

Dynamik von Bose-Einstein-Kondensaten in anharmonischen Wellenleitern

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Mathematik und Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Herwig Ott
aus Ruit auf den Fildern

2003

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Februar 2003

Dekan:	Prof. Dr. H. Müther
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. C. Zimmermann
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. M. Weitz
3. Berichterstatter:	Prof. Dr. K. Sengstock

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Bose-Einstein-Kondensate in anharmonischen Potenzialen	5
2.1	Das schwach wechselwirkende Bose-Gas	6
2.1.1	Die Gross-Pitaevskii-Gleichung	6
2.1.2	Die Thomas-Fermi-Näherung	8
2.2	Kollektive Anregungen	9
2.2.1	Kleine Amplituden	9
2.2.2	Große Amplituden	12
2.3	Anharmonische Potenziale	14
2.3.1	Theoretisches Modell	15
2.3.2	Anharmonische Wellenleiter	18
3	Magnetfallen und Mikrofallen	21
3.1	Magnetisches Speichern	21
3.2	Fallengeometrien	22
3.2.1	Verlustprozesse	24
3.3	Mikrofallen	25
3.3.1	Wellenleiter	26
3.3.2	Eigenschaften	27
3.3.3	Ausführungsformen	28
3.3.4	Lademechanismen	29
3.4	Atome in der Falle	30
3.5	Evaporatives Kühlen	31
3.5.1	Evaporation durch Radiofrequenz	33
4	Experimenteller Aufbau	35
4.1	Lasersystem	35
4.1.1	Benötigte Laser für Rubidium	36
4.1.2	Laserdioden	37
4.1.3	Kühlaser	37
4.1.4	Rückpumplaser	39
4.1.5	Abbildungslaser	40

4.1.6	Laserstabilisierung	41
4.1.7	Schaltung der Laserstrahlen	45
4.2	Abbildungssystem und -auswertung	46
4.3	Vakuumaufbau	48
4.3.1	Mikrostruktur	48
4.3.2	Spulen und Drahnte	49
4.3.3	Vakuumsystem	50
4.4	Experimentsteuerung	51
5	Erzeugung der Bose-Einstein-Kondensate	53
5.1	Die magnetooptische Falle	53
5.1.1	Rubidiumdispenser als thermische Atomquelle	55
5.1.2	MOT-Betrieb und Laden der Magnetfalle	57
5.2	Der adiabatische Transfer in die Mikrofalle	59
5.2.1	Transfer zwischen den Spulenpaaren	60
5.2.2	Erzeugung einer Ioffe-Falle	63
5.2.3	Transfer in die Mikrofalle	65
5.3	Das Bose-Einstein-Kondensat	73
5.3.1	Evaporatives Kühlen	73
5.3.2	Nachweis des Bose-Einstein-Kondensats	74
5.4	Zusammenfassung	78
6	Experimente zur Dynamik in anharmonischen Wellenleitern	79
6.1	Stand der Forschung	80
6.2	Durchführung der Experimente	81
6.3	Schwerpunktsbewegung	86
6.4	Kollektive Anregungen des Kondensats	89
6.5	Nichtlineare Kopplung zwischen den Moden	93
6.6	Energiebilanz und Verluste	96
6.7	Chaotisches Verhalten	99
7	Zusammenfassung und Ausblick	109
A	Theoretische Ergänzungen	113
A.1	Das ideale Bose-Gas	113
A.2	Kondensate in harmonischen Potenzialen	115
A.3	Gültigkeit des theoretischen Modells	116
A.4	Kopplungen höherer Ordnung	116
A.5	Variationsansatz	118
B	Numerische Methoden und Messdaten	123

Kapitel 1

Einleitung

Mitte der zwanziger Jahre erarbeiteten Satyendra Nath Bose und Albert Einstein eine Theorie, die das statistische Verhalten von Bosonen beschreibt. Bose studierte das Verhalten von masselosen Photonen [Bos24], und Einstein erweiterte die Theorie auf massive Teilchen [Ein25]. Die Theorie sagte voraus, dass bosonische Teilchen unterhalb einer kritischen Temperatur in großer Zahl den quantenmechanischen Grundzustand des Systems besetzen. Es kommt zur so genannten Bose-Einstein-Kondensation. Seit den theoretischen Vorhersagen waren 70 Jahre vergangen ehe 1995 Anderson *et al.* [And95] die Bose-Einstein-Kondensation eines verdünnten Gases aus Rubidiumatomen beobachteten und damit ein äußerst schnell wachsendes Forschungsgebiet eröffneten, das jüngst mit der Verleihung des Physik-Nobelpreis an Wolfgang Ketterle, Eric Cornell und Carl Wieman ausgezeichnet wurde. Seitdem ist es über 45 Arbeitsgruppen gelungen, Bose-Einstein-Kondensate zu erzeugen.

„Eine Quantenflüssigkeit dünner als Luft“ überschrieb Wolfgang Ketterle seinen Vortrag im Rahmen der Bodo von Borries Vorlesung im Sommersemester 2001 an der Universität Tübingen. Der Titel macht deutlich, dass sich der Zustand, in dem sich die Atome in einem Bose-Einstein-Kondensat befinden, grundlegend von dem eines klassischen Gases unterscheidet. Die Kombination aus sehr tiefen Temperaturen und gleichzeitig geringen Dichten macht diesen Zustand möglich und hat dem Bose-Einstein-Kondensat die Bezeichnung als neuen Aggregatzustand eingebracht. Die Temperatur, die zum Erreichen der Bose-Einstein-Kondensation im Experiment unterschritten werden muss, beträgt ungefähr $1\ \mu\text{K}$. Unter Normalbedingungen liegen die meisten Elemente bei diesen Temperaturen als Festkörper vor. Speziell Alkalimetalle, die neben Wasserstoff und metastabilem Helium die bisher einzigen Gase sind, mit denen die Bose-Einstein-Kondensation gelungen ist, sind bereits bei Zimmertemperatur fest. Die herkömmliche Kondensation der Gase in die flüssige und schließlich feste Phase kann jedoch verhindert werden, wenn das Gas eine Dichte besitzt, die eine Million mal kleiner als die Dichte von Raumluft ist. Das Gas existiert dann in einem metastabilen Zustand und bleibt gasförmig. Erst bei der kritischen Temperatur zur Bose-Einstein-Kondensation findet der Phasenübergang in den neuen Aggregatzustand statt. Die Bezeichnung „Quantenflüssigkeit“ rührt dabei von der

engen Analogie zwischen Supraflüssigkeiten und Bose-Einstein-Kondensaten her.

In einem Bose-Einstein-Kondensat dominiert bei großer Atomzahl die Wechselwirkungsenergie zwischen den Atomen über die kinetische Energie. Bei repulsiver Wechselwirkung wie im Falle von ^{87}Rb bläht sich das Bose-Einstein-Kondensat auf und erreicht Größen bis zu einigen 100 Mikrometern. Da sich alle Atome in demselben quantenmechanischen Zustand befinden, resultiert eine Kohärenzlänge der Atome, die genauso groß ist wie die Ausdehnung des Kondensats. Diese Eigenschaft macht es zu einem idealen System für die Untersuchung quantenmechanischer Phänomene. Aus der langen Liste von eindrucksvollen Experimenten, die seit 1995 durchgeführt wurden, seien an dieser Stelle die Interferenz von Materiewellen [And97], die Erzeugung von Vortices [Mat99] sowie die Beobachtung des Mott-Isolator-Übergangs [Gre02] genannt.

Zeitgleich entstand ein benachbartes Forschungsgebiet, das es sich zum Ziel gesetzt hatte, mit miniaturisierten Potenzialen ultrakalte, atomare Gase zu manipulieren. Die dafür benötigten Magnetfelder werden von auf Mikrostrukturen integrierten Leiterbahnen erzeugt. In zahlreichen Experimenten konnte gezeigt werden, dass mit dieser Technik eine außerordentliche Vielzahl an Elementen zur Manipulation atomarer Ensembles möglich ist: So konnten „Röhren“, Strahlteiler und reflektierende Spiegel für thermische Atome realisiert werden [Fol02]. Seit der ersten Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats wurden daher Vorschläge diskutiert, diese einzigartige Form kohärenter Materie mit den Möglichkeiten der Mikromanipulation zu verbinden. Inspiriert wurden diese Überlegungen auch durch die Erfolge der Atominterferometrie [Ber97], die sich als hochpräzises Messinstrument erwies. Daraus entstand die Idee einer kohärenten, integrierten Atomoptik mit Materiewellen. Mit einem solchen System können hochsensible, tragbare Sensoren entwickelt werden. Es bietet einzigartige Möglichkeiten zur Erzeugung von Modellsystemen, mit denen Probleme aus anderen Bereichen der Physik nachgestellt und untersucht werden können. Für Experimente zur Quanteninformationsverarbeitung und verschränkten Zuständen kann ein Bose-Einstein-Kondensat in einem miniaturisierten Potenzial als Reservoir dienen, aus dem gezielt einzelne Atome in einem definierten Quantenzustand ausgekoppelt werden. Grundvoraussetzung für die genannten Anwendungen ist die Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats in einer solchen „Mikrofalle“. Mit der im Rahmen dieser Arbeit aufgebauten Apparatur konnte dies erstmals erreicht werden [Ott01].

Für die Nutzung der Kohärenzeigenschaften der Bose-Einstein-Kondensate bei interferometrischen Experimenten wie auch für die Mikromanipulation kohärenter Materie allgemein ist eine genaue Kenntnis der dynamischen Eigenschaften des Kondensats notwendig. In dieser Arbeit wird eine Experimentreihe vorgestellt, mit der erstmals die Dynamik von Bose-Einstein-Kondensaten in einer Mikrofalle systematisch untersucht wurde [Ott02a]. Als Potenzialform wurde die des anharmonischen Wellenleiters gewählt, da er das Basiselement eines integrierten Atominterferometers ist. In den meisten bisherigen Experimenten zur Atomoptik und Atominterferometrie spielte die Wechselwirkung der Atome keine bedeutende Rolle, da die Dichten

sehr gering waren. Bei der Physik der Bose-Einstein-Kondensate ist das grundsätzlich anders, denn die erreichten Dichten sind so groß, dass die Wechselwirkung nicht nur mitberücksichtigt werden muss, sondern auch zentrale Eigenschaften des Kondensats wie beispielsweise die Form der Wellenfunktion maßgeblich bestimmt. Die Wechselwirkung wird theoretisch durch einen nichtlinearen Term in der Schrödinger-Gleichung für die Kondensatswellenfunktion beschrieben. Er gibt Anlass zu einer Reihe nichtlinearer Effekte und führt zu einem dynamischen Verhalten des Kondensats, das sich stark von dem aus der Einzelatomphysik bekannten Verhalten unterscheidet.

In konventionellen Apparaturen zur Bose-Einstein-Kondensation sind die Potentiale, mit denen die Atome gespeichert werden, harmonisch. Dies hat zur Folge, dass die innere Dynamik des Kondensats vollständig von der äußeren Schwerpunktsbewegung entkoppelt ist. Bei anharmonischen Potenzialen gilt dies nicht mehr, und es kommt zu einer Kopplung der äußeren und inneren Dynamik. Gerade Mikrofallen sind bestens geeignet diese Kopplung zu untersuchen, da auf einfache Weise stark anharmonische Potentiale erzeugt werden können. Das Konzept der Mikrofallen selbst ist untrennbar mit dem Auftreten anharmonischer Potentiale verbunden, denn nur so können komplexe Magnetfeldkonfigurationen erzeugt werden, die von der trivialen parabolischen Form abweichen. Damit ist auch der Wellenleiter als integriertes atomoptisches Element im Normalfall anharmonisch.

Als natürliche äußere Bewegung eines Bose-Einstein-Kondensats in einem geschlossenen Wellenleiter ist die Schwingung anzusehen. Aus diesem Grund wurde sie für die experimentelle Untersuchung ausgewählt. Bei der Schwerpunktsbewegung des Kondensats durch den Wellenleiter treten im Experiment zwei Einflüsse nebeneinander auf. Durch die Anharmonizität des Wellenleiters wird zum einen eine Kopplung der äußeren und der inneren Dynamik erzeugt, die zu kollektiven Anregungen des Kondensats in Gestalt von Formschwingungen führt. Zum anderen sorgt die Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen bei der inneren Dynamik für eine Kopplung der kollektiven Anregungen untereinander. Eine direkte Konsequenz der Nichtlinearität ist eine potenziell chaotische Dynamik. Mit der vorgestellten Experimentreihe konnten die genannten Effekte charakterisiert und quantitativ beschrieben werden. Dazu wurde ein theoretisches Modell entwickelt, das die Dynamik des Kondensats mit großer Genauigkeit beschreibt [Ott02b].

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In Kapitel 2 werden die benötigten Grundlagen für die theoretische Beschreibung eines Bose-Einstein-Kondensats vorgestellt. Nach der Herleitung der Gross-Pitaevskii-Gleichung werden die niederfrequenten kollektiven Anregungen des Kondensats eingeführt. Daraus wird das theoretische Modell entwickelt, das mit Hilfe einer Separation der Schwerpunktsbewegung die theoretische Beschreibung von schwingenden Kondensaten in anharmonischen Potenzialen erlaubt. Kapitel 3 gibt eine etwas tiefer gehende Einführung in die Theorie und Anwendung von Magnetfallen und Mikrofallen. Das Kapitel ist vergleichsweise ausführlich gehalten und versucht, alle wesentlichen Gesichtspunkte herauszustellen. Der Apparatur ist Kapitel 4 gewidmet. Die verwendeten Lasersysteme, das Abbil-

dungssystem, der Vakuumaufbau und die Experimentsteuerung werden im Einzelnen behandelt. Für die Erzeugung der Mikrofalle wird eine Mikrostruktur mit aufgalvanisierten Kupferleitern eingesetzt, die ebenfalls in diesem Kapitel beschrieben wird. Die Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten in einer Mikrofalle ist Gegenstand von Kapitel 5. Dabei werden vor allem technische Neuerungen und Unterschiede zu bisherigen Apparaturen behandelt. Ein besonderer Schwerpunkt wird auf die verwendete thermische Quelle für ^{87}Rb -Atome gelegt, die als eine äußerst einfache und effiziente Methode eingesetzt wird. Ausführlich wird die Methode des adiabatischen Transfers geschildert, mit dem die Atomwolke an die Mikrostruktur überführt wird. Diese eigens für das Experiment entwickelte Methode ermöglicht einen guten optischen Zugang für die zur Kühlung der Atome benötigten Laser und ermöglicht die Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten mit sehr großen Atomzahlen. Die apparativen Besonderheiten stellen im Vergleich zu konventionellen experimentellen Aufbauten nicht nur eine erhebliche technische Vereinfachung dar, sondern ermöglichen gleichzeitig auch ähnlich gute oder bessere Ergebnisse. Kapitel 6 enthält die Studien zur Dynamik des Kondensats im anharmonischen Wellenleiter. Nach einer Analyse der Schwerpunktsbewegung werden die kollektiven Anregungen des Kondensats untersucht. In Abschnitt 6.5 wird die nichtlineare Kopplung der kollektiven Anregungen gezeigt. Eine Analyse der experimentellen Daten wie auch des theoretischen Modells zur chaotischen Dynamik von Kondensaten in anharmonischen Potenzialen schließen das Kapitel und diese Arbeit ab.

Neben den in dieser Arbeit geschilderten Experimenten zur Dynamik der Kondensate konnten mit dem experimentellen Aufbau auch weitere wichtige Fragestellungen zum Verhalten eines Bose-Gases in Mikrofallen untersucht werden. So wurde die Wechselwirkung zwischen den ultrakalten Atomen und der Oberfläche der Mikrostruktur detailliert untersucht [For02b, Kra02]. Die Ergebnisse dieser Studien, die unter anderem ein periodisches, longitudinales Magnetfeld oberhalb eines stromdurchflossenen Kupferleiter aufdeckten, werden in der Doktorarbeit von József Fortágh [For03] vorgestellt.

Die Forschung mit Bose-Einstein-Kondensaten in Mikrofallen steht am Anfang einer schnellen Entwicklung. Kurz nach unserem Experiment gelang es der Gruppe um Prof. Hänsch ebenfalls ein Bose-Einstein-Kondensat in einer Mikrofalle zu erzeugen [Hän01] und bis heute ist dies weiteren vier Gruppen gelungen. Mit der vorliegenden Arbeit wird ein neues Forschungsgebiet betreten, das viele interessante physikalischen Phänomene bereit hält.

Kapitel 2

Theorie des Bose-Einstein-Kondensats in anharmonischen Potenzialen

In diesem Kapitel wird ein theoretisches Modell vorgestellt, mit dem die Dynamik eines Bose-Einstein-Kondensats in einem anharmonischen Potenzial beschrieben werden kann [Ott02b]. Der erste Teil dieses Kapitels gibt einen Überblick über die dafür benötigten Grundlagen. In Abschnitt 2.1 wird die Gross-Pitaevskii-Gleichung hergeleitet, mit der ein Bose-Einstein-Kondensat bei $T = 0$ beschrieben wird. Anschließend wird die Thomas-Fermi-Näherung eingeführt, die eine Reihe analytischer Lösungen der Gross-Pitaevskii-Gleichung ermöglicht. Mit Hilfe einer linearisierten Theorie wird dann in Abschnitt 2.2.1 das Anregungsspektrum eines Bose-Einstein-Kondensats untersucht. Dabei gilt ein besonderes Interesse den niederfrequenten Formschwingungen des Kondensats. Mit einer zeitlichen Variation des Potenzials können solche Formschwingungen angeregt werden. Speziell für harmonische Potenziale existiert eine analytische Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung, die in Abschnitt 2.2.2 behandelt wird. Ausgehend von dieser analytischen Lösung wird das theoretische Modell für die Dynamik in anharmonischen Potenzialen entwickelt: Die Schwerpunktsbewegung des Kondensats wird durch einen Separationsansatz von der inneren Dynamik entkoppelt. Das Kondensat kann dann in seinem Ruhesystem mit einer Gross-Pitaevskii-Gleichung beschrieben werden, die einen zeitabhängigen, harmonischen Potenzialterm enthält. Dessen zeitliches Verhalten wird von der Schwerpunktsbewegung bestimmt. Zusammen mit den Bewegungsgleichungen für den Schwerpunkt entsteht so ein System aus gekoppelten, gewöhnlichen Differentialgleichungen, mit denen das Kondensat beschrieben wird.

Ergänzend zu diesen Ausführungen befindet sich im Anhang eine Beschreibung des idealen Bose-Gases (Anhang A.1) und eine Zusammenstellung der wichtigsten Formeln für ein wechselwirkendes Bose-Gas in einem harmonischen Potenzial (Anhang A.2).

2.1 Das schwach wechselwirkende Bose-Gas

Ein Bose-Einstein-Kondensat schwach wechselwirkender Teilchen wird durch die so genannte Gross-Pitaevskii-Gleichung beschrieben. Sie gilt für $T = 0$ und hat die Struktur einer nichtlinearen Schrödingergleichung. Die Gross-Pitaevskii-Gleichung wird im Rahmen eines so genannten „mean field“ Ansatzes hergeleitet, der die Wechselwirkung der Teilchen durch ein effektives Potenzial beschreibt. Für die stationäre Gross-Pitaevskii-Gleichung findet man besonders einfache Ergebnisse innerhalb der Thomas-Fermi-Näherung, bei der die kinetische Energie gegenüber der Wechselwirkungsenergie vernachlässigt wird.

2.1.1 Die Gross-Pitaevskii-Gleichung

Ein Vielteilchensystem mit N wechselwirkenden Bosonen wird in zweiter Quantisierung durch den Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int dx \hat{\Psi}^\dagger(x) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{\text{ext}}(x) \right] \hat{\Psi}(x) \\ & + \frac{1}{2} \int dx dx' \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x') U(x-x') \hat{\Psi}(x') \hat{\Psi}(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

beschrieben [Dal96]. Der Feldoperator $\hat{\Psi}^\dagger(x)$ erzeugt ein Boson am Ort x , $\hat{\Psi}(x)$ vernichtet eines. Das Wechselwirkungspotenzial zwischen zwei Teilchen wird durch $U(x-x')$ beschrieben und das äußere Potenzial mit $U_{\text{ext}}(x)$.

Zwei Annahmen werden im Weiteren gemacht: Erstens soll das Potenzial zwischen zwei Teilchen als Punktwechselwirkung angenommen werden:

$$U(x-x') = g\delta(x-x'). \quad (2.2)$$

Die Kopplungskonstante g ist gegeben durch (siehe z. B. [Hua63])

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$$

mit der s -Wellen-Streulänge a . Die Voraussetzung für diesen Ansatz ist, dass die Streulänge a sehr viel kleiner ist als der interatomare Abstand. Dies kann über die Teilchendichte n ausgedrückt werden:

$$na^3 \ll 1.$$

In diesem Sinne wird das Gas oft auch als „stark verdünnt“ bezeichnet.

Bei der Bose-Einstein-Kondensation besetzt eine makroskopische Anzahl Teilchen den Grundzustand des Systems. Man zerlegt deshalb den Feldoperator in die einzelnen Operatoren für die Einteilchenwellenfunktionen und separiert den Operator für den Grundzustand ab:

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(x) a_{\alpha} = \psi_0 a_0 + \hat{\Psi}'(x) \quad (2.3)$$

Die a_α^\dagger und a_α sind die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Bosonen in den Einteilchenzuständen ψ_α mit der Besetzungszahl n_i . Aus der makroskopischen Besetzung des Grundzustands ($n_0 \gg 1$) folgt die zweite Annahme:

$$\begin{aligned} a_0 |n_0, n_1, \dots\rangle &= \sqrt{n_0} |n_0 - 1, n_1, \dots\rangle \simeq \sqrt{n_0} |n_0, n_1, \dots\rangle \\ a_0^\dagger |n_0, n_1, \dots\rangle &= \sqrt{n_0 + 1} |n_0 + 1, n_1, \dots\rangle \simeq \sqrt{n_0} |n_0, n_1, \dots\rangle. \end{aligned}$$

Damit können die Operatoren a_0 und a_0^\dagger wie eine Zahl behandelt werden: $a_0 = a_0^\dagger = \sqrt{n_0}$. Der Anteil der thermischen Atome $\hat{\Psi}'(\mathbf{x})$ wird in einer Störungsreihe mitberücksichtigt. Für zeitabhängige und inhomogene Systeme lautet die Verallgemeinerung von (2.3) (siehe [Dal96])

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t) + \hat{\Psi}'(\mathbf{x}, t). \quad (2.4)$$

Man bezeichnet $\psi(\mathbf{x}, t)$ als Ordnungsparameter oder auch Kondensatswellenfunktion. Für eine formale Definition von $\psi(\mathbf{x}, t)$ sei auf Hohenberg und Martin [Hoh65] verwiesen. Die Kondensatswellenfunktion ist auf die Atomzahl im Kondensat normiert:

$$N_0 = \int d^3\mathbf{x} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2.$$

Der Anteil der thermischen Atome wird in (2.4) durch $\hat{\Psi}'(\mathbf{x}, t)$ beschrieben. Mit ihm kann die Wechselwirkung zwischen den Kondensatsatomen und der thermischen Wolke beschrieben werden [Gio97].

Die Zeitentwicklung des Feldoperators $\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ für den Hamiltonoperator (2.1) lautet in der Heisenbergdarstellung

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) &= [\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t), \hat{H}] \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{\text{ext}}(\mathbf{x}) + g \int d^3\mathbf{x}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}', t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\Psi}(\mathbf{x}', t) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{\text{ext}}(\mathbf{x}) + g \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Setzt man den nichtkondensierten Anteil der Atome in (2.4) gleich null, was äquivalent zu der Forderung $T = 0$ ist, erhält man die so genannte Gross-Pitaevskii-Gleichung für die Kondensatswellenfunktion

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{\text{ext}}(\mathbf{x}) + g |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.5)$$

Diese nichtlineare Schrödingergleichung wurde erstmals von Gross [Gro61] und Pitaevskii [Pit61] hergeleitet. Für den stationären Fall ergibt sich

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{\text{ext}}(\mathbf{x}) + g |\psi(\mathbf{x})|^2 \right] \psi(\mathbf{x}) = \mu \psi(\mathbf{x}), \quad (2.6)$$

wobei μ das chemische Potenzial ist.

2.1.2 Die Thomas-Fermi-Näherung

Die stationäre Gross-Pitaevskii-Gleichung (2.6) lässt sich nur numerisch lösen. Mit der Annahme, dass die kinetische Energie in (2.6) klein gegenüber der Wechselwirkungsenergie $g|\psi|^2$ ist, kann (2.6) jedoch vereinfacht werden zu

$$(U(\mathbf{x}) + g|\psi(\mathbf{x})|^2) \psi(\mathbf{x}) = \mu\psi(\mathbf{x}).$$

Daraus folgt unmittelbar die Dichteverteilung des Kondensats

$$n(\mathbf{x}) = |\psi(\mathbf{x})|^2 = \frac{1}{g} \max(\mu - U(\mathbf{x}), 0) \quad (2.7)$$

$$= n_0 \max\left(1 - \frac{U(\mathbf{x})}{\mu}, 0\right) \quad (2.8)$$

mit der Normierung

$$N = \int n(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \int |\psi(\mathbf{x})|^2 d^3\mathbf{x}$$

und der Dichte im Zentrum des Kondensats

$$n_0 = \frac{\mu}{g}.$$

Für $U(\mathbf{x}) > \mu$ verschwindet die Kondensatswellenfunktion. Da die Verwendung der max-Funktion etwas unübersichtlich ist, wird im Weiteren auf sie verzichtet. Alle in dieser Arbeit angegebenen Kondensatswellenfunktionen sind nur für positive Argumente definiert. Die Näherung wird als Thomas-Fermi-Näherung, die Dichteverteilung (2.7) als Thomas-Fermi-Profil bezeichnet. Für ein harmonisches Potenzial kann die Thomas-Fermi-Näherung durch die folgende Bedingung ausgedrückt werden:

$$\frac{N|a|}{a_{\text{HO}}} \gg 1 \quad (2.9)$$

mit der Oszillatorlänge $a_{\text{HO}} = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$. An den Rändern, an denen die Kondensatswellenfunktion (2.7) verschwindet, dominiert die kinetische Energie und es treten Abweichungen vom Thomas-Fermi-Profil auf [Dal96]. Nach (2.7) passt sich das Kondensat jeder Potenzialform an, solange die Bedingung (2.9) erfüllt ist. Sie wird verletzt, wenn die Kondensatsdichte von 0 auf n_{max} innerhalb einer Strecke Δx anwächst, die kleiner ist als die so genannte „healing length“

$$\xi = (8\pi n_{\text{max}} a)^{-1/2}, \quad (2.10)$$

die über die Gleichheit von kinetischer Energie und Wechselwirkungsenergie definiert ist.

Für beinahe alle in dieser Arbeit untersuchten Systeme ist die Thomas-Fermi-Näherung bestens erfüllt. Für einige Kondensate mit sehr geringer Atomzahl ist sie hingegen nur schwach erfüllt. Die Folgen dieser Abweichung werden an der entsprechenden Stelle diskutiert.

2.2 Kollektive Anregungen

Die niederfrequenten Formschwingungen eines Kondensats werden auch als kollektive Anregungen bezeichnet. Das Kondensat als Ganzes führt Dichteschwingungen aus und pulsiert. In diesem Abschnitt werden die möglichen Geometrien und Eigenfrequenzen dieser Schwingungsmoden diskutiert. Die Dichteschwingungen entsprechen stehenden Wellen, deren Wellenlänge von der Größe der Kondensatsausdehnung ist. Die Herleitung geschieht mit einer Linearisierung der zeitabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung unter Vernachlässigung der so genannten Lokalisierungsenergie. Sie ist derjenige Anteil der kinetischen Energie, der durch die Krümmung der Wellenfunktion verursacht wird. Nach der Heisenberg'schen Unschärferelation wächst ihr Anteil mit zunehmender Lokalisierung der Wellenfunktion. Der andere Beitrag zur kinetischen Energie wird durch den Gradienten der Phase bestimmt und entspricht einer klassischen Bewegungsenergie. Für stationäre Zustände sind Lokalisierungsenergie und kinetische Energie identisch.

2.2.1 Kleine Amplituden

Für die folgende Herleitung wird die Gross-Pitaevskii-Gleichung mit einem hydrodynamischen Ansatz gelöst. Dieses Verfahren wurde von Stringari [Str96a] benutzt, um das niederfrequente Anregungsspektrum eines Bose-Einstein-Kondensats zu untersuchen. Die Wellenfunktion des Kondensats wird dazu umgeschrieben zu

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{n(\mathbf{x}, t)} e^{iS(\mathbf{x}, t)} \quad (2.11)$$

mit der Dichteverteilung $n(\mathbf{x}, t)$ und dem Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla S(\mathbf{x}, t).$$

Der Ansatz (2.11) wird in die zeitabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung (2.5) eingesetzt. Bei genügend großer Teilchenzahl kann die Lokalisierungsenergie vernachlässigt werden. Nach der Trennung in Real- und Imaginärteil erhält man zwei gekoppelte Gleichungen für die Dichteverteilung und das Geschwindigkeitsfeld:

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{x}, t) + \nabla(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)n(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad (2.12)$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla \left(U(\mathbf{x}) + gn(\mathbf{x}, t) + \frac{m\mathbf{v}^2}{2} \right) = 0. \quad (2.13)$$

Da man nur an kleinen Amplituden interessiert ist wird die Dichteverteilung um die stationäre Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung mit $\mathbf{v} = 0$ entwickelt:

$$n_0(\mathbf{x}) = 1/g(\mu - U(\mathbf{x})) \quad (2.14)$$

$$n(\mathbf{x}, t) = n_0(\mathbf{x}) + \delta n(\mathbf{x}, t) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (2.16)$$

Die Dichteveriation $\delta n(\mathbf{x}, t)$ bleibt dabei auf die Ausdehnung des Kondensats beschränkt. Setzt man (2.14)–(2.16) in (2.12) und (2.13) ein, so ergibt sich nach der Linearisierung für die Dichteveriation

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n(\mathbf{x}, t) = \nabla \left((\mu - U(\mathbf{x})) \nabla \delta n(\mathbf{x}, t) \right). \quad (2.17)$$

Als Ansatz für die kollektiven Anregungen wählt man eine periodische Störung

$$\delta n(\mathbf{x}, t) = \delta n(\mathbf{x}) e^{i\omega t}$$

und erhält für ein in alle drei Richtungen harmonisches Potenzial nach Einsetzen in (2.17) die Differenzialgleichung

$$\omega^2 \delta n(\mathbf{x}) = -\nabla \left(\left(\mu - \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 - \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 - \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 \right) \nabla \delta n(\mathbf{x}) \right).$$

Für ein kugelsymmetrisches Potenzial haben die Lösungen die Form

$$\delta n(\mathbf{r}) = P_l^{2n_r}(r/R) r^l Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.18)$$

wobei die $P_l^{2n_r}$ Polynome vom Grad $2n_r$ sind. Die Anregungen werden nach ihrer radialen Quantenzahl n_r und ihren Drehimpulsquantenzahlen l und m klassifiziert. Das resultierende Anregungsspektrum lautet [Str96b]:

$$\omega^2(n_r, l) = \omega_{\text{HO}}^2(2n_r^2 + 2n_r l + 3n_r + l).$$

Im Vergleich dazu beinhaltet das Spektrum des idealen Bose-Gases nur Vielfache der Grundfrequenz

$$\omega_{\text{IG}}(n_r, l) = \omega_{\text{HO}}(n_x + n_y + n_z) = \omega_{\text{HO}}(2n_r + l)$$

und gleicht dem Einteilchen-Anregungsspektrum.

Anregungen mit verschwindender radialer Quantenzahl $n_r = 0$ werden als „surface excitations“ oder Oberflächenanregungen bezeichnet. Nach (2.18) verschwinden sie im Zentrum des Kondensats und besitzen an der Kondensatoberfläche ihr Maximum. Radiale Anregungen mit $n_r > 0$ werden als „compressional modes“ bezeichnet. Bei ihnen schwingt die Dichteverteilung in radialer Richtung und ändert sich im Falle $l = 0$ auch am Ursprung. Die radiale Anregung mit der niedrigsten Frequenz ist die $(n_r = 1, l = 0, m = 0)$ -Mode (kurz $(1,0,0)$ -Mode) und entspricht einem pulsierenden Kondensat. Sie wird auch als „breathing mode“ bezeichnet. Moden mit $l = 1$ werden Dipolmoden genannt, und für $n_r = 0$ beschreiben sie die Schwerpunktsbewegung des Kondensats. Moden mit $l = 2$ nennt man Quadrupolmoden.

Analytische Ergebnisse sind für ein axialsymmetrisches harmonisches Potenzial ($\omega_x = \omega_y := \omega_r, \omega_z := \omega_a$) wegen der reduzierten Symmetrie schwieriger zu berechnen. Nur noch m , die Projektion des Drehimpulses auf die Symmetrieachse, ist eine

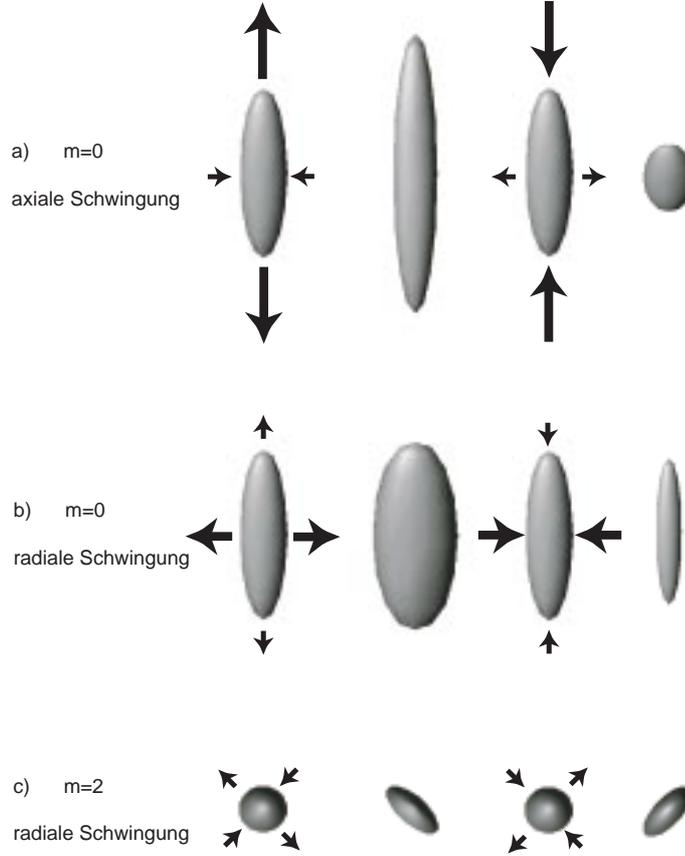


Abbildung 2.1: Kollektive Schwingungen eines Kondensats in einer stark anisotropen Falle. a) Axiale Schwingung (Quadrupolschwingung) des Kondensats bei kleiner, gegenphasiger Bewegung in radialer Richtung ($\omega = \sqrt{5/2}\omega_a$). b) Radiale Oszillation mit kleiner axialer Bewegung ($\omega = 2\omega_r$). c) Superposition einer $(0,2,2)$ - und $(0,2,-2)$ -Quadrupolschwingung ($\omega = \sqrt{2}\omega_r$), Blick auf das Kondensat entlang der axialen Richtung.

gute Quantenzahl. Im Einzelnen sind die folgenden Ergebnisse bekannt [Str96b]:

$$\begin{aligned}\omega^2(l, m = \pm l) &= l\omega_r^2 \\ \omega^2(l, m = \pm(l-1)) &= (l-1)\omega_r^2 + \omega_a^2.\end{aligned}$$

Eine Besonderheit stellen die $(0,2,0)$ -Mode und die $(1,0,0)$ -Mode dar. Für axialsymmetrische Fallen koppeln sie zu zwei neuen Moden mit den Frequenzen

$$\omega_{\pm}^2(m=0) = 2\omega_r^2 + \frac{3}{2}\omega_a^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{9\omega_a^4 - 16\omega_a^2\omega_r^2 + 16\omega_r^4}. \quad (2.19)$$

Die kleinere Frequenz erreicht im Grenzfall starker Anisotropie ($\omega_r \gg \omega_a$) den Wert

$$\omega_- = \sqrt{\frac{5}{2}}\omega_a. \quad (2.20)$$

Diese Mode oszilliert stark in axialer Richtung und mit deutlich kleinerer Amplitude gegenphasig in radialer Richtung. Im Weiteren wird sie auch als Quadrupolmode bezeichnet. Bei unserer experimentellen Anordnung zur Untersuchung der Kondensatdynamik wird hauptsächlich diese Mode durch die Schwerpunktsbewegung angeregt. Die zweite Mode besitzt die asymptotische Frequenz

$$\omega_+ = 2\omega_r.$$

Sie oszilliert vorwiegend in radialer Richtung bei einer phasengleichen, kleinen Beimischung in axialer Richtung. In Abb. 2.1 sind die Schwingungsgeometrien der beiden gekoppelten Moden und der (0,2,2)-Mode gezeigt.

2.2.2 Große Amplituden

Die im vorigen Abschnitt präsentierten Ergebnisse basieren auf der Linearisierung der Gross-Pitaevskii-Gleichung. Die Frage nach dem Einfluss der intrinsischen Nichtlinearität bei größeren Amplituden muss mit anderen Methoden untersucht werden. Eine Möglichkeit besteht darin, die zeitabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung numerisch zu lösen. Ruprecht *et al.* [Rup96] konnten auf diese Weise zeigen, dass bei zunehmender Amplitude die einzelnen Moden miteinander koppeln und Summen- und Differenzfrequenzen im Fourierspektrum zu finden sind sowie höhere Harmonische der Grundmoden. Eine zweite, analytische Methode wurde von Kagan *et al.* [Kag96, Kag97a] und Castin und Dum [Cas96] entwickelt. Sie ist anwendbar bei zeitabhängigen harmonischen Potenzialen und basiert auf einem Skalierungsansatz für die Ausdehnung des Kondensats in den drei Raumrichtungen. Im Ergebnis erhält man einen Satz von drei gekoppelten gewöhnlichen Differenzialgleichungen, die die zeitliche Entwicklung der Radien des Kondensats in Thomas-Fermi-Näherung beschreiben.

Ausgehend von der Gross-Pitaevskii-Gleichung (2.5) wird der folgende Ansatz für die Kondensatswellenfunktion gemacht:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t))^{1/2}} \psi_0 \left(\frac{x_1}{\lambda_1(t)}, \frac{x_2}{\lambda_2(t)}, \frac{x_3}{\lambda_3(t)}, t \right) e^{iS(\mathbf{x}, t)}. \quad (2.21)$$

Dabei wurden drei zeitabhängige Faktoren $\lambda_i(t)$ eingeführt, die die Funktion ψ_0 skalieren. Der Vorfaktor von ψ_0 dient der Normierung. Im Weiteren wird nun gezeigt werden, dass die Funktion $\psi_0(\mathbf{x}')$ im skalierten Koordinatensystem ($x'_i = x_i/\lambda_i$) zeitlich konstant ist, wenn die λ_i einen Satz gekoppelter Differenzialgleichungen erfüllen.

Die Phase in (2.21) lautet

$$S(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{2\hbar} \sum_i \frac{\dot{\lambda}_i(t)}{\lambda_i(t)} x_i^2 + \beta(t)$$

und ist so gewählt, dass das zugehörige Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla S(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} x_1 \dot{\lambda}_1 / \lambda_1(t) \\ x_2 \dot{\lambda}_2 / \lambda_2(t) \\ x_3 \dot{\lambda}_3 / \lambda_3(t) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

die kollektive Bewegung des Kondensats beschreibt [Cas96]. Mit $\beta(t)$ wird eine zusätzliche globale Phase eingeführt. Für das harmonische Potenzial werden beliebige zeitabhängige Oszillationsfrequenzen zugelassen:

$$U(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} m \omega_1^2(t) x_1^2 + \frac{1}{2} m \omega_2^2(t) x_2^2 + \frac{1}{2} m \omega_3^2(t) x_3^2. \quad (2.23)$$

Setzt man (2.21) und (2.23) in (2.5) ein, erhält man nach einiger Rechnung die Gleichung

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_0 &= \frac{g}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} |\psi_0|^2 \psi_0 + \hbar \psi_0 \dot{\beta} \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\lambda_i^2} \nabla'^2 \psi_0 + \sum_i \frac{m}{2} \frac{\ddot{\lambda}_i}{\lambda_i} x_i^2 \psi_0 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m \omega_i^2(t) x_i^2 \psi_0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die partiellen Ableitungen in dem Term für die kinetische Energie sind Ableitungen nach den skalierten Variablen

$$x'_i = \frac{x_i}{\lambda_i}.$$

(2.24) lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} &i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_0 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\lambda_i^2} \nabla'^2 \psi_0 \\ &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \left[g |\psi_0|^2 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{m}{2} \frac{\ddot{\lambda}_i}{\lambda_i} x_i^2 + \frac{1}{2} m \omega_i^2(t) x_i^2 \right) - \mu \right] \psi_0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

und

$$\hbar \dot{\beta} = -\frac{\mu}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}. \quad (2.26)$$

Wenn der Summenterm auf der rechten Seite von Gleichung (2.25) identisch ist mit dem Potenzial zum Zeitpunkt $t = 0$, also

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{m}{2} \frac{\ddot{\lambda}_i}{\lambda_i} x_i^2 + \frac{1}{2} m \omega_i^2(t) x_i^2 \right) := U(\mathbf{x}, 0), \quad (2.27)$$

dann entspricht der Ausdruck in den eckigen Klammern auf der rechten Seite von (2.25) der stationären Gross-Pitaevskii-Gleichung in Thomas-Fermi-Näherung zum Zeitpunkt $t = 0$ und verschwindet. In [Cas96] wird gezeigt, dass dann ψ_0 im skalierten Koordinatensystem zeitlich konstant bleibt, und Gleichung (2.25) auch für

$t > 0$ erfüllt ist. Die dazu notwendige Bedingung (2.27) kann umgeschrieben werden in einen Satz von drei gekoppelten Differenzialgleichungen für die Skalierungsparameter λ_i :

$$\ddot{\lambda}_i = \frac{\omega_{i0}^2}{\lambda_i \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} - \omega_i^2(t) \lambda_i, \quad (2.28)$$

wobei das Potenzial für $t = 0$ durch

$$U(\mathbf{x}, 0) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m \omega_{i0}^2 x_i^2 \quad (2.29)$$

gegeben ist. Für die Differenzialgleichungen (2.28) gelten die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \lambda_i(0) &= 1 \\ \dot{\lambda}_i(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

und die Wellenfunktion (2.21) besitzt nach (2.7) die Form

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &= \sqrt{\frac{\mu}{g \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}}} \left(1 - \left(\frac{x_1}{r_{10} \lambda_1} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{r_{20} \lambda_2} \right)^2 - \left(\frac{x_3}{r_{30} \lambda_3} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\times \text{Exp} \left[i \frac{m}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} x_1^2 + \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} x_2^2 + \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} x_3^2 \right) \right] \\ &\times \text{Exp} \left[-i \frac{\mu}{\hbar} \int_0^t \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} dt' \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die Thomas-Fermi-Radien r_{i0} zum Zeitpunkt $t = 0$ sind gegeben durch (siehe Anhang A.2)

$$r_{i0} = \frac{1}{\omega_{i0}} \sqrt{\frac{\mu}{m}}.$$

Die gesamte Dynamik des Kondensats ist damit auf die Zeitentwicklung der Thomas-Fermi-Radien zurückgeführt worden:

$$r_i(t) = \lambda_i(t) r_{i0}.$$

Zu betonen ist, dass keinerlei Einschränkung an das zeitliche Verhalten der $\omega_i(t)$ gemacht wurde. Insbesondere können sie komplex werden, was einer negativen Krümmung des Potenzials entspricht. Bemerkenswert ist außerdem, dass die Bewegungsgleichungen nicht von der Stärke der Wechselwirkung abhängen, was eine direkte Konsequenz der Harmonizität des Potenzials ist [Kag97b].

2.3 Anharmonische Potenziale

Sowohl bei den theoretischen Arbeiten zur Bose-Einstein-Kondensation als auch bei den bisher durchgeführten Experimenten wurden meist harmonische Potenziale untersucht. Davon abweichende Geometrien können auf kleiner Skala ($\approx 1\mu\text{m}$) durch

optische Dipolfallen und Stehwellen erzeugt werden. Für dynamische Experimente mit Kondensaten sind Anharmonizitäten auf einer Skala von wenigen Millimetern relevant. Diese können in den konventionellen experimentellen Aufbauten mit Magnetfeldern nicht erzeugt werden und es treten höchstens kleine Störungen der parabolischen Form auf [Che02]. Der Einsatz von Mikrofallen hebt nicht nur die experimentelle Beschränkung auf harmonische Potenziale auf, sondern das breite Spektrum der möglichen Potenzialformen macht das anharmonische Potenzial zum Normalfall. Dem rein harmonischen Potenzial kommt eher pathologischer Charakter zu.

2.3.1 Theoretisches Modell

In diesem Abschnitt wird eine in der Literatur bisher nicht beschriebene Methode zur theoretischen Behandlung der Dynamik von Bose-Einstein-Kondensaten in anharmonischen Potenzialen entwickelt. Sie basiert auf einem Verfahren zur Separation der Schwerpunktsbewegung und führt zu einer Gross-Pitaevskii-Gleichung im Ruhesystem des Kondensats mit einem zeitabhängigen harmonischen Potenzial. Für dieses Problem wurde in Abschnitt 2.2.2 gezeigt, dass es analytisch lösbar ist.

Ausgehend von der zeitabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung (2.5) kann untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Schwerpunktsbewegung des Kondensats von seinen inneren Anregungen entkoppelt ist. In Analogie zu der Arbeit von Japha und Band [Jap02], die die Schwerpunktsbewegung eines Bose-Einstein-Kondensats in einem zeitabhängigen harmonischen Potenzial untersuchen, wählt man zunächst den Ansatz

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_0(\mathbf{x} - \mathbf{R}(t), t) e^{iS(\mathbf{x}, t)} e^{i\beta(t)}. \quad (2.32)$$

Der Ansatz beschreibt eine um den Vektor $\mathbf{R}(t)$ verschobene Wellenfunktion. Die zusätzlich auftretende Phase $S(\mathbf{x}, t)$ wird wiederum so gewählt, dass ihr Gradient die Bewegung des verschobenen Wellenpakets beschreibt:

$$\frac{\hbar}{m} \nabla S(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{R}} \quad (2.33)$$

$$S(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{\hbar} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{x}. \quad (2.34)$$

Außerdem wird eine globale Phase $\beta(t)$ eingeführt. Setzt man (2.32) und (2.34) in (2.5) ein, erhält man

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_0 = +\hbar \dot{\beta} \psi_0 + m \ddot{\mathbf{R}} \mathbf{x} \psi_0 + \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}^2 \psi_0 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_0 + U(\mathbf{x}) \psi_0 + g |\psi_0|^2 \psi_0. \quad (2.35)$$

Eine Taylor-Entwicklung des Potenzials $U(\mathbf{x})$ um den Punkt \mathbf{R} liefert

$$U(\mathbf{x}') = U(\mathbf{R}) + (\mathbf{x}') \nabla U(\mathbf{R}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x}' \nabla)^2 U(\mathbf{R}) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{x}' \nabla)^n}{n!} U(\mathbf{R}) \quad (2.36)$$

mit den transformierten Koordinaten

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{R}$$

und der Abkürzung

$$(\mathbf{x}'\nabla)^n = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} x'_{i_1} x'_{i_2} \dots x'_{i_n} \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_n}.$$

Einsetzen von (2.36) in (2.35) liefert

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_0(\mathbf{x}', t) = \left[\hbar \dot{\beta} + U(\mathbf{R}) + m\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R} + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{R}}^2 \right. \quad (2.37)$$

$$\left. + m\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{x}' + (\mathbf{x}'\nabla)U(\mathbf{R}) \right. \quad (2.38)$$

$$\left. - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\mathbf{x}'\nabla)^n}{n!} U(\mathbf{R}) + g|\psi_0|^2 \right] \psi_0(\mathbf{x}', t). \quad (2.39)$$

Gleichung (2.37) kann sofort im transformierten Koordinatensystem \mathbf{x}' geschrieben werden, da die partiellen Ableitungen in beiden Koordinatensystemen gleich sind ($\partial/\partial x_i = \partial/\partial x'_i$). Die ersten vier Terme auf der rechten Seite von (2.37) verschwinden, wenn die globale Phase $\beta(t)$ die Bestimmungsgleichung

$$\beta(t) = \frac{m}{\hbar} \int_0^t dt' \left[-\ddot{\mathbf{R}}(t')\mathbf{R}(t') - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{R}}(t')^2 - \frac{1}{m}U(\mathbf{R}(t')) \right] \quad (2.40)$$

erfüllt. Die beiden nächsten Terme in (2.38) verschwinden, wenn der Verschiebungsvektor $\mathbf{R}(t)$ der klassischen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -\nabla U(\mathbf{R}) \quad (2.41)$$

gehört. Sind die beiden Gleichungen (2.40) und (2.41) erfüllt, so bilden die restlichen Terme von (2.39) die Gross-Pitaevskii-Gleichung im verschobenen Koordinatensystem:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_0(\mathbf{x}', t) = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_0(\mathbf{x}', t) + g|\psi_0(\mathbf{x}', t)|^2 \psi_0(\mathbf{x}', t) \\ + \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\mathbf{x}'\nabla)^n}{n!} U(\mathbf{R}) \right] \psi_0(\mathbf{x}', t). \quad (2.42)$$

Wenn die Gleichungen (2.40) bis (2.42) erfüllt sind, ist (2.32) eine Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung (2.5).

Über den Potenzialterm in (2.42) koppelt die Schwerpunktsbewegung an die innere Dynamik des Kondensats. Die beiden Differenzialgleichungen (2.41) und (2.42)

sind genau dann entkoppelt, wenn dieser Potenzialterm nicht von R abhängt. Dies gilt für drei Fälle:

$$\begin{array}{ll} U(\mathbf{x}) = 0 & \text{Freie Bewegung} \\ U(\mathbf{x}) = ax + by + cz & \text{Homogenes Kraftfeld} \\ U(\mathbf{x}) = ax^2 + by^2 + cz^2 & \text{Harmonisches Potenzial} \end{array} \quad (2.43)$$

Während das Ergebnis für die freie Bewegung trivial ist, zeigt (2.43), dass beispielsweise die Beschleunigung im Gravitationsfeld während einer Flugzeitmessung keinen Einfluss auf die Entwicklung der Kondensatswellenfunktion hat. Für den Fall eines harmonischen Potenzials sind die inneren Freiheitsgrade des Kondensats ebenfalls vollständig von der äußeren Bewegung entkoppelt, da der Potenzialterm konstant ist. Die Schwerpunktskoordinate

$$X_{\text{SP}} = \int \psi_0(\mathbf{x} - R) \mathbf{x} \psi_0^*(\mathbf{x} - R) d^3 \mathbf{x} = R + \int \psi_0(\mathbf{x}') \mathbf{x}' \psi_0^*(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' \quad (2.44)$$

ist identisch mit dem Verschiebungsvektor R , wenn ψ_0 symmetrisch oder antisymmetrisch um $\mathbf{x}' = 0$ ist und somit der zweite Term auf der rechten Seite von (2.44) verschwindet. Dann gilt für den Schwerpunkt ebenfalls die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{X}_{\text{SP}} = -\nabla U. \quad (2.45)$$

Generell ist bei jedem Vielteilchensystem, das sich in einem harmonischen Potenzial befindet, die Schwerpunktsbewegung von den inneren Freiheitsgraden entkoppelt. Dieses Prinzip ist als „Kohn theorem“ oder „harmonic potential theorem“ bekannt [Koh61, Dob94].

