

**Die Methode der Finiten Massen
in der
astrophysikalischen Hydrodynamik**

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Mathematik und Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Markus Klingler

aus

Urach (jetzt Bad Urach)

2003

Selbstverlegt von: Markus Klingler
Kelternstr. 19
72555 Metzingen

Tag der mündlichen Prüfung: 27. November 2003

Dekan: Prof. Dr. Herbert Müther
1. Berichterstatter: Prof. Dr. Hanns Ruder
2. Berichterstatter: Prof. Dr. Harry Yserentant
3. Berichterstatter: Prof. Dr. Christoph Zenger

”Das, wobei unsere Berechnungen versagen, nennen wir Zufall.”

Albert Einstein (1879–1955)

Zusammenfassung

Die Methode der Finiten Massen in der astrophysikalischen Hydrodynamik

Die Methode der Finiten Massen (FMM) ist eine neu entwickelte Lagrangesche Teilchenmethode zur Simulation kompressibler Strömungen. FMM baut auf einer Diskretisierung der Masse auf, nicht des Raums wie etwa bei Finiten Elementen oder Finiten Volumen. Die Methode wurde anhand einfacher Standardprobleme, deren analytische Lösungen zugänglich sind, ausführlich getestet, wesentliche Eigenschaften wie die hohe Approximationsordnung und Konvergenz zweiter Ordnung konnten verifiziert werden.

Ziel dieser Arbeit ist, die Eignung der Methode der Finiten Massen in Problemstellungen der astrophysikalischen Hydrodynamik zu untersuchen. Das Hauptaugenmerk gilt den Strömungen in Akkretionsscheiben, die in verschiedensten astronomischen Objekten vorkommen; in protoplanetaren Scheiben um junge Sterne entstehen Planeten und enge Doppelsternsysteme bilden Akkretionsscheiben durch Massenüberstrom aus. Für die Behandlung solcher Strömungen mit freien Rändern eignen sich Lagrangesche Teilchenmethoden, zu denen auch das Smoothed Particle Hydrodynamics Verfahren gehört, recht gut, gleiches wird von FMM erwartet.

Die Strömung in Akkretionsscheiben wird von den Gravitationskräften dominiert, sie bewirken Strömungsgeschwindigkeiten, die weit im Überschallbereich liegen, während die hydrodynamischen Kräfte erst an zweiter Stelle die Entwicklung der Scheibe mitbestimmen. Lagrangesche Methoden sind für solche Strömungen geradezu prädestiniert, im Gegensatz zu Methoden mit ortsfester Diskretisierung, in denen allein die Verfolgung der Freifalltrajektorien zu sehr hohen Anteilen in den Advektionstermen führt.

In der ersten Simulation wird eine viskose Akkretionsscheibe in Staubbahnung in einem Zentralpotential untersucht, für dieses bekannte Testproblem kann eine analytische Lösung angegeben werden. Anhand dieses Beispiels werden prinzipielle Eigenschaften der Methode der Finiten Massen untersucht, es werden Grundlagen zur Problemmodellierung erarbeitet, der Einfluß numerischer Parameter studiert und die Ergebnisse mit der bekannten Lösung verglichen.

In weiteren Simulationen werden druckdominierte Scheiben mit und ohne Viskosität im Zentralpotential sowie im Roche-Potential, das in Doppelsternsystemen auftritt, untersucht. Die analytischen Lösungen solcher Scheiben sind im allgemeinen nicht zugänglich, die Simulationsergebnisse werden daher mit Ergebnissen verglichen, die aus Rechnungen mit anderen numerischen Verfahren gewonnen wurden. Die Methode der Finiten Massen erweist sich in diesen Vergleichen als sehr vorteilhaft, insbesondere auch deshalb, da sie kaum merkliche inhärente dissipative Eigenschaften besitzt. So wird in einer Simulation die Entstehung großer, ausgedehnter Wirbelstrukturen in einer nicht viskosen Scheibe im Zentralpotential untersucht, weiterhin wird der Einfluß dieser Wirbel auf den Drehimpulstransport bestimmt und erfolgreich mit vorliegenden Ergebnissen verglichen. Weitere Untersuchungen widmen sich der Entstehung von Rossby-Wellen Instabilitäten in solchen Scheiben sowie der Entstehung einer signifikanten zweiarmigen Spiralstruktur in Akkretionsscheiben im Roche-Potential.

Akkretionsscheiben in engen Doppelsternsystemen sind meist sehr heiß und daher auch sehr leuchtstark. In einer selbst-konsistenten Beschreibung des Fluids der Scheibe muß daher der Energieverlust durch Schwarzkörperstrahlung in der Energiebilanz mitberücksichtigt werden. Der Kühlprozeß durch Wärmestrahlung vollzieht sich jedoch im Vergleich zur dynamischen Entwicklung auf sehr kurzen Zeitskalen, so daß die nun erhaltenen Gleichungen für eine numerische Behandlung zu steif sind. Es wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem der Kühlprozeß von der Dynamik als entkoppelt betrachtet und dadurch in geeigneter Weise mitberücksichtigt werden kann. Mit dieser Erweiterung werden nun die Akkretionsscheiben in zwei echten astronomischen Doppelsternsystemen simuliert. In dem ersten Fall wird eine exzentrische, präzedierende Scheibe in dem Superhumpssystem AM CVn untersucht. Die Ergebnisse, wie etwa die Präzessionsfrequenz, werden erfolgreich mit den Beobachtungsdaten verglichen. Die Simulation liefert zugleich die Bereiche erhöhter Dissipation während des Superhumpphänomens in hoher Ortsauflösung. Das zweite untersuchte Objekt ist die Zwergnova U Geminorum, die Simulation der Scheibe in diesem System liefert eine detaillierte Beschreibung eines Zwergnovaausbruchs. Durch die geeignete Behandlung der Energiegleichung und unter Einbeziehung einer geeigneten Materialbeschreibung für den Ionisierungsvorgang konnte die Entwicklung der Scheibe während des Ausbruchs selbst-konsistent orts- und zeitaufgelöst simuliert werden. Im voll entwickelten Ausbruch befindet sich die Scheibe nahezu global im ionisierten Zustand, die nun vorherrschende erhöhte Viskosität bewirkt eine starke Ausdehnung der Scheibe und die äußeren Bereiche unterliegen jetzt der Gezeitenstörung des Begleitsterns, welche eine zweiarmige Spiralstruktur induziert. Diese Spiralen wurden mithilfe der Dopplertomographie beobachtet, Hauptcharakteristika der Spiralen in den Simulationsergebnissen stimmen hervorragend mit den Beobachtungsdaten überein.

Im Anhang werden zwei Erweiterungen der Methode der Finiten Massen vorgestellt, zum einen die Methode der Spiegeltelchen zur Behandlung von festen Rändern, zum zweiten das Verfahren der Neuapproximation mit lokaler Massen- und Entropieerhaltung. Beide Erweiterungen kamen in den astrophysikalischen Beispielen nicht zum Einsatz, erweitern jedoch das Potential der Methode für zukünftige Anwendungen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die Methode der Finiten Massen	7
2.1	Eine neue Teilchenmethode	8
2.2	Das Konzept sich überlappender Massenpakete	8
2.3	Approximation der Feldgrößen	9
2.4	Thermodynamische Relationen	12
2.5	Die Bewegungsgleichungen für die Teilchen	16
2.6	Reibungskräfte	17
2.7	Viskosität	20
2.8	Weitere physikalische Effekte	21
2.9	Diskretisierung der Integrale	23
2.10	Zeitintegration	24
2.11	Das Restart-Verfahren	25
2.12	Parallelisierung	28
3	Akkretionsscheiben	31
3.1	Dünne Akkretionsscheiben	32
3.1.1	Radiale Struktur	32
3.1.2	Stationäre Scheiben	33
3.1.3	Die Vertikalstruktur dünner Scheiben	35
3.1.4	Die α -Parametrisierung der Viskosität	37
3.1.5	Opazitäten	38
3.1.6	Das Scheibeninstabilitätsmodell	40
3.2	Wechselwirkende Doppelsterne	42
3.2.1	Das Roche-Potential des Binärsystems	43
3.2.2	Parametrisierung des Überstroms am inneren Lagrange-Punkt	45
3.2.3	Klassifizierung Kataklysmischer Variablen	46
4	Simulation idealisierter Akkretionsscheiben	51
4.1	Der viskos zerfließende Staubring	52
4.1.1	Prinzipielle Modellierungstechniken	53
4.1.2	Ergebnisse	56
4.2	Druckdominierte Scheiben	62
4.2.1	Modellierung druckdominierter Scheiben	63

4.2.2	Instabilität einer homentrop gestörten Scheibe	65
4.2.3	Eine stabile Scheibe	70
4.2.4	Barokline Instabilität in Akkretionsscheiben	72
4.3	Akkretionsscheiben in Binärsystemen	75
4.3.1	Das Superhump Phänomen	75
4.3.2	Die Akkretionsscheibe in dem Doppelsternsystem OY Carinae	82
5	Akkretionsscheiben in Kataklysmischen Variablen	91
5.1	Behandlung der Schwarzkörperstrahlung in vertikaler Richtung	92
5.2	Der Superhumper AM Canum Venaticorum	95
5.2.1	Simulation der Scheibe von AM CVn	96
5.2.2	Ergebnisse der Simulation von AM CVn	97
5.2.3	Diskussion der Ergebnisse aus der Simulation von AM CVn	103
5.3	Die Zwergnova U Geminorum	105
5.3.1	Diskussion über Drehimpulstransport und Spiralstrukturen in Akkretionsscheiben	105
5.3.2	Simulation der Scheibe von U Gem	107
5.3.3	Ergebnisse der Simulation von U Gem	107
5.3.4	Diskussion der Ergebnisse aus der Simulation von U Gem	120
A	Die Behandlung fester Ränder	123
A.1	Spiegelung an Hyperebenen	124
A.2	Der Machkegel	125
A.3	Berücksichtigung äußerer Kräfte	128
A.4	Laminare Randbedingungen	130
B	Das Restartverfahren mit lokaler Entropie- und Massenerhaltung	133
C	Symbole und Konstanten	137
	Abbildungsverzeichnis	141
	Literaturverzeichnis	143

1 Einleitung

Das Studium der Bewegung von Gasen und Flüssigkeiten, sogenannten Fluiden, bildet den Inhalt der Hydrodynamik. Die Analyse von Strömungen spielt in der wissenschaftlichen Forschung aber auch in technischen Entwicklungsprozessen eine bedeutende Rolle. Bei der Konstruktion von Flugzeugen, Autos oder Turbinen benötigt man eine Beschreibung der zeitlichen Entwicklung von Strömungen ebenso wie bei der Berechnung von Klima- und Wetterphänomenen. Die Strömungsmechanik stellt jedoch auch einen wesentlichen Teil der astrophysikalischen Grundlagenforschung dar. Materie tritt im Universum hauptsächlich im gasförmigen Zustand auf, die meisten sichtbaren Objekte bestehen aus Gas oder Staub. Die Dynamik dieser Gasansammlungen wird von der Gravitationskraft dominiert, sie ist die einzigste langreichweitige Kraft. Daneben spielen hydrodynamische Kräfte und die Wechselwirkung mit Feldern, wie Magnetfelder oder Strahlungsfelder eine wesentliche Rolle. Diese Summe dieser Kräfte führt in der Materie zu Strukturen und Strömungen. Eine wichtige Aufgabe der Astrophysik ist es, die Dynamik dieser Gasansammlungen in Modellen zu beschreiben und dadurch deren beobachtetes Verhalten zu erklären.

Eine wichtige Form von Strömungen in der Astrophysik stellen die Akkretionsphänomene dar. Als Akkretion bezeichnet man die Ansammlung von Materie auf ein zentrales Objekt durch Gravitation. Dieser Vorgang ist bei verschiedenen Arten von Zentralobjekten zu beobachten. Protosterne akkretieren Gas und Staub aus der ihr umgebenden protostellaren Scheibe. In dieser Scheibe werden sich später Planeten bilden, deren weitere Entwicklung ebenfalls von Akkretionsvorgängen bestimmt wird. Viele Sterne bilden sich in Doppel- oder Mehrfachsystemen aus. In einem späten Stadium ihrer Entwicklung ist der massereichere Stern entartet, er ist nun ein Weißer Zwerg, Neutronenstern oder ein Schwarzes Loch. In einigen Systemen haben sich beide Sterne so stark angenähert, daß Materieaustausch zwischen ihnen stattfinden kann. Dabei akkretiert der entartete Stern Gas aus der Hülle seines Begleiters, welches sich dann in einer Akkretionsscheibe um den entarteten Stern sammelt, sofern nicht ein sehr starkes Magnetfeld die Bildung dieser Scheibe verhindert. Letztlich akkretieren auch supermassive Zentren von Galaxien, in denen oftmals ein Schwarzes Loch vermutet wird, Materie aus ihrer Umgebung.

Die Dynamik in solchen Akkretionsströmungen wird durch die Schwerkraft des Zentralobjekts dominiert, während hydrodynamische Kräfte erst in zweiter Linie eine Rolle spielen. Diese sind es jedoch, die durch dissipative Vorgänge dem Gas Bewegungsenergie entziehen, wodurch die Akkretion auf das Zentralobjekt erst möglich wird. Die dissipierte Energie wird dabei zunächst in Wärme umgewandelt und schließlich abgestrahlt. Akkretionsvorgänge bilden somit einen hoch effizienten Mechanismus zur Umwandlung von potentieller Energie in Strahlung. In Doppelsternsystemen kann die Strahlungsleistung der Akkretionsscheibe sogar

die der beiden Sterne überwiegen. Ist die Akkretionsscheibe Instabilitäten unterworfen, so kann ihre zeitliche Strahlungsleistung variieren und das gesamte System erscheint als Helligkeitsveränderliche, eine der interessantesten astronomischen Objekte.

Die Masse der Akkretionsscheibe in Helligkeitsveränderlichen ist niedrig genug, so daß ihre Eigengravitation vernachlässigt werden kann. Beschränkt man sich in der Betrachtung auf nichtmagnetische Systeme, so können die Vorgänge in der Akkretionsscheibe allein mit Hilfe der Strömungsmechanik beschrieben werden. Die hydrodynamischen Gleichungen dieser Systeme sind jedoch so komplex, daß eine analytische Behandlung nicht möglich ist, stattdessen werden die Gleichungen mit einem numerischen Verfahren gelöst. In der technischen Entwicklung kommen vor allem gitterbasierte Verfahren zur numerischen Behandlung der hydrodynamischen Gleichungen zum Einsatz, zu ihnen zählen Finite-Volumen- oder Finite-Elemente-Verfahren. Diese Verfahren eignen sich jedoch nur bedingt zur Behandlung der Strömung in Akkretionsscheiben. Das Gas rotiert hier im Schwerfeld des Zentralobjekts mit mehrfacher Schallgeschwindigkeit, die relativen Geschwindigkeiten benachbarter Gasmassen sind jedoch moderat. In ortsfesten Gitterverfahren tritt dadurch eine starke Advektion über die Gitterzellen hinweg auf, welche in erster Näherung jedoch nur die Freifalltrajektorien der Gasmassen im externen Kraftfeld beschreibt, während die eigentlichen hydrodynamischen Kräfte gering sind. Die Beschreibung der Akkretionsströmung gelingt mit diesen Methoden überhaupt nur dann, wenn die Gleichungen in Zylinderkoordinaten und die Koordinaten in ein mitbewegtes Koordinatensystem transformiert werden. Diese Umstände motivieren den Einsatz von Lagrangeschen Verfahren, bei denen die Diskretisierung von der Strömung mitbewegt wird. Auch aus diesem Grund hat sich in der Astrophysik das 'Smoothed Particle Hydrodynamics'-Verfahren etabliert (vgl. z. B. [Monaghan 1992](#)). Dieses Verfahren erweist sich als sehr flexibel, wenn komplexe Probleme mit beliebigen Geometrien untersucht werden sollen. Leider besitzt dieses Verfahren schlechte Approximationseigenschaften und ist zudem mathematisch ungenügend fundiert. So existieren bis heute noch keine Aussagen über Konsistenz und Konvergenz des Verfahrens.

Ein neues Lagrangesches Verfahren zur Simulation kompressibler Fluide ist die Methode der Finiten Massen, die auf Arbeiten von Yserentant beruht und in [Gauger et al. \(2000\)](#) vorgestellt wird. Das Fluid wird in kleine, sich überlappende Massenpakete zerlegt, die sich unabhängig voneinander bewegen und linear deformieren können. Die Evolutionsgleichungen dieser Pakete ergeben sich aus inneren und äußeren Kräften, die aus den Gesetzen der Thermodynamik hergeleitet werden. Die Kräfte gehen dabei nicht auf die Euler- oder Navier-Stokes-Gleichungen, sondern auf physikalische Grundprinzipien wie Erhaltung von Masse, Impuls und Energie zurück. Die Methode der Finiten Massen besitzt Approximationseigenschaften höherer Ordnung und ist ausführlich mathematisch untersucht worden, so kann etwa Konvergenz höherer Ordnung gezeigt werden. Die Methode wurde anhand einfacher hydrodynamischer Beispiele, deren analytische Lösungen bekannt sind, erfolgreich getestet. Die Methode ist jedoch noch so jung, daß bislang noch keine astrophysikalischen Simulationen mit ihr ausgeführt wurden.

Die Rechnungen in dieser Arbeit beschreiben den Weg von einfachen Testrechnungen astrophysikalischer Beispiele bis hin zu vollständigen Simulationen von Akkretionsscheiben in Doppelsternsystemen. In den Testrechnungen werden grundlegende Eigenschaften der Me-

thode untersucht, gleichzeitig werden prinzipielle Modellierungstechniken vorgestellt. Mit den in dieser Arbeit erarbeiteten Erkenntnisse zur Simulation von Akkretionsscheiben konnten schließlich zwei echte astronomische Objekte simuliert werden, einmal ein Superhumpssystem und zum anderen der Ausbruch einer Zwergnova. Die aus den Simulationen erhaltenen Ergebnisse reproduzieren tatsächlich die astronomischen Beobachtungsdaten dieser Systeme und liefern somit einen weiteren Beitrag zum astrophysikalischen Verständnis der Natur von Akkretionsscheiben. Die Ergebnisse ermutigen zur Annahme, daß sich die neue Methode der Finiten Massen in Zukunft als Simulationswerkzeug für astrophysikalische Hydrodynamik etabliert.

Gliederung der Arbeit

Im folgenden Kapitel wird zunächst die Methode der Finiten Massen ausführlich vorgestellt, anschließend wird eine entscheidende Erweiterung der Methode beschrieben, die für die späteren Simulationen benutzt wurde. Verfolgen die Massenpakete eine Strömung komplexer Geometrie, so können ihre Verformungen so stark werden, daß sich die Approximationseigenschaften verschlechtern. In diesem Fall werden die approximierten Felder ausgewertet und durch undeformierte Massenpakete neu dargestellt. Dieses Verfahren wurde von [Gauger \(2000\)](#) entwickelt, im folgenden Kapitel werden die grundlegenden Mechanismen dieser Neuapproximation nochmals überblickartig wiedergegeben.

In Kapitel 3 wird die Theorie der Akkretionsscheiben vorgestellt. Es wird zunächst die Näherung einer geometrisch dünnen Scheibe beschrieben, das α -Modell für die turbulent erzeugte Viskosität und schließlich das Scheibeninstabilitätsmodell, das zur Erklärung der Zwergnovaausbrüche dient. Im zweiten Abschnitt werden besondere Eigenschaften der Doppelsternsysteme untersucht, wie etwa deren Gravitationspotential und die Bedingungen für den Massenüberstrom, desweiteren wird ein kurzer Einblick in die Klassifizierung dieser Systeme gegeben.

Die Ergebnisse aus den Simulationen idealisierter Akkretionsscheiben werden in Kapitel 4 vorgestellt. In der ersten Rechnung ist eine analytische Lösung des Problems bekannt. Anhand dieses Anwendungsbeispiels werden grundlegende Modellierungstechniken, die Eigenschaften der Methode der Finiten Massen in der Praxis sowie der Einfluß numerischer Parameter untersucht. In den Simulationen zu druckdominierten Scheiben werden speziellere Eigenschaften der Methode betrachtet, wie etwa das Dämpfungsverhalten oder die Anfälligkeit gegenüber Instabilitäten. Bereits hier gelingt der Anschluss an Vergleichsrechnungen aus aktuellen Publikationen, so konnte beispielsweise der Einfluß global ausgedehnter Wirbel zum Drehimpulstransport in Akkretionsscheiben bestätigt werden. In einem weiteren Abschnitt werden Rechnungen von Scheiben in Doppelsternsystemen vorgestellt. Die Rechnungen werden mit Ergebnissen aus Simulationen mit Gitterverfahren sowie mit der Smoothed Particle Hydrodynamics Methode verglichen. Aus dem Vergleich der Ergebnisse, die mit den verschiedenen Methoden gewonnen wurde, soll der Einfluß der Numerik auf die Ergebnisse abgeschätzt werden. Gleichzeitig gelingt mit diesem Vergleich eine Einschätzung der Qualität der Methode der Finiten Massen bezüglich deren Anwendbarkeit auf Akkretionsströmungen.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit der Simulation von Akkretionsscheiben in Doppelsternsystemen. Die Ergebnisse geben nicht nur deren Dynamik sondern auch den thermischen Zustand der Scheibe selbstkonsistent wieder. Es wird zunächst eine Methode vorgestellt, mit der der Energieanteil an Schwarzkörperstrahlung berücksichtigt werden kann, der die Scheibe kühlt. Aufgrund unterschiedlicher Zeitskalen der verschiedenen Prozesse ist eine standardisierte Behandlung dieses Anteils nicht möglich. Mit dieser Erweiterung wird eine präzedierende Scheibe in einem Superhumpssystem simuliert sowie der aus einer thermischen Instabilität hervorgegangene Ausbruch einer Zwergnova. Die Ergebnisse werden erfolgreich mit Beobachtungsdaten verglichen.

Im Anhang A wird eine Erweiterung der Methode vorgestellt, mit der feste Ränder berücksichtigt werden können. Feste Randbedingungen wurden in den astrophysikalischen Rechnungen nicht verwendet, sie spielen jedoch im Hinblick auf technische Anwendungen eine große Rolle.

In eigener Sache

Es wurde bereits angedeutet, daß die Motivation zur Entwicklung der Methode der Finiten Massen aus der Beobachtung folgte, daß das Smoothed Particle Hydrodynamics Verfahren aufgrund seiner flexiblen Anwendung große Popularität in der Astrophysik erfahren durfte. Nachdem die wesentlichen Entwicklungen der neuen Methode beendet waren, sollte diese ebenfalls anhand astrophysikalischer Beispiele getestet werden. Diese Aufgabe wurde mir übertragen, wobei ich bei der Auswahl der Testprobleme freie Hand hatte. Es stellte sich jedoch schnell heraus, daß die begrenzt zur Verfügung stehende Computerkapazität die Anwendbarkeit auf einfachere Probleme einschränkte, zudem bereitete die Deformation der Teilchen in stark scherenden Strömungen, wie sie in Akkretionsscheiben vorkommen, große Probleme. Die als Restart bezeichnete Reapproximation mit neuen, undeformierten Teilchen wurde in der Anfangsphase dieser Arbeit erst von Gauger (2000) entwickelt und befand sich noch in der Erprobungsphase. In dieser Zeit entstand die Idee, Spiegelteilchen zur Behandlung von festen Rändern einzusetzen. Die im Anhang A gezeigten Ergebnisse stellen chronologisch gesehen die ersten Arbeiten dar, in diesen Rechnungen wurde das Restart-Verfahren noch nicht benötigt. Da die Behandlung fester Ränder in den astrophysikalischen Beispielen keine Verwendung fand, wurden die Ergebnisse als eigenständiges Kapitel im Anhang angefügt.

Ebenfalls in der Anfangsphase dieser Arbeit stand die Aufgabe, das Computerprogramm neu zu codieren und zu parallelisieren. Die Neucodierung in der Sprache C++ erfolgte auf Basis eines existierenden Programms in Pascal, die Parallelisierung für Computer mit verteiltem Speicher wurde neu entwickelt, an beiden Arbeiten war ich wesentlich beteiligt. Ich habe bewusst darauf verzichtet, in dieser Arbeit algorithmische Ansätze oder gar Programmcode zu dokumentieren. Lediglich im letzten Abschnitt in Kapitel 2 wird in knapper und abstrakter Form der Ansatz der Parallelisierung beschrieben.

Als Anfang des Jahres 2000 der Mehrprozessorcomputer 'Kepler' installiert war, konnten die astrophysikalischen Problemstellungen in Angriff genommen werden, alle Simulationen, die in den Kapiteln 4 und 5 dokumentiert sind, wurden auf dem Parallelrechner 'Kepler' aus-

geführt. Es stellte sich schnell als notwendig heraus, das eigentliche Programm mit dem des Restart-Verfahrens zu einem gemeinsamen Simulationswerkzeug zu kombinieren. Der Preis für das nun entstandene, flexibel einzusetzende Programmpaket war eine komplette Umstellung der Datenstrukturen auf dynamische Strukturen, also neuer Programmieraufwand.

Bei der Auswahl der zu simulierenden Probleme habe ich mich für die Akkretionsscheiben entschieden. Grund hierfür war, daß in den Abteilungen Theoretische Astrophysik und Computational Physics am Institut für Astronomie und Astrophysik in Tübingen bereits zahlreiche Erfahrungen mit der Simulation von Akkretionsscheiben gemacht wurden, einerseits mit dem Smoothed Particle Hydrodynamics Verfahren wie auch mit Gittercodes. So konnte auf Erfahrungen in der Modellierung solcher Problemstellungen zurückgegriffen werden, zumindest solange, wie diese nicht direkt mit der numerischen Methode verbunden waren.

Aus all diesen Umständen folgt zwangsläufig ein gewisser didaktischer Aufbau dieser Arbeit. So zeigen die Simulationen in der dokumentierten Reihenfolge den Weg von der Erprobung des Verfahrens anhand analytisch lösbarer Problemen über die Modellierung einzelner Beispiele bis hin zur selbstkonsistenten Simulation von Akkretionsscheiben in Doppelsternsystemen. Eben in dieser Reihenfolge werden die Ergebnisse mit analytischen Lösungen, den Ergebnissen aus Vergleichsrechnungen und letztlich mit Beobachtungsdaten verglichen. Aus diesen Vergleichen kann, neben einer Bewertung der von mir geleisteten Arbeit, auch ein Qualitätsmerkmal für die Eignung der neuen Methode in astrophysikalischen Anwendungen abgeleitet werden.

Es darf nicht vergessen werden, daß sich die Methode der Finiten Massen weiterhin im Aufbau befindet. Im Anhang wird eine Erweiterung des Restart-Verfahrens vorgestellt, das eine lokale Normierung der Reapproximation erlaubt. Die Normierung wurde in den bereits ausgeführten Simulationen noch nicht benutzt, kann jedoch als zusätzliche Anregung für die Verwendung der Methode in zukünftigen Simulationen betrachtet werden. Von anderen Mitarbeitern in meiner Arbeitsgruppe für Numerische Analysis am Institut für Mathematik wird ein auf adaptiven Gittern basierter Laplace-Löser entwickelt, mit dem in Zukunft auch die Eigengravitation von Akkretionsscheiben untersucht werden kann. Weitere Entwicklungen in der Methode berücksichtigen die Oberflächenspannung in Fluiden oder behandeln die linearisierten Gleichungen zur Untersuchung von Schallausbreitung. Ein zukünftiges Projekt widmet sich der Einbindung eines Turbulenzmodells.

Es ist geplant, für den bereits existierenden Programmcode eine geeignete Dokumentation zu erstellen um anderen Wissenschaftlern die Benutzung der Methode der Finiten Massen zu erleichtern. Auch hinsichtlich diesen Aspekts wurde in dieser Arbeit großen Wert auf die Dokumentation der Problemmodellierung gelegt.

2 Die Methode der Finiten Massen

Systeme von gekoppelten, partiellen Differentialgleichungen, wie sie die hydrodynamischen Gleichungen darstellen, können meist nicht für die Allgemeinheit ihrer Problemstellungen explizit gelöst werden. Analytische Lösungen existieren nur für einfache Beispiele oder Problemstellungen mit hoher Symmetrie. In praxisrelevanten Fragestellungen, wie zum Beispiel die Umströmung von Fahr- und Flugzeugen oder Turbinenschaufeln ist allein die geometrische Beschreibung des Ausgangsproblems sehr kompliziert, dasselbe gilt für die Darstellung des zu erwartenden Strömungsbildes. Beim Einsatz von numerischen Verfahren werden die hydrodynamischen Gleichungen durch endlichdimensionale Ersatzprobleme angenähert und an ausgewählten Orten im Raum, Diskretisierung genannt, gelöst; das Strömungsbild wird dadurch, im Gegensatz zum kontinuierlichen Fall, auf endlich viele Freiheitsgrade der Bewegung eingeschränkt.

Kein numerisches Verfahren eignet sich jedoch gleichermaßen gut zur Lösung der verschiedensten Fragestellungen, so daß eine Fülle an numerischen Methoden parallel entwickelt wurden und zum Einsatz kommen. Viele Verfahren nutzen dabei bestimmte Einschränkungen an das zu erwartende Strömungsbild aus und lösen nur einen Teil der hydrodynamischen Gleichungen. Denken wir an die Strömung von Wasser in einem Flussbett, bei geringen Geschwindigkeiten kann die Strömung als inkompressibel und als nicht viskos, idealerweise sogar als stationär angenommen werden. Hier kommen oft gitterbasierte Verfahren wie die Methode der Finiten Volumen oder Finiten Elemente zur Anwendung, die vorab an die zeitlich unveränderbare Geometrie bzw. Berandung der Strömung angepasst werden können.

Strömungen in der Astrophysik, wie die in dieser Arbeit untersuchten Akkretionsströmungen, unterliegen jedoch keinen solchen Einschränkungen, sie sind kompressibel, nicht stationär, viskos, erreichen Überschallgeschwindigkeit und es existiert keine vorgegebene Berandung. Zur Behandlung solcher Strömungen haben sich Teilchenmethoden als geeignet erwiesen, deren prominentestes Beispiel das bereits angesprochene Smoothed Particle Hydrodynamics Verfahren ist (SPH). Die besonders einfache Modellierung geometrisch komplexer Strömungen mittels dieses Verfahrens begründet einerseits dessen Popularität in der Astrophysik, ist andererseits jedoch hinsichtlich seinen numerischen Eigenschaften, insbesondere den schlechten Approximationseigenschaften, unbefriedigend.

Diese Erkenntnisse waren daher mehr oder weniger direkte Motivation zur Entwicklung einer neuen Teilchenmethode, die einerseits so flexibel anzuwenden ist wie SPH und andererseits eine höhere Ordnung in der Approximation der Feldgrößen bietet. Von dieser Methode erwartete man nachweisbare Konvergenz höherer Ordnung genauso wie die Tatsache, daß elementare physikalische Eigenschaften des Fluids abgebildet werden, hierzu gehören insbesondere die Erhaltung von Energie, Impuls und Drehimpuls.

2.1 Eine neue Teilchenmethode

Erste Überlegungen für eine neue Teilchenmethode zur Beschreibung von kompressiblen Fluiden wurden von H. Yserentant in den Arbeiten (Yserentant 1997a,b, 1999b,a) vorgestellt. Die Methode der Finiten Massen wird in der Form, wie sie für die hier vorgestellten Simulationen benutzt wurde, in Gauger et al. (2000) beschrieben, diese Arbeit enthält auch erstmals Überlegungen zur Implementierung der Methode. Für die Simulation der im folgenden vorgestellten Akkretionsscheiben benutze ich die als 'Restart' bezeichnete Erweiterung der Methode, welche in Gauger (2000) genau beschrieben wird, eine kurze Darstellung des Restart-Verfahrens folgt auch in diesem Kapitel. Neuere Arbeiten von Yserentant (2000) untersuchen die Konvergenz der Methode bei Anwesenheit äußerer Kraftfelder, wie sie in der Astrophysik häufig vorkommen, sowie Teilchenmodelle für die Schallausbreitung in Fluiden (Yserentant 2001). In dieser Arbeit wird die Methode mit der Abkürzung FMM bezeichnet, wohl wissend, daß diese Abkürzung in anderer Literatur oftmals für die 'Fast Multipole Method' steht.

2.2 Das Konzept sich überlappender Massenpakete

Teilchen sind, einfach gesprochen, Massenpakete mit endlicher Ausdehnung die sich im Raum bewegen und sich gegenseitig durchdringen können. Die Bewegung aller Teilchen im Raum stellt die Bewegung der Masse in einem strömenden Fluid dar, FMM bezeichnet man daher als eine Lagrangesche Methode, im folgenden werden die Bewegungsgleichungen für die Teilchen über das Lagrange-Funktional hergeleitet. Um eine möglichst genaue Darstellung der Strömung zu ermöglichen, erhalten die Teilchen eine große Anzahl an Freiheitsgraden der Bewegung. Während sich der Mittelpunkt $\mathbf{q}_i(t)$ eines Teilchens i im Raum bewegt, kann es sich linear Verformen. Die lineare Verformung $\mathbf{H}_i(t)$ beinhaltet eine für jede Raumdimension unabhängige Größenänderung sowie eine Drehung und Scherung des Teilchens, ein Teilchen besitzt demnach in d Raumdimensionen $d + d^2$ Freiheitsgrade der Bewegung. Ein Punkt \mathbf{y} innerhalb des Teilchens i bewegt sich auf der Trajektorie

$$t \rightarrow \mathbf{q}_i(t) + \mathbf{H}_i(t) \mathbf{y} . \quad (2.1)$$

Die Forderung $\det \mathbf{H}_i(t) > 0$ gewährleistet, daß die Orientierung des Teilchens im Raum erhalten bleibt. Der Zusammenhang zwischen den Körperkoordinaten \mathbf{y} eines Punktes innerhalb des Teilchens und den Raumkoordinaten \mathbf{x} ist dann durch die zeitabhängige Translation und Verformung gegeben

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_i(t)^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{q}_i(t)) . \quad (2.2)$$

Die interne Massenverteilung eines Teilchens ist über den Ansatz

$$\mathbf{x} \rightarrow m_i [\det \mathbf{H}_i(t)]^{-1} \psi(\mathbf{y}) \quad (2.3)$$

definiert, mit einer skalaren und für jedes Teilchen individuellen Konstanten m_i . Die für alle Teilchen gleiche Formfunktion $\psi(\mathbf{y})$ ist elementarer Bestandteil der Methode, an sie werden

folgende Bedingungen gestellt

$$\int \psi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 1 \quad (2.4)$$

$$\int \psi(\mathbf{y}) \, \mathbf{y} \, d\mathbf{y} = 0 \quad (2.5)$$

$$\int \psi(\mathbf{y}) \, y_k \, y_l \, d\mathbf{y} = J \, \delta_{kl} . \quad (2.6)$$

Mit diesen Normierungsbedingungen ist die Gesamtmasse identisch mit der Konstanten m_i , der Schwerpunkt des Teilchens liegt im Mittelpunkt \mathbf{q}_i und ein nicht deformiertes Teilchen mit $\mathbf{H}_i = \mathbb{1}$ hat identische Hauptträgheitsmomente. Für die Auswahl der Formfunktion $\psi(\mathbf{y})$ sind nun viele Möglichkeiten denkbar, die Forderung nach ausreichender Differenzierbarkeit ist wichtig für die später hergeleitete Kräfteberechnung, Nichtnegativität ist eine natürliche Forderung aus der Interpretation der Massendichten. Die Forderung nach einem kompaktem Träger folgt zusätzlich im Hinblick auf eine effiziente Implementierung der Methode. Aufgrund seiner sehr guten Approximationseigenschaften wird für die eindimensionale Formfunktion $\tilde{\psi}(\xi)$ der 3bSpline

$$\tilde{\psi}(\xi) = \frac{4}{3} \begin{cases} 1 - 6\xi^2(1 - |\xi|) & , \quad 0 \leq |\xi| \leq 1/2 \\ 2(1 - |\xi|)^3 & , \quad 1/2 \leq |\xi| \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (2.7)$$

gewählt, der für die Konstante J den Wert $J = 1/12$ liefert. Für die Erweiterung der Formfunktion in mehrere Dimensionen d benutzt man den Tensorproduktansatz

$$\psi(\mathbf{y}) = \prod_{k=1}^d \tilde{\psi}(y_k) \quad (2.8)$$

der die Approximationseigenschaften in mehreren Dimensionen erhält.

