.

Das experimentell bestätigte theoretische Skalierungsverhalten zeigt, dass die Empfindlichkeit von parallelen SQIFs durch eine Vergrößerung der Schlaufenanzahl erhöht werden kann. Zudem können mehrere parallele SQIFs in Serie geschaltet werden, so dass dadurch zweidimensionale (2D) SQIFs mit sehr großen effektiven Gesamtflächen entstehen. Die vorgestellten experimentellen Ergebnisse deuten darauf hin, dass 2D SQIFs mit einer Magnetfeldauflösung von einigen fT/\sqrt{Hz} möglich sein sollten. Die dafür benötigte effektive Gesamtfläche des Absolutfeldsensors wird dann vergleichbar zu den Dimensionen einer SQUID-Schaltung gleicher Sensitivität (d.h. mit Fluss-fokussierenden Strukturen) und liegt in der Größenordnung von $1\text{cm} \times 1\text{cm}$. Für typische Josephson-Frequenzen von $\nu_J = 100\text{ GHz}$ sind solche räumlichen Netzwerkausdehnungen dann größer als die Wellenlänge c/ν_J der charakteristischen Frequenz ν_J , so dass in zukünftigen Untersuchungen zur korrekten Beschreibung magnetischer Eigenfeldeffekte die Retardierung dieser Felder berücksichtigt werden muß.

Die Magnetfeldsensitivität von SQIFs kann zusätzlich durch Fluss-fokussierende supraleitende Strukturen wesentlich erhöht werden. Hierfür kommen wie im Fall von SQUID-Magnetometern Washer-Strukturen, Einkoppelspulen oder Flip-Chip-Geometrien in Betracht. Da diese supraleitenden Strukturen jedoch magnetischen Fluss einfangen können, sind solche Konfigurationen nur für eine *relative* Magnetfeldmessung geeignet. SQIFs bieten aber auch hier wegen ihrer großen Imperfektionstoleranz und ihrer großen Transferfaktoren und Spannungshübe wesentliche Vorteile. Die großen Transferfaktoren erhöhen die Magnetometersensitivität und die großen Spannungshübe ermöglichen eine direkte Verarbeitung der Signale mit Hilfe einer Raum-Temperatur-Elektronik.

Im Hinblick auf Hochfrequenz-Anwendungen bieten SQIFs ebenfalls eine Reihe neuer Möglichkeiten. Für Frequenzbereiche weit unterhalb der Josephson-Frequenz ν_J sind Verstärker auf der Basis von Quanten-Interferometern sehr interessant, da sie eine sehr

große Empfindlichkeit und eine sehr hohe intrinsische Bandbreite besitzen, die von 0 Hz bis zu einigen GHz reicht. Durch Verwendung serieller Netzwerke kann die Ausgangsimpedanz des Verstärkers an die weiterverarbeitende Elektronik angepasst werden, ohne an Empfindlichkeit oder an Bandbreite zu verlieren. Die Verstärkerkennlinie kann z.B. durch eine negative Rückkopplungsschaltung linearisiert werden. Aufgrund der Periodizität der Spannungsantwort regulärer Netzwerke entsteht durch diese Rückkopplung aber eine hysteretische Verstärkerkennlinie. Die Verwendung serieller SQIFs anstelle regulärer Netzwerke hätte nun den Vorteil, dass die Charakteristik eines solchen SQIF-Verstärkers nichthysteretisch und eindeutig wird. Überschreitet das Eingangssignal den dynamischen Bereich des SQIF-Verstärkers, so findet der Verstärker selbständig seinen ursprünglichen Operationsbereich wieder. Mögliche Anwendungen eines solchen SQIF-Verstärkers sind *nichthysteretische* Hochfrequenz Stromverstärker und Strom-Spannungs-Wandler mit hoher Bandbreite, geringem Rauschen und hohem Ausgangssignal.

Für den Frequenzbereich $\nu < \nu_J$ können ebenfalls die stufenförmigen Kennlinien paralleler SQIFs eine bedeutende Rolle für rauscharme Verstärkeranwendungen finden. Diese sind ebenfalls nichthysteretisch und besitzen einen hohen Transferfaktor. Die prototypische SQIF-Schaltung arbeitete in der Stufenmitte einer solchen Kennlinie mit einer charakteristischen Frequenz von ≈ 100 GHz. Da die Induktivität des gesamten experimentellen SQIFs einen Wert von $L_{\text{tot}} \approx 60$ pH hat, sollten bis zu einer Signalfrequenz des Eingangssignals von ≈ 20 GHz keine signifikanten induktiven Verluste auftreten. Der Entstehungsmechanismus der stufenförmigen Kennlinien muss allerdings noch näher untersucht werden.

Kommen die Frequenzen in den Bereich der Josephson-Frequenz, so zeigte die Analyse der selbstinduzierten I - $\langle V \rangle$ -Stufen, dass der parallele SQIF ein besonderes Verhalten in der Anwesenheit hochfrequenter elektromagnetischer Felder zeigt. Da der parallele SQIF sowohl auf den elektrischen als auch den magnetischen Anteil eines hochfrequenten Feldes sensitiv ist, besitzt die Stufenlandschaft der Spannungsantwort Eigenschaften, die sich vom bekannten Shapiro-artigen Verhalten bei reiner elektrischer Ankopplung signifikant unterscheiden. Eine systematische Untersuchung des Verhaltens von SQIFs in hochfrequenten Feldern ist vor allem vor dem Hintergrund interessant, dass mit Hilfe von SQIFs vielleicht eine phasensensitive Detektion elektromagnetischer Felder im Bereich der Josephson-Frequenz möglich ist, wie dies bereits die Analyse des Antwortverhaltens dreidimensionaler Josephson-Kontakt-Netzwerke zeigte [126].