Der Summenterm in (2.42) beinhaltet die Einflüsse eines anharmonischen Potenzials auf die interne Bewegung. Nimmt man an, dass sich die Krümmung des Potenzials über die Ausdehnung des Kondensats (r_0) nur wenig ändert, also

$$U'''(R)r_0 \ll U''(R), \quad (2.46)$$

dann können die Summenterme mit $n > 2$ in (2.42) vernachlässigt werden und (2.42) vereinfacht sich zu

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_0 = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + g|\psi_0|^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} x_i'^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} U(R) \right] \psi_0. \quad (2.47)$$

Dabei wurde vorausgesetzt, dass das Potenzial in den einzelnen Koordinaten separiert und keine Mischterme auftreten. Der Potenzialterm in (2.47) entspricht einem zeitabhängigen harmonischen Potenzial im transformierten Koordinatensystem:

$$\frac{1}{2} x_i'^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} U(R) = \frac{1}{2} m \omega_i^2(t) x_i'^2 \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.48)$$

Damit ist das Potenzial identisch mit dem Modellpotenzial (2.23) aus Abschnitt 2.2.2 und die dort vorgestellte analytische Lösung für die Kondensatsdynamik ist auch hier gültig. Im Ergebnis wird das in einem anharmonischen Potenzial schwingende Kondensat durch die gekoppelten Differenzialgleichungen

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -\nabla U(\mathbf{R}) \quad (2.49)$$

$$\ddot{\lambda}_i = \frac{\omega_{i0}^2}{\lambda_i \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} - \frac{1}{m} \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i} U(\mathbf{R}) \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.50)$$

beschrieben. Die Gleichungen (2.49) und (2.50) stellen das zentrale Resultat dieses Abschnittes dar. Die Lösung für die Kondensatswellenfunktion erhält man, indem in (2.31) \mathbf{x} durch $\mathbf{x} - \mathbf{R}$ ersetzt wird und in (2.32) eingesetzt wird:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) = & \sqrt{\frac{\mu}{g}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}} \left(1 - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{x_i - R_i}{r_{i0} \lambda_i} \right)^2 \right)^{1/2} \\ & \times \exp \left[i \frac{m}{\hbar} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{\lambda}_i x_i^2}{\lambda_i} - \frac{\dot{\lambda}_i R_i x_i}{\lambda_i} + \dot{R}_i x_i \right) \right] \\ & \times \exp \left[i \beta(t) - i \frac{\mu}{\hbar} \int_0^t \frac{dt'}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} + \frac{m}{2\hbar} \frac{R_i^2 \dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \right]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Die Interpretation der gekoppelten Gleichungssysteme (2.49) und (2.50) ist einfach: Bei der Bewegung durch ein anharmonisches Potenzial spürt das Kondensat in seinem Ruhesystem ein zeitabhängiges harmonisches Potenzial, das als äußerer Antrieb Formschwingungen des Kondensats angeregt. Im nächsten Abschnitt wird das Modell für einen anharmonischen Wellenleiter ausgewertet.

2.3.2 Anharmonische Wellenleiter

Die experimentelle Situation, die in Kapitel 6 untersucht wird, ist in Abb. 2.2 gezeigt: Ein Kondensat vollführt eine Schwingung in einem Wellenleiter. In der Schwingungsrichtung ist das Potenzial stark anharmonisch, während senkrecht dazu das Potenzial einen engen Kanal bildet. Die Amplitude der Schwerpunktsbewegung ist dabei sehr viel größer als die Ausdehnung des Kondensats, was eine klare Unterscheidung zwischen externer und interner Dynamik ermöglicht.

Für das Wellenleiterpotenzial wird die folgende Form angenommen:

$$U(\rho, z) = \frac{1}{2} m \omega_\rho^2 \rho^2 + a z^2 + b z^3 + c z^4. \quad (2.52)$$

Die radiale Oszillationsfrequenz wird mit ω_ρ bezeichnet. Das Potenzial soll außerdem stark anisotrop sein ($\frac{1}{2} m \omega_\rho^2 \gg a$). Anfänglich sei das Kondensat in z -Richtung ausgelenkt ($R_z(0) = R_0$), so dass nach (2.41) nur eine Schwerpunktsbewegung in axialer

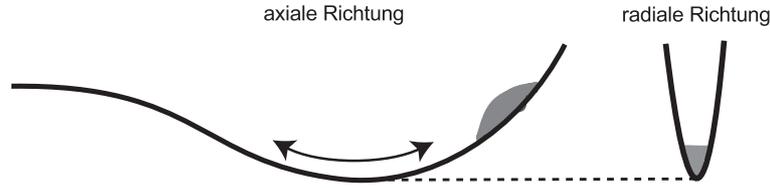


Abbildung 2.2: Anharmonischer Wellenleiter: Potenzial in axialer Richtung (anharmonisch) und in radialer Richtung (harmonisch) bei starker Anisotropie, d. h. die radiale Krümmung des Potenzials ist sehr viel größer als die axiale. Das Kondensat wird anfänglich so ausgelenkt, dass nur eine axiale Schwerpunktsbewegung stattfindet.

Richtung möglich ist. Die Lösung der resultierenden Schwingung des Schwerpunkts kann als Fourierreihe dargestellt werden:

$$R_z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega_0 t) \quad (2.53)$$

$$R_\rho(t) = 0. \quad (2.54)$$

Die Grundfrequenz der Schwingung wird mit ω_0 bezeichnet. Setzt man diese Lösung in (2.48) ein, erhält man für die zeitabhängige Oszillationsfrequenz in axialer Richtung im Ruhesystem des Kondensats

$$\begin{aligned} \omega_z(t)^2 &= \frac{1}{m} (2a + 6bR_z(t) + 12cR_z^2(t)) \\ &= \frac{1}{m} \left(2a + 6b \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega_0 t) + 12c \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega_0 t) \right)^2 \right) \\ \omega_z(t) &\simeq \sqrt{\frac{2a}{m}} \left(1 + \frac{3c\alpha_1}{2a} + \frac{3b\alpha_1}{2a} \cos(\omega_0 t) + \frac{3c\alpha_1^2}{2a} \cos(2\omega_0 t) \right). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Für den letzten Schritt wurde vorausgesetzt, dass α_1 die bestimmende Fourierkomponente der Schwerpunktsbewegung ist, und dass der quadratische Term in (2.52) ebenfalls dominiert ($a \gg b, c$). Aus (2.55) folgt, dass das Kondensat in axialer Richtung zu Formschwingungen bei der Grundfrequenz angetrieben wird mit einer Stärke, die proportional zu α_1 ist. Durch den Potenzialterm vierter Ordnung entsteht ein zusätzlicher harmonischer Antrieb bei der doppelten Grundfrequenz, der quadratisch mit α_1 anwächst. Wie die numerische Auswertung von (2.50) in Kapitel 6 zeigt wird außerdem die ($m = 0$)-Quadrupolmode nichtresonant angeregt. Für kleine Amplituden α_1 wird $\omega_z(t)$ konstant und identisch mit der Grundfrequenz der Schwerpunktsbewegung $\omega_0 = \sqrt{2a/m}$.

Die Näherungen, die bei der Herleitung des Modells gemacht wurden, werden in Anhang A.3 noch einmal genauer untersucht und deren Konsequenzen diskutiert. Für die durchgeführten Experimente sind sie alle erfüllt. Darüber hinaus wird

auch die Schwerpunktsbewegung von der internen Dynamik beeinflusst, wie in Anhang A.5 mit Hilfe eines Variationsansatzes gezeigt wird. Dieses Prinzip der wechselseitigen Kopplung kann sehr gut mit einem Modell aus der klassischen Mechanik beschrieben werden (Anhang A.4).

Kapitel 3

Magnetfallen und Mikrofallen

Um Atome, Ionen oder Moleküle auf Temperaturen im Milli- und Mikrokkelvinbereich abkühlen zu können und bei diesen Temperaturen zu „konservieren“, müssen die Teilchen entweder vollständig von den Gefäßwänden isoliert sein, oder die Umgebung der Teilchen muss mit abgekühlt werden. Letzteres geschieht in Mischkryostaten [Doy91, Doy95] und ist bis zu einer Temperatur von etwa 100 mK möglich. Bei tieferen Temperaturen müssen die Teilchen thermisch isoliert werden. Zu diesem Zweck können die Teilchen an ihrer Ladung (Ionen), ihrem permanenten elektrischen Dipolmoment (Moleküle), ihrem induzierten elektrischen Dipolmoment oder ihrem magnetischen Moment „angefasst“ und gefangen werden. Bei Atomen kommen magnetische und optische Potenziale zum Einsatz. Die Möglichkeit, in Magnetfallen auf einfache Weise evaporativ kühlen zu können, macht sie zu einer Standardtechnik bei der Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten. In diesem Kapitel wird eine Einführung in das Prinzip und die Funktionsweise von Magnetfallen gegeben. Eine besondere Betonung liegt auf den Mikrofallen als miniaturisierte Ausführungsformen. Am Beispiel des elementarsten atomoptischen Elements, dem Wellenleiter, werden grundlegende Aspekte wie Fallensteilheit, Wärmebilanz, Anharmonizität und die Schwingung als generische Bewegungsform erläutert. Es schließt sich eine Zusammenfassung bisheriger Experimente auf dem Forschungsgebiet der Mikrofallen an. Die statistische Beschreibung der Atome in einer Magnetfalle und eine Einführung in die Technik des evaporativen Kühlens schließen das Kapitel ab.

3.1 Magnetisches Speichern

Ein Atom mit einem magnetischen Moment $\boldsymbol{\mu}$ besitzt in einem Magnetfeld¹ die potenzielle Energie $U(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu}\mathbf{B}$. Die resultierende Kraft, die auf das Atom wirkt ist

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = \nabla(\boldsymbol{\mu}\mathbf{B}). \quad (3.1)$$

¹Dem allgemeinen Sprachgebrauch folgend wird in dieser Arbeit die magnetische Induktion \mathbf{B} als Magnetfeld bezeichnet. Zum Magnetfeld \mathbf{H} gilt im Vakuum die Beziehung $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$.

Ist die Larmorfrequenz des Atoms $\omega_L = \mathbf{\mu}B/\hbar$ sehr viel größer als die relative zeitliche Änderung des Magnetfelds während der Bewegung in dem Potenzial $U(\mathbf{r})$, kann der Spin dem Magnetfeldverlauf adiabatisch folgen, und es gilt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mu \nabla B(\mathbf{r}) \quad (3.2)$$

mit

$$\mu = g_F m_F \mu_B. \quad (3.3)$$

Das Atom befindet sich in dem Hyperfeinstrukturzustand F mit der magnetischen Quantenzahl m_F und dem g -Faktor g_F . Dabei ist $g_F m_F \mu_B$ die Projektion des magnetischen Moments auf die lokale Richtung des Magnetfeldes und bleibt bei der Bewegung durch das Potenzial konstant. Ist (3.3) positiv, spürt das Atom eine Kraft in Richtung schwächer werdender Magnetfelder — es befindet sich in einem so genannten „low field seeking“ Zustand. Im umgekehrten Fall wird das Atom in Bereiche größer werdender Feldstärke hineingezogen und als „high field seeker“ bezeichnet. Aus den Maxwellgleichungen folgt aus der Quellenfreiheit und Rotationsfreiheit des Magnetfelds, dass es keine lokalen Maxima des Magnetfeldbetrags geben kann [Win83] und „high field seeker“ deshalb nicht magnetisch dauerhaft gespeichert werden können. Jede Magnetfeldanordnung, die ein lokales Minimum des Feldbetrags aufweist, kann als Fallenpotenzial verwendet werden. Aufgabe des nächsten Abschnittes wird es sein, die möglichen, grundlegenden Fallenformen zu beschreiben.

3.2 Fallengeometrien

Das Magnetfeld $B(\mathbf{r})$ habe im Punkt \mathbf{r}_0 ein lokales Minimum. Die Taylorentwicklung des Magnetfelds um diesen Punkt bis zur zweiten Ordnung lautet dann

$$B(\mathbf{r}) = B(\mathbf{r}_0) + ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \nabla) B(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \nabla)^2 B(\mathbf{r}_0) + \dots \quad (3.4)$$

Da das Magnetfeld zusätzlich die Maxwellgleichungen für die Magnetostatik

$$\nabla B(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.5)$$

$$\nabla \times B(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.6)$$

erfüllen muss, sind die möglichen Feldkonfigurationen eingeschränkt.

Quadrupolfalle

Unter Verwendung der linearen Terme in (3.4) kann eine Klasse von Fallengeometrien erzeugt werden, die als Quadrupolfallen bekannt sind. Das Feld eines magnetischen Quadrupols hat nach geeigneter Wahl der Koordinatenachsen die Form

$$B(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} b_x x \\ b_y y \\ b_z z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad b_x + b_y + b_z = 0.$$

Mit b_i sind die Gradienten $\partial_i B_i(\mathbf{r}_0)$ entlang der drei Koordinatenachsen abgekürzt, deren Summe nach (3.5) verschwindet. Zwei Spezialfälle sind von besonderem Interesse. Für

$$b_x = b_y = -\frac{1}{2}b_z$$

entsteht ein um die z -Achse rotationssymmetrisches Quadrupolfeld. Dieses kann durch zwei in z -Richtung gegenüberliegende Spulen, deren Magnetfelder entgegengesetzt gerichtet sind, erzeugt werden. Zieht man die Spulen mehr und mehr in x -Richtung in die Länge, verformt sich der Feldverlauf und wird zigarrenförmig. Im Grenzfall entsteht ein lineares Quadrupolfeld mit einer Feldnulllinie entlang der x -Achse und gleichen Gradienten senkrecht zur Nulllinie:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ by \\ -bz \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Quadrupolkonfigurationen haben immer ein verschwindendes Magnetfeld in ihrem Zentrum und die Adiabazitätsbedingung kann dort nicht erfüllt werden, da die Larmorfrequenz verschwindet. Dies kann durch parabolische Fallengeometrien verhindert werden, die als „Ioffe-Pritchard“-Fallen bekannt sind und im folgenden Abschnitt vorgestellt werden.

Ioffe-Pritchard-Falle

Eine so genannte „Ioffe-Pritchard“-Falle oder kurz „Ioffe-Falle“ besteht aus einer Überlagerung der drei niedrigsten magnetischen Multipolfelder [Pri83, Ber87, Ket99]: einem Dipolfeld (=homogenes Feld), einem linearen Quadrupolfeld und einem Hexapolfeld

$$\mathbf{B}_{\text{IP}}(\mathbf{r}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}}_{\text{Dipol}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Quadrupol}} + \frac{\beta}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} -xz \\ -yz \\ z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{pmatrix}}_{\text{Hexapol}}. \quad (3.8)$$

Mit b wird der Gradient des Quadrupols und mit β die Krümmung des Hexapolfeldes bezeichnet. Das homogene Feld B_0 ist wie die Nulllinie des Quadrupols entlang der z -Achse gerichtet. Um die Potenzialform zu erhalten wird der Feldbetrag von (3.8) in einer Taylorreihe bis zum ersten nicht konstanten Term entwickelt:

$$B_{\text{IP}}(x, y, z) = B_0 + \frac{1}{2}\beta z^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{B_0} - \beta \right) x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{B_0} - \beta \right) y^2. \quad (3.9)$$

In alle drei Koordinatenrichtungen steigt der Feldbetrag quadratisch an. Atome, die in diesem Magnetfeld gefangen sind, führen harmonische Schwingungen aus, deren

Frequenzen durch

$$\omega_x = \sqrt{\frac{\mu}{m}} \sqrt{\frac{b^2}{B_0} - \beta} \stackrel{\omega_z \ll \omega_x}{=} \sqrt{\frac{\mu b^2}{m B_0}} = \omega_r \quad (3.10)$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{\mu}{m}} \sqrt{\frac{b^2}{B_0} - \beta} \stackrel{\omega_z \ll \omega_y}{=} \sqrt{\frac{\mu b^2}{m B_0}} = \omega_r \quad (3.11)$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{\mu \beta}{m}} = \omega_a \quad (3.12)$$

gegeben sind. Die Oszillations- oder Fallenfrequenz in radialer Richtung ist ω_r und in axialer Richtung ω_a . Für alle in dieser Arbeit beschriebenen Ioffe-Fallen gilt $\omega_r \gg \omega_a$, so dass die Fallengeometrie stets rotations-symmetrisch ist. Für eine solche Falle kann man das so genannte Aspektverhältnis α , das Verhältnis aus radialer und axialer Oszillationsfrequenz, definieren:

$$\alpha = \frac{\omega_r}{\omega_a}. \quad (3.13)$$

Es ist ein Maß für die Anisotropie der Falle. Bei bisherigen Experimenten zur Bose-Einstein-Kondensation kommt die Ioffe-Pritchard-Falle in drei Ausführungsformen zum Einsatz: als reine „Ioffe-Pritchard trap“ [Ern98] als „cloverleaf trap“ [Mew96a], und als „QUIC trap“ [Ess98]. Die letztgenannte benötigt nur drei Spulen für die Felderzeugung und ist eng mit dem in dieser Arbeit verfolgten Prinzip zur Erzeugung einer Ioffe-Falle verwandt (siehe Abschnitt 5.2.2). Die Entwicklung der Feldkomponenten bis zur zweiten Ordnung ist eine Näherung, die bei diesen drei Konfigurationen aufgrund der Größe der beteiligten Spulen ausreichend ist.

Einfluss der Gravitation

Die Gravitationskraft führt bei Quadrupolfallen zu einer Verkippung des vertikalen Feldgradienten:

$$\tilde{b}_z = b_z \pm mg/\mu.$$

Das Plus-/Minuszeichen gehört zum Potenzialverlauf ober-/unterhalb des Fallenzentrums. Das Zentrum selbst wird nicht verschoben. Bei Ioffe-Fallen verursacht die Gravitation einen vertikalen Versatz („gravitational sagging“) des Fallenzentrums nach unten um

$$\Delta x = g\omega^{-2},$$

während die Fallenfrequenz ω in dieser Richtung unverändert bleibt.

3.2.1 Verlustprozesse

Ist der Betrag des Magnetfelds im Zentrum des Potentials zu klein, kann der Spin nicht mehr adiabatisch der Bewegung des Atoms folgen. Es kann zu magnetischen

Übergängen in nicht speicherbare Zustände kommen und das Atom geht verloren. Solche Übergänge werden Majorana-Prozesse genannt. Für sie können genaue Übergangsraten ausgerechnet werden, und man kann zeigen, dass die Verlustprozesse mit zunehmendem Magnetfeldbetrag exponentiell unterdrückt sind [Suk97]. Sind die gefangenen Atome nicht vollständig spinpolarisiert, kommt es außerdem zu „spin exchange collisions“ [Moe96]. Diese finden zu Beginn des magnetischen Speicherns statt und benötigen im Falle von ^{87}Rb für den Prozess zwei Atome im $(F = 2, m_F = 1)$ -Zustand. Nach dem Stoßprozess, der unter Beibehaltung des Drehimpulses stattfindet, befinden sich die Atome in den Zuständen $(F = 2, m_F = 2)$ und $(F = 2, m_F = 0)$, wobei der $(m_F = 0)$ -Zustand nicht magnetisch speicherbar ist und das Atom die Falle verlassen kann.

Ein zweiter Verlustkanal entsteht durch inelastische Stöße mit Restgasatomen. Sie führen zu einer exponentiellen Abnahme der Atomzahl und definieren die Lebensdauer der gefangenen Atomwolke bei niedrigen Dichten. Bei unserem Experiment beträgt die Lebensdauer der Atome in der Magnetfalle zwischen 50 s und 100 s.

Bei hohen Dichten ($n > 10^{14} \text{ cm}^{-3}$) setzt ein zusätzlicher Verlustprozess ein, bei dem Zweikörperstöße stattfinden [SK98a]. Da der energetisch tiefste Zustand des Atoms stets ein „high field seeking“ Zustand ist, kann bei einem Stoß zweier Atome prinzipiell immer Energie freiwerden. Die Spinpolarisierung der Atome unterdrückt diesen Prozess, da bei den tiefen Temperaturen ($T < 100 \text{ pK}$) fast ausschließlich s -Wellen-Streuung stattfindet. Bei der s -Wellen-Streuung können die Atome ihren gemeinsamen Drehimpuls nicht ändern und werden elastisch gestreut. Nur bei der stark unterdrückten p -Wellen-Streuung kann sich der Drehimpuls der Atome ändern und ein inelastischer Zweikörper-Stoßprozess stattfinden. Ein weiterer inelastischer Stoßprozess sind Drei-Körper-Stöße, die bei vergleichbaren Dichten stattfinden. Sie skalieren quadratisch mit der Dichte und begrenzen auf diese Weise die maximal erreichbare Dichte in Bose-Einstein-Kondensaten auf etwa 10^{15} cm^{-3} [Bur97]. Bei diesen Stößen sind drei Atome beteiligt, von denen zwei Atome einen gebundenen Molekülzustand bilden und das dritte Atom den Impuls und die freiwerdende Energie der chemischen Reaktion aufnimmt. Im Ergebnis sind alle drei Atome verloren.

Neben den weiter oben erwähnten Majorana-Verlusten kann es durch elektromagnetische Feldfluktuationen ebenfalls zu Spinflip-Prozessen und damit Verlusten kommen. Diese finden verstärkt in der Nähe von metallischen Oberflächen statt [Hen99] und wurden mit dem in dieser Arbeit geschilderten experimentellen Aufbau erstmals systematisch untersucht [For02b, For03].

3.3 Mikrofallen

Mikrofallen unterscheiden sich vom Funktionsprinzip her in keiner Weise von „makroskopischen“ Magnetfallen. Auch für sie gilt Gleichung (3.1). Statt einer Anordnung aus mehreren Spulen werden einzelne Leiter verwendet, mit denen die Fallenpotenziale erzeugt werden. Die Leiteranordnungen sind meist zweidimensional gewählt

und können in einer Mikrostruktur integriert werden. Bereits 1995 haben Weinstein und Liebbrecht [Wei95] mögliche zweidimensionale Strukturen zur Erzeugung verschiedener Fallengeometrien vorgestellt. Einige der Vorschläge konnten bis jetzt realisiert werden, zahlreiche neue Ideen kamen und kommen hinzu. Vor allem der Möglichkeit der Manipulation einzelner oder mehrerer Atome sowie dem Aufbau interferometrischer Anordnungen in so genannten „atom chips“ wird große Wichtigkeit beigemessen. Einen ausführlichen Überblick über dieses Gebiet geben Folman *et al.* [Fol02].

3.3.1 Wellenleiter

Die einfachste Realisierung einer Mikrofalle ist mit einem geraden Leiter und einem senkrechten homogenen Magnetfeld möglich (Abb. 3.1). Oberhalb des Leiters kompensieren sich das Feld des Leiters und das homogene Magnetfeld (im Weiteren „Kompressionsfeld“ genannt) und es entsteht eine Nulllinie des Magnetfeldbetrags entlang des Leiters. Die zugehörige Feldkonfiguration ist die eines linearen Quadrupols. Das Kompressionsfeld kann durch zusätzliche Leiter oder Spulen erzeugt werden, die eine makroskopische Ausdehnung haben dürfen, da der Potenzialgradient durch das Feld des Leiters erzeugt wird. Durch Anlegen eines weiteren Magnetfelds, einem so genannten „Offsetfeld“, das entlang des Leiters gerichtet ist, wird der Magnetfeldbetrag im Zentrum angehoben und es entsteht eine Ioffe-Falle. Das Offsetfeld ist in realistischen Anordnungen immer gekrümmt, so dass ein axialer Einschluss der Atome vorliegt. Aus diesem Grund führen gefangene Atomwolken in einem Wellenleiterpotenzial Schwingungen aus. Auch bei komplexeren Magnetfeldanordnungen bleibt diese Aussage gültig und deshalb ist die Schwingung als die generische äußere Bewegungsform einer Atomwolke oder eines Kondensats in einer Mikrofalle anzusehen.

Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen, in z -Richtung zeigenden Leiters lautet

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I\mu_0}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für den Ort, an dem sich das Feld des Leiters und das Kompressionsfeld B_k aufheben, gilt:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) + B_k = 0.$$

Das Kompressionsfeld zeigt entlang der x -Richtung und für die Lage des Fallenzentrums folgt

$$\begin{aligned} d_x &= 0 \\ d_y &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{B_k}. \end{aligned}$$

Der Gradient des Magnetfelds am Ort des Fallenzentrums beträgt $b = I\mu_0/(2\pi d^2)$. Bei Überlagerung des Offsetfelds B_0 in z -Richtung, ergibt sich nach (3.10) eine

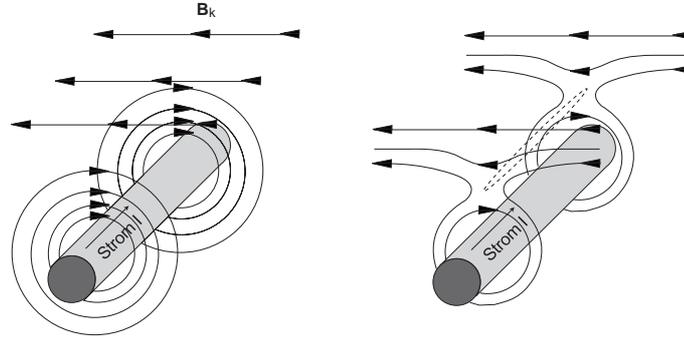


Abbildung 3.1: Stromdurchflossener Leiter im homogenen Magnetfeld. Das zirkuläre Feld des Leiters und das Kompressionsfeld B_k kompensieren sich oberhalb des Leiters und bilden ein lineares Quadrupolfeld (rechtes Bild, gestrichelte Linie).

radiale Oszillationsfrequenz von

$$\omega_r = 2\pi \times \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\frac{\mu_B g_F m_F}{m B_0}} \times \frac{B_k^2}{I}.$$

Der axiale Einschluss der Atomwolke ist durch die Krümmung des Offsetfelds gegeben, die über (3.12) die Oszillationsfrequenz in axialer Richtung festlegt. Das Offsetfeld kann durch den Leiter selbst erzeugt werden, indem dieser an beiden Enden abgeknickt wird. Der Verlauf des Leiters ist dann Z-förmig, was diesem Prinzip den Namen gibt [Fol02]. Das Offsetfeld kann ebenso durch zusätzliche Leiter auf der Mikrostruktur erzeugt werden [Rei99] oder durch Überlagerung einer unabhängigen Ioffe-Falle [For98a].

3.3.2 Eigenschaften

In der Miniaturisierung der felderzeugenden Elemente liegen zahlreiche Vorteile verborgen. Einer der wichtigsten ist die Möglichkeit, wesentlich stärker einschließende Kräfte zu erzeugen als mit herkömmlichen Fallen. Der Grund dafür liegt in einem günstigeren Verhältnis zwischen Wärmeproduktion und Wärmeableitung bei miniaturisierten Leitern. Dies soll kurz erläutert werden. Als Faustregel gilt zunächst, dass das Magnetfeld eines Leiters auf der Skala der Leitergröße (Radius r_0) abfällt:

$$B(r_0) \propto I/r_0.$$

Für den Gradienten in radialer Richtung ergibt sich

$$|\nabla B(r_0)| \propto I/r_0^2 \propto j,$$

wobei j die Stromdichte im Leiter ist. Als Modell für die Wärmeleitung kann ein von einem Kühlmittel (Temperatur T_0) umgebener runder Leiter mit Radius r_0 dienen.

Der radiale Temperaturverlauf im Leiter ist gegeben durch

$$T(r) = \frac{1}{4} \frac{\rho}{\lambda} j^2 (r_0^2 - r^2) + T_0.$$

Dabei bezeichnet ρ den spezifischen Widerstand des Leitermaterials und λ dessen Wärmeleitfähigkeit. Legt man eine maximale zulässige Temperaturdifferenz zwischen Leiterraufseite und Zentrum fest und löst nach j auf, so folgt

$$j = 2\sqrt{\lambda/\rho\Delta T} \frac{1}{r_0}.$$

Die Stromdichte (und damit der Magnetfeldgradient), die zu der Temperaturdifferenz ΔT führt, skaliert damit umgekehrt proportional zur Dimension des Leiters. Die Gradienten extrem dünner Leiterbahnen ($r_0 = 1 \mu\text{m}$) können bis zu $50 \frac{\text{Tesla}}{\text{cm}}$ betragen [For02c] während mit Standardmagnetfallen maximal $0,1 \frac{\text{Tesla}}{\text{cm}}$ erreichbar sind.

Ein weiterer Vorteil ist die leichte Strukturierbarkeit der Substrate und Leiterbahnen. Für die Herstellung der Leiterstrukturen stehen alle Methoden der Mikrostrukturierung zur Verfügung. Im Besonderen wird dabei die Dünnschicht-Hybrid-Technik eingesetzt. Bei Mikrofallen können die magnetfelderzeugenden Leiter auf der Skala der Wolkengröße geformt werden und komplex strukturierte Magnetfeldkonfigurationen sind möglich. Dabei müssen bei der Entwicklung des Magnetfelds (3.4) höhere Terme berücksichtigt werden. Auf diese Weise können räumlich gekrümmte oder asymmetrische Fallengeometrien erzeugt werden wie auch ein- oder zweidimensionale periodische Anordnungen von Potenzialtöpfen. Allen diesen Konfigurationen ist eine intrinsische Anharmonizität zu eigen. Außerdem gibt es Anstrengungen, optische Elemente wie miniaturisierte Resonatoren, optische Fasern oder so genannte „micro spheres“ auf Substraten zu integrieren [Lev02].

Diesen vielseitigen Möglichkeiten stehen auch Einschränkungen und Schwierigkeiten gegenüber, die an dieser Stelle kurz erwähnt sein sollen. Zuerst werden eine ganze Reihe neuer experimenteller Techniken benötigt, um Mikrofallen in Apparaturen mit ultrakalten Atomen zu integrieren. Die Elemente müssen im Vakuum direkt in der Nähe der gespeicherten Atome angebracht werden. Die Folgen sind eingeschränkter optischer Zugang, Einflüsse durch die Oberfläche, eine mögliche Beeinträchtigung des Vakuums, zahlreiche elektrische Durchführungen, eine eventuelle Verunreinigung der Substrate sowie Beugung an der Substratoberfläche. Im nächsten Abschnitt werden einige der bisher eingeschlagenen Wege beschrieben. Daneben gilt es, die Atome auf möglichst effiziente Weise in die Mikrofalle zu laden. Hierzu existieren bisher drei Konzepte, die Gegenstand des übernächsten Abschnitts sind.

3.3.3 Ausführungsformen

Die erste Mikrofalle, bestehend aus einer Permanentmagnetspitze, die auf einem Polschuh montiert war, und einem Spulenpaar, in dessen einer Spule der Polschuh eingelassen war, konnte 1998 von Vuletić *et al.* [Vul98] mit Lithiumatomen demonstriert

werden. Durch den extrem hohen Magnetfeldgradienten von 30 Tesla/cm wurden die Atome stark komprimiert und aufgeheizt. Kurz darauf konnten Fortágh *et al.* [For98a] eine Magnetfalle bestehend aus einem Kupferdraht mit 90 μm Durchmesser, der auf einem zweiten Kupferdraht mit 1,4 mm Durchmesser aufgeklebt war, mit Rubidiumatomen laden. Bei dem Experiment konnte erstmals das oben geschilderte Prinzip zur Erzeugung eines Wellenleiters demonstriert werden. Teile dieses Experiments wurden für unseren Aufbau verwendet; insbesondere das Prinzip zur Erzeugung einer Ioffe-Falle wurde direkt übernommen. Kurz darauf konnten Reichel *et al.* [Rei99] und Folman *et al.* [Fol00] erstmals lithographisch erzeugte Mikrostrukturen mit Atomen laden. Sie verwendeten dazu eine neue Form der magnetooptischen Falle, die so genannte „Spiegel-MOT“, bei der zwei Laserstrahlen an der Oberfläche des Substrates reflektiert werden. Neben Experimenten mit gefangenen Atomen wurden von Beginn an auch Experimente zu atomoptischen Fragestellungen durchgeführt. Das Hauptaugenmerk lag dabei auf der Realisierung von Wellenleitern und Kanälen für die Atome, analog zu Glasfasern für Licht [Den99b, Mül99, Dek00, Key00]. Cassettari *et al.* [Cas00] demonstrierten einen Strahlteiler für thermische Atome. Permanentmagnetische Materialien wie Videobänder [Ber01] konnten ebenso wie parallele Leiterbahnstrukturen [Joh98, Lau99] erfolgreich als Spiegel für kalte Atome eingesetzt werden. Miniaturisierte optische Komponenten wie Resonatoren werden bereits in Experimenten zur Quantenelektrodynamik mit einzelnen Atomen eingesetzt [Mün99].

3.3.4 Lademechanismen

Bei den drei Experimenten, in denen bisher die Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats in einer Mikrofalle gelungen ist [Ott01, Hän01, Gus02] wurden drei verschiedene Methoden entwickelt, die Atome in die Mikrofalle zu transferieren. Der bei unserem Experiment eingeschlagene Weg des adiabatischen Transfers wird in Abschnitt 5.2 ausführlich vorgestellt. Bei Hänsel *et al.* [Hän01] wird die magnetooptische Falle als Spiegel-MOT betrieben und die Atome werden direkt an dem Substrat, auf dem sich die miniaturisierten Leiter befinden, in einer Z-Falle gefangen. Das Quadrupolfeld, das für die magnetooptische Falle benötigt wird, wird von einer U-förmigen Leiterbahn erzeugt, die ebenfalls auf dem Substrat untergebracht wird. Direkt nach dem Umladen in die Z-Falle wird die Atomwolke durch Erhöhung des Kompressionsfelds stark komprimiert und evaporativ in weniger als 2 s bis zur Bose-Einstein-Kondensation gekühlt. In dem dritten Experiment [Gus02] wird zunächst ein Bose-Einstein-Kondensat in einer konventionellen „cloverleaf trap“ erzeugt. Anschließend wird es in eine optische Dipolfalle umgeladen und durch mechanisches Verschieben der optischen Komponenten bewegt. Nach dem Transfer in eine zweite Vakuumkammer wird das Kondensat in die Magnetfalle umgeladen.

Während die letztere Methode und unsere Methode sehr hohe Atomzahlen im Kondensat erreichen (mehrere Millionen bzw. knapp eine Million Atome), benötigen beide relativ lange für einen experimentellen Zyklus (40 s bzw. 50 s). Demgegenüber

beträgt die Zyklusdauer bei Hänsel *et al.* weniger als 10 s, es befinden sich jedoch nur einige Tausend Atome im Kondensat.

Während des Schreibens dieser Arbeit gelang es drei weiteren Gruppen, Bose-Einstein-Kondensate in Mikrofallen zu erzeugen².

3.4 Atome in der Falle

Eine Atomwolke mit N Atomen, der Temperatur T und der Atommasse m , die in einer Magnetfalle gefangen ist, hat im thermodynamischen Gleichgewicht die Dichteverteilung

$$n(x, y, z) = n_0 \exp(-\mu B(x, y, z)/k_B T - mgz/k_B T). \quad (3.14)$$

Die Konstante n_0 ist die Dichte im Zentrum der Falle und ist über die Normierungsbedingung

$$\int_{dV} n_0 \exp(-\mu B(x, y, z)/k_B T - mgz/k_B T) dV = N \quad (3.15)$$

festgelegt. Der zweite Term im Exponenten von (3.14) beschreibt den Einfluss der Gravitation. Bei Kenntnis der Dichteverteilung kann sofort die elastische Stoßrate der Atome im Fallenzentrum

$$\gamma_{\text{el}} = n_0 v_T \sigma_{\text{el}} \propto n_0 T^{1/2} \quad (3.16)$$

angegeben werden. $\sigma_{\text{el}} = 8\pi a^2$ ist der Wirkungsquerschnitt für die s -Wellen-Streuung identischer Bosonen und v_T ist die mittlere Geschwindigkeit der Atome. Die Phasenraumdichte kann mit der thermische de-Broglie Wellenlänge $\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/(mk_B T)}$ ebenfalls direkt berechnet werden:

$$A := n_0 \lambda^3 \propto n_0 T^{-3/2}. \quad (3.17)$$

Die Integration von (3.15) ist nicht für beliebige Magnetfallen analytisch durchführbar. Für die wichtigen Spezialfälle eines sphärischen Quadrupol- und eines parabolischen Potentials kann ein geschlossener Ausdruck für n_0 angegeben werden. Für das sphärische Quadrupolpotential gilt

$$n_0 = \frac{N}{32\pi l^3} (\alpha^2 - 1)^2 \quad (3.18)$$

$$\simeq \frac{N}{32\pi l^3} \quad \text{für } \alpha^2 \ll 1 \quad (3.19)$$

mit

$$\alpha = mg/\mu b_z$$

²Auf der Internetseite <http://amo.phy.gasou.edu/bec.html/popular.html> findet man eine aktuelle Liste aller Bose-Einstein-Kondensate weltweit.

	sphärisches Quadrupol- potenzial		lineares Quadrupol- potenzial		parabolisches Potenzial	
$n_0 \propto$	b	I	$b^{6/7}$	$I^{6/7}$	$(\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/2}$	$I^{3/4}$
$T \propto$	$b^{2/3}$	$I^{2/3}$	$b^{4/7}$	$I^{4/7}$	$(\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/3}$	$I^{1/2}$
$\gamma \propto$	$b^{4/3}$	$I^{4/3}$	$b^{8/7}$	$I^{8/7}$	$(\omega_1\omega_2\omega_3)^{2/3}$	I

Tabelle 3.1: Skalierung der zentralen Dichte n_0 , der Temperatur T und der elastischen Stoßrate γ bei einer Veränderung der Fallengeometrie. Bei den Quadrupolgeometrien wird der Gradient b bzw. der Strom I durch die Spulen verändert. Bei dem parabolischen Potenzial ist die Abhängigkeit von den drei Oszillationsfrequenzen ω_i bzw. dem Strom I angegeben, wenn dieser in allen Elektromagneten erhöht wird.

und

$$l = k_B T / \mu b_z.$$

Der Gradient des Quadrupolfelds entlang der Symmetrieachse ist b_z , μ ist das magnetische Moment des Atoms und mg ist die Gewichtskraft auf ein Atom. Für ein parabolisches Potenzial ergibt sich für die zentrale Dichte

$$n_0 = N \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \sqrt{\beta_x \beta_y \beta_z} = N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \omega_x \omega_y \omega_z, \quad (3.20)$$

wobei die β_i und ω_i die Krümmungen des Magnetfeldbetrags bzw. die Oszillationsfrequenzen für die drei Raumrichtungen sind. Aus den Ausdrücken (3.18) und (3.20) lassen sich eine Reihe nützlicher Relationen ableiten, die das Verhalten der Atomwolke bei Kompression und Dekompression beschreiben. Setzt man voraus, dass die Veränderung des Fallenpotenzials adiabatisch durchgeführt wird, bleibt die Phasenraumdicke (3.17) konstant. Für diesen Fall gelten die in Tabelle 3.1 zusammengefassten Skalierungsgesetze. Sie beschreiben das Verhalten von Temperatur, Dichte und Stoßrate bei Änderung des Gradienten eines sphärischen oder linearen Quadrupolpotenzials und bei der Änderung einer oder mehrerer Oszillationsfrequenzen eines rein parabolischen Potenzials.

3.5 Evaporatives Kühlen

Evaporatives Kühlen ist die einzige Kühltechnik, mit der es bisher gelungen ist, Bose-Einstein-Kondensate zu erzeugen. So wünschenswert eine schnelle, optische Kühlmethode wäre, bisher sind alle Versuche gescheitert — wenn auch manches Mal nur äußerst knapp vor dem Ziel³. Das Prinzip des evaporativen Kühlens ist

³In [Ido00] wurde Strontium auf einem sehr schmalen Übergang rein optisch bis zu einer Phasenraumdicke von $\frac{1}{10}$ gekühlt. In [Ker00] gelang es, Cäsiumatome durch Raman-Seitenband-Kühlen

denkbar einfach und wurde zuerst intensiv an magnetisch gespeichertem Wasserstoff untersucht [Hes86]: Aus der gefangenen Atomwolke mit der Temperatur T werden die heißesten Atome entfernt. Die übrigen Atome thermalisieren durch Stöße und haben nach der Thermalisierung eine tiefere Temperatur. Die folgende Beschreibung basiert auf einem Modell von Ketterle und Druten [Ket96b].

Man definiert zunächst einen Abschneideparameter

$$\eta = \frac{E_t}{k_B T}. \quad (3.21)$$

Alle Teilchen mit einer Energie größer als E_t können die Falle verlassen. Die Thermalisierung der übrigen Atome geschieht über elastische Stöße mit der Stoßrate γ_{el} . Für die Entwicklung der Gesamtatomzahl in der Falle ergibt sich unter Berücksichtigung von Verlusten durch Stöße mit dem Hintergrundgas (Lebensdauer τ)

$$\dot{N}_{\text{ges}}/N_{\text{ges}} = -\gamma_{\text{el}}\eta e^{-\eta} - 1/\tau.$$

Bei konstant gehaltenem E_t ist die Evaporationsrate mit abnehmender Temperatur exponentiell unterdrückt und es stellt sich eine Gleichgewichtstemperatur ein. Wird stattdessen η konstant gehalten, findet ein kontinuierlicher Kühlprozess statt. Jedes Atom, das die Falle aufgrund des Kühlprozesses verlässt, nimmt die potenzielle Energie $E_t = \eta k_B T$ und eine zusätzliche durchschnittliche kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \kappa k_B T < k_B T$ mit. Atome, die durch Stöße mit Restgasatomen aus der Falle verloren gehen, besitzen die mittlere Energie

$$E = (3/2 + \delta)k_B T. \quad (3.22)$$

Für ein Potenzial, das einem Potenzgesetz $U(r) \propto r^p$ gehorcht, ist $\delta = 3/p$. Für die abtransportierte Energie ergibt sich

$$\dot{E}_{\text{ges}} = \underbrace{-\gamma_{\text{el}}\eta e^{-\eta}(\eta + \kappa)N_{\text{ges}}k_B T}_{\text{aktive Kühlung}} - \underbrace{\tau^{-1}(3/2 + \delta)N_{\text{ges}}k_B T}_{\text{Verlustprozesse}} \quad (3.23)$$

Nach (3.22) folgt allgemein für jede Energieänderung des Systems

$$\dot{E}_{\text{ges}} = (3/2 + \delta) \left(k_B T \dot{N}_{\text{ges}} + k_B N_{\text{ges}} \dot{T} \right). \quad (3.24)$$

Setzt man (3.23) und (3.24) gleich, erhält man nach Umformung die Entwicklung der Temperatur während des Kühlens:

$$\left(\frac{\dot{T}}{T} \right) = \alpha \left(\frac{\dot{N}}{N} \right) + \frac{1}{\tau}$$

in einer optischen Stehwelle bis zu einer Phasenraumdichte von $\frac{1}{500}$ zu kühlen.

mit

$$\alpha = \left(\frac{\eta + 1/2}{3/2 + \delta} - 1 \right).$$

Für κ wurde ein mittlerer Wert von $1/2$ eingesetzt. Um entscheiden zu können, ob der Kühlprozess effizient verläuft, hilft ein Blick auf Gleichung (3.16). Bei einer Abkühlung verringert sich die mittlere Geschwindigkeit der Atome und die Stoßrate nimmt ab. Nun ist die zur Verfügung stehende Zeit für den Kühlprozess durch die Lebensdauer τ begrenzt. Es kann nur dann effizient gekühlt werden, wenn die Stoßrate im Verlauf des Kühlprozesses ansteigt. Dieser Bereich ist als „runaway“ Kühlbereich bekannt, und ist durch die Ungleichung

$$\dot{\gamma}_{\text{el}} > 0$$

gekennzeichnet. Aus (3.16) lässt sich die folgende Bedingung für das Verhältnis zwischen elastischen Stößen ($1/\tau_{\text{el}}$) und inelastischen Stößen ($1/\tau$) ableiten:

$$\eta e^{-\eta} (\alpha(\delta - 1/2) - 1) > \frac{\tau_{\text{el}}}{\tau}. \quad (3.25)$$

Setzt man typische experimentelle Parameter in (3.25) ein, so erhält man einen Wert für τ/τ_{el} von 200–500. Bei einer Lebensdauer der Atome in der Magnetfalle von 50 s, beträgt die erforderliche minimale elastische Stoßrate zu Beginn des Kühlens 4–10 s⁻¹. Bei zu kleiner Stoßrate muss diese durch Kompression der Atome erhöht werden (siehe Tabelle 3.1).

3.5.1 Evaporation durch Radiofrequenz

Für das evaporative Kühlen ist es erforderlich, nur Atome zu entfernen, deren Energie größer als die in (3.21) definierte ist. Die Evaporation muss daher orts- oder geschwindigkeitsselektiv stattfinden. Ersteres wird in Magnetfallen durch Einstrahlen einer Radiofrequenz realisiert und soll kurz erläutert werden. Atome, die sich in einem Magnetfeld befinden, können magnetische Dipolübergänge ($\Delta m = \pm 1$) zwischen den Zeemanunterzuständen innerhalb eines Hyperfeinstrukturmultipletts machen. Strahlt man eine Radiofrequenz ω_{rf} ein, so lautet die Energiebedingung für einen Übergang

$$\mu_{\text{B}} g_{\text{F}} B(\mathbf{r}) = \hbar \omega_{\text{rf}}. \quad (3.26)$$

Da das Magnetfeld einer Falle in allen Richtungen zunimmt, wird durch die Radiofrequenz eine geschlossene Schale gleichen Magnetfeldbetrags ausgewählt, auf der Übergänge stattfinden. Die Atome in der Magnetfalle werden durch die Radiofrequenz in „high field seeking“ Zustände transferiert und in Richtung Fallenrand beschleunigt⁴. Für eine Ioffe-Falle mit Offsetfeld B_0 im Zentrum ist die potenzielle Magnetfeldenergie auf der Evaporationsoberfläche durch die Bedingung

$$E_{\text{ev}} = m_{\text{F}} \hbar (\omega_{\text{rf}} - \omega_0) \quad (3.27)$$

⁴Nicht jedes Atom, das die durch (3.26) definierte Schale durchfliegt macht einen magnetischen Dipolübergang. Um eine Übergangsrate berechnen zu können, müssen mehrere Effekte berücksichtig

gegeben. Die Resonanzfrequenz im Fallenzentrum ist $\omega_0 = \mu_B g_F B_0$. Die durch (3.27) definierte Fläche ist bei Anwesenheit weiterer Potentiale (Gravitation oder elektrische Felder) keine Äquipotentialfläche mehr. Dies kann beim evaporativen Kühlen in Magnetfallen vernachlässigt werden, muss jedoch bei sehr kalten Atomwolken und bei Experimenten mit Atomlasern [Blo99] berücksichtigt werden.

sichtigt werden. Es lassen sich zwei Grenzfälle angeben. Sehr langsame Atome machen bei großer Radiofrequenzamplitude einen adiabatischen Übergang in den nicht gefangenen „high field seeking“ Zustand. Schnelle Atome passieren bei kleiner Radiofrequenzamplitude die Resonanzschale nichtadiabatisch und bleiben gefangen. Im Zwischenbereich müssen die resultierenden Übergangswahrscheinlichkeiten numerisch berechnet werden [Val99]. Außerdem ändern sich durch das Einstrahlen der Radiofrequenz die Oszillationsfrequenzen der Falle [Die01].

Kapitel 4

Experimenteller Aufbau

In drei Punkten unterscheidet sich der Aufbau grundlegend von anderen Experimenten zur Bose-Einstein-Kondensation: Zum einen befinden sich alle für das Experiment benötigten Elemente in der Vakuumkammer, insbesondere die Spulen, stromführenden Drähte und Mikroleiter. Außerdem wird die magnetooptische Falle (MOT) direkt aus einer thermischen Rubidiumquelle geladen. Und schließlich werden die Atome durch eine für das Experiment eigens entwickelte Methode, den adiabatischen Transfer, von einem makroskopischen sphärischen Quadrupolpotential in eine Miniaturfalle an der Oberfläche der Mikrostruktur transferiert. In diesem Kapitel werden die dafür wesentlichen Elemente des experimentellen Aufbaus beschrieben. Darüber hinaus ist die Apparatur durch eine Reihe weiterer Besonderheiten gekennzeichnet, die in diesem Kapitel einen größeren Platz einnehmen. Zu nennen wären die Verwendung einer Polarisationsspektroskopie zur Stabilisierung des Abbildungslasers, der Einsatz einer selbst gefertigten Mikrostruktur für die Erzeugung der Mikrofalle, ein Vakuumpumpensystem, das dauerhaft einen Druck von 1×10^{-11} mbar und besser erzeugt und eine Experimentsteuerung, die auf einem autonomen Prozessrechner basiert. Der kompakte Aufbau findet auf einem optischen Tisch Platz und arbeitet zuverlässig stabil auch über längere Zeiträume.

4.1 Lasersystem

Lasers sind das wichtigste Hilfsmittel bei der Arbeit mit ultrakalten Atomen. Ihre extreme Schmalbandigkeit ermöglicht ihren Einsatz als feine „Pinzetten“ für ultrakalte Atome. So können Atome geschwindigkeitsselektiv, zustandsselektiv und im Rahmen des Beugungslimits orts aufgelöst adressiert, manipuliert und detektiert werden. Je nach Intensität des Lasers und seiner Verstimmung zur atomaren Resonanz kommt es zu Absorption und Dispersion. Die Absorption verursacht einen Strahlungsdruck und führt zu dissipativen, nichtkonservativen Kräften. Die Dissipation findet durch die Emission eines spontanen Photons nach einem Absorptionsprozess statt. Über diesen Prozess ist es möglich, die Entropie des Systems zu erniedrigen und atomare Ensembles mit Lasern zu kühlen. Die wohl wichtigste Anwendung dieses

Prinzip ist die magnetooptische Falle. Sie ist ein zentraler Bestandteil der meisten Experimente mit ultrakalten Atomen. Ebenfalls von Bedeutung ist die Verwendung eines Lasers zur Detektion der ultrakalten Atome. Mit resonantem Licht können die Atome über eine Absorptionaufnahme abgebildet werden. Dispersive Kräfte, die bei großer Verstimmung des Lasers zur atomaren Resonanz dominieren, erzeugen konservative Kräfte, die für Fallenpotenziale eingesetzt werden können. Außerdem kann die Phasenverschiebung des Lichts beim Durchgang durch eine Atomwolke zu einer Echtzeitbeobachtung der Wolke genutzt werden, was als so genannte Phasenkontrastaufnahme bekannt ist. Neben diesen Einphotonenprozessen werden auch Mehrphotonenprozesse zur Manipulation und Analyse der Atomwolken eingesetzt. Dies geschieht meist in Form von Ramanübergängen zwischen zwei Grundzuständen des Atoms mit oder ohne Beteiligung der äußeren Bewegungsfreiheitsgrade der Atome.