2.3 Approximation der Feldgrößen

Zur genaueren Betrachtung der Approximationseigenschaften der ausgesuchten Formfunktion $\tilde{\psi}(\xi)$ denken wir uns eine Überlagerung f mehrerer, auf einem uniformen Gitter angeordneten und mit individuellen Gewichten g_i versehenen Funktionen $\tilde{\psi}$

$$f(x) = \sum_{i=1}^N g_i \cdot \tilde{\psi}(x - \bar{q}_i) \quad (2.9)$$

mit den Gitterpunkten \bar{q}_i und fester Gitterweite $\delta\bar{q}$. Ist die Gitterweite $\delta\bar{q}$ passend zur Formfunktion $\tilde{\psi}$ gewählt, so lassen sich geeignete Gewichte g_i so definieren, daß $f(x)$ ein Polynom bis zum Grad n exakt approximiert, für den gewählten 3bSpline ist nun $n = 3$ und $\delta\bar{q} = 0.5$.

Die Approximationsordnung gilt dabei für alle Orte x , also nicht nur in den Gitterpunkten \bar{q}_i , weiterhin ist die Überlagerung an allen Orten stetig differenzierbar $f \in C^\infty$. Alle diese Eigenschaften lassen sich durch den genannten Tensorproduktansatz in mehrere Dimensionen übertragen

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N g_i' \cdot \psi(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{q}}_i). \quad (2.10)$$

Die Approximationseigenschaften sind weiterhin invariant gegenüber einer globalen Translation \mathbf{q}_g und einer globalen linearen Deformation \mathbf{H}_g , so daß

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N g_i'' \cdot [\det \mathbf{H}_g]^{-1} \psi(\mathbf{H}_g^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q}_i)) \quad (2.11)$$

mit

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_g + \mathbf{H}_g \bar{\mathbf{q}}_i \quad (2.12)$$

wieder eine Approximation der Ordnung n an eine vorgegebene Funktion darstellt.

Bei der Erstellung einer Anfangskonfiguration von Teilchen wird man daher immer wenn möglich die Teilchenmittelpunkte nach 2.12 anordnen und eine einheitliche Deformation $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_g$ für alle Teilchen i wählen. Im Verlauf der Simulation werden sich die Teilchen entlang den Strömungslinien bewegen und deformieren, so daß die \mathbf{q}_i und \mathbf{H}_i zu späteren Zeiten nicht mehr der Gleichung 2.12 genügen werden, es sei denn, das globale Strömungsbild läßt sich durch eine globale Translation und lineare Deformation beschreiben. Ist letzteres nicht der Fall, geht der hohe Approximationsgrad verloren, jedoch nur in dem Maße, in dem das tatsächliche Strömungsbild von jenem Strömungsbild abweicht, das durch ein globales \mathbf{q}_g und \mathbf{H}_g beschrieben werden könnte. Wird diese Abweichung sehr groß, ist es unter Umständen nötig, die alte "verschobene" Teilchenkonfiguration durch eine neue Ausgangskonfiguration zu ersetzen. Dieses als 'Restart' bezeichnete Verfahren wird in einem der folgenden Abschnitte beschrieben.

Mit den bisherigen Überlegungen ist es nun einfach, die Approximation der Feldgrößen durch Überlagerung von Teilchen darzustellen, so folgt für die Massendichte zur Zeit t

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N m_i [\det \mathbf{H}_i(t)]^{-1} \psi\left(\mathbf{H}_i(t)^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q}_i(t))\right) \quad (2.13)$$

mit den individuellen und zeitabhängigen Positionen $\mathbf{q}_i(t)$ und Deformationen $\mathbf{H}_i(t)$ der Teilchen, die damit die Zeitabhängigkeit der approximierten Funktion $\rho(\cdot, t)$ darstellen, die Gewichte g_i der Teilchen sind hier identisch mit den Teilchenmassen m_i .

Für die allgemeine Beschreibung kompressibler Fluide benötigt man zwei unabhängige thermodynamische Variablen, neben der Massendichte verwendet man hier die Entropiedichte $s(\mathbf{x}, t)$. Mit einer für jedes Teilchen individuellen Entropie \hat{S}_i bzw. mit einer in der folgenden Darstellung verwendeten spezifischen Entropie $S_i = \hat{S}_i/m_i$ und der Abkürzung

$$\psi_i = [\det \mathbf{H}_i(t)]^{-1} \psi\left(\mathbf{H}_i(t)^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q}_i(t))\right) = [\det \mathbf{H}_i(t)]^{-1} \psi(\mathbf{y}) \quad (2.14)$$

erhält man die Entropiedichte

$$s(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N S_i(t) m_i \psi_i . \quad (2.15)$$

Die Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes folgt nun direkt aus der Zeitabhängigkeit der Positionen und Verformungen der Teilchen, jedes Teilchen i definiert innerhalb seines Trägers die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}'_i(t) + \mathbf{H}'_i(t) \mathbf{H}_i(t)^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{q}_i(t)) . \quad (2.16)$$

Ein sich bewegendes Teilchen, also ein sich bewegendes Masspaket stellt für sich allein zunächst einen Massenstrom dar und approximiert lokal über seine Formfunktion die Massenstromdichte

$$\mathbf{j}_i(\mathbf{x}, t) = m_i \psi_i \mathbf{v}_i(\mathbf{x}, t) , \quad (2.17)$$

die globale Massenstromdichte erhält man nun durch die bereits bekannte Überlagerung der Teilchen

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{j}_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N m_i \psi_i \mathbf{v}_i(\mathbf{x}, t) . \quad (2.18)$$

Mit Hilfe der Definition der Massenstromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.19)$$

und den lokalen Massenanteilen

$$\chi_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\psi_i(\mathbf{x}, t)}{\rho(\mathbf{x}, t)} \quad (2.20)$$

ergibt sich die Geschwindigkeit als eine mit den Massenanteilen gewichtete Überlagerung der Einteilchengeschwindigkeiten

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \chi_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_i(\mathbf{x}, t) . \quad (2.21)$$

Die von den Teilchen erzeugte Geschwindigkeit \mathbf{v} kann als eine Approximation zweiter Ordnung an ein vorgegebenes Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} interpretiert werden. Die Taylorentwicklung von \mathbf{u} bis zur ersten Ordnung

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{q}_i(t), t) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{q}_i(t), t) (\mathbf{x} - \mathbf{q}_i(t)) \quad (2.22)$$

um einen Punkt $\mathbf{q}_i(t)$ entspricht genau dann der von einem Teilchen mit den Koordinaten \mathbf{q}_i , \mathbf{H}_i dargestellten Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.23)$$

in der Umgebung von $\mathbf{x} = \mathbf{q}_i(t)$, wenn die Teilchengeschwindigkeiten \mathbf{q}'_i und \mathbf{H}'_i den Differentialgleichungen

$$\mathbf{q}'_i(t) = \mathbf{u}(\mathbf{q}'_i(t), t) \quad \text{und} \quad \mathbf{H}'_i(t)\mathbf{H}_i^{-1}(t) = (\nabla\mathbf{u})(\mathbf{q}_i(t), t) \quad (2.24)$$

genügen, zur Herleitung der zweiten Bedingung siehe auch [Gauger et al. \(2000\)](#).

Diese Approximationseigenschaft gilt sogar global

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.25)$$

da die Massenanteile χ_i in 2.21 eine Zerlegung der Eins in dem mit Masse erfüllten Raum darstellen. Diese Eigenschaft gilt übrigens unabhängig von den einzelnen Positionen der Teilchen bzw. von ihrer Gesamtkonfiguration, was sich aus der Definition in 2.20 leicht erkennen lässt. In [Yserentant \(2000\)](#) wird gezeigt, daß die Differenz aus dem vorgegebenen Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} und dem von den Teilchen approximierten

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \chi_i(\mathbf{x}, t) (\mathbf{v}_i - \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) \quad (2.26)$$

quadratisch mit der Teilchengröße konvergiert.

2.4 Thermodynamische Relationen

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, wie das Teilchenmodell zwei Skalarfelder approximiert und damit zwei unabhängige thermodynamische Variablen ρ und s definiert. Aus der Thermodynamik ist bekannt, daß sich in Abhängigkeit dieser Größen weitere Variablen wie der Druck $\pi(\rho, s)$, die absolute Temperatur $\theta(\rho, s)$ oder eine innere Energiedichte $\varepsilon(\rho, s)$ definieren lassen. Die Abhängigkeit dieser Variablen wird für alle kompressiblen Fluide durch die Gibbs'schen Fundamentalrelationen

$$\pi = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho + \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} s - \varepsilon, \quad \theta = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \quad (2.27)$$

beschrieben. Durch eine Angabe der Dichte der inneren Energie $\varepsilon(\rho, s)$ ist die Thermodynamik des Systems vollständig beschrieben. In allen Simulationen wurde hierfür die Gleichung für ein barytropisches ideales Gas verwendet

$$\varepsilon(\rho, s) = \frac{\pi_0}{\gamma - 1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \exp\left(\frac{s}{c_v \rho} \right) \quad (2.28)$$

mit den charakteristischen Konstanten π_0 und ρ_0 und den Materialkonstanten der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Volumen c_v und dem Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck und konstantem Volumen $\gamma = c_p/c_v$.

Wir wollen an dieser Stelle nun ein paar kleinere Bemerkungen anfügen, die sich zwar durch einfachste Umformung der obigen Gleichungen oder aus den Grundlagen der Thermodynamik ergeben, dem Leser oder zukünftigen Anwender von FMM einige Nebenrechnungen ersparen können.

Man kann sich berechtigterweise fragen, ob die Wahl der Entropiedichte als zweite thermodynamische Variable praktikabel ist. Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, daß Teilcheneigenschaften wie Masse und Entropie durch Multiplikation mit der Formfunktion und anschließender Überlagerung skalare Felder wie die Massendichte und Entropiedichte approximieren. In der Thermodynamik bezeichnet man die mengenabhängigen Eigenschaften wie Masse, Volumen, Energie oder Entropie als extensive Variablen. Im Gegensatz dazu sind intensive Variablen mengenunabhängig, zu ihnen zählen Druck, Temperatur, Massendichte, Energie- und Entropiedichte. Die Idee, ein Fluid in einzeln Pakete mit extensiven Größen aufzuteilen, die im kontinuierlichen Fall intensive thermodynamische Größen approximieren, stellt die Verallgemeinerung der Grundidee von FMM dar, ein Fluid in Massenpakete zu unterteilen. Alternativ für die Entropie und Entropiedichte könnte man sich ebenfalls das Paar innere Energie und deren Dichte denken. Für die intensiven Größen Temperatur und Druck existieren jedoch keine extensive Pendanten, die zugleich physikalisch anschauliche Größen darstellen. Daraus folgt auch, daß Teilchen nicht durch intensive Größen beschrieben werden können, ein Teilchen besitzt keine Temperatur, die Temperatur kann in dem vom Teilchen überdeckten Volumen verschiedene Werte annehmen, es existiert jedoch an jedem Punkt im Teilchen eine wohldefinierte Temperatur oder man kann eine über das Volumen gemittelte Temperatur definieren. In den im folgenden Abschnitt hergeleiteten Bewegungsgleichungen der Teilchen treten Terme auf, die eine Raumintegration über das Teilchenvolumen beschreiben, in der diskretisierten Form benötigt man dann lokal thermodynamische Größen, die nur aus den Skalarfeldern ρ und s gewonnen werden können, es war daher nötig, die Zustandsgleichung 2.28 in intensiven Variablen auszudrücken.

Durch die Wahl der spezifischen Entropie als zweite Teilcheneigenschaft ist es nun sehr einfach, adiabatische Zustandsänderungen in Fluiden zu beschreiben, indem man die Teilchenentropien konstant hält $S'_i(t) = 0$. Adiabatische Strömungen sind allein durch die Bedingung $S_{\text{ges.}} = \text{const.}$ definiert, sind nicht-dissipativ und damit gleichzeitig zeitreversibel. Aus der Thermodynamik ist bekannt, daß bei Zustandsänderungen die Entropie niemals abnimmt, im allgemeinen zunimmt und nur in idealisierten Fällen konstant bleibt. Insbesondere tritt in Schockfronten auch in nicht viskosen Fluiden Dissipation auf. Man beachte, daß bei adiabatischen Strömungen zwar die Entropie und damit auch die spezifische Entropie konstant bleibt, sich die Entropiedichte jedoch ändert.

Betrachten wir ein einzelnes Teilchen mit konstanter Entropie $S'_i(t) = 0$, das in dem von ihm überdeckten Volumen die Massendichte ρ_i und die Entropiedichte s_i approximiert, so werden sich bei einer Größenänderung des Teilchens sich ρ_i und s_i so verändern, daß $s_i/\rho_i = \text{const.}$ gilt. Dies gilt übrigens auch numerisch exakt, da ρ_i und s_i mit derselben Formfunktion ψ_i aus den Faktoren m_i und S_i hervorgehen. Mit der Darstellung des Drucks

$$\pi(\rho, s) = \pi_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \exp\left(\frac{s}{c_v \rho} \right) \quad (2.29)$$

und der Beobachtung $s_i/\rho_i = \text{const.}$ folgt, daß das einzelne Teilchen eine durch

$$\pi \propto \rho^\gamma \quad (2.30)$$

definierte polytrope Zustandsänderung beschreibt. Dies gilt global, wenn das Verhältnis s_i/ρ_i für alle Teilchen gleich ist, was gleichbedeutend ist mit

$$S_i = S_j \quad \forall i, j. \quad (2.31)$$

Beschreiben die Teilchen also zu irgendeinem Zeitpunkt einen polytropen Zustand, so führt jede adiabatische Zustandsänderung wieder auf einen polytropen Zustand. In einigen Simulationen, in denen polytrope Systeme betrachtet werden sollen, wird von dieser praktikablen Eigenschaft Gebrauch gemacht, indem man ausgehend von einer polytropen Konfiguration einfach bei der Zeitintegration für $S'_i(t) = 0$ sorgt.

Wir wollen noch kurz an die klassische Definition der Entropie erinnern, die Entropie in einem Zustand A

$$S(A) = S_0 + \int_{A_0}^A dS = \int_{A_0}^A \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{\theta} \quad (2.32)$$

ist definiert über die Summe der reversiblen Wärmeaustauschkontakte δQ_{rev} , gewichtet mit dem integrierenden Faktor θ^{-1} . Damit ist die Entropie $S(A)$ eine, bis auf eine additive Konstante S_0 festgelegte Zustandsgröße. Aus der Darstellung der Entropiedichte

$$s(\pi, \rho) = c_v \rho \left(\ln \frac{\pi}{\pi_0} - \gamma \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right) \quad (2.33)$$

läßt sich die Normierung der Entropiedichte auf den Wert 0 mit dem Zustand $\rho = \rho_0$ und $\pi = \pi_0$ direkt ablesen. Durch geeignete Wahl der beiden Normierungskonstanten kann global $s > 0$ erreicht werden. Formal spricht zwar nichts dagegen, auch negative Entropien zuzulassen, würde aber insbesondere der Definition der Entropie aus der statistischen Physik widersprechen.

Um also aus gegebenen Teilchendaten $m_i, S_i, \mathbf{q}_i, \mathbf{H}_i, \mathbf{q}'_i$ und \mathbf{H}'_i alle thermodynamischen Variablen bestimmen zu können, ist zusätzlich eine Angabe der Funktion $\varepsilon(\rho, s)$ nötig, diese Funktion wird im allgemeinen Fall eine Angabe über die Normierung der Entropie s_0 und weitere Materialkonstanten, im Fall des idealen Gases γ und c_v enthalten.

Wir wollen nun noch zeigen, daß die Gleichung 2.28 die Bedingung an ein ideales Gas

$$\pi \propto \rho \theta \quad (2.34)$$

erfüllt. Aus

$$\theta(\rho, s) = \frac{\pi_0}{(\gamma - 1)\rho c_v} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \exp \left(\frac{s}{c_v \rho} \right) \quad (2.35)$$

erhält man

$$s(\theta, \rho) = c_v \rho \ln \left[\theta \frac{\gamma - 1}{\pi_0} \rho_0 c_v \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\gamma - 1} \right], \quad (2.36)$$

eingesetzt in 2.29 ergibt

$$\pi(\rho, \theta) = \rho R \theta \quad (2.37)$$

mit der individuellen Gaskonstanten $R = c_v(\gamma - 1)$. Gleichzeitig gilt für R die Beziehung

$$R = \frac{k_B}{\mu m_H}, \quad (2.38)$$

mit der Boltzmannkonstanten k_B und dem mittleren Atomgewicht μ in Einheiten der Masse des Wasserstoffatoms m_H . Atomare Daten sind oft leichter zugänglich, so gilt für ein molekulares Wasserstoffgas einfach $\mu = 2$ und man kann daraus die Konstante c_v bestimmen. Die Konstante γ ergibt sich allein aus der Anzahl der Freiheitsgrade f eines Gasteilchens durch

$$\gamma = \frac{f + 2}{f}. \quad (2.39)$$

Einatomige Gase besitzen die drei Freiheitsgrade der Translation, woraus der Wert $\gamma = 5/3$ folgt. Zweiatomige Gase haben zwei zusätzliche Freiheitsgrade der Rotation, dies ergibt den Wert $\gamma = 1.4$. Für sehr hohe Temperaturen kann für zweiatomige Gase auch noch ein weiterer Freiheitsgrad der Oszillation angeregt werden. Wegen der aus der Quantenmechanik folgenden Mindestanregungsenergie ist dieser Freiheitsgrad unter Normalbedingungen jedoch eingefroren, daraus folgt auch, daß bei sehr niedrigen Temperaturen der Freiheitsgrad der Rotation einfrieren kann. Im allgemeinen ist $\gamma(\theta)$ also eine stückweis konstante Funktion der Temperatur. Bei hohen Temperaturen können mehratomige Gase auch dissoziieren, dabei ändern sich die Anzahl der Freiheitsgrade aber auch das mittlere Atomgewicht μ und damit die spezifische Wärmekapazität c_v , das gleiche gilt für noch höhere Temperaturen, bei denen die Atome ionisiert werden. Die Wärmekapazität ist also ebenfalls eine stückweis konstante Funktion der Temperatur $c_v(\theta)$. In den meisten strömungsmechanischen Untersuchungen werden die Materialkonstanten jedoch als konstant angenommen, vor allem deshalb, da eine korrekte Beschreibung eines Dissoziations- oder Ionisationsvorgangs eine genaue energetische Beschreibung der Bindungsenergien verlangt.

In der letzten Bemerkung wollen wir noch die Schallgeschwindigkeit für ein ideales Gas herleiten, sie ist definiert durch

$$c_s^2 = \frac{\partial \pi}{\partial \rho} \quad (2.40)$$

und beschreibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer kleinen Störung in linearer Näherung. Bei der Ableitung hat man daher die Wahl, diese bei konstanter Temperatur oder bei konstanter Entropie auszuführen, man erhält damit einerseits die isotherme Schallgeschwindigkeit $c_{s,\text{isoth.}}$ und andererseits die adiabatische Schallgeschwindigkeit $c_{s,\text{ad.}}$. Aus Gleichung 2.37 folgt

$$c_{s,\text{isoth.}}^2 = \left. \frac{\partial \pi}{\partial \rho} \right|_{\theta=\text{const.}} = c_v(\gamma - 1)\theta \quad (2.41)$$

und aus Gleichung 2.29

$$c_{s,\text{ad.}}^2 = \left. \frac{\partial \pi}{\partial \rho} \right|_{\text{ad.}} = \gamma c_v(\gamma - 1)\theta. \quad (2.42)$$

Wie schon gezeigt wurde, erzeugt man die adiabatische Ableitung durch die Bedingung $s/\rho = \text{const.}$

2.5 Die Bewegungsgleichungen für die Teilchen

Betrachten wir nun adiabatische Strömungen, die dadurch definiert sind, daß dem System keine Wärme δQ , etwa durch innere dissipative Vorgänge, zugeführt wird. Aus der Definition der Entropie folgt, daß die Gesamtentropie konstant bleibt ($\Delta S = 0$), solche Strömungen sind zeitreversibel. In diesem Fall nimmt die innere Energie des Gases die Form einer potentiellen Energie an und wir sind in der Lage, mit Hilfe des klassischen Lagrangeschen Formalismus die Bewegungsgleichungen der Koordinaten der Teilchen \mathbf{q}_i , \mathbf{H}_i für den adiabatischen Fall herzuleiten. Betrachten wir zunächst die kinetische Energie eines Teilchens i

$$E_i(t) = \frac{1}{2} \int m_i \psi_i(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}_i(\mathbf{x}, t)|^2 \, \mathbf{d}\mathbf{x}, \quad (2.43)$$

welche die geschlossene Darstellung

$$E_i = \frac{1}{2} m_i |\mathbf{q}'_i|^2 + \frac{1}{2} J m_i |\mathbf{H}'_i|^2 \quad (2.44)$$

besitzt. Die kinetische Energie des gesamten Systems folgt aus der Summe

$$E(t) = \sum_{i=1}^N E_i(t). \quad (2.45)$$

Durch die Raumintegration über die Dichte der inneren Energie erhält man die gesamte innere Energie

$$V = \int \varepsilon(\rho(\mathbf{x}, t), s(\mathbf{x}, t)) \, \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (2.46)$$

Mit dem Lagrange-Funktional

$$\mathcal{L} = E - V \quad (2.47)$$

erhalten wir direkt die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}'_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_i} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{H}'_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{H}_i} = 0 \quad (2.48)$$

die nach der Normierung mit der Teilchenmasse die Form

$$\mathbf{q}''_i = \mathbf{F}_i = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_i}, \quad J \mathbf{H}''_i = \mathbf{M}_i = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{H}_i} \quad (2.49)$$

mit

$$\mathbf{F}_i = - \int \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + S_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{q}_i} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{M}_i = - \int \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + S_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{H}_i} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \quad (2.51)$$

annehmen. In diese Bewegungsgleichungen gehen die Teilchenmassen nur noch indirekt über die Größen ρ und s ein. Die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten werden in Gauger et al. (2000) hergeleitet, und sind hier der Vollständigkeit wegen angegeben. Mit

$$\nabla \psi_i = [\det \mathbf{H}_i]^{-1} \mathbf{H}_i^{-T} (\nabla \psi)(\mathbf{y}) \quad (2.52)$$

erhält man

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{q}_i} = -\nabla \psi_i \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{H}_i} = -[\nabla \psi_i][\mathbf{y}]^T - \psi_i \mathbf{H}_i^{-T}. \quad (2.53)$$

2.6 Reibungskräfte

Die vorgestellten Bewegungsgleichungen beschreiben adiabatische, also nicht dissipative Strömungen. Dissipation findet jedoch in fast allen Strömungen statt, dies gilt auch für nicht viskose Strömungen die durch die Euler Gleichungen beschrieben werden, insbesondere wenn Stöße auftreten. Stöße treten in Gebieten auf, in denen Fluide mit Überschallgeschwindigkeit aufeinander treffen. In der mikroskopischen Betrachtungsweise folgen die Gasteilchen zunächst einem gleichgerichteten globalen Geschwindigkeitsfeld, im Stoßgebiet wechselwirken die Teilchen durch elastische Streuung mit den Gasteilchen aus dem auftreffenden Fluid. Durch diese Streuung verlieren die Gasteilchen ihre Geschwindigkeitskorrelation, makroskopisch werden nicht korrelierte Geschwindigkeiten als Wärmeenergie und nicht als kinetische Energie wahrgenommen. Im Stoßgebiet wurde also kinetische Energie in Wärmeenergie umgewandelt, allgemein gesprochen, Stöße sind dissipativ. Erstaunlicherweise findet sich im Teilchenmodell ein entsprechendes Pendant der unkorrelierten Teilchengeschwindigkeiten. Die in der Kontinuumsmechanik definierte kinetische Energie E_K ergibt sich durch Integration über das globale und durch Überlagerung der Einteilchengeschwindigkeiten hervorgegangene Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$

$$E_K = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}. \quad (2.54)$$

Die Summe der kinetischen Energien der einzelnen Teilchen E aus 2.45 differiert nun um die sogenannte Fluktuationsenergie

$$E_f := E - E_K = \int q(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (2.55)$$

welche als Integral über die Dichte der Fluktuationsenergie

$$q = \frac{1}{4} \rho \sum_{i,j=1}^N \chi_i \chi_j |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \psi_i |\mathbf{v}_i|^2 - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \quad (2.56)$$

dargestellt werden kann. Unkorrelierte Teilchengeschwindigkeiten stellen also eine zweite Art von Wärmeenergie dar. Der Übergang zur makroskopische Betrachtungsweise im Teilchenmodell von FMM vollzieht sich durch die Summation der Einteilchengeschwindigkeiten \mathbf{v}_i

zum globalen Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} , diese anschauliche Darstellung ist in der zweiten Formulierung von q in 2.56 enthalten, aus der ersten Formulierung erhält man sofort, daß q stets nichtnegativ ist. In glatten Strömungen ist E_f verschwindend gering, kann aber in Stößen dominierende Beiträge liefern. Ziel ist es nun, die Fluktuationsenergie stets klein zu halten und die unkorellierte Bewegungsenergie der Teilchen in echte innere Energie umzuwandeln. Dazu führt man die Reibungskräfte

$$\mathbf{F}_i^{(r)} = -\frac{1}{2} \int R \psi_i [\mathbf{v}_i - \mathbf{v}] \, d\mathbf{x} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{M}_i^{(r)} = -\frac{1}{2} \int R \psi_i [\mathbf{v}_i - \mathbf{v}] \left(\mathbf{H}_i^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{q}_i) \right)^T \, d\mathbf{x} \quad (2.58)$$

mit dem Reibungskoeffizient $R \geq 0$ ein. In Stößen ist die Reibungskraft dafür verantwortlich, die auch in der Natur vorkommende Wärmezeugung nachzubilden, gleichzeitig wird verhindert, daß sich die Teilchen durchdringen können. In Strömungen ohne Stöße werden lokale Geschwindigkeitsunterschiede der Teilchen ausgedämpft, gleichzeitig bleibt die Korrelation der Ausgangspositionen besser erhalten. Letzteres kann sich positiv auf die Approximationseigenschaften auswirken, wie wir im ersten Abschnitt gezeigt haben.

Um Energieerhaltung zu gewährleisten, wird die der Fluktuationsenergie entnommene Energie mittels des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik.

$$S_i'(t) = \frac{1}{\theta_i(t)} \delta Q_i(t) \quad (2.59)$$

der Wärmeenergie zugeschrieben, mit der dem Teilchen i zugeführten Wärmemenge

$$\delta Q_i^{(r)} = \frac{1}{m_i} \int \chi_i R q \, d\mathbf{x} . \quad (2.60)$$

Der Wert θ_i , definiert durch

$$\theta_i = \frac{1}{m_i} \frac{\partial V}{\partial S_i} \quad (2.61)$$

ist die über das Teilchen gemittelte Temperatur

$$\theta_i(t) = \int \theta (\rho(\mathbf{x}, t), s(\mathbf{x}, t)) \psi_i(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} . \quad (2.62)$$

Durch die Nichtnegativität von q folgt damit auch, daß die Entropie eines einzelnen Teilchen nur anwachsen, jedoch niemals abnehmen kann.

Der Parameter R der Reibungskraft besitzt die Dimension einer inversen Zeit, damit wird dem System der Bewegungsgleichungen eine zusätzliche Zeitskala mit der Zeit $T = 2R^{-1}$ auferlegt und damit eine zusätzliche Steifigkeit. Bewegt sich ein Testteilchen, das nur den Reibungskräften mit konstantem R unterliege, mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 in einem globalen Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} , so wird die Geschwindigkeitsdifferenz $\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}$ in der Zeit T um den Faktor e reduziert, wie in Gauger et al. (2000) gezeigt wird. Die Zeit T definiert eine lokale

Relaxationszeit, global hat man die Freiheit, R beliebig zu wählen, wobei eine Abhängigkeit von den thermodynamischen Variablen die sinnvolle Darstellung

$$R = R_0 + R_1 \frac{v_0}{\pi_0} |\nabla \pi| + R_2 |\operatorname{div} \mathbf{v}| \quad (2.63)$$

liefert.

Wir wollen nun einige Merkmale der Reibungskraft qualitativ beschreiben. In [Gauger et al. \(2000\)](#); [Gauger \(2000\)](#) werden mit FMM simulierte Stöße in mehreren Dimensionen vorgestellt. Eine Beobachtung ist dabei die Tatsache, daß die Stoßfronten durch die eingeführte Reibungskraft nicht verbreitert werden. Die Diskontinuität an den Stoßfronten werden von den Teilchen zwar mit stetigen Funktionen approximiert, die dadurch entstandene Verschmierung der Stoßfronten ist jedoch immer in der Größenordnung der Auflösung des Verfahrens, welche durch die Teilchengrößen gegeben ist. Dieses Verhalten der Reibungskraft unterscheidet sich nun elementar von dem anderer künstlicher Viskositäten, die in den verschiedensten numerischen Verfahren zur Auflösung von Stößen benutzt werden. Eine bekannte Form der künstlichen Viskosität ist die von Neumann-Richtmyer-Viskosität (s.a. [von Neumann & Richtmyer 1950](#)) bei der der thermodynamische Druck durch einen viskosen Druck \wp erweitert wird

$$p \rightarrow p + \wp \quad (2.64)$$

der proportional zur quadratischen Divergenz der Geschwindigkeit ist

$$\wp \beta \propto \beta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2. \quad (2.65)$$

Diese Viskosität wurde auch auf das Lagrangesche Teilchenverfahren SPH übertragen und verhindert dort, daß sich die Teilchen durchdringen können. Wie in [Monaghan & Gingold \(1983\)](#) gezeigt wird, kann man zusätzlich noch weitere viskose Drücke addieren, die linear in der Geschwindigkeitsdivergenz sind

$$\wp \alpha \propto \alpha (\operatorname{div} \mathbf{v}) \quad (2.66)$$

welche wahlweise nur für den Fall $\operatorname{div} \mathbf{v} \leq 0$ wirken, also nur bei einer Kompression des Fluids. Solche Formen der Viskosität haben jedoch genauso wie die physikalische Volumenviskosität die Eigenschaft, Stoßfronten zu verbreitern bzw. auszusmieren. Dieser Effekt kann erwünscht sein um die Steifigkeit der Bewegungsgleichungen zu verringern, ist jedoch unerwünscht, wenn man nur an der Entropieproduktion in Stößen interessiert ist. Wir wollen hier noch kurz einen grundlegenden Unterschied zwischen der in FMM benutzten Reibungskraft $\mathbf{F}_R \sim \mathbf{F}_i^{(r)}, \mathbf{M}_i^{(r)}$ und der zusätzlichen Kraft \mathbf{F}_\wp durch den viskosen Druck \wp diskutieren. Es lassen sich leicht Strömungsbilder konstruieren, in denen jeweils nur eine der beiden Kraftarten wirkt. Ein einfaches Beispiel für eine glatte Strömung, in dem wir global $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ annehmen, kann durch zwei Teilchen i, j beschrieben werden, die bis auf ihre Mittelpunktschwindigkeit $\mathbf{q}_i = -\mathbf{q}_j$ identische Größen besitzen. In diesem Fall verschwindet die Geschwindigkeit selbst $\mathbf{v} = 0$, und die Definition des viskosen Drucks liefert $\mathbf{F}_\wp = 0$. In diesem Fall wirkt jedoch eine Reibungskraft $\mathbf{F}_R > 0$, die das in den Einteilchengeschwindigkeiten enthaltene Rauschen dämpft.

Im umgekehrten Fall betrachten wir ein Fluid, das adiabatisch komprimiert wird. Die Kompression können wir durch die Anfangsbedingung $v_x \propto -x \forall x$ darstellen. Für genügend kleine $v_x < c_s$ verläuft die Kompression über Gleichgewichtszustände und ist reversibel $dS = 0$. Die Teilchen können ein lineares Geschwindigkeitsfeld exakt approximieren $\mathbf{v}_i = v$. In diesem Fall wirkt keine Reibungskraft $\mathbf{F}_R = 0$, da jedoch überall $\text{div } \mathbf{v} > 0$ gilt, würde überall wegen $\mathbf{F}_\phi > 0$ Entropie erzeugt werden.

In beiden aufgeführten Beispielen scheint also die Reibungskraft Vorteile zu versprechen. Die angeführten Argumente gelten übrigens auch dann, wenn man für den Reibungskoeffizient

$$R = R_2 |\text{div } \mathbf{v}| \tag{2.67}$$

wählt, wie sich leicht nachprüfen läßt.