Insgesamt zeigten die theoretischen und experimentellen Untersuchungen, dass Supraleitende Quanten-Interferenz-Filter (SQIF) eine neuartige Klasse von supraleitungselektronischen Bauelementen darstellen, die durch ihre sehr hohe Imperfektionstoleranz und ihre eindeutige Spannungsantwort neue vielversprechende Entwicklungen in der Supraleitungselektronik ermöglichen könnten.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Abramowitz, and A. Stegun (editors), *Handbook of Mathematical Functions*, Applied Mathematics Series (Dover, New York, 1972).
- [2] P.W. Anderson, and J.M. Rowell, *Probable observation of the Josephson superconducting tunnel effect*, Phys. Rev. Lett. **10**, 230 (1963).
- [3] J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer, *Theory of superconductivity*, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [4] A. Barone (editor), *Josephson-Effect - Achievements, and Trends*, (World Scientific, 1986).
- [5] A. Barone (editor), *Principles and Applications of Superconducting Quantum Interference Devices*, (World-Scientific, 1992).
- [6] A. Barone, and G. Paterno, in *Physics and Applications of the Josephson-Effect*, (John Wiley, and Sons, 1982).
- [7] M. Basler, W. Krech, and K.Y. Platov, *Phase Locking in Josephson Ladder Arrays: Analytical Results*, Proceedings of ISEC 1999, p. 201.
- [8] M. Basler, W. Krech, and K.Yu. Platov, *Rigorous analytical results on phase locking in Josephson junction ladder arrays*, Phys. Rev, B **58**, 3409 (1998).
- [9] T. Bauch, S. Weiss, H. Haenssel, A. Marx, D. Koelle, and R. Gross, *High-Temperature Superconducting Josephson Vortex Flow Transistors: Numerical Simulations and Experimental Results*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **7**, 3605 (1997).
- [10] D. Berman, H.S.J. van der Zant, T.P. Orlando, K.A. Delin, *Discrete Superconducting Vortex Flow Transistors*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **4**, 161 (1994).
- [11] S.P. Benz, and C.J. Borroughs, *Coherent emission from two-dimensional Josephson junctions arrays*, Appl. Phys. Lett. **58**, 2162 (1991).
- [12] S. Beuven, O. Harnack, and M. Darula, *Shorted 2-dimensional high- T_c Josephson junction arrays for oscillator applications*, Proceedings of the ISEC 1997, p. 163.

- [13] J. Bindslev Hansen, *Coherent Arrays of Planar dc-SQUIDs Based on Thin-Film Josephson Microbridges*, *Physica Scripta* **25**, 844 (1982).
- [14] J. Bindslev Hansen, P.E. Lindelov, and T.F. Finneggan, *Coherent Arrays of thin Film Josephson Microbridges*, *IEEE Trans. Mag.* **17**, 95 (1981).
- [15] R.D. Bock, J.R. Phillips, H.S.J. van der Zant, and T.P. Orlando, *Influence of induced magnetic fields on the static properties of one-dimensional parallel Josephson-junction arrays*, *Phys. Rev. B* **49**, 10009 (1994).
- [16] R. Cantor, L.P. Lee, A. Matlasov, and V. Vinetskiy, *A Low-Noise, Two-Stage DC SQUID Amplifier with High Bandwidth and Dynamic Range*, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **7**, 3033 (1997).
- [17] C. Cattuto, C. Lucheroni, *Static magnetic-flux patterns in Josephson-junction ladder arrays*, *Phys. Rev. B* **56**, 6157 (1997).
- [18] W.H. Chang, *Effect of trapped magnetic flux on the threshold curves of three-junction superconducting quantum interference devices*, *J. Appl. Phys.* **53**, 8901 (1982).
- [19] D.-X. Chen, J.J. Moreno, A. Hernando, and A. Sanchez, *The critical state of thin SQUID arrays*, *Europhys. Lett.* **41**, 413 (1998).
- [20] C.C. Chi, L. Krusin-Elbaum, and C.C. Tsuei, *The interactions of two mutually inductive-coupled dc SQUIDs*, *Physica B* **108**, 1085 (1981).
- [21] J. Clarke *SQUIDs: Theory, and Practice*, in *The New Superconducting Electronics*, edited by H. Weinstock, and R.W. Ralston, (Nato ASI Series, Series E, Applied Sciences, 1993), Volume 251.
- [22] J. Clarke *SQUIDs: Principles, Noise and Applications*, in *Superconducting devices*, edited by S.T. Ruggiero, and D.A. Rudman, (Academic Press, 1990).
- [23] D.D. Coon, and M.D. Fiske, *Josephson ac and Step Structure in the Supercurrent Tunneling Characteristics*, *Phys. Rev.* **138**, A744 (1964).
- [24] G. Costabile, S. Pagano, N. Pedersen, and M. Russo (editors), *Nonlinear Superconductive Electronics and Josephson Devices*, (Plenum, New York, 1991).
- [25] D.S. Crankshaw, E. Trías, and T.P. Orlando, *Magnetic Flux Controlled Josephson Array Oscillations*, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **11**, 1223 (2001).
- [26] M. Darula, T. Doderer, and S. Beuven, *Millimetre, and sub-mm wavelength radiation sources based on discrete Josephson junction arrays*, *Supercond. Sci. Technol.* **12**, R1 (1999).
- [27] B.S. Deaver, Jr., and W.M. Fairbank, *Experimental evidence for quantized flux in superconducting cylinders*, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 43 (1961).