4.1.1 Benötigte Laser für Rubidium

In die theoretischen Grundlagen zur Bose-Einstein-Kondensation fließen die Stoßquerschnitte, die Masse und das magnetische Moment als die einzigen charakteristischen, atomaren Größen ein. Bei der Wahl, welches Boson studiert wird, kann also auch auf andere, durchaus technische Aspekte Rücksicht genommen werden. Ein wichtiger Aspekt ist ein möglichst einfaches Termschema des Atoms, das es ermöglicht, den experimentellen Aufwand für die Laserkühlung gering zu halten. Nahezu ideal geeignet sind Alkaliatome, da sie nur ein Leuchtelektron besitzen. Rubidium erlaubt darüber hinaus den Einsatz von einfach aufgebauten Diodenlasern und macht aufwändige Farbstofflasersysteme überflüssig. Das Termschema von Rubidium ist in Abb. 4.1 gezeigt. Die Grundzustandskonfiguration von Rubidium ist $5^2S_{1/2}$. Der angeregte Zustand spaltet in die beiden Feinstrukturzustände $5^2P_{1/2}$ und $5^2P_{3/2}$ auf und die Wellenlängen für die beiden Übergänge liegen bei 795 nm bzw. 780 nm. Mit einem Kernspin von $3/2$ spaltet der Grundzustand des verwendeten Isotops ^{87}Rb in die beiden Hyperfeinstrukturzustände ($F = 1$) und ($F = 2$) auf, die 6,8 GHz voneinander getrennt sind. Zwischen dem ($F = 2$)-Grundzustand und dem angeregten ($F' = 3$)-Zustand besteht ein geschlossener Übergang. Im Weiteren werden die angeregten Zustände immer mit einem Apostroph versehen.

In dem Experiment werden Laser für zweierlei Aufgaben eingesetzt: für den Betrieb einer magnetooptischen Falle inklusive der Präparation der Atome für das magnetische Speichern sowie für den Nachweis der Atome durch eine Absorptionsabbildung. Für die MOT werden zwei Laserfrequenzen benötigt. Eine für den Kühlübergang ($F = 2 \rightarrow F' = 3$) mit hoher Leistung und eine für das so genannte Rückpumpen derjenigen Atome, die aus dem geschlossenen Kühlzyklus in den ($F = 1$)-Grundzustand zerfallen. Außerdem muss der Laser für den Kühlübergang (im Weiteren kurz Kühllaser genannt) zwischen 2 und 10 Linienbreiten relativ zur atomaren Resonanz im roten Frequenzbereich verstimmbar sein. Um die Atome magnetisch zu speichern, werden diese optisch in den ($F = 2, m_F = 2$)-Grundzustand

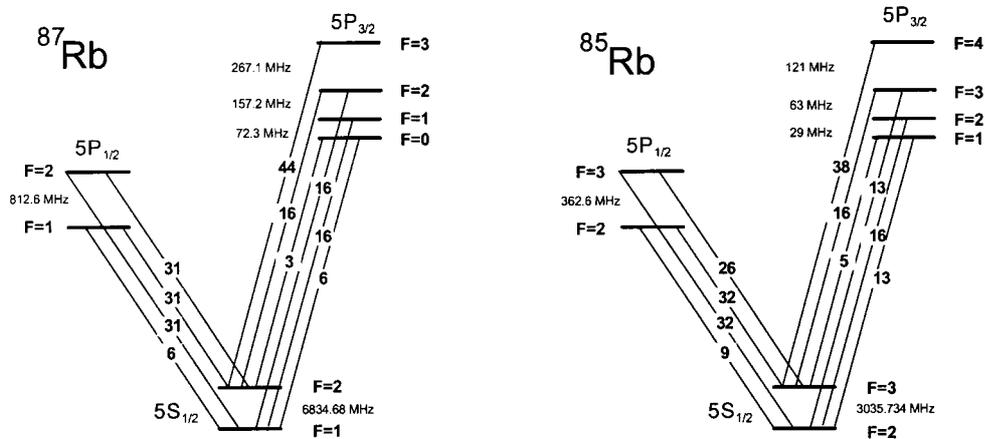


Abbildung 4.1: Termschema von ^{87}Rb und ^{85}Rb . Die optischen Übergangsfrequenzen betragen für die $5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2}$ -Übergänge 780 nm und für die $5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{1/2}$ -Übergänge 795 nm. Außerdem sind die Abstände zwischen den Hyperfeinstrukturzuständen und die relativen Linienstärken angegeben.

gepumpt. Dies geschieht mit Hilfe des so genannten Umpumpasers, dessen Frequenz resonant auf den ($F = 2 \rightarrow F' = 2$)-Übergang eingestellt ist. Dieser liegt relativ zum Kühlübergang bei einer um 267 MHz niedrigeren Frequenz. Für die Absorptionsabbildung wird außerdem ein zu dem ($F = 2 \rightarrow F' = 3$)-Übergang resonanter Laser benötigt.

4.1.2 Laserdioden

Die Zentralwellenlänge des $5^2S_{1/2} - 5^2P_{3/2}$ Übergangs von ^{87}Rb liegt bei 780,24 nm im nahinfraroten Wellenlängenbereich. Um Laserlicht bei dieser Frequenz zu erzeugen werden gitterstabilisierte Diodenlaser in Littrow-Anordnung [Ric95] eingesetzt. Insgesamt kommen drei Diodenlaser zum Einsatz, von denen jeweils ein Teilstrahl in ein Fabry-Pérot Etalon eingekoppelt wird, um den Einmodenbetrieb zu kontrollieren. Der modensprungfreie Durchstimmbereich beträgt zwischen 1 und 3 GHz. Die Diodenlaser werden mit einer Vierpunkt-Widerstandsmessung an einem PT10000 Messwiderstand temperaturstabilisiert. Mit einem Peltierelement, das unterhalb der Diodenhalterung angebracht ist wird die Laserdiode gekühlt oder geheizt. Für die Temperaturregelung werden Geräte der Firma Prolan-Mat eingesetzt, die aus einer PID-Regeleinheit (1600235) und einer Verstärkereinheit (1600234) bestehen. Die verwendeten Laserdioden von HITACHI (HL7851G) haben eine Leistung von 50 mW. Sie werden mit Stromquellen von TUI Optics (DCC 100) betrieben.

4.1.3 Kühllaser

Eine hohe Leistung des Kühllasers wird erreicht, indem ein Trapezverstärker (MOPA, master oscillator power amplifier) von einem Diodenlaser injiziert wird. Ein Tra-

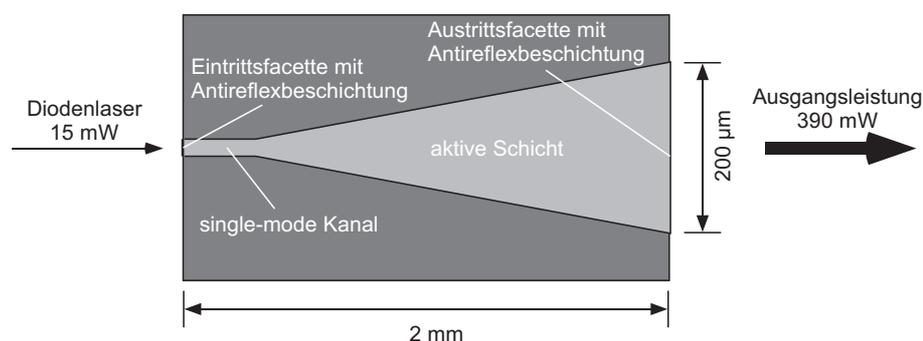


Abbildung 4.2: Aufbau eines Trapezverstärkerchips. An die Eintrittsfacette schließt sich ein so genannter „single-mode“-Kanal an, der als räumliches Modenfilter dient. Die trapezförmige aktive Schicht ist angepasst an die Beugung des einfallenden Lichts am Ende des Kanals. Ein- und Austrittsfacette sind antireflexbeschichtet. Die Höhe der aktiven Schicht beträgt wenige Mikrometer.

pezverstärker ist ein Halbleiterbauelement, vergleichbar einer Laserdiode, jedoch mit anderer Geometrie und Reflektivität an den Ein- und Austrittsfacetten (Abb. 4.2). Der Trapezverstärker (SDL, TC30-E) wird mit 15 mW Leistung injiziert, wobei Diodenlaser und Verstärker durch einen 60 dB Isolator getrennt sind, um optische Rückkopplungen in den Diodenlaser zu verhindern (Abb. 4.3). Der Trapezverstärker verstärkt das injizierte Licht phasenrichtig auf derselben Frequenz. Er ist an Ein- und Austrittsfacette antireflexbeschichtet, so dass er ohne Injizierung nur schwache Fluoreszenz zeigt. Fällt Laserlicht auf seine Austrittsfacette, kommt es ebenfalls zur Verstärkung, die nun dazu führt, dass die gesamte verstärkte Laserleistung durch die sehr kleine Eingansfacette austritt. Dabei kommt es wegen der hohen Energiedichte unweigerlich zur Zerstörung der Beschichtung und damit des Verstärkers. Aus diesem Grund müssen optische Rückreflexe nach der Verstärkereinheit unbedingt vermieden werden. Dies erfordert den Einsatz eines weiteren optischen Isolators mit 60 dB Auslöschung hinter der Verstärkereinheit (Abb. 4.3). Der Strahl wird mit einem Kollimator und einer Kombination aus sphärischer und Zylinderlinse kollimiert. Das resultierende Strahlprofil zeigt neben dem Strahlzentrum mit 1,5 mm Durchmesser zahlreiche höhere räumliche Ordnungen. Die Gesamtleistung im Strahl beträgt 390 mW. Um den Strahl räumlich zu filtern, wird er durch eine optische Faser geschickt. Hinter der optischen Faser stehen 180 mW Leistung in der TEM₀₀-Mode zur Verfügung, was einer Einkoppeleffizienz von über 46 Prozent entspricht. Nach der räumlichen Filterung durch die optische Faser wird der Strahl durch ein 1:5 Teleskop aufgeweitet, in dessen Fokus sich ein mechanischer Verschluss befindet. Anschließend wird der Strahl durch eine Blende auf einen Durchmesser von 2,5 cm begrenzt (1 Zoll Optik). Der $(1/e^2)$ -Durchmesser von 40 mm ist so gewählt, dass bei vorgegebener Gesamtleistung im Strahl und festem Blendendurchmesser an den Rändern der sechs Strahlen die Intensität maximal ist. Mit einer Kombination aus $\lambda/2$ -Plättchen und Polarisationsstrahlteilern wird der Strahl in seine sechs Teilstrahlen aufgeteilt. Nach der Strahlaufteilung sorgen sechs $\lambda/4$ -Plättchen für die zirkulare Polarisation der

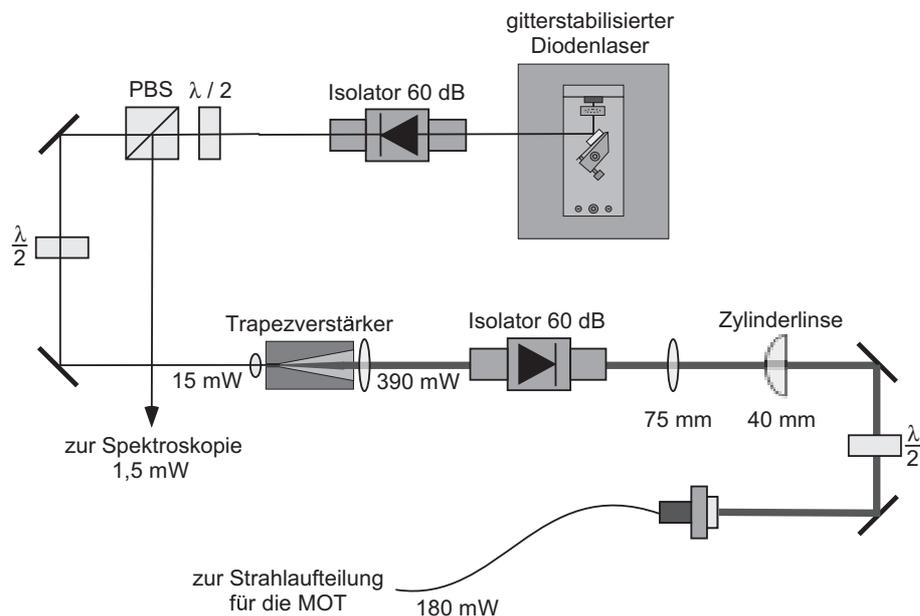


Abbildung 4.3: Strahlengangs des Kühllasers bis zur Einkopplung in die optische Faser.

Strahlen. Der Vorteil des Trapezverstärkers besteht in der einfachen Handhabbarkeit. Die gesamte Frequenzstabilisierung kann mit dem Diodenlaser durchgeführt werden, außerdem können mehrere Frequenzen gleichzeitig verstärkt werden. Durch Veränderung des Stroms wird die Intensität auf einfache Weise geregelt, ohne die Laserfrequenz zu ändern. Der Verstärker wird mit maximal 1,5 A Strom betrieben und wird ebenso wie die Diodenlaser temperaturstabilisiert. Spezifiziert ist der Trapezverstärker für eine Leistung von 500 mW bei einem maximalen Strom von 2 A. Zugunsten einer längeren Lebensdauer wurde jedoch auf die volle Leistung verzichtet, zumal die Einkoppeleffizienz in die optische Faser bei höherer Leistung deutlich zurückgeht. Eine ausführliche Beschreibung des Funktionsprinzips des Trapezverstärkers findet sich in der Diplomarbeit von A. Zach [Zac99]. Der hier verwendete Aufbau ist in der Diplomarbeit von S. Beyertt [Bey00] genauer beschrieben.

4.1.4 Rückpumplaser

Für den Rückpumplaser wird ein weiterer Diodenlaser in Littrow-Anordnung eingesetzt. Der Strahlengang bis zur Strahlaufteilung für die MOT ist in Abb. 4.4 skizziert. Nach einem 40 dB Isolator und einem anamorphem Prismenpaar zur Strahlformung werden 0,2 mW der Gesamtleistung von 25 mW in die Spektroskopie abgezweigt. 3,5 mW der Leistung werden für den Umpumpprozess zum Laden der Magnetfalle verwendet. Insgesamt 18 mW werden mit einem Teleskop aufgeweitet, in dessen Fokus ein mechanischer Verschluss sitzt. Nach der Aufweitung beträgt der ($1/e^2$)-Durchmesser 20 mm. Der Strahl wird anschließend an einem Polarisationsstrahlteiler dem Kühllaser überlagert und mit diesem in die sechs Teilstrahlen aufgeteilt.

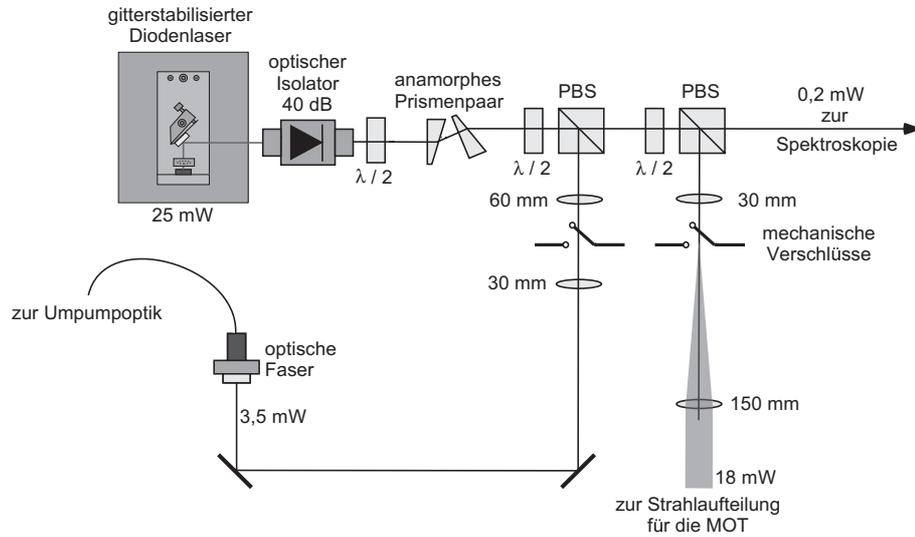


Abbildung 4.4: Strahlführung für den Rückpumplaser.

4.1.5 Abbildungslaser

Für eine genaue quantitative Auswertung der Absorptionsabbildung ist es wichtig, dass der Abbildungslaser genau resonant auf dem atomaren Übergang ist. Daher wurde ein eigener Diodenlaser für die Absorptionsabbildung aufgebaut. Gleichzeitig dient der Abbildungslaser als Referenz für die Stabilisierung des Kühllasers (Abschnitt 4.1.6). Um die Abbildungsfrequenz möglichst stabil zu halten, wurde ein optischer Isolator mit 60 dB Auslöschungsverhältnis eingebaut, der optische Rückkopplungen verhindert. Hinter dem Isolator hat der Strahl eine Leistung von 21 mW von denen 2,4 mW für die Spektroskopie verwendet werden. Für den Abbildungsstrahl wird ein Teilstrahl mit 6 mW Leistung durch zwei mechanische Verschlüsse und einen elektro-optischen Modulator (EOM) mit aufgeklebtem Polarisationsstrahlteiler am Ausgang geführt. Mit dessen Hilfe kann der Strahl sehr schnell (< 25 ns) geschaltet werden. Die mechanischen Verschlüsse haben die Aufgabe, vor und nach der Absorptionaufnahme den Strahl vollständig auszuschalten. Je nach Justage wird mit dem EOM (Gsänger, LM0202-IR) ein Auslöschungsverhältnis von 1:100 bis 1:250 im Langzeitbetrieb erreicht. Der EOM ist als Niedervoltmodulator ausgelegt, der Spannungen bis 400 V benötigt. Diese werden von einem Spannungspulsverstärker erzeugt, der zwischen zwei einstellbaren Hochspannungen mittels TTL Steuerung hin- und herschaltet. Nach dem EOM wird der Strahl geteilt und in zwei polarisationserhaltende optische Fasern eingekoppelt. Mit diesen beiden Abbildungsstrahlen kann die Wolke gleichzeitig von zwei Seiten abgebildet werden. Für die Abbildungsstrahlen werden je nach Vergrößerung der Abbildung zwischen $130 \mu\text{W}$ und $200 \mu\text{W}$ Leistung benötigt. Die Leistung wird mit je zwei Polarisatoren vor den optischen Fasern eingestellt.

Für das optische Pumpen der Atome in den ($F = 2, m_F = 2$)-Grundzustand werden $8,5 \text{ mW}$ des Abbildungslasers über einen akustooptischen Modulator (AOM) um

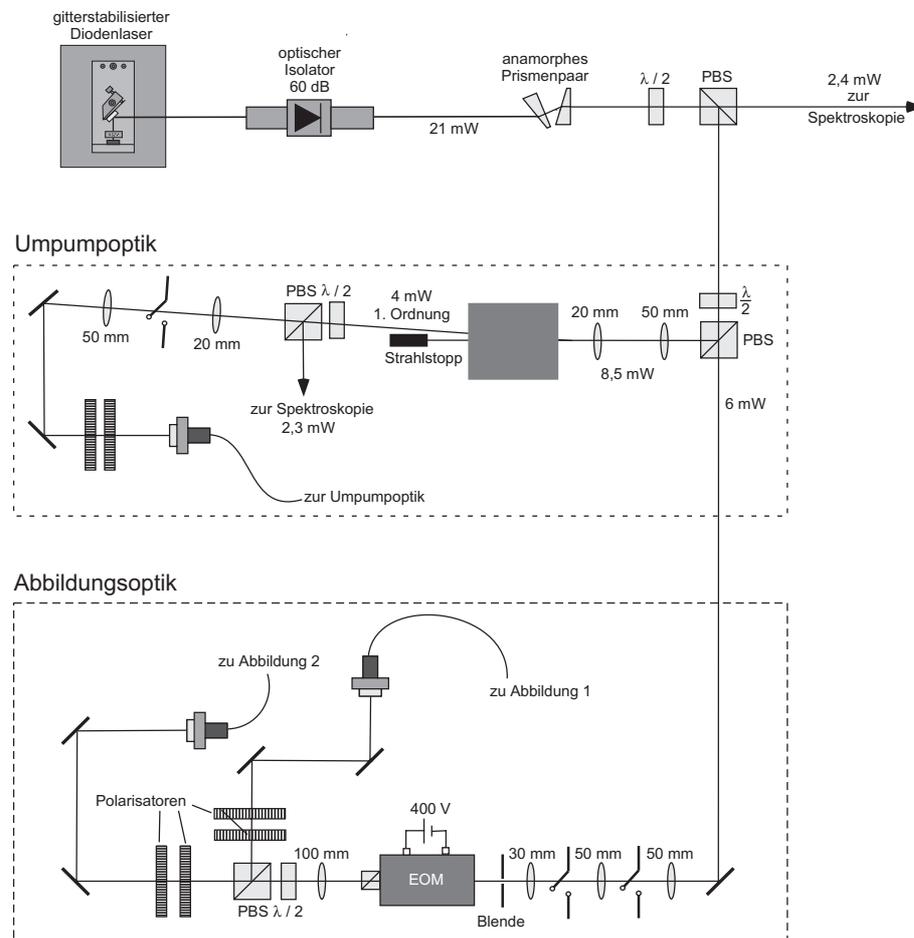


Abbildung 4.5: Strahlengang für den Abbildungslaser. Ein Teil des Lichts wird durch einen AOM um 267 MHz frequenzverschoben und sowohl für das optische Pumpen als auch für die Stabilisierung des Kühllasers verwendet. Der Abbildungsstrahl wird durch einen EOM geschaltet, anschließend aufgeteilt und in zwei polarisationserhaltende optische Fasern eingekoppelt.

267 MHz rotverstimmt. Hinter dem AOM (4 mW Leistung) durchläuft der frequenzverschobene Strahl einen mechanischen Verschluss, zwei Polarisatoren zur Intensitätsregelung und wird dann in eine polarisationserhaltende optische Faser eingekoppelt. Außerdem werden an einem Polarisationsstrahlteiler 2,3 mW dieses Strahls ausgekoppelt und zur Stabilisierung des Kühllasers verwendet. Abb. 4.5 zeigt den gesamten Strahlengang des Abbildungslasers bis zur Einkopplung in die optischen Fasern.

4.1.6 Laserstabilisierung

Die Stabilisierung der drei Diodenlaser ist unterschiedlich und trägt jeweils den Anforderungen an Stabilität und Verstimbarkeit Rechnung. Allen drei Stabilisie-

rungen ist gemeinsam, dass das Photodiodensignal der Spektroskopie auf eine so genannte „Lock-Box“ gegeben wird, die mit Hilfe eines PID-Reglers aus diesem Fehlersignal eine Steuerspannung für die Piezoregelung in den Diodenlasern ausgibt. Der Strom der Laserdioden wird nicht mitgeregelt. Die Lock-Box kann in zwei Modi betrieben werden. In dem ersten Modus („scan“-Modus) wird eine Wechselfrequenz ausgegeben und das Photodiodensignal über den Monitorausgang auf einem Oszilloskop angezeigt (siehe Abb. 4.7, 4.8 und 4.9). Im eigentlichen „lock“-Modus wird die Laserdiode bei einer durch eine Offsetspannung einstellbaren Frequenz stabilisiert, und auf dem Monitorausgang wird das Fehlersignal ausgegeben.

Polarisationspektroskopie

Der Abbildungslaser, dessen Frequenz resonant zu dem ($F = 2 \rightarrow F' = 3$)-Übergang sein muss, wird mit einer Polarisationspektroskopie [Wie76] stabilisiert. Sie erzeugt ein dispersives Signal bei der Resonanz und kann verwendet werden, um den Laser zentral auf der Resonanz zu stabilisieren. Der Strahlengang ist in Abb. 4.6 gezeigt. Die Polarisationspektroskopie ist wie die Sättigungsspektroskopie dopplernfrei und besitzt einen ähnlichen Strahlengang. Bei der Polarisationspektroskopie ist der Pumpstrahl zirkular und der Teststrahl linear polarisiert. Seine Polarisationsebene ist um 45° gegenüber der Horizontalen gedreht, und der Strahl wird nach Durchlaufen der Rubidiumdampfzelle an einem Polarisationsstrahlteiler in seine horizontale und vertikale Komponente zerlegt. Als Fehlersignal wird die Differenz der beiden Teilstrahlen mit einer Differenzphotodiode nachgewiesen.

Im Folgenden wird das Prinzip der Polarisationspektroskopie kurz erläutert. Zunächst denkt man sich den linear polarisierten Teststrahl beim Durchgang durch die Dampfzelle in zwei gegenläufige zirkuläre Felder gleicher Amplitude (+) und (–) zerlegt, wobei das (+) Feld gleichsinnig wie der zirkuläre, entgegengerichtete Pumpstrahl orientiert ist. Der Pumpstrahl erzeugt eine unterschiedliche Sättigung für die beiden zirkulären Richtungen und bewirkt unterschiedliche Absorptionskoeffizienten α^+ und α^- und unterschiedliche Brechungsindizes n^+ und n^- für den (+) bzw. (–) Strahl. Dies führt für kleine Änderungen von α und n hinter der Zelle zu einer Phasendifferenz $\Delta\Phi = \frac{\omega L}{c}(n^+ - n^-)$ (zirkuläre Doppelbrechung) und zu einer Amplitudendifferenz $\Delta E = \frac{E_0}{2}(e^{-(\alpha^+/2)L} - e^{-(\alpha^-/2)L})$ (zirkularer Dichroismus) der beiden Felder. Die Änderung des Absorptionskoeffizienten in der Nähe der Resonanz hat ein Lorentzprofil

$$\alpha^+(\omega) - \alpha^-(\omega) = \Delta\alpha(\omega) = \frac{\Delta\alpha(\omega_0)}{1 + x^2}$$

mit

$$x = \frac{\omega_0 - \omega}{\Gamma/2},$$

wobei Γ die Halbwertsbreite des Übergangs und $\Delta\alpha(\omega_0)$ die maximale Absorptionsdifferenz in der Mitte der Resonanz ist. Über die Kramers-Kronig Dispersionsrelati-

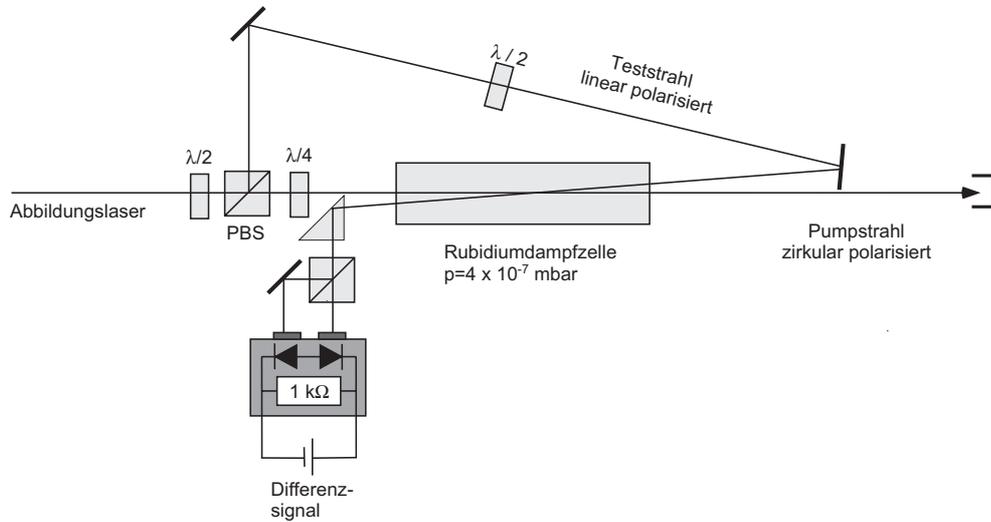


Abbildung 4.6: Strahlengang für die Polarisationspektroskopie. Die Polarisation des an dem Strahlteiler ausgekoppelten Teststrahls wird mit dem $\lambda/2$ -Plättchen um 45° gedreht. Nach dem Durchgang durch die Rubidiumzelle, die von dem zirkular polarisierten Pumpstrahl in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird, trifft der Teststrahl auf einen Polarisationsstrahlteiler, an dem er auf die horizontale und vertikale Polarisations ebene projiziert wird. Die Intensitäten der beiden Strahlen werden auf einer Differenzphotodiode voneinander abgezogen.

on ist mit der Absorptionsdifferenz eine Brechungsindexdifferenz verbunden, deren Linienform dispersiv ist:

$$\Delta n(\omega) = n^+ - n^- = \frac{c}{\omega_0} \Delta\alpha(\omega_0) \frac{x}{1 + x^2}.$$

Die Phasenverschiebung zwischen dem (+) und dem (-) Strahl führt zu einer Drehung der linearen Polarisation, die zu einem dispersiven Signal auf der Differenzphotodiode führt. Die Absorptionsdifferenz zwischen beiden Strahlen führt außerdem zu einem elliptischen Strahlprofil hinter der Zelle. Das resultierende Signal ist quadratisch in $\Delta\alpha$ und daher vernachlässigbar. Abb. 4.7 zeigt das Polarisationspektrum des Abbildungslasers. Die steile Flanke gehört zu dem ($F = 2 \rightarrow F' = 3$)-Übergang. Zum Vergleich der einzelnen Linien ist ein gleichzeitig aufgenommenes Sättigungsspektrum abgebildet. Die Flanke hat eine Breite von 45 MHz und ermöglicht eine extrem robuste Stabilisierung. Der Abbildungslaser kann an dieser Flanke auf 1 MHz genau stabilisiert werden.

Die Polarisationspektroskopie bietet den Vorteil eines einfachen Aufbaus bei gleichzeitig geringem technischen Aufwand und großer Robustheit gegenüber mechanischen Erschütterungen.

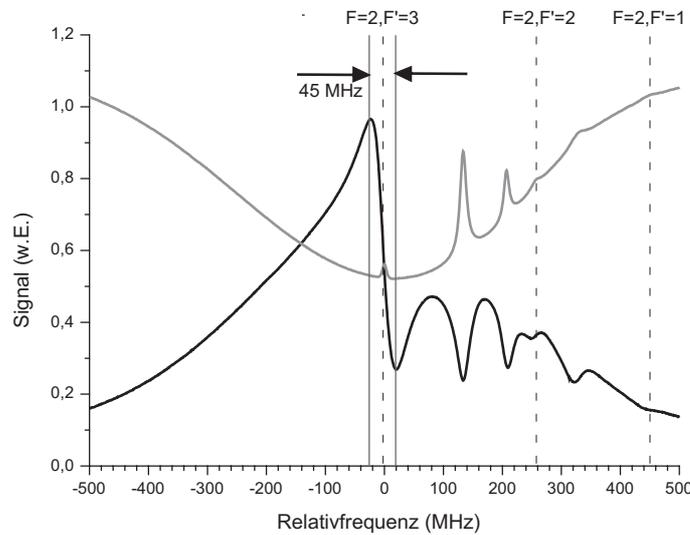


Abbildung 4.7: Polarisationspektrum des Abbildungslasers (schwarz). An dem ($F = 2 \rightarrow F' = 3$)-Übergang ist das dispersive Signal zu sehen, an dessen Flanke der Abbildungslaser stabilisiert wird. Die Flanke ist insgesamt 45 MHz breit. Zusätzlich abgebildet ist ein Sättigungsspektrum (grau).

Schwebungsspektroskopie

Während der Abbildungslaser immer auf die gleiche Frequenz stabilisiert wird, muss der Kühllaser über einen großen Frequenzbereich verstimmbar sein. Für den normalen Betrieb der MOT wird er um 3 bis 4 natürliche Linienbreiten gegen den ($F = 2 \rightarrow F' = 3$)-Übergang rotverstimmt. Kurz vor dem Ausschalten der MOT muss er für das so genannte Polarisationsgradientenkühlen um etwa 10 Linienbreiten rotverstimmt werden. Daraus folgt die Notwendigkeit einer ausgedehnten Stabilisierungsflanke, die über mehr als 60 MHz linear verläuft, um eine genaue Frequenzeinstellung zu ermöglichen. Dies kann durch eine Schwebungsspektroskopie erreicht werden. Dazu wird ein Teilstrahl des um 267 MHz gegenüber dem ($F = 2 \rightarrow F' = 3$)-Übergang rotverstimmt Umpumplasers mit einem Teil des Kühllasers auf einer schnellen Avalanche-Photodiode (1,2 GHz Bandbreite) überlagert. Bei gleicher Polarisation beider Strahlen entsteht ein Schwebungssignal¹. Die Schwebungsfrequenz wird in einer so genannten „phase-locked loop“ (PLL) Schaltung linear in eine Gleichspannung umgewandelt [Vul96]. Für Schwebungsfrequenzen zwischen 190 MHz und 350 MHz entsteht eine lineare Flanke, die einem Stabilisierungsbereich von ± 80 MHz um die Resonanz entspricht. Abb. 4.8 zeigt das resultierende Spektrum zusammen mit einem gleichzeitig aufgenommenen Sättigungsspektrum.

Der Vorteil der Schwebungsspektroskopie zeigt sich in der ausgezeichneten Reproduzierbarkeit der Frequenz und der Langzeitstabilität des intensitätsunabhängigen Signals. Die Stabilität der Referenzfrequenz überträgt sich auf den Kühllaser

¹Das Schwebungssignal reagiert sehr empfindlich auf die Intensität der beiden Laserstrahlen. Gute Ergebnisse werden erzielt mit 120 μ W für den Kühllaser und 200 μ W für den Abbildungslaser.

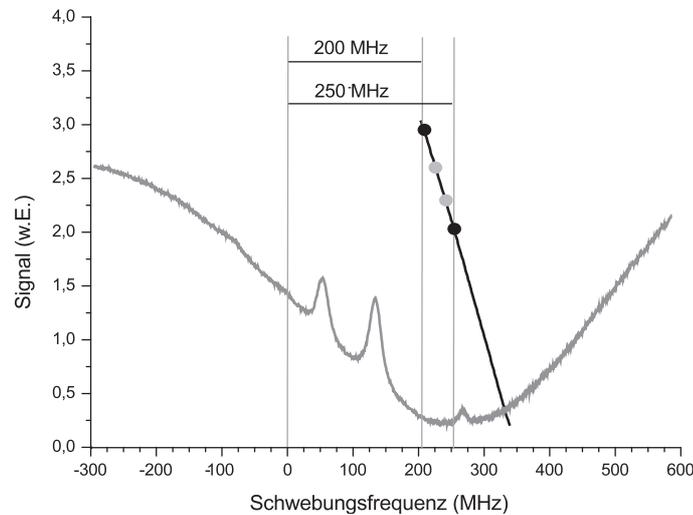


Abbildung 4.8: Schwegungsspektrum zur Stabilisierung des Kühllasers. Gezeigt ist die Flanke, die von der (PLL)-Schaltung erzeugt wird. Außerhalb der gezeigten Flanke ist das Signal nicht verwertbar. Die linke Markierung bei der Schwebungsfrequenz 0 MHz liegt bei der Frequenz des Referenzlasers ($F = 2 \rightarrow F' = 2$). Die beiden schwarzen Punkte markieren die Enden des benötigten Frequenzbereichs für den Kühllaser. Zur Orientierung ist ein zeitgleich aufgenommenes Sättigungsspektrum abgebildet.

und erlaubt eine zuverlässige Frequenzregelung.

Sättigungsspektroskopie

Der Rückpumplaser wird mit einer Sättigungsspektroskopie [Dem95] an der roten Flanke des ($F = 1 \rightarrow F' = 2$)-Übergangs stabilisiert. Abb. 4.9 zeigt das zugehörige Sättigungsspektrum.

4.1.7 Schaltung der Laserstrahlen

Ultrakalte Atome sind sehr empfindlich auf Streustrahlung oder nicht vollständig ausgeblendete Laserstrahlen. Bereits ein Absorptionsprozess kann dazu führen, dass das Atom in einen nicht speicherbaren Zustand zerfällt und verloren geht. Gleichzeitig müssen die Strahlen sehr schnell aus- und eingeschaltet werden. Dazu werden mechanische Verschlüsse eingesetzt, die aus einer Kombination von zwei Elementen bestehen: einem kleinen, schnellen Relais (NAIS DS2E-M-DC12V) mit aufgelöteter Metallzunge und einem großen Irisblendenverschluss (Prontor Magnetic E/40). Das Relais wird mit einer Spannung von 24 V geschaltet. Dabei bewegt sich die aufgelötete Metallzunge um etwa 1 mm und schneidet in den Fokus des Laserstrahls. Um auch Streulicht zuverlässig ausblenden zu können, geht kurze Zeit nach dem Relais der Irisblendenverschluss zu. Das Öffnen der Verschlüsse geschieht durch Federn in dem Relais und in dem Irisblendenverschluss. Mit dem Relais lassen sich bei

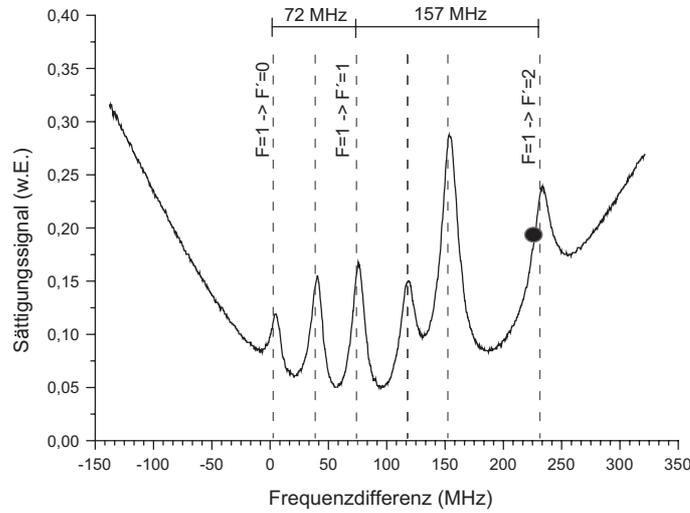


Abbildung 4.9: Rückpumpspektrum. Der Rückpumpplaser ($F = 1 \rightarrow F' = 0, 1, 2$) wird mit einer Sättigungsspektroskopie stabilisiert. Der schwarze Punkt markiert den Stabilisierungspunkt an der roten Flanke des ($F = 1 \rightarrow F' = 2$)-Übergangs.

starker Fokussierung (z. B. Teleskop mit 20 mm und 60 mm Linse) Ausschaltzeiten von 30–40 μs erreichen, mit den großen Verschlüssen etwa 500 μs . Das Öffnen der Verschlüsse benötigt wegen der Federmechanik etwas mehr Zeit. Neben der Schaltzeit sind die Schwankungen des Schließzeitpunktes während des Betriebs wichtig. Es zeigte sich, dass bei dem Relais mit einer Unsicherheit von $\pm 15 \mu\text{s}$ gerechnet werden muss, während die großen Verschlüsse Schwankungen von bis zu $\pm 500 \mu\text{s}$ aufweisen. Die Zeit zwischen der Ansteuerung und dem tatsächlichen Öffnen beträgt bei dem Relais 1,5 ms und bei den Irisblenden 20 ms. Insbesondere macht sich eine Hysterese bemerkbar, die bewirkt, dass diese Verzögerung vom Zeitpunkt des letztmaligen Öffnens abhängig ist. Das macht eine genaue Abstimmung der zeitlichen Ansteuerung der Verschlüsse auf den jeweiligen Experimentzyklus erfordert. Angesteuert werden die Verschlüsse von einer Schalteinheit, die mittels TTL-Signal programmiert wird und $\pm 24 \text{ V}$ ausgibt.

4.2 Abbildungssystem und -auswertung

Nach dem Lambert-Beer-Gesetz wird ein Lichtstrahl beim Durchlaufen eines absorbierenden Mediums exponentiell abgeschwächt:

$$I(x, y) = I_0(x, y)e^{-\alpha z},$$

wobei α der Absorptionskoeffizient des Mediums ist. Für eine Atomwolke mit einer gegebenen Dichteverteilung $n(x, y, z)$ lautet die Intensitätsverteilung des Lichts hinter der Wolke

$$I(x, y) = I_0(x, y)e^{-\sigma \int n(x, y, z) dz}. \quad (4.1)$$

Der Wirkungsquerschnitt σ_π eines Atoms beim Beleuchten mit linear polarisiertem Licht ist nach Mittelung über alle möglichen π -Übergänge im Falle von Rubidium gegeben durch [Die01]:

$$\sigma_\pi = \frac{7}{15} \frac{3\lambda^2}{2\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\Delta}{\Gamma}\right)^2}.$$

Aus (4.1) ist ersichtlich, dass die Bestimmung der Intensität vor und hinter der Atomwolke ausreicht, um die über z -Richtung integrierte Dichteverteilung zu erhalten:

$$\int n(x, y, z) dz = -\frac{1}{\sigma_\pi} \ln \frac{I(x, y)}{I_0(x, y)} = \frac{1}{\sigma_\pi} D(x, y). \quad (4.2)$$

$D(x, y)$ wird als optische Dichte bezeichnet. Durch Integration in x - und y -Richtung erhält man die Gesamtatomzahl.

Der Abbildungslaser wird hinter der polarisationserhaltenden Faser mit einem Objektiv auf einen $(1/e^2)$ -Durchmesser von 11 mm aufgeweitet. Der Strahl ist linear polarisiert und hat eine Gesamtleistung von 130 μW . Daraus ergibt sich eine Intensität im Strahlzentrum von 45 $\mu\text{W}/\text{cm}^2$. Diese liegt deutlich unterhalb der Sättigungsintensität von Rubidium ($I_{\text{Sat}} = 1,6 \text{ mW}/\text{cm}^2$), so daß der Absorptionskoeffizient α bei der Auswertung intensitätsunabhängig ist. Die Belichtungszeit beträgt 150 μs . In dieser Zeit streut ein Atom, das mit maximaler Intensität beleuchtet wird, 75 Photonen. Der Strahlungsdruck erzeugt eine Beschleunigung von 3000 m/s^2 und bewegt das Atom während der Belichtungszeit 30 μm entlang des Abbildungsstrahls. Der Schattenwurf der Atome wird über eine 1:1,2 Abbildung durch einen Achromaten ($f = 120 \text{ mm}$) mit 5 cm Durchmesser auf eine CCD-Kamera (Hitachi, KP-M2) abgebildet. Rein rechnerisch ergibt sich aus Abstand und Durchmesser des Achromaten ein Auflösungsvermögen von 8 μm . Die tatsächliche Auflösung ist aufgrund von Öffnungsfehlern und Elementen, die den Strahlengang am Rand einschränken, geringer und liegt bei 15–20 μm . Die verwendete CCD-Kamera besitzt 740×560 Pixel mit einer Größe von $8,6 \times 8,3 \mu\text{m}$. Bei voller Beleuchtung durch den Abbildungslaser sammelt ein Pixel der CCD-Kamera 40000 Photonen auf. Durch das Schrotrauschen der Photonen entsteht ein Fehler von 0,5 Prozent, der bei einer Bildtiefe von 8 bit ungefähr einer Graustufe entspricht. Der elektronische Verschluss der Kamera setzt eine Grenze für die Mindestbelichtungszeit von 1 ms, so dass die erforderliche Belichtungszeit von 150 μs durch den EOM (vgl. Abschnitt 4.1.5) vorgegeben wird. Die Kamera ist über eine Framegrabber-Karte (Eltec, PC-Eye 1) mit einem PC verbunden. Durch ein Tiggersignal wird sowohl der Kameraverschluss geöffnet als auch dem Rechner das Signal zum Auslesen des Bildes gegeben. Die Auswertung der Bilder erfolgt mit einer selbstentwickelten Software [Rud02].

Für eine Absorptionaufnahme werden drei Bilder hintereinander im zeitlichen Abstand von 400 ms aufgenommen. Zuerst wird ein Bild mit Atomen (Signalbild S), dann eines unter gleichen Bedingungen aber ohne Atome (Untergrundbild U) und schließlich eines ohne Atome bei ausgeschaltetem Abbildungslaser (Offsetbild O) aufgenommen. Entsprechend Gleichung (4.2) ergibt sich für die in Strahlrichtung

integrierte Atomzahl pro Pixel

$$\int n(x, y, z) dz \Delta x \Delta y = -\frac{1}{\sigma_\pi} \ln \frac{S - O}{U - O} \Delta x \Delta y$$

und für die Gesamtatomzahl

$$N = \iiint n(x, y, z) dx dy dz = -\frac{1}{\sigma_\pi} \sum_x \sum_y \ln \frac{S - O}{U - O} \Delta x \Delta y.$$

Durch die Aufteilung des Abbildungslasers in zwei Strahlen kann die Wolke gleichzeitig von zwei Richtungen abgebildet werden.

4.3 Vakuumaufbau

Alle Komponenten für die Erzeugung der Magnetfelder — Spulen, Drähte und Mikrostruktur — sowie die thermische Atomquelle und die Halterung befinden sich innerhalb der Vakuumkammer. Dies erfordert nicht nur äußerste Sorgfalt bei der Auswahl der Materialien und der Montage sondern auch eine genaue Planung der Wärmeerzeugung und Wärmeabfuhr. Bei unserem Aufbau gelang es, all dies zu kombinieren, ohne große Kompromisse bei der Leistungsfähigkeit der Apparatur eingehen zu müssen. Dies zeigt sich unter anderem dadurch, dass die Lebensdauer der gespeicherten Atome in der Falle über 100 s erreichen können [For00]. Gleichzeitig ist die Gesamtwärmeproduktion im Vergleich zu konventionellen Apparaturen äußerst gering. Es werden deutliche geringere Ströme für die Spulen benötigt und diese können wegen ihrer geringen Windungszahl schneller an- und ausgeschaltet werden.

4.3.1 Mikrostruktur

Die Mikrostruktur (siehe Abb. 4.10) besteht aus sieben parallelen Leiterbahnen mit verschiedenen Breiten: 30 μm , 11 μm , 3 \times 3 μm , 11 μm und 30 μm . Der Abstand zwischen den Bahnen beträgt nominal 1 μm und ihre Länge 25 mm. Die Höhe der galvanisierten Kupferbahnen liegt je nach Galvanisierungscharge zwischen 1,5 μm und 2,5 μm . Als Substrat wurde gesintertes, poliertes Al_2O_3 mit einer Dicke von 630 nm verwendet. Die ausgesägten Strukturen haben eine Abmessung von 2 \times 25 mm, und an beiden Enden der Mikrostruktur befinden sich sieben Kupferflächen (300 \times 300 μm), an denen die Mikrostruktur kontaktiert wird. Die Mikrostruktur wurde auf die maximal erreichbaren Stromdichten in den einzelnen Leiterbahnen getestet. Es ergab sich für die 30 μm Bahn eine kritische Stromdichte von 3,1 $\times 10^6$ A/cm², für die mittlere Breite einen Wert von 4,8 $\times 10^6$ A/cm² und für die 3 μm Bahn eine maximale Stromdichte von 6,5 A/cm². Dies entspricht Stromstärken von 1,5, 0,5 und 0,3 A. Die Mikrostruktur sowie der Herstellungsprozess werden in [Sch01] und [For02c] genau beschrieben.

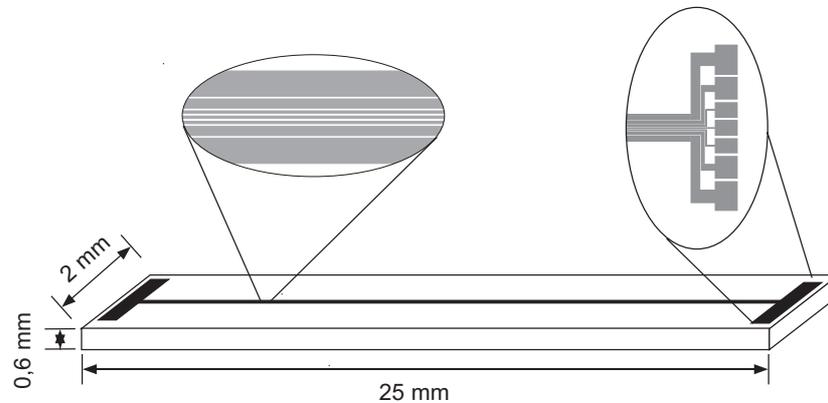


Abbildung 4.10: Die Mikrostruktur besteht aus sieben parallelen Kupferleiterbahnen mit 3, 11 und 30 μm Breite. Das Substrat ist aus keramischem Al_2O_3 . An beiden Seiten befinden sich sieben Kupferflächen, an denen die Leiter kontaktiert werden.

4.3.2 Spulen und Drähte

Die Mikrostruktur ist in einer Anordnung aus 2 Spulenpaaren und zwei Drähten implementiert. In Abb. 4.11 sind alle Komponenten dargestellt. Das erste Spulenpaar (die „MOT-Spulen“) dient zum Betrieb der magnetooptischen Falle. Die beiden Spulen haben je 130 Windungen, einen Durchmesser von 54 mm, eine Bohrung mit 20 mm Durchmesser und sind in einem gegenseitigen Abstand von 40 mm montiert. Für alle Spulen wurde Kapton-Draht mit 0,9 mm Durchmesser verwendet. Sie werden von Stromquellen mit ± 3 A betrieben und erzeugen bei voller Leistung einen Gradienten von 45 G/cm. Dabei wird bei einem Widerstand der MOT-Spulen von $2,7\Omega$ eine Leistung von je 24 W dissipiert. Das zweite Spulenpaar, die „Transfer-Spulen“, hat eine Entfernung von 33 mm zu den MOT-Spulen, besitzt je 80 Windungen und hat einen Abstand zwischen beiden Spulen von 20 mm. Bei einem Strom von 3 A erzeugt es einen Gradienten von 58 G/cm bei 17 W Wärmeleistung. Vertikal durch die Transferspulen verläuft im Abstand von 4 mm zum Symmetriezentrum ein Kupferdraht mit einem Durchmesser von 2 mm, der so genannte „Ioffe-Draht“. Er dient zur Erzeugung einer Ioffe-Falle. 3 mm über der Symmetrieebene der Transferspulen ist horizontal ein Kupferbalken mit einem quadratischen Querschnitt von 2×2 mm in einem Kühlkörper elektrisch isoliert eingelassen. An dessen Unterseite ist die Mikrostruktur mit Wärmeleitkleber aufgeklebt (siehe auch Abb. 5.10). Seitlich an der Mikrostruktur ist ein Kupferdraht mit einem Durchmesser von 90 μm aufgeklebt, der zu Referenzmessungen dient. Der horizontale Balken, im Weiteren Kompressionsdraht genannt, wird zum einen für den magnetischen Transfer und zum anderen für die Erzeugung des Kompressionsfelds an der Mikrostruktur benötigt. Zusätzlich befindet sich an beiden Enden der Mikrostruktur eine Drahtschleife mit zwei Windungen („Pinch-Spule“).