2.7 Viskosität

Eine weitere Konsequenz der mikroskopisch betrachteten Streuung der Fluidteilchen ist eine innere Reibung, die sich makroskopisch als Zähigkeit auswirkt und als Viskosität bezeichnet wird. Jedes reale Fluid verhält sich viskos, die innere Reibung produziert wiederum Wärme, viskose Strömungen sind also immer irreversibel. Viskosität entsteht in Fluiden, in denen sich benachbarte Bereiche mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegen, wobei Impuls von Gebieten höherer Geschwindigkeit auf Gebiete niedriger Geschwindigkeit übertragen werden. Der Begriff innere Reibung scheint daher angebracht, da Reibung in der Festkörpermechanik korrespondierende Effekte verursacht. Eine innere Reibung ist nicht zu erwarten, wenn das Fluid eine gleichförmige Translation vollzieht, gleiches gilt bei starrer Rotation. Daraus folgt zunächst, daß die Viskosität nur von den Ableitungen des Geschwindigkeitsfelds, jedoch nicht von ihm selbst abhängen kann. Wie in der Festkörpermechanik ist das Modell, die Reibung proportional zur Geschwindigkeitsdifferenz anzunehmen, eine sehr gute Näherung über weite Parameterbereiche. Für Fluide, bei denen die Viskosität linear von den Geschwindigkeitsableitungen abhängt, nennt man auch Newtonsche Fluide. Betrachtet man die bisher aufgeführten Argumente zusammen, so kann die Viskosität nur noch linear von dem symmetrisierten Anteil der Geschwindigkeitsableitungen¹

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \tag{2.68}$$

abhängen. Diesen zweistufigen Tensor kann man in zwei Terme

$$\mathbf{T} = 2\eta \left[\mathbf{D} - \frac{1}{d} (\text{spur } \mathbf{D}) \mathbf{1} \right] + \zeta (\text{spur } \mathbf{D}) \mathbf{1} \tag{2.69}$$

aufteilen, der erste spurfreie Term mit dem Koeffizienten η beschreibt die Scherviskosität, der zweite mit dem Koeffizienten ζ die Volumenviskosität. Die beiden Materialparameter η und ζ sind jeweils nichtnegative Funktionen der thermodynamischen Größen ρ und θ , hängen

¹ $\nabla \mathbf{v}$ bezeichnet die Jacobimatrix, während $\text{div } \mathbf{v}$ oder alternativ $\nabla \cdot \mathbf{v}$ die Divergenz von \mathbf{v} ist.

jedoch nicht mehr von \mathbf{v} ab. In Gasen ist die Volumenviskosität gering, so daß $\zeta = 0$ oft eine gute Näherung ist.

Analog zu dem Vorgehen in Gauger et al. (2000) stellen wir die viskose Oberflächenkraft, die auf die Teilchen im Gebiet W wirkt,

$$\int_{\partial W} \mathbf{Tn} \, dA = \int_W \chi_W \operatorname{div} \mathbf{T} \, dV \quad (2.70)$$

mit der charakteristischen Funktion χ_W dar. Stellt man die Ableitungen von \mathbf{T} und die charakteristische Funktion χ_W durch die Gradienten der Massenanteile χ_i dar (siehe Gauger et al. 2000), dann wirkt auf jedes Teilchen die zusätzliche viskose Kraft

$$\mathbf{F}_i^{(v)} = -\frac{1}{m_i} \int \mathbf{T} \nabla \chi_i \, d\mathbf{x} \quad (2.71)$$

$$\mathbf{M}_i^{(v)} = -\frac{1}{m_i} \int [\mathbf{T} \nabla \chi_i] [\mathbf{H}_i^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{q}_i)]^T \, d\mathbf{x} - \frac{1}{m} \int \chi_i \mathbf{T} \mathbf{H}_i^{-T} \, d\mathbf{x} \quad (2.72)$$

und erfährt die zusätzliche Wärmeproduktion

$$\delta Q_i^{(v)} = \frac{1}{m_i} \int \chi_i \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \, d\mathbf{x} . \quad (2.73)$$

2.8 Weitere physikalische Effekte

Das Teilchenmodell mit den bisher eingeführten Kräften beschreibt ein Fluid, das den hydrodynamischen Kräften unterworfen ist, die durch die Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben werden. In praxisrelevanten Fragestellungen können jedoch weitere Kräfte auf das Fluid wirken, die im Teilchenmodell von FMM einfach zu den bisherigen Kräften hinzuaddiert werden. Für eine externe Volumenkraft \mathbf{f} ergeben sich die Teilchenkräfte

$$\mathbf{F}_i^{(e)} = \int \mathbf{f}(\mathbf{q}_i + \mathbf{H}_i \mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{M}_i^{(e)} = \int [\mathbf{f}(\mathbf{q}_i + \mathbf{H}_i \mathbf{y})][\mathbf{y}]^T \psi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (2.75)$$

durch Integration derer über das Teilchenvolumen. Da externe Kräfte typischerweise nicht von den lokalen thermodynamischen Größen abhängen, können sie für jedes Teilchen einzeln berechnet werden. Kräfte der Form

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.76)$$

können aus einem Potential hergeleitet werden $\mathbf{f} = -\nabla U$. In der Astrophysik spielen Gravitationskräfte, hervorgerufen durch eine Punktmasse am Ort \mathbf{x}_0 mit dem Potential

$$U \propto -|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{-1} \quad (2.77)$$

oft eine bedeutende Rolle. Im Hinblick auf die folgenden Anwendungsbeispiele bemerken wir hierzu, daß sich auch ein einzelnes Teilchen in einem Zentralpotential allein durch die

externe Kraft \mathbf{f} deformieren kann, also $\mathbf{M}^{(e)} \neq 0$ gilt. Eine Konvergenzanalyse zu diesem Fall findet man in Yserentant (2000).

Nicht-konservative Kräfte können auf dieselbe Art berücksichtigt werden. Betrachtet man ein Fluid in einem beschleunigten Bezugssystem, so wirken geschwindigkeitsabhängige Corioliskräfte der Form

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_i(\mathbf{x})) , \quad (2.78)$$

die ebenfalls entsprechend 2.74 integriert werden.

Weitere physikalische Effekte können nicht nur die Dynamik, sondern auch die Wärmebilanz des Fluids beeinflussen. In der Physik werden drei verschiedene Mechanismen zum Wärmetransport unterschieden, Konvektion, Wärmeleitung und Strahlung. Konvektion wird von FMM automatisch beschrieben, die Teilchen besitzen mit S_i ein Maß für die Wärme, die mit den Teilchen transportiert wird. In adiabatischen Strömungen, also für konstante S_i wird die Kontinuitätsgleichung außer für die Massendichte auch noch für die Entropiedichte s erfüllt.

Durch Wärmeleitung kann sich die Wärme eines Teilchens erhöhen oder erniedrigen. Die Wärmeänderung in Teilchendarstellung erhält man durch Aufteilung des Wärmeflusses \mathbf{k} auf die Teilchen gemäß ihrer Massenanteile

$$\delta Q_i^k = \frac{1}{m_i} \int \mathbf{k} \cdot \nabla \chi_i \, d\mathbf{x} , \quad (2.79)$$

wobei der Wärmefluß \mathbf{k} oft durch das Fouriersche Gesetz

$$\mathbf{k} = \kappa \nabla \theta \quad (2.80)$$

mit dem Wärmeleitkoeffizienten κ beschrieben wird.

Wärme kann auch durch Strahlung in einem Fluid transportiert werden, eine allgemeine Beschreibung des Strahlungstransports kann dabei beliebig kompliziert ausfallen, da die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie die gesamte Komplexität der quantenmechanischen Atomphysik beinhaltet. In Anbetracht der folgenden astrophysikalischen Anwendungen wollen wir hier kurz den Einfluß der Wärmeabstrahlung eines heißen Gases betrachten. Jeder Körper mit einer Temperatur $\theta \geq 0$ emittiert an seiner Oberfläche eine Schwarzkörperstrahlung mit dem Planck-Spektrum $B_f(\theta)$ und der Flächenleistung $\sigma \theta^4$, wobei σ die Stefan-Boltzmann-Konstante ist. Gase sind in diesem Sinne keine Körper mit geschlossener Oberfläche, emittieren jedoch auch Wärmestrahlung. Strahlung, die im Inneren einer Gasansammlung emittiert wird, kann von benachbarten Gasbereichen absorbiert und wieder emittiert werden, die zugehörige Wärmemenge wird so durch das Gas transportiert. In den folgenden astrophysikalischen Anwendungen werden wir Akkretionsscheiben betrachten, die in einer Raumdimension eine sehr geringe Ausdehnung aufweisen und daher näherungsweise als zweidimensionale Strömung in der $x - y$ Ebene beschrieben werden. Vernachlässigt man den Strahlungstransport in der Simulationsebene, so verliert das Gas in negativer sowie in positiver z -Richtung Wärmeenergie durch Strahlung mit der Flächenleistung von je $\sigma \theta^4$,

vorausgesetzt, das Gas ist über die geringe Ausdehnung in z -Richtung für diese Wärmestrahlung durchlässig, also optisch dünn. Der Wärmeverlust pro Zeiteinheit für ein Teilchen erhält man durch Raumintegration

$$\delta Q_i^{(BB)} = -2\sigma \frac{1}{m_i} \int \chi_i \theta^A(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.81)$$

2.9 Diskretisierung der Integrale

Für die Raumintegration über die Teilchen wird eine Quadraturformel verwendet, deren Stützpunkte in den Teilchenkoordinaten fixiert sind. Dies unterstreicht den Lagrangeschen Charakter des Verfahrens, das Modell ist damit invariant gegenüber Translationen und linearen Deformationen des Raums.

Die Integration über die Dichte kann wie folgt in teilchenspezifischen Größen dargestellt werden

$$\int f \rho d\mathbf{x} = \sum_i m_i \int f(\mathbf{q}_i + \mathbf{H}_i \mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.82)$$

Aus den Gewichten α_ν und den Stützstellen \mathbf{a}_ν einer Referenzquadraturformel erhält man die Quadraturformel für Integrale über Dichten mit

$$\int f \rho d\mathbf{x} \rightarrow \sum_i m_i \left[\sum_\nu \alpha_\nu f(\mathbf{q}_i + \mathbf{H}_i \mathbf{a}_\nu) \right] =: \int f d\mu. \quad (2.83)$$

Die Integrale für die Reibungskräfte und die viskosen Kräfte werden nun mit der eingeführten Quadraturformel diskretisiert. Bei den Druckkräften hat man die Möglichkeit, einerseits die Kräfte direkt zu diskretisieren oder andererseits eine diskrete Form für die innere Energie einzuführen und aus dem daraus folgenden Lagrange-Funktional die diskretisierten Druckkräfte zu gewinnen. Das letztere Vorgehen wird deshalb bevorzugt, da dadurch die Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls auch in diskreter Form nachgewiesen werden können (s. Gauger et al. 2000). Die neuen diskreten Druckkräfte lauten

$$\mathbf{F}_i = - \int \left[\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \rho} + S_i \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial s} \right] \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{q}_i} d\mu - \sum_\nu \alpha_\nu (\nabla \tilde{\varepsilon})(\mathbf{q}_i + \mathbf{H}_i \mathbf{a}_\nu), \quad (2.84)$$

$$\mathbf{M}_i = - \int \left[\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \rho} + S_i \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial s} \right] \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{H}_i} d\mu - \sum_\nu \alpha_\nu [(\nabla \tilde{\varepsilon})(\mathbf{q}_i + \mathbf{H}_i \mathbf{a}_\nu)][\mathbf{a}_\nu]^T \quad (2.85)$$

mit der spezifischen inneren Energie $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\rho$. Da die Stützstellen der Quadraturformel mit dem Teilchen mitbewegt werden, erhält man durch nachdifferenzieren die zweiten Terme der Druckkräfte, die Summe in den zweiten Termen bezieht sich nur über Quadraturpunkte, die vom Teilchen i selbst stammen.

In [Gauger \(2000\)](#) werden für verschiedene Formfunktionen $\tilde{\psi}$ geeignete Quadraturformeln angegeben, für die Simulationen in dieser Arbeit wurde ausschließlich der eingangs angegebene kubische bSpline mit der folgenden 5-Punkt-Gauss-Quadraturformel

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \mathbf{a}_\nu & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \alpha_\nu & \frac{41}{1280} & \frac{316}{1280} & \frac{566}{1280} & \frac{316}{1280} & \frac{41}{1280} \end{array}$$

für den eindimensionalen Fall benutzt, die mehrdimensionale Erweiterung erfolgt über einen Tensorproduktansatz wie bei der Formfunktion ψ . Bilden die Teilchen ein uniformes Gitter, beispielsweise in ihrer Anfangskonfiguration, so überdecken insgesamt 19^d Quadraturpunkte jedes Teilchen, im 2-dimensionalen Fall also 361. Diese Zahl ist ein maßgeblicher Faktor für den Rechenaufwand des Verfahrens, wobei diese hohe Auflösung für viele Rechnungen, in denen Stöße auftreten, notwendig ist. In den später geschilderten Simulationen der Akkretionsscheiben für AM CVn, U Gem und OY Car treten jedoch zwischen benachbarten Teilchen nur geringe Verschiebungen und Dichtekontraste auf, so daß hier eine einfachere 9-Punkt-Sparse-Quadraturformel eingesetzt werden konnte, die für den zweidimensionalen Fall

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{a}_\nu & (\pm\frac{2}{3}/0) & (0/\pm\frac{2}{3}) & (\pm\frac{1}{3}/\pm\frac{1}{3}) & (0/0) \\ \alpha_\nu & \frac{3}{128} & \frac{3}{128} & \frac{18}{128} & \frac{44}{128} \end{array}$$

lautet und die Rechenzeit mehr als halbiert.

Bei der Integration für die externen Kräfte reicht ebenfalls eine einfachere 3-Punkt Gauss-Quadraturformel, die im eindimensionalen Fall die Darstellung

$$\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_\nu & -\frac{3}{\sqrt{40}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{40}} \\ \alpha_\nu & \frac{5}{27} & \frac{17}{27} & \frac{5}{27} \end{array}$$

besitzt.

2.10 Zeitintegration

Für die Zeitintegration können bekannte Standardverfahren wie Runge-Kutta oder DOPRI5 von Dormand und Prince eingesetzt werden. Die Simulationen der echten astrophysikalischen Systeme AM CVn und U Geminorum wurden mit dem von Lubich vorgeschlagenen Integrator durchgeführt, der in [Gauger et al. \(2000\)](#) genau beschrieben ist. Es handelt sich dabei um eine Erweiterung des Verlet-Schemas, in dem die steifen Anteile, die von den Reibungs- und viskosen Kräften herrühren, durch eine Approximation im Krylov-Raum gelöst werden. Dabei wird ausgenutzt, daß diese beiden Kraftarten linear in den Geschwindigkeiten sind, die Zeitschrittweite wird daher nicht mehr durch diese steifen Anteile eingeschränkt. Die Integration der Teilchenentropien S_i wird durch Lösen der impliziten Gleichung bei festgehaltenen

Geschwindigkeiten vorgenommen, zur Lösung der impliziten Gleichung wird die Fixpunktiteration gewählt. In der Praxis zeigte sich, daß die Entropieintegration in keiner Simulation eine Einschränkung an die Zeitschrittweite lieferte, solange nur die Wärmeproduktionen durch Reibung und Viskosität berücksichtigt wurden. Dies gilt jedoch nicht mehr, wenn bei sehr heißen Gasen eine Abkühlrate durch Schwarzkörperstrahlung mitberücksichtigt werden muß. In den im folgenden besprochenen Akkretionsscheiben treten Temperaturen im der Größenordnung 10^5 K auf, aufgrund ihrer θ^4 -Abhängigkeit sind typische Abkühlzeiten sehr kurz im Vergleich zur dynamischen Zeitskala. Anstelle der Fixpunktiteration wurde teilweise auch ein Sekantenverfahren zur näherungsweise Lösung der impliziten Gleichung der Entropien implementiert. In praxisrelevanten Fragestellungen konvergiert das System jedoch nicht schnell genug, so daß die Abkühlung durch Schwarzkörperstrahlung auf eine später beschriebene Weise genähert werden muß.

2.11 Das Restart-Verfahren

Die hohe Anzahl an Freiheitsgraden der Teilchen erlauben es ihnen, geometrisch komplizierten Strömungsbildern zu folgen. Über längere Zeit betrachtet können die Deformationen der Teilchen stark anwachsen. Eine Größenänderung der Teilchen verändert die räumliche Auflösung des Verfahrens, entweder zu Ungunsten der Rechenzeit oder zu Ungunsten der lokalen Genauigkeit. Besonders nachteilig auf das Approximationsverhalten wirkt sich der Zustand aus, in dem benachbarte, sich überlagernde Teilchen ihre relative Anordnung verlieren, insbesondere dann, wenn sich ihre Hauptachsen zunehmend gegeneinander verdrehen. In Langzeitsimulationen ist es daher notwendig, die Rechnung nach bestimmten Zeiten anzuhalten und die deformierten Teilchen durch einen neuen, undeformierten Teilchensatz zu ersetzen. Diese Vorgehensweise bezeichnen wir innerhalb der Methode der Finiten Massen als 'Restart'.

Das Restart-Verfahren wird ausführlich von [Gauger \(2000\)](#) beschrieben, dort wird anhand einer Keplerschen Strömung das Restart-Verfahren motiviert und beispielhaft ausgeführt. Die in dieser Arbeit untersuchten Akkretionsströmungen sind im Grunde Kepler'sche Strömungen, da sie nur gering von ihr abweichen. Eine Keplerströmung ist eine Kreisbewegung des Fluids mit einer radial abhängigen Winkelgeschwindigkeit. Eine Anfangszelle des Fluids wird sich im Laufe der Zeit zu einer Spirale mit zunehmender Wicklungszahl verformen. Nach nur einem Umlauf sind die Teilchen derart zu Nadeln verzerrt, daß sie durch einen neuen Satz Teilchen ersetzt werden müssen, in praxisrelevanten Simulationen von Akkretionsscheiben werden bis zu 10^4 oder sogar mehr Restarts ausgeführt.

Innerhalb des Restart-Verfahrens werden die von den alten, deformierten Teilchen dargestellten Felder auf einem Gitter ausgewertet, aus diesen Daten werden die neuen Teilchengrößen hergeleitet. Die Gitteranordnung folgt aus den Koordinaten der neuen Teilchen. Das Verfahren ist frei von Zwangskorrelationen der Gitterkoordinaten und der Anordnung der alten Teilchen. Es ist dadurch möglich, innerhalb eines Restarts den neuen Teilchensatz den Erfordernissen der Simulation anzupassen, so kann beispielsweise die Teilchenauflösung neu bestimmt werden. Um die Geschwindigkeiten \mathbf{q}'_i und \mathbf{H}'_i zu bestimmen, überdeckt man das

neue Teilchen mit einem uniformen Gitter, so daß 10-20 Gitterpunkte je Raumdimension innerhalb des Teilchens liegen und wertet dort aus den alten Teilchen die Geschwindigkeit aus. Die Geschwindigkeit des neuen Teilchens wird nun mit einem Least-Square-Verfahren so bestimmt, daß sie in den Gitterpunkten minimal von der ausgewerteten Geschwindigkeit abweicht. Der Beitrag der einzelnen Gitterpunkte g_i werden mit dem Massenanteil des neuen Teilchens $\psi(g_i)$ gewichtet.

Die Auswertung für die Teilchenmassen m_i erfolgt auf einem anderen Gitter, dessen Gewichte g_j und Positionen p_j speziell auf die Ansatzfunktionen ψ abgestimmt sind, sie lauten für den in allen Simulationen verwendetet kubischen bSpline im eindimensionalen Fall für das Referenzteilchen

$$\begin{array}{c|c|c|c} p_j & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline g_j & -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} \end{array}$$

und werden mit dem beschriebenen Tensorproduktansatz in mehreren Dimensionen erweitert, alternative Gitter werden in Gauger (2000) angegeben. Die angegeben Formel ist ein Quasiinterpolant für bSplines, so folgt die Teilchengröße m_i aus

$$m_i \cdot a_\psi \det \mathbf{H}_i^{-1} = \sum_j g_j \rho(p_j). \quad (2.86)$$

Die Konstante a_ψ folgt aus dem lokalen Approximationsanteil der Teilchen, für den 3bSpline und im zweidimensionalen Fall lautet sie $a_\psi = 4$. Die neuen Teilchenentropien erhält man analog zum Verfahren für die Teilchenmassen.

Das Least-Square-Verfahren zur Bestimmung der neuen Geschwindigkeiten besitzt glätten-de Eigenschaften, auch bei der Dichte oder der Entropiedichte kann es notwendig sein, die von den alten Teilchen approximierte Feldgröße zuerst zu glätten, um dann aus den geglätteten Feldern die neuen Teilchengrößen zu bestimmen. Die geglätteten Größen erhält man durch Faltung mit einem geeigneten Glättungskern g_s , wobei hierfür die alte Größe auf einem zusätzlichen Gitter p_s ausgewertet werden muß, die geglättete Dichte folgt aus

$$\bar{\rho}(p_j) = \sum_s g_s \rho(p_s), \quad (2.87)$$

wobei ein Glättungskern verwendet wird, der im eindimensionalen Fall $g_s = (0.25, 0.5, 0.25)$ lautet. Die Gitterweite für die Glättung kann den Bedürfnissen des behandelten Problems angepasst werden. In den folgenden Simulationen hat es sich als geeignet erwiesen, mehrere, in der Regel drei oder vier Glättungsschritte nacheinander auszuführen, die Gitterweite jedoch so klein zu halten, daß nur die Umgebung des zugehörigen Quasiinterpolationspunktes p_j erfasst wird. Man erreicht damit quasi eine hochauflösende Raumintegration über die alten Größen. Tatsächlich könnte man anstatt der Glättung eine Quadraturformel zur Integration einsetzen. Dies wurde auch versuchsweise implementiert, um eine bessere Massenerhaltung für das Restartverfahren zu erhalten, eine 5-Punkt Quadraturformel erwies sich dabei jedoch nicht besser als ein 4-stufiges Glättungsverfahren.

Mit dem neuen Teilchensatz geht jede Information der alten Teilchenanordnung verloren, die nicht in den Feldgrößen ρ , s und \mathbf{v} enthalten war, die neuen Teilchen können auf einem Gitter angeordnet sein, das sich in der Auflösung, Anordnung oder auch Geometrie vom alten unterscheidet.

Gauger (2000) beschreibt, wie mit dem Restartverfahren eine Regularisierung der Feldgrößen in Stößen realisiert werden kann, weiterhin wird beschrieben, wie mit einem adaptiven Restart die Auflösung lokal vergrößert werden kann. Letzteres könnte bei den zu untersuchenden Akkretionsströmungen im Bereich des Hot-Spots sehr hilfreich sein, wurde jedoch nicht verwendet, da dieses Verfahren komplizierte Gürtelbedingungen zwischen den Bereichen verfeinerter und nicht verfeinerter Auflösung erfordert. In mehreren Dimensionen können diese Gebiete komplexe geometrische Formen annehmen, eine Implementierung dieses Verfahrens ist sehr arbeitsintensiv und liegt derzeit noch nicht vor.

In den folgenden Simulationen der Akkretionsscheiben in Binärsystemen wird das Restartverfahren zusätzlich dazu benutzt, das Ein- und Abfließen von Gas in und aus dem Simulationsbereich zu bewerkstelligen. Das neue Teilchengitter wird auf ein vorher festgelegtes Gebiet beschränkt, alte Teilchen, die außerhalb dieses Gebietes liegen, erhalten keine neue Teilchendarstellung. Bei Akkretionsströmungen sind solche Ränder nicht zu vermeiden, das Simulationsgebiet muß in der Umgebung des Ursprungs des Zentralpotentials abgeschirmt werden, da dort die physikalischen Bedingungen divergieren. Am Außenrand kann ein kleiner Teil des Gases ins Vakuum entweichen und ist für die Simulation nicht mehr entscheidend.

Analog dazu kann man auch künstliche Quellen schaffen, in einem kleinen Bereich der Quelle wird eine Zwangsbedingung an das Minimum für die darzustellende Dichte gegeben. Bewegen sich die Teilchen aus diesem Quellgebiet heraus, werden sie beim nächsten Restart durch neue ersetzt.

In den betrachteten Beispielen war es immer ausreichend, das Ein- und Abfließen in und aus dem Simulationsgebiet während des Restarts zu berücksichtigen, so daß während der Zeitintegration keine Teilchen eingefüttert oder entfernt werden mussten. Dies hatte zudem den Vorteil, bei der Implementierung der Zeitintegratoren von einer konstanten Teilchenzahl ausgehen zu können.

Da während des Restarts die Feldgrößen bekannt sind, kann man zu diesem Zeitpunkt korrigierend eingreifen, um etwa ein Über- oder Unterschreiten vorgegebener Extremwerte etwa für Dichte oder Temperatur zu vermeiden. Beispielsweise kann bei der Beschreibung der Abkühlung durch Schwarzkörperstrahlung die Temperatur in Außenbereichen geringer Dichte sehr stark abfallen, die Schallgeschwindigkeit konvergiert dabei gegen Null und die Rechnung wird numerisch instabil. Die Vorgabe einer Mindesttemperatur beim Restart an den Randgebieten sollte den übrigen Bereich nur unmerklich beeinflussen. Letztlich kann man den Restart auch zur Berechnung einer Anfangskonfiguration der Teilchen benutzen, indem man einfach die Feldgrößen analytisch vorgibt, anstatt sie aus einem alten Teilchensatz zu bestimmen.

An dieser Stelle sollte jedoch auch noch ein ungelöstes Problem des Restarts angesprochen werden. Die neuen Teilchengrößen werden so bestimmt, daß die von den alten Teilchen dargestellten Größen möglichst gut approximiert werden, Quasiinterpolationsformeln höherer Ordnung sorgen für gute Reproduktion etwa der Dichten, und es kann quadratische Konver-

genz des Restartverfahrens gezeigt werden, globale Größen wie Gesamtmasse, Impuls und Drehimpuls werden jedoch nicht exakt erhalten. Die fehlende Massenerhaltung führte bei den Simulationen von Binärsystemen zu folgendem Problem. Es sollte ein System simuliert werden, in das je Zeiteinheit Δt an einem bestimmten Quellort die Masse m_t einfließt, dieselbe Menge soll an den Außenrändern entweichen, d.h. die Simulation soll eben diesen Gleichgewichtszustand finden, wobei dieser Zustand dann erreicht ist, wenn sich im Simulationsgebiet in etwa die Masse $10^4 \cdot m_t$ befindet. Es zeigte sich jedoch, daß in der Zeit Δt je ein Restart vorgenommen werden mußte, der eine Massenzunahme in der gleichen Größenordnung von m_t verursachte. Lokal wurde bei jedem Restart die vorhandene Dichte gut reproduziert, man konnte einen maximalen Reproduktionsfehler von $\Delta\rho/\rho_{max} \leq 10^{-4}$ zeigen, was einerseits auf eine gute Approximationsgüte hinweist, jedoch nicht den Erfordernissen der Simulation entspricht. Ein nachträgliche Normierung der neuen Teilchenmassen auf die Massensumme der alten Teilchen ist in diesem Fall nicht sinnvoll, die alten Teilchen stellen ja Masse dar, die das Simulationsgebiet verlassen haben und nicht neu reproduziert werden soll. Außerdem ist die räumliche Verteilung des Dichtefehlers nicht bekannt, eine nachträgliche Normierung würde den Differenzbetrag gleichmäßig auf die neuen Teilchen übertragen und so einen zusätzlichen Massentransport erzeugen, der den eigentlich zu beobachtenden Effekt übertreffen könnte.

2.12 Parallelisierung

Auch wenn in dieser Arbeit nicht auf die algorithmische Umsetzung der Methode der Finiten Massen eingegangen wird, so soll in diesem Abschnitt zumindest das Grundkonzept der Parallelisierung angesprochen werden. Letztlich konnten die vorgestellten astrophysikalischen Simulationen nur deshalb in genügender Teilchenaufösung durchgeführt werden, da zum einen ein gut skalierendes Programmpaket entwickelt worden ist und zum anderen der PC-Cluster 'Kepler' zur Verfügung stand. Ein Konzept zur parallelen Umsetzung für Mehrprozessorrechner mit gemeinsamen als auch verteiltem Speicher wird von [Leinen \(2002\)](#) vorgestellt. Der vorliegende Programmcode, mit dem die Simulationen zu den astrophysikalischen Problemstellungen ausgeführt wurden, nutzt vorläufig nur die parallelen Ansätze für Rechner mit verteiltem Speicherbereich. Für diese Art der Rechnerarchitektur muß nicht nur der Rechenaufwand sondern auch die Speichernutzung auf p verschiedene Computer verteilt werden. Die einzelnen Computer, auch Knoten genannt, können zu synchronisierten Zeiten Daten über ein Netzwerk austauschen. Eine effiziente Implementierung macht möglichst wenig Gebrauch von der Netzwerkkommunikation, gleichzeitig ist die Anzahl an Kommunikationen klein zu halten. Weiterhin wird eine gleichmäßige Ausnutzung der Ressourcen verlangt.

Betrachtet man die Gleichungen, aus denen die Kräfte für die Teilchen folgen, so fällt zunächst auf, daß diese nicht als Wechselwirkung aus sich überlagernden Teilchen dargestellt sind. Die Kräfte werden vielmehr aus den approximierten thermodynamischen Größen hergeleitet, die ihre Diskretisierung in den Quadraturpunkten finden.

Der Algorithmus zur Kräfteberechnung kann in vier wesentliche Schritte unterteilt werden, diese sind in der [Abbildung 2.1](#) für den parallelen Fall mit $p = 2$ Prozessoren dargestellt. Die

nicht parallele Umsetzung ergibt sich daraus als Spezialfall, wenn nur ein Prozessor vorhanden ist.

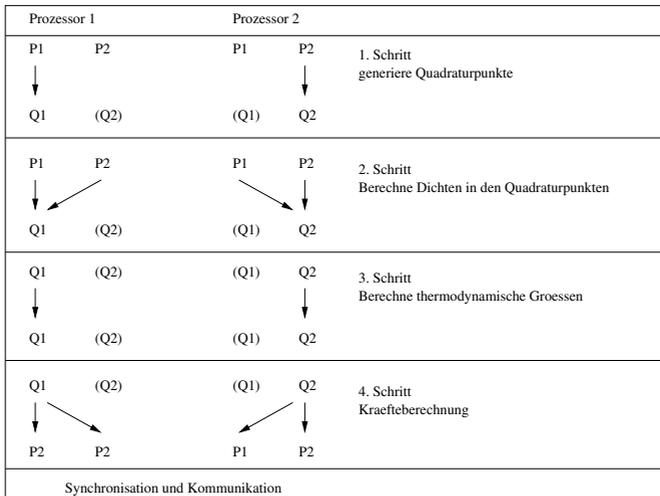


Abbildung 2.1: Grundidee der Parallelisierung, frei nach einer Abbildung von *Leinen* (2002). Erklärung s. Text.

Der wesentliche Speicherbedarf folgt aus der Bereitstellung der thermodynamischen Größen in den Quadraturpunkten. Die Anzahl der Quadraturpunkte wird immer die Anzahl der Teilchen übersteigen. In der vorliegenden Umsetzung wurde zunächst der Speicherbedarf für die Quadraturpunkte auf die p Knoten verteilt, jedoch nicht die Teilchendaten. Jeder Knoten ist im folgenden für einen Anteil N/p Teilchen zuständig, die Aufteilung der Zuständigkeit erfolgt disjunkt.

Im ersten Schritt legt jeder Knoten die Quadraturpunkte an, die aus der ihm zugeordneten Teilchenmenge folgen. Im weiteren Verlauf besitzen die Knoten keine Kenntnis über die Quadraturpunkte aus denjenigen Teilchen, die nicht in ihren Zuständigkeitsbereich fallen, diese sind in der Abb. 2.1 in Klammern gesetzt.

Im zweiten Schritt erfolgt die Auswertung der approximierten Größen ρ , s und \mathbf{v} sowie deren Gradienten in den Quadraturpunkten, diese folgen u.a. aus den Summen 2.13, 2.15 und 2.17. Die Summe erstreckt sich für jeden Knoten über alle Teilchen, also nicht nur über die in seiner Zuständigkeit liegenden. Da jeder Knoten die Informationen aller Teilchen besitzt, ist hierfür keine Kommunikation notwendig. Nach diesem Schritt sind die Summen in jeder Teilmenge der Quadraturpunkte vollständig. Der Datenfluß, in dem aus den Teilchendaten die approximierten Größen in den Quadraturpunkten berechnet werden, ist in der Abbildung mit $P \rightarrow Q$ dargestellt.

Im dritten Schritt werden die Daten in den Quadraturpunkten aufbereitet, es werden die abhängigen thermodynamischen Größen ε , θ , π sowie die Ableitungen der Geschwindigkei-

ten \mathbf{D} und \mathbf{T} berechnet. Jeder Knoten bearbeitet die auf ihm vorhandenen Quadraturpunkte. Dieser Berechnung ist in der Abbildung mit $Q \rightarrow Q$ bezeichnet.

Der vierte Schritt der Kräfteberechnung gleicht dem zweiten, es werden alle Teilchen betrachtet, die einen Schnitt mit der Teilmenge der lokal vorhandenen Quadraturpunkte aufweisen. Da die Kräfte aus den thermodynamischen Feldern hervorgehen, die in den Quadraturpunkten gespeichert sind, wird der Datenfluß umgekehrt bezeichnet $Q \rightarrow P$. Nach diesem Schritt enthält jeder Knoten für jedes Teilchen eine Teilsumme der Integrale 2.83, aus denen die Kräfte hervorgehen. Nach diesem Schritt wird das Programm synchronisiert, in einer Netzwerkkommunikation erfolgt die Bildung der Summe

$$\mathbf{F}_i, \mathbf{M}_i = \sum_p \mathbf{F}_{i,p}, \mathbf{M}_{i,p}. \quad (2.88)$$

Da jeder Knoten eine Teilkraft für jedes Teilchen enthalten kann, erfolgt die Kommunikation von jedem Knoten zu jedem anderen. Die Bildung der Summe wird von einer vorhandenen Programmibliothek bewerkstelligt, welche den Kommunikationsaufwand $p \log_2 p$ erzeugt. Die Zeitintegration ist nicht parallelisiert, jeder Knoten besitzt nun die vollständigen Teilchenkräfte und führt die Zeitintegration aus. In der darauffolgenden Kräfteberechnung kann auf Schritt eins verzichtet werden, sofern die Aufteilung der Teilchenzuständigkeiten erhalten bleibt. Die Parallelisierung des Restartverfahrens ist trivial, da das Verfahren für jedes neue Teilchen je einzeln ausgeführt werden kann. Nach dem Restart ist die Verteilung der Teilchenzuständigkeiten und der erste Schritt der Quadraturpunktberechnung neu auszuführen. Die Datenstrukturen der Zeitintegratoren sind ebenfalls auf den neuen Teilchensatz anzupassen.

Das Programm skaliert sehr gut auf dem 'Kepler'-Cluster, dies liegt auch daran, daß nur eine einzige Kommunikation je Kräfteberechnung notwendig ist. Die tatsächliche gemessene Effizienz hängt nun von verschiedenen Faktoren ab, sie wird in erster Linie eine Funktion der Knotenanzahl p sein. Oft unberücksichtigt bleibt die Tatsache, daß die Effizienz auch von der Problemgröße abhängt. Dies liegt an der Latenzzeit für die Netzwerkkommunikation, sofern man Effekte durch nicht optimale Lastverteilung unberücksichtigt läßt. Die Zeit, um Daten der Menge N zu kommunizieren, folgt aus der Gleichung

$$t_k = c_L + c_n \cdot N, \quad (2.89)$$

dabei stellt c_L ein Maß für die Latenzzeit dar.