- [28] P.G. DeGennes, *Self-consistent calculation of the Josephson current*, Phys. Lett. **5**, 22 (1963).
- [29] P.G. DeGennes, in *Superconductivity of Metals and Alloys*, (Addison-Wesley, 1989).
- [30] R. De Luca, T. Di Matteo, A. Tuohimaa, J. Paasi, *Quantum interference in parallel Josephson junction arrays: a perturbative analysis for finite inductances*, Phys. Lett. A **245**, 301 (1998).
- [31] R. De Luca, T. Di Matteo, A. Tuohimaa, J. Paasi, *Three-dimensional Josephson junction arrays: static magnetic response*, Phys. Rev. B. **57**, 1173 (1998).
- [32] A.Th.A.M. De Waele, W.H. Kraan, and R. De Bruyn Ouboter, *A Superconducting interference grating*, Physica (Amsterdam) **40**, 302 (1968).
- [33] A.Th.A.M. De Waele, and R. De Bruyn Ouboter, *Quantum-interference phenomena in point contacts between two superconductors*, Physica (Amsterdam) **41**, 225 (1969).
- [34] D. Dimos, P. Chaudhari, and J. Mannhart, *Superconducting transport properties of grain boundaries in $YBa_2Cu_3O_7$ bicrystals*, Phys. Rev. B. **41**, 4038 (1990).
- [35] R. Dolata, M.I. Khabipov, F.-Im. Buchholz, W. Kessel, and J. Niemeyer, *Nb/ Al_2O_3 – Al/Nb process development for the fabrication of fast-switching circuits in RSFQ logic*, Proceedings of EUCAS 1995, pp. 1709-1712.
- [36] R. Doll and M. Nähbauer, *Experimental proof of magnetic flux quantization in a superconducting ring*, Phys. Rev. Lett. **7**, 51 (1961).
- [37] D. Domínguez and J.V. José, *Magnetic and transport dc properties of inductive Josephson-junction arrays*, Phys. Rev. B **53**, 11692 (1996).
- [38] D. Drung, *High-Performance DC SQUID read-out electronics*, Physica C **368**, 134 (2001).
- [39] K. Enpuku, K. Sueoka, K. Yoshida, and F. Irie, *Effect of damping resistance on voltage versus flux relation of a dc SQUID with large inductance and critical current*, J. Appl. Phys. **57**, 1691 (1985).
- [40] C.M. Falco, *Phase-space of a driven damped pendulum (Josephson weak link)*, Am. J. Phys. **44**, 733 (1976).
- [41] R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands, in *The Feynman Lectures on Physics*, (Addison-Wesley, 1966) Vol. III, Chap. 21.
- [42] U.R. Fischer, Ch. Häussler, J. Oppenländer, and N. Schopohl, *Electromotive force fields in noninertial reference frames and accelerated superconducting quantum interferometers*, Phys. Rev. B **64**, 214509 (2001).

- [43] M.D. Fiske, *Temperature and Magnetic Field Dependences of Josephson Tunneling Current*, Rev. Mod. Phys. **36**, 221 (1964).
- [44] V. Foglietti, K.G. Stawiasz, M.B. Ketchen, and R.H. Koch, *Performance of a Flux Locked Series SQUID Array*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **3**, 3061 (1993).
- [45] B. Frank, W. Krech, and K. Yu. Platov, *Small inductance approximation of phase locking in multijunction SQUIDs*, J. Appl. Phys. **84**, 1476 (1998).
- [46] B. Frank, M. Basler, W. Krech, K. Yu. Platov, and H.-G. Meyer, *Phase Locking Dynamics in 2D Josephson Junction Arrays with Small Inductances*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **9**, 4551 (1999).
- [47] A. Fujimaki, K. Nakajima, and Y. Sawada, *Spatiotemporal Observation of Soliton-Antisoliton Collision in a Josephson Transmission-Line*, Phys. Rev. Lett. **59**, 2895 (1987).
- [48] J.C. Gallop: *SQUIDs, the Josephson-Effects and Superconducting Electronics*, (Adam Hilger Series on Measurement Science and Technology, 1990).
- [49] U. Gambardella, P. Caputo, V. Boffa, G. Celentano, G. Costabile, and S. Pace, *Static properties, and current steps in one-dimensional parallel arrays of Josephson tunnel junctions in the presence of a magnetic field*, J. Appl. Phys. **79**, 322 (1996).
- [50] U. Gambardella, G. Celentano, and V. Boffa, *Analysis of the Fiske modes in a short Josephson junction with nonuniform critical current density*, J. Appl. Phys. **84**, 5363 (1998).
- [51] U. Gambardella, G. Grimaldi, P. Caputo, and S. Pace, *Experimental analysis of the phase dynamics in small parallel arrays of Josephson junctions*, J. Appl. Phys. **82**, 3607 (1997).
- [52] G. Gambardella, V. Boffa, G. Celentano, P. Caputo, G. Costabile, R. De Luca, S. Pace, *Critical current behavior in 1D-array of Josephson junctions in the presence of magnetic field*, Proceedings of the EUCAS 1995, p. 1415.
- [53] R. Gerdemann, T. Bauch, O.M. Fröhlich, L. Alff, A. Beck, D. Koelle, and R. Gross, *Asymmetric high temperature superconducting Josephson vortex-flow transistors with high current gain*, Appl. Phys. Lett. **67**, 1010 (1995).
- [54] R. Gerdemann, L. Alff, A. Beck, O.M. Fröhlich, B. Mayer, and R. Gross, *Josephson Vortex-Flow Transistor Based on Parallel Arrays of YBa₂Cu₃O_{7- δ} Bicrystal Grain Boundary Junctions*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **5**, 3292 (1995).
- [55] R. Gerdemann, K.-D. Husemann, R. Gross, L. Alff, A. Beck, B. Elia, W. Reuter, and M. Siegel, *Spatially resolved analysis of high- T_c grain boundary Josephson junctions and arrays*, J. Appl. Phys. **76**, 8005 (1994).