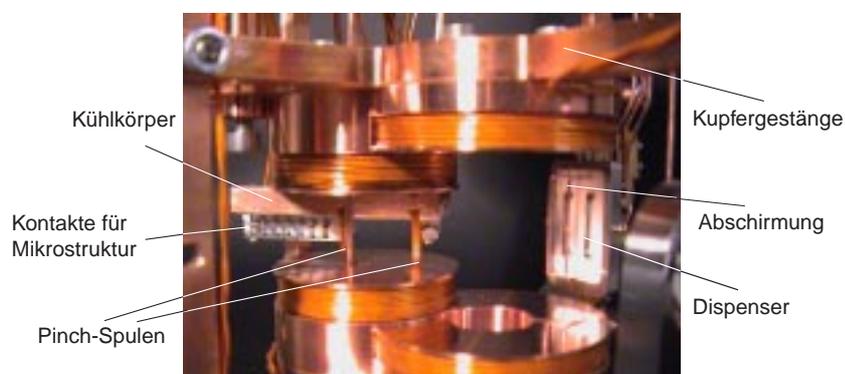
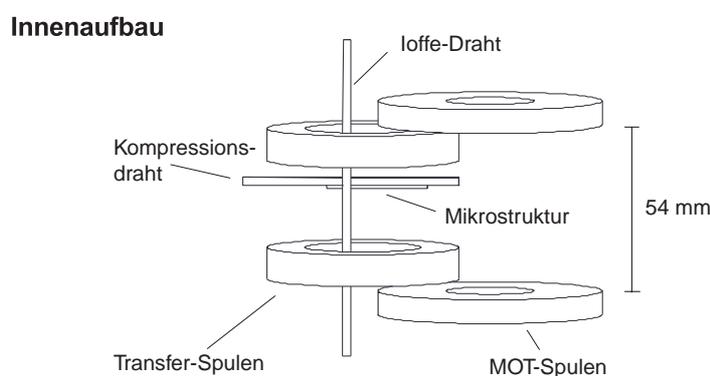


Abbildung 4.11: Vakuuminnenbau. Die gezeigten Komponenten werden in Abschnitt 4.3.2 erläutert.

4.3.3 Vakuumsystem

Das Experimentieren mit ultrakalten Atomen erfordert ein Vakuum von besser als 1×10^{-9} mbar. Dieser sehr niedrige Druck ist notwendig, um die Stoßrate zwischen den ultrakalten Atomen und Restgasatomen zu reduzieren. Die Kühlung zum Bose-Einstein-Kondensat nimmt zwischen 2 s [Hän01] und 70 s [And95] in Anspruch, und mindestens so lange müssen die Atome in der Falle gespeichert werden können. Bei einem Druck von 1×10^{-11} mbar beträgt die Lebensdauer der gespeicherten Atome über 100 s. Mit der hier eingesetzten Vakuumanlage wird ein Basisdruck von $1,5 \times 10^{-11}$ mbar erreicht, der gute Voraussetzungen für das evaporative Kühlen bietet. Die Vakuumanlage ist in Abb. 4.12 gezeigt. Der Rezipient, an dessen oberem Flansch der Innenaufbau montiert ist, besitzt für den optischen Zugang zwei CF 160 Flansche und 4 CF 40 Flansche, die seitlich angebracht sind. An den Rezipienten schließt sich eine Titansublimationspumpe an, die bei Kühlung mit flüssigem Stickstoff eine Pumpleistung von 2000 l/s entwickelt. An der Sublimationspumpe ist die Ionenzerstäuberpumpe mit 80 l/s Pumpleistung montiert.

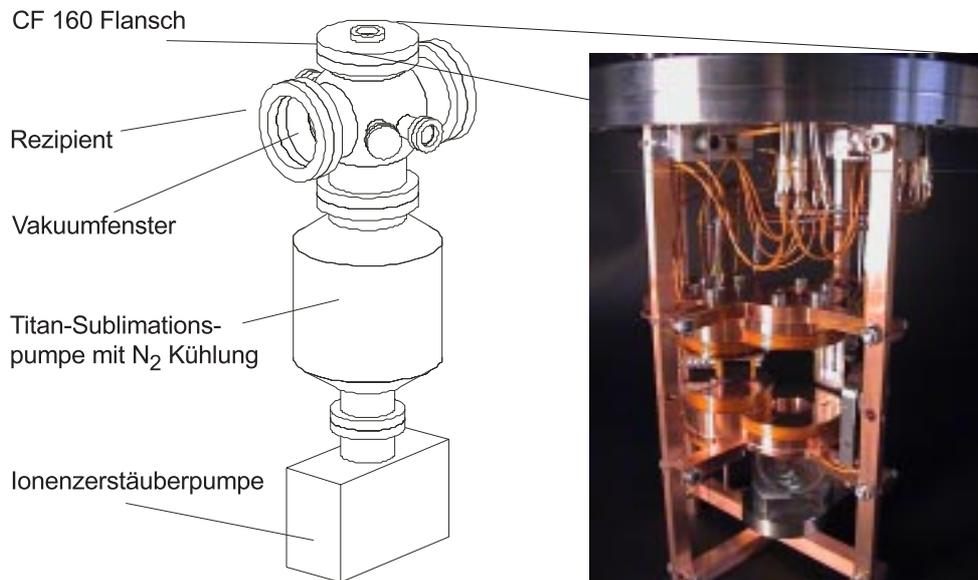


Abbildung 4.12: Vakuumsystem.

4.4 Experimentsteuerung

An die Experimentsteuerung werden die folgenden Anforderungen gestellt. Die Laser müssen mikrosekundengenau geschaltet, verstimmt, und stabilisiert werden. Außerdem müssen die Magnetfelder, die für die verschiedenen Schritte des Experiments verändert oder geschaltet werden, mittels analoger Ansteuerung programmiert werden. Der Bedarf dieses Experiments liegt bei 20 bis 30 digitalen Ausgängen mit TTL-Logik und zwischen 12 und 16 analogen, bipolaren Ausgängen mit 16 bit Auflösung. Ausgewählt wurde das AD-Win System der Firma Keithley (AD-Pro). Das modulare System enthält eine Prozessoreinheit (40 MHz RISC-Prozessor mit eingebautem Echtzeitzähler, 16 MB Arbeitsspeicher), eine Schnittstelle mit serieller Verbindung zu einem PC, sowie sechs Steckplätze für analoge und digitale Ein- bzw. Ausgangskarten. Die digitale I/O-Karte besitzt 32 Ausgänge (wahlweise auch als Eingänge programmierbar) mit TTL-Standard bei Schaltzeiten unterhalb einer Mikrosekunde. Die beiden verwendeten analogen Karten besitzen je 8 Ausgänge mit 16 bit Auflösung und einer einstellbaren Ausgangsspannung von ± 10 V, ± 5 V oder 0–10 V. Alle Ausgänge haben werksseitig einen 100 kHz Tiefpass nachgeschaltet, der die Schaltzeit auf 10 μ s begrenzt. Dies stellt im allgemeinen keine Einschränkung dar, da alle analog programmierten Geräte dieses Experiments längere Schaltzeiten haben. Der Prozessrechner arbeitet völlig autonom. Über den PC werden die Programme nur übertragen, gestartet und gestoppt. Außerdem lassen sich eine Reihe von Variablen über die serielle Verbindung während des Betriebs programmieren. Die Echtzeitsteuerung geschieht ausschließlich durch den Prozessrechner und dessen internen Zähler. Der Prozessor ist in der Programmiersprache AD-Basic, die speziell

für dieses System entwickelt wurde, frei programmierbar.

Mit den analogen Ausgängen werden die Stromquellen angesteuert, die Spulen, Drähte und Mikrostruktur versorgen. Die Stromquellen (HighFinesse, BCS-Serie) sind bipolar und zeichnen sich durch ein extrem niedriges Rauschen aus. Ihre Strombereiche sind ± 1 A (20 V), ± 3 A (15 V), ± 10 A (5 V) und ± 20 A (2 V). Die kürzesten Schaltzeiten für die angeschlossenen Elemente betragen für die Leiterbahnen der Mikrostruktur und die Drähte bei maximaler Ansteuerung 40–60 μ s und für die Spulen 150 μ s. Die Stromquellen können zusätzlich über einen TTL Eingang ausgeschaltet werden. Dieses Prinzip wird benutzt, um bei Flugzeitmessungen alle Magnetfelder auf einfache Weise zeitgleich auszuschalten. Dazu wird ein TTL-Puls auf einen selbst entwickelten Impuls-Generator gegeben, der 16 Ausgänge besitzt, die mit einzeln programmierbaren Verzögerungszeiten den TTL-Puls weitergeben. Über diese Pulse werden die Stromquellen entsprechend ihrer Ausschaltzeit synchron ausgeschaltet. Mit den digitalen Ausgängen werden die mechanischen Verschlüsse für die Laser gesteuert.

Kapitel 5

Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten in der Mikrofalle

Dieses Kapitel beschreibt die experimentellen Schritte bei der Erzeugung der Bose-Einstein-Kondensate. Neben den verwendeten Standardtechniken wie der magneto-optischen Falle, dem optischen Pumpen in einen magnetisch speicherbaren Zeemanzustand und dem evaporativen Kühlen befasst sich das Kapitel ausführlich mit den technischen Neuerungen, die bei dieser Apparatur eingeführt wurden. Dies ist zum einen die Verwendung so genannter Dispenser als thermische Quelle für Rubidiumatome zum Laden der MOT. Durch sie vereinfacht sich der experimentelle Aufwand im Vergleich zu herkömmlichen Apparaturen beträchtlich. Dieses Prinzip wurde erstmals von Fortágh *et al.* [For98b] zum direkten Laden einer MOT eingesetzt. Hier wurde das Konzept weiterentwickelt und es konnte gezeigt werden, dass diese einfache Technik auch im Ultrahochvakuumbereich bei Drücken von besser 1×10^{-11} mbar einsetzbar ist. Des Weiteren wurde eine Methode zum adiabatischen Transfer der Atome in die Mikrofalle entwickelt, um nach der Präparation einer großen Atomwolke diese zu komprimieren und in die Mikrofalle zu überführen. Die genaue Beschreibung des Funktionsprinzips und dessen experimentelle Umsetzung nehmen einen großen Teil dieses Kapitels ein. Daran anschließend wird der experimentelle Nachweis der Bose-Einstein-Kondensation beschrieben und die erzeugten Kondensate charakterisiert.

5.1 Die magneto-optische Falle

Die Entwicklung der Laserkühlung [Hän75, Win79, Dal89, Chu86, Raa87], wurde 1997 mit der Verleihung des Nobelpreises an Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji und William D. Phillips ausgezeichnet. Sie stellte den Durchbruch bei der Erzeugung von Atomwolken mit einer Temperatur von weniger als einem Millikelvin dar.

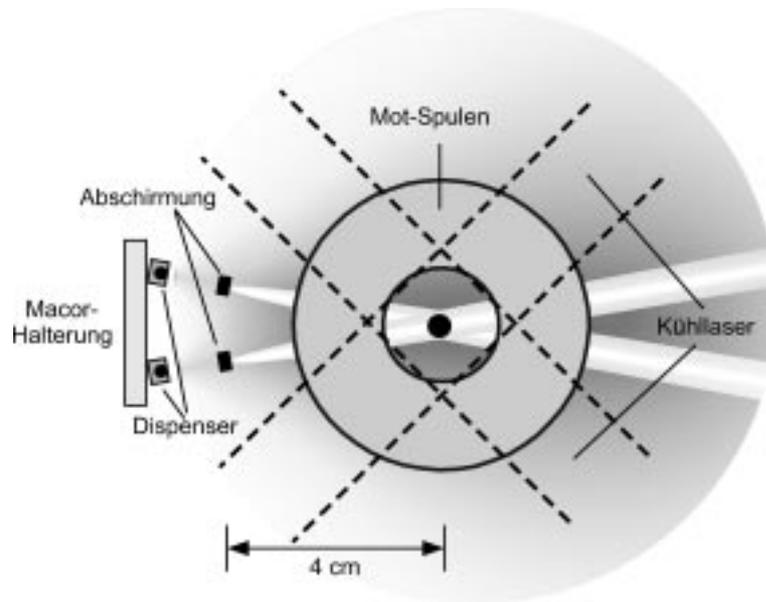


Abbildung 5.1: Aufbau der MOT. Die gestrichelten Linien markieren die horizontalen Strahlen des Kühllasers. Die vertikalen Strahlen werden durch die Öffnung der MOT-Spulen geführt.

Durch die MOT konnte der experimentelle Aufwand zum Kühlen der Atome derart reduziert werden, dass nur 8 Jahre nach der erfolgreichen ersten Inbetriebnahme einer magnetooptischen Falle im Jahr 1987 [Raa87] die Bose-Einstein-Kondensation von Rubidium, Lithium und Natrium [And95, Bra95, Dav95] gelang. Seither ist die MOT ein unverzichtbares Instrument zur Präparation ultrakalter Atome geworden. Mit ihr können Atomwolken mit einer Temperatur von einigen $10\ \mu\text{K}$ und bis zu 10^{10} Atomen erzeugt werden. Für eine detaillierte Darstellung der theoretischen Grundlagen sei auf die Arbeit von Adams und Riis [Ada97] verwiesen.

Abb. 5.1 zeigt schematisch den Aufbau unserer MOT. Die sechs Laserstrahlen des Kühllasers mit überlagertem Rückpumplaser überlappen sich im Zentrum eines sphärischen Quadrupolfeldes, das durch die MOT-Spulen erzeugt wird. In vertikaler Richtung beträgt die Intensität in der Strahlmitte $7,8\ \text{mW}/\text{cm}^2$ und am Strahlrand $3,3\ \text{mW}/\text{cm}^2$ (vgl. Abschnitt 4.1.3). Die vier horizontalen Strahlen haben wegen des schwächeren Magnetfeldgradienten die halbe Leistung. Der freie optische Zugang für alle sechs Strahlen beträgt mindestens $2\ \text{cm}$. Dadurch entsteht ein Eingangsbereich für die Atome mit einem Durchmesser von $2\ \text{cm}$. Atome, die langsamer als eine kritische Geschwindigkeit — die so genannte Eingangsgeschwindigkeit — sind und den Eingangsbereich durchfliegen, werden von den Laserstrahlen abgebremst und sammeln sich im Zentrum der MOT in einer wenige Millimeter großen Wolke.

5.1.1 Rubidiumdispenser als thermische Atomquelle

In einer Entfernung von 5 cm zum Zentrum der MOT befinden sich zwei Dispenser im gegenseitigen Abstand von 1 cm. Die Rubidiumdispenser werden von der Firma SAES Getters hergestellt (alkali metal dispenser). Sie bestehen aus einem schmalen Edelstahlbehälter mit 1×1 mm Querschnitt und enthalten pro Zentimeter Länge 3,7 mg Rubidium in Form von Rubidiumchromat Rb_2CrO_4 . Die beiden stabilen Isotope ^{85}Rb und ^{87}Rb kommen in ihrer natürlichen Isotopenverteilung von 70:30 vor. Zugemischt ist außerdem ein Reduktionsmittel. Durch Widerstandsheizen wird der Dispenser erwärmt. Ab 400°C findet die Dissoziation des Rb_2CrO_4 statt, wodurch elementares Rubidium gebildet wird. Gleichzeitig geht der Öffnungsschlitz des Edelstahlbehälter, der das Gemisch enthält, auf und Rubidiumatome werden emittiert. Die beiden Dispenser werden mit gegenläufigen Strömen versorgt, so dass sich am Ort der MOT die entstehenden Magnetfelder während des Betriebs teilweise kompensieren.

Kontinuierlicher Betrieb

Prinzipiell lassen sich Dispenser auf zwei Weisen verwenden. Im kontinuierlichen Betrieb fließen 4–5 A Strom durch die Dispenser. Der Rubidiumpartialdruck in der Vakuumkammer erhöht sich je nach Stromstärke auf $2 \times 10^{-11} - 2 \times 10^{-10}$ mbar. Damit steigt die Laderate der MOT, gleichzeitig steigt aber auch die Verlustrate durch Stöße mit schnellen, nicht fangbaren Rb-Atomen. Die sich einstellende Gleichgewichtsatomzahl der MOT hängt nur von den charakteristischen Größen der MOT ab und ist unabhängig vom Rubidiumpartialdruck [Ada97]:

$$N_{\text{MOT}} \propto d^2 v_f^4.$$

Hier ist d der Durchmesser des Einfangbereichs der MOT und v_f ist die Einfanggeschwindigkeit. Bei ausreichender Laserleistung ist $v_f \propto \sqrt{d}$ und für die Gleichgewichtsatomzahl gilt

$$N_{\text{MOT}} \propto d^4. \quad (5.1)$$

Diese Beziehung unterstreicht die Wichtigkeit eines guten optischen Zugangs verbunden mit hoher Laserleistung.

Gepulster Betrieb

Die Ladekurve der MOT ist gegeben durch [For98b]

$$N(t) = N_0 (1 - e^{-\gamma t}),$$

wobei γ die Lebensdauer der gefangenen Atome ist, die aufgrund von Verlustprozessen durch Stöße mit dem Hintergrundgas begrenzt ist. Die Ladezeit der MOT ist somit identisch mit der Lebensdauer der gespeicherten Atome. Um bei langer Lebensdauer lange Ladezeiten zu verhindern bevorzugt man gepulste Atomquellen wie

Zeemanabbremsler [Pro85] oder Doppel-MOT Systeme [Mya96]. Beiden gemeinsam ist ein hoher apparativer Aufwand. Bei unserem Experiment fungiert der Dispenser als schaltbare Atomquelle. Zu Beginn eines jeden experimentellen Zyklus werden die Dispenser für 12s mit einem Strom von 6,6 A Strom geheizt. Die Temperatur des Dispensers steigt, bis am Ende des Strompulses der Dispenser leichte Rotglut zeigt. Eingefangen werden einerseits Atome, die direkt aus dem Atomstrahl stammen (Abb. 5.1), und andererseits Atome aus dem an den Wänden thermalisierten Hintergrundgas. Ein genaues quantitatives Verhältnis dieser beiden Mechanismen ist schwer zu bestimmen. In Abb. 5.2a ist der zeitliche Verlauf des Ladeprozesses dargestellt. Die lokale Druckerhöhung wird von der Vakuummesszelle nicht registriert, macht sich jedoch durch eine verkürzte Lebensdauer unmittelbar nach dem Dispenserpuls bemerkbar. Abb. 5.2b zeigt die Lebensdauer der gespeicherten Atome während der Ladephase. Für diese Messung wurde eine magnetisch gespeicherte Atomwolke während eines Dispenserpulses beobachtet. Nach dem Ausschalten des Dispenserstromes wird die MOT für weitere 13s betrieben. In dieser Zeit wird der ursprüngliche Druck und die Lebensdauer wieder hergestellt.

Die Drahtabschirmung

In Abb. 5.1 ist jeweils 1 cm vor den Dispensern ein Draht mit 1 mm Durchmesser eingezeichnet (vgl. auch Abb. 4.11). Die Drähte sind so justiert, dass die emittierten Atome durch den Einfangbereich der MOT fliegen können, gleichzeitig aber der direkte Weg zu den in der MOT gefangenen Atomen verdeckt ist. Dies sorgt dafür, dass direkte Verluste durch den Atomstrahl (nicht solche durch das Hintergrundgas) reduziert werden. Die zweite, wichtigere Aufgabe besteht darin, zu verhindern, dass nach dem Ausschalten der Dispenser Restgasatome und chemische Nebenprodukte, die emittiert werden, die gefangenen Atome aus der MOT entfernen. Ohne die Abschirmung wurde nach Ausschalten der Dispenser ein anfänglicher, schneller Verlustprozess beobachtet, der erst nach einer Abkühlzeit von 2s in den langsamen, durch das Hintergrundgas bestimmten Verlauf überging.

Vakuumeigenschaften

Die Verwendung von Dispensern im Ultrahochvakuum ($p < 1 \times 10^{-11}$ mbar) stellt gewisse Anforderungen an ihren Einbau und ihre Handhabung. Beim Einbau ist darauf zu achten, dass nur fabrikneue Dispenser verwendet werden. Ein einmal benutzter Dispenser wird an Luft durch Einlagerungen schnell kontaminiert und kann nicht wiederverwendet werden. Da der Dispenser während des Betriebes einige hundert Grad Celsius warm wird, muss er nach dem erstmaligen Abpumpen wenigstens einmal bei dieser Temperatur gesondert ausgeheizt werden. Dies geschieht am besten nach dem Ausheizen der Kammer durch wiederholte, stärker werdende Strompulse. Der Druck kann dabei bis auf $p \approx 1 \times 10^{-6}$ mbar ansteigen, erholt sich jedoch sehr rasch wieder. Am Ende der Prozedur können dauerhaft bis zu 4 A fließen ohne dass das Vakuum beeinträchtigt wird. Zu beachten ist, dass bei gepulstem Betrieb die

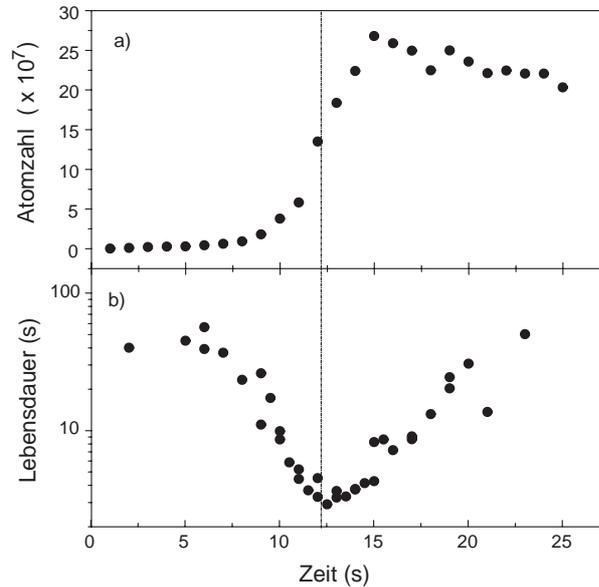


Abbildung 5.2: Atomzahl der MOT (a) und Lebensdauer der gespeicherten Atome (b) während eines Dispenserpulses. Der senkrechte Strich markiert das Ende des Strompulses nach 12 s. Der Strom beträgt 6,6 A. Nach weiteren 13 s werden die Atome magnetisch gespeichert.

Schaltintervalle nicht beliebig kurz gehalten werden dürfen, sonst geht der gepulste Betrieb in einen kontinuierlichen Betrieb über. Die Gesamtdauer des Experimentzyklus von 60 s gewährleistet jedoch ausreichend lange Abkühlzeiten für den Dispenser. Es braucht etwa 20 Zyklen bis ein Gleichgewichtszustand mit konstanter Atomzahl erreicht ist. Dann kann die Anlage mehrere Stunden betrieben werden.

5.1.2 MOT-Betrieb und Laden der Magnetfalle

Die MOT wird mit einer Laserverstimmung von 24 MHz bei einem axialen Magnetfeldgradienten von 16 G/cm betrieben. Die höchste erreichte Atomzahl beträgt 5×10^8 . Unter normalen experimentellen Bedingungen werden $2 \times 10^8 - 3 \times 10^8$ Atome in die MOT geladen. Der Durchmesser der MOT beträgt 3 mm, woraus sich eine mittlere Dichte von $n = 3 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ergibt. Die Temperatur der MOT ist von vielen Parametern abhängig und beträgt unter üblichen Bedingungen 50 μK . Mit einem Wert von ungefähr 5×10^{-7} ist die Phasenraumdicke in der MOT sechs Größenordnungen von dem für die Bose-Einstein-Kondensation benötigten Wert entfernt.

Der Ladevorgang der MOT dauert 25 s, wovon 13 s auf die Zeit nach dem Ausschalten des Dispensers entfallen. In dieser Wartezeit verringert sich die Atomzahl um 20 Prozent (siehe Abb. 5.2a). Am Ende der Haltezeit wird für 10 ms das Polarisationsgradientenkühlen [Dal89] durchgeführt. Dazu wird der Kühllaser um $\Delta = 60 \text{ MHz}$ gegenüber der Resonanz verstimmt, während gleichzeitig das magnetische Quadrupolfeld innerhalb von 5 ms ausgeschaltet wird. Die Atome befinden sich

für weitere 5 ms in dieser optischen Molasse ehe der Kühllaser zusammen mit dem Rückpumplaser ausgeschaltet wird.

Optisches Pumpen

Nach Beendigung des Polarisationsgradientenkühlens befinden sich die Atome in einer statistischen Überlagerung der 5 Zeemanzustände des ($F = 2$)-Grundzustands. Nur der ($m_F = 2$)-Zeemanzustand ist langfristig magnetisch speicherbar, und die Atome müssen optisch in diesen Zustand gepumpt werden. Dies geschieht durch den Umpumplaser (Abschnitt 4.1.5), der resonant mit dem ($F = 2 \rightarrow F' = 2$)-Übergang ist. Er ist zirkular polarisiert und wird senkrecht von oben auf die Atomwolke justiert. Ihm überlagert ist ein Teil des Rückpumpasers ($F = 1 \rightarrow F' = 2$), der dieselbe zirkulare Polarisation besitzt. Zur Vorgabe einer definierten Quantisierungsachse wird ein homogenes Magnetfeld (2 G) in senkrechter Richtung mit Hilfe der beiden MOT-Spulen angelegt.

Der ($m_F = 2$)-Zustand ist für σ^+ -Licht ein Dunkelzustand und die Atomwolke, die zu Beginn des Umpumpprozesses mehrfach optisch dicht ist, wird transparent. Die Leistung des Umpumpasers ($1/e^2$ -Durchmesser 7 mm) beträgt 150 μW und die des Rückpumplichts 500 μW . Der Umpumpprozess dauert 400 μs , wobei der Rückpumplaser 100 μs vor dem Umpumplaser an- und 100 μs nach ihm ausgeht. Geschaltet wird der Umpumplaser mit dem akustooptischen Modulator.

Die magnetisch gespeicherte Wolke

Nach dem optischen Pumpen wird der Strom in den MOT-Spulen innerhalb von 250 μs auf 2,5 A erhöht. 60–80 Prozent der in der MOT gefangenen Atome sind nun magnetisch gespeichert. Die Analyse der Wolke kann wie bei der MOT ebenfalls durch Flugzeitmessungen vorgenommen werden. Bei genauer Kenntnis des Potentials können aus der Dichteverteilung der Atome in der Falle Temperatur, zentrale Dichte und Teilchenzahl bestimmt werden. Nach (4.2) wird bei der Absorptionaufnahme die in Absorptionsrichtung integrierte Dichteverteilung (3.14) gemessen. Kann diese Integration für das jeweilige Potenzial analytisch durchgeführt werden, können die Bilder direkt ausgewertet werden. Für ein sphärisches Quadrupolpotential mit Symmetrieachse in z -Richtung lautet die Dichteverteilung in der Falle

$$n(x, y, z) = \frac{N}{2\pi l^3 (\alpha^2 - 1)^2} \exp \left[-\frac{1}{l} \left(\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + z^2} - z\alpha \right) \right]$$

mit

$$l = \frac{k_B T}{\mu b_z}$$

und

$$\alpha = \frac{mg}{\mu b_z}.$$

Bei einer Abbildung in y -Richtung, ergibt sich für die optische Dichte

$$\frac{1}{\sigma} D_{\text{quadrupol}}(x, z) = \frac{2N}{\pi l^2 (\alpha^2 - 1)^2} \sqrt{\left(\frac{x}{2l}\right)^2 + \left(\frac{z}{l}\right)^2} K_1 \left(\sqrt{\left(\frac{x}{2l}\right)^2 + \left(\frac{z}{l}\right)^2} \right)$$

mit der modifizierten Besselfunktion $K_1(x)$. Analog dazu folgt für ein rein parabolisches Potenzial

$$n(x, y, z) = N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \omega_x \omega_y \omega_z \times \exp \left[- \left(\frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 + mgz \right) / k_B T \right]. \quad (5.2)$$

Die Integration ist einfach und liefert

$$\frac{1}{\sigma} D_{\text{parabol}}(x, z) = N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right) \omega_x \omega_z \times \exp \left[- \left(\frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 + mgz \right) / k_B T \right]. \quad (5.3)$$

Durch die Absorptionsbilder werden Schnitte gelegt, die mit obigen Modellfunktionen angepasst werden. Für Potenziale mit anderer Geometrie muss bei Bedarf eine numerische Auswertung gemacht werden. Tabelle 5.1 gibt die Parameter für die Atomwolke in der MOT, während der optischen Molasse und nach dem magnetischen Speichern an.

	MOT	optische Molasse	magn. gesp. Wolke
Atomzahl	$2-3 \times 10^8$	$2-3 \times 10^8$	$1-2 \times 10^8$
zentrale Dichte	$2-3 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$	$2-3 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$	$2-5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$
berechnete Stoßrate	$3-4 \text{ s}^{-1}$	$2-3 \text{ s}^{-1}$	$4-6 \text{ s}^{-1}$
Temperatur	80–100 μK	30 μK	70–100 μK
Phasenraumdicke	$2-3 \times 10^{-7}$	$5-10 \times 10^{-7}$	$1-2 \times 10^{-7}$

Tabelle 5.1: Typische Parameter der präparierten Startatomwolke

5.2 Der adiabatische Transfer in die Mikrofalle

Durch die Methode des adiabatischen Transfers der Atome in eine Mikrofalle wurde eine Möglichkeit geschaffen, die Atome in einer großvolumigen MOT zu fangen und anschließend auf ein sehr kleines Volumen zu komprimieren. Dies war die Voraussetzung, um Bose-Einstein-Kondensate mit sehr hoher Atomzahl in einer Mikrofalle zu

erzeugen. Dieser Abschnitt behandelt ausführlich diesen Transfer, der in drei Teile gegliedert werden kann. Im ersten Teil (Abschnitt 5.2.1) wird das sphärische Quadrupolpotenzial der MOT-Spulen zwischen die beiden Transferspulen verschoben. Mit Hilfe des senkrechten Drahtes wird dann eine Ioffe-Falle erzeugt (Abschnitt 5.2.2). Schließlich folgt der eigentliche Transfer der Atome in die Mikrofalle durch adiabatisches Umformen dieser Ioffe-Falle (Abschnitt 5.2.3).

5.2.1 Transfer zwischen den Spulenpaaren

Ein magnetisches Quadrupolpotenzial kann durch Anlegen eines homogenen Magnetfelds in jede Raumrichtung verschoben werden. Am Rand des Spulenpaares besitzt der Magnetfeldbetrag in der Symmetrieebene zwischen den Spulen ein Maximum. Über diesen Punkt hinaus kann das Quadrupolpotenzial mit einem homogenen Feld nicht verschoben werden. Erst durch ein zweites, überlappendes Spulenpaar kann das Feldminimum außerhalb des Spulenbereiches verschoben werden. Mit der Wahl des Verhältnisses der Ströme in den zwei Spulenpaaren wandert das Feldminimum zwischen den beiden Spulenpaaren. Dieses einfache Prinzip lässt sich periodisch fortsetzen, so dass das Magnetfeldminimum über eine beliebig weite Strecke transportiert werden kann. In [Gre01] wurde ein solches System eingesetzt, um kalte Atome über eine Strecke von mehr als 20 cm zu transportieren. Dadurch konnte eine differenzielle Pumpstrecke überbrückt werden und die Atome — zunächst bei hohem Partialdruck in einer MOT eingefangen — in eine UHV-Kammer transportiert werden. Der Vorteil dieser Methode liegt in der räumlichen Trennung zwischen der MOT und dem Experimentierbereich und deshalb in einem guten optischen Zugang. Außerdem wird nur eine MOT benötigt und sowohl in [Gre01] als auch bei unserem Experiment konnte auf einen Zeeman-Abbremsler verzichtet werden.

Der Transfer zwischen den Spulenpaaren dauert 1 s. Innerhalb dieser Zeit wird der Strom in den Transferspulen auf 3 A erhöht bevor die MOT-Spulen ausgeschaltet werden. Abb. 5.3 zeigt den Betrag des Magnetfeldverlaufs entlang der Verbindungsachse zwischen den beiden Spulenpaaren zu verschiedenen Zeiten. Damit der Transfer gelingt, müssen die beiden Spulenpaare ineinander greifen, dürfen also nicht zu weit voneinander entfernt sein. Ein Kriterium für den maximal möglichen Abstand erhält man durch folgende Überlegung: Der Feldverlauf eines jeden Quadrupolspulenpaares besitzt außerhalb der Spulen in der Symmetrieebene einen Wendepunkt (siehe Abb. 5.4a). Legt man an diesen Punkt eine Tangente an die Kurve an, so schneidet diese die Achse in dem Punkt P . Der Punkt P ist die äußerste Position für das Zentrum eines unendlich ausgedehnten Quadrupolfelds, wenn ein Transfer zwischen den beiden Quadrupolen gelingen soll. Für das zweite Spulenpaar (äußerster Abstand P') lässt sich dieselbe Überlegung umgekehrt anwenden, und als Bedingung für den Abstand d der beiden Spulenpaare folgt

$$d < d_{\max} = \min(P, P').$$

In Abb. 5.4 wird dieses Prinzip noch einmal genauer erklärt. Der Verlauf des Ma-

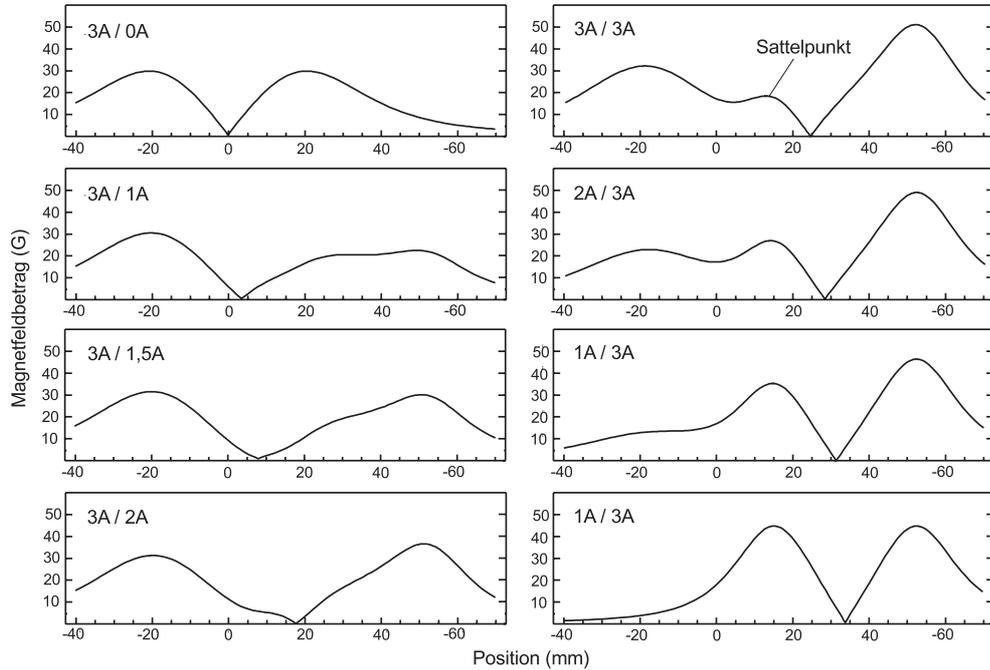


Abbildung 5.3: Verlauf des Magnetfeldbetrags auf der Verbindungsline zwischen den beiden Spulenpaaren während des Transfers. In der linken oberen Ecke sind die Ströme in den MOT-Spulen bzw. Transferspulen angegeben. Die Höhe des Sattelpunkts, der im rechten oberen Bild markiert ist, beträgt bei seiner Entstehung 7 G. Das Symmetriezentrum der MOT-Spulen befindet sich bei $x = 0$ mm, das der Transferspulen bei $x = 33$ mm.

gnetfeldbetrags eines Spulenpaares ist nicht genau linear, und es ergeben sich leichte Abweichungen von der obigen Formel. Für ein Helmholtzspulenpaar (Spulenabstand = Spulenradius = R) folgt

$$d_{\max} = 1.72 \times R.$$

Die Potenzialtiefe während des Transfers wird durch die Höhe des Sattelpunkts, der in Abb. 5.3 im rechten oberen Bild markiert ist, bestimmt. Durch größere Ströme oder kleineren Abstand d kann er erhöht werden. Bei unserem Transfer beträgt seine Höhe 7 G was einer Temperatur von 700 μK entspricht.

Für den Transfer werden die Ströme so variiert, dass die dritte Ableitung der Bewegung des Potenzialminimums stetig ist. Wird ein lineares Quadrupolpotenzial beschleunigt, spüren die Atome im Ruhesystem ein verkipptes Potenzial, analog zur Potenzialverkipfung in vertikaler Richtung durch das Gravitationsfeld. Um ein Aufheizen der Atomwolke durch nichtadiabatische Veränderungen des Fallenpotenzials zu verhindern, muss daher die Beschleunigung stetig verändert werden. Dies wird am einfachsten durch einen harmonischen Verlauf der Bewegung sichergestellt. Der Transfer wurde getestet, indem eine Atomwolke hin und zurück transportiert wurde und die Temperatur vorher und nachher verglichen wurde. Bei Transferzeiten unterhalb von 500 ms konnte ein Heizeffekt festgestellt werden.

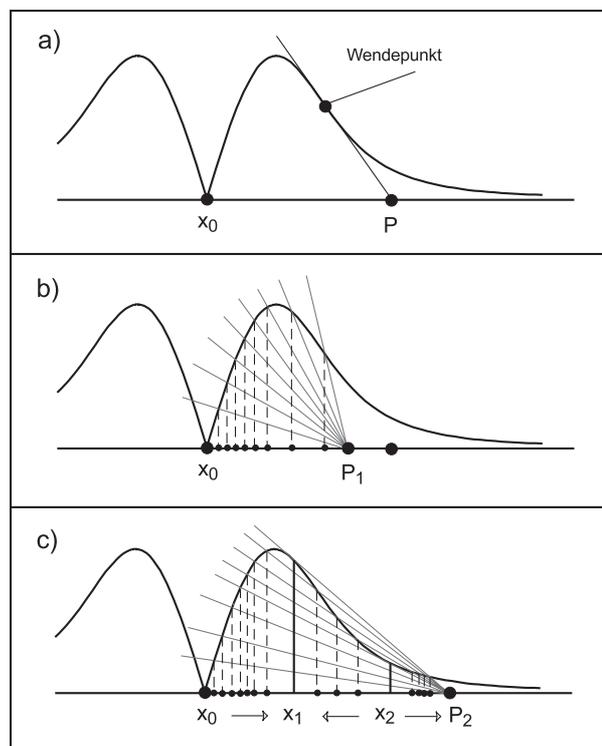


Abbildung 5.4: Bedingung an den Abstand zweier Spulenpaare für einen adiabatischen Transfer. a) Verlauf des Magnetfeldbetrags eines Spulenpaares (der Schnitt liegt in der Symmetrieebene des Spulenpaares, das Zentrum des Quadrupolpotenzials ist bei x_0). Eingezeichnet ist der Wendepunkt des Magnetfeldbetrags. Die Tangente an ihn schneidet die Achse ($B = 0$) im Punkt P . b) Ein Quadrupolfeld, dessen Ursprung im Punkt P_1 liegt, wird dazugeschaltet (skizziert durch die Geraden, die aus P_1 kommen). Das Feld ist so gepolt, dass sich beide Felder bei den Schnittpunkten kompensieren. Die schwarzen Kreise geben den Verschiebung dieses Schnittpunkts und damit des Fallenzentrums an. c) Der Punkt P_2 liegt hier rechts von Punkt P , so dass der Transfer nicht mehr möglich ist: Das Fallenzentrum (Punkt x_0) lässt sich zwar noch verschieben, doch es bildet bei Punkt x_1 eine Ioffe-Falle. Gleichzeitig wird zu Beginn des Transfers links von P_2 eine Ioffe-Falle erzeugt, die ab einem kritischen Gradienten in zwei Minima aufspaltet (Punkt x_2 rechts). Das linke Minimum vereinigt sich mit dem ursprünglichen Minimum des Spulenfelds zu der Ioffe-Falle. Das rechte wandert nach rechts in das Zentrum des zweiten Quadrupolfelds.

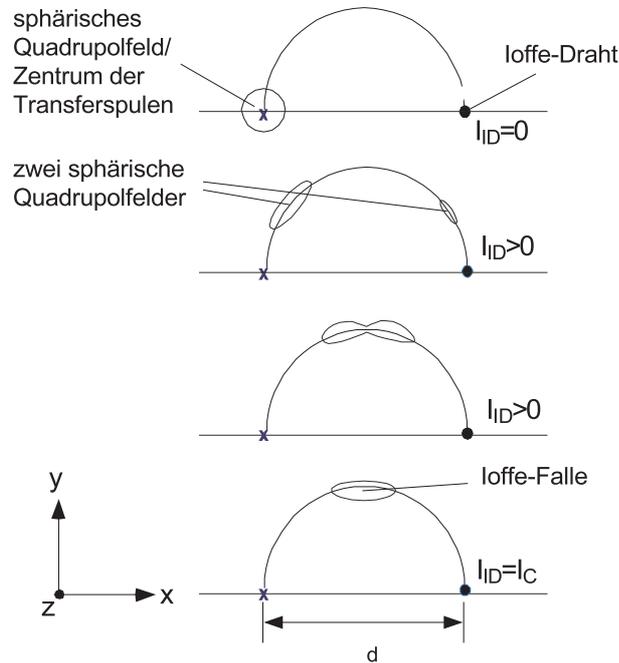


Abbildung 5.5: Erzeugung einer Ioffe-Falle. Dargestellt sind die Positionen der beiden beteiligten Quadrupolfelder in Abhängigkeit des Stromes im Ioffe-Draht. Der Strom I_{ID} nimmt in der Bildsequenz von oben nach unten zu. Das rechte Quadrupolfeld wandert aus der Drahtoberfläche heraus, bewegt sich auf einer Kreisbahn, und vereinigt sich bei einem kritischen Strom I_c mit dem linken. Es entsteht eine Ioffe-Falle, deren Position durch die Geometrie der Anordnung festgelegt ist.

5.2.2 Erzeugung einer Ioffe-Falle

Zur Erzeugung einer Ioffe-Falle ist in das Transferspulenpaar der senkrechte Ioffe-Draht mit 2 mm Durchmesser eingesetzt. Er ist um 4 mm zum Symmetriezentrum der Spulen versetzt. Durch Anlegen eines Stromes wird zusätzlich zu dem sphärischen Quadrupolfeld im Symmetriezentrum der Spulen ein zweites Quadrupolfeld erzeugt, das sich mit wachsendem Strom aus dem Draht heraus bewegt und sich bei einem kritischen Strom I_c mit dem sphärischen Quadrupolfeld vereint. Beide Fallenminima wandern dabei auf einem Halbkreis und treffen sich auf halber Strecke. Die entstehende Magnetfeldkonfiguration ist die einer Ioffe-Falle. Abb. 5.5 zeigt die Position der beiden Minima bei zunehmendem Strom im Ioffe-Draht. Bei vorgegebenem Gradienten b_z und Drahtabstand d ergibt sich der benötigte kritische Strom für die Vereinigung beider Fallenminima zu

$$I_c = \frac{\pi}{2\mu_0} b_z d^2.$$

Für größere Ströme entsteht ein zusätzliches Offsetfeld in x -Richtung und die Ioffe-Falle wandert gleichzeitig nach außen. An dem Vereinigungspunkt beider Fallen

lassen sich geschlossene Ausdrücke für die Fallenparameter angeben. Die Krümmung des Magnetfeldbetrags und die resultierende axiale Oszillationsfrequenz für Atome mit dem magnetischen Moment μ und der Masse m lauten

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = b_z/d$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{\mu b_z}{dm}}.$$

Die radiale Oszillationsfrequenz ergibt sich nach (3.10) aus dem Offsetfeld im Fallenzentrum, das für $I > I_c$ entsteht. Die Tabelle 5.2 gibt die Parameter der im Experiment erzeugten Ioffe-Falle wieder.

b_z	d	\varnothing	I	ω_r	ω_a	B_0
58 G/cm	4 mm	2 mm	13 A	$2\pi \times 120 \text{ s}^{-1}$	$2\pi \times 14 \text{ s}^{-1}$	0,4 G

Tabelle 5.2: Parameter für die Ioffe-Falle

Für den Transfer der Atome in die Ioffe-Falle muss lediglich der Strom im Draht erhöht werden. Dies geschieht in 200 ms. Zwei Punkte müssen bei diesem Prinzip zur Erzeugung einer Ioffe-Falle beachtet werden. Der Feldbetrag an der Drahtoberfläche durchläuft einen Nullpunkt, wenn das Quadrupolfeld des Drahtes zu Beginn des Transfers die Drahtoberfläche durchstößt. Dann gehen alle Atome verloren, die aus dem sphärischen Quadrupol über den Sattelpunkt zwischen den beiden Fallen gelangen und an die Drahtoberfläche stoßen. Dies bewirkt zwar, dass die Wolke gekühlt wird, da nur die heißesten Atome den Sattelpunkt überqueren können, der Prozess ist aber unkontrolliert und kann besonders im Falle sehr großer und heißer Wolken zu erheblichen Verlusten führen. Deshalb wird der Ioffe-Draht bereits vor Ende des ersten Transfers zwischen den Spulenpaaren eingeschaltet, so dass der Sattelpunkt einen höheren Feldbetrag besitzt. Der zweite wichtige Punkt betrifft die Vereinigung der beiden Fallenpotenziale. Kurz vor der Vereinigung haben sie exakt das gleiche Volumen. Eines der beiden Potenziale ist mit Atomen gefüllt, das andere nicht. Nach der Vereinigung hat sich das Volumen der Falle verdoppelt, Atomzahl und Temperatur sind gleichgeblieben. Dies führt dazu, dass die Phasenraumdicke nach der Vereinigung nur noch halb so groß ist. Der Vorgang entspricht dem bekannten Gay-Lussac'schen Überströmungsversuch. Die einzige Möglichkeit diesen Verlust an Phasenraumdicke zu verhindern, besteht darin, die Atome von Anfang an in einer Ioffe-Falle zu fangen.

Das geschilderte Prinzip wurde erstmals von Fortágh *et al.* [For98a] verwendet und ist dort ausführlich beschrieben. Durch Wiederausschalten des Ioffe-Drahts gelang es in diesem Experiment erstmals, Atome in eine Mikrofalle zu laden.

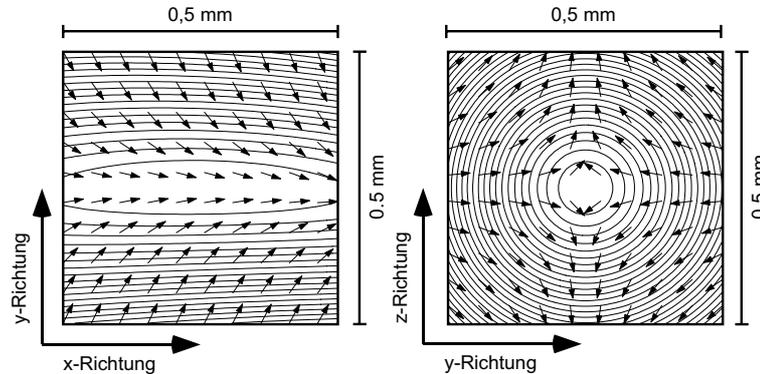


Abbildung 5.6: Feldverlauf der Ioffe-Falle. Die Potenziellinien haben einen Abstand von $0,05 \text{ G}$. Der Strom in den Transferspulen beträgt je 3 A , der im Ioffe-Draht 13 A . Die Pfeile zeigen die in die Schnittebene projizierte Richtung des Magnetfeldes. Die Leiter der Mikrostruktur verlaufen in x -Richtung und liegen genau über dem Fallenzentrum.

5.2.3 Transfer in die Mikrofalle

Für die Überlagerung von Magnetfeldern gilt das Superpositionsprinzip. Bei den in diesem Abschnitt dargestellten Überlegungen zum Transfer geht die reale Magnetfeldkonfiguration aus einer Superposition von zwei oder drei fiktiven Magnetfeldverläufen hervor. Einer dieser Bausteine ist der Feldverlauf eines stromdurchflossenen Drahtes oder Leiters. Das Magnetfeld ist rotationssymmetrisch und wird im Folgenden kurz Drahtfeld oder Feld des Leiters genannt. Zur Erklärung des Transferprinzips wird ihm ein zum Draht paralleles lineares Quadrupolfeld überlagert, dessen Zentrum frei verschiebbar ist. Durch die Überlagerung der beiden einzelnen Feldverläufe entstehen zwei lineare Quadrupolfelder, deren Magnetfeldbetrag das Potenzial für die Atome festlegt. Diese Potenziale werden im Weiteren als Wellenleiterpotenzial oder kurz Wellenleiter bezeichnet.

Transferprinzip

Zunächst ist es hilfreich, einen Blick auf den experimentell gegebenen Feldverlauf der Ioffe-Falle zu werfen, die durch die zwei Transferspulen und den senkrechten Draht erzeugt wird. In Abb. 5.6 sind ein Schnitt in der xy -Ebene und in der yz -Ebene durch das Zentrum der Falle gezeigt. Der Feldverlauf entspricht dem eines linearen Quadrupols in x -Richtung, überlagert mit einem Offsetfeld in x -Richtung und einem Hexapolfeld, das den axialen Einschluss in x -Richtung erzeugt (am Verlauf der Äquipotenziallinien in der xy -Ebene zu erkennen). Dies sind die ersten drei Terme in der Feldentwicklung einer Ioffe-Falle nach Gleichung (3.8). Für das Funktionsprinzip des Transfers sind das homogene Offsetfeld und das Hexapolfeld nicht von Bedeutung und der Transfer kann allein durch die Überlagerung eines frei verschiebbaren, linearen Quadrupolfelds mit dem Feld eines stromdurchflossenen Leiters beschrieben

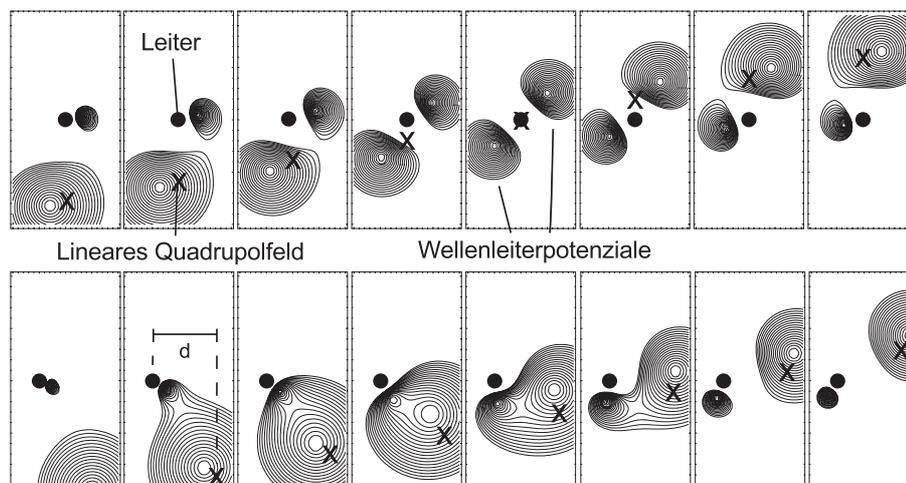


Abbildung 5.7: Überführung eines Wellenleiterpotenzials an einen Leiter. Ein lineares Quadrupolfeld (Kreuz), das senkrecht zur Bildebene verläuft wird über einen stromdurchflossenen Leiter (Punkt) hinwegbewegt, der ebenfalls senkrecht zur Bildebene verläuft. Eingezeichnet sind die aus dem Gesamtmagnetfeld resultierenden Äquipotenziallinien. Die Orientierung des linearen Quadrupolfelds entspricht der in Abb. 5.6, rechtes Bild. Obere Bilderreihe: Das lineare Quadrupolpotenzial wird genau über das Leiterzentrum hinweg bewegt und das Wellenleiterpotenzial wird an den Leiter überführt. Untere Bilderreihe: Das lineare Quadrupolfeld wird im Abstand d über das Leiterzentrum hinwegbewegt. Der Abstand ist so groß gewählt, dass der Wellenleiter nicht an den Leiter überführt wird.

werden.