Die Simulation der Akkretionsscheiben in Kataklysmischen Variablen mit der kleinen Auflösung von 20 000 Teilchen wurden meist auf 64 Prozessoren gerechnet. Die Rechenzeit verkürzte sich, im Vergleich zur Simulation auf einem Prozessor, um etwa den Faktor 32. Würden mit derselben Problemstellung 400 000 Teilchen benutzt, so würde dieser Faktor ca. 60 lauten. Die Zahlenangaben wurden grob abgeschätzt. Die hohe Anzahl an Integrationschritten in Langzeitsimulationen erlaubten leider keine so hohen Teilchenzahlen. Typische Simulationszeiten mit 64 Prozessoren sind mehrere Wochen.

3 Akkretionsscheiben

Dieses Kapitel soll ein prinzipielles Verständnis der physikalischen Vorgänge in Akkretionsscheiben¹ vermitteln. Allgemein gesprochen sind Akkretionsscheiben gravitativ gebundene Strömungen um ein kompaktes Objekt. Ist diese Strömung dissipativ, so wird das Gas im Laufe der Zeit potentielle Energie verlieren und sich auf das kompakte Objekt zubewegen, durch Aufsammeln von Materie kann das kompakte Objekt so an Masse zunehmen, daher auch die Namensgebung.

Akkretionsscheiben sind fast um jede Art von Stern vorstellbar, um junge Hauptreihensterne, weiße Zwerge, Neutronensterne oder schwarze Löcher. Unser Hauptaugenmerk gilt den Akkretionsscheiben um weiße Zwerge in Doppelsternsystemen, das akkretierte Gas stammt in diesem Fall aus der Atmosphäre des begleitenden Zweitsterns. Auch Neutronensterne und schwarze Löcher, die in Doppelsternsystemen vorkommen können, bilden auf dieselbe Weise Akkretionsscheiben, in diesen Systemen sind jedoch besondere physikalische Umstände zu beachten, wie Effekte aus der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie sowie magnetische Effekte, die nicht Gegenstand dieser Arbeit sind. Scheibenförmige Gasansammlungen finden sich aber auch um junge Sterne, sie sind Überreste der interstellaren Gaswolke, aus denen sich der neue Stern gebildet hat. Aus dieser Scheibe werden sich, nach neueren Erkenntnissen, Planeten bilden. Eine der Testrechnungen wird sich mit solchen Scheiben beschäftigen.

Die Gasdynamik in Akkretionsscheiben ist durch die hydrodynamischen Gleichungen und die zusätzlich wirkenden gravitativen Kräfte bestimmt. In den hier hauptsächlich betrachteten Scheiben in wechselwirkenden Doppelsternen ist die Gravitationskraft des zentralen kompakten Objekts, einem weißen Zwerg mit vernachlässigbarem Magnetfeld, dominant. Das Gas wird sich daher näherungsweise in Kreisbahnen mit Kepler'scher Geschwindigkeit bewegen, die hydrodynamischen Kräfte sowie die Gravitationskraft des Begleitsterns verursachen mehr oder minder starke Abweichungen von diesen Keplerbahnen. Hauptmerkmal einer Keplerschen Bewegung ist die differentielle Rotation, also die Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit vom Radius $\Omega_K(R)$, jedes anfangs lokal begrenzte Gaspaket wird sich im Laufe der Zeit zu einer Spirale mit stetig ansteigender Wicklungszahl deformieren. Entsteht eine Akkretionsscheibe durch überströmendes Gas des Begleitsterns, so verbleibt dieses Gas in der Rotationsebene des Doppelsternsystems und es bildet sich eine geometrisch dünne Scheibe. Unter diesen Umständen vereinfachen sich die hydrodynamischen Gleichungen und es wird so eine 2-dimensionale Betrachtung der Scheibe möglich. In diesem Kapitel werden die Gleichungen geometrisch dünner Scheiben sowie ein stationäres Modell vorgestellt.

¹ Wahrig - Fremdwörterlexikon: Ak-kre-ti'on <f.;-en; Astron.> durch die Gravitation bedingte Zunahme an Masse durch Aufsammeln von Materie (von Sternen) [lat. *accretio* "Zuwachs"]

Ein zentraler Aspekt von Akkretionsscheiben sind die darin vorkommenden dissipativen Prozesse, die letztlich zur Akkretion von Materie führen. Es wird das α -Modell der Akkretionsscheiben vorgestellt, eine Parametrisierung der turbulent erzeugten Viskosität, zu dessen besseren Verständnis die Rechnungen in dieser Arbeit beitragen sollen. Die durch die dissipativen Prozesse freigesetzte Energie in Akkretionsscheiben wird durch Wärmestrahlung abgegeben, die der Beobachtung zugänglich ist. Es wird das Scheibeninstabilitätsmodell der Zernovausbrüche vorgestellt, in dem ein Ungleichgewichtsmodell zwischen dissipativ erzeugter und abgestrahlter Energie eine Rolle spielt.

3.1 Dünne Akkretionsscheiben

Für die in dieser Arbeit betrachteten Scheiben in Doppelsternsystemen kann die Näherung einer dünnen Scheibe, also eine 2-dimensionale Beschreibung angewendet werden, deren Gleichungen nun vorgestellt werden. In einer grundlegenden Arbeit von [Shakura & Sunyaev \(1973\)](#) wird die stationäre Lösung einer axialsymmetrischen dünnen Akkretionsscheibe mit der α -Parametrisierung der Viskosität hergeleitet, die hier ansatzweise vorgestellt wird. Bei der Darstellung der Gleichungen folgen wir hauptsächlich [Frank et al. \(1992\)](#). Die späteren Simulationen lösen jedoch die zeitabhängigen hydrodynamischen Gleichungen in zwei Dimensionen, also in Dünner-Scheiben-Näherung mit α -Parametrisierung, jedoch nicht axialsymmetrisch und nicht stationär.

3.1.1 Radiale Struktur

Für die Beschreibung dünner Scheiben in Zylinderkoordinaten R , ϕ , z vernachlässigen wir den Einfluß des Sekundärsterns, der Primärstern mit Masse M_1 liege bei $R = 0$, die Scheibe in der Ebene $z = 0$ und sei axialsymmetrisch. Die Winkelgeschwindigkeit Ω wird immer nahe dem Keplerschen Wert

$$\Omega \approx \Omega_K(R) = \sqrt{\frac{GM_1}{R^3}} \quad (3.1)$$

liegen, G ist die Gravitationskonstante, und die Azimutalgeschwindigkeit folgt aus

$$v_\phi = R\Omega_K(R). \quad (3.2)$$

In einer dünnen Scheibe vernachlässigen wir die Dynamik in z -Richtung und reduzieren die Gleichungen auf die Dynamik der Flächendichte

$$\Sigma(R, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(R, z, t) dz. \quad (3.3)$$

Die Massenakkretion wird durch eine zusätzliche kleine radiale Driftgeschwindigkeit $v_R(R, t)$ in Richtung des Sterns beschrieben. Aus dieser Annahme leiten wir nun die Erhaltungsgleichungen für Masse und Drehimpuls ab. Die Masse in einem Ring zwischen R und $R + \Delta R$ ist $2\pi R \Delta R \Sigma$ und hat den Drehimpuls $2\pi R \Delta R \Sigma R^2 \Omega$. Aus der Betrachtung

der Zu- und Abflüsse aus den Nachbarringen und dem Übergang $\Delta R \rightarrow 0$ erhält man die Gleichung für die Massenerhaltung

$$R \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) = 0. \quad (3.4)$$

Es wird nun noch die Erhaltungsgleichung für den Drehimpuls benötigt. Drehimpuls wird einerseits durch den Massenstrom übertragen, andererseits auch durch viskose Kräfte turbulenter Ursprungs. Nach den Überlegungen in Frank et al. (1992) kann eine turbulente Strömung mit der typischen radialen Ausdehnung λ und der typischen Geschwindigkeit u durch eine viskose Strömung mit dem Koeffizienten $\nu = \lambda u$ der kinematischen Viskosität beschrieben werden, der Koeffizient ν hängt mit dem dynamischen Koeffizienten der Scherviskosität η über $\nu = \eta/\rho$ zusammen. Man erhält so den Gesamtdrehimpulsfluß der Scheibe

$$J(R, t) = 2\pi R \nu \Sigma R^2 \frac{\partial \Omega}{\partial R}. \quad (3.5)$$

Den Gesamtdrehimpuls ändert sich durch den von dem Massenstrom übertragenen Drehimpuls und dem Drehimpulsfluß, der nicht mit dem Massenstrom verknüpft ist, man erhält

$$R \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R^2 \Omega) + \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R R^2 \Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial J}{\partial R} \quad (3.6)$$

und mit der Massenerhaltung 3.4 und der Annahme $\partial_t \Omega = 0$ die Gleichung

$$\Sigma v_R \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial J}{\partial R}. \quad (3.7)$$

Benutzt man 3.4 um v_R zu eliminieren und für $J(R)$ den Keplerschen Wert, so erhält man die Entwicklungsgleichung der Flächendichte für eine Keplersche Scheibe

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} \left(\nu \Sigma R^{1/2} \right) \right]. \quad (3.8)$$

Diese Gleichung beschreibt die Diffusion von Masse nach innen und von Drehimpuls nach außen. Der Parameter ν beschreibt die turbulente Viskosität und hängt im allgemeinen von den Scheibenvariablen R , Σ und t ab, dadurch wird die Gleichung nichtlinear. In der noch einzuführenden α -Parametrisierung ist ν eine Funktion des vollständigen Satzes thermodynamischer Variablen $\Sigma(\mathbf{x}, t)$, $T(\mathbf{x}, t)$ und einer Angabe der durch das äußere Potential $\Phi(\mathbf{x})$ verursachten Kräfte in z -Richtung.

3.1.2 Stationäre Scheiben

Wie wir in dem vorigen Abschnitt gesehen haben, ändert sich die radiale Struktur der Scheibe in Zeitskalen $t_{\text{visk}} \approx R^2/\nu$. Ist der Massenzustrom über diese Zeitskala konstant, wird sich ein stationärer Zustand einstellen, die Gleichungen erhalten wir mit $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Aus der Massenerhaltungsgleichung erhält man

$$R \Sigma v_R = \text{const.} \quad (3.9)$$

und damit die Akkretionsrate

$$\dot{M} = 2\pi R \Sigma (-v_R). \quad (3.10)$$

Aus der Drehimpulsbilanz folgt

$$R \Sigma v_R R^2 \Omega = \frac{J}{2\pi} + \frac{C}{2\pi} \quad (3.11)$$

und mit $J(R)$ aus 3.5

$$-v \Sigma \frac{\partial \Omega}{\partial R} = \Sigma (-v_R) \Omega + C / (2\pi R^3). \quad (3.12)$$

Die Integrationskonstante C erhält man durch geeignete Wahl der Randbedingungen. Nimmt man an, daß die Winkelgeschwindigkeit nahe der Sternoberfläche bei $R = R_1$ immer noch nahezu Keplersch ist $\Omega = \Omega_K$, dann erhält man

$$C = -\dot{M} \sqrt{GM R_1} \quad (3.13)$$

und damit aus der vorigen Gleichung

$$v \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[1 - \left(\frac{R_1}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.14)$$

Die turbulent hervorgerufenen viskosen Kräfte wirken dissipativ. Um die Größe der Dissipation zu bestimmen, betrachten wir zunächst die Drehmomente, die auf einen Ring zwischen R und $R + \Delta R$ wirken, es sind die Drehmomente am inneren und äußeren Rand

$$J(R + \Delta R) - J(R) = \frac{\partial J}{\partial R} dR. \quad (3.15)$$

Das Drehmoment wirkt in Richtung der Winkelgeschwindigkeit und leistet die Arbeit

$$\Omega \frac{\partial J}{\partial R} dR = \left[\frac{\partial}{\partial R} (J \Omega) - J \frac{\partial \Omega}{\partial R} \right] dR. \quad (3.16)$$

Der erste Term beschreibt den von den Drehmomenten verursachten Transport kinetischer Energie durch die Scheibe, der zweite die Dissipationsrate der kinetischen Energie, die in Wärme umgewandelt und schließlich durch die Oberfläche abgestrahlt wird. Je Ringbreite dR erhält man also die Dissipationsleistung $J \frac{\partial \Omega}{\partial R} dR$. Der Gasring hat zwei Seiten und daher eine Fläche von $4\pi R dR$, damit lautet die Dissipationsleistung je Einheitsfläche

$$D(R) = \frac{J}{4\pi R} \frac{\partial \Omega}{\partial R} = \frac{1}{2} v \Sigma (R \frac{\partial \Omega}{\partial R})^2. \quad (3.17)$$

Dieser Ausdruck lautet für eine stationäre Scheibe mit Keplerscher Rotation

$$D(R) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3} \left[1 - \left(\frac{R_1}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.18)$$

In einer stationären Scheibe ist also die Dissipation und damit die Abstrahlungsleistung durch die Scheibenoberflächen unabhängig von der Viskosität. Diese Eigenschaft wurde jedoch mit der Annahme erzwungen, daß sich die Viskosität so einstellt, wie es ein stationärer Massenfluß \dot{M} erfordert. Die Abstrahlungsleistung ist eine der wenigen Beobachtungsgrößen von Akkretionsscheiben, die Gleichung liefert hierzu die prinzipielle Abhängigkeit von den Größen \dot{M} und R .

3.1.3 Die Vertikalstruktur dünner Scheiben

In dünnen Scheiben wird angenommen, daß in der vertikalen z -Richtung kein Massenfluß auftritt, also $v_z = 0$ gilt. In diesem Fall stellt sich vertikal ein Gleichgewicht aus Druckkraft p und der von der Zentralmasse hervorgerufenen Gravitationskraft ein

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{GM}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right]. \quad (3.19)$$

Für dünne Scheiben $z \ll R$ erhält man aus voriger Gleichung

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{GMz}{R^3}. \quad (3.20)$$

Sei H die typische Skalenhöhe in z -Richtung, dann kann man $\partial p / \partial z \approx p/H$ und $z \approx H$ setzen. Mit der Schallgeschwindigkeit $c_s^2 \approx p/\rho$ und der Keplerschen Winkelgeschwindigkeit $\Omega_K = v_K/R = \sqrt{GM/R^3}$ erhält man

$$H = \frac{c_s}{\Omega_K}. \quad (3.21)$$

Aus der Forderung einer dünnen Scheibe $H \ll R$ folgt, daß die lokale Keplergeschwindigkeit wesentlich größer sein muß als die Schallgeschwindigkeit

$$c_s \ll v_K. \quad (3.22)$$

Diese Forderung ist meist für Scheiben in Doppelsternsystemen erfüllt. In dünnen Scheiben ist die Dynamik des Gases durch die Gravitationskraft der Zentralmasse dominiert, die Azimutalgeschwindigkeit v_ϕ liegt daher immer nahe an der Keplergeschwindigkeit.

Sind die Bedingungen für eine dünne Scheibe in den obigen Gleichungen erfüllt, kann die Vertikalstruktur als entkoppelt von der Struktur in der Scheibenebene betrachtet werden. Die Gradienten von Druck und Temperatur zeigen dann im wesentlichen in vertikale Richtung. Die Gleichungen für das hydrostatische Gleichgewicht und den Energietransport werden dann lokal an jedem Punkt der Scheibenebene als eindimensionales Problem behandelt. Die Dissipation $D(R)$, die aus der Bewegung in der Scheibenebene folgt, tritt in der Vertikalstruktur nur noch als Quellterm in Erscheinung.

Mit der Scheibenhöhe H aus 3.21 und $c_s^2 = p/\rho$ erhält man die Dichte in der zentralen Scheibenebene bei $z = 0$

$$\rho = \Sigma/H. \quad (3.23)$$

Im allgemeinen muß in den Druckkräften zusätzlich zum thermodynamischen Druck noch der Strahlungsdruck berücksichtigt werden

$$p = \rho c_v (\gamma - 1) T_c + \frac{4\sigma}{3c} T_c^4 \quad (3.24)$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstanten σ , der Lichtgeschwindigkeit c und der Temperatur in der Scheibenebene $T_c = T(z = 0)$ und der Annahme, daß die Temperatur $T(R, z)$ überall nahe bei T_c liegt. Für genügend kleine Temperaturen kann der Strahlungsdruck vernachlässigt werden, was in den von uns betrachteten Scheiben immer der Fall ist.

Die Temperatur T_c muß nun durch Lösen der Energiegleichung bestimmt werden. Die Energiegleichung beinhaltet als Quellterm die viskose Dissipation $D(R)$ sowie den Verlust durch Schwarzkörperstrahlung an der Oberfläche und den vertikalen Energietransport vom innern der Scheibe bis an die Oberfläche. Der Energietransport kann durch Konvektion oder Strahlungstransport stattfinden, in den von uns betrachteten Scheiben kann die Konvektion vernachlässigt werden.

Bei der Betrachtung des Strahlungstransports in dünnen Scheiben in vertikaler Richtung kann man lokal an jedem Punkt in der Scheibenebene ein planparalleles Medium voraussetzen, in diesem Fall ist der radiative Energiefluß durch eine Fläche $z = \text{const.}$ gegeben durch

$$F(z) = \frac{-16\sigma T^3}{3\kappa_R \rho} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.25)$$

mit der mittleren Rosseland-Opazität κ_R . Dabei geht man von einer optische dicken Scheibe aus, also $\tau \gg 1$, wobei

$$\tau = \Sigma \kappa_R(\rho, T_c) \quad (3.26)$$

die optische Tiefe ist. Die Energiebilanz ergibt sich aus der Energieproduktion der viskosen Dissipation. Mit der viskosen Heizung pro Volumen Q^+ gilt

$$\frac{\partial F}{\partial z} = Q^+ \quad (3.27)$$

oder

$$F(H) - F(0) = \int_0^H Q^+(z) dz = D(R). \quad (3.28)$$

Für den Fall, daß die Temperatur in der Scheibenebene deutlich größer ist als die Temperatur an der Oberfläche, d.h. $T_c^4 \gg T^4(H)$, gilt die Näherung

$$D(R) \approx F(H) = \frac{16\sigma T^3}{3\kappa_R \rho} \frac{\partial T}{\partial z} \approx \frac{4\sigma}{3\tau} T_c^4. \quad (3.29)$$

Das Gleichungssystem für stationäre dünne Scheiben ist geschlossen, wenn man eine geeignete Beschreibung der Funktionen $\kappa_R(\rho, T_c)$ und $\nu(\Sigma, T_c, \cdot)$ angibt.

3.1.4 Die α -Parametrisierung der Viskosität

Viskosität im gewöhnlichen Sinne der Strömungsmechanik ist eine Materialeigenschaft molekularer Ursprungs. Akkretionsscheiben bestehen im wesentlichen aus heißem Wasserstoffgas oder Wasserstoffplasma. Die molekulare Viskosität ist in diesen Gasen um viele Größenordnungen zu klein, um irgendeinen dynamischen Einfluß ausüben zu können. Tatsächlich wird daher in keinem Modell und auch nicht in unseren Rechnungen molekulare Viskosität berücksichtigt. Durch Abschätzungen (Frank et al. 1992) kann man jedoch auf sehr hohe Reynoldszahlen $Re > 10^{14}$ schließen, die Strömung in der Scheibe ist damit höchst wahrscheinlich stark turbulent.

Eine geeignete Parametrisierung der turbulent verursachten Scherviskosität geht auf Shkura & Sunyaev (1973) zurück, die sogenannte α -Scheibe

$$\nu = \alpha c_s H. \quad (3.30)$$

Die Größen H und c_s stellen eine Obergrenze für die Wirbelgröße und Wirbelgeschwindigkeit dar. An den dimensionslosen Parameter α ist in diesem Fall nur die Bedingung $\alpha \leq 1$ geknüpft, im einfachsten Fall ist er im Raum und in der Zeit konstant.

In der freien Wahl des Parameters α spiegelt sich die Unwissenheit über die genaue Natur der turbulenten Viskosität wieder. In späteren Abschnitten werden wir die Wahl dieses Parameters diskutieren. Einfache theoretische Modelle für Zwergnovaausbrüche fordern bestimmte Einschränkungen an diesen Parameter, um Beobachtungen reproduzieren zu können. In der Simulation der Zwergnova U Geminorum werden wir jedoch die zwingende Notwendigkeit dieser Einschränkungen widerlegen. Insgesamt ist der Vergleich aus den Vorhersagen, die das α -Modell macht und den Beobachtungen ein aktuelles und noch lange nicht geklärtes Thema aktueller Forschung.

Für die Beschreibung der Opazität kann die Kramers-Opazität

$$\kappa_{\text{Kr}} = 6.6 \cdot 10^{22} \rho T_c^{-7/2} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (3.31)$$

benutzt werden. Damit kann eine analytische Lösung einer stationären dünnen und axial-symmetrischen Scheibe angegeben werden, diese *Sakura-Sunyaev-Lösung* findet man z.B. in Frank et al. (1992), sie beschreibt die Abhängigkeit der Scheibenvariablen Σ , H , ρ , T_c , τ , ν und v_R in Abhängigkeit von \dot{M} , M_1 und R . In den Gleichungen ist auffallend, daß der unbekannt Parameter α nur in niedriger Potenz auftritt. Dies hat den Vorteil, daß ein schlecht gewähltes α nur geringe Veränderungen in der Vorhersage der Scheibenvariablen mit sich bringt, umgekehrt aber den Nachteil, daß aus bekannten Variablen, also aus Beobachtungsdaten, keine Vorhersagen über diesen Parameter zu erwarten sind.

Setzt man in die Lösung typische Werte für ein Doppelsternsystem ein, so erhält man die Abschätzungen für die radiale Driftgeschwindigkeit $v_R \approx 0.3 \text{ km s}^{-1}$ die deutlich unter der Schallgeschwindigkeit $c_s \approx 10 \text{ km s}^{-1}$ liegt, während die Azimutalgeschwindigkeit stark überschall ist $v_\phi \approx 1000 \text{ km s}^{-1}$. Aus der Flächendichte Σ ergibt sich, daß die Gesamtmasse der Scheibe klein ist gegenüber der Sternmassen, die Annahme vernachlässigbarer Eigengravitation ist daher gerechtfertigt.

3.1.5 Opazitäten

Die im letzten Abschnitt angegebene Kramersche Opazität κ_{Kr} beschreibt im wesentlichen, wie durchlässig das Scheibenmaterial in Abhängigkeit von ρ und T_c für die aus der Dissipation gewonnene Wärmestrahlung ist. Allgemein ist die Beschreibung des Strahlungstransports natürlich sehr viel aufwendiger, zahlreiche verschiedene Wechselwirkungsprozesse zwischen Materie und Strahlung erfordern eine quantenmechanische Beschreibung. Die Wirkungsquerschnitte der Prozesse hängen nicht nur von Dichte und Temperatur, sondern auch von der Frequenz der Strahlung und allen anderen quantenmechanischen Zuständen des Systems ab. Aufgrund ihrer Bedeutung in Modellen für Sternatmosphären aber auch für Simulationen von Atombombenexplosionen sind Daten aus aufwendigen Rechnungen verfügbar. Zur Ermittlung der Rosseland Opazitäten werden dabei sinnvolle Annahmen über die Verteilung der Eingangsvariablen des quantenmechanischen Systems gemacht, aber auch Annahmen über die chemische Zusammensetzung der Materie und der Annahme, daß sich das System lokal im Gleichgewichtszustand befindet. Zuletzt mittelt man die frequenzabhängige Opazität κ_f über eine zu erwartende Frequenzverteilung der Strahlung B_f und erhält dann die mittlere Rosseland Opazität

$$\frac{1}{\kappa_R} = \frac{1}{B} \int_0^\infty \frac{B_f}{\kappa_f} df. \quad (3.32)$$

Nimmt man nun an, daß die einfallende Strahlung die Frequenzverteilung der Schwarzkörperstrahlung

$$B_f(T) = \frac{8\pi hf^3/c^2}{\exp(\frac{hf}{kT}) - 1} \quad (3.33)$$

besitzt, kann ein κ_R angegeben werden, das nur noch von der Dichte und der Temperatur abhängt. In den von uns betrachteten Modellen ist diese Angabe ausreichend, Energie wird dort durch dissipative Prozesse in Form von Wärme gewonnen und wir benötigen die Opazitäten nur, um den lokalen Energieverlust der Scheibe zu berechnen. Mit den gemittelten Opazitäten kann natürlich kein frequenzabhängiger Strahlungstransport der Scheibe mehr untersucht werden.

In der Kramerschen Opazität κ_{Kr} ist die Wechselwirkung der Strahlung mit freien Elektronen eines ionisierten Wasserstoffplasmas berücksichtigt, diese Annahme gilt jedoch erst ab Temperaturen $T > 10^4$ K. Diese Einschränkung ist für unsere Simulationen nicht geeignet, da während der Entwicklung der Scheibe und am Rand niedrigere Temperaturen auftreten. Für die Simulation von U Gem benutzen wir daher die Opazitäten von [Bell & Lin \(1994\)](#).

Hierbei handelt es sich um stückweis definierte Polynomnäherungen, die einen gesamten Temperaturbereich von 1 bis 10^6 K beschreiben. Der für uns interessante Bereich beginnt bei 10^4 K, ab dem die Ionisation von Wasserstoff einsetzt. Das Gas wird während der Ionisation sprunghaft optisch dick, erst danach setzt die Kramersche Regel ein. Die verschiedenen Bereiche wurden durch Polynome so verbunden, daß stetig differenzierbare Funktionen entstehen, dies ist in unseren Rechnungen zwar nicht notwendig, anders jedoch bei Stabilitätsbetrachtungen von Sternatmosphären.

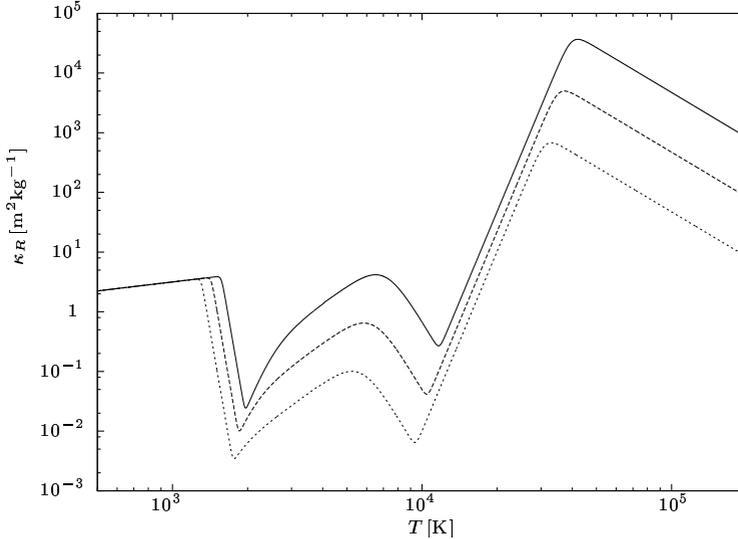


Abbildung 3.1: Die Opazität ist eine Funktion der Dichte und der Temperatur. Die unterschiedlichen Kurven bezeichnen unterschiedliche Dichten, von oben nach unten $\rho = 10^{-4}$, 10^{-5} und $10^{-6} \text{ kg m}^{-3}$. Der starke Anstieg zwischen 10^4 K und 10^5 K wird durch die Ionisation verursacht, man beachte die doppelt-logarithmische Skala.

Das simulierte System AM CVn besteht im wesentlichen aus Helium, hierfür wurden andere Opazitäten benutzt. In der Arbeit von [Iglesias & Rogers \(1996\)](#) findet man tabellierte Opazitäten für verschiedene chemische Zusammensetzungen, im besonderen kann man den Metallanteil frei wählen. Unter Metallen versteht man in diesem Zusammenhang alle Elemente außer Wasserstoff und Helium. Es wurde Tabelle 8 mit der Zusammensetzung $Y = 0.98$, $Z = 0.02$ benutzt, also Helium mit einer 2%-igen Metallverunreinigung, der Metallanteil entspricht in etwa dem eines Sterns der zweiten Generation. Die tabellierten logarithmischen Werte für Dichte und Temperatur wurden für die Simulation linear interpoliert. Die Helium-Opazitäten unterscheiden sich jedoch nicht wesentlich von denen in Abb. 3.1 gezeigten, die Ionisation setzt bei geringfügig niedrigeren Temperaturen ein.

Mit den Opazitäten kann die lokale Abstrahlungsleistung je Einheitsflächenelement in der Scheibenebene \mathbf{x}

$$D(\mathbf{x}) = \frac{4\sigma}{3\tau} T_c^4 \quad (3.34)$$

bestimmt werden. Durch Integration über die gesamte Scheibe erhält man eine Information über die Gesamthelligkeit. Nimmt man lokal ein Schwarzkörperspektrum an und integriert wieder, kann man eine theoretische Vorhersage über das Spektrum der Scheibe gewinnen. Astronomische Daten liefern jedoch nicht gleichzeitig Daten des gesamten Spektralbereichs, oft wird im oder nahe am sichtbaren Bereich beobachtet. Aus dem Planck-Spektrum 3.33

kann man sich leicht eine Abstrahlungsleistung für Licht im sichtbaren Bereich herleiten. Ist die Scheibe sehr heiß und beobachtet man bei kleinen, sichtbaren Frequenzen $hf/kT \ll 1$, so gilt für das Schwarzkörperspektrum die Rayleigh-Jeans Form

$$B_f \propto f^2 T. \quad (3.35)$$

Bei einer Temperatur von ca. 6000 K liegt das Maximum der Planckfunktion im sichtbaren Bereich, ist die Scheibe nun wesentlich heißer $T_c \gg 6000$ K, dann ist die monochromatische Abstrahlungsleistung bei sichtbaren Frequenzen proportional zur Temperatur. Wir werden später bei der Auswertung der Ergebnisse die Funktion

$$D^{0.25}(\mathbf{x}) = \left(\frac{4\sigma}{3\tau}\right)^{0.25} T_c \quad (3.36)$$

als einfaches Abstrahlungsmodell für sichtbares Licht benutzen und diese den Beobachtungsdaten gegenüberstellen.

3.1.6 Das Scheibeninstabilitätsmodell

Die *Sakura-Sunyaev-Lösung* dünner Akkretionsscheiben ist stationär. Manche wechselwirkende Doppelsternsysteme zeigen jedoch starke zeitliche Helligkeitsschwankungen, die von der Akkretionsscheibe verursacht werden. Bei manchen Systemen ändert sich die Helligkeit in mehr oder weniger regelmäßigen Abständen um mehrere Größenordnungen, man spricht dann von Zwergnovae, eine Klassifizierung und Beschreibung verschiedener Doppelsternsysteme wird im nächsten Abschnitt gegeben.

Die einzigste Möglichkeit einer Akkretionsscheibe Energie zur Abstrahlung zu gewinnen sind die dissipativen viskosen Kräfte, durch sie wird potentielle Energie des Gases in Strahlung umwandelt. Eine höhere Leuchtkraft bedeutet also gleichzeitig eine insgesamt höhere Massenakkretion. Für die Ursache der erhöhten Akkretion kommen zwei Modelle in Frage, das *Mass Transfer Burst* (MTB)-Modell von [Bath \(1973\)](#) erklärt die höhere Akkretionsleistung mit einem erhöhten Massenstrom von Sekundärstern. Als Ursache für diesen kommen wieder unterschiedliche Prozesse in Frage, bestimmte Beobachtungsdaten lassen jedoch in den meisten Systemen einen konstanten Massenstrom erwarten, so daß dieses Modell nur in wenigen Fällen anwendbar ist.

Bei konstantem Massenstrom muß die erhöhte Akkretionsrate durch Instabilitäten in der Scheibe selbst entstehen, das *Disc Instability Model*, (DIM) geht auf [Osaki \(1974\)](#) zurück. Das Modell geht davon aus, daß die Scheibe keine konstante Massenakkretion \dot{M} bewerkstelligen kann, die dem Massenüberstrom \dot{M}_2 entspricht. Ist die Scheibe anfangs massenarm, ist sie sogleich optisch dünn und kühl, es herrscht eine zu niedrige Viskosität und damit ein zu niedriger Massentransport, die Scheibenmasse nimmt in Folge dessen zu.

Ab einer bestimmten Flächendichte existieren jedoch drei Lösungen für den Zusammenhang der viskosen Dissipation und der Flächendichte Σ , eine der Lösungen, die Linie zwischen **D** und **B** in [Abb. 3.2](#), ist jedoch instabil. Erreicht die Flächendichte den kritischen

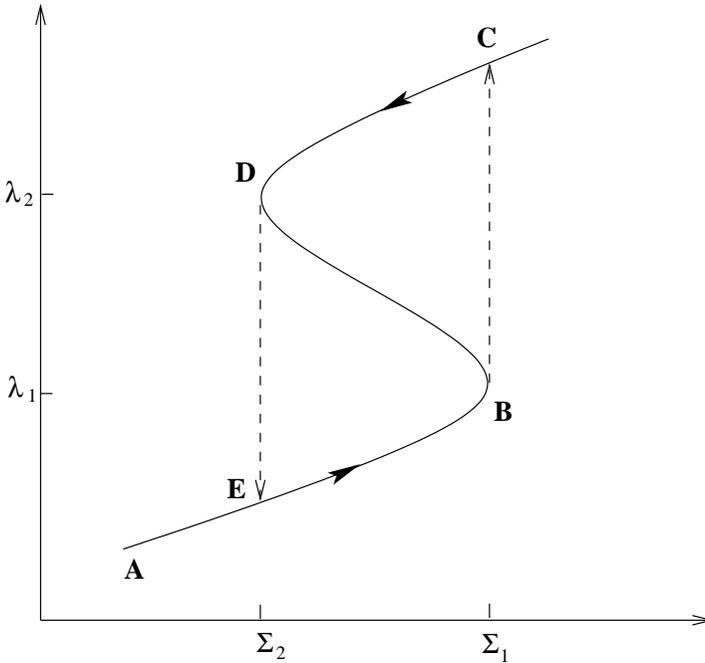


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung der sogenannten **S-Kurve**. Die Funktion $\lambda(\Sigma)$ beschreibt die Dissipation in Abhängigkeit der Flächendichte. Die Dissipation kann in Einheiten der integrierten viskosen Kraft $\lambda(\Sigma) = \nu \Sigma(\Sigma)$, in Einheiten der resultierenden Temperatur $\lambda(\Sigma) = T(\Sigma)$ oder in Einheiten der viskos verursachten Massentransferrate $\lambda(\Sigma) = \dot{M}(\Sigma)$ ausgedrückt werden, der schematische Verlauf ist in allen Fällen gleich. Die S-Kurve gilt lokal, die Scheibensvariablen können sich an unterschiedlichen Orten an unterschiedlichen Positionen auf der S-Kurve befinden. Der dargestellte zyklische Verlauf B-C-D-E gilt daher ebenfalls nur lokal.