- [56] W.P. Geren, *Application of Small-Signal Model to DC SQUID Circuit Design*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **5**, 2770 (1995).
- [57] G. Grimaldi, U. Gambardella, and S. Pace, *Inhomogeneous magnetic flux focusing in superconducting Josephson networks*, Phys. Rev. B **59**, 13608 (1999).
- [58] R. Gross, P. Chaudha, M. Kawasaki, M.B. Ketchen, and A. Gupta, *Low Noise YBa₂Cu₃O_{7- δ} grain boundary junction dc SQUIDs*, Appl. Phys. Lett. **57**, 727 (1990).
- [59] R. Gross, *Grain-Boundary Josephson-Junctions in Interfaces in Superconducting Systems*, edited by S.L. Shinde, and D. Rudman (Springer, New York, 1994), pp. 176-209, and references therein.
- [60] R. Gross, R. Gerdemann, L. Alff, T. Bauch, A. Beck, O.M. Froehlich, D. Koelle, and A. Marx, *Physics and performance of high temperature superconducting vortex flow transistors*, Appl. Supercond. **3**, 443 (1995).
- [61] B. Guan, M.J. Wengler, P. Rott, and M.J. Feldman, *Inductance Estimation for Complicated Superconducting Thin Film Structures with a Finite Segment Method*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **7**, 2776 (1997).
- [62] M. Gurvitch, M.A. Washington, and H.A. Huggins, *High quality refractory Josephson tunnel junctions utilizing thin aluminum layers*, Appl. Phys. Lett. **45**, 472 (1983).
- [63] Ch. Häussler, *Zur Dynamik dreidimensionaler Josephson-Kontakt-Netzwerke mit magnetischer Kopplung*, Diplomarbeit, Universität Tübingen, 1998.
- [64] Ch. Häussler, T. Träuble, J. Oppenländer, and N. Schopohl, *LC-Resonant Voltage Response of Superconducting Quantum Interference Filters*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **11**, 1275 (2001).
- [65] Ch. Häussler, J. Oppenländer, and N. Schopohl, *Nonperiodic flux to voltage conversion of series arrays of dc superconducting quantum interference devices*, J. Appl. Phys. **89**, 1875 (2001).
- [66] H.D. Hahlbohm, H. Lübbig (editors), *SQUID - Superconducting Quantum Interference Devices and their Applications*, (deGruyter, 1977).
- [67] P.K. Hansma, G.I. Rochlin, and J.N. Sweet, *Externally Shunted Josephson Junctions: Generalized Weak Links*, Physical Review B **4**, 3003 (1971).
- [68] E. Heinz and P. Seidel, *Microwave-induced Steps in Josephson Junctions, DC-SQUIDs and Parallel Arrays*, J. Low. Temp. Phys. **106**, 233 (1997).
- [69] G. Hildebrandt and F.H. Uhlmann, *Inductance calculation for integrated superconducting structures by minimizing free energy*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **5**, 2766 (1995).

- [70] H. Hilgenkamp, J. Mannhart, *Grain boundaries in high- T_c superconductors*, Rev. Mod. Phys. **74**, 485 (2002).
- [71] J. Hinken, in *Superconductor Electronics*, (Springer, 1988).
- [72] F. Hirayama, N. Kasai, and M. Koyanagi, *Design of Series SQUID Array Suppressing Josephson Oscillation Interference between Element-SQUIDs*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **9**, 2983 (1999).
- [73] F. Hirayama, N. Kasai, and M. Koyanagi, *Effects of Coherent Oscillation on Characteristics of a Series SQUID array*, Proceedings of ISEC 1997, p. 189.
- [74] S. Hontsu, and J. Ishii, *Fluxon propagation on a parallel array of microbridge-type Josephson junctions*, J. Appl. Phys. **63**, 2021 (1988).
- [75] M. E. Huber, A. M. Corey, K. L. Lumpkins, F. N. Nafe, J. O. Rantschler, G. C. Hilton, J. M. Martinis, and A. H. Steinbach, *DC SQUID series arrays with intracoil damping to reduce resonance distortions*, Appl. Supercond, **5**, 425 (1998), ibid. Proceedings of ISEC 1999, p. 49.
- [76] M.E. Huber, P.A. Neil, R.G. Benson, D.B. Burns, A.M. Corey, C.S. Flynn, V. Kitaygorodskaya, O. Massihzadeh, J.M. Martinis, and G.C. Hilton, *DC SQUID Series Array Amplifiers with 120 MHz Bandwidth*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **11**, 1251 (2001).
- [77] T. Imamura, and S. Hasuo, *A submicrometer Nb/ AlO_x /Nb Josephson junction*, J. Appl. Phys. **64**, 1586, (1988).
- [78] K.D. Irwin and M.E. Huber, *SQUID Operational Amplifier*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **11**, 1265 (2001).
- [79] E.A. Jagla, and C.A. Balseiro, *Transport properties of a three-dimensional array of Josephson junctions in a magnetic field*, Phys. Rev. B. **52**, 4494 (1995).
- [80] A.K. Jain, K.K. Likharev, J.E. Lukens, and J.E. Sauvegeau, *Mutual Phase-Locking in Josephson Junction Arrays*, Physics Reports **109**, 309 (1984).
- [81] R.C. Jaklevic, J. Lambe, A.H. Silver, and J.E. Mercereau, *Quantum Interference Effects in Josephson Tunneling*, Phys. Rev. Lett. **12**, 159 (1964).
- [82] R.C. Jaklevic, J. Lambe, J.E. Mercereau, and A.H. Silver, *Macroscopic Quantum Interference in Superconductors*, Phys. Rev. **140**, A1628 (1965).
- [83] W.J. Johnson, *Nonlinear Wave Propagation on Superconducting Tunneling Junctions*, Ph.D. Thesis, University of Wisconsin, Madison (1968).
- [84] B.D. Josephson, *Possible new effects in superconductive tunneling*, Phys. Lett., **1**, 251 (1962).