Abb. 5.7 zeigt den Äquipotenziallinienverlauf für den Fall, dass ein lineares Quadrupolfeld (dessen Zentrum ist im Schaubild mit einem Kreuz gekennzeichnet) über einen parallelen, stromdurchflossenen Leiter (dargestellt durch den Punkt) hinwegbewegt wird. Die gezeigten Schnitte liegen in der yz -Ebene, also senkrecht zur Richtung des Leiters und des Quadrupolfeldes. In der oberen Bildreihe ist gezeigt, wie das Wellenleiterpotenzial an dem Leiter „abgestreift“ wird, und ein zweites Wellenleiterpotenzial aus dem Leiter heraustritt, um am Ende des Transfers die Stelle des ursprünglichen Wellenleiters einzunehmen. Atome, die sich ursprünglich in dem Wellenleiter befinden, werden so an den Draht transferiert.

Im Folgenden sollen nun zwei Fragestellungen zu diesem Transfer untersucht werden: „Unter welchen Bedingungen ist der Transfer möglich?“ und „Wie effizient ist der Transfer?“. In der unteren Bildreihe von Abb. 5.7 ist zu sehen wie der Transfer abläuft, wenn die Linie, auf der sich das Zentrum des linearen Quadrupolfelds bewegt, nicht genau durch die Leitermitte verläuft sondern in einem Abstand d . In der gezeigten Bildfolge ist dieser Abstand so groß gewählt, dass das ursprüngliche Wellenleiterpotenzial an dem Leiter vorbeigeführt wird und kein Transfer stattfindet. Das zweite Wellenleiterpotenzial, das zu Beginn des Transfers an dem Leiter ent-

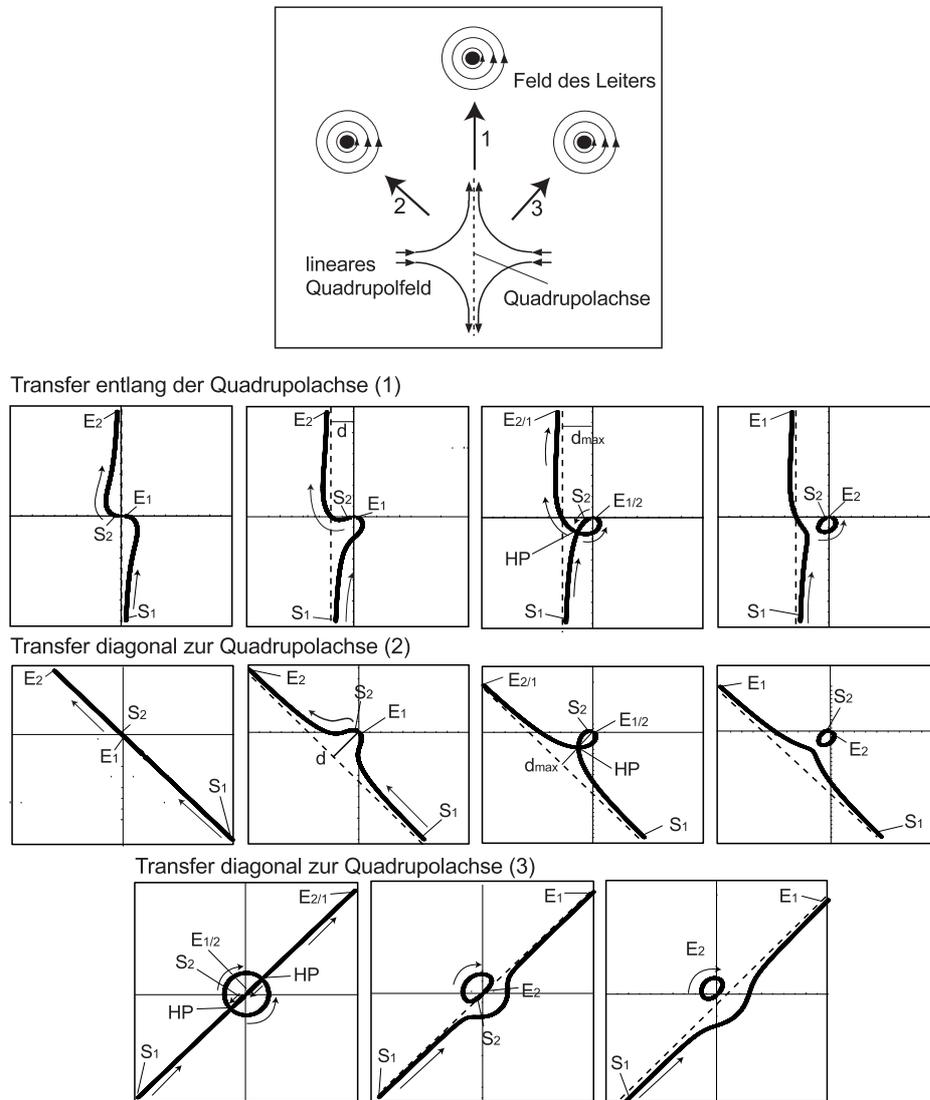


Abbildung 5.8: Adiabatischer Transfer eines linearen Wellenleiterpotenzials in eine Mikrofalle. Im oberen Bild ist die Orientierung des Quadrupolfelds und des Leiterfelds eingezeichnet. Der Leiter, das lineare Quadrupolfeld und die resultierenden Wellenleiterpotenziale stehen senkrecht zur Bildebene. Die drei nummerierten Pfeile (1 bis 3) geben die Richtung an, in der das Quadrupolfeld über den Leiter hinwegbewegt wird. In den drei Bildreihen bezeichnen S_1 und S_2 die Startpositionen der beiden entstehenden Wellenleiter, E_1 und E_2 die dazugehörigen Endpositionen, wenn das Quadrupolfeld entlang der eingezeichneten gestrichelten Linie bewegt wird. Der Leiter befindet sich im Koordinatenursprung. Die Wellenleiter bewegen sich entlang der schwarzen durchgezogenen Linien in Pfeilrichtung. Fällt die Position beider Wellenleiter zusammen bildet sich ein Hexapolfeld (HP) aus. Weitere Erklärungen siehe Text.

steht, wandert auf einem Halbkreis um den Leiter herum und verschwindet wieder.

Für eine quantitative Analyse dieses Verhaltens wird das folgende Modell gewählt. Der Ursprung des Koordinatensystems wird in die Leitermitte gelegt. Der Leiter zeigt in x -Richtung. Das lineare Quadrupolfeld mit dem radialen Gradienten b_r verläuft ebenfalls in x -Richtung und sein Zentrum befindet sich bei (y_0, z_0) . Die Feldkomponenten lauten dann für den Leiter

$$B_L(x, y, z) = \frac{I\mu_0}{2\pi(y^2 + z^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

und für das Quadrupolfeld

$$B_Q(x, y, z) = b_r \begin{pmatrix} 0 \\ -y + y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Die Position der Wellenleiter ist durch die Feldminima in der yz -Ebene gegeben ($B_L + B_Q = 0$), woraus die Bestimmungsgleichung

$$\begin{pmatrix} y - y_0 \\ -z + z_0 \end{pmatrix} = \frac{c}{y^2 + z^2} \begin{pmatrix} -z \\ y \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

mit $c = I\mu_0/(2\pi b_r)$ folgt. Gleichung (5.5) hat im Allgemeinen zwei Lösungen — es existieren also zwei Feldminima. Abb. 5.8 zeigt die Position der beiden Feldminima, wenn das Quadrupolfeld schrittweise aus verschiedenen Richtungen und in verschiedenen Abständen gegen den Leiter verschoben wird. Für große Abstände zwischen Quadrupolzentrum und Leiter befindet sich ein Feldminimum in der Mitte des Quadrupolfeldes (das Feld des Leiters nimmt mit $1/r^2$ ab und beeinflusst das Quadrupolfeld dort kaum) und eines nahe am Leiter. Die Position der beiden Feldminima zu Beginn des Transfers ist mit S1 und S2 gekennzeichnet. Wird nun das Quadrupolfeld auf den Leiter zubewegt, bewegen sich die beiden Feldminima auf den durchgezogenen Linien in Pfeilrichtung. Als gestrichelte Linie ist die dazugehörige Bahn des Quadrupolzentrums eingezeichnet. Die Endkonfiguration nach dem Transfer ist mit E1 und E2 gekennzeichnet. Je nach Orientierung des Quadrupolfeldes relativ zum Feld des Leiters kommt es zu verschiedenem Verhalten. In der ersten Sequenz, die der experimentellen Situation sehr nahe kommt, läuft das Wellenleiterpotenzial auf einem Bogen auf den Leiter zu, während das zweite — aus dem Leiter kommend — sich von diesem entfernt. Die Bahn des Quadrupolfeldes wird in den folgenden Bildern schrittweise immer weiter nach links versetzt. Im dritten Bild ist der Versatz so gewählt, dass sich für diesen Abstand d_{\max} die beiden Wellenleiter genau überlagern und ein Hexapolfeld (HP) bilden. Für größere Abstände (viertes Bild) wandert der Wellenleiter an dem Leiter vorbei. In der Bildfolge darunter ist die Richtung der Bewegung des Quadrupolpotenzials um 45 Grad gedreht. Ohne Versatz zeigt der Transfer einen idealen, geradlinigen Verlauf. Mit zunehmendem

Versatz ähnelt das Verhalten dem eben beschriebenen, der Abstand d_{\max} , bei dem es zur Ausbildung des Hexapolfelds kommt, ist jedoch größer. Wird die Richtung nun um 90 Grad gedreht, so sieht man, dass in dieser Konfiguration bereits für $d = 0$ ein Hexapolfeld entsteht und für alle größeren Abstände kein Transfer an den Leiter stattfindet.

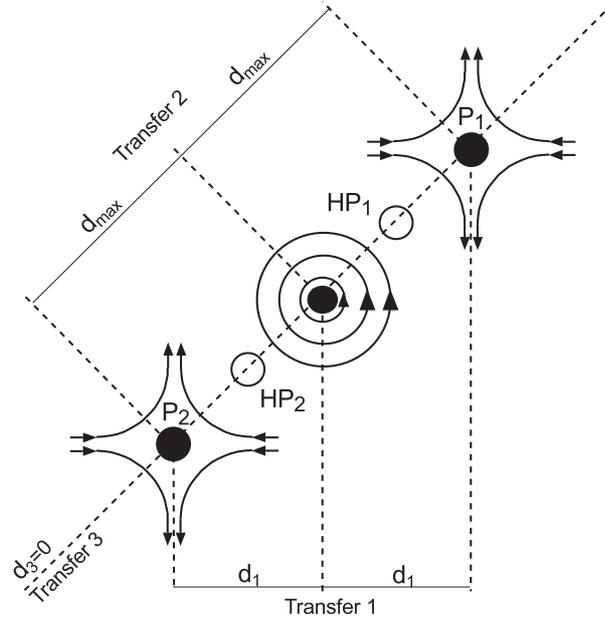


Abbildung 5.9: Geometrie des Transfers. Die Zeichnung zeigt die Position der beiden Hexapole (HP_1 und HP_2) sowie die der zugehörigen Quadrupolzentren (P_1 und P_2). Die gestrichelten Linien zeigen die Transferrichtung aus Abb. 5.8 an. Der Transfer funktioniert genau dann, wenn die Bahn des Quadrupolzenters die Strecke $\overline{P_1P_2}$ kreuzt. Es ergibt sich ein richtungsabhängiger „Einfangbereich“ durch die Projektion der Strecke $\overline{P_1P_2}$ auf die zur Bahn des Quadrupolzenters senkrechte Richtung.

Die Position der entstehenden Hexapole ist in allen drei Fällen identisch. Um ihre Lage herauszufinden, muss man fordern, dass (5.5) nur eine reelle Lösung besitzt. Man erhält die Lösung

$$HP_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{c/2} \\ -\sqrt{c/2} \end{pmatrix}$$

für die Position des Hexapols und

$$P_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2c} \\ -\sqrt{2c} \end{pmatrix}$$

für die Position des zugehörigen Quadrupols. Aus Symmetriegründen existiert ein zweiter Hexapol bei

$$HP_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{c/2} \\ \sqrt{c/2} \end{pmatrix}$$

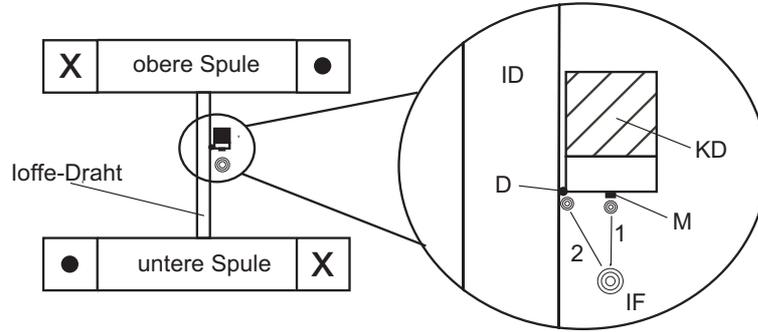


Abbildung 5.10: Experimentelle Anordnung (vgl. Abb. 4.11). Die Ioffe-Falle (IF) kann über den Weg 1 an die Mikrostruktur (M) und über den Weg 2 an den Referenzdraht (D) transferiert werden. Der Strom im Ioffe-Draht (ID) fließt nach oben. Mikrostruktur und Draht haben dieselbe Stromrichtung wie das rechte obere Spulenstück. Zum Komprimieren der Falle nach dem Transfer muss der Strom im Kompressionsdraht (KD) entgegengesetzt zu Draht und Mikrostruktur gerichtet sein.

$$P_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2c} \\ \sqrt{2c} \end{pmatrix}.$$

Der Abstand der beiden Quadrupolzentren beträgt

$$\overline{P_1 P_2} = d_c = 2\sqrt{c} = \sqrt{\frac{2\mu_0 I}{\pi b_r}}. \quad (5.6)$$

und definiert damit den „Einfangbereich“ des Leiters. Vergleicht man die Lage der Punkte P_1 und P_2 mit den verschiedenen gezeigten Transferverläufen aus Abb. 5.8 sieht man, dass der Transfer genau dann gelingt, wenn die Bahn für den Verlauf des Quadrupolzenters während des Transfers die Strecke $P_1 P_2$ kreuzt. Dieser Zusammenhang wird in Abb. 5.9 genauer erläutert. Die zweite in Abb. 5.8 gezeigte Geometrie ist diejenige mit dem größten Einfangbereich.

Um die Frage nach der Transfereffizienz zu beantworten, muss die Höhe des Sattelpunkts betrachtet werden, der zwischen den beiden beteiligten Wellenleitern liegt. Erreicht dieser sein Minimum, so besitzen die Wellenleiter ihre geringste Tiefe und heiße Atome aus dem gefüllten Wellenleiter können in den leeren Wellenleiter gelangen. Für die Geometrie 2 aus Abb. 5.8 wird der niedrigste Sattelpunkt genau dann erreicht, wenn das Quadrupolzentrum über der Leitermitte liegt. Seine Höhe beträgt unter Berücksichtigung eines zu den Wellenleitern parallelen Offsetfeldes B_0

$$B_S = 2\sqrt{I\mu_0 b_z / (2\pi) + B_0^2}. \quad (5.7)$$

Durch diesen Sattelpunkt ist die Falltiefe $B_S - B_0$ bestimmt und damit auch die maximal mögliche Temperatur der transferierten Atomwolke¹. Für abweichende

¹In [Dav95] wird untersucht, wie tief (in Einheiten von $k_B T$) eine Falle für eine Atomwolke der Temperatur T sein muss, um alle Teilchen speichern zu können. Der genaue Wert hängt von der Fallenform ab — als Richtwert können 8–10 $k_B T$ gelten.

Transfer an die Mikrostruktur						
t [s]	I_O [A]	I_M [A]	I_{ID} [A]	I_{KD} [A]	ν_r [Hz]	Tiefe [G]
0	3	0	13	0	120	14,5
0,1	3	0,5	13	0	120	14,5
1	2,3	0,5	13	0	90	2
3	2,1	0,5	13	-4	200	2
Transfer an den Draht						
t [s]	I_O [A]	I_D [A]	I_{ID} [A]	I_{KD} [A]	ν_r [s^{-1}]	Tiefe [G]
0	3	0	13	0	120	14,5
0,1	3	2	18	10	80	14,5
0,5	1,9	2	18	10	150	10
1	1,9	2	16	0	270	6

Tabelle 5.3: Transfer an die Mikrostruktur und an den Draht: Stromverlauf. Die einzelnen Ströme sind: I_O obere Spule, I_M Mikrostruktur, I_D Draht, I_{ID} Ioffe-Draht, I_{KD} Kompressionsdraht. Der Strom in der unteren Transfer-Spule beträgt permanent 3 A. Die Ströme, die geändert werden, sind fett gedruckt. Alle Ströme werden linear variiert. Die Erhöhung von I_{ID} beim Transfer an den Draht ist notwendig, um die Ioffe-Fallengeometrie zu erhalten.

Geometrien muss der niedrigste Sattelpunkt durch eine numerische Simulation der Magnetfelder bestimmt werden, er ist durch (5.7) nach oben begrenzt. Im Falle eines zu niedrigen Sattelpunkts muss der Strom im Leiter erhöht werden. Ist dies nicht möglich, müssen zusätzliche, dickere Leiter eingebaut werden, die für den Transfer benutzt werden und deren Strom erniedrigt wird, sobald der Transfer den kritischen Punkt überschritten hat.

Transferverlauf

Die experimentelle Anordnung der Leiter und Spulen ist noch einmal in Abb. 5.10 mit Blick auf die yz -Ebene gezeigt. Von der Ioffe-Falle (IF) aus kann die Atomwolke durch Erniedrigen des Stroms in der oberen Transferspule sowohl an die Mikrostruktur (M) als auch an den Referenzdraht (D) transferiert werden. Ersteres entspricht dabei der Geometrie 1 aus Abb. 5.8, letzteres einer Mischung aus Geometrie 1 und 2. Tabelle 5.3 gibt einen typischen zeitlichen Verlauf der beteiligten Ströme und Faltenparameter für den Transfer an die Mikrostruktur wieder. Zu diesen Daten sind in Abb. 5.11 die zugehörigen Potenziellinienbilder gezeigt. Die Kompression der Atomwolke geschieht durch den unter der Mikrostruktur liegenden Kompressionsdraht. Im letzten Bild der unteren Bildreihe ist die beginnende Kompression zu sehen. Der Übergang zwischen Transfer und Kompression ist fließend. Der Transfer kann dann als beendet betrachtet werden, wenn die Stelle des niedrigsten Sattelpunkts überschritten ist. In der gezeigten Bildfolge aus Abb. 5.11 ist dies bei 2s der Fall. Der

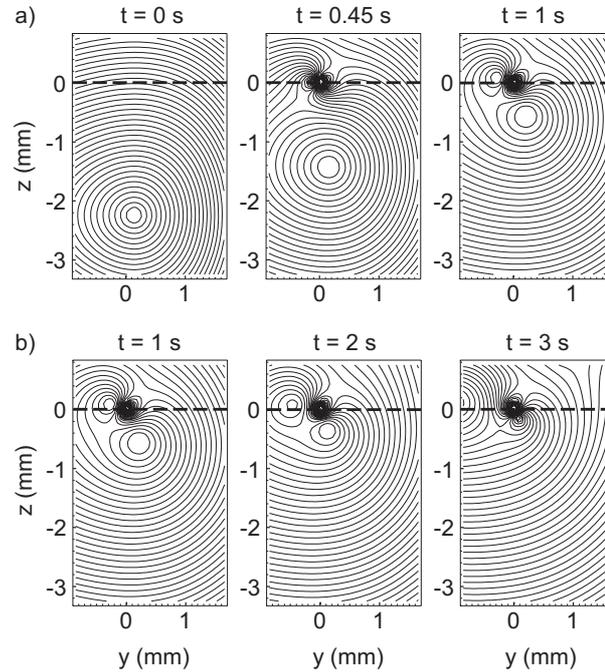


Abbildung 5.11: Transfer an die Mikrostruktur. Die Linien gleichen Magnetfeldbetrags haben einen Abstand von $0,5 \text{ G}$. Die zugehörigen Werte für die Ströme sind in Tabelle 5.3 angegeben. Die Transfergeometrie entspricht dem eingezeichneten Weg 1 in Abb. 5.10. Die Oberfläche der Mikrostruktur ist durch die gestrichelte Linie gekennzeichnet. Nach etwa 2 s erreicht der Sattelpunkt seine geringste Höhe (Bild 2 untere Reihe).

Sattelpunkt begrenzt die Falltiefe während des Transfers auf etwa $1,5 \text{ G}$. Aus diesem Grund wird die Atomwolke zunächst in der Ioffe-Falle bis auf $5 \mu\text{K}$ gekühlt, bevor der Transfer durchgeführt wird. Der Transfer an den Referenzdraht funktioniert ähnlich dem an die Mikrostruktur. Die Position des Drahtes ist 1 mm gegenüber der Ioffe-Falle in y -Richtung verschoben. Tabelle 5.3 gibt einen typischen Transferverlauf an den Draht wieder.

Im Vergleich zur Mikrostruktur ist der Transfer effizienter. Dies liegt vor allem an der für den Transfer besser geeigneten Geometrie. Trotz der geringeren Falltiefe beim Transfer an die Mikrostruktur wurde diese Geometrie gewählt, um eine möglichst reine Überlagerung eines Wellenleiterpotenzials (erzeugt durch die Mikrostruktur und den Kompressionsdraht) und einer Ioffe-Falle (erzeugt durch den Ioffe-Draht und die beiden Spulen) zu erhalten, die für den axialen Einschluss sorgt.

t	ν_{rf}	N	T	γ	Λ
0 s	10 MHz	2×10^8	110 μK	5 s^{-1}	3×10^{-7}
5 s	5 MHz	8×10^7	50 μK	10 s^{-1}	3×10^{-6}
15 s	2 MHz	2×10^7	15 μK	40 s^{-1}	1×10^{-4}
20 s	1 MHz	1×10^7	5 μK	70 s^{-1}	1×10^{-3}

Tabelle 5.4: *Evaporatives Kühlen in der Ioffe-Falle. Die Tabelle gibt die Entwicklung der Atomwolke während des Radiofrequenzkühlens wieder. ν_{rf} ist die Radiofrequenz, γ die elastische Stoßrate und Λ die Phasenraumdicke. Die Oszillationsfrequenzen in der Ioffe-Falle sind $\omega_a = 2\pi \times 14 \text{ s}^{-1}$ und $\omega_r = 2\pi \times 110 \text{ s}^{-1}$, das Feld im Fallenzentrum beträgt $B_0 = 0,3 \text{ G}$.*

5.3 Das Bose-Einstein-Kondensat

In diesem Abschnitt werden die letzten Schritte zur Erzeugung und der Nachweis eines Bose-Einstein-Kondensats beschrieben. Die Bose-Einstein-Kondensate sind der Ausgangspunkt für weiterführende Experimente. Nach ihrer Erzeugung kann die Falle in ihrer Form oder ihrem Abstand zur Oberfläche verändert werden. Außerdem können die Kondensate bewegt und manipuliert werden. Beobachtet werden kann die Entwicklung von Atomzahl und Temperatur, ihre Form oder ihre Bewegung.

5.3.1 Evaporatives Kühlen

In der Ioffe-Falle, die mit den beiden Transferspulen und dem senkrechten Ioffe-Draht gebildet wird, werden die Atome zunächst 20 s lang evaporativ gekühlt. Dazu wird eine Radiofrequenz eingestrahlt und mit drei linearen Rampen von anfänglich 10 MHz auf 1 MHz erniedrigt. Die Radiofrequenz wird durch einen 20 MHz Wave-Tek Funktionsgenerator erzeugt, der analog über den Prozessrechner programmiert wird. Auf die oberen Transferspule ist ein dünner Draht mit fünf Windungen gewickelt, auf den die Radiofrequenz kapazitiv eingekoppelt wird. Eine Verstärkung des Ausgangssignals ist nicht notwendig, wenn der Frequenzgenerator bei maximaler Amplitude ($\pm 10 \text{ V}$ an 50Ω) betrieben wird. Tabelle 5.4 fasst die Parameter der Atomwolke vor und während des Kühlvorganges zusammen. Nach 20 s hat die Wolke eine Temperatur von 5 μK , die Atomzahl hat sich von 2×10^8 auf 1×10^7 reduziert und die Dichte hat auf $1 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ zugenommen. Die Stoßrate beträgt 60–70 Stöße pro Sekunde. In dieser Ioffe-Falle können die Atome weiter bis zum Bose-Einstein-Kondensat gekühlt werden, das bis zu 2×10^4 Atome enthält. Damit konnte gezeigt werden, dass ein einfaches Fallenprinzip, bestehend aus zwei Spulen und einem senkrechten Draht, zur Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats ausreicht [For02a]. Im Normalfall wird die vorgekühlte Wolke an die Mikrostruktur oder den Draht transferiert. Sie ist so kalt, dass der während des Transfers auftretende Sattelpunkt von den Atomen nicht überwunden werden kann. Während des Transfers werden die Atome adiabtisch komprimiert. Stoßrate, Dichte und Temperatur erhöhen sich.

t	ω_r	ν_{rf}	N	T	γ	A
0 s	$2\pi \times 110 \text{ s}^{-1}$	7 MHz	1×10^7	7 μK	70 s^{-1}	0,001
3 s	$2\pi \times 840 \text{ s}^{-1}$	4 MHz	1×10^7	35 μK	600 s^{-1}	0,001
6 s	$2\pi \times 840 \text{ s}^{-1}$	1,5 MHz	$1,6 \times 10^6$	6 μK	700 s^{-1}	0,02
7 s	$2\pi \times 840 \text{ s}^{-1}$	1,065 MHz	1×10^6	1 μK	2000 s^{-1}	1

Tabelle 5.5: *Evaporatives Kühlen in der Mikrofalle. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem letzten Punkt in Tabelle 5.4. Die Werte beziehen sich auf einen typischen experimentellen Durchlauf.*

Nach 1 s wird die Radiofrequenz erneut für 6 s eingeschaltet. Mit drei linearen Rampen wird sie erniedrigt bis es zur Bose-Einstein-Kondensation kommt [Ott01]. Die Parameter der Atomwolke und des Fallenpotenzials für den letzten Kühlschritt an der Mikrostruktur sind in Tabelle 5.5 angegeben.

5.3.2 Nachweis des Bose-Einstein-Kondensats

Eine Sequenz von Absorptionsaufnahmen während des Transfers und des Kühlprozesses an der Mikrostruktur ist in Abb. 5.12 dargestellt. In der ersten Bildreihe wird der Transfer gezeigt. Die mittlere Bildreihe zeigt den Kühlprozess in der Mikrofalle, an dessen Ende die Bose-Einstein-Kondensation stattfindet. Die letzte Bildreihe zeigt Aufnahmen des Kondensats nach 5, 10, und 15 ms Flugzeit. Die gängigste Methode zum Nachweis und zur Analyse von Bose-Einstein-Kondensaten in verdünnten Gasen ist die Auswertung von Absorptionsaufnahmen. Bei großen Kondensaten oder guter optischer Auflösung können die Kondensate direkt in der Falle abgebildet werden [And96]. Meist wird jedoch die Falle ausgeschaltet und das expandierende Kondensat nach einer gewissen Flugzeit (typischerweise 20 ms) aufgenommen. Aus der optischen Dichte erhält man nach (4.2) die über die Abbildungsrichtung integrierte Dichteverteilung der Atome.

Allgemein geht bei Flugzeitmessungen die Dichteverteilung nach der Flugzeit aus der Dichteverteilung in der Falle durch Faltung mit der Impulsverteilung der Atomwolke hervor. Außerdem beeinflusst die Wechselwirkung zwischen den Atomen die Expansion während der Flugzeit. Bei einer thermischen Wolke dagegen wird die Dichteverteilung nach der Flugzeit durch die Impulsverteilung der Atome bestimmt. In diesem Fall gibt für große Expansionszeiten (oder verschwindende Startgröße der Wolke) die Flugzeitmessung die reine Impulsverteilung der Atome in der Falle wieder. Die unterschiedlichen Mechanismen für die Expansion von Kondensat und thermischer Wolke machen eine gegenseitige Unterscheidung sehr einfach wie die nachfolgende quantitative Beschreibung zeigt.

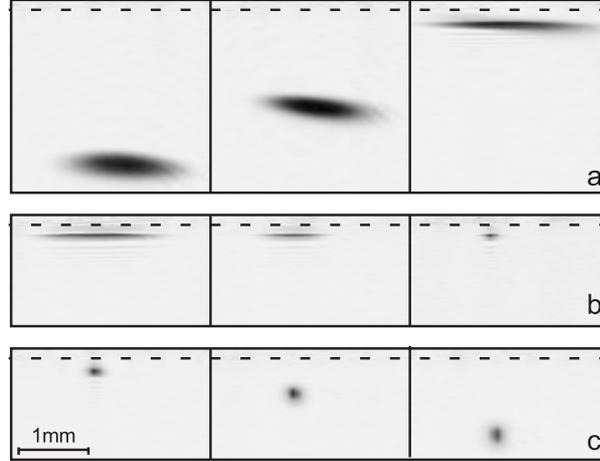


Abbildung 5.12: Absorptionaufnahmen der Atomwolke: Transfer an die Mikrostruktur (Reihe a) und evaporatives Kühlen (Reihe b). Das rechte Bild in Reihe b zeigt das Bose-Einstein-Kondensat in der Falle. Reihe c zeigt Aufnahmen des Kondensats nach 5, 10 und 15 ms Flugzeit. Die gestrichelte Linie markiert die Oberfläche der Mikrostruktur, von der das Kondensat $270 \mu\text{m}$ entfernt ist.

Die thermische Wolke

Bei einem harmonischen Potenzial besitzt die thermische Wolke nach einer Flugzeit t die Dichteverteilung [Ket99]

$$n_{\text{thtof}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\lambda^3} \prod_{i=1}^3 \left(\frac{1}{1 + \omega_i^2 t^2} \right) g_{3/2} \left(\exp \left[\frac{\mu}{k_B T} - \frac{m}{2k_B T} \sum_{i=1}^3 x_i^2 \left(\frac{\omega_i^2}{1 + \omega_i^2 t^2} \right) \right] \right).$$

Die in Abbildungsrichtung integrierte Dichteverteilung lautet

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{\text{thtof}}(x, y, t) &= \tilde{n}_{\text{thtof}}(0, 0) / g_2(\exp[\mu/k_B T]) \\ &\times g_2 \left(\exp \left[\left(\mu - x^2 \frac{m\omega_x^2}{2(1 + \omega_x^2 t^2)} - y^2 \frac{m\omega_y^2}{2(1 + \omega_y^2 t^2)} \right) / k_B T \right] \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Für $T > T_c$, das heißt für große negative Werte von μ , geht die Dichteverteilung in die Boltzmannverteilung über. Daher genügt es in den allermeisten Fällen, die Absorptionaufnahmen mit einer einfachen Gaußfunktion zu beschreiben. Aus der Breite der Gaußfunktion wird die Temperatur bestimmt, aus der Gesamtabsorption die Atomzahl.

Das Kondensat in der Thomas-Fermi-Näherung

Ein Kondensat bei $T = 0$ besitzt in der Thomas-Fermi-Näherung die Dichteverteilung (2.7). Für eine harmonisches Potenzial ist sie durch (A.10) gegeben. Die Wechselwirkung der Atome bewirkt, dass sich während der Expansion Wechselwirkungsenergie in kinetische Energie umwandelt. Die Summe aus beiden ist die so

genannte „release energy“

$$E_{\text{rel}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{ww}},$$

die während der Expansion konstant bleibt. Nur für sehr kleine Kondensate, für die die Thomas-Fermi-Näherung nicht mehr gilt, spiegelt die Dichteverteilung die Impulsverteilung des Grundzustands der Falle wieder.

Um den Einfluss der Wechselwirkung auf das Verhalten des Kondensats während der Flugzeit zu beschreiben, kann die in Abschnitt 2.2.2 hergeleitete Theorie verwendet werden. Man setzt dazu die Oszillationsfrequenzen ab dem Zeitpunkt des Ausschaltens der Falle gleich null und löst das Gleichungssystem (2.28) für die Dauer der Flugzeit. Die Startbedingungen sind durch (2.30) gegeben. In der Thomas-Fermi-Näherung behält das Kondensat seine parabolische Form während der Expansion bei und wird allein durch die Entwicklung der Radien $r_i(t)$ beschrieben. Die Integration der Dichteverteilung in einer Richtung ergibt das beobachtete Absorptionsprofil

$$\tilde{n}_{\text{ktof}}(x, y) = \tilde{n}_{\text{ktof}}(0, 0) \left(1 - \frac{x^2}{r_x(t)^2} - \frac{y^2}{r_y(t)^2} \right)^{3/2}. \quad (5.9)$$

Im Falle einer stark anisotropen, rotationssymmetrischen Falle kann (2.28) integriert werden [Cas96] und man erhält

$$r_x(t) = r_\rho(t) = r_\rho(0) \sqrt{1 + \omega_\rho^2 t^2} \quad (5.10)$$

$$r_y(t) = r_z(t) = r_z(0) \left(1 + \left(\frac{\omega_\rho^2}{\omega_z^2} \right) \left(\omega_\rho t \arctan \omega_\rho t - \ln \left(\sqrt{1 + \omega_\rho^2 t^2} \right) \right) \right). \quad (5.11)$$

Aus der Kenntnis der Kondensatsradien ergibt sich das chemische Potenzial zu

$$\mu = \frac{1}{2} m \left(\frac{\omega_\rho^2}{1 + \omega_\rho^2 t^2} \right) r_\rho^2(t). \quad (5.12)$$

Die Kondensatsatomzahl erhält man entweder über die Gesamtabsorption oder rechnerisch aus (A.11) bei Kenntnis des Fallenpotenzials.

Die bimodale Verteilung

Zwischen $T = 0$ und $T = T_c$ treten beide Verteilungen nebeneinander auf. Das Absorptionsprofil wird dann mit einer Summe aus den beiden Einzelprofilen (5.8) und (5.9) beschrieben:

$$\frac{1}{\sigma_\pi} D(\rho, z) = \tilde{n}_{\text{th}_0} \times g_2(e^{-\rho^2/\rho_{\text{th}_0}^2 - z^2/z_{\text{th}_0}^2})/g_2(1) \quad (5.13)$$

$$+ \tilde{n}_{\text{k}_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{r_\rho^2} - \frac{z^2}{r_z^2} \right)^{3/2}, \quad (5.14)$$

wobei für die thermische Wolke $\mu = 0$ angenommen wird [Ket96a]. Zur Bestimmung der Wolkenparameter ist es ausreichend, einen Schnitt in radialer Richtung durch

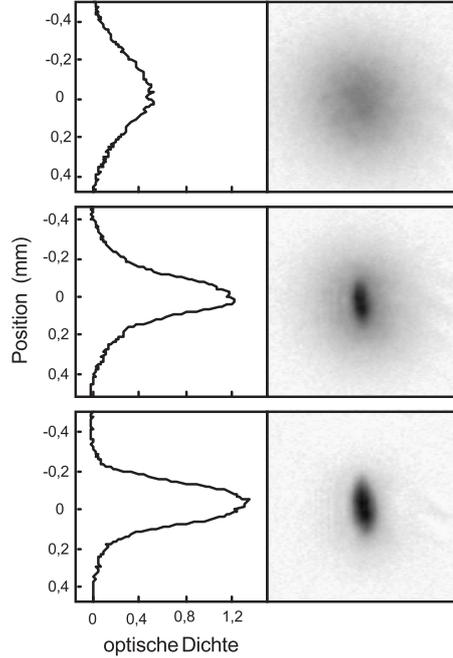


Abbildung 5.13: Bose-Einstein-Kondensation. Obere Reihe: thermische Wolke bei $T = 970$ nK. Mittlere Reihe: bimodale Verteilung von Kondensat und thermischer Wolke bei $T = 730$ nK. Unteres Bild: fast reines Kondensat ($T < 500$ nK). Alle drei Bilder sind nach 20 ms Flugzeit aufgenommen. Links ist jeweils der zugehörige vertikale Schnitt durch die Wolkenmitte gezeigt. Er zeigt das unterschiedliche Dichteprofil, das Kondensat und thermische Wolke aufweisen.

das gemessene Absorptionsprofil zu legen, und diesen mit obiger Modellfunktion anzupassen. Aus den beiden Amplituden $\tilde{n}_{\text{th}0}$ und $\tilde{n}_{\text{k}0}$ sowie dem Thomas-Fermi-Radius r_ρ und der Breite $\rho_{\text{th}0}$ können alle wichtigen Größen bestimmt werden. Von besonderem Interesse ist die Breite der thermischen Wolke $\rho_{\text{th}0}$, deren Wert die einzige Möglichkeit ist, die Temperatur der Atome zu bestimmen. Es gilt

$$T = \frac{m\omega_\rho^2}{2k_{\text{B}}(1 + \omega_\rho^2 t^2)} \rho_{\text{th}0}^2.$$

Für tiefe Temperaturen wird der Anteil der thermischen Atome immer geringer und unterhalb von $0,5 T_c$ wird die Temperaturbestimmung sehr unsicher.

Abb. 5.13 zeigt für drei verschiedene Temperaturen die Atomwolke nach 20 ms Flugzeit (rechtes Bild) und einen senkrechten Schnitt durch die Atomwolke (linkes Bild). Die erste Reihe zeigt eine rein thermische Verteilung oberhalb der kritischen Temperatur. Die Reihe darunter zeigt eine bimodale Verteilung der Atome: auf einem Untergrund thermischer Atome ist das Thomas-Fermi-Profil des Kondensats zu erkennen. In der unteren Reihe ist die Temperatur so niedrig, dass ein fast reines Kondensat vorliegt.

N_0	$1 \times 10^4 - 8 \times 10^5$
ω_r	$2\pi \times 100 \text{ s}^{-1} - 2\pi \times 2000 \text{ s}^{-1}$
ω_a	$2\pi \times 1 \text{ s}^{-1} - 2\pi \times 14 \text{ s}^{-1}$
α	6–200
n_0	$1 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3} - 1 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$
T_c	50 nK–1 μ K
μ/k_B	20 nK–400 nK

Tabelle 5.6: Parameterbereich, in dem Bose-Einstein-Kondensate erzeugt werden können. Von oben: Atomzahl, radiale Oszillationsfrequenz, axiale Oszillationsfrequenz, Aspektverhältnis, zentrale Dichte, kritische Temperatur und chemisches Potenzial.

5.4 Zusammenfassung

Bei unserem Experiment können Kondensate in einer Vielzahl verschiedener Fallen erzeugt werden. Das Aspektverhältnis der Falle und die Fallensteilheit sind in großen Bereichen variierbar. Tabelle 5.6 gibt eine Übersicht über die Parameter, bei denen Bose-Einstein-Kondensate erzeugt werden konnten. Unser experimenteller Aufbau stellt eine deutliche Vereinfachung der Technik für die Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten dar. Er verfolgt das Konzept der Entkopplung von magnetooptischer Falle und Magnetfalle. Mit der Methode des adiabatischen Transfers wurde dafür eine Technik entwickelt, die die Verbindung von großvolumigen Fallen und Mikrofallen möglich macht. Diese neue Art von Apparatur wird auch in zwei weiteren Experimenten verfolgt und eröffnet neue Möglichkeiten bei der Arbeit mit Bose-Einstein-Kondensaten [Gre02, Gus02]. Durch den guten optischen Zugang können in unserem Experiment Kondensate mit knapp einer Million Atome erzeugt werden. Die Technik der Mikrofallen erweist sich damit als kompatibel mit den Anforderungen an eine gute thermische Isolierung und eine ausreichende Lebensdauer der Atome. Mikrofallen erlauben gegenüber konventionellen Apparaturen eine deutlich größere geometrische Vielfalt der Fallenpotenziale. Mit der erstmaligen Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats in einer Mikrofalle ist damit der Weg frei für atomoptische Experimente mit kohärenter Materie in integrierten Oberflächenfallen.

Kapitel 6

Experimente zur Dynamik in anharmonischen Wellenleitern

In diesem Kapitel wird eine Experimentreihe vorgestellt, mit der systematisch das Verhalten von Bose-Einstein-Kondensaten bei der Bewegung durch ein anharmonisches Potenzial untersucht wurde. Wie in Kapitel 3 dargelegt wurde, eröffnet die Technik der Mikrofallen neue Möglichkeiten bei der Manipulation von ultrakalten Atomen. Von den unterschiedlichen atomoptischen Elementen, die auf einer Mikrostruktur implementiert werden können, ist die des Wellenleiters eine der fundamentalsten. Ein Wellenleiter stellt nicht nur eine räumliche Verbindung zwischen verschiedenen anderen atomoptischen Komponenten dar, sondern ist selbst zentraler Bestandteil einer der faszinierendsten Anwendungen der integrierten Atomoptik, die gegenwärtig diskutiert werden: einem Mach-Zehnder ähnlichen Interferometer, das auf einer Mikrostruktur integriert wird und als höchst empfindlicher Sensor für Kräfte und Rotationen fungiert. Dass die Atominterferometrie ein leistungsfähiges Instrument zur Präzisionsmessung ist, wurde in den vergangenen 10 Jahren durch zahlreiche Experimente eindrucksvoll bewiesen [Ber97]. Bei diesen Experimenten werden die Atome durch eine lineare Schrödingergleichung beschrieben und die Wechselwirkung zwischen den Atomen spielt keine Rolle. Die einmaligen Kohärenzeigenschaften eines Bose-Einstein-Kondensats [And97] machen es zu einem hochinteressanten Kandidaten für Interferenzexperimente mit Materie in Wellenleitern. Bei der Bewegung von Bose-Einstein-Kondensaten in integrierten Wellenleiterstrukturen behalten diese ihre hohe Dichte bei, und die Wechselwirkung wird das Interferenzverhalten wesentlich beeinflussen. Noch grundlegender ist die Frage nach der Entwicklung der räumlichen Dichteverteilung eines Kondensats bei der Bewegung in einem Wellenleiter. Für unsere Untersuchungen haben wir zur Beantwortung dieser Fragen die Oszillation eines Bose-Einstein-Kondensats in einem anharmonischen Wellenleiter studiert. Die Schwingung kann dabei als die natürliche Bewegungsform eines Kondensats in einem Wellenleiter angesehen werden, da magnetische Potenziale konservativ sind. Offene Wellenleiter dagegen, deren Enden nicht abgeschlossen sind und bei denen sich das Kondensat immer in eine Richtung bewegt, sind experi-

mentell sehr schwer zu realisieren und erlauben darüber hinaus nur eine reduzierte Beobachtungsdauer.

Bei der Schwingung im geschlossenen Wellenleiter koppeln die inneren Anregungen des Kondensats an dessen Schwerpunktsbewegung. Vermittelt wird die Kopplung über das anharmonische Potenzial. Das Studium der kollektiven Anregungen war ein sehr früher Forschungszweig der Physik mit Bose-Einstein-Kondensaten. Die sehr genaue Bestimmung der Resonanzfrequenzen erlaubte strenge Test der zugrundeliegenden Theorie. Im Unterschied zu bisherigen Experimenten, bei denen ein ruhendes Kondensat in einem harmonischen Potenzial für kurze Zeit zu Schwingungen angeregt wurde und dann bei ausgeschalteter Störung beobachtet wurde, werden bei unserem Experiment die kollektiven Schwingungen des Kondensats permanent durch die Schwerpunktsbewegung angetrieben. Außerdem bleibt die Gesamtenergie erhalten, da das System abgeschlossen ist und kein äußerer Antrieb existiert. Zusätzlich zeigen die kollektiven Anregungen aufgrund der großen erreichten Amplituden eine nichtlineare Kopplung. Die experimentellen Daten bestätigten das in Kapitel 2 entwickelte theoretische Modell zur Beschreibung der nichtlinearen Dynamik sehr gut. Für große Amplituden wird die Kopplung der Anregungen so stark, dass das Modell eine chaotische Dynamik voraussagt. Die experimentellen Daten, die dazu aufgenommen wurden geben ebenfalls einen Hinweis darauf.

Das Kapitel ist wie folgt aufgebaut. In Abschnitt 6.1 wird eine Zusammenfassung bisheriger Experimente zur Atomoptik und zu kollektiven Anregungen von Bose-Einstein-Kondensaten gegeben. Danach wird die experimentelle Anordnung beschrieben und der Ablauf der Messungen erläutert. Die Auswertung der Daten wird in Abschnitt 6.2 beschrieben. Anschließend wird die Schwerpunktsbewegung analysiert, gefolgt von einer Untersuchung der kollektiven Anregungen. Ein eigener Abschnitt ist dann dem Auftreten nichtlinearer Kopplungen zwischen den verschiedenen Moden gewidmet und wird abgeschlossen durch eine Untersuchung der Energiebilanz während der Schwingung. Der letzte Abschnitt befasst sich mit der Untersuchung des chaotischen Verhaltens.

6.1 Stand der Forschung

Für ultrakalte, thermische Atome konnte bereits eine Reihe atomoptischer Elemente wie Spiegel, Strahlteiler und Wellenleiter auf der Basis von magnetischen Mikrostrukturen realisiert werden. Ein Überblick dazu wurde in Abschnitt 3.3.3 gegeben. Ergänzend dazu gab es auch Experimente, bei denen mit optischen Dipolfallen und Stehwellen Bose-Einstein-Kondensate manipuliert wurden. Die Beugung eines Kondensats an einer optischen Stehwelle [Ovc99] sowie die Beobachtung von Tunnel-effekten [And98, Cat98] gelang ebenso wie die Demonstration eines Spiegels, erzeugt mit einem blauverstimmtten Laserstrahl [Bon99]. Bongs *et al.* [Bon01] transferierten ein Bose-Einstein-Kondensat in einen Wellenleiter, der aus einem blauverstimmtten Hohlstrahl bestand. In diesem Wellenleiter konnten sie die Ausbreitung des Kondensats

sats in axialer Richtung untersuchen. Die Ausbreitung von Kondensaten in magnetischen Wellenleitern wurde von Leanhardt *et al.* [Lea02] und Fortágh *et al.* [For02a] erstmals untersucht. Mit einem Atomlaser können atomoptische Experimente ohne Einfluss der Wechselwirkung durchgeführt werden [Blo01].

Bereits kurz nach der erstmaligen Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats wurden Untersuchungen zu den kollektiven Anregungen von Kondensaten durchgeführt. Im Vordergrund standen zunächst die niederfrequenten Formschwingungen, also die Monopol- und Quadrupolmoden. Diese wurden von Jin *et al.* [Jin96] und Mewes *et al.* [Mew96b] gefunden und zeigten eine beeindruckende Übereinstimmung mit den theoretischen Vorhersagen [Str96a, Sin96, Fet96, Rup96]. Beide Gruppen untersuchten wenig später die Temperaturabhängigkeit der Modenfrequenzen und die Dämpfung der kollektiven Anregungen [Jin97, SK98b]. Kondensatsschwingungen mit höheren Drehimpulsen wurden von Onofrio *et al.* [Ono00] beobachtet. Bei letzterem Experiment wurde ein Laser zur Anregung des Kondensats verwendet, bei den ersteren wurde das Magnetfeld geeignet variiert. Stets gilt, dass die Symmetrie der Störung die Symmetrie der zu untersuchenden Mode besitzen muss. Mit einer zeitlichen Veränderung des axialen Offsetfelds bei einer Ioffe-Pritchard Falle können beispielsweise nur ($m = 0$)-Moden angeregt werden. Die höherfrequente der beiden Moden wurde von Chevy *et al.* [Che02] genau studiert. Dabei zeigte die radiale Mode bei tiefen Temperaturen nur eine sehr geringe Dämpfung. Auch zweikomponentige Kondensate wurden auf ihr gemeinsames Anregungsspektrum hin untersucht [Mad00]. Von Hechenblaikner *et al.* [Hec00] wurden durch Veränderung der Anisotropie der Falle zwei kollektive Anregungsmoden zur Entartung gebracht und eine Kopplung zwischen den beiden Moden beobachtet.

Experimente speziell zu nichtlinearen Effekten bei Bose-Einstein-Kondensaten wurden ebenfalls durchgeführt. Deng *et al.* [Den99a] wiesen die so genannte Vierwellenmischung in Bose-Einstein-Kondensaten nach, ein Prozess der aus der nichtlinearen Optik bekannt ist. Die Erzeugung dunkler Solitonen bei repulsiver Wechselwirkung [Bur99, Den00] und heller Solitonen in Kondensaten mit attraktiver Wechselwirkung [Kha02] gelang ebenfalls.

6.2 Durchführung der Experimente

Als Ausgangspunkt für unser Experiment dient ein Bose-Einstein-Kondensat, das zunächst an der Mikrostruktur erzeugt wird. Das Fallenpotenzial hat dabei Oszillationsfrequenzen von 500 Hz radial und 14 Hz axial. Die Kondensatsatomzahl ist mit maximal 100000 Atomen vergleichsweise gering gehalten, um über die teilweise bis zu 5 Stunden dauernde Messzeit möglichst konstante Bedingungen zu gewährleisten. Nach der Erzeugung des Kondensats wird die Radiofrequenz ausgeschaltet, alle Stromstärken werden halbiert und ein zusätzliches, longitudinales Offsetfeld wird

Offsetfeld	B_0	3,5 G
radiale Oszillationsfrequenz	ω_ρ	$2\pi \times 110 \text{ s}^{-1}$
axiale Oszillationsfrequenz	ω_z	$2\pi \times 8 \text{ s}^{-1}$
Aspektverhältnis der Falle	α	14
Atomzahl	N_0	1×10^5
zentrale Dichte	n_0	$5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$
chemisches Potenzial	μ/k_B	30 nK
radialer Thomas-Fermi-Radius	r_ρ	3 μm
axialer Thomas-Fermi-Radius	r_z	40 μm

Tabelle 6.1: Die Startparameter des Kondensats und des Fallenpotenzials. Von oben: Feldbetrag im Fallenzentrum, radiale und axiale Oszillationsfrequenz, Aspektverhältnis, Teilchenzahl, Dichte, chemisches Potenzial, radialer und axialer Radius in der Falle.

angelegt¹. Die axiale Oszillationsfrequenz beträgt dann 8 Hz. Durch das hohe Offsetfeld von 3,5 G sinkt die radiale Oszillationsfrequenz auf $\omega_\rho = 2\pi \times 110 \text{ s}^{-1}$. Dieses Vorgehen ist nötig um die Dichte des Kondensats auf $5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ zu reduzieren und damit eine Lebensdauer des Kondensats von über 1 s zu erreichen. Tabelle 6.1 fasst die Parameter von Kondensat und Potenzial zusammen.