Punkt **B**, ionisiert das vorhandene Scheibenmaterial und wird optisch dick, es entweicht weniger Strahlung und die Scheibe heizt sich schnell auf (**C**). Aus dem α -Modell folgt, daß in einer heißeren Scheibe eine höhere Viskosität und damit auch eine höhere Akkretionsrate herrscht, die Scheibe entleert sich solange, bis sie einen weiteren kritischen Punkt **D** erreicht und dort sehr schnell optisch dünn und kühl wird. Dieser zyklische Verlauf beschreibt das wiederkehrende Ausbruchverhalten von Zergnovae, das DIM ist bislang zur Erklärung von Zergnovaausbrüchen akzeptiert, noch bestehende Unsicherheiten werden weiterhin diskutiert und sind ebenfalls aktuelles Forschungsthema.

Zu bemerken ist, daß der S-förmige Verlauf von $\lambda(\Sigma)$ in den den Gleichungen der dünnen Scheibe enthalten ist, vorausgesetzt, es werden passende Opazitäten gewählt. Voraussetzung für die S-Kurve ist, daß die Opazität bei steigender Temperatur zunimmt und damit die Scheibe aufheizt, umgekehrt bei niedrigerer Flächendichte und Temperatur abnimmt und Strahlung entweichen lässt. Die im vorigen Abschnitt vorgestellten Opazitäten geben diesen Verlauf in

dem Temperaturbereich wieder, in dem Scheibenmaterial ionisiert wird. Das zyklische Ausbruchverhalten von Scheiben in Zwergnovae beschreibt also gleichzeitig den Übergang vom nur geringfügig ionisierten Zustand bis zum fast vollständig ionisierten des Scheibenmaterials und umgekehrt. Mit den Kramerschen Opazitäten, die für höhere Temperaturen gelten, erhält man dieses Verhalten nicht. In dichteren und heißeren Scheiben, etwa um Neutronensterne und Schwarze Löcher wird man Ausbruchszyklen nach dem DIM daher wohl nicht erwarten.

Es ist nun prinzipiell möglich, die Gleichungen für eine axialsymmetrische dünne Scheibe zeitabhängig numerisch zu lösen, bei geeigneten Anfangsbedingungen sollte die Lösung dann ebenfalls ein zyklisches Ausbruchverhalten, zumindest lokal, aufweisen. Derartige eindimensionale Rechnungen, in denen die Radialstruktur zeitabhängig gelöst wird, sind in großer Zahl unternommen worden. [Ludwig et al. \(1994\)](#) untersucht in einer Parameterstudie, wie mit einer festen Wahl von Parametersätzen für den viskosen Koeffizienten α verschiedene beobachtete Systeme reproduziert werden können. Allgemein haben diese Modelle das Problem, daß sie die Ausbruchsstärke zu gering und die Ausbruchsintervalle zu kurz wiedergeben ([Smak 1984](#)), weitere Untersuchungen zu konstantem α stammen von [Lin et al. \(1985\)](#); [Meyer & Meyer-Hofmeister \(1989\)](#). Dieses eigentlich unbefriedigende Ergebnis wird oft als Argument benutzt, zusätzliche Bedingungen an die Wahl des Parameters α zu stellen, um dadurch die Ergebnisse des Modells an die Beobachtungen anzupassen. Dazu wird oft die Annahme gemacht, für den heißen, optisch dicken Zustand und den kühlen, optisch dünnen existieren verschiedene Werte für α ([Meyer-Hofmeister & Meyer 1988](#); [Smak 1984](#); [Cannizzo 1993](#)). Weitere Modelle untersuchen ein zeitabhängiges α ([Cannizzo 1993](#)) oder Abhängigkeiten von Scheibenvariablen $\alpha = \alpha(H/R)$ ([Meyer & Meyer-Hofmeister 1984](#)), zahlreiche andere Möglichkeiten sind denkbar (s. [Duschl 1989](#)). Alle Modelle kann man jedoch als so unsicher ansehen, daß aus der Tatsache einer richtigen Wiedergabe der Ausbruchszyklen noch keine verlässliche Bestätigung der Annahmen über die α -Viskosität abgeleitet werden kann. Auch wenn zusätzliche physikalische Effekte, wie etwa den konvektiven Energietransport ([Meyer & Meyer-Hofmeister 1984](#)) mitberücksichtigt werden, werden diese eindimensionale Modelle nicht zuverlässiger.

In der Simulation des Systems U Geminorum werden wir die Gleichungen für dünne Scheiben in der Scheibenebene mit FMM lösen. Wir werden sehen, daß die Gravitationseffekte des Begleitsterns entscheidenden Einfluß auf die nun nicht mehr axialsymmetrische Scheibe hat, die resultierenden Ergebnisse werden mit Beobachtungsdaten verglichen und in der darauf folgenden Diskussion der Ergebnisse wird dann nochmals dieser Themenkomplex aufgegriffen.

3.2 Wechselwirkende Doppelsterne

Interessante astronomische Objekte sind Akkretionsscheiben in Doppelsternsystemen. Man kann zwar nicht ortsaufgelöst die Sterne und ihre Scheibe beobachten, viele zeigen jedoch mehr oder weniger starke Helligkeitsschwankungen und sind deshalb auffällig. Binärsysteme besitzen eine gemeinsame Entstehungsgeschichte, der schwerere Primärstern entwickelt sich daher zuerst zum weißen Zwerg, während der Sekundärstern noch im Zustand eines

Hauptreihensterns späten Spektraltyps verweilt. Rotieren beide Sterne sehr nahe um ihren gemeinsamen Schwerpunkt, kann Masse aus der Oberfläche des Sekundärsterns zum Primärstern überströmen und um den Primärstern eine Akkretionsscheibe bilden, vorausgesetzt, das Magnetfeld des Primärsterns ist schwach genug, um die Bildung einer Scheibe nicht zu verhindern. In diesem Zustand füllt der Sekundärstern sein Roche-Volumen aus, seine Oberfläche erreicht den Sattelpunkt des gemeinsamen Potentials, den inneren Lagrange-Punkt L_1 . Von dort kann das Gas aufgrund der Rotation nicht direkt den weißen Zwerg erreichen, sondern bildet so den Anfang einer Akkretionsscheibe.

Diese Akkretionsscheiben sind zeitlichen Änderungen unterworfen und ändern ihre Helligkeit, diese Variabilität überträgt sich auf die Gesamthelligkeit des Binärsystems, man nennt sie daher Ausbruchsveränderliche oder kataklysmische Variable (engl. cataclysmic variable (CV)). Die Helligkeitsschwankungen auf kurzen Zeitskalen lassen sich mit guten Amateurlteleskopen messen, es liegt daher eine Fülle an Beobachtungsdaten vor, die Anhaltspunkte für theoretische Modelle liefern.

3.2.1 Das Roche-Potential des Binärsystems

Wenn im Laufe der Sternentwicklung der Radius des Sekundärsterns zunimmt oder der Abstand der Sterne abnimmt, was durch Gravitationswellenabstrahlung oder magnetisches Bremsen verursacht werden kann, so kann der Sekundärstern Gas aus seiner Hülle an den Primärstern verlieren. Dieser Zustand ist quasistationär, es wird sich ein nahezu konstanter Überstrom bilden, der Roche-Lobe-Overflow genannt wird. Der Sekundärstern kann natürlich auch in einer instabilen Phase starke Winde ausstoßen, die vom Primärstern akkretiert werden, diese Art von Akkretion betrachten wir jedoch nicht.

Der Überstrom ist nun, neben thermodynamischen Kräften, dem Gravitationskräften der beiden Sterne ausgesetzt. In Kataklysmischen Variablen kann man die Rotation der beiden Sterne um ihren gemeinsamen Schwerpunkt als kreisförmig betrachten, Bahnexzentrizitäten würden durch Gezeitenkräfte sehr schnell gedämpft werden. Es ist zweckmäßig, den Überstrom im mitrotierenden Koordinatensystem zu betrachten. In diesem System werden die äußeren Kräfte $\mathbf{f}_e = -\nabla\Phi(\mathbf{x})$ auf das Gas durch das Roche-Potential

$$\Phi_R(\mathbf{x}) = -\frac{GM_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_1|} - \frac{GM_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_2|} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 \quad (3.37)$$

dargestellt (s. Abb. 3.3). Das Roche-Potential besitzt die fünf Extremalpunkte L_1 bis L_5 , der innere Lagrange-Punkt L_1 ist ein Sattelpunkt. Die Äquipotentiallinie, die diesen Punkt schneidet, gibt deshalb die mögliche Ausdehnung der Sterne vor.

Am Überstrompunkt L_1 besitzt das Gas eine vernachlässigbare Geschwindigkeit, von dort wird es in Richtung des Primärsterns beschleunigt. Die Einteilchentrajektorien, die bei L_1 mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = 0$ starten, treffen jedoch wegen der Ablenkung durch die Corioliskraft nicht direkt den Primärstern sondern passieren diesen mit einem minimalen Abstand

$$r_{\min} = 0.0488 q^{-0.464} a, \quad (3.38)$$

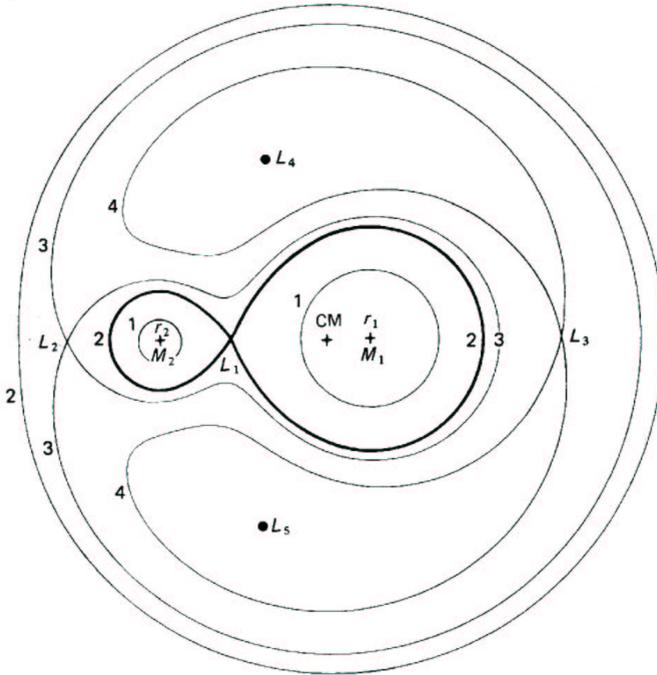


Abbildung 3.3: Das Roche-Potential enthält neben dem Gravitationspotential der zwei Punktmassen M_1 des Primärsterns und M_2 des leichteren Sekundärsterns noch den Rotationsanteil, der durch das mitrotierende Koordinatensystem verursacht wird. In diesem System wirken auf bewegte Masse noch geschwindigkeitsabhängige Corioliskräfte, die nicht in dem Potential enthalten sind. Es sind Äquipotentiallinien abgebildet, die durch den Schnitt in der Rotationsebene entstehen. Der innere Lagrange-Punkt L_1 bildet einen Sattelpunkt des Potentials, an diesem Punkt kann Gas aus der Oberfläche des Sekundärsterns überströmen. Aus Frank et al. (1992).

dabei ist $q = M_2/M_1$ und a der Abstand der beiden Sterne. Diese Formel ist eine Näherung von Lubow & Shu (1975) mit einer Genauigkeit von 1% und gilt für $0.05 < q < 1$. Der Radius des Primärsterns ist in allen bekannten Systemen kleiner. Der Abstand a der beiden Sterne ergibt sich aus dem Keplerschen Gesetz

$$4\pi^2 a^3 = G(M_1 + M_2) P_{\text{orb}}^2, \quad (3.39)$$

P_{orb} ist die Bahnperiode des Systems. Verfolgt man die Einteilcentrajektorie weiter, wird sie sich irgendwann selbst schneiden. Das Gas wird sich in diesem Fall nicht ohne Dissipation selbst durchdringen können, es wird sich daher unter Beibehaltung des Drehimpulses auf einer Kreisbahn sammeln. Der Radius dieser Kreisbahn nennt man *Zirkulationsradius*, es ist der kleinste äußere Radius, den eine Akkretionsscheibe haben kann. Eine bis auf 1% genaue

Näherung liefert [Hessman & Hopp \(1990\)](#)

$$r_{\text{zirk}} = 0.0859 q^{-0.426} a \quad (0.05 < q < 1). \quad (3.40)$$

3.2.2 Parametrisierung des Überstroms am inneren Lagrange-Punkt

Obwohl man mit den bisherigen Überlegungen Modelle für stationäre Akkretionsscheiben erhalten hat, eignen sich diese Modelle schlecht als Anfangsbedingungen für eine Simulation in einem Binärsystem, allein schon deshalb, da die Auswirkung der Anfangsbedingung auf das Ergebnis unbekannt bleibt. Eine konsistente Simulation beginnt daher mit einer leeren Scheibe, die durch den Überstrom am inneren Lagrange-Punkt L_1 erst aufgefüllt wird, die Anfangsbedingungen für den Überstrom sind jedoch ebenfalls nicht bekannt.

Durch grundlegende Überlegungen zu den Bedingungen am L_1 -Punkt erhalten [Lubow und Shu \(Lubow & Shu 1975\)](#) ein semianalytisches Modell des Überstroms. Durch die Annahme einer isothermen Strömung können Angaben zu Skalenbreite des Stroms in Abhängigkeit der bekannten Parameter des Binärsystems gemacht werden, die Strömungsrichtung ergibt sich durch die Rotation des Binärsystems und der Geschwindigkeitsbetrag durch die Potentialdifferenz. In einer weiteren Arbeit ([Lubow & Shu 1976](#)) werden auch Überlegungen zur Vertikalstruktur des Überstroms angegeben. ([Hessman 1999](#)) gibt analytische Näherungen für die Ergebnisse von [Lubow und Shu](#) an, die in den folgenden Simulationen benutzt werden.

Grundlegende Parameter für den Überstrom sind das Massenverhältnis $q = M_2/M_1$ sowie der Skalenparameter

$$\epsilon = \frac{c_s(T_2)}{a\Omega}, \quad (3.41)$$

der das Verhältnis der Schallgeschwindigkeit an der Sternoberfläche des Sekundärsterns und der Bahngeschwindigkeit $a\Omega$ angibt, hierbei ist a der Sternabstand, Ω die Winkelgeschwindigkeit und T_2 die Temperatur an der Oberfläche des Sekundärsterns.

Der Winkel ϑ zwischen der Verbindungsachse der beiden Sterne und dem Überstrom ist

$$\cos(2\vartheta) = -4/(3A) + \sqrt{1 - 8/9A} \quad (3.42)$$

mit

$$A = \frac{\mu}{|R_{L_1}/a - 1 + \mu|^3} + \frac{1 - \mu}{|R_{L_1}/a + \mu|^3} \quad (3.43)$$

und

$$\mu = \frac{M_2}{M_2 + M_1}. \quad (3.44)$$

Für die folgenden Größen der vertikalen (H_s) und der horizontalen Skalenhöhe (W_s) wurden nun die Parametrisierung von [Hessman \(1999\)](#) benutzt, R ist im folgenden der Abstand zum Primärstern. Es ist

$$H_s(R, q, a) \approx h_1(R/a) \cdot h_2(q) \cdot a\epsilon \quad (3.45)$$

$$W_s(R, q, a) \approx w_1(R/a) \cdot w_2(q) \cdot a\epsilon \quad (3.46)$$

mit den Polynomnaherungen

$$h_1(R/a) = 0.06 + 3.17 \frac{R}{a} - 2.90 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \quad (3.47)$$

$$w_1(R/a) = 0.084 + 3.09 \frac{R}{a} - 3.08 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \quad (3.48)$$

für h_1 und w_1 und den Exponentialnaherungen

$$h_2 = 0.89 q^{-0.11} \quad (3.49)$$

$$w_2 = 0.90 q^{-0.15} \quad (3.50)$$

Den Betrag der Geschwindigkeit

$$V_s(R, q, a) = v_s(R/R_{L_1}) \sqrt{2GM_1/R_{L_1}} \quad (3.51)$$

erhält man mit der Parametrisierung

$$v_s(r_L) = 1.87 - 1.87 r_L + 4.1 \cdot \exp(-r_L/0.085) \quad (3.52)$$

und $r_L = R/R_{L_1}$. Diese Approximationen gelten für Massenverhältnisse $0.05 \leq q \leq 0.5$, diese Bedingung ist für alle folgenden Rechnungen erfüllt.

Damit sind die Anfangsbedingungen für die Simulation gegeben, nahe dem L_1 -Punkt realisiert man Zwangsbedingungen für den Überstrom mit der Temperatur T_2 und dem Geschwindigkeitsbetrag V_s in Richtung einer Hauptuberstromlinie mit dem Winkel ϑ . In den zweidimensionalen Rechnungen wird die Vertikalstruktur nicht aufgelöst, für die Oberflächendichte Σ setzt man senkrecht zur Hauptuberstromlinie eine Gaußverteilung mit der Breite W_s an, die zentrale Dichte ρ_s auf der Linie erhält man mit der Massenuberstromrate \dot{M} indem man über die Höhe und Weite unter Beachtung der Massenerhaltung integriert

$$\rho_s = \dot{M} / (2\pi W_s H_s V_s). \quad (3.53)$$

In unserem mitrotierenden Koordinatensystem liegen die beiden Sterne auf der x -Achse, das System rotiert gegen den Uhrzeigersinn, die Überstrom hat in diesem System positive x und negative y -Geschwindigkeit.

3.2.3 Klassifizierung Kataklysmischer Variablen

Doppelsternsysteme können im Laufe ihrer Entwicklung viele interessante Zustände einnehmen. Gas aus der Akkretionsscheibe wird sich letztendlich auf der Oberfläche des weißen Zwergs ansammeln und ab Erreichen einer kritischen Dichte eine thermonukleare Kettenreaktion auslösen können. Diese Explosion ist sehr viel heller als die Akkretionsscheibe während ihres Ausbruchs, man nennt solche Systeme klassische Novae oder wiederkehrende Novae, letzteres wenn mehrere solcher Ausbrüche beobachtet wurden. Erreicht der weiße Zwerg

durch die Massenzunahme die Chandrasekharsche Masse, kann er sogar zu einer Supernova werden.

Aber auch nichtmagnetische Kataklysmische Variable, die aus einem weißen Zwerg und einem leichten Hauptreihenstern bestehen, zeigen unterschiedliches Verhalten. Aufgrund ihrer Helligkeitsschwankungen, ihres Ausbruchsverhaltens und den dahinter stehenden theoretischen Modellen werden sie in verschiedene Unterklassen eingeteilt, die hier in knapper Form vorgestellt werden, eine übersichtliche Klassifizierung findet man z.B. in [Kunze \(2000\)](#).

Eines der beiden simulierten Binärsysteme, in denen die Energiegleichung selbstkonsistent mit den vorgestellten Opazitäten gelöst wurde, ist U Geminorum. U Gem zählt in der astronomischen Klassifikation zu den **normalen Zwergnovae**. Sie zeigen Ausbrüche in mehr oder weniger regelmäßigen Abständen, der Helligkeitsanstieg beträgt 3 bis 5, selten auch 8 mag ($\Delta\text{mag} = 2.5 \log f$, f ist der Faktor der Helligkeitsänderung). Die Ausbrüche können recht gut mit dem bereits vorgestellten DIM erklärt werden. Beobachtungsdaten solcher Systeme liefern jedoch, daß die Ausbrüche unregelmäßig erfolgen können, manchmal sind die Ausbrüche in ihrer Helligkeit erhöht, manchmal kurz und schwach. Bisher liegen noch keine Modelle vor, die all diese Eigenschaften reproduzieren können. In der vorgestellten Simulation wird nur bis zum ersten Ausbruch gerechnet. In diesem Zustand zeigt die Scheibe eine Spiralstruktur, die durch Dopplertomographische Verfahren auch beobachtet wird.

Normale Zwergnovae oder U Gem-Sterne, zu denen beispielsweise U Geminorum und SS Cygni gehören, bilden eine Unterklasse der Zwergnovae. In anderen Systemen kann es vorkommen, daß die Ausbruchszyklen zeitweise aufhören, möglicherweise bewirkt ein leicht erhöhter Massenüberstrom, daß die Scheibe im heißen Zustand stabilisiert wird. Wieder andere Systeme entwickeln Akkretionsscheiben, die sich während eines besonders starken Ausbruchs so weit ausdehnen, daß die gezeiteninstabil werden und während diesem Superausbruch Superhumps zeigen, nochmals andere Systeme zeigen Superausbrüche auf kurzen Zeitskalen, die mit einem stark erhöhten Überstrom zu erklären sind. Diese Systeme bilden jeweils eine weitere Unterklasse der Zwergnovae.

Zur Erklärung der Instabilität, die zu **Superhumps** führt, betrachtet man das Massenverhältnis q des Systems, das die Systemgeometrie festlegt, s. a. [Abb. 3.4](#). Eine resonante Instabilität tritt dann auf, wenn die Akkretionsscheibe den Radius $r_{1:3}$ erreicht. An diesem Radius ist die Keplerperiode drei mal kleiner als die Bahnperiode. Die Ablenkung durch den Sekundärstern addiert sich resonant auf das Gas, das sich an diesem Radius befindet. Durch diese Resonanz wird der Scheibe eine Präzessionsbewegung aufgezwungen. Die präzedierende Scheibe bewegt sich nun in dem nicht axialsymmetrischen Roche-Potential und wird dadurch periodisch komprimiert, die dadurch zusätzlich entstehende Dissipation lässt sich als geringe Helligkeitsschwankung beobachten. Die Superhumperperiode ist für jedes System typisch, der Periodenexzeß, der Unterschied zwischen Superhumperperiode und Bahnperiode, liegt etwa zwischen 0.8% und 8%. Die dadurch hervorgerufenen Helligkeitsschwankungen sind gering, in dem simulierten System AM CVn betragen sie ca. 0.02 mag, in anderen Systemen erreichen sie bis zu 30%.

Wie leicht erreicht nun eine Akkretionsscheibe diesen Radius? Aus der [Abb. 3.4](#) erkennt man, daß bei einem großen Massenverhältnis der resonante Radius deutlich kleiner ist als die Abmessung des Roche-Lobes des Primärsterns. In Beobachtungen zeigen sich tatsächlich

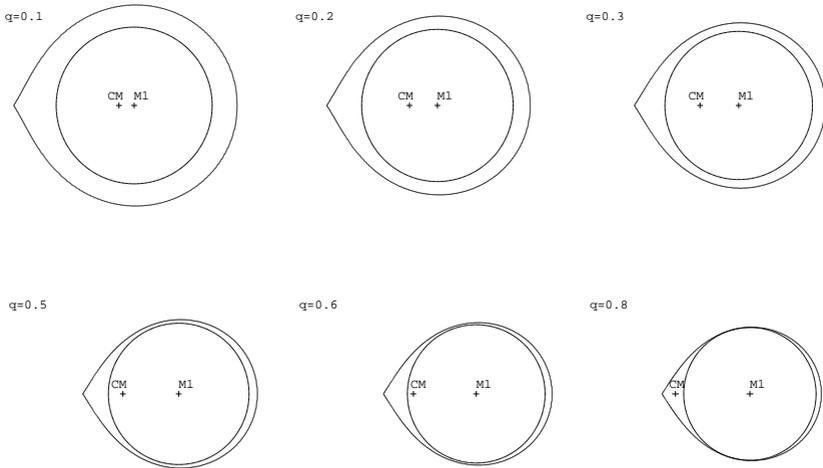


Abbildung 3.4: Abgebildet sind der Roche-Lobe des Primärsterns, der Kreis mit Radius $r_{1,3}$, das Massenzentrum CM und der Mittelpunkt des Primärsterns M_1 für verschiedene Massenverhältnisse q . Für kleinere Werte q ist der für Superhumps relevante Resonanzradius $r_{1,3}$ deutlich kleiner als die Ausdehnung des Roche-Lobes, eine Akkretionsscheibe kann sich leichter bis zu diesem Radius ausdehnen. In allen Bildern ist die Skalierung gleich, es gilt $M_1 + M_2 = 1$, $P_{\text{orb}} = 1$, $G = 1$ und damit $a = \text{const}$.

Superhumps erst ab einem Massenverhältnis $q < 0.3$. Offenbar kann sich eine Akkretionsscheibe nur schwer bis zum Roche-Lobe ausdehnen, dies liegt wohl auch daran, daß die Trajektorien freifallender Testmassen nahe am Roche-Lobe nicht mehr korreliert sind, also keine konzentrischen Kreise mehr bilden und insbesondere nicht mehr überschneidungsfrei sind. In einem realen Gas wirken sich überschneidende Trajektorien als zusätzliche Dissipation aus, die ein weiteres Wachstum der Scheibe verhindern. Thermodynamische Kräfte wie Druck und vor allem die turbulente Viskosität bewirken ein Ausdehnen der Scheibe nahe an oder bis leicht in die Region sich überschneidender Trajektorien, bei genügend großem Massenverhältnis ist dann der resonante Radius erreicht. [Whitehurst & King \(1991\)](#) zeigte, daß der $r_{1,3}$ -Radius genau dort auftritt, an dem eine Bifurkation beginnt, die Freifalltrajektorie einer Testmasse von einem einfach periodischen in einen zweifach periodischen Umlauf aufzuteilen.

Liegt der resonante Radius nur wenig innerhalb des Roche-Lobes, wird sich eine Scheibe im kühlen, wenig viskosen Zustand diesem Radius nicht nähern, sich jedoch im heißen, stark viskosen Zustand während eines Ausbruchs weit genug ausdehnen können. Offenbar muß die Scheibe den resonanten Radius längere Zeit überdecken, damit sich Superhumps ausbilden können. In der Simulation von U Gem sehen wir während des Ausbruchs, daß sich Teile der Scheibe sogar weit über den Roche-Lobe ausdehnen können. In den wenigen simulierten

Bahnperioden konnte sich jedoch keine Resonanz aufbauen, in den Beobachtungsdaten wurden ebenfalls keine Superhumps entdeckt, U Gem hat ein Massenverhältnis von $q = 0.58$.

In dem zweiten System AM CVn, das mit voller Energiegleichung gerechnet wurde, beobachtet man kontinuierliche Superhumps, ein Ausbruchsverhalten ist weder in der Simulation noch in den Beobachtungen zu sehen. Es handelt sich um ein System mit einem extremen Massenverhältnis von $q = 0.084$ und sehr kurzer Bahnperiode $P_{\text{orb}} = 1029$ s. Die Massentransferrate ist hier so hoch, daß sich die Scheibe permanent im heißen und optisch dicken Zustand befindet, sie ist sozusagen in ihrem Ausbruch gefangen. AM CVn ist ein permanenter Superhumper, solche Systeme weisen permanent einen Zustand großer Helligkeit auf, mit den beschriebenen Superhumpmodulationen.

AM CVn speziell ist ein System, das eigentlich nicht zu den Kataklysmischen Variablen zählt, da der Sekundärstern ebenfalls aus einem weißen Zwerg besteht. Die Scheibe besteht deshalb fast aus reinem Helium. Für Heliumscheiben gilt jedoch auch das DIM, entsprechend dem Massenverhältnis und der Überstromrate bilden doppelt Weiße-Zwerg-Systeme jeweils ein Pendant zu der entsprechenden Klasse der Kataklysmischen Variablen. Auffallend bei diesem System sind extrem kurze Bahnperioden, bei AM CVn weniger als 20 min sowie die hohe Überstromrate. Das gesamte System von AM CVn hat eine Abmessung vergleichbar der unserer Sonne.

In weiteren Vergleichsrechnungen ohne Viskosität und mit einer polytropen Zustandsgleichung werden wir den Gezeiteneinfluß des Sekundärstern diskutieren, in dem Superhumper OY Car, das mit konstanter Viskosität und mit polytroper Zustandsgleichung gerechnet wurde, bestimmen wir die Superhumpperiode. Weitere Angaben zu den simulierten Systemen geben wir in dem zur Simulation gehörenden Abschnitt.

4 Simulation idealisierter Akkretionsscheiben

Die vorgestellte Methode der Finiten Massen wurde anhand einfacher Problemstellungen, deren analytische Lösungen zugänglich sind, erfolgreich getestet (s. Gauger et al. 2000). Hinsichtlich ihrer Anwendung in der Astrophysik ist sie jedoch neu und unerprobt. Bevor diese Methode nun zur Simulation von Akkretionsscheiben in realen physikalischen Objekten benutzt wird, scheint es sinnvoll, sie zunächst an einfachen Modellen von Akkretionsscheiben zu testen, deren zeitliche Entwicklung bekannt ist. Aus dem Vergleich der numerischen Ergebnisse mit der bekannten Lösung erhofft man sich Einsicht in spezielle Eigenschaften des numerischen Verfahrens, die zur späteren Interpretation der Ergebnisse benötigt werden.

Die Strömung in Akkretionsscheiben zeichnet sich dadurch aus, daß die Kraft aus dem Zentralpotential dominierend ist, das Gas beschreibt Keplerbahnen um die Zentralmasse, hydrodynamische Kräfte bewirken eine vergleichsweise geringe Abweichung von diesen Bahnen. Durch die radial variierende Winkelgeschwindigkeit $\Omega_K(r) \propto r^{-3/2}$ unterliegt das Gas einer starken Scherung, die durch die Teilchen nur für kurze Zeit abgebildet werden kann. In allen Simulationen zu Akkretionsscheiben kommt daher das Restart-Verfahren sehr häufig zum Einsatz. Bei der Interpretation numerischer Eigenschaften muß FMM daher immer im Einheit mit dem Restartverfahren betrachtet werden.

In den folgenden Abschnitten werden mehrere Testrechnungen idealisierter Akkretionsscheiben vorgestellt. Die Vereinfachungen bestehen im wesentlichen in der Annahme einer polytropen Zustandsgleichung für das Gas und der damit verbundenen Gleichsetzung von Dissipation und radiativer Kühlung, die Energiegleichung muß in diesen Fällen nicht gelöst werden. Das erste Modell betrachtet ein Gas ohne Druck und mit konstanter Scherviskosität im Zentralpotential, spätere Modelle berücksichtigen nur Druckkräfte. Für Scheiben, die im Roche-Potential betrachtet werden, kann generell keine analytische Lösung zum Vergleich angegeben werden. Die Ergebnisse aus diesen Simulationen werden mit den Resultaten anderer numerischer Verfahren verglichen.

Für die vereinfachten Modelle kann teilweise aus den vorgestellten Gleichungen einer dünnen Scheibe eine analytische Lösung gewonnen werden, die zum Vergleich mit den numerischen Ergebnissen geeignet scheint. Strömungen in Akkretionsscheiben sind jedoch leider in großen Parameterbereichen instabil. Stabilitätsuntersuchungen von Scheiben sind zwar aktuelles Forschungsgebiet, verlässliche Ergebnisse liegen jedoch nur unzureichend vor. In der Praxis steht man dann vor dem Problem, daß die numerischen Ergebnisse zusätzliche Strukturen aufweisen, deren Interpretation uneindeutig ist. Instabilitäten können einerseits in dem kontinuierlichen Modell enthalten und von der Numerik reproduziert worden sein, andererseits kann die Instabilität auch nur von dem verwendeten numerischen Verfahren stammen, sie ist also nur im diskreten Modell enthalten. Umgekehrt ist es aber auch möglich,

daß das kontinuierliche Modell eine bekannte Instabilität aufweist, diese aber im diskreten nicht enthalten ist und damit nicht reproduziert werden kann. Dieser Themenkomplex wird bei der Interpretation der Ergebnisse in allen Simulationen ein wesentlicher Bestandteil sein. In diesem Zusammenhang erscheint der Vergleich verschiedener numerischer Verfahren sehr wichtig, Instabilitäten rein numerischer Natur werden wohl kaum von mehreren verschiedenen Verfahren gleich wiedergegeben. Der Lagrangesche Ansatz von FMM unterscheidet sich grundsätzlich von dem der Gitterverfahren oder Finite Volumen Verfahren, aus dem positiven wechselseitigen Vergleich der Ergebnisse dieser Verfahrenstypen kann deshalb glücklicherweise neues Vertrauen in die jeweiligen Ergebnisse gewonnen werden.

Nicht nur analytische Lösungen und zum Vergleich vorliegende numerische Ergebnisse können als Gütemaßstab für die Zuverlässigkeit von FMM in Akkretionsscheiben herangezogen werden. Instabilitäten wie Rossby-Wellen können im Labor experimentell nachgebildet werden, Spiralinstabilitäten in Zwerg-Novae-Ausbrüchen sind mit modernen astronomischen Methoden beobachtbar, letztere ist Hauptbestandteil in der Rechnung zu U Gem, dem abschließenden Beispiel dieser Arbeit.

Die ersten Rechnungen idealisierter Scheiben mit FMM wurden von Gauger (2000) vorgestellt. Es handelt sich um Rechnungen reiner Keplerströmungen, also eine Scheibe, in denen keine hydrodynamischen Kräfte auftreten, und um Scheiben in der zusätzlich nur eine konstante Scherviskosität wirkt. Diese Rechnungen wurden in einem sehr kleinen Winkelschnitt mit periodischen Randbedingungen durchgeführt, dadurch werden zwar die vollständigen zweidimensionalen Gleichungen gelöst, die fehlende Auflösung in Richtung des Periodenwinkels unterdrückte jedoch mögliche winkelabhängige Strukturen. Durch diese Rechnungen konnte erfolgreich bestätigt werden, daß Kepler'sche Strömungen mit und ohne Viskosität von FMM und dem Restartverfahren sehr gut reproduziert werden können. Mit dem folgenden Beispiel schließen wir nun direkt an diese Vorarbeiten an.

4.1 Der viskos zerfließende Stabring

In dieser ersten Testrechnung betrachten wir ein Gas in einem Zentralpotential, das neben den Gravitationskräften nur noch viskosen Scherkräften unterworfen sei. Dieses Beispiel ist eine beliebte Testrechnung für zahlreiche numerische Verfahren wie SPH oder Gittercodes, es wurde von Pringle (1981) vorgestellt. Die Vernachlässigung der Druckkräfte wird in der Astrophysik oft auch Staubnäherung genannt, Temperatur oder innere Energie des Gases werden unbedeutend, es müssen nur noch die Zustandsgrößen Geschwindigkeit und Dichte betrachtet werden.