- [85] V.K. Kaplunenko, J. Mygind, N.F. Pedersen, and A.V. Ustinov, *Radiation detection from phase-locked serial dc SQUID arrays*, J. Appl. Phys. **73**, 2019 (1993).
- [86] K. Kazami, J. Kawai, G. Uehara, H. Kado, *Series SQUID Array for Biomagnetic Measurement*, Trans. IEEE Japan, Part C, **116**, 252 (1996).
- [87] K. Kazami, J. Kawai, G. Uehara, and H. Kado, *A 35-Series Superconducting Quantum Interference Device Array for High-Dynamic-Range Magnetic Measurements*, Jpn. J. Appl. Phys. **35**, 4322 (1996).
- [88] Y.S. Kivshar, and B.A. Malomed, *Dynamics of solitons in nearly integrable systems*, Rev. Mod. Phys. **61**, 763 (1989).
- [89] R. Kleiner, *Untersuchung von Josephsoneffekten in YBa₂Cu₃O₇*, Diplomarbeit, Walther-Meißner-Institut für Tieftemperaturforschung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften 1988.
- [90] R. Kleiner, F. Steinmeyer, G. Kunkel, and P. Müller, *Intrinsic Josephson Effects in Bi₂Sr₂CaCu₂O₈ Single Crystals*, Phys. Rev. Lett. **68**, 2394 (1992).
- [91] R. Kleiner, P. Müller, H. Kohlstedt, N.F. Pedersen, and S. Sakai, *Dynamic behavior of Josephson-coupled layered structures*, Phys. Rev. B **50**, 3942 (1994).
- [92] R. Kleiner, T. Gaber, and G. Hechtfisher, *Stacked long Josephson junctions in zero magnetic field: A numerical study of coupled one-dimensional sine-Gordon equations*, Phys. Rev. B **62**, 4086 (2000).
- [93] R. Kleiner, T. Gaber, and G. Hechtfisher, *Stacked long Josephson junctions in external magnetic fields - a numerical study of coupled one-dimensional sine-Gordon equations*, Physica C **362**, 29 (2001).
- [94] D. Koelle, R. Kleiner, F. Ludwig, E. Dansker, and J. Clarke, *High-transition-temperature superconducting quantum interference devices*, Rev. Mod. Phys. **71**, 631 (1999).
- [95] V. Kose (editor), *Superconducting Quantum Electronics*, (Springer, 1989).
- [96] K. Lange, K.-H. Löcherer (Hrsg.)/Meinke, Gundlach; *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik*, Springer-Verlag, Berlin 1992.
- [97] S.-G. Lee, Y. Huh, G.-S. Park, I.-S. Kim, Y.K. Park, J.-C. Park, *Serial Array High T_c SQUID Magnetometer*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **7**, 3347 (1997).
- [98] S.-G. Lee, D.W. Kim, B.C. Nam, and M.C. Lee, *Modulation Properties of Series Arrays of YBCO dc SQUIDs*, Proceedings of EUCAS 1997, p. 691.
- [99] K. Li, and S.P. Hubbel, *Measurement and Simulation of the Voltage-Flux Transfer Functions of SQUID arrays*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **5**, 3255 (1995).