Nach der Präparation des Kondensats wird die linke der beiden Drahtschlaufen (siehe Abb. 6.1) angeschaltet. Sie produziert einen Magnetfeldgradienten, der das Fallenminimum auslenkt. Die Auslenkung geschieht innerhalb von 400 ms mit einer linearen Rampe. Am Ende dieser Auslenkung wird die Schlaufe in weniger als 60 μs nichtadiabatisch ausgeschaltet. Dies definiert den Startzeitpunkt $t = 0$. Das Kondensat oszilliert nun frei in dem Potenzial (Abb. 6.1). Alle 5 ms bzw. 10 ms wird eine Absorptionaufnahme des Kondensats nach 20 ms Flugzeit gemacht. Da diese Abbildungsmethode destruktiv ist, muss danach eine neue Wolke präpariert werden und die Schwingung erneut gestartet werden. Der Beobachtungszeitraum liegt zwischen 700 ms und 2,7 s und ist limitiert durch die Lebensdauer des Kondensats. Die Messreihen haben zwischen 150 und 300 Datenpunkte und die Abtaststrategie ist so gewählt, dass die axiale Oszillation genau abgetastet wird. Die Absorptionaufnahmen des Kondensats werden an ein Thomas-Fermi-Profil angepasst und die radiale und axiale Radien r_ρ und r_z des Kondensats bestimmt. Bei einem ausgeprägten Anteil an thermischen Atomen wird die bimodale Verteilung (5.13) angepasst. Die Daten der Mittelpunkte ergeben die Schwerpunktsbewegung und aus den Kondensatsbreiten wird das Aspektverhältnis

$$\alpha_K = \frac{r_\rho}{r_z} \quad (6.1)$$

berechnet, das unabhängig von der Atomzahl ist.

¹Dazu sind zwei Spulen mit je 180 Windungen und 10 cm Durchmesser außerhalb der Vakuumkammer montiert.

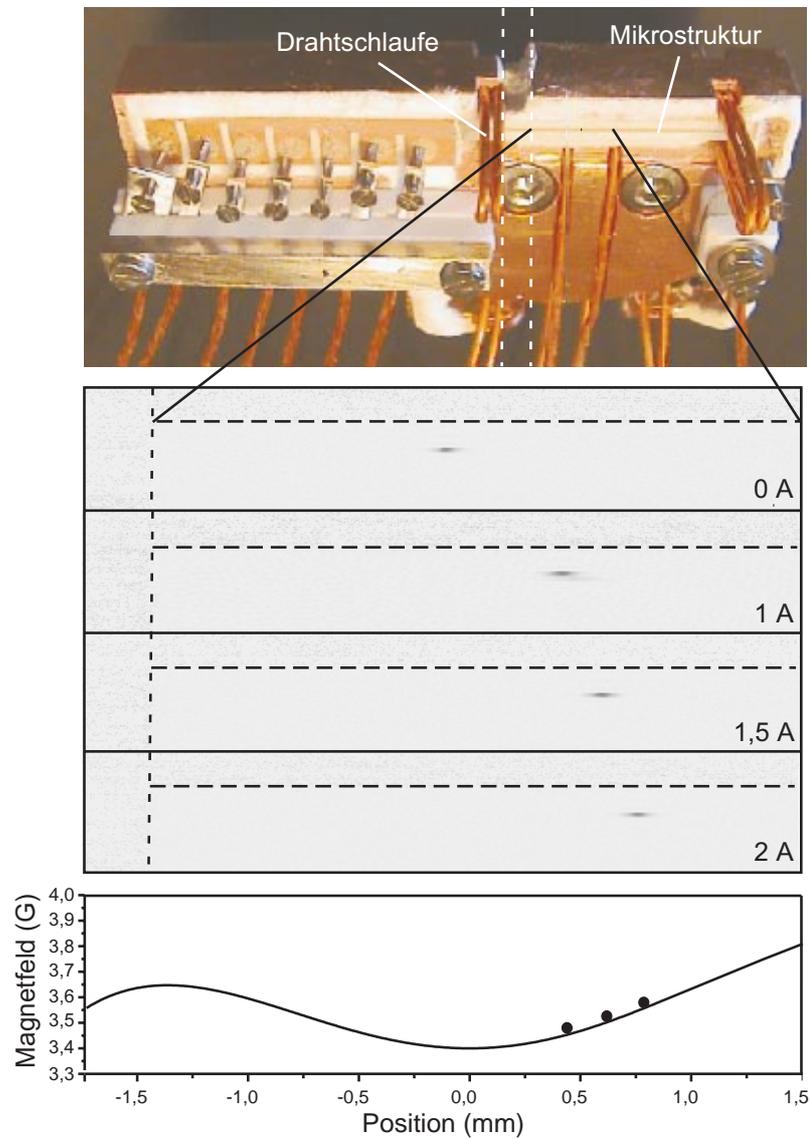


Abbildung 6.1: Experimentelle Anordnung. Das obere Bild zeigt die montierte Mikrostruktur. Die beiden weißen gestrichelten Linien markieren die Position des Ioffe-Drahtes (vgl. Abb. 4.11). Darunter sind vier Absorptionsspektren gezeigt. Die linke gestrichelte Linie markiert den rechten Rand des Ioffe-Drahtes und die waagrechte Linie die Oberfläche der Mikrostruktur. Das Kondensat befindet sich zu Beginn im Zentrum der Mikrofalle (erstes Bild). Durch Anschalten der Drahtschleife wird es nach rechts ausgelenkt. Die drei unteren Absorptionsspektren zeigen das Kondensat für Ströme von 1 A, 1,5 A und 2 A in der Schleife. Die dazu gehörenden Auslenkungen betragen 0,45 mm, 0,63 mm und 0,79 mm. Der Magnetfeldbetrag entlang der Schwingungsrichtung ist darunter gezeigt. Ein-gezeichnet sind die Start- bzw. Umkehrpunkte. Die radiale Oszillationsfrequenz ändert sich entlang der Schwingungsachse um weniger als 10 Prozent.

Bezeichnung der Messung	Strom in der Leiterschleife	Auslenkung	Abtastrate	Dauer	Daten- punkte
A	1 A	0,45 mm	200 Hz	1,015 s	204
B	1,5 A	0,63 mm	100 Hz	2,700 s	271
C	2 A	0,79 mm	200 Hz	0,765 s	154

Tabelle 6.2: Parameter der einzelnen Messreihen. In der linken Spalte steht die Bezeichnung der Messreihe. Sie soll den verwendeten Strom zur Auslenkung des Kondensats andeuten.

Insgesamt wurden Daten für drei verschiedene Auslenkungen — entsprechend einem Strom von 1, 1,5, und 2 A in der Drahtschleife — aufgenommen. Im weiteren Verlauf des Kapitels werden die drei Messreihen als Messung A, B und C bezeichnet. Tabelle 6.2 gibt einen Überblick über die durchgeführten Messreihen. Abb. 6.2 zeigt die ersten beiden Schwingungsperioden bei Messung C. Der Abstand zwischen den Absorptionenaufnahmen beträgt 10 ms. Neben der Schwerpunktsbewegung ist eine deutliche Formänderung des Kondensats während der Schwingung festzustellen. In Anhang B sind die Daten aller drei Messreihen zusammengefasst.

Modellpotenzial und Analysemethode

In Kapitel 2 wurde das theoretische Modell zur Beschreibung der Dynamik der Kondensate vorgestellt. Es besteht aus den beiden gekoppelten Gleichungssystemen (2.49) und (2.50). Das Potenzial des anharmonischen Wellenleiters hat die Form

$$U(\rho, z) = (k_0 + k_2 z^2 + k_4 z^4) \rho^2 + a z^2 + b z^3 + c z^4 + d z^5. \quad (6.2)$$

In axialer Richtung wurde das Potenzial bis zur fünften Ordnung entwickelt. Der Term fünfter Ordnung hat auf die Messreihen nur einen geringen Einfluss, höhere Terme wurden ganz vernachlässigt. Die radiale Oszillationsfrequenz ändert sich entlang der axialen Richtung um weniger als 10 Prozent. Dies wird in (6.2) durch die Koeffizienten k_2 und k_4 berücksichtigt, ihr Einfluss auf die Dynamik ist aber ebenfalls gering. Für das Potenzial (6.2) lauten die gekoppelten Bewegungsgleichungen für den Schwerpunkt und die innere Dynamik nach (2.49) und (2.50)

$$\begin{aligned} m \ddot{R}_z &= -2a R_z - 3b R_z - 4c R_z - 5d R_z \\ \ddot{\lambda}_z &= \frac{\omega_{z0}^2}{\lambda_\rho^2 \lambda_z^2} - \frac{1}{m} (2a + 6b R_z + 12c R_z^2 + 20d R_z^3) \lambda_z \\ \ddot{\lambda}_\rho &= \frac{\omega_{\rho 0}^2}{\lambda_\rho^3 \lambda_z} - \frac{2}{m} (k_0 + k_2 R_z^2 + k_4 R_z^4) \lambda_\rho. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Die Anfangsbedingungen sind

$$\lambda_z(0) = \lambda_\rho(0) = 1 \quad (6.4)$$

$$\dot{\lambda}_z(0) = \dot{\lambda}_\rho(0) = 0 \quad (6.5)$$

$$R_z(0) = R_0 \quad (6.6)$$

$$\dot{R}_z(0) = v_0. \quad (6.7)$$

Eine geringe Startgeschwindigkeit kommt durch die anfängliche Auslenkungsphase des Kondensats zustande. Um die zeitliche Entwicklung während der Flugzeit zu berechnen, muss in den Differenzialgleichungen das Potenzial gleich null gesetzt werden. Zusammen mit den beiden Startbedingungen für R_z enthält das Modell 11 Parameter ($k_0, k_2, k_4, a, b, c, d, \omega_{\rho 0}$ und $\omega_{z 0}$). Alle lassen sich letztlich aus dem Magnetfeldverlauf ableiten, so dass ein Test der Theorie ohne freien Parameter möglich

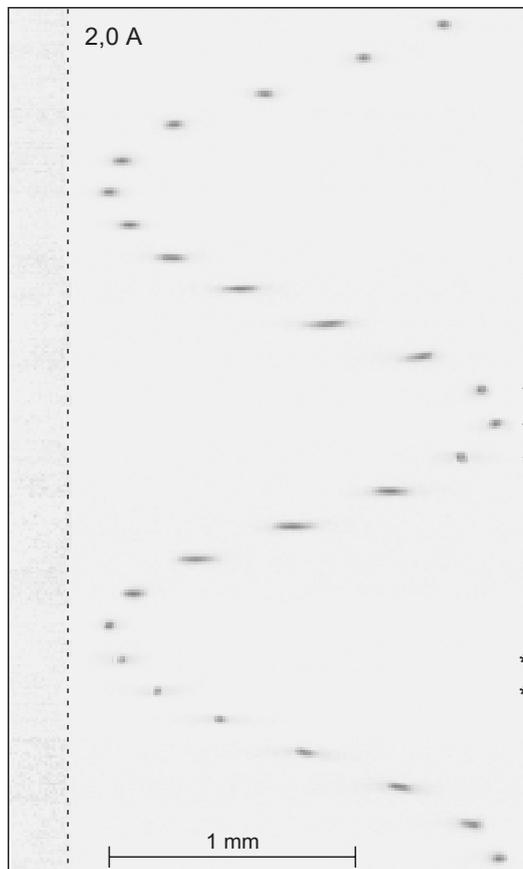


Abbildung 6.2: Schwingung des Kondensats bei 0,79 mm Auslenkung (Messung C). Die Absorptionenaufnahmen haben einen Abstand von 10 ms. Die Bilder sind untereinander angeordnet und die Zeit nimmt von oben nach unten zu. Gezeigt werden die ersten beiden Schwingungsperioden. Neben der Schwerpunktsbewegung tritt eine Formänderung des Kondensats auf. Die linke gestrichelte Linie markiert den rechten Rand des Ioffe-Drahtes, der das Blickfeld einengt. Für die beiden anderen Messreihen sind die Absorptionenaufnahmen in Anhang B gezeigt. Die mit kleinen Sternchen markierten Aufnahmen werden für die Auswertung nicht verwendet, da sie starke Beugungseffekte zeigen.

Messung	A	B	C
α_1	0,6604(7) mm	0,926(2) mm	1,169(1) mm
α_2	0,0126(7) mm	0,033(2) mm	0,072(2) mm
α_3	—	0,009(3) mm	0,025(1) mm
$\omega_1/2\pi$	8,1886(5) Hz	7,9647(4) Hz	7,5321(7) Hz
$\omega_2/2\pi$	16,35(2) Hz	15,92(1) Hz	15,07(1) Hz
$\omega_3/2\pi$	—	23,93(4) Hz	22,64(4) Hz
ϕ_1	133,8(1)	134,2(2)	131,1(1)
ϕ_2	155(5)	151(5)	146(2)
ϕ_3	—	326(18)	328(5)
Resultierende Parameter für die Schwingung in der Falle			
α'_1	0,460 mm	0,653 mm	0,851 mm
α'_2	0,006 mm	0,015 mm	0,034 mm
α'_3	—	0,003 mm	0,008 mm
ϕ'_1	88(1)	89,0(2)	87,8(1)
ϕ'_2	91(5)	87(5)	83,9(2)
ϕ'_3	—	-74(18)	-77(5)

Tabelle 6.3: Fourierkoeffizienten der Schwerpunktsbewegung für die Messreihen A, B und C nach einer Flugzeit von 20 ms. Angepasst wurde eine Testfunktion von der Form (6.8). Die unteren beiden Blöcke geben die nach (6.10) und (6.11) berechneten Werte für die Schwingung in der Falle wieder.

ist. Dazu können aus dem numerisch berechneten Magnetfeldverlauf die Parameter bestimmt, das Gleichungssystem gelöst und die Lösung mit den experimentellen Daten verglichen werden. Umgekehrt kann aber auch mittels einer Monte-Carlo-Simulation von den Messdaten auf das Magnetfeld „zurückgerechnet“ werden. Dazu werden die Parameter stochastisch variiert und die Lösung mit dem Experiment verglichen. Als Maß für die Abweichung wird das χ^2 pro Punkt berechnet. Wegen der periodischen Bewegung ist auch die Frequenzanalyse der Daten ein wichtiges Hilfsmittel. Diese wurde sowohl durch die Anpassung einer Summe harmonischer Funktionen an die Daten als auch durch diskrete Fouriertransformation durchgeführt. In Anhang B wird das numerische Verfahren zur Lösung von (6.3) kurz vorgestellt.

6.3 Schwerpunktsbewegung: Güte, Verschiebung der Grundfrequenz, Obertöne

Beispielhaft für die drei Messreihen zeigt Abb. 6.3 den Verlauf der Schwerpunktsbewegung bei Messung B. An alle drei Messreihen wurde eine Summe aus drei

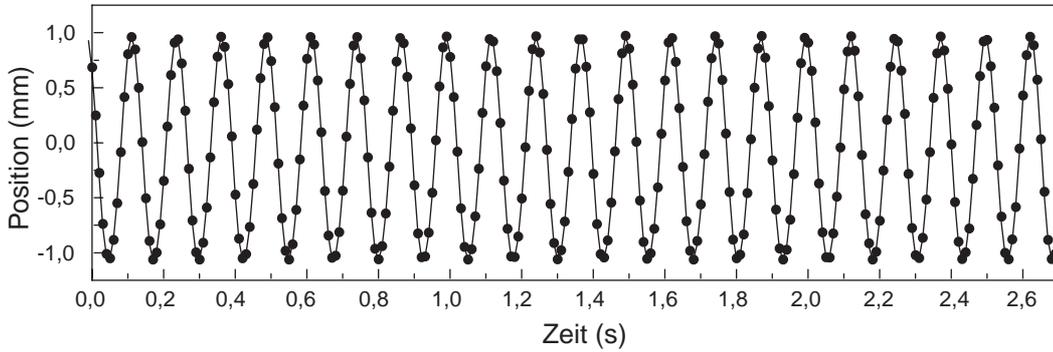


Abbildung 6.3: Messung B: Schwerpunktsbewegung nach 20 ms Flugzeit: experimentelle Daten (Punkte) und Testfunktion (durchgezogene Linie), bestehend aus drei Sinusfunktionen.

Sinusfunktionen der Gestalt

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^3 \alpha_n \sin(n\omega t + \frac{2\pi}{360} \phi_n) \quad (6.8)$$

angepasst. Tabelle 6.3 enthält die Liste der ermittelten Fourierkoeffizienten. Die beiden wichtigsten Ergebnisse sind die große Genauigkeit der Grundfrequenz und das Auftreten nichtlinearer Effekte bei zunehmender Auslenkung. Messung B, die einen Zeitraum von 2,7 s überspannt, liefert das präziseste Resultat — die Bestimmung der Grundfrequenz mit einer relativen Genauigkeit von 5×10^{-5} :

$$\omega_0/(2\pi) = 7,9647(4) \text{ Hz.}$$

Dies entspricht einer Güte von

$$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega} = 20000.$$

Aus der Güte der Schwerpunktsbewegung kann man eine untere Grenze für die (1/e)-Abklingzeit der Schwingung von 40 Minuten ableiten. Passt man einen exponentiellen Zerfall an die Kurve an, so ist auch eine unendliche Abklingzeit innerhalb des Fehlers mit den Daten vereinbar. Die Lebensdauer der Atome aufgrund von Stößen mit dem Hintergrundgas ist im Vergleich deutlich geringer und beträgt 50 s. Die tatsächliche Lebensdauer des Kondensats ist aufgrund inelastischer Stoßprozesse im Kondensat mit 1,2 s noch kürzer. Dies zeigt, dass die Verlustprozesse der Schwerpunktsbewegung keine Energie entziehen. Im Besonderen gilt dies für Stöße mit Restgasatomen. Dieser Effekt, der bei massiven Objekten unter Normalbedingungen ein Hauptmechanismus der Dämpfung ist, tritt bei unserer experimentellen Anordnung nicht auf. Das ist die Folge des großen Energieunterschieds zwischen den schwingenden Atomen und den Restgasatomen, der dafür sorgt, dass jedes getroffene Atom unmittelbar aus der Atomwolke verschwindet. Ein Kondensat ist damit

ein nahezu idealer mechanischer Schwinger mit äußerst geringer Dämpfung².

Wegen der Nichtlinearität der Differenzialgleichung für die Schwerpunktsbewegung wird die Grundfrequenz der Schwingung bei größerer Schwingungsamplitude erniedrigt. Die Schwingungsfrequenz für kleine Amplituden im Fallenminimum liegt bei 8,5 Hz. Bei Messung A (B) ist eine Frequenzverschiebung von 0,3 Hz (0,5 Hz) zu beobachten. Die deutlichste Verschiebung ergibt sich für Messung C, bei der sie mit 1 Hz mehr als 10 Prozent ausmacht. Als zweite Folge der Anharmonizität tritt Frequenzvervielfachung auf. Mit zunehmender Auslenkung werden die Beiträge der Obertöne größer und deren Amplitude kann einige Prozent der Amplitude der Grundschiwingung α_1 betragen (siehe Tabelle 6.3). Zu beachten ist, dass die Amplitude und die Phase der einzelnen Schwingungsfrequenzen durch die Flugzeit von 20 ms verändert wird. Eine Rechnung liefert für den Vergleich zwischen der Beobachtung in der Falle (gestrichene Größen) und der Beobachtung nach einer Flugzeit t (ungestrichene Größen):

$$\omega = \omega' \quad (6.9)$$

$$\alpha_n = \alpha'_n \sqrt{1 + \omega_n^2 t^2} \quad (6.10)$$

$$\phi_n = \phi'_n + \arctan \omega_n t. \quad (6.11)$$

Besonders für die im nächsten Abschnitt folgende Untersuchung der inneren Anregung ist die genaue Kenntnis des Fallenpotenzials wichtig. Aus der numerischen Berechnung des Magnetfelds kann zwar ein Potenzial ermittelt werden, dessen genauer Verlauf ist jedoch empfindlich auf die geometrische Anordnung der Magnetfeldkomponenten. Diese ist bis auf eine Genauigkeit von etwa 100 μm bekannt. Daraus folgt eine Ungenauigkeit bei der Bestimmung der höheren Koeffizienten in der Potenzialentwicklung (6.2) von bis zu 50 Prozent (siehe Tabelle 6.4). Deshalb wurde zusätzlich durch eine Monte-Carlo-Simulation nach dem besten, zu den Daten passenden Potenzial gesucht. Eine dritte Möglichkeit besteht darin, direkt aus der Schwerpunktsbewegung den Potenzialverlauf zu rekonstruieren. Dazu wird die an die Daten angepasste Funktion (6.8) zweimal abgeleitet, und man erhält die Beschleunigung in Abhängigkeit der Zeit. Invertiert man die Lösung für die Schwerpunktsbewegung $R(t)$, erhält man die Zeit in Abhängigkeit des Orts. Beides zusammen ergibt dann die ortsabhängige Beschleunigung und durch Integration ergibt sich der Potenzialverlauf. Tabelle 6.4 fasst die Ergebnisse zusammen. Für die Koeffizienten hoher Ordnung gibt die Magnetfeldsimulation die genauesten Ergebnisse, da die hohen Koeffizienten einen immer kleiner werdenden Einfluss auf die Messdaten haben.

²Für massive Körper der Masse m und der Angriffsfläche A kann eine Untergrenze für die Dämpfung ihrer Schwingung aufgrund des Luftwiderstandes angegeben werden [Boc96]:

$$Q_{\max} = \frac{2\pi\nu}{3Ap} m \sqrt{\frac{\pi k T}{2m_{\text{Gas}}}}.$$

p ist der Luftdruck, T die Temperatur, ν die Schwingungsfrequenz und m_{Gas} die Masse der Luftmoleküle. Um eine Güte von 20000 zu erreichen, müsste eine schwingende Bleikugel ($\rho = 11,4 \text{ g/cm}^3$) bei normalem Luftdruck, Raumtemperatur und gleicher Frequenz 10^8 kg wiegen.

$U(x) = \mu B(x)$ mit $B(x) = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5$				
Parameter	Simulation des Magnetfelds	Monte-Carlo- Simulation	Bewegungs- gleichung	Allgemeine Lösung
a [G/mm ²]	0,225(8)	0,219(2)	0,216(7)	0,219
b [G/mm ³]	-0,011(5)	-0,015(2)	-0,013(5)	-0,013
c [G/mm ⁴]	-0,027(3)	-0,034(2)	-0,029(7)	-0,033
d [G/mm ⁵]	-0,007(1)	-0,007(4)	-0,013(4)	-0,007

Tabelle 6.4: Parameter für den Magnetfeldbetrag in axialer Richtung. Die erste Spalte gibt die durch die numerische Berechnung der Magnetfelder gewonnenen Werte wieder. Die folgende Spalte zeigt die durch Monte-Carlo-Simulation erhaltenen Werte und die dritte Spalte die durch direktes Einsetzen der Lösung in die Bewegungsgleichung gewonnenen Parameterwerte (siehe Text). In Klammern ist der Fehler angegeben, mit der die verschiedenen Verfahren die Magnetfeldparameter reproduzieren. Da die einzelnen Parameter miteinander korreliert sind (eine Erhöhung von a kann beispielsweise durch eine entsprechende Reduzierung von c größtenteils ausgeglichen werden), sind die angegebenen Fehler nicht unabhängig voneinander. Die Spalte ganz rechts zeigt einen Parametersatz, der für alle drei Messreihen gute Ergebnisse liefert.

Für die niedrigen Koeffizienten liefern die Monte-Carlo-Simulation die genauesten Werte.

Die große Präzision der Schwerpunktsbewegung legt die Frage nahe, ob das Prinzip der Schwerpunktschwingung als Detektor für Beschleunigungen eingesetzt werden kann. Dazu kann man die folgende Abschätzung machen. Eine Kraft F , die entlang der Achse des Potentials gerichtet ist, verschiebt den Nullpunkt des Potentials um g/ω^2 , wobei $g = F/m$ die entsprechende Beschleunigung ist. Bei den durchgeführten Experimenten kann der Mittelpunkt des Fallenpotentials durch die Monte-Carlo-Simulation auf besser als einen Mikrometer bestimmt werden. Daraus folgt eine Empfindlichkeit für die Beschleunigungsmessung von

$$g_{\min} = 10^{-3} \frac{m}{s^2}.$$

6.4 Kollektive Anregungen des Kondensats

Abb. 6.4 zeigt zunächst die gemessenen Werte des Aspektverhältnisses (6.1) für die drei Messreihen zusammen mit einer angepassten Testfunktion, bestehend aus je drei Sinusfunktionen der Gestalt

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^3 a_n \sin(\omega_n t + \frac{2\pi}{360} \phi_n). \quad (6.12)$$

Im Unterschied zu (6.8) können hier beliebige Frequenzen auftreten, da die Bewegungsgleichungen nichtlinear sind. Bei allen drei Messungen dominieren drei Fre-

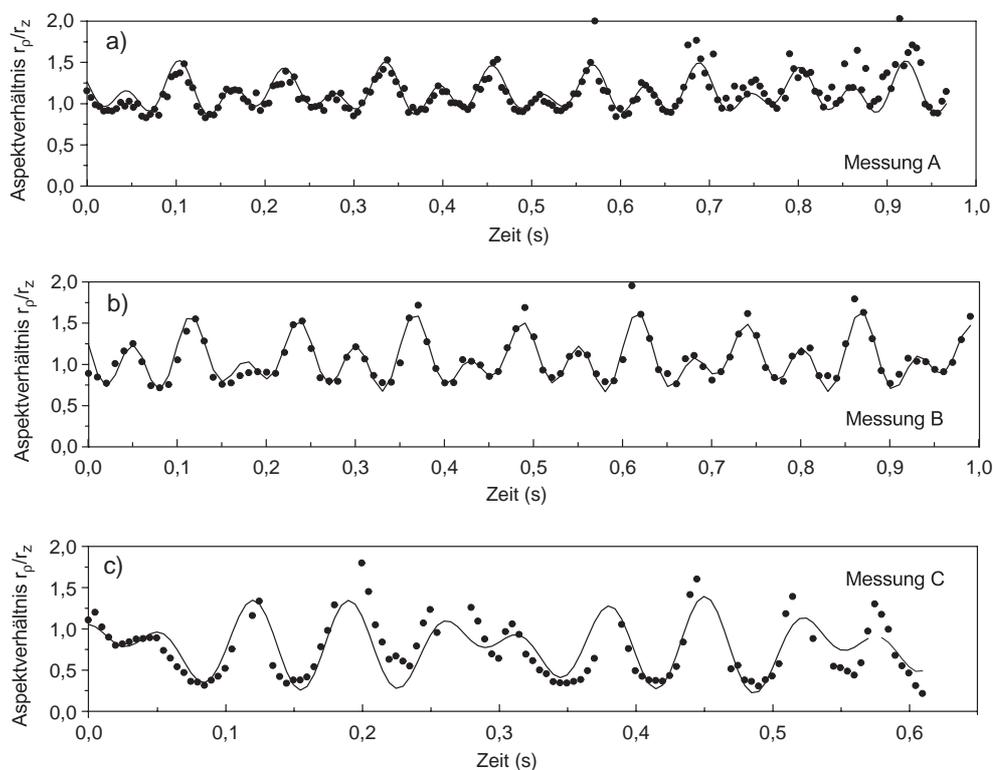


Abbildung 6.4: Gemessenes Aspektverhältnis (Punkte) und Testfunktion (durchgezogene Linie), bestehend aus drei Sinusfunktionen für die Messungen A, B und C. Die Parameter für die Funktionen sind in Tabelle 6.5 angegeben. Bei Messung B sind nur die Messpunkte innerhalb der ersten Sekunde gezeigt. Die gesamte Messreihe ist in Abb. 6.9 gezeigt. Die in Abbildung c) fehlenden Messpunkte konnten wegen der begrenzten Auflösung des Abbildungssystems nicht ausgewertet werden.

quenzen: Die Grundfrequenz, die doppelte Frequenz und die Frequenz der Quadrupolresonanz. In Tabelle 6.5 werden die ermittelten Fourierkoeffizienten angegeben. Zum Vergleich mit der Schwerpunktsbewegung (Tabelle 6.3) sind jeweils in Klammern die Fourierkoeffizienten für das Verhalten in der Falle angegeben. Diese beruhen nicht auf Messdaten, sondern auf einer Simulation. Man sieht, dass die Schwingung des Aspektverhältnisses bei der einfachen und doppelten Grundfrequenz phasengleich mit der Schwerpunktsbewegung ist. Dies ist Folge des harmonischen Antriebes bei diesen beiden Frequenzen aufgrund der Schwerpunktsbewegung. Die Amplitude der doppelten Frequenz a_2 ist dabei größer als die der Grundfrequenz a_1 , was Ausdruck des starken Beitrags vierter Ordnung im Potenzial ist (Koeffizient c in Tabelle 6.4). In Abschnitt 2.3.2 wurde gezeigt, dass a_2 quadratisch von der Amplitude der Schwerpunktsbewegung α_1 abhängt und a_1 linear. Diese Vorhersage wird durch die experimentellen Daten bestätigt, die für größeres α_1 ein größeres Verhältnis a_2/a_1 aufweisen. Die Frequenz der Quadrupolresonanz liegt selbst bei großer

Messung	A		B		C	
ω_1	8,16		7,98		7,5	
ω_2	16,33		15,92		15,3	
ω_3	12,6		12,1		11,6	
a_1	0,15	(0,012)	0,21	(0,013)	0,07	(0,019)
a_2	0,19	(0,008)	0,28	(0,012)	0,34	(0,043)
a_3	0,05	—	0,10	(0,002)	0,27	(0,050)
ϕ_1	135	(93)	124	(93)	52	(104)
ϕ_2	165	(97)	165	(96)	140	(67)
ϕ_3	332	—	240	(-29)	340	(-90)
Frequenzverhältnis						
ω_3/ω_1	0,97 $\sqrt{5/2}$		0,96 $\sqrt{5/2}$		0,99 $\sqrt{5/2}$	

Tabelle 6.5: Fourierkoeffizienten des Aspektverhältnisses für die drei Messreihen. Angepasst wurde eine Summe aus drei Sinusfunktionen (6.12). Die Werte in Klammern sind berechnete Werte für die Bewegung in der Falle. Sie machen einen Vergleich mit der Schwerpunktsbewegung (Tabelle 6.3) möglich. In der letzten Zeile wird die Frequenz der Quadrupolmode mit dem theoretischen Wert für kleine Amplituden verglichen.

Amplitude sehr nahe bei ihrem asymptotischen Verhalten für kleine Amplituden, das durch $\omega_3 = \sqrt{5/2}\omega_1$ gegeben ist (vgl. Abschnitt 2.2.1). Die Quadrupolschwingung wird außerhalb ihrer Resonanz angeregt — die Frequenz ist nicht im Spektrum der Schwerpunktsbewegung zu finden.

Um die Experimente mit dem theoretischen Modell zu beschreiben, wurde das gekoppelte Gleichungssystem (6.3) numerisch gelöst. Für das Potenzial, den Startpunkt und die Startgeschwindigkeit wurden die durch die entsprechende Monte-Carlo-Simulation erhaltenen Parameter eingesetzt. Als zusätzlicher Parameter musste ein Multiplikationsfaktor eingefügt werden, mit dem die Daten für das Aspektverhältnis multipliziert werden. Er beträgt bei allen Messungen 0,83. Der Ursprung dieser Korrektur bleibt unklar. Wahrscheinlich ist ein systematischer Fehler bei der Messwerterfassung, der zu einer unterschiedlichen Skalierung³ in vertikaler und horizontaler Richtung führt.

Abb. 6.5 zeigt das gemessene Aspektverhältnis zusammen mit dem theoretischen Modell. Das Ergebnis des Modells wurde zusätzlich mit den Messdaten für die Schwerpunktsbewegung verglichen und jeweils die mittlere quadratische Abweichung χ^2 ermittelt. Ein Vergleich mit den Werten für χ^2 , die bei der Anpassung der Testfunktion ermittelt werden, zeigt, dass mit dem theoretischen Modell ähnliche oder

³In vertikaler Richtung wird die Abbildung über aufeinanderfolgende Flugzeitmessungen geichet. Durch Anpassen einer Parabel wird die Beschleunigung ermittelt und mit der Erdbeschleunigung verglichen. Bei richtiger Eichung sind beide gleich. Die Eichung in horizontaler Richtung wird aus der vertikalen Eichung mit Hilfe der Maße der Kamerapixel gewonnen.

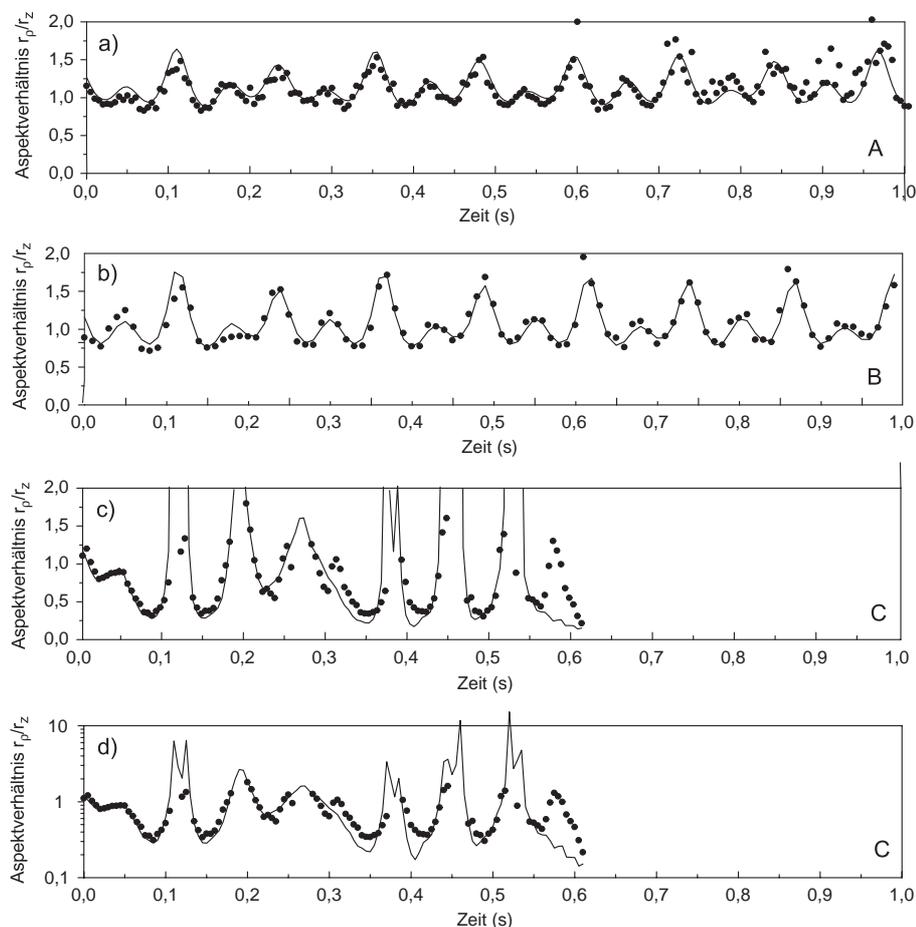


Abbildung 6.5: Gemessenes Aspektverhältnis (Punkte) und theoretisches Modell (durchgezogene Linie) für die Messreihen A, B, und C. Kurve d) zeigt dieselben Daten wie c) in logarithmischer Darstellung.

sogar leicht bessere Werte für χ^2 erzielt werden. Die Daten werden also insgesamt sehr gut durch das Modell beschrieben.

Ein gesondertes Interesse muss der Messung C gelten. Wie in Abb. 6.5 zu sehen ist, sagt die Theorie sehr große Amplituden für das Aspektverhältnis voraus. In Bereichen, in denen das Aspektverhältnis moderate Werte annimmt, ist die Übereinstimmung mit den experimentellen Daten zufriedenstellend. Die großen Werte für das Aspektverhältnis treten bei kleiner horizontaler Ausdehnung des Kondensats auf. Bei zu kleiner Wolkengröße erzeugt die begrenzte Auflösung des Abbildungssystems Interferenzen und die Bilder können nicht quantitativ ausgewertet werden. Tatsächlich zeigen die Absorptionenaufnahmen der Kondensate bei Messung C (Abb. 6.2) genau bei diesen Punkten deutliche Interferenzen. Die entsprechenden Bilder sind in Abb. 6.2 mit einem Sternchen markiert. Daher ist ein Vergleich mit der Theorie ausgerechnet in diesem äußerst interessanten Bereich nicht möglich. Bemerkbar macht sich das endliche Auflösungsvermögen bei Ausdehnungen kleiner als

20 μm . Um eine Abschätzung geben zu können, wie klein die axiale Ausdehnung der Kondensate bei diesen Messpunkten ist, wurde mit einem Programm zur Analyse von Abbildungen, der verwendete Abbildungsstrahlengang simuliert. Variationen an der Größe eines Testobjektes zeigten, dass ein Objekt von 5 μm Ausdehnung zu ähnlichen Interferenzstreifen wie bei den Messungen führt. Es ist damit nicht ausgeschlossen, dass auch das Experiment die extremen Amplituden der theoretischen Vorhersage zeigt. Was die gemessenen Daten für das Aspektverhältnis betrifft, bewegen sich diese zwischen 0,2 und 1,8. Diese Änderung um fast einen Faktor 10 ist der größte je gemessene Wert für die Formschwingung eines Kondensats.

Die gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist ein klares Indiz dafür, dass das theoretische Modell alle notwendigen Kopplungen ausreichend berücksichtigt und geeignet ist, schwingende Kondensate in anharmonischen Fällen zu beschreiben. Die Abweichungen bei Messung C sind wegen der begrenzten Auflösung des Abbildungssystems kein Hinweis auf das Versagen des theoretischen Modells bei großen Auslenkungen.

6.5 Nichtlineare Kopplung zwischen den Moden

Die Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen für die interne Dynamik (6.3) ermöglicht grundsätzlich eine Kopplung der verschiedenen Schwingungsmoden des Kondensats. Erstmals wurde eine Kopplung zwischen zwei Schwingungsmoden von Hachenblaikner *et al.* [Hec00] beobachtet. Um diese Kopplung zu erreichen, wurde die Fallengeometrie so verändert, dass die radiale ($m = 0$)-Mode die doppelte Frequenz der axialen ($m = 0$)-Mode hat (siehe Gleichung (2.19)). Nach Anregung der axialen Mode kann ein Anschwingen der radialen Mode beobachtet werden. Bei den hier durchgeführten Messungen wird ebenfalls eine nichtlineare Kopplung beobachtet, die im Unterschied zu [Hec00] nichtresonant ist, das heißt, dass die beteiligten Frequenzen im Grenzwert kleiner Amplituden nicht im Spektrum vertreten sind.

Das Aspektverhältnis weist bei allen drei Messreihen die beschriebenen drei Frequenzen auf, deren Amplituden mit der Auslenkung zunehmen. Eine eindeutige Signatur für eine nichtlineare Kopplung ist das zusätzliche Auftreten von Summen- und Differenzfrequenzen im Spektrum. Abb. 6.6 zeigt ein berechnetes Spektrum für eine Auslenkung von 0,45 mm, entsprechend Messung A. Neben den drei Hauptfrequenzen treten zahlreiche andere Frequenzen auf, die alle auf Summen und Differenzen der drei Grundfrequenzen zurückzuführen sind. Um eine Frequenzmischung in den Messdaten wiederzufinden, wurde eine diskrete Fouriertransformation der Daten durchgeführt. Da bei Messung C einige Daten fehlen, wurde auf einen Algorithmus vom Lomb zurückgegriffen [Lom76, Pre88], der auch bei nicht gleichmäßig verteilten oder fehlenden Daten angewendet werden kann. In Abb. 6.7 werden die ermittelten Leistungsspektren gezeigt. Bei allen drei Messungen können die drei Hauptfrequenzen klar identifiziert werden, sie sind durch die senkrechten gestrichelten Linien markiert. Gut zu erkennen ist die Frequenzverschiebung bei größerer Auslenkung.

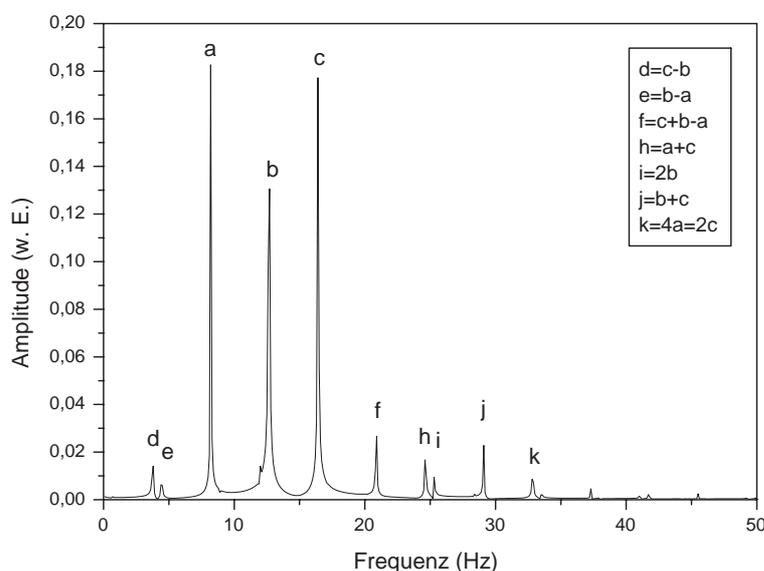


Abbildung 6.6: Frequenzmischung: Fourierspektrum des Aspektverhältnisses. Die Auslenkung beträgt 0,45 mm. Zur besseren Unterscheidung der einzelnen Frequenzen wurde das Spektrum für eine Schwingungsdauer von 10 s berechnet. Dadurch ergeben sich im Vergleich zu den Messdaten (Abb. 6.7a) Abweichungen in der Amplitude. Die drei Hauptfrequenzen liegen bei $\nu_a = 8,2$ Hz (a), $\nu_b = 12,6$ Hz (b) und $\nu_c = 16,4$ Hz (c). Im Rahmen ist die Zusammensetzung der übrigen Frequenzen als Mischungen der drei Grundfrequenzen angegeben.

Während bei den Messungen A und B die Mischfrequenzen zu schwach ausgeprägt sind, um nachgewiesen werden zu können, zeigt Messung C einen merklichen Frequenzanteil bei 4 Hz (Markierung iv) und bei 26 Hz (Markierung v). Diese beiden Beiträge wurden mit einer fünfkomponentigen Testfunktion der Form (6.12) genauer untersucht. Tabelle 6.6 gibt die gefundenen Frequenzen und Amplituden an. Der Wert für χ^2 zeigt die Entwicklung des Fehlers bei der Hinzunahme der nächsten Frequenz in die Testfunktion. Vergleicht man die gefundenen Werte, so stellt man fest, dass mit nur 5 bzw. 1 Prozent Abweichung gilt:

$$\omega_4 = \omega_3 - \omega_2 \quad (6.13)$$

$$\omega_5 = \omega_3 + \omega_2. \quad (6.14)$$

Darüberhinaus ist im Spektrum in Abb. 6.7 auch ein Beitrag bei 30 Hz zu sehen (Markierung vi), entsprechend der vierfachen Grundfrequenz. Dieser konnte jedoch nicht durch eine erweiterte Testfunktion erfasst werden. Die experimentellen Daten zeigen also genau wie die Theorie das Auftreten von Summen- und Differenzfrequenzen, was als klarer Beweis für die nichtlineare Kopplung der Moden anzusehen ist.

	Frequenz	Amplitude	χ^2
$\omega_1/2\pi$	7,5(2)	0,09(2)	0,0445
$\omega_2/2\pi$	11,64(8)	0,28(3)	0,0445
$\omega_3/2\pi$	15,25(6)	0,37(3)	0,0445
$\omega_4/2\pi$	3,8(1)	0,21(3)	0,0296
$\omega_5/2\pi$	26,3(3)	0,06(2)	0,0283

Tabelle 6.6: Frequenzmischung: Amplituden und Frequenzen des Aspektverhältnisses bei Messung C. Angepasst wurde eine Summe aus fünf Sinusfunktionen. Das angegebene χ^2 gibt die Fehlerentwicklung bei Hinzunahme der jeweiligen Frequenz an. In Klammern ist der Fehler in der letzten Stelle angegeben.

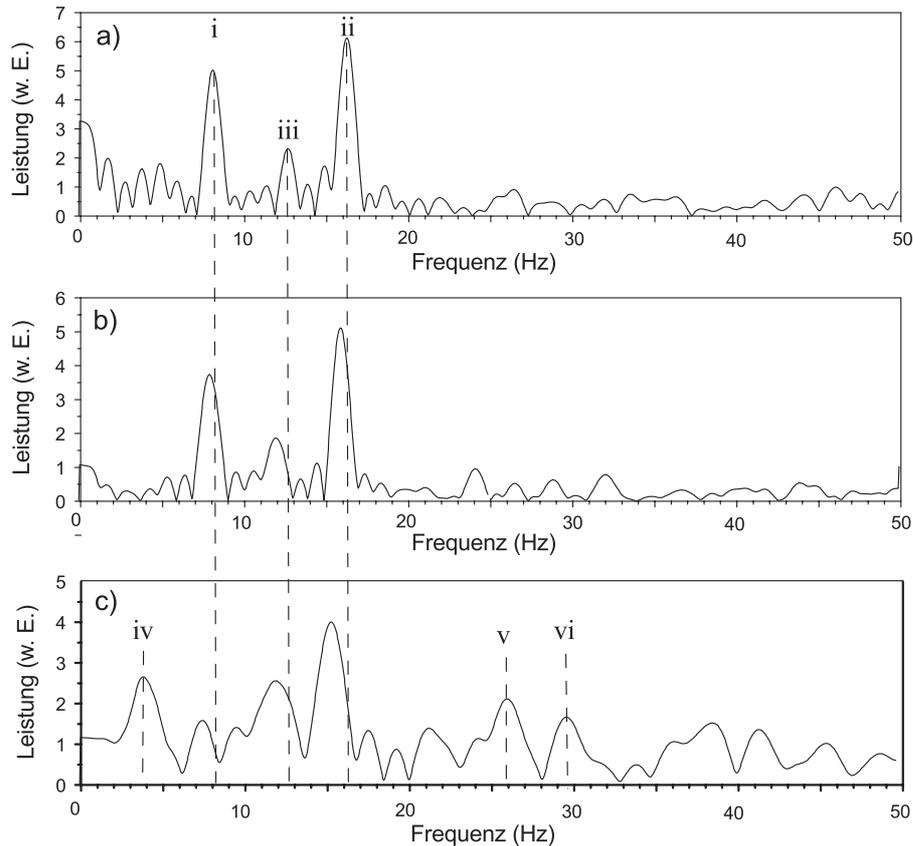


Abbildung 6.7: Spektren der Aspektverhältnisse für die drei Messreihen A (a), B (b) und C (c). Gestrichelt eingezeichnet sind Grundfrequenz (i) und die doppelte Frequenz (ii). (iii) markiert die angeregte Quadruplmode des Kondensats (vgl. Tabelle 6.5). Die Erniedrigung der drei Frequenzen mit zunehmender Auslenkung ist deutlich zu erkennen. Die Markierungen (iv), (v) und (vi) in Abbildung c) sind zusätzliche Beiträge aufgrund von Frequenzmischung.

6.6 Energiebilanz und Verluste

Während der Formschwingung des Kondensats wird ständig Energie zwischen drei verschiedenen Energieformen umverteilt. Dies sind die kinetische Energie, die potenzielle Energie und die Wechselwirkungsenergie. Der Erwartungswert aller drei lässt sich mit Hilfe der Kondensatswellenfunktion (2.51) berechnen:

$$E_{\text{kin}} = \int \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi|^2 d^3x = \frac{1}{7}\mu \sum_i \frac{\dot{\lambda}_i^2}{\omega_{i0}^2} \quad (6.15)$$

$$E_{\text{ww}} = \int \frac{g}{2} |\psi|^4 d^3x = \frac{2}{7}\mu \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad (6.16)$$

$$E_{\text{pot}} = \int U(x) |\psi|^2 d^3x = \frac{1}{7}\mu \sum_i \frac{\partial^2 U(R(t))}{\partial x_i^2} \frac{\lambda_i^2}{m\omega_{i0}^2}. \quad (6.17)$$

Bei der potenziellen Energie wurde der zeitliche Antrieb durch die Schwerpunktsbewegung $R(t)$ eingesetzt. Außerdem enthält die Schwerpunktsbewegung kinetische und potenzielle Energie:

$$E_{\text{SPkin}} = \frac{1}{2}m \sum_i \dot{R}_i^2 \quad (6.18)$$

$$E_{\text{SPpot}} = U(R). \quad (6.19)$$

Die Energie der Schwerpunktsbewegung ist bei den Experimenten 200 bis 500 mal so groß wie die der inneren Anregungen. Für Messung A sind in Abb. 6.8 die drei Beiträge des Kondensats zur Gesamtenergie dargestellt. Summiert man die Beiträge für das Kondensat auf, stellt man fest, dass die Summe nicht konstant ist, sondern um den Mittelwert von $5/7\mu$ schwankt. Hier bezeichnet μ das chemische Potenzial. Nur für den Fall einer konstanten Potenzialkrümmung in (6.17) ist die Energie der kollektiven Anregung erhalten. Tatsächlich tauscht die interne Dynamik Energie mit der Schwerpunktsbewegung aus. Wie in Anhang A.5 gezeigt wird, lassen sich die Bewegungsgleichungen aus einem Variationsprinzip herleiten. Die zugehörige Hamiltonfunktion besteht aus der Summe der oben berechneten fünf Energien. Dabei erhält die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt neben dem Potenzialgradienten einen zusätzlichen Term. Erst wenn das gesamte gekoppelte Gleichungssystem inklusive dieses Korrekturterms gelöst wird, ist die berechnete Gesamtenergie erhalten.