Man betrachtet dabei ein Gasring der Gesamtmasse m an einem Radius r_0 , der einer konstanten kinematische Viskosität $\nu = \eta / \Sigma$ unterliegt, die anfängliche Flächendichte sei

$$\Sigma(r, t = 0) = \frac{m}{2\pi r_0} \delta(r - r_0), \quad (4.1)$$

mit der Dirac'schen Deltafunktion $\delta(r - r_0)$. Zur Lösung dieses Problems betrachtet man zunächst die vollen 3-dimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen, welche durch Näherungen,

die denen der Dünnen-Scheibe-Näherung gleichen, in einen Satz 2-dimensionaler Gleichungen für die Geschwindigkeiten und die vertikal integrierte Größe Σ überführt werden. In Polarkoordinaten kann der radiale Anteil dieser Gleichungen gelöst werden, mit der viskosen Zeit $\tau = 12\nu r_0^{-2}$ und dem normalisierten Radius $\bar{r} = r/r_0$ erhält man so die zeitliche Entwicklung der Flächendichte

$$\Sigma(\bar{r}, \tau) = \frac{m}{\pi r_0^2} \tau^{-1} \bar{r}^{-1/4} \exp\left[-\frac{1 + \bar{r}^2}{\tau}\right] I_{1/4}(2\bar{r}/\tau) \quad (4.2)$$

und die radiale Driftgeschwindigkeit

$$v_r(\bar{r}, \tau) = 6 \frac{\nu [\bar{r} I_{1/4}(2\bar{r}/\tau) - I_{-3/4}(2\bar{r}/\tau)]}{r_0 \tau I_{1/4}(2\bar{r}/\tau)} \quad (4.3)$$

wobei I_b die modifizierte Besselfunktion I zur Basis b ist. Diese Gleichungen gelten für genügend kleine radiale Driftgeschwindigkeiten $v_r \ll v_\phi$, sie stellen im Hinblick auf die Näherungen eine quasi-analytische Lösung des Problems dar und beschreiben das zeitliche Zerfließen des Staubringes, Masse wird nach innen akkretiert, Drehimpuls wird nach außen transportiert. Aus den Gleichungen ergibt sich auch, daß die Winkelgeschwindigkeit immer den Keplerschen Wert

$$v_\phi = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (4.4)$$

besitzt.

4.1.1 Prinzipielle Modellierungstechniken

In diesem Abschnitt wollen wir sehr ausführlich die allgemeine Vorgehensweise bei der Modellierung eines hydrodynamischen Problems mit der Methode der Finiten Massen anhand dieses Testbeispiels exemplarisch vorstellen. Die Angaben beziehen sich hauptsächlich auf das automatisierte Restartverfahren und sind vor allem für denjenigen praxisrelevant, der die vorgestellten Simulationen nachvollziehen möchte. Diese Techniken werden in allen folgenden Rechnungen eingesetzt, wir werden später nur noch die hiervon abweichende Vorgehensweise dokumentieren. Es sei darauf hingewiesen, daß eine Formulierung der Gleichungen für FMM noch nicht in Polarkoordinaten vorliegt, so daß alle Rechnungen in Kartesischen Koordinaten durchgeführt wurden.

Reduktion auf den 2-dimensionalen Fall

Alle in dieser Arbeit vorgestellten Rechnungen wurden mit der 2-dimensionalen Formulierung von FMM durchgeführt. Im Fall der Dünnen-Scheibe-Näherung wird das eigentliche 3-dimensionale Problem auf ein 2-dimensionales reduziert, das mit FMM gelöst wird. In der Dünnen-Scheibe-Näherung betrachtet man Größen, die über die z -Komponente integriert werden. Beispielsweise von Speith (1998) wird gezeigt, daß die über die z -Komponente integrierten Navier-Stokes-Gleichungen Formen besitzen, die den Gleichungen in drei Dimensionen entsprechen, wenn dort die Zustandsgrößen wie etwa Dichte und Druck durch ihre

integrierten Pendanten Flächendichte und integrierter Druck ersetzt werden. So werden wir die in der 2-dimensionalen Version von FMM dargestellte Dichte als Flächendichte Σ interpretieren, für alle anderen Größen gilt dies entsprechend. Bei der Integration des viskosen Spannungstensors \mathbf{T} über z fällt jedoch auf, daß der Faktor $1/d$ seine 3-dimensionale Form $1/3$ beibehält, der erste Term von \mathbf{T} ist damit nicht mehr spurfrei. Eine vorhandene Scherviskosität $\nu > 0$ in diesen Gleichungen erzeugt dadurch einen Anteil an Volumenviskosität, also auch dann, wenn deren Koeffizient $\zeta = 0$ ist. Die Anpassung der 2-dimensionalen Formulierung von FMM an diese Tatsache erfolgt nun einfach dadurch, daß für den Koeffizient ζ ein entsprechender Wert eingesetzt wird.

Generierung einer Startkonfiguration

Die Generierung der Startkonfiguration der Teilchen erfolgt analog dem Restart-Verfahren. Anstatt die Feldgrößen zu benutzen, die von den alten Teilchen dargestellt werden, benutzt man analytisch vorgegebene Terme. In dem vorliegenden Fall des viskos zerfließenden Staubrings benutzt man jedoch nicht die Delta-Distribution der Oberflächendichte, sondern die näherungsweise analytische Lösung zu einem späteren Zeitpunkt $\tau = 0.016$. Bei der Erstellung eines neuen Satzes an Teilchen beginnt man mit deren Positionen.

Die Anordnung der Teilchen ist prinzipiell unabhängig von dem zu betrachtenden Problem. In allen Rechnungen sind wir an einer gleichen Auflösung in x und y -Richtung interessiert, die Gesamtzahl der Teilchen wird der verfügbaren Rechenzeit angepasst, im Idealfall wählt man eine Teilchenzahl, die der gewünschten Auflösung entspricht. In unserem ersten Beispiel legen wir die Teilchenmittelpunkte \mathbf{q}_i auf ein äquidistantes, kartesisches Gitter der Auflösung $n = 421$, die Teilchengrößen \mathbf{H}_i ergeben sich aus dem von der Ansatzfunktion ψ vorgegebenen Überlappungsgrad, die Anfangsteilchen sind quadratisch, also $\mathbf{H}_{i,mn} = g \cdot \delta_{mn}$ mit der Teilchenradius g . Wir wollen das eigentliche Simulationsgebiet auf einen Kreisring mit den Radien r_1, r_2 beschränken, es werden dazu nachträglich alle Teilchen entfernt, deren Mittelpunkte außerhalb des Kreisrings liegen. Sind die Positionen und Teilchenradien festgelegt, werden mit dem Restartverfahren die Teilchengrößen m_i, S_i, \mathbf{q}'_i und \mathbf{H}'_i bestimmt. Nachträglich werden nun ungeeignete Teilchen entfernt, dies können beispielsweise Teilchen negativer Masse sein, die aus der Quasiinterpolation der Dichte stammen, in der auch negative Gewichte benutzt werden. Es erscheint gleichzeitig auch praktikabel, sehr leichte Teilchen zu entfernen, da diese, sofern sie mit weit schwereren Teilchen überlappen, durch hydrodynamische Kräfte sehr großen Beschleunigungen unterworfen sind. Wir entfernen daher alle Teilchen, an deren Mittelpunkt eine Dichte ρ_{\min} unterschritten wird, diese Grenzdichte wird so gewählt, daß im Gesamten Simulationsgebiet ein maximaler Dichtekontrast in der Größenordnung $1 : 10^4 - 10^6$ erreicht wird. Dieser Dichtekontrast ist hoch genug für die meisten Anwendungen und noch niedrig genug, um zu stark beschleunigte Randteilchen zu vermeiden. Über die Grenzdichte ρ_{\min} kann auch ein unnatürliches Anwachsen des Simulationsgebiets durch die zahlreich auszuführenden Restarts verhindert werden.

Ob die Dichte, aus der die neuen Teilchenmassen hervorgehen, zuerst mittels des Glättungsverfahrens behandelt wird, hängt vom betrachteten Beispiel ab. Im Fall des viskos zerfließenden Staubrings spielt die Glättung eine zentrale Rolle. Im allgemeinen Fall erweisen sich drei nacheinander ausgeführte Glättungsschritte $n_{SM} = 3$ als geeignet, die Gitterweite, auf dem

der Glättungskern angewendet wird, wird immer in Einheiten des Teilchenradius angegeben und liegt in der Größenordnung $g_{SM} = 0.1$.

Wir haben bereits beschreiben, wie mittels eines Least-Square-Verfahrens die Teilchengeschwindigkeiten bestimmt werden. Wir verwenden für das benötigte Gitter eine Auflösung von $n_{LS} = 17$ Punkten je Raumdimension innerhalb eines Teilchens. Höhere Auflösungen wurden ebenfalls getestet, ein wesentlicher Einfluß dieses Parameters konnte jedoch nicht festgestellt werden. Bei Randteilchen ist zu beachten, daß möglicherweise nicht an allen Punkten des Gitters eine Geschwindigkeit aus den alten Teilchen bestimmt werden kann, da diese Raumgebiete nicht von Masse erfüllt waren. Das Least-Square-Verfahren kann aber auch mit einem reduzierten Gitter angewandt werden, Punkte, an denen keine Geschwindigkeit bestimmt werden kann, werden einfach ausgelassen, dadurch ändert sich die Dimension des diskreten Least-Square-Operators. Um die Dimension genügend groß zu halten und um eine vernünftige Geschwindigkeitsapproximation zu erreichen, wird gefordert, daß alle Gitterpunkten innerhalb des halben Teilchenradius ($r_{LS} = 0.5$) mit Masse erfüllt sein müssen. Statt des halben Teilchenradius haben wir auch andere Werte wie z.B. $r_{LS} = 0.9$ getestet. Dieser Parameter eignet sich ebenfalls, das Wachstum des Simulationsgebiets während der Restarts zu beeinflussen, der angegebene Wert 0.9 führte jedoch zu einer unnatürlichen, fraktalen Randstruktur. In der algorithmischen Umsetzung ist zu beachten, daß die von dem Least-Square-Verfahren benötigte QR-Zerlegung für jedes Randteilchen neu berechnet werden muß.

In diesem Beispiel haben wir uns schon vorab auf einen bestimmten Simulationsbereich geeinigt, ausgehend von der näherungsweise analytischen Lösung konnten wir uns auf den Bereich $0.5 < r_0 < 1.5$ beschränken. In allgemeinen Fällen, in denen die zeitliche Entwicklung des Fluids unbestimmt ist, wird man natürlicherweise die Generierung der Anfangsverteilung allein aus der Lage der alten Teilchen bestimmen müssen. Generell ist es dann auch möglich, bei jedem Restart die Auflösung, also die Teilchendichte und somit deren Anzahl zu verändern.

Auswahl des Restartintervalls

Ab welchem Zeitpunkt ein Restart notwendig wird, hängt von der Stärke der Deformation der Teilchen ab. In [Gauger \(2000\)](#) konnte gezeigt werden, daß auf Keplerschen Bahnen bewegte Teilchen nach einen Umlauf so deformiert sind, daß ein Restart sinnvoll wird. In der Praxis wurde festgestellt, daß ein früherer Restart von weniger deformierten Teilchen bessere Ergebnisse liefert. Das Intervall wird so gewählt, daß nach 0.25 Umläufen des innersten Teilchens ein Restart vorgenommen wird. In unserem Beispiel, das wir in Solaren Einheiten rechnen, also $M = 1$ und $r_0 = 1$, beträgt die Keplersche Umlaufzeit bei $r = r_0$ ca. 10 000 s. Das Restartintervall beträgt nun $t_{RS} = 1000$ s, ein Teilchen bei $r = 0.5$ beschreibt dann etwa 0.25 Umläufe. Möchte man in bestimmten Fällen den inneren Simulationsradius verkleinern, etwa bis $r_{\min} = 0.3$ ist jedoch hauptsächlich an dem Ergebnis bei $r = r_0$ interessiert, so kann das Restartintervall beibehalten werden.

4.1.2 Ergebnisse

Als Anfangsverteilung benutzen wir die näherungsweise analytische Lösung zum Zeitpunkt $\tau = 0.016$, sie ist in den Schaubildern als gepunktete Linie eingetragen. Die Gesamtmasse des Rings beträgt $m = 10^{-10}$. Die kinematische Viskosität beträgt in Solaren Einheiten $\nu = 3 \cdot 10^{-9}$ oder $\nu = 3 \cdot 10^{-8}$. Dieser und alle anderen variierenden Parameter sind im folgenden tabellarisch aufgeführt. Der im Verhältnis 1:10 variierende Parameter ν bedeutet, daß dieselbe viskose Entwicklung $\Sigma(\nu, \tau)$ eine im selben Verhältnis variierende Anzahl an Bahnläufen benötigt. Für diese Rechnungen wurde der Integrator DOPRI und die 5-Punkt-Gauß-Quadraturformel benutzt.

Für die Graphen, welche die radiale Abhängigkeit der Dichte und Geschwindigkeit zeigen, wurden die Größen nur auf der x -Achse ausgewertet. Dies bedeutet, daß nur der geringe Anteil der Teilchen, der die x -Achse schneidet, an der Auswertung beteiligt ist, es erfolgt also keine Mittelung über den Azimutwinkel ϕ . Die Größen wurden auf ca. 500 äquidistant angeordneten Punkten auf der x -Achse ausgewertet, diese Punkte fallen in der Regel nicht mit den Mittelpunkten der Teilchen zusammen. Zur Auswertung wurden die Gleichungen 2.13 und 2.21 benutzt.

Die erste Simulation wurden mit folgenden Parametern durchgeführt:

1)	n	ν	$r_{\min, \max}$	t_{RS}	n_{LS}	r_{LS}	n_{SM}	δ_{SM}
	517	$3 \cdot 10^{-8}$	0.57 – 1.43	1000 s	17	0.4	4	0.1

Bei der gewählten Auflösung sind ca. 124 000 Teilchen an der Simulation beteiligt, die radiale Auflösung auf der x und y -Achse beträgt bis zu 150 Teilchen, in diagonalen Richtung um den Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ weniger.

Im Ergebnis dieser ersten Simulation zeigen sich sehr starke Oszillationen im Dichteprofil. Diese Oszillationen sind bereits nach 50 000 s sichtbar, der relative Fehler beträgt zu diesem Zeitpunkt noch weniger als ein Prozent, danach setzt ein starkes Wachstum dieses Fehlers ein. Die Oszillationen besitzen ein fast perfektes axialsymmetrisches Profil, die Abweichungen von der Axialsymmetrie liegen in der Größenordnung, in der auch Abweichungen in der Approximation aufgrund verdrehter Teilchen zu beobachten sind. Die Oszillationen sind auch in den Profilen der Geschwindigkeit $v_\phi(r)$ und $v_r(r)$ mit gleicher Ortsfrequenz zu sehen, auch sie sind weitgehend axialsymmetrisch. Die deutliche Axialsymmetrie des Fehlers ist erstaunlich, da die Anfangsanordnung der Teilchen auf einem uniformen kartesischen Gitter diese Symmetrie nicht besitzt, die tatsächlich enthaltene 4-fach Symmetrie wird im Ergebnis nicht sichtbar. Man beachte, daß die radiale Teilchenauflösung bei verschiedenen Winkeln um den Faktor $\sqrt{2}$ variiert, gleichzeitig liegt die Periodenlänge der Oszillationen auch weit über dem mittleren Teilchenabstand. Man kann nun mit einiger Sicherheit ausschließen, daß die Oszillationen ein von der Teilchenauflösung abhängiger numerischer Fehler ist.

Wir führen nun eine Parameterstudie durch, um deren Einflüsse auf den Fehler und das Ergebnis insgesamt zu studieren. Zuerst testen wir zwei verschiedene Auflösungen bei ver-

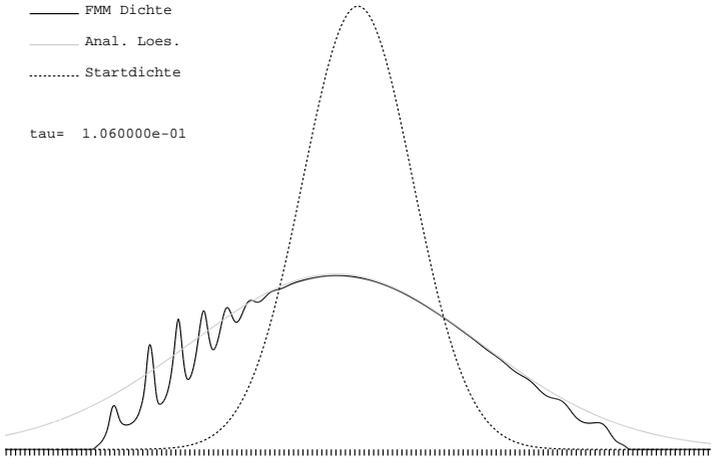


Abbildung 4.1: Oszillierende Dichte nach 250 000 s Simulationszeit, dies entspricht ca. 25 Keplerbahnen bei $r = r_0$. Auf der x -Achse ist die Teilchenauflösung mit kurzen vertikalen Linien angedeutet.

minderter Viskosität.

	n	ν	$r_{\min, \max}$	t_{RS}	n_{LS}	r_{LS}	n_{SM}	g_{SM}
2a)	467	$3 \cdot 10^{-9}$	0.6 – 1.4	1000 s	11	0.4	1	0.05
2b)	311	$3 \cdot 10^{-9}$	0.6 – 1.4	1000 s	11	0.8	1	0.05
2c)	467	$3 \cdot 10^{-9}$	0.6 – 1.4	1000 s	11	0.9	4	0.1

Auch in diesen Simulationen mit einer 10-fach kleineren Viskosität ν entwickelten sich die beschriebenen Oszillationen mit gleicher Ortsfrequenz wie bei Verwendung der Parameter in Rechnung 1), diese wurde auch nicht durch die veränderte Teilchenauflösung beeinflusst. Das Wachstum des Fehlers scheint dabei an die viskose Zeitskala geknüpft zu sein, er entwickelt sich also im Verhältnis zu der Anzahl an Keplerumläufen und Anzahl der Restarts um den Faktor 10 langsamer. Durch die auf der viskosen Zeitskala erhöhte Restarthäufigkeit erhöht sich auch der Einfluß der Dichteglättung, während die Parameter in 2a,b) noch zufriedenstellende Genauigkeit lieferten, zeigte sich in 2c) eine Abflachung des Dichteprofiles. Die stärkere Glättung konnte jedoch das Einsetzen der Oszillationen nur unmerklich verzögern. Das Leastsquare-Verfahren für die Geschwindigkeiten lieferte auf dem Gitter mit 11×11 Punkten eine ausreichende Genauigkeit, der Parameter $r_{LS} = 0.9$ führte jedoch zu einer unnatürlichen Verkleinerung des Simulationsgebiets.

In den folgenden Rechnungen testen wir eine feineres Gitter für das Leastsquare-Verfahren der Geschwindigkeiten, die Glättung auf einem größeren Gitter und eine neue Formel für die

Quasiinterpolation.

	n	ν	$r_{\min, \max}$	t_{RS}	n_{LS}	r_{LS}	n_{SM}	g_{SM}
3a, b, c)	467	$3 \cdot 10^{-8}$	0.55 – 1.45	1000 s	17	0.5	4	0.15

In der Rechnung 3c) wurden für die Quasiinterpolation neue Positionen und Gewichte getestet, die in Gauger (2000) beschrieben sind, die Gitterweite ist dabei verdoppelt. Gegenüber den Rechnungen 3a,b) mit der bereits angegebenen Formel konnte jedoch kein Einfluß auf das Ergebnis ermittelt werden. In den Rechnungen 3b,c) wurde das Anfangsgitter bei jedem Restart um einen jeweils neuen zufälligen Betrag in x und y -Richtung verschoben, die Verschiebung lag im Bereich eines Teilchenradius. Nach der zufälligen Verschiebung wurden die Teilchengrößen mit dem Restart-Verfahren ermittelt, prinzipiell ergibt sich damit keine Veränderung der Approximation der Feldgrößen, wir haben damit jedoch die wiederkehrende Korrelation der Positionen von alten und neuen Teilchen bei jedem Restart gebrochen, ein dadurch verursachter systematischer Fehler kann somit ausgeschlossen werden. Diese Vorgehen brachte jedoch hinsichtlich des oszillierenden Fehlers keinen Unterschied. Ebenfalls keinen Unterschied brachten die veränderten Gitter für das Leastsquare-Verfahren und die Dichteglättung. Es ist zwar ersichtlich, daß eine stärkere Glättung insgesamt eine etwas niedrigere Amplitude in der Oszillation des Fehlers bewirkt, der Fehler dadurch aber auch global größer wird, so daß insgesamt keine Verbesserung erzielt wurde.

In weiteren Rechnungen vergrößern wir nun den Simulationsbereich und testen ein verändertes Restartintervall.

	n	ν	$r_{\min, \max}$	t_{RS}	n_{LS}	r_{LS}	n_{SM}	g_{SM}
4a)	421	$3 \cdot 10^{-8}$	0.5 – 1.5	1000 s	13	0.5	4	0.1
4b)	421	$3 \cdot 10^{-8}$	0.45 – 1.55	1000 s	13	0.5	3	0.1
4c)	421	$3 \cdot 10^{-8}$	0.45 – 1.55	500 s	13	0.5	3	0.1

Die Vergrößerung des Simulationsbereichs vermindert naturgemäß den Fehler am Rand, im Innenbereich, also nahe $r = r_0$ ergibt sich jedoch keine Veränderung. Die verdoppelte Restartfrequenz, hier nun bezüglich echter und viskoser Zeitskala, vergrößert den Fehler deutlich. Der Zeitpunkt, an dem der Fehler anfängt stark zu wachsen sowie die Oszillationslänge bleiben davon unberührt, lediglich die Amplitude ist vergrößert. Der Faktor, um den die Amplitude anwächst, ist im Innenbereich deutlich größer, während am Rand kaum ein Anwachsen festzustellen ist.

Das stark oszillatorische Verhalten des Fehlers leitet zu dem Versuch, diesen durch geeignete Glättungsverfahren zu beseitigen. In den folgenden 5 Rechnungen testen wir nochmals ein größeres Gitter für die Glättung und vergleichen die Ergebnisse mit Rechnungen ohne das Glättungsverfahren mit verschiedenen Viskositäten. In der Rechnung 5b) haben wir zusätzlich in der Ausgangssituation $v_r = 0$ gesetzt, um einen möglichen Einfluß der näherungsweise analytischen Lösung in den Anfangsdaten zu studieren. In der Rechnung 5d) wurde bis zum

Zeitpunkt 50 000 s kein Glättungsverfahren eingesetzt. Ab diesem Zeitpunkt beginnt der Fehler stark zu wachsen, weitere 50 000 s wurden dann mit starker Glättung gerechnet.

	n	ν	$r_{\min,\max}$	t_{RS}	n_{LS}	r_{LS}	n_{SM}	g_{SM}
5a)	421	$3 \cdot 10^{-8}$	0.5 – 1.5	1000 s	13	0.5	1	0.5
5b)	421	$3 \cdot 10^{-8}$	0.5 – 1.5	1000 s	13	0.5	2	0.3
5c)	421	$3 \cdot 10^{-8}$	0.5 – 1.5	1000 s	13	0.5	0	
5d)	421	$3 \cdot 10^{-8}$	0.5 – 1.5	1000 s	13	0.5	0/2	0.5
5e)	421	$3 \cdot 10^{-9}$	0.5 – 1.5	1000 s	13	0.5	0	

Auch in dieser Parameterstudie beobachten wir, daß bei genügend starker Glättung wie in 5a) und 5d) der oszillatorische Verlauf der Dichte fast vollständig unterdrückt werden kann, der kumulierende Fehler durch die Glättung selbst beeinträchtigt jedoch das Ergebnis sehr stark. Die Rechnungen ohne Glättung brachten keine Verbesserung gegenüber entsprechenden Rechnungen mit sehr geringer Glättung, wie etwa in 2a). Das Einsetzen von $v_r = 0$ bewirkte eine zusätzliche globale Verschiebung des Dichteprofiles und damit eine Zunahme des Fehlers.

Aus den bisherigen Parameterstudien geht hervor, daß das Glättungsverfahren den beobachteten Fehler nicht erzeugt, sondern bestenfalls die Oszillationen dämpft. Verursacht das Restartverfahren den Fehler, so ist dieser unabhängig von der Lage des Anfangsgitters, der Teilchenauflösung und der Formel für die Quasiinterpolation und entwickelt sich nahezu gleich auf der viskosen Zeitskala für verschiedene Viskositäten, die Restartfrequenz beeinflusst die charakteristische zeitliche Entwicklung nur minimal. Wir beobachteten, daß bis zu dem Zeitpunkt $t = 50\,000$ s die simulierten Ergebnisse sehr gut mit der quasi-analytischen Lösung übereinstimmen, danach wächst der Fehler stark an, überschreitet jedoch nicht die in der Abb. 4.1 gezeigte Situation. Möglicherweise ist das gewählte Problem sehr instabil und kleine numerische Fehler führen nach längerer Zeit zu großen Abweichungen.

Das Restartverfahren allein führt zu keinen Fehlern dieser Art, man kann als Test hierzu das Restartverfahren mehrmals hintereinander auf die Ausgangssituation anwenden, das entspricht einer Simulation mit $t_{RS} = 0$. Ein axialsymmetrischer Fehler in der Dichteapproximation könnte etwa dann zustande kommen, wenn der Approximationsfehler von dem Dichteprofil abhängt, also von $\partial_r \Sigma$ oder $\partial_{rr} \Sigma$, was jedoch nicht beobachtet wird. Der kumulierte Fehler des Restarts allein zeigt nur eine Tendenz, den konvexen Verlauf des radialen Dichteprofiles bei $r = r_0$ zu glätten, der Effekt ist jedoch um mindestens eine Größenordnung kleiner als der beobachtete Fehler. Wir schließen daraus, daß unser numerisches Modell sehr wahrscheinlich dynamisch instabil ist. Mit der folgenden Rechnung zeigen wir, daß ein genügend glatter Verlauf der kinematischen Viskosität $\nu(\mathbf{x}, t)$ den beobachteten oszillierenden Fehler verhindern kann. Wir wählen sinnvolle Parameter ohne Glättung

	n	ν	$r_{\min,\max}$	t_{RS}	n_{LS}	r_{LS}	n_{SM}	g_{SM}
6)	421	$3 \cdot 10^{-8}$	0.5 – 1.5	1000 s	17	0.5	0	

und setzen für die Berechnung des viskosen Parameters die bekannte quasi-analytische Lösung der Flächendichte ein $\nu = \eta \Sigma_{\text{an}}$ anstatt wie bisher die simulierte Dichte Σ . Das Ergebnis zeigt keinen oszillierenden Fehler mehr, da sich jedoch durch verständene Approximationsfehler die Größen Σ_{an} und Σ voneinander weg entwickeln, entfernt sich auch das Simulationsergebnis langsam von der Referenzlösung. Mit dieser Erkenntnis entwickeln wir nun eine Vorgehensweise, mit dem das Beispiel des viskos zerfließenden Staubrings zufriedenstellend gelöst werden kann. Bei jedem Restart erzeugen wir ohne Glättung ($n_{SM} = 0$) die neue Flächendichte aus den alten, verformten Teilchen $\Sigma_i \rightarrow \Sigma_{i+1}$, gleichzeitig erzeugen wir eine stark geglättete Dichte $\Sigma_i \rightarrow \Sigma_{G,i+1}$ die wir ausschließlich zur Berechnung der kinematischen Viskosität $\nu = \eta \Sigma_G$ benutzen, die Koeffizienten hier für sind $n_{SM} = 3$ und $g_{SM} = 0.3333$. Da die geglättete Dichte Σ_G nach jedem Restart aus der ungeglätteten hervorgeht, wird ein kumulierender Fehler verhindert, beide Dichten unterscheiden sich nur wenig voneinander, es gilt

$$\frac{|\Sigma - \Sigma_G|}{2(\Sigma + \Sigma_G)} < 0.001$$

im Simulationsgebiet mit genügendem Abstand zum Rand, die übrigen Parameter entsprechen denen in 6). Das radiale Dichteprofil zeigt auch in dieser Rechnung keine Abhängigkeit vom Azimutwinkel ϕ .

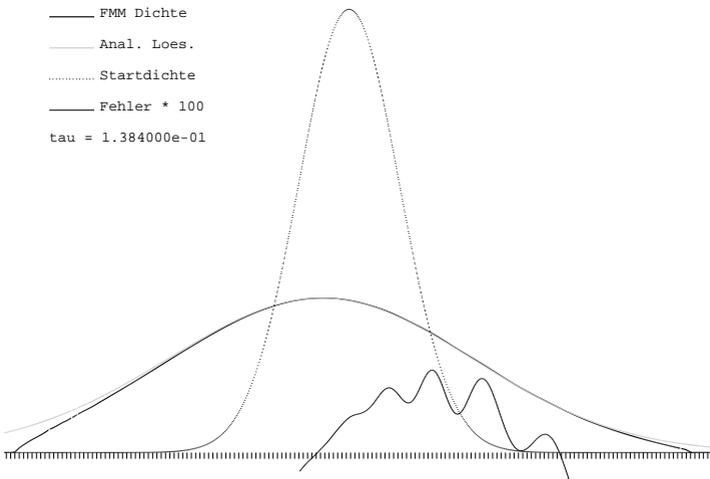


Abbildung 4.2: Flächendichte $\Sigma(y = 0)$ auf der positiven x -Achse nach 350 000 s Simulationszeit, dies entspricht ca. 35 Keplerbahnen bei $r = r_0$. Auf der x -Achse ist die Teilchenauflösung mit kurzen Linien markiert. Der Fehler ist die Differenz aus der quasi-analytischen Lösung und der simulierten Flächendichte, hier mit dem Faktor 100 vergrößert. Der anwachsende Fehler am Rand rührt wesentlich nur von der Begrenzung des Rechengebiets her.

Mit diesem Ergebnis beenden wir die Untersuchungen zu diesem Testproblem, durch das Parameterstudium haben wir den prinzipiellen Umgang mit FMM in der Praxis gelernt. Eine zusätzliche wichtige Erkenntnis ist jedoch auch, daß unser Testproblem des viskos zerfließenden Staubrings nicht als Testproblem geeignet ist. Neuere Stabilitätsanalysen zeigen, daß das Modellproblem instabil gegenüber einer spiralförmigen Störung mit der Modenzahl $m = 1$ ist. Bereits [Ott \(1995\)](#) und [Speith \(1998\)](#) haben mit der SPH-Methode diese Problemstellung untersucht und haben ebenfalls Instabilitäten in den numerischen Ergebnissen entdeckt, die Ergebnisse zeigten Spiralstrukturen mit dieser Modenzahl. Es bleibt vorläufig ungeklärt, warum in der Simulation mit FMM die spiralförmige Instabilität nicht auftritt, sondern ein axialsymmetrischer Fehler beobachtet wird. Mit der Interpretation unserer Ergebnisse schließen wir nun an die Diskussion an, die am Anfang dieses Kapitels über Instabilitäten geführt wurde.

4.2 Druckdominierte Scheiben

In realen astrophysikalischen Akkretionsscheiben können die Druckkräfte oft nicht wie im letzten Beispiel vernachlässigt werden. Innerhalb der Näherung für dünne Scheiben sind die stärksten Kräfte zwar die Gravitationskräfte, an zweiter Stelle kann der thermodynamische Druck die dominante Kraft sein, die zu einer von der Keplerbewegung abweichenden Struktur führt. In diesen Scheiben soll eine α -Viskosität explizit vernachlässigt werden. Wir erinnern uns, daß diese Viskosität keine Materialeigenschaft des Fluids in den Scheiben darstellt, sondern daß es sich um eine Modellierung der Turbulenz und deren Auswirkungen handelt. Diese Viskositätsform wurde dazu benutzt, die Dissipation und den Drehimpulstransport und damit schließlich die Akkretion zu erklären. Es stellt sich die berechnete Frage, welche anderen Prozesse ebenfalls in der Lage sind, einen bedeutenden Anteil zum Drehimpulstransport beizutragen. Für eine ausführliche Übersicht der in Frage kommenden Mechanismen verweisen wir auf Papaloizou & Lin (1995); Papaloizou & Pringle (1977). Wir beschränken uns zunächst auf nicht-magnetische Modelle, in denen die Scheibe einer Rossby-Wellen Instabilität unterliegt.

Zu solchen Scheiben liegen bereits Rechnungen mit Gitterverfahren vor (Li et al. 2001), diese Ergebnisse werden wir mit denen aus der Simulation mit FMM vergleichen. Der Sinn dieses Vorgehens wurde bereits diskutiert, das numerisch gewonnene Ergebnis eines physikalisch instabilen Modells sollte unabhängig vom numerischen Verfahren sein, um als physikalische Instabilität interpretiert werden zu können. Es wird dabei festgestellt, daß die verglichenen Ergebnisse hervorragend übereinstimmen, dies liefert eine gegenseitige Bestätigung und zusätzliche Sicherheit in der Interpretation numerischer Resultate.

Instabilitäten durch Rossby-Wellen in Akkretionsscheiben wurden in linearer Näherungen von Li et al. (2000) schon analytisch behandelt. Aus den selbstkonsistenten, hydrodynamischen Simulationen erhofft man sich herauszufinden, wie sich die Instabilität im nichtlinearen Fall entwickelt, oder speziell, ob die Instabilität zur Bildung großer, also über weite Teile der Scheibe ausgedehnte Wirbel führt. Das weitere Interesse gilt der genauen Struktur der Wirbel und der Frage, ob die Instabilität längere Zeit aufrechterhalten wird und ob die Wirbel selbst stabil sind.

Die Frage nach der Wirbelbildung hat astrophysikalisch elementare Bedeutung, zum einen gehören sie zu jenen Prozessen, die Drehimpulstransport bewerkstelligen können, zum anderen werden sie in protoplanetaren Scheiben als Keimzellen der Planetenentstehung gehandelt. Seit der Entdeckung der ersten extrasolaren Planeten ist die Theorie über Planetenentstehung in protoplanetaren Scheiben ein aktuelles und dringliches Forschungsthema.

In Arbeiten von Klahr & Bodenheimer (2000, 2001); Wolf & Klahr (2002) wird untersucht, ob eine barokline Instabilität in protoplanetaren Scheiben ebenfalls zu Wirbelbildung führen kann. Man kann zeigen, daß protoplanetare Scheiben einen negativen Entropiegradienten in radialer Richtung aufweisen müssen. In solchen Scheiben ist der Dichtegradient nicht mehr parallel zum Druckgradient, was zur Instabilität führen kann. In den durchgeführten Simulationen mit dem Gittercode TRAMP (Klahr et al. 1999) konnte aus einer baroklinen Scheibe ein Wirbel entstehen, in der Arbeit Wolf & Klahr (2002) wird dann gezeigt, daß solche Wirbel, ein Frühstadium der Planetenentstehung, mit dem geplanten Atacama Large Millimeter

Array (ALMA) möglicherweise tatsächlich beobachtet werden könnten. In einer der vorgestellten Rechnungen mit FMM wird eine barokline Scheibe untersucht.