- [100] K. Li, and S.P. Hubbel, *High Linear Dynamic Range Magnetometer Utilizing a Large Array of Serially Connected SQUIDs*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **7**, 3217 (1997).
- [101] K. Li, S.P. Hubbell, R. Cantor, and M. Teepe, *High Temperature Superconductor Transimpedance Amplifier using Serially Connected Bi-crystal Junction SQUID Arrays*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **9**, 4420 (1999).
- [102] K.K. Likharev, and V.K. Semenov, *RSFQ logic/memory family: A new Josephson-circuit technology for sub-terahertz-clock-frequency digital systems*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **1**, 3 (1991).
- [103] K.K. Likharev, in *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits*, (Gordon, and Breach, 1991), 2nd printing.
- [104] E. Lindelöf, in *Le Calcul des Résidues et ses Application à la Théorie des Fonctions*, (Chelsea, Paris, 1947).
- [105] M. Liu, *Rotating Superconductors, and the Frame-Independent London Equation*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3223 (1998).
- [106] F. London, in *Superfluids*, (Dover, New York, 1961), Volume I.
- [107] J. Luine, L. Abelson, D. Brundrett, J. Burch, E. Dansker, K. Hummer, G. Kerber, M. Wire, K. Yokayama, D. Bowling, M. Neel, S. Hubbel, and K. Li, *Application of a DC SQUID Array Amplifier to an Electrically Small Active Antenna*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **9**, 4141 (1999).
- [108] A. Majhofer, T. Wolf, and W. Dieterich, *Irreversible magnetization effects in a network of resistively shunted tunnel junctions*, Phys. Rev. B **44**, 9634 (1991).
- [109] E. Maruyama, S. Kuriki, Y. Kurisu, and M. Matsuda, *Analytical approach to calculate the flux dependent current-voltage characteristics of dc superconducting quantum interference devices*, J. Appl. Phys. **83**, 6166 (1998).
- [110] D.E. McCumber, *Effect of ac Impedance on dc Voltage-Current Characteristics of Superconductor Weak-Link Junctions*, J. Appl. Phys. **39**, 3113 (1968).
- [111] E.B. McDaniel, S.C. Gausepohl, C.-T. Li, M. Lee, J.W.P. Hsu, R.A. Rao, and C.B. Eorn, *Influence of SrTiO₃ bicrystal microstructural defects on YBa₂Cu₃O₇ grain-boundary Josephson junctions*, Appl. Phys. Lett. **70**, 1882 (1997).
- [112] D.W. Mc Laughlin, A.C. Scott, *Perturbation analysis of fluxon dynamics*, Phys. Rev. A. **18**, 1652 (1978).
- [113] A.H. Miklich, D. Koelle, E. Dansker, D.T. Nemeth, J.J. Kingston, R.F. Kronmann, and J. Clarke, *Bicrystal YBCO DC SQUIDs with low noise*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **3**, 2434 (1993).

- [114] J.H. Miller Jr., G.H. Gunaratne, J. Huang, and T.D. Golding, *Enhanced quantum interference effects in parallel Josephson junction arrays*, Appl. Phys. Lett. **59**, 3330 (1991).
- [115] J.H. Miller Jr., G.H. Gunaratne, Z. Zou, M.F. Davis, H.R. Rampersad, and J.C. Wolfe, *Phase coherence in the hysteretic magnetic behavior of parallel Josephson-junction arrays*, Phys. Rev. B **49**, 15317 (1994)
- [116] J.H. Miller Jr., G.H. Gunaratne, Z. Zou, M.F. Davis, H.R. Rampersad, N.-Q. Fan, and J.C. Wolfe, *Magnetic properties of one-dimensional parallel arrays of Josephson junctions*, Proc. SPIE. **2160**, 41 (1994).
- [117] J.H. Miller Jr., G.H. Gunaratne, Z. Zou, J. Huang, and T.D. Golding, *Applications of parallel Josephson junction arrays for the detection of magnetic flux*, Mat. Res. Soc. Symp. Proc. **275**, 759 (1992).
- [118] J.H. Miller Jr., G.H. Gunaratne, Z. Zou, *Detection of magnetic flux with Superconducting Quantum Interference Gratings*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **3**, **1804** (1993).
- [119] R.G. Mints, V.G. Kogan, *Josephson junctions with alternating critical current density*, Phys. Rev. B **55**, R8682 (1997).
- [120] J. Müller, S. Weiss, R. Gross, R. Kleiner, D. Koelle, *Voltage-flux-characteristics of asymmetric dc SQUIDs*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **11**, 912 (2001).
- [121] K. Nakajima, H. Mizusawa, Y. Sawada, H. Ajoh, and S. Takada, *Experimental Observation of Spatiotemporal Wave Forms of all Possible Types of Soliton-Antisoliton Interactions in Josephson Transmission Lines*, Phys. Rev. Lett. **65**, 1667 (1990).
- [122] P.A. Neil, R.G. Benson, D.A. Burns, A.M. Corey, C.S. Flynn, and M.E. Huber, *High-Frequency Characterization of DC SQUID Series Array Amplifiers Incorporating Intracoil Damping*, Proceedings of ISEC 1999, p. 547.
- [123] L. Onsager, *Statistical Hydrodynamics*, Nuovo Cimento **6**, Suppl. 2, 279 (1949).
- [124] J. Oppenländer, *Nichtlineare Dynamik raumzeitlicher Muster in Josephson-Kontakt-Netzwerken*, Dissertation, Universität Tübingen, 1997.
- [125] J. Oppenländer, W. Güttinger, T. Träuble, M. Keck, T. Doderer, and R.P. Huebener, *Two-Dimensional Josephson Junction Network Architectures for Maximum Microwave Radiation Emission*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **9**, 4337 (1999).
- [126] J. Oppenländer, Ch. Häussler, and N. Schopohl, *Dynamic electromagnetic response of three-dimensional Josephson junction arrays*, J. Appl. Phys. **86**, 5775 (1999).