Die Kopplung der kollektiven Anregungen an die Schwerpunktsbewegung ist proportional zum Quadrat der Kondensatsausdehnung, und damit eine Kopplung zweiter Ordnung, wenn das Verhältnis zwischen Kondensatsradius und Schwerpunktsauslenkung als Entwicklungsparameter betrachtet wird. Die ausgetauschte Energie beträgt $0,1\mu$ (Messung A) und $0,3\mu$ (Messung B). In beiden Fällen entspricht dies etwa 0,5 Tausendstel der Gesamtenergie der Schwerpunktsbewegung. Daraus ergibt sich eine relative Amplitudenänderung der Schwerpunktsbewegung von

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha} = \frac{1}{4000}.$$

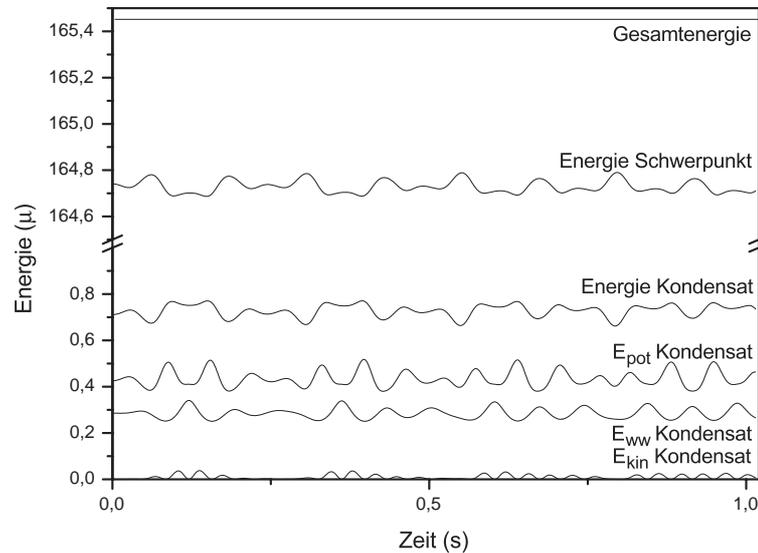


Abbildung 6.8: Energiebilanz während der Kondensatsschwingung. Für Messung A wurden aus der numerischen Lösung nach (6.15) die verschiedenen Beiträge zur inneren Energie des Kondensats berechnet. Die Energie ist in Einheiten des chemischen Potentials μ angegeben. Erst durch Hinzunahme der Schwerpunktsenergie bleibt die Gesamtenergie erhalten.

Um auch experimentell diese Kopplung zu zeigen, müsste eine Amplitudenänderung von $0,1\ \mu\text{m}$ nachgewiesen werden. Das liegt außerhalb der momentan erreichbaren Genauigkeit und der experimentelle Nachweis dieser Kopplung muss ausbleiben. Außerdem ist die Amplitudenänderung wesentlich kleiner als die Kondensatsausdehnung und deshalb werden auch Abweichungen des Kondensats vom reinen Thomas-Fermi-Profil wichtig. Für das theoretische Modell ist der Korrekturterm von großer Wichtigkeit, da mit ihm die numerische Stabilität der Simulationen über die Energieerhaltung geprüft werden kann.

Verluste

Die Lebensdauer der Kondensate bei den Messungen beträgt zwischen $0,5\ \text{s}$ und $1,2\ \text{s}$. Dies legt die Frage nahe, inwieweit der Rückgang der Atomzahl Auswirkungen auf die Dynamik der internen Anregungen hat. Die Differentialgleichungen (6.3) enthalten die Atomzahl nicht, da sie unter der Annahme einer konstanten Atomzahl abgeleitet wurden. Die Atomzahl geht jedoch in die Anfangsbedingungen ein: Entfernt man aus einem Kondensat instantan eine Anzahl Atome, so befindet sich das verbleibende Kondensat nicht mehr in seiner Gleichgewichtsverteilung — es ist zu groß. Als Folge beginnt es zu schwingen [Mat98, Shv02]. Entfernt man die Atome langsam, so kann sich das Kondensat adiabatisch dem neuen Grundzustand anpassen [Kag96]. Bei den Messreihen führt dies dazu, dass das Aspektverhältnis unabhängig von der Atomzahl ist (siehe Abb.6.5). Für kleine Atomzahlen bricht je-

doch die Thomas-Fermi-Näherung, innerhalb der das Modell gültig ist, zusammen. Die Auswirkungen können bei Messung B beobachtet werden. In Abb.6.9 ist das Aspektverhältnis für die gesamte Dauer der Messreihe gezeigt. Deutlich zu erkennen ist ein systematischer Anstieg des Aspektverhältnisses mit der Zeit. Der Grund dafür ist die radiale Lokalisierungsenergie des Kondensats, deren Betrag vergleichbar mit der Wechselwirkungsenergie wird. Nach 2,7 s sind nur noch etwa 3000 Atome im Kondensat, also weniger als ein Zehntel der anfängliche Atomzahl, und das chemische Potenzial ist auf $\mu/k_B = 8$ nK zurückgegangen. Die Wechselwirkungsenergie ist in der Thomas-Fermi-Näherung durch (6.15) gegeben und beträgt $2/7\mu$. Sie ist damit gleich groß wie der kinetische Anteil der Grundzustandsenergie des harmonischen Oszillators, der durch

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{4}\hbar(2\omega_\rho + \omega_z) \approx 3 \text{ nK} \times k_B$$

gegeben ist. Während in axialer Richtung die Thomas-Fermi-Näherung gut erfüllt ist, sorgt die kinetische Grundzustandsenergie in radialer Richtung dafür, dass das Kondensat nach dem Ausschalten der Falle stärker expandiert als allein aufgrund der Wechselwirkungsenergie. Das Aspektverhältnis wird auf diese Weise erhöht. Auch quantitativ kann dieses Verhalten modelliert werden. In [PG96] werden die Bewegungsgleichungen für eine gaußförmige Kondensatswellenfunktion hergeleitet. Sie ähneln den Differentialgleichungen (6.3), enthalten aber für jede Richtung einen zusätzlichen Term, der die Lokalisierungsenergie mitberücksichtigt. Er lautet

$$\frac{\hbar^2}{m^2} \frac{1}{r_i^3}, \quad (6.20)$$

wobei r_i die Ausdehnung des Kondensats ist. Diese ist atomzahlabhängig und für sie gilt in radialer Richtung in Thomas-Fermi-Näherung

$$r_\rho = \frac{1}{\omega_\rho} \sqrt{\frac{2\mu}{m}}.$$

Das chemische Potenzial μ ist über (A.11) mit der Atomzahl verknüpft. Damit besteht eine Möglichkeit, die Verluste in das Modell zu integrieren. Die um den Term (6.20) erweiterte Gleichung für die radiale Kondensatsausdehnung lauten

$$\ddot{\lambda}_\rho = \frac{a(t)}{\lambda_\rho^3} + \frac{1}{\lambda_\rho^3 \lambda_z} - \omega_\rho^2(t) \lambda_\rho. \quad (6.21)$$

Die in Abb. 6.9 gezeigte Kurve wurde mit diesem erweiterten Modell berechnet. Mit einem linearen Anstieg von $a(t)$ können die Daten recht gut reproduziert werden. Das erweiterte Modell soll deutlich machen, dass der Anstieg des Aspektverhältnisses auf Verluste in der Atomzahl zurückzuführen ist. Dabei verschieben sich die Energieverhältnisse zugunsten der kinetischen Grundzustandsenergie, die die radiale

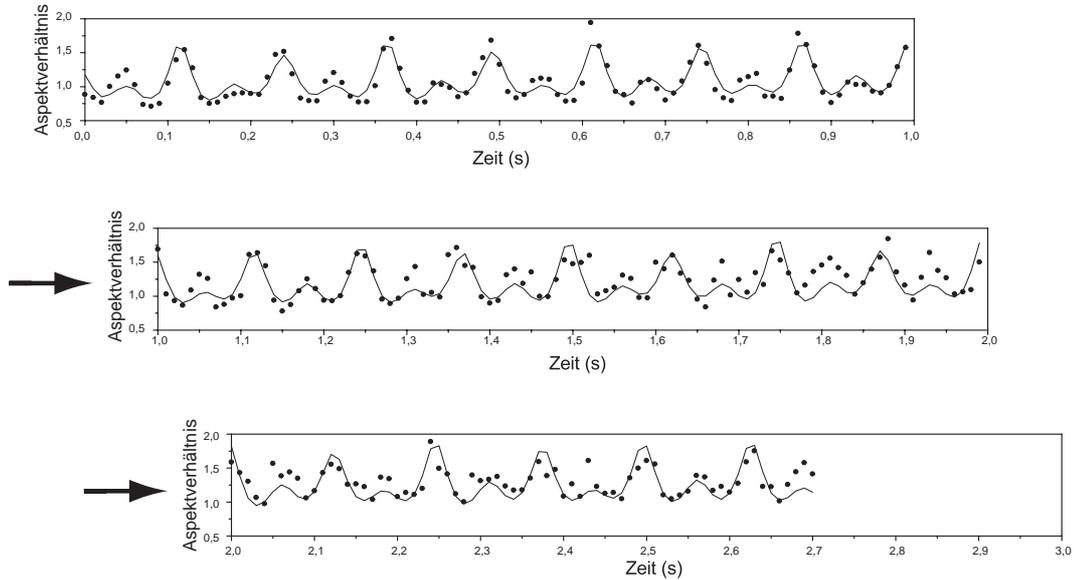


Abbildung 6.9: Aspektverhältnis bei Messung B für die gesamte Messdauer. Das untere Schaubild setzt das jeweils obere fort. Man erkennt einen systematischen Anstieg der Messdaten (Punkte). Die eingezeichnete Kurve wurde mit dem erweiterten Modell (6.21) berechnet.

Expansion des Kondensats zu dominieren beginnt. Im Grenzwert sehr kleiner Atomzahlen, wenn die Wechselwirkungsenergie kleiner als die radiale Energieaufspaltung wird,

$$E_{\text{ww}} < \hbar\omega_{\rho}, \quad (6.22)$$

nähert sich die radiale Ausdehnung des Kondensats einem konstanten Wert an.

Die Bedingung (6.22) wurde in [Gör01] dazu verwendet, ein eindimensionales Bose-Einstein-Kondensat zu definieren. Bei unserem Experiment ist dieses Kriterium am Ende von Messreihe B ebenfalls erfüllt, jedoch wird das Kondensat zu diesem Zeitpunkt immer noch sehr gut durch die dreidimensionale Theorie der Bewegungsgleichungen beschrieben. Der Grund dafür ist, dass die thermische Wolke noch zahlreiche radiale Vibrationsniveaus besetzt. Erst wenn die mittlere thermische Energie der Atomwolke kleiner als die radiale Energieaufspaltung ist, ist der radiale Freiheitsgrad auch für die thermischen Atome ausgefroren und man kann eine Abweichung der Dynamik von dem dreidimensionalen Modell erwarten.

6.7 Chaotisches Verhalten

Die Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen für die Kondensatsdynamik (6.3) erlaubt prinzipiell Lösungen mit chaotischer Dynamik. In mehreren theoretischen Arbeiten wurden verschiedene Aspekte eines chaotischen Verhaltens herausgearbeitet. Kagan *et al.* [Kag97b] untersuchten die Auswirkungen einer instantanen Änderung

der Fallengeometrie. Das Kondensat, das ursprünglich in Ruhe ist, befindet sich nach der Änderung in einem angeregten Zustand und beginnt zu schwingen. Sie fanden periodische, quasiperiodische⁴ und chaotische Lösungen für die Kondensatdynamik. Castin und Dum [Cas97] stellten einen Zusammenhang zwischen einer chaotischen Dynamik des Kondensats und den resultierenden Verlusten für die Kondensatsatomzahl her. Salasnich [Sal00] studierte den Einfluss der Anisotropie des Fallenpotenzials auf die Dynamik und fand für rotationssymmetrische Potentiale bei bestimmten Verhältnissen von axialer und radialer Oszillationsfrequenz chaotisches Verhalten. Bei diesen „einschlägigen“ Verhältnissen sind mindestens zwei Kondensatsmoden in Resonanz. Erstmals wurde diese Resonanzen von Dalfovo *et al.* [Dal97a, Dal97b] theoretisch untersucht und von Hechenblaikner *et al.* [Hec00] experimentell benutzt, um die nichtlineare Kopplung zweier entarteter Moden zu beobachten (vgl. Abschnitt 6.5). Weitere theoretische Arbeiten, die Chaos in Systemen mit Bose-Einstein-Kondensaten untersuchen, gibt es für modulierte periodische Potentiale [Gar00] und Doppel-Potentiale [Sal02].

Integrabilität

Ein Kondensat, das sich im Ursprung eines isotropen, harmonischen Potenzials befindet und Formschwingungen ausführt, besitzt in der Thomas-Fermi-Näherung drei Freiheitsgrade: die Thomas-Fermi-Radien r_i . Ohne externen Antrieb sind drei Größen erhalten: die Energie E , der Drehimpuls L^2 und seine z -Komponente l_z . Die Zahl dieser Erhaltungsgrößen (auch Konstanten der Bewegung oder erste Integrale genannt) ist genauso groß wie die Zahl der Freiheitsgrade. Der zugängliche Phasenraum ist dadurch derart eingeschränkt, dass eine chaotische Dynamik, nicht möglich ist⁵. Systeme, in denen die Zahl der Freiheitsgrade gleich der Zahl der Erhaltungsgrößen ist, werden integrabel genannt [Tab89]. Bei rotationssymmetrischen, anisotropen Potenzialen gibt es nur zwei Erhaltungsgrößen: die Gesamtenergie E und die z -Komponente des Drehimpulses l_z . Demnach sind anisotrope Systeme nicht-integrabel und chaotisches Verhalten ist im Prinzip möglich. Allerdings konnten Fliesser *et al.* [Fli97] zeigen, dass im Grenzwert verschwindender Anregungsenergie ($E/\mu \rightarrow 0$) eine dritte Erhaltungsgröße existiert. Dadurch wird das System für kleine Amplituden integrabel. Erst ab einer gewissen Anregungsenergie ist deshalb in anisotropen Fallen mit Chaos zu rechnen. Bei dem hier durchgeführten Experiment besitzt das Kondensat vier Freiheitsgrade. Neben den drei Thomas-Fermi-Radien des Kondensats kommt noch die Schwerpunktskoordinate in axialer Richtung hinzu. Die Erhaltungsgrößen sind die Gesamtenergie E und die Drehimpulskomponente in axialer Richtung l_z . Im Grenzfall kleiner Kondensate oder kleiner Anharmonizitäten, ist die Schwerpunktsbewegung von den inneren Anregungen entkoppelt. Die Energie ist dann für beide Bewegungen getrennt erhalten. Ist die interne Anregung außer-

⁴Unter einer quasiperiodischen Bewegung versteht man eine Bewegung, deren Frequenzen ein irrationales Verhältnis zueinander haben.

⁵Bei einem äußerem Antrieb können auch isotrope Fallen Chaos zeigen [Cas97].

dem sehr klein kommt die erwähnte zusätzliche Erhaltungsgröße zum Tragen und macht das Gesamtsystem integrabel. Die hier verwendete experimentelle Anordnung erlaubt es, durch immer größere Auslenkungen, immer mehr Energie in die innere und äußere Dynamik zu stecken. Oberhalb einer kritischen Auslenkung sollte das System nicht-integrabel werden und möglicherweise chaotisches Verhalten zeigen.

Nachweismöglichkeiten für Chaos

Mathematisch streng ist Chaos nur für wenige Systeme wie den Lorentz-Attraktor zu zeigen. Es gibt jedoch verschiedene Charakteristika, die bei chaotischem Verhalten vorgefunden werden. Zuerst muss das System aus den oben genannten Gründen nicht-integrabel sein. Das wichtigste Merkmal für chaotisches Verhalten ist die Sensitivität auf minimal veränderte Startbedingungen. Dieses unter dem Namen „Schmetterlingseffekt“ bekannte Verhalten wird quantitativ durch den so genannten Lyapunov-Exponenten beschrieben. Er gibt an, wann kleine Änderungen in den Startbedingungen zu einer exponentiell ansteigenden Abweichung im Verlaufe der Dynamik führt. Bei einer chaotischen Dynamik durchläuft die Trajektorie der Lösung den Phasenraum stochastisch und kann jeden durch die Erhaltungsgrößen erlaubten Punkt im Phasenraum erreichen. Schnitte durch den Phasenraum (Poincaré-Karten), sind deshalb ebenfalls ein nützliches Hilfsmittel. Auch eine Fourieranalyse kann Indizien für Chaos an den Tag bringen: Das Anwachsen eines Rauschuntergrundes im Spektrum ist ein Anzeichen für chaotisches Verhalten [Tab89].

Chaos in Experiment und Theorie

Bei den vorliegenden Messreihen eignet sich die Fourieranalyse besonders gut, die Daten zu analysieren. Abb. 6.7 zeigt die diskreten Fourierspektren der drei Messreihen. Messung C zeigt im Vergleich zu den beiden anderen Messungen einen deutlich erhöhten Untergrund und auch ein Blick auf die Messdaten in Abb. 6.4 zeigt eine gewisse Unregelmäßigkeit. Der experimentelle Befund ist nach dem oben Gesagten ein Hinweis auf Chaos. Eine längere Messreihe und eine bessere Auflösung der Absorptionsabbildung könnten den Befund erhärten. An dieser Stelle besteht die Möglichkeit, das theoretische Modell zu analysieren. Mit den erwähnten Methoden stehen leistungsstarke Instrumente bereit, mit denen die Dynamik untersucht werden kann. Einziger freier Parameter des Modellsystems ist die anfängliche Auslenkung des Kondensats. Für das Potenzial des anharmonischen Wellenleiters wurde eines gewählt, das alle drei Messreihen gut beschreibt (siehe Tabelle 6.4, rechte Spalte). In den folgenden Abschnitten werden die Lyapunov-Exponenten, die Poincaré-Karten und die Frequenzspektren für das theoretische Modell berechnet und diskutiert.

Der Lyapunov-Exponent

Ausgangspunkt für die numerische Bestimmung des Lyapunov-Exponenten ist das n -dimensionale System autonomer Differenzialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n).$$

Man betrachtet zwei Lösungen, die zu zwei benachbarten Startbedingungen $x(0)$ und $x(0) + \delta x(0)$ gehören, und bestimmt den euklidischen Abstand zwischen den beiden Lösungen:

$$d(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta x_i^2(t)}. \quad (6.23)$$

Der Lyapunov-Exponent ist dann wie folgt definiert [Tab89]:

$$\Lambda = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ d(0) \rightarrow 0}} \left[\frac{1}{t} \ln \left(\frac{d(t)}{d(0)} \right) \right].$$

Er beschreibt die mittlere zeitliche Entwicklung einer anfänglichen Störung. Für ein exponentielles Anwachsen des Abstands $d(t)$ ist der Lyapunov-Exponent endlich und positiv. Dies bedeutet eine exponentielle Sensitivität auf die Startbedingungen. Für jede polynomiale Zeitentwicklung von $d(t)$ ist er null — auch bei quasiperiodischer Bewegung. Numerisch wird er wie folgt berechnet: Nach der Wahl der Startbedingungen (Abstand $d(0)$ und Schrittweite τ) löst man die Bewegungsgleichungen für die beiden benachbarten Trajektorien. Dann wird der Abstand d_i zwischen beiden Endpunkten nach (6.23) bestimmt. Der Endpunkt einer der beiden Trajektorien wird nun entlang des Verbindungsvektors zwischen beiden Endpunkten verschoben, bis er den ursprünglichen Abstand d_0 vom Endpunkt der anderen Trajektorie hat. Die beiden Endpunkte sind die Startpunkte für den nächsten Rechenschritt der Länge τ . Das Ganze wird N mal wiederholt. Der Lyapunov-Exponent ist dann asymptotisch gegeben durch [Tab89]

$$\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_N \quad (6.24)$$

mit

$$\Lambda_N = \frac{1}{N\tau} \left[\sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{d_i}{d_0} \right) \right].$$

Abb. 6.10 zeigt den Verlauf von Λ_N für Auslenkungen zwischen 0,6 mm und 0,7 mm. Um ihn zu berechnen wurde $N = 2 \times 10^5$ und $\tau = 10^{-3}$ s gewählt, entsprechend einer Gesamtdauer der Trajektorie von 200 s. Als Störung wurde eine kleine Abweichung von 0,1 μm in der Startauslenkung eingebaut. Zur Kontrolle der Numerik wurde bei allen Rechnungen die Gesamtenergie nach den Gleichungen (6.15)–(6.19) bestimmt und mit den Startwerten verglichen. Bei stabiler Numerik ist die relative Abweichung kleiner als 10^{-3} . Die gezeigte Kurve in Abb. 6.10 wurde bis zu einer

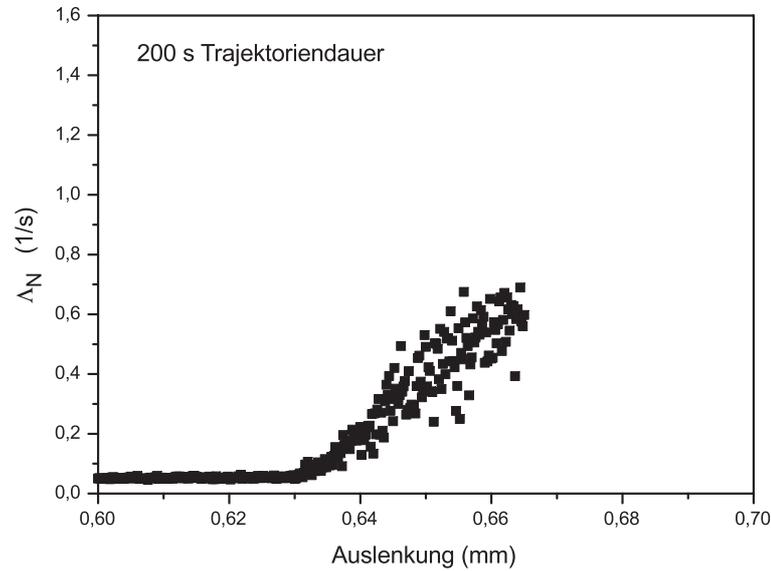


Abbildung 6.10: Lyapunov-Exponent: $\Lambda_N = \frac{1}{N\tau} \sum_{i=1}^N \ln(d_i/d_0)$ als Funktion der anfänglichen Auslenkung. Die Datenpunkte wurden für 200 s Dauer ($N = 2 \times 10^5$, $\tau = 10^{-3}$ ms, $d_0 = 0,1 \mu\text{m}$) berechnet. Für $N \rightarrow \infty$ geht Λ_N in den Lyapunov-Exponenten Λ über. Oberhalb einer Auslenkung von 0,67 mm wird die Numerik instabil und kann nicht mehr über die gesamte Trajektoriendauer von 200 s berechnet werden.

Auslenkung von 0,67 mm berechnet. Für größere Auslenkung ist die Numerik nicht mehr über die gesamte Trajektoriendauer stabil⁶. Die Konvergenz von (6.24) wurde an einzelnen Punkten durch längere Trajektorien und kleinere Abstände d_0 überprüft. Es zeigte sich, dass für Auslenkungen kleiner als 0,63 mm der Wert für Λ_N mit zunehmender Trajektoriendauer immer kleiner wird wie es für eine nicht-chaotische Dynamik asymptotisch gefordert wird. Im Bereich oberhalb von 0,63 mm bleibt Λ_N auch bei längeren Trajektorien konstant. Dies weist auf einen positiven, endlichen Wert für den asymptotischen Lyapunov-Exponenten hin und zeigt die Sensitivität der Dynamik auf die Startbedingungen.

Poincaré-Karten

Eine chaotische Bewegung kann auch mit Hilfe von Poincaré-Karten sichtbar gemacht werden. Die Darstellung der Poincaré-Abbildung findet bei den Poincaré-Karten meist auf einem zweidimensionalen Schnitt durch den Phasenraum statt. Die Poincaré-Karte enthält alle Durchstoßungspunkte der Trajektorie mit der Schnittfläche, die durch eine Randbedingung definiert ist. Bei zweidimensionalen Schnitten werden nur zwei Koordinaten der Durchstoßungspunkte betrachtet. Für periodi-

⁶Die Numerik läuft am Anfang einer Trajektorie immer stabil. Erst nach einer gewissen Zeit „explodieren“ die Lösungen, für die der Lyapunov-Exponent endlich ist, und verlassen den erlaubten Phasenraumbereich.

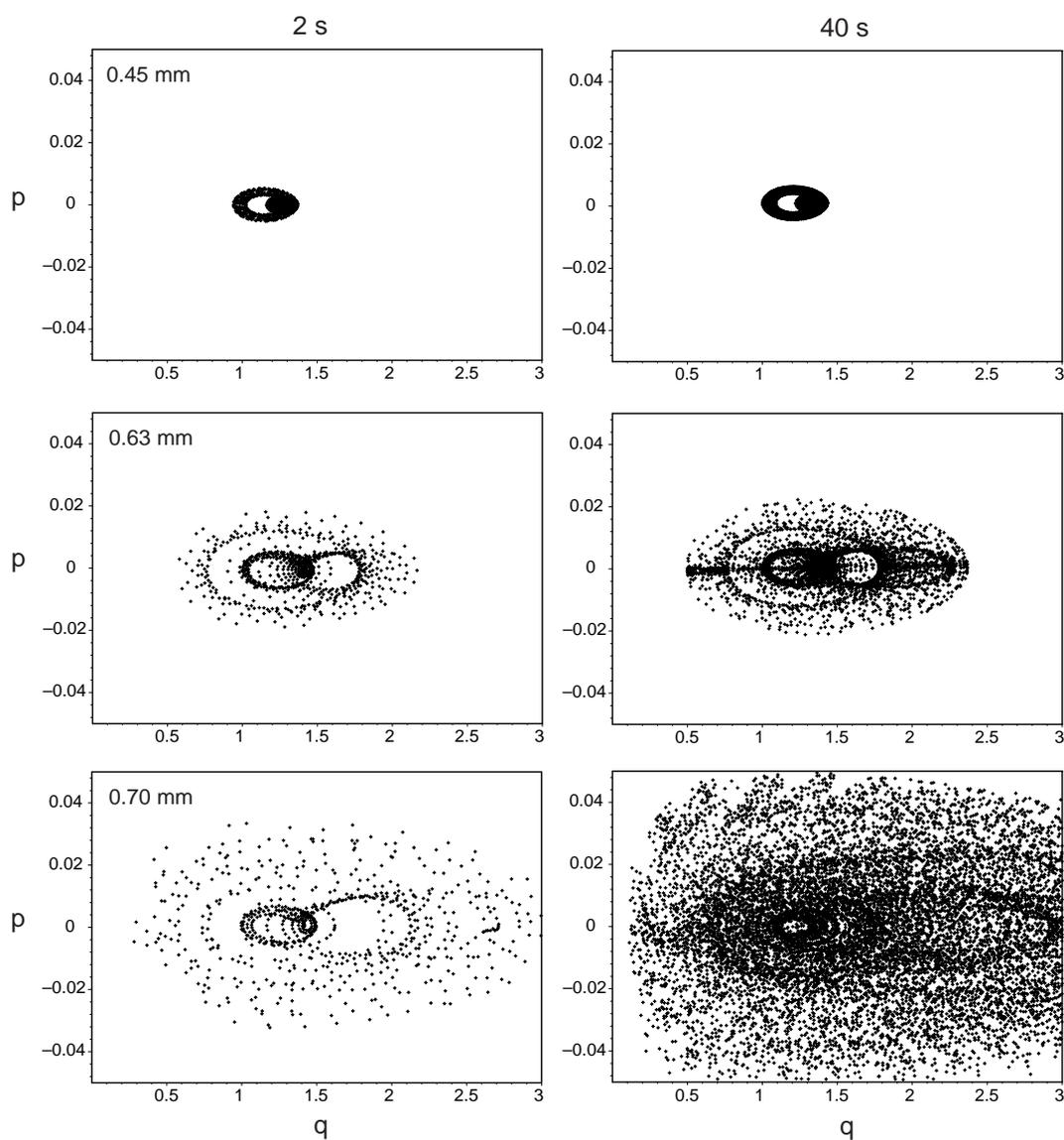


Abbildung 6.11: Poincaré-Karten für die Kondensatsdynamik. Die linken Karten sind nach 2 s und die rechten nach 40 s Schwingung berechnet worden. Aufgetragen ist der Impuls $p = \dot{\lambda}_z / \omega_z^2$ über der axialen Ausdehnung des Kondensats $q = \lambda_z$. Die Schnittebene für die Poincaré-Karten ist durch $\dot{\lambda}_\rho = 0$ definiert.

sche Bewegungen entstehen einzelne, immer wiederkehrende Durchstoßungspunkte oder zusammenhängende Linien. Quasiperiodische Bewegungen führen zu unregelmäßigen Mustern, die meist auf bestimmte Regionen begrenzt sind. Chaotische Trajektorien erzeugen ebenfalls unregelmäßige Muster, die jedoch gleichmäßiger über alle durch die Erhaltungsgrößen erlaubten Bereiche verteilt sind. Abb. 6.11 zeigt die Poincaré-Karten für die Dynamik der axialen Ausdehnung des Kondensats. Auf der x -Achse aufgetragen ist der Skalierungsparameter für die axiale Ausdehnung, $q = \lambda_z$ und auf der y -Achse der zugehörige konjugierte Impuls $p = \dot{\lambda}_z / \omega_z^2$. Die Schnittebene ist definiert durch $\dot{\lambda}_\rho = 0$, d. h. das Kondensat wird immer dann, wenn die radiale Bewegung an ihren Umkehrpunkten ist „stroposkopisch“ aufgenommen. Berechnet wurden die Poincaré-Karten mit den `DEtools` von `Maple7`. Die drei gezeigten Bildpaare sind bei Auslenkungen von 0,45 mm, 0,63 mm und 0,7 mm berechnet worden. Für die letztere konnte nicht der experimentelle Wert von 0,79 mm genommen werden, da in diesem Fall die Numerik bereits nach 2 Sekunden Trajektoriendauer instabil wird. Die maximale relative Abweichung der Gesamtenergie von ihrem Startwert ist für alle Punkte kleiner als 10^{-3} . Die erste Bildreihe für die Auslenkung von Messung A zeigt eine reguläre Bewegung. Eine längere Propagation der Trajektorie führt nicht zu einem größeren Phasenraumbereich, der in der qp -Ebene eingenommen wird. Die Bildreihe darunter zeigt bereits eine unregelmäßige Verteilung der Durchstoßungspunkte neben einem regelmäßigen Grundmuster. Die Berechnungen für den Lyapunovexponenten lassen darauf schließen, dass es sich hier um eine quasiperiodische Dynamik handelt. Die letzte Bildreihe weist eine noch unregelmäßigere Verteilung auf, und geordnete Strukturen sind kaum zu erkennen. Im Vergleich zur Abbildung darüber überdecken die Punkte die Poincaré-Karte gleichmäßig und die verschiedenen Bereiche werden mit fast gleicher Wahrscheinlichkeit getroffen. Ein solches Verhalten ist bei chaotischer Dynamik zu erwarten.

Fourieranalyse

Als letzter Test wurde eine Frequenzanalyse der Dynamik durchgeführt. Wie zu Beginn dieses Abschnittes erwähnt, zeigen die experimentellen Daten von Messung C einen erhöhten Untergrund im Fourierspektrum (siehe Abb. 6.7), was auf eine chaotische Dynamik hinweist. Für die simulierten Daten kann man eine ähnliche Analyse mit wesentlich besserer Auflösung durchführen. Dazu wurden wieder die drei Trajektorien für die Auslenkungen 0,45 mm, 0,63 mm und 0,7 mm für 40 s berechnet und anschließend einer diskreten Fouriertransformation unterzogen. Das Ergebnis ist in Abb. 6.12 gezeigt. Während das Spektrum für Messung A einige diskrete Frequenzen zeigt, erkennt man bei 0,63 mm Auslenkung bereits deutlich mehr Frequenzen, die aber immer noch diskret verteilt sind. Erst bei 0,7 mm Auslenkung entsteht ein gleichmäßiger Untergrund, aus dem einzelne Frequenzspitzen herauswachsen.

Von den drei durchgeführten Testmethoden liefert jede einen Hinweis auf chaotisches Verhalten — die Existenz eines endlichen, positiven Lyapunov-Exponenten ist dabei der Wichtigste. Unter der Voraussetzung, dass das gewählte Modell das

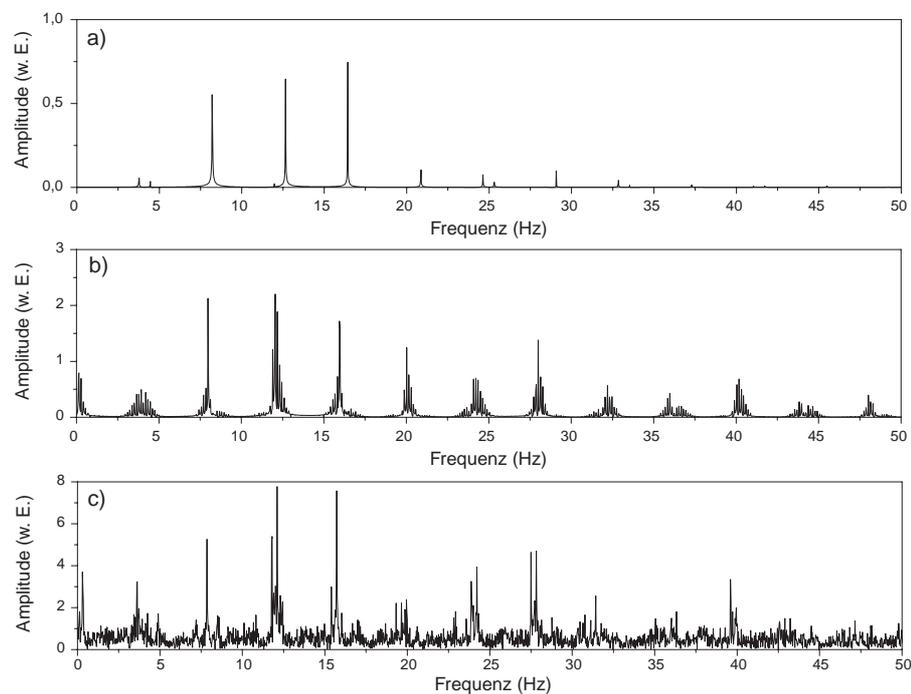


Abbildung 6.12: Theoretisches Modell: Fourierspektrum des Aspektverhältnisses für die Auslenkungen 0,45 mm (a), 0,63 mm (b) und 0,7 mm (c). Die Skalierung der y -Achse ist jeweils unterschiedlich.

Kondensat richtig beschreibt, folgt, dass sich das Kondensat bei Messung C in einem Bereich mit chaotischem Verhalten bewegt. Dies öffnet eine Tür, Chaos in Bose-Einstein-Kondensaten zu untersuchen. Welche dramatischen Effekte zu erwarten sind zeigt Abb. 6.13, die eine Messreihe bei einer Auslenkung von 0,94 mm zeigt.

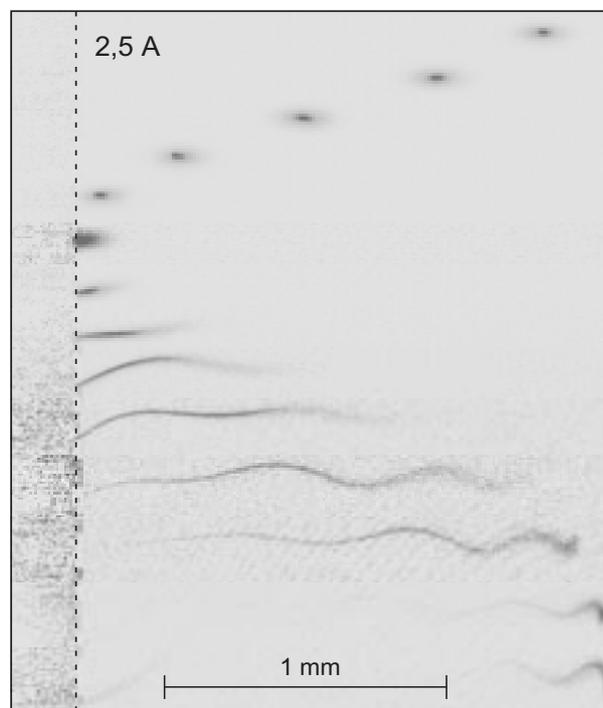


Abbildung 6.13: Absorptionenaufnahmen für eine Messreihe mit 0,94 mm Auslenkung nach 20 ms Flugzeit.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde erstmals eine Apparatur zur Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten in magnetischen Mikrofallen realisiert. Der experimentelle Aufbau ist gekennzeichnet durch ein einfaches, effizientes Ladesystem der magnetooptischen Falle, bestehend aus einer gepulsten, thermischen Quelle für Rubidiumatome. Weiter befinden sich alle wesentlichen magnetfelderzeugenden Komponenten für die Manipulation der Atome als kompakte Einheit direkt im Vakuum. Um die Atome in die Mikrofalle zu transferieren, wurde ein neuartiges Transferprinzip erfolgreich eingesetzt und in dieser Arbeit ausführlich beschrieben. Die Mikrofalle wird mit mikrofabrizierten Kupferleiterbahnen auf einem Keramiksubstrat erzeugt. Für verschiedene Fallengeometrien und Aspektverhältnisse konnten in der Mikrofalle Bose-Einstein-Kondensate in einem großen Parameterbereich erzeugt und untersucht werden. Unsere Apparatur stellt gegenüber herkömmlichen Apparaturen zur Bose-Einstein-Kondensation eine wesentliche technische Vereinfachung bei vergleichbarer Leistungsfähigkeit dar. Für die Arbeit mit magnetischen Mikrofallen wurde mit der Methode des adiabatischen Transfers ein Ladeverfahren entwickelt, das äußerst flexibel und universell einsetzbar ist.

In einer ausführlichen Experimentreihe wurde das Verhalten oszillierender Bose-Einstein-Kondensate in anharmonischen Wellenleitern untersucht. Durch die Schwerpunktsbewegung kommt es zu einer Anregung der internen Dynamik des Kondensats in Gestalt von Formschwingungen. Vermittelt wird die Kopplung zwischen externer und interner Dynamik durch die Anharmonizität des Wellenleiters. Bei Experimenten mit Mikrofallen ist das Auftreten anharmonischer Potentiale der Normalfall und unser experimenteller Ansatz ist aus diesem Grund sehr allgemein. In der Experimentreihe konnten nichtlineare Effekte und Kopplungen gefunden werden, die bis zu einem potenziell chaotischen Verhalten reichen. im Einzelnen wurden die folgenden Ergebnisse gefunden:

- Die Schwerpunktsbewegung zeigt eine außerordentlich hohe Güte von 20000 und wird durch Atomzahlverluste nicht gedämpft.
- Die Schwerpunktsbewegung ist auf kleinste Störungen des Potentials empfind-

lich. Eine Abschätzung ergibt, dass Beschleunigungen von einem Zehntausendstel der Erdbeschleunigung nachweisbar sein sollten.

- Die Anharmonizität des Potentials erzeugt im Frequenzspektrum der Schwerpunktsbewegung ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz. Bei größerer Auslenkung nimmt die Ordnung und die Amplitude dieser Obertöne zu.
- Das zentrale Ergebnis der Untersuchungen ist der Nachweis der Kopplung zwischen externer und interner Dynamik des Kondensats. Zu diesem Zweck wurde neben der Schwerpunktsbewegung das Aspektverhältnis (das Verhältnis zwischen der radialen und der axialen Ausdehnung des Kondensats) untersucht. Es konnte gezeigt werden, dass die Bewegung in einem anharmonischen Wellenleiter zwangsläufig zu einer starken Anregung der internen Freiheitsgrade führt.
- Die experimentellen Daten zum Aspektverhältnis zeigen eine Kopplung der kollektiven Anregungen. Im Frequenzspektrum tauchen Summen- und Differenzfrequenzen der beteiligten Moden auf. Diese nichtlineare Kopplung der Moden ist im Gegensatz zu früheren Arbeiten [Hec00] nichtresonant.
- Das Aspektverhältnis ändert sich während der Schwingung um bis zu einen Faktor 10. Derart große Amplituden sind in der Literatur bislang nicht bekannt. Sogar größere Amplituden sind nicht ausgeschlossen, können jedoch wegen der begrenzten Auflösung des Abbildungssystems nicht nachgewiesen werden.
- Mit einem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten theoretischen Modell, das durch die Separation der Schwerpunktsbewegung die Bewegungsgleichung für die interne Dynamik auf eine existierende analytische Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung zurückführt, können die experimentellen Daten sehr gut beschrieben werden. Damit wurde eine quantitative Methode geschaffen, die experimentellen Befunde zu beschreiben, und bei zukünftigen Experimenten mitzuberücksichtigen.
- Das theoretische Modell ist unabhängig von der Atomzahl. Nur bei sehr kleinen Atomzahlen weicht die Theorie vom Experiment ab, was jedoch dadurch erklärt werden kann, dass die Thomas-Fermi-Näherung ihre Gültigkeit verliert.
- Eine Analyse des Modells sagt ab einer bestimmten Anregungsstärke chaotisches Verhalten für die interne Kondensatdynamik voraus. Eine der experimentellen Messreihen liegt innerhalb dieses Bereiches und die zugehörigen experimentellen Daten geben einen Hinweis auf eine chaotische Dynamik. Damit ist das untersuchte System das erste, das bei der Dynamik eines Bose-Einstein-Kondensats Anzeichen für chaotisches Verhalten zeigt.

Die Summe der auftretenden nichtlinearen Effekte und Kopplungen macht deutlich, dass bei der integrierten Atomoptik mit Bose-Einstein-Kondensaten deren Dynamik eine entscheidende Rolle zukommt. Bei der Konstruktion von interferometrischen Anordnungen muss das bereits im Vorfeld berücksichtigt werden, um unerwünschte Formschwingungen des Kondensats zu verhindern. Umgekehrt kann auch durch eine geeignete Konstruktion der Potenziale die Nichtlinearität der Dynamik gezielt ausgenutzt werden, um besonderes empfindliche Interferometer zu bauen.

Ausblick

In weiterführenden Experimenten ist es zunächst wichtig, die Dynamik des Kondensats genauer auf chaotisches Verhalten zu untersuchen. In zwei Punkten muss dazu das Experiment optimiert werden. Einerseits bedarf es einer besseren Auflösung der Absorptionsabbildung, um starke Formänderungen des Kondensats vermessen zu können. Um dies umzusetzen, verlangen die apparativen Gegebenheiten den Einbau einer Linse in das Vakuum. Der zweite wichtige Punkt ist eine Verlängerung der einzelnen Messreihen. Mit längeren Messreihen verbessert sich nicht nur die Auflösung der diskreten Fouriertransformation. Längere Trajektorien erlauben auch eine klare experimentelle Aussage über das Auftreten einer chaotischen Dynamik. Die Dauer einer Messreihe ist bisher durch die Lebensdauer des Kondensats begrenzt und kann nicht ohne Weiteres verlängert werden. Als beste Lösung erscheint der Wechsel zu einem Kondensat, dessen Atome sich in dem ($F = 1, m_F = -1$)-Zustand befinden. Dieser Zustand liegt energetisch tiefer als der ($F = 2$)-Zustand, was zu einer Reduzierung inelastischer Stoßprozesse führt und die Lebensdauer des Kondensats verlängert. Nach diesen Veränderungen sollte ein eindeutiger experimenteller Nachweis einer chaotischen Dynamik möglich sein.

Ein großes Ziel der Forschung mit Mikrofallen ist es, interferometrische Experimente mit ultrakalten Atomen durchzuführen. Neben einer räumlichen Trennung und Zusammenführung eines Kondensats gibt es auch Vorschläge für dynamische Interferometer mit zwei getrennten Wegen. Die Ergebnisse dieser Arbeit zeigen, dass bei solchen dynamischen Prozessen die internen Schwingungsmoden des Kondensats zwangsläufig angeregt werden, und folglich bei der theoretischen Beschreibung mitberücksichtigt werden müssen. Die Anregung könnte verhindert werden, wenn nur einzelne Atome das Interferometer durchqueren. Dazu müssen in Zukunft Methoden zum Nachweis einzelner Atome entwickelt werden. Bei der Arbeit mit einzelnen Atomen kommt dem Bose-Einstein-Kondensat die Bedeutung eines Reservoirs zu, aus dem Atome ausgekoppelt werden können: Nur durch einen definierten quantenmechanischen Anfangszustand können Experimente zur Verschränkung einzelner Atome durchgeführt werden. Der Weg zu einer kohärenten, integrierten Atomoptik, mit der vielleicht auch ein zukünftiger Quantencomputer konstruiert werden könnte, hat gerade erst begonnen — mit einem Bose-Einstein-Kondensat in einer Mikrofalle.

Anhang A

Theoretische Ergänzungen

A.1 Das ideale Bose-Gas

Für die Beschreibung des gefangenen Bose-Gases wird das großkanonische Ensemble verwendet. Im Folgenden wird eine kurze Ableitung der zentralen Begriffe und Größen gegeben. Ausführliche Darstellungen existieren z. B. für das Kastenpotenzial [Hua63] oder für Fallenpotenziale, die einem Potenzgesetz gehorchen [Bag87]. Befinden sich N Bosonen in einem Potenzial $U(\mathbf{r})$ bei gegebener Temperatur T , so ist die Besetzung der Energiezustände ϵ_i durch die Bose-Verteilung

$$n_i = g_i \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/k_B T} - 1} \quad (\text{A.1})$$

gegeben. k_B ist die Boltzmann-Konstante, g_i ist der Entartungsgrad der Zustände mit der Energie E_i und das chemische Potenzial μ ist über die Normierungsbedingung

$$N = \sum_i n_i \quad (\text{A.2})$$

festgelegt. Bei hohen Temperaturen ist μ groß und negativ. Wird das Gas abgekühlt, so nähert sich μ der Grundzustandsenergie E_0 . Erreicht μ diesen Wert, divergiert die Besetzungszahl des Grundzustands und wird makroskopisch. Bei der theoretischen Beschreibung wird dieser Anteil vom Rest der Atome abgetrennt. Für $k_B T \gg E_{i+1} - E_i$ kann (A.2) durch ein Integral ersetzt werden. Zusammen mit der Separation des Beitrags des Grundzustandes und unter der Annahme $E_0 = 0$ folgt

$$N = N_0 + \int_0^\infty n(E) \rho(E) dE. \quad (\text{A.3})$$

N_0 ist die Zahl der Atome im Bose-Einstein-Kondensat und das Integral beschreibt den thermischen Anteil der Atome. Für $T \rightarrow 0$ befinden sich alle Atome im Kondensat. Die Zustandsdichte $\rho(E)$ in (A.3) ist definiert durch

$$\rho(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iint \delta(E - U(\mathbf{r}) - \mathbf{p}^2/2m) d\mathbf{r} d\mathbf{p} \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_{U(\mathbf{r}) < E} \sqrt{E - U(\mathbf{r})} d\mathbf{r}. \quad (\text{A.5})$$

Im Folgenden soll ein in allen drei Raumrichtungen harmonisches Potenzial angenommen werden

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2.$$

Die Integration von (A.5) liefert

$$\rho(E) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\hbar\bar{\omega}} \right)^3 E^2$$

mit dem geometrischen Mittel

$$\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}.$$

Eingesetzt in (A.3) folgt

$$N - N_0 = \zeta(3) \left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}} \right)^3.$$

$\zeta(3) = 1.20206$ ist die Riemannsche ζ -Funktion. Beim Phasenübergang zum Kondensat gilt $N_0 = 0$ und aus (A.1) folgt für die kritische Temperatur

$$T_c = \frac{\hbar\bar{\omega}}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3}. \quad (\text{A.6})$$

Für Temperaturen oberhalb von T_c existiert eine thermische Wolke, deren Dichteverteilung durch Integration der Bose-Verteilung über den gesamten Impulsraum gegeben ist:

$$n_{\text{th}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{1}{e^{(U(\mathbf{r}) + \mathbf{p}^2/2m - \mu)/k_B T} - 1} d\mathbf{p} \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(e^{-(U(\mathbf{r}) - \mu)/k_B T}). \quad (\text{A.8})$$

$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$ ist die thermische de-Broglie Wellenlänge und die Funktion $g_{3/2}(x)$ ist definiert durch den verallgemeinerten Ausdruck $g_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k / k^\alpha$. Für $\mu = 0$ ergibt sich für die Dichte am Ursprung

$$n_{\text{th}}(0) = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(1) \Leftrightarrow n_{\text{th}}(0)\lambda^3 = 2.61238.$$

Die Größe

$$A := n\lambda^3 \quad (\text{A.9})$$

wird als Phasenraumdicke bezeichnet. Mit (A.9) ergibt sich die folgende anschauliche Interpretation für die Bose-Einstein-Kondensation: Schreibt man jedem Atom

ein Volumen der Größe λ^3 zu, so erfolgt der Phasenübergang genau dann, wenn die atomaren Wellenfunktionen im Zentrum des Potenzials sich zu überlappen beginnen. Der bosonische Charakter der Atome führt dazu, dass sie einen gemeinsamen Zustand besetzen, dessen Dichteverteilung durch die Grundzustandswellenfunktion $\varphi_0(\mathbf{r})$ für das jeweilige Potenzial gegeben ist:

$$n_0(\mathbf{r}) = N_0 |\varphi_0(\mathbf{r})|^2 .$$

A.2 Kondensate in harmonischen Potenzialen

Im Falle von rein harmonischen Potenzialen lassen sich einige Größen explizit angeben. Dieser Abschnitt fasst die Resultate kurz zusammen. Alle Angaben sind in der Thomas-Fermi-Näherung eines wechselwirkenden Bose-Gas gültig. Das Potenzial habe die Form

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega_x^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2y^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2z^2 .$$

Die Kondensatsdichteverteilung ist gegeben durch

$$n_k(x, y, z) = |\psi(\mathbf{r})|^2 = \frac{\mu}{g} \left(1 - \left(\frac{x}{r_{x0}} \right)^2 - \left(\frac{y}{r_{y0}} \right)^2 - \left(\frac{z}{r_{z0}} \right)^2 \right) \quad (\text{A.10})$$

mit der zentralen Dichte

$$n_k(0) = \frac{\mu}{g} .$$

Die Radien des Kondensats r_{i0} werden als Thomas-Fermi-Radien oder Halbachsen bezeichnet. Für sie gilt

$$r_{i0} = \frac{1}{\omega_i} \sqrt{\frac{2\mu}{m}} .$$

Die kritische Temperatur ist auch für wechselwirkende Bosonen in sehr guter Näherung durch (A.6) gegeben [Bag87]. Das chemische Potenzial ist mit der Teilchenzahl auf folgende Weise verknüpft:

$$N_0 = \left(\frac{2\mu}{\hbar\omega} \right)^{5/2} \frac{a_{\text{HO}}}{15a} . \quad (\text{A.11})$$

Dabei ist a die Streulänge und $a_{\text{HO}} = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$ die Oszillatorlänge. Direkte Integration von (A.10) liefert als nützliches Zwischenergebnis

$$N_0 = \frac{8\pi}{15} \frac{\mu}{g} r_{x0} r_{y0} r_{z0} .$$

Die Energie eines Teilchens ist durch das chemische Potenzial μ gegeben, die Gesamtenergie aller Teilchen beträgt

$$E_{\text{ges}} = \frac{5}{7} N \mu .$$

A.3 Gültigkeit des theoretischen Modells

In Abschnitt 2.3 wurden einige Näherungen eingeführt, deren Konsequenzen für die Gültigkeit des entwickelten Modells diskutiert werden sollen.