4.2.1 Modellierung druckdominierter Scheiben

Für die in diesem Abschnitt vorgestellten Rechnungen müssen wir für geeignete Randbedingungen am inneren und äußeren Rand in radialer Richtung sorgen, denn die Beispiele gehen von einer anfangs konstanten Flächendichte Σ aus. In den Vergleichsrechnungen mit Gittercodes wird eine halboffene Randbedingung modelliert, in den Randzellen werden die thermodynamischen Größen konstant fortgesetzt, so daß dort kein Druckgradient auftritt. Die Geschwindigkeit wird aus der benachbarten innenliegenden Zelle kopiert, das Fluid kann das Simulationsgebiet verlassen, von außen kann jedoch keine Masse einströmen. Wir wollen versuchen, solche Randbedingungen mit FMM zu realisieren. Weiterhin soll nicht die gesamte Scheibe, sondern nur ein Winkelausschnitt davon gerechnet werden. Dies spart zum einen Rechenzeit, zum anderen kann so eine bestimmte Mode der Störung angeregt werden.

Das Teilchengitter

Um der Geometrie eines Winkelausschnitts Rechnung zu tragen, ordnen wir die Teilchen so an, daß sie in Polarkoordinaten einem uniformen Gitter entsprechen. Die Anfangssituation (die natürlich auch für jeden Restart gilt) ist in Abb. 4.3 dargestellt. Man erreicht somit eine konstante Winkelauflösung, der Bereich bei kleineren Radien, an dem die Scheibe schneller rotiert und die höhere Scherung aufweist, ist gleichzeitig höher aufgelöst. Mit der Teilchengröße in ϕ -Richtung wächst auch die Ausdehnung in radialer Richtung, so daß das Aspektverhältnis der Teilchen konstant ist.

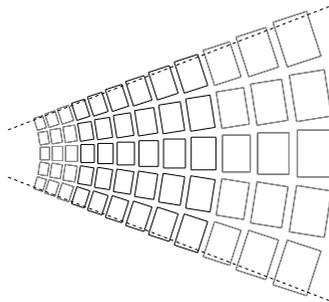


Abbildung 4.3: Schematische Darstellung einer $R - \phi$ Anordnung der Teilchen für den Winkel 45° mit der Auflösung 12×5 . Die gestrichelte Linie zeigt den Winkel, an dem periodische Randbedingungen gelten. Auf die grauen Teilchen wirken keine Druckkräfte. Die Größe der Teilchen ist um den Faktor 5 kleiner dargestellt, in Wirklichkeit überlappen sich die Teilchen entsprechend dem Grad, der aus der Ansatzfunktion hervorgeht.

Die Gitterverfahren aus den zitierten Arbeiten lösen das Problem prinzipiell in Polarkoordinaten. In unserem Fall ist zwar die Teilchenausrichtung der Symmetrie eines Winkelausschnitts angepaßt, die Simulation erfolgt jedoch in kartesischen Koordinaten, insbesondere

werden die Bewegungsgleichungen in kartesischen Koordinaten benutzt. Durch diese Teilchenanordnung kann über die periodischen Ränder hinweg eine genaue Approximation der thermodynamischen Größen erfolgen. Insgesamt muß jedoch gesagt werden, daß die Approximationseigenschaften, insbesondere bei der Quasiinterpolation, nur noch näherungsweise gelten. Durch die variierte Teilchengröße sich überlappenden Teilchen und durch die leichte Verdrehung können die Überlappingsbedingungen nicht mehr exakt erfüllt werden. Für eine weitere Diskussion hierzu verweisen wir auf [Gauger \(2000\)](#), dort wurde das Problem des viskos zerfließenden Staubrings mit dieser Gitteranordnung gelöst. Bei genügend hoher Teilchenaufösung ist das Verfahren hinreichend genau. Mit einer Auflösung von 200 Teilchen in radialer Richtung wurde die quasianalytische Lösung nach 50 Keplerumdrehungen und 500 Restarts noch mit einem relativen Fehler von ca. 1% reproduziert. In dieser Arbeit sind auch die Details zur Realisierung nicht paralleler, periodischer Ränder angegeben.

Halboffene Randbedingungen

Die Begriffsbezeichnung der halboffenen Randbedingungen ist hier willkürlich gewählt. Wir suchen nach Randbedingungen, die ein Ausfließen des Fluids aus dem Simulationsgebiet ermöglichen, jedoch nicht induzieren, gleichzeitig sollen an den Rändern keine Wellen reflektiert werden. Die Methode von Randzellen in Gitterverfahren gewährleistet nicht vollständig, daß keine Störungen am Rand reflektiert werden, daher die von uns gewählte Namensgebung.

Als erstes ist zu bemerken, daß mit FMM am Rand keine Sprungfunktion realisiert werden kann, das äußerste Teilchen wird am Gebietsrand eine Dichte und Entropiedichte entsprechend seiner Ansatzfunktion approximieren, dadurch zeigt der nichtverschwindende negative Druckgradient immer nach außen. Jede Teilchenanordnung, die nur ihren Druckkräften unterliegt, wird sich somit in das umgebende Vakuum ausdehnen. Um dies zu verhindern, werden die Druckkräfte für die äußersten Teilchen vernachlässigt. Entsprechend [Abb. 4.5](#) erzeugen wir also eine Bande von Teilchen, die keinen Druckkräften unterliegen. Am Innenrand setzen wir also $F_{1,2,3}^{(p)}, M_{1,2,3}^{(p)} = 0$, wobei die Indizierung eine Nummerierung in radialer Richtung ist und für alle Winkel gelten soll, am Außenrand der Scheibe wird jeweils entsprechend verfahren. Für die Teilchen mit 3bSplines als Ansatzfunktion und Überlappingsgrad 2 ist eine Bande von drei Teilchen notwendig. Das erste der Druckkraft unterliegende Teilchen erreicht in seiner Ausgangssituation den Mittelpunkt des Teilchens $i = 2$, das dritte Teilchen ist notwendig, um bis zu diesem Punkt eine konstante Funktion approximieren zu können. Wird auf diese Weise eine Anfangssituation mit verschwindendem Druckgradient im Innern realisiert, so wirkt auch auf die Teilchen mit den Indizes $i \geq 4$ keine Druckkraft. Die druckkraftlosen Randteilchen erhalten eine Keplersche Anfangsgeschwindigkeit, sie unterliegen den Gravitationskräften und werden somit auf Kepler'schen Bahnen mitbewegt. Es hat sich als geeignet erwiesen, daß auch die Randteilchen den Reibungskräften unterliegen, dadurch können sich Randteilchen und inneliegende, freie Simulationsteilchen gegenseitig beeinflussen. Dadurch ist in gewisser Weise eine Zwangsbedingung am Rand realisiert, sinnvoll gewählte Reibungskräfte sind jedoch schwach genug, so daß die freien Teilchen weit in den Rand eindringen können und auch eine genügend große Geschwindigkeitsdifferenz zu diesen einnehmen können. Zum letzteren sei gesagt, daß in allen erwarteten Strömungen in den Scheibenmodellen die Geschwindigkeit immer nahe der Keplergeschwindigkeit liegt.

Die thermodynamischen Größen werden wie gefordert konstant über den Rand fortgesetzt. Die Entwicklung der Dichte- und Entropiestrukturen der Scheibenmodelle erweist sich als langsam gegenüber dem Restartintervall. So genügt es, nur bei jedem Restart die Größen am Rand anzupassen. Die Größen der Randteilchen ergeben sich mit der Quasiinterpolation dadurch, daß die Dichte und Entropiedichte nicht an den Stützstellen des Quasiinterpolanten, sondern an einem in radialer Richtung verschobenen Ort, also etwa am Mittelpunkt des Teilchens $i = 4$ aus den alten Teilchen ausgewertet werden. Alternativ können auch einfach die Größen des Teilchens $i = 4$ auf die Randteilchen kopiert werden, unter Beachtung der Größendifferenz. Beispielsweise ergeben sich die Teilchenmassen aus

$$\det \mathbf{H}_4 \cdot m_{(1,2,3)} = \det \mathbf{H}_{(1,2,3)} \cdot m_4. \quad (4.5)$$

Erreicht also eine Dichtewelle den Rand und dringt in den Bereich der Randteilchen ein, so wird sie zunächst durch die Reibungskräfte leicht gedämpft, durch den aufgebauten Dichtewall nur schwach reflektiert, da sie alsbald beim nächsten Restart geglättet wird. Umgekehrt erfolgt kein Einfließen von Masse aus den Randteilchen bei Eintreffen einer Verdünnungswelle. Der Restartvorgang für die Geschwindigkeiten wird nicht modifiziert, es ist also nicht notwendig, den Randteilchen die analytisch bekannte Keplergeschwindigkeit aufzuzwingen, sie weicht aber auch dennoch kaum davon ab.

Anregung der Instabilität

Durch die Auswahl eines geeigneten Periodenwinkels kann eine Instabilität mit einer bestimmten Mode bevorzugt werden, im ersten Beispiel untersuchen wir Rossby-Wellen mit der Modenzahl 3 und wählen daher einen Periodenwinkel von $2\pi/3$. Um die Instabilität anzuregen wird auf die Dichtestruktur ein Rauschen mit der relativen Amplitude von 1% gegeben. Dazu wird die Masse jedes Teilchens mit einer Zufallszahl aus dem Intervall $[0.9775..1.0225]$ multipliziert. Die Intervallgrenzen leiten sich einfach aus der Teilchenüberlappung ab, jedes Teilchen besitzt an seinem Mittelpunkt (in zwei Dimensionen) einen Approximationsanteil von $4/9$. Durch die $r - \phi$ Anordnung der Teilchen und deren variierende Größen erhält das System ein Rauschanteil mit unterschiedlichen Ortsfrequenzen, dadurch sollen möglichst viele Instabilitätsmoden angeregt werden.

4.2.2 Instabilität einer homentrop gestörten Scheibe

Das Testbeispiel geht auf Arbeiten von [Lovelace et al. \(1999\)](#) zurück, in denen Rossbywellen-Instabilitäten in Keplerschen Akkretionsscheiben untersucht werden. Es wird gezeigt, daß ein lokales Maximum in der Entropiedichte zu Rossbywellen und spiralförmigen Schockwellen führen kann. Eine Störung der Entropie kann durch den beschriebenen Roche-Lobe-Overflow oder durch Gezeitenkräfte in einem Binärsystem in der Scheibe entstehen. In der Arbeit [Li et al. \(2000\)](#) werden diese Störungen in linearer Näherung analytisch untersucht und in [Li et al. \(2001\)](#) eine Simulation mit einem speziellen Gitterverfahren vorgestellt.

Das von uns ausgesuchte Beispiel entspricht der Bezeichnung T5 in [Li et al. \(2001\)](#). Man betrachtet eine Scheibe in dem Bereich $r_i = 2$ bis $r_a = 10$ mit einer konstanten

Hintergrund-Flächendichte Σ_0 und Temperatur T_0 , die in der Mitte bei $r_0 = 5$ eine in radialer Richtung homentrope, Gaußförmige Störung besitzt, es ist also $\Sigma(r) = \Sigma_0 \cdot B(r)$ und $P(r) = P_0[\Sigma(r)/\Sigma_0]^\gamma$ mit

$$B(r) = 1 + (A - 1) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r - r_0}{\Delta r} \right)^2 \right], \quad (4.6)$$

$A = 1.35$ und $\Delta r/r_0 = 0.05$. Das Beispiel kann in beliebigen Einheiten gerechnet werden, als einzigste Normierungsbedingung geht das Verhältnis aus Schallgeschwindigkeit und Keplergeschwindigkeit ein, es gilt

$$c_{s,0}^2 = \gamma P_0 / \Sigma_0 = \gamma T_0 = 0.01 v_\phi^2(r_0). \quad (4.7)$$

Wir benutzen die bereits vorgestellte Zustandsgleichung eines idealen Gases für diese Rechnung. Auftretende Dissipationen, im Teilchenmodell durch Reibungskräfte modelliert, erzeugen Entropie, die bei der Zeitintegration berücksichtigt wird. Auf die Teilchen wirken keine viskosen Kräfte, zur Raumintegration über die Teilchen benutzen wir die 5-Punkt Gaußformel. Die vorgestellte Sparse-Formel eignet sich nicht, da steile Druckgradienten auftreten werden, als Zeitintegrator wählen wir wieder DOPRI, das Restartverfahren arbeitet ohne das Glättungsverfahren und alle anderen Modellierungsmerkmale sind wie bereits geschildert ausgewählt.

Um die Keplerbewegung numerisch weniger steif zu machen, rechnen wir im mit $\Omega = \Omega_K(r_0)$ mitrotierenden Bezugssystem. Auf die Teilchen wirken also zusätzliche Flieh- und Corioliskräfte, Teilchen bei $r = r_0$ besitzen somit eine Anfangsgeschwindigkeit $v_\phi = 0$. Die Anfangsbedingungen für die Geschwindigkeiten lauten $v_r = 0$ und

$$\frac{v_\phi^2}{r} = \frac{1}{\Sigma} \frac{dP}{dr} + \frac{d\Phi}{dr}, \quad (4.8)$$

in das Gleichgewicht aus Keplergeschwindigkeit und Gravitationskraft wird zusätzlich der Druckgradient einbezogen, so daß sich die Ausgangssituation im Kräftegleichgewicht befindet. Die dadurch eingeführte Korrektur bewirkte eine Abweichung von der Keplergeschwindigkeit von weniger als 1%.

Wir interessieren uns für die Instabilität mit der Modenzahl 3 und wählen den Periodenwinkel $2\pi/3$, die Rechnung wurde mit verschiedenen Teilchenauflösungen durchgeführt, diese sind in $r - \phi$ -Richtung 75×131 , 95×135 und 150×261 .

Ergebnisse

Die anfängliche Störung der Scheibe entwickelt sich innerhalb den ersten fünf Umdrehungen (bei $r = r_0$ gemessen) recht langsam, danach setzt ein starkes Wachstum der Fluktuationsenergie ein, hierbei entwickeln sich die Wirbel. Das starke Wachstum ist nach etwa zehn Umdrehungen abgeschlossen.

Aus der Abbildung 4.5 kann man erkennen, daß die Fluktuationsenergie und die gemittelte radiale Geschwindigkeit bereits nach zehn Umdrehungen einen Sättigungspunkt erreichen,

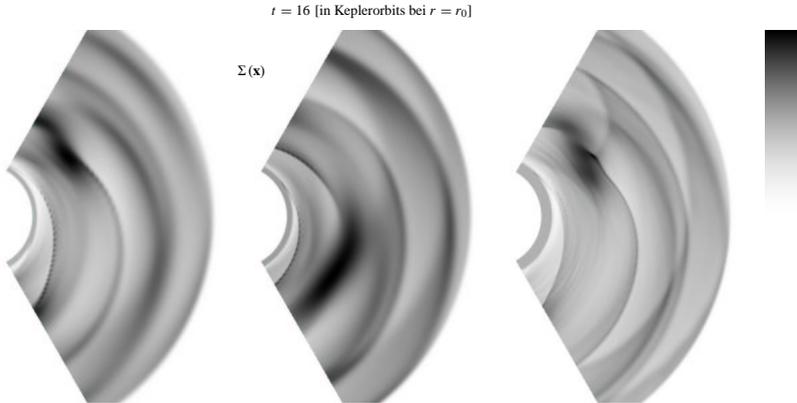


Abbildung 4.4: Flächendichte zu gleichen Zeiten bei verschiedener Auflösung, Teilchenzahl in r, ϕ -Richtung von links nach rechts 75×131 , 95×135 und 150×261 . Es fällt auf, daß bei steigender Auflösung immer mehr Details sichtbar werden, zusätzlich zu der Spirale der Mode $m = 3$ bilden sich Schockfronten aus.

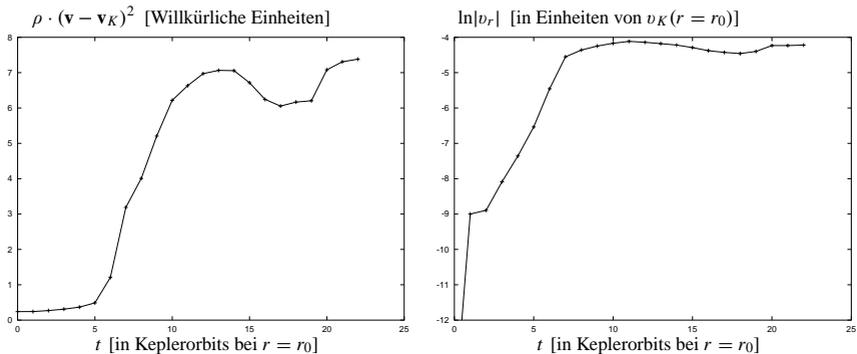


Abbildung 4.5: Entwicklung der Fluktuationsenergie (links) und der Radialgeschwindigkeit (rechts). Beide Werte wurden über 301 äquidistante Radien und 351 äquidistante Winkel gemittelt. Beide Auswertungen erfolgten aus den Rechnungen mit 95×135 Teilchen.

die Wirbel sind in diesem Stadium bereits voll ausgebildet. Die Dichtensammlung in dem Wirbel sowie dessen mittlere Rotationsgeschwindigkeit wachsen jedoch weiter an.

Nach 14 Umdrehungen (Abb. 4.6) enthält die gesamte Scheibe neben den Wirbeln auch Rossby-Wellen und Schockwellen, die alle Drehimpuls transportieren. Aus dem Vergleich der Rechnungen mit verschiedenen Auflösungen (s. Abb. 4.4) erkennt man, daß mit steigender Auflösung immer mehr Details sichtbar werden. Es hat sich also nicht nur eine Rossby-Welle mit der Modenzahl 3 entwickelt, zusätzlich entstehen Schockwellen, sowie Überlagerungen all dieser Effekte. Die Interpretation der Ergebnisse liefert nicht eindeutig, welche Strukturen durch eine leichte Reflexion von Wellen am Rand entstehen, möglicherweise sind also

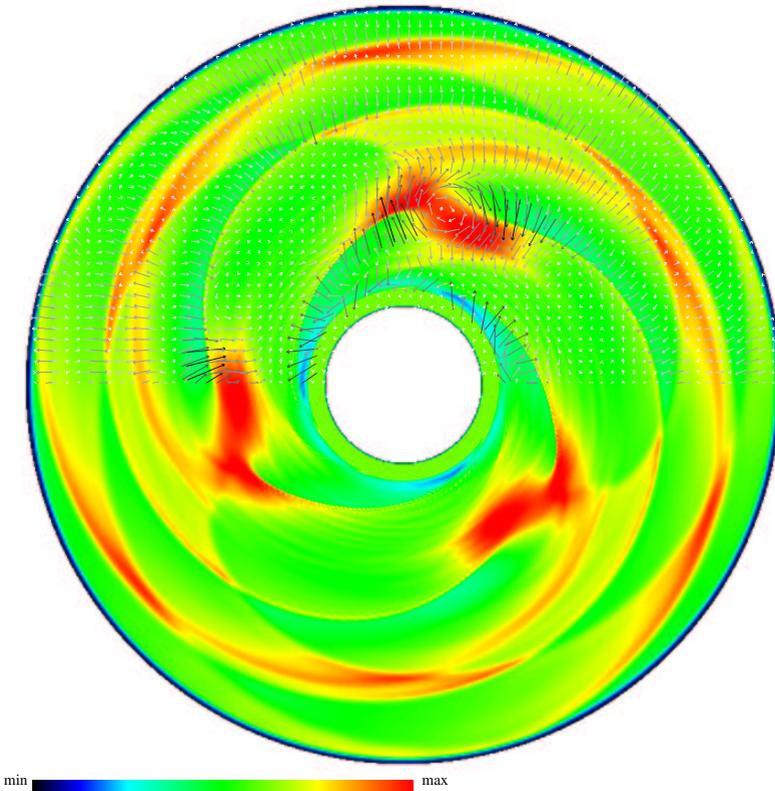


Abbildung 4.6: Aus der Simulation mit 150×261 Teilchen nach 14 Keplerumdrehungen bei $r = r_0$. Farbkodiert ist die Flächendichte Σ , für die Abbildung wurde der simulierte Winkelausschnitt von $2\pi/3$ drei mal aneinandergesetzt. In der oberen Hälfte ist die Abweichung zur Keplergeschwindigkeit $\mathbf{v} - \mathbf{v}_K$ mit Pfeilen dargestellt. Die Scheibe rotiert gegen den Uhrzeigersinn, der entstandene Wirbel rotiert also gegenläufig. Die höchste relative Geschwindigkeit (schwarze Pfeile) beträgt $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_K| = 0.11 \cdot |\mathbf{v}_K|(r = r_0)$ und erreicht fast die lokale Schallgeschwindigkeit.

Überlagerungen der reflektierten Welle mit ihrem Original zu erkennen. Das in Abbildung 4.6 zu sehende Strömungsbild stimmt hervorragend mit den Ergebnissen von Li et al. (2001) überein. Zum Vergleich mit diesen Ergebnissen müssen noch die Unterschiede der beiden Rechnungen berücksichtigt werden. In der Arbeit von Li et al. (2001) wird ein spezielles Gitterverfahren in Polarkoordinaten benutzt und es wird der volle Winkel der Scheibe (2π) berechnet. Aus der Arbeit Li et al. (2000) sind die möglichen Störungen aus der linearen Theorie bekannt, die Störung mit der Mode 3 wird direkt angeregt. Dadurch kann erreicht werden, daß diese angeregte Störung sich in den ersten zwei Umdrehungen nahezu mit der Wachstumsrate entwickelt, die aus der linearen Theorie bekannt ist. In unseren Rechnungen

haben wir durch zufällig verteilte, kleine Dichtefluktuationen viele der möglichen Störungen angeregt, die zeitliche Entwicklung zu Beginn der Simulation weicht daher auch etwas von den Vergleichsrechnungen ab.

Um den entscheidenden Einfluß der Wirbel zum Drehimpulstransport zu bestimmen, definieren wir analog zur Gleichung 15 in Li et al. (2001) den Parameter α der turbulent erzeugten Viskosität durch

$$\alpha(r, \phi) = \Sigma(r, \phi) P^{-1}(r, \phi) v_r(r, \phi) [v_\phi(r, \phi) - \bar{v}_\phi(r, t)], \quad (4.9)$$

$\bar{v}_\phi(r, t)$ ist die azimuthal gemittelte 'Hintergrundgeschwindigkeit'.

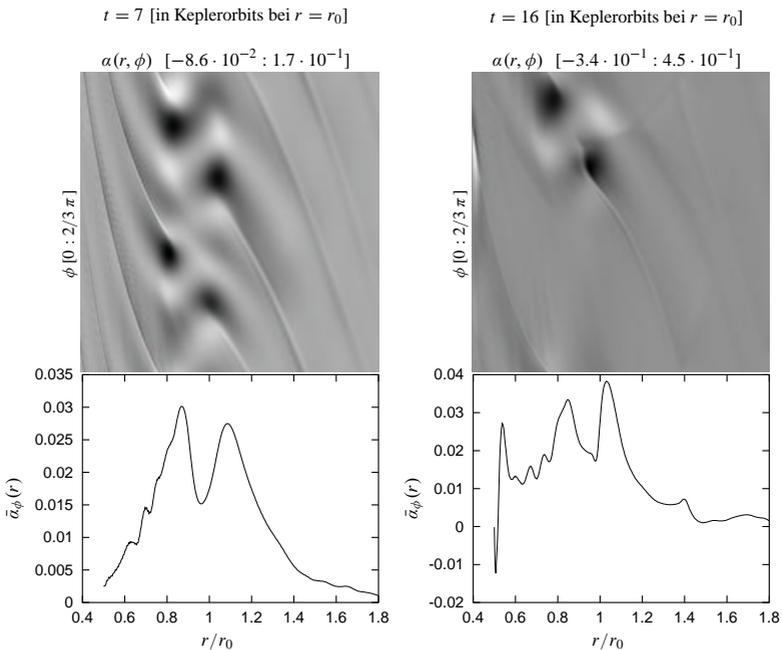


Abbildung 4.7: Drehimpulstransport durch Wirbel. Verteilung von α nach 7 und 16 Umdrehungen, aus der Rechnung mit 150×260 Teilchen. Die kleinsten und größten vorkommende Werte sind jeweils angegeben, sie entsprechen im Bild der Farbkodierung weiß und schwarz. Man erkennt deutlich, daß das Maximum des Drehimpulstransports in der Gegend des Wirbels stattfindet und auch nach 16 Umdrehungen noch sehr groß ist.

Aus der Auswertung des Koeffizienten α ergeben sich Werte in der Größenordnung von 10^{-2} . In Abbildung 4.7 ist der Wert zu zwei verschiedenen Zeiten aufgetragen, zusätzlich ist der azimuthal gemittelte Wert $\bar{\alpha}_\phi(r)$ angegeben, ein positiver Wert steht für Drehimpulstransport nach außen. Das Maximum des Drehimpulstransports liegt im Bereich des Wirbels,

aber auch außerhalb dieses Bereichs findet Drehimpulstransport durch die Rossby-Wellen und Schockwellen statt.

Im Vergleich mit den Ergebnissen von Li et al. (2001) fällt auf, daß ein etwa doppelt so großes α ermittelt wird. Die Ausprägung der Instabilität, insbesondere die Wirbelstärke hängt natürlich stark davon ab, wie dissipativ das verwendete numerische Verfahren ist. In den Rechnungen mit FMM steigt dieser Wert bis zum Ende der Simulation bei 20 Umdrehungen weiter leicht an, während er bei Li et al. (2001) leicht abfällt. Obwohl hier ein Verfahren in Polarkoordinaten benutzt wurde, scheint FMM in kartesischen Koordinaten weniger dämpfende Einflüsse zu besitzen, insgesamt eine positive Eigenschaft eines numerischen Verfahrens. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Gittermethoden in Polarkoordinaten oft ein speziell ausgewähltes Advektionsschema benutzen; die Advektion in r und ϕ -Richtung werden mit Operator-Splitting-Methoden nacheinander getrennt berechnet, wobei die Reihenfolge entscheidend sein kann und den Bedürfnissen angepasst wird. Die Rechnungen mit FMM in kartesischen Koordinaten wurden mit dem originalen, unmodifizierten Gleichungen durchgeführt.

4.2.3 Eine stabile Scheibe

Für einen weiteren Test unseres numerischen Verfahrens simulieren wir eine Scheibe, von der erwartet wird, daß sie für lange Zeit stabil bleibt. Das Problem leiten wir aus dem vorigen Beispiel ab, lediglich die radiale Verteilung der Dichte und Temperatur wird abgeändert. Die Scheibe besteht nur noch aus der Gaußförmigen Erhebung, die sich über den gesamten Rechenbereich erstreckt, hier ist nun

$$\Sigma(r) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r - r_0}{r_0/4} \right)^2 \right], \quad (4.10)$$

$T \propto \Sigma^{0.134}$, und $c_s^2 = 0.01 v_K(r = r_0)$. Die Winkelgeschwindigkeit v_ϕ wird wieder so angesetzt, daß die Scheibe unter Berücksichtigung der Druckkraft im Anfangszustand im Gleichgewicht ist, die dadurch entstandene Abweichung von der Keplergeschwindigkeit ist klein $(v_\phi - v_K)/v_K \leq 0.01$. Die Flächendichte und Temperatur fallen am Simulationsrand so stark ab, daß keine Randbedingungen berücksichtigt werden müssen, es werden also keine druckkraftlosen Randteilchen benutzt. Die Anfangsbedingungen ist wieder durch ein zufälliges Rauschen in der Dichte gestört.

Durch die Auswahl der Anfangsbedingungen kann Stabilität erwartet werden, denn jeder Abweichung von der Gleichgewichtssituation wird durch den in radialer Richtung an oder absteigenden Druckgradient entgegengewirkt, in der entgegengesetzten Richtung wird dies durch den Drehimpulserhalt der Keplerbewegung gewährleistet. In der Rechnung bleibt die Scheibe tatsächlich stabil, die anfängliche Störung entwickelt unmerklich kleine Dichtewellen, die Scheibe schwingt dadurch leicht um ihre Ausgangslage, diese Schwingung wächst nicht an, wird jedoch auch nur sehr schwach gedämpft.

Die kleinen Schwingungen um die Ausgangslage vollziehen sich langsam, außerdem ist das Dichteprofil hinreichend glatt, so daß in der Strömung keine Stöße und damit wenig Dis-

$t = 1$ [in Keplerorbits bei $r = r_0$] $t = 35$ [in Keplerorbits bei $r = r_0$]

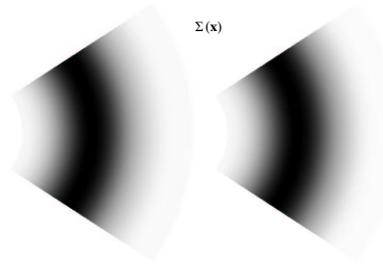


Abbildung 4.8: Entwicklung der Flächendichte, auch nach 35 Umdrehungen haben sich keine Störungen entwickelt.

sipation auftritt. Verhält sich das numerische Verfahren bei glatten Strömungen insgesamt wenig dissipativ, wie es im Fall von FMM bereits bekannt ist, so erwarten wir, daß die durch die anfängliche Störung der Dichte angeregte Schwingungen über längere Zeit konstant bleiben und nur wenig gedämpft werden. In der umgekehrten Argumentation bewirkt ein wenig dissipatives Verfahren ebenfalls, daß die stabile Ausgangssituation über lange Zeit beibehalten wird und dissipative Prozesse nicht zu einer stetigen Abweichung führen. Wir untersuchen daher wieder die Entwicklung der Fluktuationsenergiedichte, die Bestimmung erfolgt über ein äquidistantes Gitter der Auflösung 551×551 . Die gemittelte Dichte der Bewegungsenergie in der Ausgangssituation ist

$$\epsilon_A = \overline{(\Sigma \cdot \mathbf{v}^2)}(r, \phi). \quad (4.11)$$

Wir bestimmen nun die Entwicklung der gemittelten Fluktuationsenergiedichte

$$\epsilon_t = \overline{\Sigma \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_K)^2} \quad (4.12)$$

zur Zeit t in Einheiten von Keplerumläufen bei $r = r_0$ in Relation zu ϵ_A .

t	ϵ_t/ϵ_A
0	$7.0 \cdot 10^{-11}$
1	$4.0 \cdot 10^{-5}$
[2 : 35]	$[2.6 \cdot 10^{-5} : 8.0 \cdot 10^{-5}]$
36	$3.8 \cdot 10^{-5}$

In der Ausgangssituation müsste $\epsilon_0 = 0$ sein, da wir aber die Geschwindigkeit auf einem Gitter bestimmen und die analytisch bekannte Keplergeschwindigkeit subtrahieren, erhalten wir so den Anteil an Fluktuationsenergiedichte, der durch Approximationsfehler des Geschwindigkeitsfeldes entstanden ist. Dieser Fehler wird natürlich bei jedem Restart (wir benutzen zehn Restarts je Keplerumlauf) wiederholt, er ist jedoch vernachlässigbar klein. Durch die Störung der Anfangsdichte haben wir dem System eine Störung der inneren Energie aufgezogen, diese entwickelt bereits nach einem Umlauf ein Anwachsen der Fluktuation der

Bewegungsenergiegedichte. In den folgenden Umläufen tauschen sich während den kleinen Schwingungen die Fluktuation der Bewegungsenergiegedichte und der Dichte der inneren Energie gegenseitig aus, die dissipative Dämpfung ist dabei schwach. Nach 36 Umläufen erreicht die Scheibe einen Zustand, in dem die Schwingung eine fast identische Phase mit der Schwingung nach einem Umlauf aufzeigt, die gemittelten Werte ϵ_1 und ϵ_{36} liegen nahe beieinander.

Diese Eigenschaft von FMM, innerhalb derer die Reibungsterme eine fast dissipationslose Keplerbewegung über mehrere Umläufe gewährleisten, obwohl die Simulation in kartesischen Koordinaten durchgeführt wird, zeichnet die Methode gegenüber den meisten anderen numerischen Verfahren aus.

4.2.4 Barokline Instabilität in Akkretionsscheiben

Die Formulierung dieses Problems geht auf [Klahr & Bodenheimer \(2000, 2001\)](#) zurück. Prinzipielle Untersuchungen, die auch den Strahlungstransport berücksichtigen, führen zu der Vermutung, daß eine protoplanetare Scheibe einen in radialer Richtung negativen Entropiegradienten aufweisen muß. Die hydrodynamischen Modellrechnungen widmen sich der Frage, ob solche Scheiben instabil sind und ob solche baroklinen Instabilitäten zu Turbulenzen führen, die Drehimpuls transportieren können. Wie auch in den vorangegangenen Beispielen wird das Fluid als nicht viskos betrachtet.

Barokline Instabilitäten sind bereits aus Wetterphänomenen bekannt, sie erzeugen die allseits bekannten Hoch- und Tiefdruckgebiete. Als Voraussetzung für das Zustandekommen der Instabilität zählt der Zustand, in dem Dichte- und Druckgradient nicht mehr parallel zueinander stehen $\nabla \Sigma \times \nabla P \neq 0$. Dies ist natürlich in unseren Rechnungen der allgemeine Fall, wenn nicht speziell ein polytroper Anfangszustand betrachtet wird und gleichzeitig während der Simulation die Entropie konstant gehalten wird (adiabatische Rechnung).

Für die Modellierung dieses Beispiels können wir einfach die Techniken aus den zwei vorigen Rechnungen übernehmen, da sich lediglich die Anfangsbedingungen geändert haben. Wir starten mit einer konstanten Flächendichte und einer radial abfallenden Temperatur. Die Rechnungen wurden in SI-Einheiten ausgeführt, der mittlere Radius lautet $r_0 = 7.48 \cdot 10^{11} \text{m}$, dies entspricht dem Wert 5 AU. Die Wahl dieser Einheiten besitzt den Vorteil, daß die restlichen Größen, insbesondere die thermodynamischen, nicht in für diesen Fall sinnlosen astronomischen Einheiten ungerechnet werden müssen. Nur zur einfacheren Dokumentation werden hier Längen in Einheiten von AU angegeben.

Wir starten mit einer Scheibe mit einer konstanten Flächendichte $\Sigma = 3000 \text{ kg m}^{-2}$ um ein Zentralobjekt mit Sonnenmasse $M_c = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ im radialen Bereich von $2.3 \text{ AU} \leq r \leq 8 \text{ AU}$ und $r_0 = 5 \text{ AU}$. Die Temperatur beim mittleren Radius betrage $T(r_0) = 108 \text{ K}$. Die Druckskalenhöhe sei über die gesamte Scheibe konstant

$$h_P = \frac{H}{r} = \frac{c_s}{v_K} = 0.055, \quad (4.13)$$

daraus ergibt sich die radial abfallende Temperatur

$$\gamma c_v (\gamma - 1) T = \frac{1}{r} h_P^2 G M_c. \quad (4.14)$$

Für ein interstellares Gas, das bei diesen Temperaturen molekular vorliegt, wählt man üblicherweise $\gamma = 1.4$ und $\mu = 2.535$ bzw. $c_0 = 8834$. Im Anfangszustand ist $v_r = 0$, die Bahngeschwindigkeit wird wiederum so angepasst, daß sie im Gleichgewicht aus Druckgradient und Keplerbewegung ist. Da die Druckskalenhöhe über die gesamte Scheibe konstant ist, ergibt sich hierfür der einfache Zusammenhang

$$v_\phi^2(r) = \frac{GM_c}{r} \left[1 - \frac{h_P^2}{\gamma} \right], \quad (4.15)$$

damit weicht die Bahngeschwindigkeit nur um ca. 0.1% von der Keplergeschwindigkeit ab.