- [127] J. Oppenländer, T. Träuble, Ch. Häussler, and N. Schopohl, *Superconducting Multiple Loop Quantum Interferometers*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **11**, 1271 (2001).
- [128] J. Oppenländer, Ch. Häussler, and N. Schopohl, *Non- Φ_0 -periodic macroscopic quantum interference in one-dimensional parallel Josephson junction arrays with unconventional grating structure*, Phys. Rev. B **63**, 024511 (2001).
- [129] J. Oppenländer, Ch. Häussler, T. Träuble, and N. Schopohl, *Highly sensitive magnetometers for absolute magnetic field measurements based on superconducting quantum interference filters*, Physica C **368**, 119 (2002).
- [130] J. Oppenländer, Ch. Häussler, T. Träuble, and N. Schopohl, *Sigmoid like flux to voltage transfer function of superconducting quantum interference filter circuits*, Physica C **368**, 125 (2002).
- [131] T.P. Orlando, and K.A. Delin, *Foundations of Applied Superconductivity* (Addison-Wesley, 1991).
- [132] R.D. Parmentier, and N.F. Pedersen (editors), *Nonlinear superconducting devices and High- T_c materials*, (World Scientific, 1995).
- [133] F. Parodi, and V. Vaccarone, *The critical state and the flux dynamics in squid arrays*, Physica C **173**, 56 (1991).
- [134] J.R. Phillips, H.S.J. van der Zant, J. White, and T.P. Orlando, *Influence of induced magnetic fields on the static properties of Josephson-junction arrays*, Phys. Rev. B **47**, 5219 (1993).
- [135] D. Reinel, W. Dietrich, and T. Wolf, *Flux-Flow phenomena, and current-voltage characteristics of Josephson-junction arrays with inductances*, Phys. Rev. B **49**, 9118 (1994).
- [136] J.M. Rowell, *Magnetic field dependence of the Josephson tunnel current*, Phys. Rev. Lett. **11**, 200 (1963).
- [137] S.T. Ruggiero, and D.A. Rudman (editors), *Superconducting Devices*, (Academic Press, 1990).
- [138] J.A. Sanders, and R. Cushman, *Limit cycles in the Josephson equation*, SIAM **17**, 495 (1986).
- [139] N. Schopohl, J. Oppenländer, Ch. Häußler, *Vorrichtung zur hochauflösenden Messung, insbesondere zur hochauflösenden absoluten Messung von magnetischen Feldern*, Patentanmeldung WO 0125805.
- [140] M.R. Schröder, in *Number Theory in Science, and Communication*, 3rd ed. (Springer, Berlin, 1999).

- [141] V. Schultze, V. Zakosarenko, R. IJsselsteijn, J. Ramos, and H.-G. Meyer, *Investigation of Multiple SQUID Arrangements in Single Layer High T_c Magnetometers*, Trans. Appl. Supercond. **9**, 3279 (1999).
- [142] E.O. Schulz-DuBois, and P. Wolf, *Static Characteristics of Josephson Interferometers*, Appl. Phys. **16**, 317 (1978).
- [143] S. Shapiro, *Josephson currents in superconductive tunneling: the effect of microwaves and other observations*, Phys. Rev. Lett. **11**, 80 (1963).
- [144] R. Simons, W. Jutzi, and H. Beha, *Static Interferometer Characteristics with Many Equal Josephson Junctions*, IEEE Trans. Magn. **19**, 44 (1983).
- [145] L. Solymar, in *Superconducting Tunneling and Applications*, (Chapman, and Hall, 1972).
- [146] K.G. Stawiasz, and M.B. Ketchen, *Noise Measurements of Series SQUID Arrays*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **3**, 1808 (1993).
- [147] W.C. Stewart, *Current-Voltage Characteristics of Josephson Junctions*, Appl. Phys. Lett. **12**, 277 (1968).
- [148] J. Stoer und R. Bulirsch in *Numerische Mathematik 2*, (Springer-Verlag, 1990), 3. Auflage.
- [149] S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, (Addison-Wesley, 1994).
- [150] J. Tate, S.B. Felch, and B. Cabrera, *Determination of the Cooper-pair mass in niobium*, Phys. Rev. B. **42**, 7885 (1990).
- [151] P.A.C. Tavares, E.J. Romans, and C.M. Pegrum, *High Current Gain HTS Josephson Vortex Flow Transistors*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **9**, 3941 (1999).
- [152] C.D. Tesche and J. Clarke, *dc SQUID: Noise and Optimization*, J. Low Temp. Phys. **29**, 301 (1977). See also: J.J.P. Bruines, V.J. de Waal, and J.E. Mooij, *Comment on: "dc SQUID: Noise and Optimization" by Tesche and Clarke*, J. Low Temp. Phys. **46**, 383 (1982)
- [153] M. Tinkham, in *Introduction to Superconductivity*, (McGraw-Hill, New York, 1996), 2nd edition.
- [154] M. Tinkham, and C.J. Lobb, *Physical Properties of the New Superconductors*, Solid State Phys. **42**, 91 (1989).
- [155] T. Traeuble, M. Keck, H. Pressler, R. Dolata, T. Doderer, T. Weinmann, R.P. Huebener, and J. Niemeyer, *Optimization of coherent emission from Josephson junction arrays by variation of the temperature*, Proceedings of the EUCAS 1997, p. 623.