- Für die Herleitung der Skalierungsgleichungen (2.28) wurde die Lokalisierungsenergie vernachlässigt, sie gelten also nur in der Thomas-Fermi-Näherung. Die kinetische Energie die in der internen Dynamik des Kondensats steckt wird jedoch voll mitberücksichtigt [Cas96]. Für kleine Kondensate kommt es daher zu systematischen Abweichungen von der Theorie, wie sie in Abschnitt 6.6 behandelt werden.
- Um Gleichung (2.47) abzuleiten wurde vorausgesetzt, dass das Potenzial in den einzelnen Koordinaten separiert. Im Falle des Wellenleiterpotenzials verlangt das einen geradlinigen Verlauf des Kanals. Für gekrümmte Wellenleiter findet man gemischte Terme in der Taylorentwicklung des Potenzials und auf das Kondensat kann Drehimpuls übertragen werden wird Drehimpuls übertragen. Für Krümmungsradien, die groß gegenüber der Ausdehnung des Kondensats sind, und kleine Geschwindigkeiten werden die Auswirkungen klein sein und die Theorie bleibt gültig. Im Einzelnen muss eine genaue Abschätzung gemacht werden.
- In der Taylorentwicklung des Potenzials (2.36) wurden nur Terme bis zur zweiten Ordnung berücksichtigt. Die höheren Terme können vernachlässigt werden, wenn die Bedingung (2.46) erfüllt ist. Ist sie nicht erfüllt, was zum Beispiel bei einer negativen Potenzialkrümmung der Fall, so müssen sorgfältig alle Beiträge zur Gesamtenergie des Kondensats betrachtet werden. Für den Fall, dass die Wechselwirkungsenergie und die kinetische Energie größer als die anharmonischen Beiträge der potenziellen Energie sind, können diese weiterhin vernachlässigt werden. Erst wenn diese Terme die Zeitentwicklung der Kondensatswellenfunktion maßgeblich beeinflussen wird die Näherung ungültig. Die Bewegungsgleichung (2.41) für den Verschiebungsvektor $R(t)$, der nun nicht mehr mit dem Schwerpunkt identisch sein muss, gilt weiterhin, jedoch existiert keine analytische Lösung für die Gross-Pitaevskii-Gleichung (2.42) mehr, da sie Terme proportional zu x_i^3 ist oder gemischte Terme enthält.

A.4 Kopplungen höherer Ordnung

Die Art der Kopplung der internen und externen Bewegung kann an einem einfachen klassischen Modell untersucht werden. Abb. A.1 zeigt ein anharmonisches Potenzial in einer Dimension $U(x)$, in dem zwei Testmassen m_1 und m_2 , zwischen denen das Wechselwirkungspotenzial $W(x_1 - x_2)$ herrsche, schwingen können. Die Bewegungsgleichungen für die beiden Testmassen lauten

$$m\ddot{x}_1 = -U'(x_1) - W'(x_1 - x_2)$$

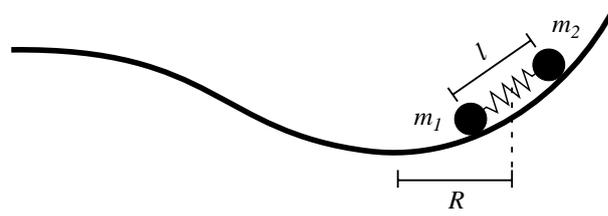


Abbildung A.1: Zwei gekoppelte Massepunkte m_1 und m_2 schwingen in einem anharmonischen Potenzial. R ist der gemeinsame Schwerpunkt, l ist der relative Abstand.

$$m\ddot{x}_2 = -U'(x_2) + W'(x_1 - x_2).$$

Führt man die Schwerpunktskoordinate

$$R = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

und die Relativkoordinate

$$l = x_1 - x_2$$

ein, so können die Bewegungsgleichungen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} m\ddot{R} &= -\frac{1}{2} \left(U'(R + \frac{l}{2}) + U'(R - \frac{l}{2}) \right) \\ m\ddot{l} &= - \left(U'(R + \frac{l}{2}) - U'(R - \frac{l}{2}) \right) - 2W'(l). \end{aligned}$$

Macht man nun für $U(x)$ einen Potenzreihenansatz

$$U(x) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i$$

so können die Potenzialterme entwickelt werden:

$$\begin{aligned} U'(R + \frac{l}{2}) + U'(R - \frac{l}{2}) &= \sum_{i=2}^{\infty} i a_i \underbrace{\left[(R + \frac{l}{2})^{i-1} + (R - \frac{l}{2})^{i-1} \right]}_{\text{gerade Potenzen in } l} \\ U'(R + \frac{l}{2}) - U'(R - \frac{l}{2}) &= \sum_{i=2}^{\infty} i a_i \underbrace{\left[(R + \frac{l}{2})^{i-1} - (R - \frac{l}{2})^{i-1} \right]}_{\text{ungerade Potenzen in } l}. \end{aligned}$$

Fasst man nun l als kleinen Entwicklungsparameter auf, so sieht man, dass die beiden Parameter R und l in unterschiedlicher Ordnung miteinander koppeln. In erster Ordnung in l koppelt die Schwerpunktsbewegung an die innere Bewegung,

diese koppelt jedoch erst in zweiter Ordnung an die Schwerpunktsbewegung und so weiter. Konkret folgt für ein Potenzial dritter Ordnung ($U(x) = ax^2 + bx^3$)

$$\begin{aligned} m\ddot{R} &= -2aR - 3bR^2 - \frac{3}{4}bl^2 \\ m\ddot{l} &= -2al - 6blR - 2W'(l). \end{aligned}$$

Bei einem Bose-Einstein-Kondensat führt die Berücksichtigung von Potenzialtermen dritter und höherer Ordnung einerseits zu einer leichten Deformation der parabolischen Form der Dichteverteilung. Diese Deformation ihrerseits wird wegen der Zeitabhängigkeit der Potenzialkoeffizienten oszillieren. Zum anderen muss bei der genauen Ermittlung der beschleunigenden Kraft der Potenzialgradient über die Ausdehnung des Kondensats gemittelt werden:

$$\langle F(R) \rangle = -U'(R) - \frac{1}{14}r_{x0}^2 \lambda_x^2 U'''(R). \quad (\text{A.12})$$

Damit ist die Kraft auf den Schwerpunkt des Kondensats nicht mehr identisch mit der beschleunigenden Gesamtkraft und der Schwerpunkt oszilliert um eine Gleichgewichtslage. Auf diese Weise können die internen Anregungen an die Schwerpunktsbewegung des Kondensats koppeln.

A.5 Herleitung der Bewegungsgleichungen aus einem Variationsansatz

Die Bewegungsgleichungen für die Kondensatsradien und den Schwerpunkt können aus einem Variationsansatz gewonnen werden. Für Bose-Einstein-Kondensate wurde dieser Ansatz erstmals von Pérez-García *et al.* [PG96] benutzt. Sie verwendeten eine parametrisierte gaußförmige Wellenfunktion und leiteten für ein harmonisches Potenzial die Bewegungsgleichungen für die Parameter der Wellenfunktion ab. Hier wird derselbe Variationsansatz gewählt und das Variationsproblem für ein Kondensat in Thomas-Fermi-Näherung gelöst, das sich in einem anharmonischen Potenzial befindet.

Grundlage des Variationsverfahrens ist die Zurückführung der Gross-Pitaevskii-Gleichung auf einen Satz gewöhnlicher Differenzialgleichungen. Eine Klasse von Wellenfunktion wird dazu mit einem Satz Parameter beschrieben, und der Formalismus liefert für jeden Parameter eine Euler-Lagrange-Bewegungsgleichung. Zunächst muss die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\hbar \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + U(\mathbf{r}) |\psi|^2 + \frac{g}{2} |\psi|^4$$

für die parametrisierten Wellenfunktionen aufgestellt werden. Wie in Abschnitt 2.2.2 wird dafür eine skalierte Wellenfunktion in Thomas-Fermi-Näherung gewählt, die

zusätzlich um einen Vektor R verschoben ist:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) = & \sqrt{\frac{\mu}{g}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}} \left(1 - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{x_i - R_i}{\lambda_i r_{i0}} \right)^2 \right)^{1/2} \\ & \times \text{Exp} \left[i \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i + i \sum_{i=1}^3 \gamma_i x_i^2 + i\beta \right]. \end{aligned}$$

Die r_{i0} sind die Thomas-Fermi-Radien des Kondensats bei $t = 0$, deren zeitliche Entwicklung durch die λ_i beschrieben wird (vgl. Abschnitt 2.2.2). Die Phase hat eine lineare und quadratische Orstabhängigkeit, beschrieben durch die zeitabhängigen Funktionen α_i und γ_i sowie einen globalen Anteil, der durch β gegeben ist. Die Wechselwirkungsstärke wird wieder mit g bezeichnet, das chemische Potenzial mit μ . Mit dieser Testwellenfunktion wird dann durch Integration eine effektive Lagrange-Funktion bestimmt:

$$L = \langle \mathcal{L} \rangle = \int \mathcal{L} d^3x.$$

Sie lautet

$$\begin{aligned} L = & N\hbar\dot{\beta} + N\hbar \sum_{i=1}^3 \dot{\alpha}_i R_i + N\hbar \frac{1}{7} \sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}_i \lambda_i^2 r_{i0}^2 \\ & + N\hbar \sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}_i R_i^2 + N \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 + N \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^3 4\alpha_i \gamma_i R_i \\ & + N \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^3 4\gamma_i^2 R_i^2 + N \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^3 \frac{4}{7} \gamma_i^2 \lambda_i^2 r_{i0}^2 \\ & + N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{14} \lambda_i^2 r_{i0}^2 \partial_i^2 U(\mathbf{R}) + NU(\mathbf{R}) + N \frac{2}{7} \mu \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}. \end{aligned}$$

Die Atomzahl ist durch die Normierungsbedingung

$$N = \frac{8\pi}{15} \frac{\mu}{g} r_{10} r_{20} r_{30}$$

gegeben. Für die Integration wurde das Potenzial bis zur zweiten Ordnung um den Punkt R entwickelt (siehe (2.36)). Wegen der Symmetrie der Testwellenfunktionen fallen alle Entwicklungsterme mit ungeraden Potenzen in $(\mathbf{x} - \mathbf{R})$ weg. Dies betrifft auch die gemischten Terme der Form $(x_i - R_i)(x_j - R_j)\partial_i\partial_j U(\mathbf{R})$. Der erste nichtverschwindende Term der bei der Lagrangefunktion vernachlässigt wurde ist proportional zur vierten Ableitung des Potenzials $U''''(\mathbf{R})$.

Aus obiger Lagrangefunktion erhält man die Bewegungsgleichungen für die Parameter durch die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

mit

$$q_i = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, R_1, R_2, R_3\}.$$

Sie lauten für die Phase

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{m}{\hbar}(\dot{R}_i) - \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} R_i \\ \gamma_i &= \frac{m}{2\hbar} \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i}\end{aligned}$$

für die Schwerpunktskoordinate

$$m\ddot{R}_i = -\partial_i U(\mathbf{R}) - \frac{1}{14} \sum_{j=1}^3 \lambda_j^2 r_{j0}^2 \partial_i \partial_j^2 U(\mathbf{R}) \quad (\text{A.13})$$

und für die Zeitentwicklung der Kondensatsradien

$$r_{i0}^2 \ddot{\lambda}_i = \frac{\mu}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} - \frac{1}{2} r_{i0}^2 \lambda_i^2 \partial_i \partial_i U(\mathbf{R})$$

für $i = 1, 2, 3$. Unter Ausnutzung der Beziehung $\mu = \frac{1}{2} m \omega_{0i}^2 r_{i0}^2$ erkennt man das gekoppelte Differenzialgleichungssystem (2.50) wieder. Gleichung (A.13) beschreibt die Bewegung des Schwerpunkts und enthält im Vergleich zu der in Abschnitt 2.3 abgeleiteten Bewegungsgleichung (2.41) einen Korrekturterm. Er ist identisch mit der Korrektur aus Anhang A.4, die auf einer Mittelung der Gesamtkraft auf das Kondensat beruht. Der Korrekturterm hat auf die Bewegung des Schwerpunkts kaum einen Einfluss (vgl. Abschnitt 6.6). Allerdings ist der Term äußerst wichtig bei der numerischen Lösung des Gleichungssystems, da er die Energieerhaltung des Gesamtsystems garantiert und deshalb eine Überprüfung der numerischen Stabilität ermöglicht.

Hamiltonformalismus

Für die Bewegungsgleichungen von Schwerpunkt und innerer Anregung kann die folgende Hamiltonfunktion angegeben werden:

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{7}{2\mu} \omega_{0i}^2 p_i^2 + \frac{2}{7} \mu \frac{1}{q_1 q_2 q_3} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{2\mu}{7} \frac{2a + 6bq_R + 12cq_R^2 + 20dq_R^3}{m\omega_{0i}^2} q_i^2 \\ &+ \frac{1}{2m} p_R^2 + aq_R^2 + bq_R^3 + cq_R^4 + dq_R^5.\end{aligned}$$

Die kanonischen Variablen lauten

$$\begin{aligned}q_i &\equiv \{R_1, R_2, R_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \\ p_i &\equiv \{m\dot{R}_1, m\dot{R}_2, m\dot{R}_3, \frac{2\mu}{7\omega_{10}^2} \dot{\lambda}_1, \frac{2\mu}{7\omega_{20}^2} \dot{\lambda}_2, \frac{2\mu}{7\omega_{30}^2} \dot{\lambda}_3\}.\end{aligned}$$

Aus der Hamiltonfunktion folgen die Bewegungsgleichungen gemäß

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}.\end{aligned}$$

Anhang B

Numerische Methoden und Messdaten

Das zu lösende Differenzialgleichungssystem (6.3) wird zunächst umgeschrieben in ein autonomes Differenzialgleichungssystem bestehend aus 9 gewöhnlichen Differenzialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned}\dot{q}_0 &= 0 \\ \dot{q}_1 &= p_1 \\ \dot{p}_1 &= \frac{\omega_{\rho 0}^2}{q_1^2 q_2^2} - f_1(q_3)q_1 \\ \dot{q}_2 &= p_2 \\ \dot{p}_2 &= \frac{\omega_{z 0}^2}{q_1 q_2^3} - f_2(q_3)q_2 \\ \dot{q}_3 &= p_3 \\ \dot{p}_3 &= -U'(q_3)\end{aligned}$$

q_0 ist die Zeitkoordinate, q_3 ist die Schwerpunktskoordinate. q_1 und q_2 ersetzen λ_ρ und λ_z aus (6.3). Die Funktionen $f_i(q_3)$ hängen über das Potenzial von der Schwerpunktskoordinate ab (siehe (6.3)). Die Anfangsbedingungen sind durch (6.4)–(6.7) gegeben. Das Differenzialgleichungssystem wird mit dem Runge-Kutta-Verfahren ohne Schrittweitensteuerung gelöst. Die Schrittweite kann fest vorgegeben werden. Besonders bei der Untersuchung der chaotischen Dynamik muss darauf geachtet werden, dass sie klein genug gewählt ist. Zur Kontrolle der Numerik wird die Gesamtenergie berechnet, die während der Propagation konstant sein muss. Alle Messdaten sind nach 20 ms Flugzeit aufgenommen, und bei der Simulation muss dem Rechnung getragen werden, indem obiges Differenzialgleichungssystem nach einer Oszillationsdauer t für weitere 20 ms gelöst wird, wobei dann $U = f_1 = f_2 = f_3 = 0$ gesetzt wird.

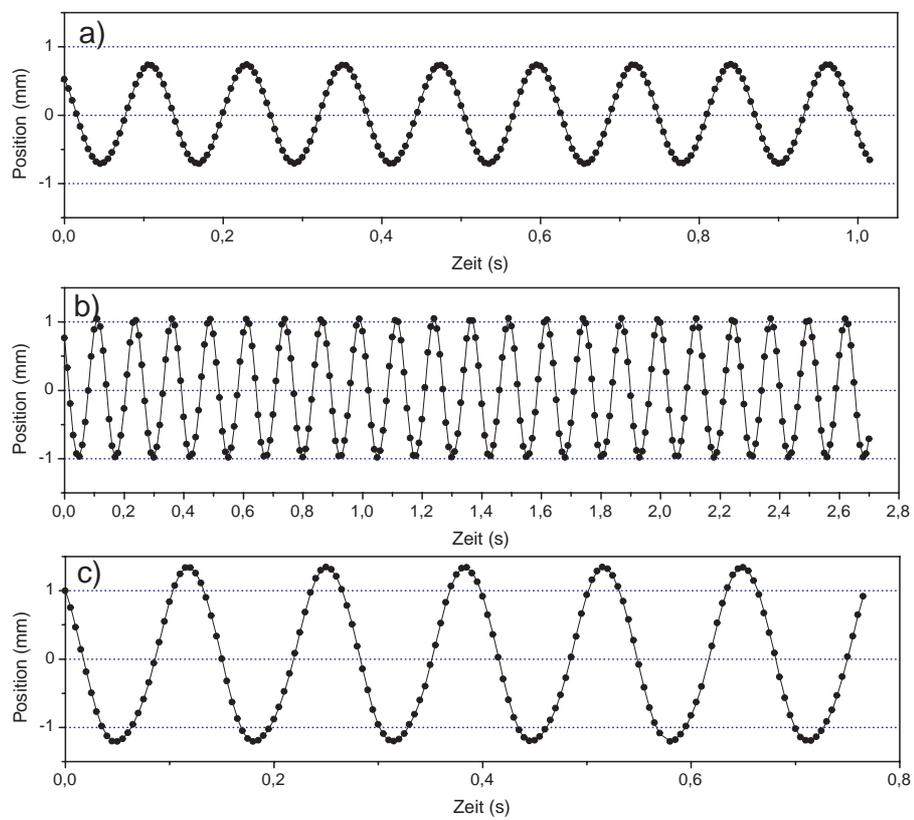


Abbildung B.1: Daten der Schwerpunktsbewegung für die Messreihen A (a), B (b) und C (c).

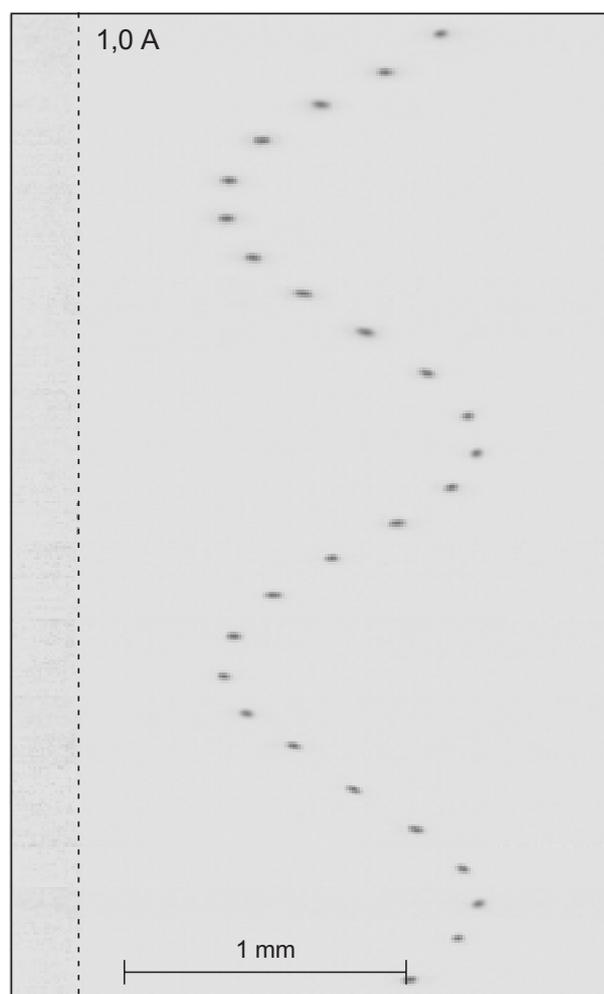


Abbildung B.2: Absorptionsaufnahmen der ersten beiden Schwingungsperioden für Messung A. 0,45 mm Auslenkung, 20 ms Flugzeit.

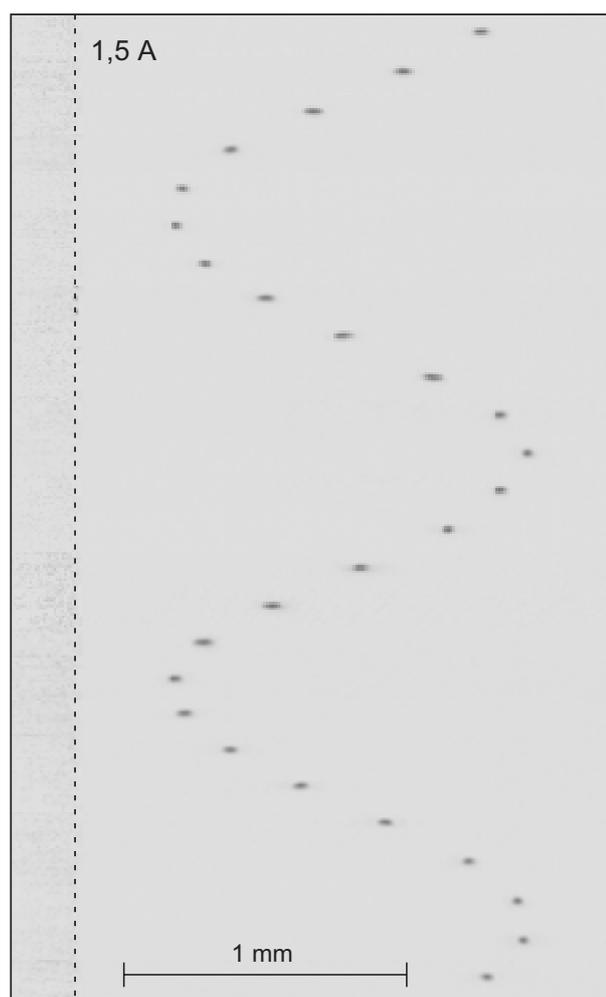


Abbildung B.3: Absorptionsaufnahmen der ersten beiden Schwingungsperioden für Messung B. 0,63 mm Auslenkung, 20 ms Flugzeit.



Abbildung B.4: Absorptionsaufnahmen der ersten beiden Schwingungsperioden für Messung C. 0,79 mm Auslenkung, 20 ms Flugzeit.

Literaturverzeichnis

- [Ada97] C. S. ADAMS und E. RIIS, *Laser Cooling and Trapping of Neutral Atoms*, Progress in Quantum Electronics **21**, 1 (1997).
- [And95] M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN und E. A. CORNELL, *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, Science **269**, 198 (1995).
- [And96] M. R. ANDREWS, M.-O. MEWES, N. J. VAN DRUTEN, D. S. DURFEE, D. M. KURN und W. KETTERLE, *Direct, Nondestructive Observation of a Bose Condensate*, Science **273**, 84 (1996).
- [And97] M. R. ANDREWS, C. G. TOWNSEND, H.-J. MIESNER, D. S. DURFEE, D. M. KURN und W. KETTERLE, *Observation of Interference Between Two Bose-Einstein Condensates*, Science **275**, 637 (1997).
- [And98] B. P. ANDERSON und M. A. KASEVICH, *Macroscopic Quantum Interference from Atomic Tunnel Arrays*, Science **282**, 1686 (1998).
- [Bag87] V. S. BAGNATO, D. E. PRITCHARD und D. KLEPPNER, *Bose-Einstein Condensation in an External Potential*, Phys. Rev. A **35**, 4354 (1987).
- [Ber87] T. BERGEMAN, G. EREZ und H. METCALF, *Magnetostatic Trapping Fields for Neutral Atoms*, Phys. Rev. A **35**, 1535 (1987).
- [Ber97] P. BERMAN (Hg.), *Atom Interferometry* (Academic Press, Chestnut Hill, MA, 1997).
- [Ber01] R. P. BERTRAM, H. MERIMECHE, M. MÜTZEL, H. METCALF, D. HAUBRICH, D. MESCHEDE, P. ROSENBUSCH und E. A. HINDS, *Magnetic Whispering-gallery Mirror for Atoms*, Phys. Rev. A **63**, 053405 (2001).
- [Bey00] S.-S. BEYERTT, *Dunkel- und Hellresonanzen am Vielniveausystem*, Diplomarbeit, Universität Tübingen (2000).
- [Blo99] I. BLOCH, T. W. HÄNSCH und T. ESSLINGER, *Atom Laser with a cw Output Coupler*, Phys. Rev. Lett. **82**, 3008 (1999).

- [Blo01] I. BLOCH, M. KÖHL, M. GREINER, T. W. HÄNSCH und T. ESSLINGER, *Optics with an Atom Laser Beam*, Phys. Rev. Lett. **87**, 030401 (2001).
- [Boc96] A. BOCK, *Monolithische Pendel hoher Güte*, Diplomarbeit, Universität Hannover (1996).
- [Bon99] K. BONGS, S. BURGER, G. BIRKL, K. SENGSTOCK, W. ERTMER, K. RZAŻEWSKI, A. SANPERA und M. LEWENSTEIN, *Coherent Evolution of Bouncing Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3577 (1999).
- [Bon01] K. BONGS, S. BURGER, S. DETTMER, D. HELLWEG, J. ARLT, W. ERTMER und K. SENGSTOCK, *Waveguide for Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. A **63**, 031602 (2001).
- [Bos24] S. BOSE, *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*, Z. Phys. **26**, 178 (1924).
- [Bra95] C. C. BRADLEY, C. A. SACKETT, J. J. TOLLETT und R. G. HULET, *Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions*, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687, *ibid.* **79**, 1170 (1997) (1995).
- [Bur97] E. A. BURT, R. W. GHRIST, C. J. MYATT, M. J. HOLLAND, E. A. CORNELL und C. E. WIEMAN, *Coherence, Correlations, and Collisions: What One Learns about Bose-Einstein Condensates from Their Decay*, Phys. Rev. Lett. **79**, 337 (1997).
- [Bur99] S. BURGER, K. BONGS, S. DETTMER, W. ERTMER, K. SENGSTOCK, A. SANPERA, G. V. SHLYAPNIKOV und M. LEWENSTEIN, *Dark Solitons in Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5198 (1999).
- [Cas96] Y. CASTIN und R. DUM, *Bose-Einstein Condensates in Time-Dependent Traps*, Phys. Rev. Lett. **77**, 5315 (1996).
- [Cas97] Y. CASTIN und R. DUM, *Instability and Depletion of an Excited Bose-Einstein Condensate in a Trap*, Phys. Rev. Lett. **79**, 3553 (1997).
- [Cas00] D. CASSETTARI, B. HESSMO, R. FOLMAN, T. MAIER und J. SCHMIEDMAYER, *Beam Splitter for Guided Atoms*, Phys. Rev. Lett. **85**, 5483 (2000).
- [Cat98] F. S. CATALIOTTI, S. BURGER, C. FORT, P. MADDDALONI, F. MINARDI, A. TROMBETTONI, A. SMERZI und M. INGUSCIO, *Josephson Junction Arrays with Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. A **57**, 1136 (1998).
- [Che02] F. CHEVY, V. BRETIN, P. ROSENBUSCH, K. W. MADISON und J. DALIBARD, *Transverse Breathing Mode of an Elongated Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **88**, 250402 (2002).

- [Chu86] S. CHU, J. E. BJORKHOLM, A. ASHKIN und A. CABLE, *Experimental Observation of Optically Trapped Atoms*, Phys. Rev. Lett. **57**, 314 (1986).
- [Dal89] J. DALIBARD und C. COHEN-TANNOUDJI, *Laser Cooling Below the Doppler Limit by Polarization Gradients: Simple Theoretical Models*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, 2023 (1989).
- [Dal96] F. DALFOVO und S. STRINGARI, *Bosons in Anisotropic Traps: Ground State and Vortices*, Phys. Rev. A **53**, 2477 (1996).
- [Dal97a] F. DALFOVO, C. MINNITI und L. P. PITAEVSKII, *Frequency Shift and Mode Coupling in the Nonlinear Dynamics of a Bose-condensed Gas*, Phys. Rev. A **56**, 4855 (1997).
- [Dal97b] F. DALFOVO, C. MINNITI, S. STRINGARI und L. PITAEVSKII, *Nonlinear Dynamics of a Bose-condensed Gas*, Phys. Lett. A **227**, 259 (1997).
- [Dav95] K. B. DAVIS, M.-O. MEWES und W. KETTERLE, *An Analytical Model for Evaporative Cooling of Atoms*, Appl. Phys. B **60**, 155 (1995).
- [Dek00] N. H. DEKKER, C. S. LEE, V. LORENT, J. H. THYWISSEN, S. P. SMITH, M. DRNDIĆ, R. M. WESTERVELT und M. PRENTISS, *Guiding Neutral Atoms on a Chip*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1124 (2000).
- [Dem95] W. DEMTRÖDER, *Laser Spectroscopy, zweite erweiterte Ausgabe* (Springer New York, 1995).
- [Den99a] L. DENG, E. W. HAGLEY, J. WEN, M. TRIPPENBACH, Y. BAND, P. S. JULIENNE, J. E. SIMSARIAN, K. HELMERSON, S. L. ROLSTON und W. D. PHILLIPS, *Four-wave Mixing with Matter Waves*, Nature **398**, 218 (1999).
- [Den99b] J. DENSCHLAG, D. CASSETTARI, A. CHENET, S. SCHNEIDER und J. SCHMIEDMAYER, *A Neutral Atom and a Wire: Towards Mesoscopic Atom Optics*, Appl. Phys. B **49**, 257 (1999).
- [Den00] J. DENSCHLAG, J. E. SIMSARIAN, D. L. FEDER, C. W. CLARK, L. A. COLLINS, J. CUBIZOLLES, L. DENG, E. W. HAGLEY, K. HELMERSON, W. P. REINHARDT, S. L. ROLSTON, B. I. SCHNEIDER und W. D. PHILLIPS, *Generating Solitons by Phase Engineering of a Bose-Einstein Condensate*, Science **287**, 97 (2000).
- [Die01] K. DIECKMANN, *Bose-Einstein Condensation with High Atom Number in a Deep Magnetic Trap*, Dissertation, University of Amsterdam (2001).
- [Dob94] J. F. DOBSON, *Harmonic-Potential Theorem: Implications for Approximate Many-Body Theories*, Phys. Rev. Lett. **73**, 2244 (1994).

- [Doy91] J. M. DOYLE, J. C. SANDBERG, I. A. YU, C. L. CESAR, D. KLEPPNER und T. J. GREYTAK, *Hydrogen in the Submillikelvin Regime: Sticking Probability on Superfluid ^4He* , Phys. Rev. Lett. **67**, 603 (1991).
- [Doy95] J. M. DOYLE, B. FRIEDRICH, J. KIM und D. PATTERSON, *Buffer-Gas Loading of Atoms and Molecules into a Magnetic Trap*, Phys. Rev. A **52**, R2515 (1995).
- [Ein25] A. EINSTEIN, *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases: Zweite Abhandlung*, Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss. **1925**, 3 (1925).
- [Ern98] U. ERNST, A. MARTE, F. SCHRECK, J. SCHUSTER und G. REMPE, *Bose-Einstein Condensation in a Pure Ioffe-Pritchard Field Configuration*, Europhys. Lett. **41**, 1 (1998).
- [Ess98] T. ESSLINGER, I. BLOCH und T. W. HÄNSCH, *Bose-Einstein Condensation in a Quadrupole Ioffe-configuration Trap*, Phys. Rev. A **58**, R2664 (1998).
- [Fet96] A. L. FETTER, *Ground state and Excited States of a Confined Condensed Bose gas*, Phys. Rev. A **53**, 4245 (1996).
- [Fli97] M. FLIESSER, A. CSORDÁS, P. SZÉPFALUSY und R. GRAHAM, *Hydrodynamic Excitations of Bose Condensates in Anisotropic Traps*, Phys. Rev. A **56**, R2533 (1997).
- [Fol00] R. FOLMAN, P. KRÜGER, D. CASSETTARI, B. HESSMO, T. MAIER und J. SCHMIEDMAYER, *Controlling Cold Atoms Using Nanofabricated Surfaces: Atom Chips*, Phys. Rev. Lett. **84**, 4749 (2000).
- [Fol02] R. FOLMAN, P. KRÜGER, J. SCHMIEDMAYER, J. H. DENSCHLAG und C. HENKEL, *Microroscopic Atom Optics: From Wires to an Atom Chip*, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **48** (2002).
- [For98a] J. FORTÁGH, A. GROSSMANN, T. W. HÄNSCH und C. ZIMMERMANN, *Miniaturized Wire Trap for Neutral Atoms*, Phys. Rev. Lett. **81**, 5310 (1998).
- [For98b] J. FORTÁGH, A. GROSSMANN, T. W. HÄNSCH und C. ZIMMERMANN, *Fast Loading of a Magneto-optical Trap From a Pulsed Thermal Source*, J. Appl. Phys. **84**, 6499 (1998).
- [For00] J. FORTÁGH, H. OTT, A. GROSSMANN und C. ZIMMERMANN, *Miniaturized Magnetic Guide for Neutral Atoms*, Appl. Phys. B **70**, 701 (2000).
- [For02a] J. FORTÁGH, H. OTT, S. KRAFT, A. GÜNTHER und C. ZIMMERMANN, *Bose-Einstein Condensates in Magnetic Waveguides*, Appl. Phys. B (2002).

- [For02b] J. FORTÁGH, H. OTT, S. KRAFT, A. GÜNTHER und C. ZIMMERMANN, *Surface Effects in Magnetic Microtraps*, Phys. Rev. A **66**, 041604(R) (2002).
- [For02c] J. FORTÁGH, H. OTT, G. SCHLOTTERBECK, C. ZIMMERMANN, B. HERZOG und D. WHARAM, *Microelectromagnets for Trapping and Manipulating Ultracold Atomic Quantum Gases*, Appl. Phys. Lett. **81**, 1146 (2002).
- [For03] J. FORTÁGH, *Bose-Einstein-Kondensate in magnetischen Mikrofallen*, Dissertation, Universität Tübingen (2003).
- [Gar00] S. A. GARDINER, D. JAKSCH, R. DUM, J. I. CIRAC und P. ZOLLER, *Nonlinear Matter Wave Dynamics with a Chaotic Potential*, Phys. Rev. A **62**, 023612 (2000).
- [Gio97] S. GIORGINI, L. P. PITAEVSKII und S. STRINGARI, *Thermodynamics of a Trapped Bose-Condensed Gas*, J. Low Temp. Phys. **109**, 309 (1997).
- [Gör01] A. GÖRLITZ, J. M. VOGELS, A. E. LEANHARDT, C. RAMAN, T. L. GUSTAVSON, J. R. ABO-SHAER, A. P. CHIKKATUR, S. GUPTA, S. INOUE, T. ROSEN BAND und W. KETTERLE, *Realization of Bose-Einstein Condensates in Lower Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001).
- [Gre01] M. GREINER, I. BLOCH, T. W. HÄNSCH und T. ESSLINGER, *Magnetic Transport of Trapped Cold Atoms over a Large Distance*, Phys. Rev. A **63**, 031401 (2001).
- [Gre02] M. GREINER, O. MANDEL, T. ESSLINGER, T. W. HÄNSCH und I. BLOCH, *Quantum Phase Transition from a Superfluid to a Mott Insulator in a Gas of Ultracold Atoms*, Nature **415**, 39 (2002).
- [Gro61] E. P. GROSS, *Structure of a Quantized Vortex in Boson Systems*, Nuovo Cimento **20**, 454 (1961).
- [Gus02] T. L. GUSTAVSON, A. P. CHIKKATUR, A. E. LEANHARDT, A. GÖRLITZ, S. GUPTA, D. E. PRITCHARD und W. KETTERLE, *Transport of Bose-Einstein Condensates with Optical Tweezers*, Phys. Rev. Lett. **88**, 020401 (2002).
- [Hän75] T. W. HÄNSCH und A. L. SCHAWLOW, *Cooling of Gases by Laser Radiation*, Opt. Commun. **13**, 68 (1975).
- [Hän01] W. HÄNSEL, P. HOMMELHOFF, T. W. HÄNSCH und J. REICHEL, *Bose-Einstein Condensation on a Microelectric Chip*, Nature **413**, 498 (2001).

- [Hec00] G. HECHENBLAIKNER, O. M. MARAGÓ, E. HODBY, J. ARLT, S. HOPKINS und C. J. FOOT, *Observation of Harmonic Generation and Nonlinear Coupling in the Collective Dynamics of a Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **85**, 692 (2000).
- [Hen99] C. HENKEL, S. PÖTTING und M. WILKENS, *Loss and Heating of Particles in Small and Noisy Traps*, Appl. Phys. B **69**, 379 (1999).
- [Hes86] H. F. HESS, *Evaporative Cooling of Magnetically Trapped and Compressed Spin-polarized Hydrogen*, Phys. Rev. B **34**, 3476 (1986).
- [Hoh65] P. C. HOHENBERG und P. C. MARTIN, *Microscopic Theory of Superfluid Helium*, Ann. Phys. **34**, 291 (1965).
- [Hua63] K. HUANG, *Statistical Mechanics* (Wiley, New York, 1963).
- [Ido00] T. IDO, Y. ISOYA und H. KATORI, *Optical-dipole Trapping of Sr Atoms at a High Phase-space Density*, Phys. Rev. A **61**, 061403(R) (2000).
- [Jap02] Y. JAPHA und Y. B. BAND, *Motion of a Condensate in a Shaken and Vibrating Harmonic Trap*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **35**, 2383 (2002).
- [Jin96] D. S. JIN, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN und E. A. CORNELL, *Collective Excitations of a Bose-Einstein Condensate in a Dilute Gas*, Phys. Rev. Lett. **77**, 420 (1996).
- [Jin97] D. S. JIN, M. R. MATTHEWS, J. R. ENSHER, C. E. WIEMAN und E. A. CORNELL, *Temperature-Dependent Damping and Frequency Shifts in Collective Excitations of a Dilute Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **78**, 764 (1997).
- [Joh98] K. S. JOHNSON, M. DRNDIC, J. H. THYWISSEN, G. ZABOW, R. M. WESTERVELT und M. PRENTISS, *Atomic Deflection Using an Adaptive Microelectromagnet Mirror*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1137 (1998).
- [Kag96] Y. KAGAN, E. L. SURKOV und G. V. SHLYAPNIKOV, *Evolution of a Bose-condensed Gas under Variations of the Confining Potential*, Phys. Rev. A **54**, R1753 (1996).
- [Kag97a] Y. KAGAN, E. L. SURKOV und G. V. SHLYAPNIKOV, *Evolution and Global Collapse of Trapped Bose Condensates under Variations of the Scattering Length*, Phys. Rev. Lett. **79**, 2604 (1997).
- [Kag97b] Y. KAGAN, E. L. SURKOV und G. V. SHLYAPNIKOV, *Evolution of a Bose gas in Anisotropic Time-dependent Traps*, Phys. Rev. A **55**, R18 (1997).

- [Ker00] A. J. KERMAN, V. VULETIĆ, C. CHIN und S. CHU, *Beyond Optical Molasses: 3D Raman Sideband Cooling of Atomic Cesium to High Phase-Space Density*, Phys. Rev. Lett. **84**, 439 (2000).
- [Ket96a] W. KETTERLE und N. J. VAN DRUTEN, *Bose-Einstein Condensation of a Finite Number of Particles Trapped in one or three Dimensions*, Phys. Rev. A **54**, 656 (1996).
- [Ket96b] W. KETTERLE und N. J. VAN DRUTEN, *Evaporative Cooling of Trapped Atoms*, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **37**, 181 (1996).
- [Ket99] W. KETTERLE, D. S. DURFEE und D. M. STAMPER-KURN, *Making, Probing and Understanding Bose-Einstein Condensates*, in *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, herausgegeben von M. Inguscio, S. Stringari, C. E. Wieman (IOS Press, 1999), S. 67.
- [Key00] M. KEY, I. G. HUGHES, W. ROOIJAKKERS, B. E. SAUER und E. A. HINDS, *Propagation of Cold Atoms along a Miniature Magnetic Guide*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1371 (2000).
- [Kha02] L. KHAYKOVICH, F. SCHRECK, G. FERRARI, T. BOURDEL, J. CUBIZOLLES, L. D. CARR, Y. CASTIN und C. SALOMON, *Formation of a Matter-Wave Bright Soliton*, Science **296**, 1290 (2002).
- [Koh61] W. KOHN, *Cyclotron Resonance and de Haas-van Alphen Oscillations of an Interacting Electron Gas*, Phys. Rev. **123**, 1242 (1961).
- [Kra02] S. KRAFT, A. GÜNTHER, H. OTT, D. WHARAM, C. ZIMMERMANN und J. FORTÁGH, *Anomalous Longitudinal Magnetic Field near the Surface of Copper Conductors*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **35**, L469 (2002).
- [Lau99] D. C. LAU, A. I. SIDOROV, G. I. OPAT, R. J. MCLEAN, W. J. ROWLANDS und P. HANNAFORD, *Reflection of Cold Atoms from an Array of Current-Carrying Conductors*, Eur. Phys. J. D **5**, 193 (1999).
- [Lea02] A. E. LEANHARDT, A. P. CHIKKATUR, D. KIELPINSKI, Y. SHIN, T. L. GUSTAVSON, W. KETTERLE und D. E. PRITCHARD, *Propagation of Bose-Einstein Condensates in a Magnetic Waveguide*, Phys. Rev. Lett. **89**, 040401 (2002).
- [Lev02] B. LEV und H. MABUCHI, *Magnetic Microtraps for Cavity QED*, ICAP 2002 Book of Abstracts , 116 (2002).
- [Lom76] N. LOMB, *Least-squares Frequency-analysis of Unequally Spaced Data*, Astrophys. Space Sci. **39**, 447 (1976).

- [Mad00] P. MADDALONI, M. MODUGNO, C. FORT, F. MINARDI und M. INGUSCIO, *Collective Oscillations of Two Colliding Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **85**, 2413 (2000).
- [Mat98] M. R. MATTHEWS, D. S. HALL, D. S. JIN, J. R. ENSHER, C. E. WIEMAN, E. A. CORNELL, F. DALFOVO, C. MINNITI und S. STRINGARI, *Dynamical Response of a Bose-Einstein Condensate to a Discontinuous Change in Internal State*, Phys. Rev. Lett. **81**, 243 (1998).
- [Mat99] M. R. MATTHEWS, B. P. ANDERSON, P. C. HALJAN, D. S. HALL, C. E. WIEMAN und E. A. CORNELL, *Vortices in a Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2498 (1999).
- [Mew96a] M.-O. MEWES, M. R. ANDREWS, N. J. VAN DRUTEN, D. M. KURN, D. S. DURFEE und W. KETTERLE, *Bose-Einstein Condensation in a Tightly Confining dc Magnetic Trap*, Phys. Rev. Lett. **77**, 416 (1996).
- [Mew96b] M.-O. MEWES, M. R. ANDREWS, N. J. VAN DRUTEN, D. M. KURN, D. S. DURFEE, C. G. TOWNSEND und W. KETTERLE, *Collective Excitations of a Bose-Einstein Condensate in a Magnetic Trap*, Phys. Rev. Lett. **77**, 988 (1996).
- [Mün99] P. MÜNSTERMANN, T. FISCHER, P. MAUNZ, P. W. H. PINSKE und G. REMPE, *Dynamics of Single-Atom Motion Observed in a High-Finesse Cavity*, Phys. Rev. Lett. **82**, 3791 (1999).
- [Moe96] A. J. MOERDIJK und B. J. VERHAAR, *Collisional Two- and Three-body Decay Rates of Dilute Quantum Gases at Ultralow Temperatures*, Phys. Rev. A **53**, R19 (1996).
- [Mül99] D. MÜLLER, D. Z. ANDERSON, R. J. GROW, P. D. D. SCHWINDT und E. A. CORNELL, *Guiding Neutral Atoms Around Curves with Lithographically Patterned Current-Carrying Wires*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5194 (1999).
- [Mya96] C. J. MYATT, N. R. NEWBURY, R. W. GHRIST, S. LOUTZENHISER und C. E. WIEMAN, *Multiply Loaded Magneto-optical Trap*, Opt. Lett. **21**, 290 (1996).
- [Ono00] R. ONOFRIO, D. S. DURFEE, C. RAMAN, M. KÖHL, C. E. KUKLEWICZ und W. KETTERLE, *Surface Excitations of a Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **84**, 810 (2000).
- [Ott01] H. OTT, J. FORTÁGH, G. SCHLOTTERBECK, A. GROSSMANN und C. ZIMMERMANN, *Bose-Einstein Condensation in a Surface Microtrap*, Phys. Rev. Lett. **87**, 230401 (2001).

- [Ott02a] H. OTT, J. FORTÁGH, S. KRAFT, A. GÜNTHER, D. KOMMA und C. ZIMMERMANN, *Nonlinear Dynamics of a Bose-Einstein Condensate in a Magnetic Waveguide*, cond-mat/0212220 (2002).
- [Ott02b] H. OTT, J. FORTÁGH und C. ZIMMERMANN, *Dynamics of a Bose-Einstein Condensate in an Anharmonic Potential*, cond-mat/0212193 (2002).
- [Ovc99] Y. B. OVCHINNIKOV, J. H. MÜLLER, M. R. DOERY, E. J. D. VREDENBREGT, K. HELMERSON, S. L. ROLSTON und W. D. PHILLIPS, *Diffraction of a Released Bose-Einstein Condensate by a Pulsed Standing Light Wave*, Phys. Rev. Lett. **83**, 284 (1999).
- [PG96] V. M. PÉREZ-GARCÍA, H. MICHINEL, J. I. CIRAC, M. LEWENSTEIN und P. ZOLLER, *Low Energy Excitations of a Bose-Einstein Condensate: A Time-Dependent Variational Analysis*, Phys. Rev. Lett. **77**, 5320 (1996).
- [Pit61] L. P. PITAEVSKII, *Vortex Lines in an Imperfect Bose Gas*, Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961).
- [Pre88] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING und B. P. FLANERY, *Numerical Recipes in C* (Cambridge University Press, 1988).
- [Pri83] D. E. PRITCHARD, *Cooling Neutral Atoms in a Magnetic Trap for Precision Spectroscopy*, Phys. Rev. Lett. **51**, 1336 (1983).
- [Pro85] J. V. PRODAN, A. MIGDAL, W. D. PHILLIPS, H. J. METCALF und J. DALIBARD, *Stopping Atoms with Laser Light*, Phys. Rev. Lett. **54**, 992 (1985).
- [Raa87] E. L. RAAB, M. PRENTISS, A. CABLE, S. CHU und D. E. PRITCHARD, *Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure*, Phys. Rev. Lett. **59**, 2631 (1987).
- [Rei99] J. REICHEL, W. HÄNSEL und T. W. HÄNSCH, *Atomic Micromanipulation with Magnetic Surface Traps*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3398 (1999).
- [Ric95] L. RICCI, M. WEIDEMÜLLER, T. ESSLINGER, A. HEMMERICH, C. ZIMMERMANN, V. VULETIC, W. KÖNIG und T. W. HÄNSCH, *A Compact Grating-Stabilized Diode Laser System for Atomic Physics*, Opt. Comm. **117**, 541 (1995).
- [Rud02] M. RUDER, *Lichtmoden eines Ringresonators hoher Güte als Dipolfallen für ultrakalte Rubidium-Atome*, Diplomarbeit, Universität Tübingen (2002).

- [Rup96] P. A. RUPRECHT, M. EDWARDS, K. BURNETT und C. W. CLARK, *Probing the Linear and Nonlinear Excitations of Bose-condensed Neutral Atoms in a Trap*, Phys. Rev. A **54**, 4178 (1996).
- [Sal00] L. SALASNICH, *Resonances and Chaos in the Collective Oscillations of a Trapped Bose Condensate*, Phys. Lett. A **266**, 187 (2000).
- [Sal02] G. L. SALMOND, C. A. HOLMES und G. J. MILBURN, *Dynamics of a Strongly Driven Two-component Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. A **65**, 033623 (2002).
- [Sch01] G. SCHLOTTERBECK, *Eine stark anisotrope Mikrofalle für ultrakalte Atome*, Diplomarbeit, Universität Tübingen (2001).
- [Shv02] I. SHVARCHUCK, C. BUGGLE, D. S. PETROV, K. DIECKMANN, M. ZIELONKOVSKI, M. KEMMANN, T. G. TIECKE, W. VON KLITZING, G. V. SHLYAPNIKOV und J. T. M. WALRAVEN, *Bose-Einstein Condensation into Non-equilibrium States Studied by Condensate Focusing*, cond-mat/0207599 (2002).
- [Sin96] K. G. SINGH und D. S. ROKHSAR, *Collective Excitations of a Confined Bose Condensate*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1667 (1996).
- [SK98a] D. M. STAMPER-KURN, M. R. ANDREWS, A. P. CHIKKATUR, S. INOUE, H.-J. MIESNER, J. STENGER und W. KETTERLE, *Optical Confinement of a Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2027 (1998).
- [SK98b] D. M. STAMPER-KURN, H.-J. MIESNER, S. INOUE, M. R. ANDREWS und W. KETTERLE, *Collisionless and Hydrodynamic Excitations of a Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **81**, 500 (1998).
- [Str96a] S. STRINGARI, *Collective Excitations of a Trapped Bose-Condensed Gas*, Phys. Rev. Lett. **77**, 2360 (1996).
- [Str96b] S. STRINGARI, F. DALFOVO, M. GUILLEUMAS, A. LASTRI und L. PITAEVSKII, *Theory of Quantum Evaporation from Superfluid Helium*, Czech. J. Phys. **46**, 2973 (1996).
- [Suk97] C. V. SUKUMAR und D. M. BRINK, *Spin-flip Transitions in a Magnetic Trap*, Phys. Rev. A **56**, 2451 (1997).
- [Tab89] M. TABOR, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics* (Wiley, New York, 1989).
- [Val99] P. VALKERING, *Optimization of Evaporative Cooling of Rubidium Atoms in a Magnetic Trap*, Dissertation, University of Utrecht (1999).

- [Vul96] V. VULETIĆ, *Bosonisches und fermionisches Lithium in einer steilen magnetischen Falle*, Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München (1996).
- [Vul98] V. VULETIĆ, T. FISCHER, M. PRAEGER, T. W. HÄNSCH und C. ZIMMERMANN, *Microscopic Magnetic Quadrupole Trap for Neutral Atoms with Extreme Adiabatic Compression*, Phys. Rev. Lett. **80**, 1634 (1998).
- [Wei95] J. D. WEINSTEIN und K. G. LIBBRECHT, *Microscopic Magnetic Traps for Neutral Atoms*, Phys. Rev. A **52**, 4004 (1995).
- [Wie76] C. WIEMAN und T. W. HÄNSCH, *Doppler-Free Polarization Spectroscopy*, Phys. Rev. Lett. **36**, 1170 (1976).
- [Win79] D. J. WINELAND und W. M. ITANO, *Laser Cooling of Atoms*, Phys. Rev. A **20**, 1521 (1979).
- [Win83] W. H. WING, *Laser Cooled and Trapped Atoms*, in *Proceedings of the Workshop on Spectroscopic Applications of Slow Atomic Beams*, herausgegeben von W. D. Phillips (U. S. GPO, Washington, D.C., 1983), S. 265.
- [Zac99] A. ZACH, *Entwicklung und Aufbau eines frequenzstabilen, schmalbandigen Trapez-Dioden-Laser-Verstärker-Systems mit hoher Ausgangsleistung*, Diplomarbeit, Ludwig-Maximilian Universität München (1999).