- [156] E. Trías, T.P. Orlando, and A.E. Duwel, *Circuit Models for Arrays of Josephson Oscillators with Loads*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **9**, 4316 (1999).
- [157] W.-T. Tsang, and T. Van Duzer, *dc analysis of parallel arrays of two and three Josephson junctions*, J. Appl. Phys. **46**, 4573 (1975).
- [158] A. Tuohimaa, J. Paasi, T. Tarhasaari, T. Di Matteo, and R. De Luca, *Magnetic flux distribution in a three-dimensional inductive network of Josephson junctions*, Phys. Rev. B **61**, 9711 (2000).
- [159] A.V. Ustinov, M. Cirollo, B.H. Larsen, V.A. Oboznov, P. Carelli, and G. Rotoli, *Experimental and numerical study of dynamic regimes in a discrete sine-Gordon lattice*, Phys. Rev. B **51**, 3081 (1995).
- [160] A.V. Ustinov, M. Cirollo, and B.A. Malomed, *Fluxon dynamics in one-dimensional Josephson-junction arrays*, Phys. Rev. B **47**, 8357 (1993).
- [161] R. Vaccarone, *Pinning in SQUID arrays: a model for the transport properties of HTSC*, Proceedings of the 3rd national meeting on High Temperature Superconductivity, Genoa 1990, p. 346.
- [162] H.S.J. van der Zant, D. Berman, T.P. Orlando, and K.A. Delin, *Fiske modes in one-dimensional parallel Josephson-junction arrays*, Phys. Rev. B **49**, 12945 (1994).
- [163] H.S.J. van der Zant, R.A.M. Reuveur, and T.P. Orlando, *One-dimensional parallel Josephson-junction arrays as a tool for diagnostics*, Appl. Phys. Lett. **65**, 2102 (1994).
- [164] H.S.J. van der Zant, T.P. Orlando, S. Watanabe, and S.H. Strogatz, *Kink Propagation in a Highly Discrete System: Observation of Phase Locking to Linear Waves*, Phys. Rev. Lett. **74**, 174 (1995).
- [165] T. Van Duzer, C.W. Turner, in *Principles of Superconductive Devices and Circuits*, (Prentice Hall, 1999), 2nd edition.
- [166] H. Weinstock, and R.W. Ralston (editors), *The New Superconducting Electronics*, (Kluwer, London, 1993).
- [167] R.P. Welty, J.M. Martinis, *Two-stage integrated SQUID amplifier with series array output*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **3**, 2605 (1993).
- [168] R. P. Welty, J. M. Martinis, *A series array of dc SQUIDs*, IEEE Trans. Mag. **27**, 2924 (1991).
- [169] K. Wiesenfeld, S.P. Benz, and P.A.A. Booij, *Phase-locked oscillator optimization for arrays of Josephson junctions*, J. Appl. Phys. **76**, 3835 (1994).

- [170] J. Wunsch, Titel, *Static Characteristics of Interferometers with Five Josephson Junctions Having Different Critical Currents*, IEEE Trans. Magn. **21**, 1204, (1985).
- [171] I.K. Yanson, V.M. Svistunov, and I.M. Dmitrenko, *Experimental observation of the tunnel effect for Cooper pairs with the emission of photons*, Zh. Éksp. Teor. Fiz. **48**, 976 (1965) [Sov. Phys. JETP **21**, 650, (1965).]
- [172] H.H. Zappe, and B.S. Landman, *Analysis of resonance phenomena in Josephson interferometer devices*, J. Appl. Phys. **49**, 344, 1978.
- [173] J.E. Zimmerman, and A.H. Silver, *Macroscopic Quantum Interference Effects through Superconducting Point Contacts*, Phys. Rev. **141**, 367 (1966).

Zum Abschluss bedanke ich mich bei allen, die mich bei meiner Arbeit unterstützt haben. Herrn Prof. Dr. N. Schopohl und Herrn Dr. J. Oppenländer bin ich für die ausgezeichnete Betreuung der Arbeit und die vielen wertvollen Diskussionen zu großem Dank verpflichtet. Die sehr gute Zusammenarbeit sowie die hervorragenden Arbeitsbedingungen am Lehrstuhl für Theoretische Festkörperphysik trugen wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Den Herren Dipl. Phys. Thomas Träuble, Dipl. Phys. Jörg Tomes, Dr. Alexander Friesch und Frau Dr. Pasqualina Caputo danke ich für zahlreiche fruchtbare Diskussionen sowie für das sehr gute und produktive Arbeitsklima. Besonderer Dank geht an Thomas Träuble für die erfolgreiche experimentelle Umsetzung der theoretischen Ideen und für die Einführung in die Welt des Experiments mit kryoelektronischen Schaltungen. Herrn Prof. W. Güttinger danke ich für viele wertvolle Tips und Anregungen.

Den Beteiligten des Forschungsschwerpunktprogramms “Nanotechnologie und Quantenelektronik” des Landes Baden-Württemberg danke ich für ihre Unterstützung. Insbesondere bei Herrn Prof. Dr. R. Kleiner und Herrn Prof. Dr. D. Kern bedanke ich mich herzlich für ihre freundliche Förderung des SQIF-Projekts mit Laborräumen und experimenteller Ausrüstung für die kryoelektronischen Experimente. Ebenso möchte ich Herrn Prof. Dr. R.P. Hübener für sein Interesse an dieser Arbeit und für viele wichtige Hinweise danken.

Nur in einem angenehmen Umfeld läßt sich’s gut arbeiten: ein großes Dankeschön richte ich deshalb an die gesamte Arbeitsgruppe für die freundschaftliche Atmosphäre! Besonders danke ich dabei Michael Seifried für die geniale Computer- und Softwarebetreuung. Frau Stiller und Frau Adler danke ich für ihre stets freundliche Hilfsbereitschaft.

Und nicht zuletzt danke ich ganz besonders meiner Freundin Christine und meinen Eltern für all ihre Unterstützung während der letzten Jahre!