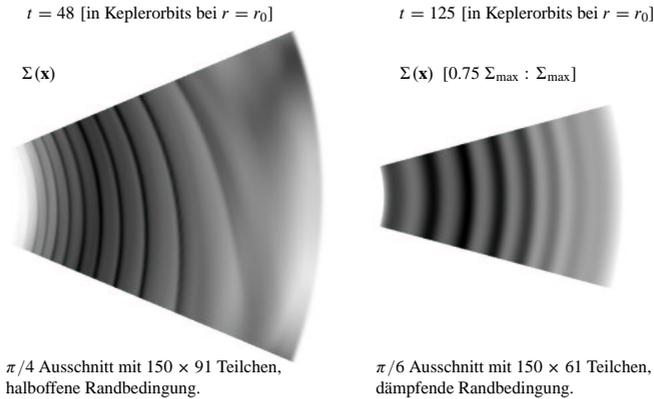


Abbildung 4.9: Die baroklin instabile Scheibe:

Links: Unter Verwendung der halboffenen Randbedingung entwickelt sich eine spiralförmige Störung, hier mit der Modenzahl $m = 8$. Die Störung wächst weiter an, nach 48 Umdrehungen wird das System numerisch so steif, daß nicht mehr weitergerechnet werden kann.

Rechts: Mit gleichen Anfangsbedingungen aber anderen Randbedingungen (s. dazu im Text) entwickeln sich nur sehr langsam wachsende und axialsymmetrische Dichtewellen. Die relative Dichteamplitude ist klein $\Delta \Sigma / \Sigma_0 \approx 0.09$, für eine deutlichere Wiedergabe wurde nur ein Ausschnitt der Dichte in Graustufen dargestellt.

In den Rechnungen konnte kein Wirbel wie in der Vergleichsrechnung aus [Klahr & Bodenheimer \(2000\)](#) bestätigt werden, dies kann natürlich daraus resultieren, daß nur ein $\pi/4$ -Ausschnitt simuliert wurde, während [Klahr & Bodenheimer \(2000\)](#) den gesamten Winkelbereich einbezog und nur einen Wirbel, entsprechend der Modenzahl $m = 1$ erhalten hat. In unserer Rechnung entwickelte sich eine spiralförmige Störung, die nach 48 Umdrehungen so stark angewachsen ist, daß die Simulation wegen numerischer Steifigkeit abgebrochen werden musste. Die Simulation im gesamten Winkelbereich 2π mit einer radialen Auflösung von nur 50 Teilchen war unbefriedigend, für eine höhere Auflösung stand nicht genügend Rechenzeit zur Verfügung. Durch die relativ hohen Druckgradienten ist eine Raumintegration der Teilchen nur mit der 5-Punkt-Gauß Quadraturformel, jedoch nicht mit der einfacheren

9-Punkt-Sparse Formel möglich. Die eigentlich positive Eigenschaft der Reibungskräfte, insgesamt wenig dissipativ zu wirken und Dichte- sowie Druckgradienten nicht abzuflachen, führt in diesem Fall zu sehr steifen Gleichungen.

An dieser Stelle widmen wir uns noch der Frage, inwieweit die Randbedingungen einen begünstigenden Einfluß auf die Entstehung der Instabilität haben können. In den beschriebenen halboffenen Randbedingungen haben wir so gut wie möglich die Eigenschaften der Methode der Randzellen in Gitterverfahren nachgebildet. In einem weiteren Versuch modellieren wir eine andere Art der Randbedingung, die wir hier dämpfende Randbedingung nennen wollen. Anstatt wie bisher druckkraftlose Randteilchen zu benutzen und die thermodynamischen Größen über den Rand hinweg konstant fortzusetzen, fordern wir hier, daß die Druckkraft über einen breiten Randbereich langsam abfällt, die thermodynamischen Größen werden darin nicht mehr konstant fortgesetzt. In unserem Fall fällt die Druckkraft in einem breiten Randbereich von $2.1 \text{ AU} < r < 2.5 \text{ AU}$ linear ab, auf die innersten Teilchen bei $r = 2 \text{ AU}$ wirken weiterhin keine Druckkräfte. Die Korrektur innerhalb der Ausdehnung eines Teilchens ist klein, der Randbereich, indem die Druckkraft korrigiert wird, enthält ca. 20 Teilchen. Damit bei dieser Methode kein künstlicher Druckgradient innerhalb einzelner Teilchen erzeugt wird, korrigieren wir nicht lokal den thermodynamischen Druck am Rand, sondern die über das Teilchen integrierten Druckkräfte

$$(F_i^{(p)}, M_i^{(p)}) \rightarrow f \cdot (F_i^{(P)}, M_i^{(P)}), \quad f \in [0 : 1]. \quad (4.16)$$

Strukturen, die sich innerhalb des nicht korrigierten Rechengebiets entwickeln und ausbreiten, können deshalb weit in den Randbereich eindringen und werden viel schwächer reflektiert. Aus den Rechnungen mit diesen Randbedingungen konnte sich keine Störung mehr entwickeln (s. Abb. 4.9). Nach sehr langer Simulationszeit entwickeln sich axialsymmetrische Dichtefluktuationen mit geringer Amplitude. Die Art der Störung ist bereits aus den Rechnungen des viskos zerfließenden Staubrings bekannt, sie können möglicherweise auf Approximationsfehler des Restartverfahrens zurückgeführt werden, es ist hier allerdings zu bemerken, daß diese Strukturen hier dennoch nicht durch die Druckkräfte ausgeglichen werden.

Insgesamt sind Ergebnisse, die so stark von der numerischen Modellierung, in diesem Fall also von den Randbedingungen, abhängen, sehr unbefriedigend. Andererseits untersuchten wir eben ein System, in dem eine physikalische Instabilität vermutet wird, insofern ist es nicht verwunderlich, daß die numerischen Ergebnisse stark von einzelnen Parametern abhängen können. Aus den Ergebnissen kann man allein nur vermuten, daß sich eine Störung nur dann ausbilden kann, wenn ein kleiner Teil der Dichtewellen, die sich über die gesamte Scheibe ausbreiten, am Rand reflektiert werden. Zur Bestätigung dieser Annahme bedarf es jedoch weiterer Untersuchungen, die im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr angestellt werden. Wir widmen uns stattdessen den Akkretionsscheiben in Binärsystemen und stellen im nächsten Abschnitt weitere Testrechnungen zu solchen Scheiben vor.

4.3 Akkretionsscheiben in Binärsystemen

In den bisherigen Testrechnungen haben wir immer ein Zentralpotential betrachtet, nun wollen wir auch Akkretionsscheiben in den interessanten Kataklysmischen Variablen (CVs) untersuchen.

Wie bereits mehrfach angesprochen, wird die Strömung in Akkretionsscheiben von der Gravitationskraft dominiert, die das Fluid auf Keplerbahnen zwingt, während thermodynamische Kräfte erst in zweiter Linie die Dynamik bestimmen. In den bisherigen Rechnungen haben die thermodynamischen Kräfte bei der Entwicklung von störanfälligen Scheiben eine entscheidende Rolle gespielt, auf Scheiben in CVs wirkt jedoch die noch viel größere Störung des Begleitsterns. Neben den Gezeitenkräften des Begleitsterns spielt auch die Beschleunigung aus der Rotation des Binärsystems eine Rolle, die Masse des Sekundärsterns verschiebt das gemeinsame Massenzentrum, um das beide Sterne rotieren, deutlich aus der Position des akkretierenden Primärsterns. Beide Effekte können durch das bereits in Abschnitt 3.2 vorgestellte Roche-Potential beschrieben werden. Der nicht axialsymmetrische Anteil des Roche-Potentials wird die Dynamik der Scheibe mehr beeinflussen als die thermodynamischen Kräfte.

4.3.1 Das Superhump Phänomen

In diesem Testbeispiel soll der prinzipielle Einfluß des Roche-Potentials auf die Akkretionsscheibe untersucht werden. Wir benutzen ein einfaches thermodynamisches Modell einer geometrisch dünnen Akkretionsscheibe in zwei Dimensionen, das von einer konstanten Anfangsdichte ausgeht, einer polytropen Zustandsgleichung $P = k\Sigma^\gamma$ folgt und keinen viskosen Kräften unterliegt. Das Massenverhältnis der beiden Sterne sei $q = M_2/M_1 = 0.15$. In CVs mit solchen Massenverhältnissen wird erwartet, daß die resonante Anregung des Sekundärsterns eine Präzession der Scheibe hervorruft. Die grundlegenden Mechanismen hierfür wurden in Abschnitt 3.2 angesprochen.

Diese Problemstellung wurde von Heemskerk (1994) vorgestellt, sie wurde dort mit einem Gittercode in Polarkoordinaten untersucht. Von W. Kley am hiesigen Institut für Astronomie und Astrophysik wurde vorgeschlagen, diese Rechnung als Testbeispiel zu benutzen, um verschiedene hydrodynamische Verfahren zu vergleichen, die eine breite Anwendung in der Astrophysik finden. Die Intention dieses Vorgehens wurde schon mehrfach begründet, numerische Verfahren erzeugen Artefakte, die nicht leicht von physikalischen Effekten zu unterscheiden sind. Bei solchen Vergleichsrechnungen lernen wir typische Eigenschaften der einzelnen Verfahren kennen und übereinstimmende Ergebnisse erhalten eine größere Glaubwürdigkeit. An den Vergleichsrechnungen sind beteiligt W. Kley mit dem Gittercode RH2D, S. Kunze mit SPH, beide am Institut für Astronomie und Astrophysik in Tübingen, der Autor dieser Dissertation mit den hier vorgestellten Ergebnisse aus den Rechnungen mit FMM sowie A. Gawryszczak, Moskau, mit dem Gittercode ZEUS. Die bisherigen Ergebnisse werden vorläufig unter der URL www.tat.physik.uni-tuebingen.de/~kley/projects/cvdisk.html veröffentlicht. Rechnungen zu Superhumps sind nicht neu, in der Literatur finden sich zahlreiche Ergebnisse von Simulatio-

nen, die größtenteils mit SPH durchgeführt wurden. Lubow (1991a) zeigte analytisch, welche Auswirkung die Gezeiteninstabilität auf die Scheibe hat und bestätigte dies in Rechnungen mit SPH (Lubow 1991b). Weitere Rechnungen mit SPH wurden beispielsweise von von Whithurst (1988) und Hirose & Osaki (1990) vorgestellt, sie erhalten in ihren Ergebnissen eine exzentrische Scheibe, die langsam präzediert. Bei der Interpretation dieser Ergebnisse muß jedoch berücksichtigt werden, daß diese Rechnungen immer eine bestimmte Form der Viskosität berücksichtigen. Rechnungen mit SPH benutzen eine künstliche Viskosität, um Stöße aufzulösen, die auch einen Anteil an Scherviskosität besitzt. Unsere Vergleichsrechnungen betrachten jedoch vorläufig ein nicht viskoses Fluid, aus ihnen resultieren auch keine präzedierenden Scheiben. Natürlich kann im SPH Verfahren auch eine physikalische Scherviskosität implementiert werden, Rechnungen zu Superhumps mit dieser Viskosität finden sich in Kunze (2000).

Für die Modellrechnung wählen wir Einheiten, in denen die Gesamtmasse $M = M_1 + M_2 = 1$, der Abstand beider Sterne $a = 1$, die Gravitationskonstante $G = 1$ und die Rotation des Binärsystems $\Omega_{\text{orb}} = 1$ sind, für die Bahnperiode folgt somit $P_{\text{orb}} = 2\pi$. Die Ausgangssituation ist eine Scheibe mit konstanter Flächendichte $\Sigma_0 = 1$ in dem Bereich $r_0 = 0.225 r_1 \leq r \leq r_1$, wobei r_1 der in Einheiten von a ausgedrückte Roche-Radius ist, wir benutzen die Näherung von Eggleton (1983)

$$r_1 \equiv \frac{R_1}{a} = \frac{0.49}{0.6 + q^{2/3} \ln(1 + q^{-1/3})}, \quad (4.17)$$

alle Radien bezeichnen hier den Abstand zum akkretierenden Primärstern, mit $q = 0.15$ ergibt sich $r_1 = 0.54515$. Das Verhältnis der thermodynamischen Kräfte und der Gravitationskräfte kann durch die Angabe der Machzahl am inneren Radius festgelegt werden, es sei $M_{\text{Mach}}(r_0) = |\mathbf{v}|/c_s = 25$, daraus folgt mit $\gamma = 5/3$ der Wert $k = 0.00768$. In der Ausgangssituation überdeckt die Scheibe nahezu den gesamten Roche-Lobe des Primärsterns.

Techniken für die Modellierung dieses Beispiels

Auch für dieses Beispiel benötigen wir eine geeignete Randbedingung, zumindest am Innenrand. In der Ausgangssituation sei die Flächendichte konstant, mit dem polytropen Ansatz wirken damit keine thermodynamischen Kräfte. Durch den Abfall der Dichte innerhalb des Radius des innersten Teilchens würde jedoch ein starker Druckgradient entstehen, der die Masse am Innenrand schnell in Richtung des Primärsterns beschleunigt. Wir beheben dies durch die Einführung der halboffenen Randbedingung, wie sie im vorigen Abschnitt beschrieben wurde. Entsprechend der Definition dieses Beispiels nach Heemskerk (1994) seien die Ränder offen, Masse kann ungehindert ausströmen, jedoch nicht in das Rechengebiet einströmen. Am Außenrand werden die halboffenen Randbedingungen nicht implementiert. Die Scheibe verliert dadurch innerhalb der ersten Umdrehungen über ein Drittel ihrer Anfangsmasse durch den Fluß über den Außenrand, dies ist auch konsistent mit den Ergebnissen aus den Gitterverfahren. Wir wählen für dieses Beispiel wieder Teilchen, die in r - und ϕ -Richtung (im Koordinatensystem des Primärsterns) äquidistant liegen, wie in den Beispielen im vorigen Abschnitt, nur daß hier keine periodischen Ränder auftreten, da der gesamte Winkelbereich

gerechnet wird. Diese Teilchenanordnung erleichtert die Verwirklichung der Randbedingung und ist zugleich konsistent mit den Vergleichsrechnungen, die mit den Gitterverfahren gemacht wurden. Gitterverfahren benutzen für die Berechnung von Akkretionsscheiben immer Polarkoordinaten, und in diesen Koordinaten ein uniformes Gitter der Auflösung 128×128 . Wir benutzen in radialer Richtung 131 Teilchen, dies entspricht 128 freien Teilchen und 3 druckkraftlosen Randteilchen, sowie 220 Teilchen in ϕ -Richtung, diese etwas höhere Zahl ist notwendig, damit der Verdrehungswinkel benachbarter Teilchen in ϕ -Richtung genügend klein bleibt.

In der Ausgangssituation sind die Geschwindigkeiten so berechnet, daß Druckkraft, Rotationsbeschleunigung und Gravitationskraft im Gleichgewicht sind. Da kein Druckgradient vorliegt, folgt die Geschwindigkeit allein aus der Position im Potential. In unserer Modellierung entschließen wir uns, das Problem im mitrotierenden Koordinatensystem zu rechnen. Die äußeren Kräfte, die auf das Fluid wirken, ergeben sich somit aus dem Roche-Potential und den Corioliskräften. Der Ursprung unseres Koordinatensystems liegt dann im gemeinsamen Schwerpunkt beider Sterne. Wir wählen die Anfangsgeschwindigkeit $v_r = 0$ und v_ϕ so, daß die Rotationsbeschleunigung durch die Bewegung um den Primärstern, die Rotationsbeschleunigung durch die Bewegung im mitrotierten Koordinatensystem, die Corioliskräfte und die Gravitationskräfte beider Sterne nahezu im Gleichgewicht sind, $v_{r,\phi}$ bezeichne Radial- und Winkelgeschwindigkeit relativ zum Primärstern. Die gesuchte Geschwindigkeit ergibt sich aus der quadratischen Gleichung

$$\frac{v_\phi^2}{r} + 2\Omega_{\text{orb}}v_\phi - \frac{d\Phi_R}{dr} = 0, \quad (4.18)$$

der lineare Term beschreibt die nur geschwindigkeitsabhängige Corioliskraft. Der Term 0-ter Ordnung ist die Ableitung des Roche-Potentials in Richtung zum Primärstern, der nicht verschwindende, senkrechte Anteil wird vernachlässigt, r ist der Abstand zum Primärstern. Aus der Entstehung einer Scheibe durch den Überstrom am inneren Lagrange-Punkt folgt, daß die Scheibe den gleichen Umlaufsinn aufweist wie die Drehung des Binärsystems, aus der Gleichung 4.18 ist die Lösung zu wählen, die im Grenzfall verschwindender Corioliskraft den richtigen Umlaufsinn ergibt. Durch dieses Verfahren erreicht man eine Anfangsgeschwindigkeit, in der die Scheibe relativ gut im Kräftegleichgewicht ist, so daß zu Beginn der Simulation keine zu starken Schockwellen ausgelöst werden.

Ergebnisse

Die Simulation wurde über 52 Bahnperioden durchgeführt. Schon nach wenigen Bahnperioden entwickelt sich eine zweiarmige Spiralstruktur in der Scheibe, die über den gesamten Zeitraum erhalten bleibt, sie ist im mitrotierenden Koordinatensystem stationär, s. hierzu auch Abb. 4.10.

Die Entstehung der Spiralstruktur mit der Modenzahl $m = 2$ wurde in allen Vergleichsrechnungen bestätigt, sie kann als Auswirkung der durch den Sekundärstern verursachten Störung interpretiert werden. Um die Ergebnisse aus den verschiedenen numerischen Verfahren weiter vergleichen zu können, müssen geeignete Vergleichsgrößen definiert werden, die aus den

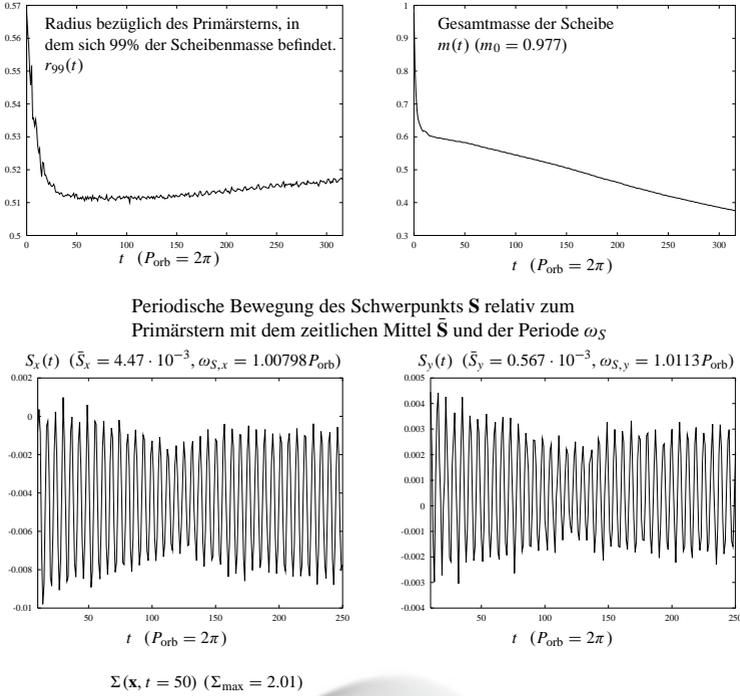


Abbildung 4.10: Die nicht viskose Scheibe im Roche-Potential entwickelt eine Spiralstruktur der Modenzahl $m = 2$, diese Struktur ist im mitrotierenden Koordinatensystem nahezu stationär, nur der Schwerpunkt oszilliert leicht und ist im zeitlichen Mittel deutlich zum Sekundärstern hin verschoben. Der Scheibenradius erreicht nach 5 Bahnperioden ($t \approx 30$) einen nahezu stationären Wert, vgl. hierzu Fig. 7 in Heemskerk (1994). Der stetige Massenverlust vollzieht sich gegen Ende der Rechnung hauptsächlich über den Innenrand, die lokale Dichte nimmt daher ebenfalls ab, es ist $\Sigma_{\text{max}}(t = 200) = 0.181$.

Daten gewonnen werden können. Heemskerk (1994) untersucht dazu die Entwicklung des Scheibenradius und kommt zu dem Ergebnis, daß dieser bis gegen Ende der Simulation abnimmt und einen Wert nahe 0.4 erreicht, dieses Ergebnis wird auch von den beiden anderen Gitterverfahren RH2D und ZEUS in ähnlicher Weise bestätigt, nicht jedoch von den Ergebnissen aus den Lagrangeschen Teilchenmethoden SPH und den hier vorgestellten aus FMM, der Radius unterschreitet die Grenze von 0.5 nicht. Heemskerk (1994) stellt den Rechnungen Vergleichsrechnungen gegenüber, in denen nur gewisse Anteile des Roche-Potentials benutzt werden. Dazu wird das Potential nach ganzzahligen periodischen Funktionen in ϕ -Richtung entwickelt, also $\Phi(\phi) \propto \dots + c_0 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos(m\phi)$. Wird in den Rechnungen nur der $m = 3$ -Anteil der Gezeitenkräfte benutzt, bilden sich in der Scheibe Spiralen der Modenzahl $m = 3$ und der Scheibenradius stellt sich bei einem Wert um 0.5 ein. Heemskerk (1994) interpretiert die unterschiedliche Entwicklung des Scheibenradius als Ursache der verschiedenen vorhandenen Anteile der Gezeitenkräfte. Dies kann durch die Rechnungen mit SPH und FMM nicht bestätigt werden, die Entwicklung des Radius gleicht in etwa der von Heemskerk (1994), wenn dort nur der $m = 3$ -Anteil des Potentials benutzt wird.

Als weitere Vergleichsgröße kann die zeitliche Entwicklung der Scheibenmasse untersucht werden. In den Rechnungen mit FMM stellt sich jedoch das Problem, daß das Restartverfahren nicht massenerhaltend ist, empfindliche physikalischen Einflüsse auf diese Größe werden daher möglicherweise falsch wiedergegeben. In allen Vergleichsrechnungen nimmt die Gesamtmasse ab, nach der Zeit $t = 200$ erreichen die Verfahren Werte zwischen 0.38 (ZEUS) und 0.7 (SPH), die Werte aus RH2D mit 0.55 und FMM mit 0.45 liegen dazwischen. Die starken Schwankungen hängen dabei nicht unwesentlich von den gewählten Randbedingungen ab. Aus unseren Ergebnissen geht hervor, daß der Schwerpunkt der Scheibe mit kleiner Amplitude um einen Punkt oszilliert, der leicht zum Sekundärstern verschoben ist. Teilchen nahe am Innenrand beschreiben langsam präzedierende Kreisbahnen um den mittleren Schwerpunkt und schneiden den als Innenrand definierten Bereich mehrfach, sie werden durch die beschriebenen Randbedingungen akkretiert, da sie den Rechenbereich verlassen, nicht jedoch in ihn zurück gelangen können. Diese Art künstlicher Akkretion wirkt auch auf Teilchen, die sich auf dreihimpulserhaltenden Freifalltrajektorien bewegen. Der durch diesen Effekt hervorgerufene Massenverlust ist somit nicht konsistent mit dem Modell der dreihimpulstransportierenden Akkretion. Die Ergebnisse mit dem SPH-Verfahren liefern vermutlich nur deshalb eine stark verminderte Massenabnahme, da in diesen Rechnungen der Innenradius stark verkleinert wurde; aus technischen Gründen ist dort eine Modellierung der Randbedingungen nicht so einfach wie mit FMM, es wurden keine speziellen Randbedingungen implementiert, Randteilchen werden gleich wie die restlichen nach dem allgemeinen SPH-Formalismus behandelt.

Eine Größe, die die Dynamik der Scheibe wesentlich besser charakterisiert, ist die Schwerpunktsbewegung, die wir zum Vergleich der numerischen Verfahren vorschlagen, die Vergleichsergebnisse liegen jedoch noch nicht vor. Der Schwerpunkt in unseren Ergebnissen oszilliert mit einer Amplitude der Größenordnung $A \cong 0.003 a$ um sein zeitliches Mittel, das ebenfalls um einen Betrag der Größenordnung A zum Sekundärstern verschoben ist (vgl. Abb. 4.10), die Perioden der Oszillation sind in x - und y -Richtung leicht unterschiedlich, der Schwerpunkt beschreibt also keine einfach geschlossenen Bahnen. Beide Perioden

sind gegenüber der Bahnperiode des Systems leicht erhöht, dieser Periodenexzess liegt in der Größenordnung von 1%. Der Verlauf des Schwerpunktes besitzt einen der Rotation des Binärsystems entgegengesetzten Umlaufsinn, für einen außenstehenden Beobachter ist die eigentliche Präzessionsperiode also die Schwebungsperiode P_b aus Superhumpperiode P_{SH} und der Bahnperiode P_{orb} , $P_b = P_{SH}P_{orb}/(P_{SH} - P_{orb})$. Die Superhumpperiode ist die Präzessionsperiode im mitrotierenden Koordinatensystem, mit dieser Periode wird die Scheibe im nicht axialsymmetrischen Roche-Potential abwechselnd komprimiert und gedehnt, die dadurch hervorgerufenen periodischen dissipativen Vorgänge bewirken die beobachtbare Schwankung der Scheibenemission.

Aus astronomisch zugänglichen CVs, in denen Superhumps beobachtbar sind, ist die Superhumpperiode eine charakteristische Größe des Systems, sie wird oft in Zusammenhang mit dem Massenverhältnis q gebracht, es gilt der empirisch gefundene Zusammenhang

$$P_b = c \frac{1+q}{q} P_{orb} \quad (4.19)$$

mit der Konstanten $c \approx 3.73$ für $q \leq 0.1$ (Hirose & Osaki 1990, 1993; Kunze 2000). In realen Systemen wird also ein fast vier mal so großer Periodenexzess beobachtet. In dem simulierten Modell wurde die Viskosität vernachlässigt, die Scheibe konnte sich deshalb nicht bis zum resonanten Radius ausdehnen und es bildete sich keine exzentrische Scheibe. Die ermittelte Schwerpunktsbewegung ist sehr klein und kann nicht zur Erklärung des Superhumpphänomens dienen. Die Schwerpunktsbewegung wird eher eine Folge der Anfangsbedingungen sein, in denen der Schwerpunkt am Ort des Primärstern angenommen wurde und in denen die Wahl der Anfangsgeschwindigkeit nur näherungsweise ein Kräftegleichgewicht beschreibt.

Das Massenverhältnis kann entscheidend über die Ausprägung der Exzentrizität der Scheibe sein, von dieser Größe wird auch wesentlich der Periodenexzess abhängen. In physikalischen Systemen ist die Exzentrizität in direkter Weise von anderen Faktoren abhängig, insbesondere von den vorherrschenden (turbulent erzeugten) viskosen Kräften, diese hängen wiederum von den thermodynamischen Bedingungen ab. Der gesamte Zusammenhang kann wohl sehr gut allein mit dem Massenverhältnis gemäß Gleichung 4.19 beschrieben werden. In den numerischen Modellen, die in diesem Beispiel keine physikalische Viskosität beschreiben sollen, können numerisch dissipative Eigenschaften die Exzentrizität beeinflussen, wie etwa die Einführung einer künstlichen Viskosität, die einen nicht verschwindenden Anteil an Scher-viskosität besitzen kann.

Im Vergleich der spiralförmigen Dichtestrukturen in den Ergebnissen aus den Vergleichsrechnungen fällt auf, daß die Lage und Form der Spiralen überall nahezu identisch ist. Die höchste Flächendichte wird dabei am Innenrand erreicht, einzige Ausnahme sind die Rechnungen mit SPH, dort wurde eben auch eine andere Art der Randbedingung benutzt und die Spiralen sind am Innenrand weniger stark ausgeprägt. Aus den Rechnungen im vorigen Abschnitt zur baroklinen Instabilität haben wir festgestellt, daß ungeeignete Randbedingungen die Störung positiv oder auch negativ beeinflussen können. Die höhere Flächendichte am Innenrand kann ein Artefakt der Randbedingung ein, da Masse nicht vollständig ungehindert ausfließen kann. Aus den Rechnungen ohne Randbedingungen mit SPH bildeten sich jedoch

ebenfalls Spiralen aus, zumindest im mittleren radialen Bereich. Die Sorge, die Wahl der Randbedingungen könnte wesentlichen Einfluß auf das Ergebnis haben, motiviert an dieser Stelle zu einer Abänderung des Modells in der Art, in der die Randbedingungen die Scheibendynamik nur noch unmerklich stören können.

Das Superhump Phänomen ohne Randbedingungen

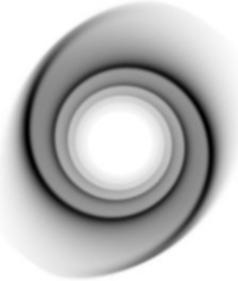
Der Verzicht von Randbedingungen im Kontext von FMM bedeutet, daß Randteilchen keine besondere Behandlung erfahren. Es wird dabei natürlich weiterhin das Problem auftreten, daß innerhalb der Ausdehnung eines Randteilchens ein Druckgradient auftritt, der ein Zerfließen der Ausgangskonfiguration begünstigt. Um diesen Effekt klein zu halten, wählen wir ein zum Rand hin stark abfallendes Dichteprofil. Innerhalb des polytropen Ansatzes sind damit die Druckkräfte am Rand klein und die Dynamik wird noch mehr von den externen Kräften dominiert, zum anderen ist ein dennoch vorherrschender Massenverlust aus Gebieten sehr geringer Dichte kaum bemerkbar und wird die Dynamik im Innenbereich hoher Massendichte nicht wesentlich beeinflussen. Für die radiale Dichteverteilung wählen wir die Splinefunktion, die bereits als Formfunktion für die Teilchen benutzt wurde

$$\Sigma(r) = \tilde{\psi} \left(\frac{r - r_0}{\Delta r} \right) \quad (4.20)$$

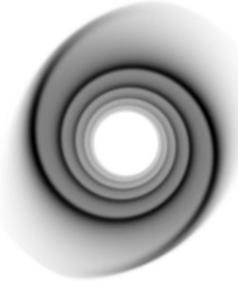
mit $r_0 = 0.3375$ und $\Delta r = 0.2125$, wieder sei $\Sigma(r_0) = 1$, die Dichte verschwindet am Rand.

Ergebnisse

$\Sigma(\mathbf{x}, t = 50)$



$\Sigma(\mathbf{x}, t = 100)$



$\Sigma(\mathbf{x}, t = 180)$



Abbildung 4.11: Zeitliche Entwicklung der Flächendichte. Die Spiralstruktur ist im mitrotierenden Koordinatensystem stationär, abgesehen von der sehr geringen Schwerpunktsbewegung. Die Dichte der Spiralarme nimmt bei kleinen Radien zu, es entsteht so der Eindruck, die Arme würden nach innen wachsen und ihre Windungszahl erhöhen.

Die Ergebnisse aus dieser Rechnung unterscheiden sich wenig von denen aus dem vorigen Beispiel. Wie in der Abb. 4.11 gut zu erkennen ist, bildet sich dieselbe stationäre, zweiarmige Spiralstruktur aus. Während den ersten Bahnperioden besitzt die Scheibe die höchste Flächendichte nahe dem mittleren Radius r_0 . Dies ist nicht verwunderlich, da diese Massenverteilung

der Anfangsverteilung entspricht. Eine radiale Umverteilung der Masse kann nur durch Drehimpuls transportierende Mechanismen stattfinden. Diese wirken sich innerhalb der Simulationszeit bis $t = 200$ nur wenig bemerkbar aus, die Dichte der Spiralarme bei kleinen Radien wächst leicht an. Durch diesen Effekt entsteht zunächst der Eindruck, die Spiralen würden ihre Windungszahl erhöhen, in Wirklichkeit bleibt ihre Lage jedoch überall konstant. Die fehlende Randbedingung der druckkraftlosen Randteilchen hat sich positiv ausgewirkt, die Spiralen werden nicht mehr nahe am Rand verstärkt. Die Entwicklung des Scheibenradius ist nahezu identisch mit der aus der vorigen Rechnung $r_{99}(t = 200) \approx 0.515$, in der Schwerpunktsbewegung ist ebenfalls kein signifikanter Unterschied festzustellen. Die Simulation enthält leider einen kleinen Schönheitsfehler, da die Scheibenmasse im Laufe der Simulationszeit zunimmt. Dies ist mit dem Ansatz des Beispiels natürlich unvereinbar, die Massenzunahme ist auf die nicht massenerhaltende Eigenschaft des Restartverfahrens zurückzuführen. Offenbar ist die radiale Dichteverteilung, die abwechselnd positive und negative zweite Ableitungen enthält, für den verstärkten Massenfehler verantwortlich. Es wäre natürlich möglich, die Teilchenmassen nach dem Restart auf die bekannte Gesamtmasse zu normieren, dies haben wir jedoch bewusst nicht ausgeführt, da nicht eindeutig festzustellen ist, an welchem Ort der Massenfehler überwiegt. Eine Nachnormierung könnte so zu einer künstlichen Akkretion oder auch dem entgegengesetzten Effekt führen. Zudem müsste die tatsächliche Akkretion bekannt sein, die bei der Normierung zu berücksichtigen wäre. Um diese Größe genügend genau zu bestimmen, müssten die Anteile der Teilchen, die den Rand schneiden, durch numerische Raumintegration berechnet werden.

Zur Untersuchung des Massenfehlers bei dem Restartverfahren wurde dieses Beispiel zweimal gerechnet. In der ersten Rechnung wurde ein 4-stufiges Glättungsverfahren benutzt, um die Dichte an den Quasiinterpolationpunkten zu erhalten. Die zugehörige Gitterweite ist so ausgelegt, daß das Glättungsverfahren einer Raumintegration gleicht (s. Abschn. 2.11), in der zweiten Rechnung wurde kein Glättungsverfahren benutzt. Die zeitliche Massenzunahme verläuft jedoch in beiden Fällen ähnlich, nach der Simulationszeit $t = 200$ besitzen sogar beide Scheiben die identische Massen (bis auf 0.3%). Das Restartintervall in diesem Beispiel beträgt $\Delta t_{RS} = 0.05$, also 4000 Restarts für die Rechnung bis $t = 200$, die relative Massenzunahme je Restart liegt bei etwa 10^{-4} .

4.3.2 Die Akkretionsscheibe in dem Doppelsternsystem OY Carinae

Die Simulation der Akkretionsscheibe in der Zwergnova OY Car dient ebenfalls als Testrechnung zu Akkretionsscheiben und soll direkt an die vorigen zwei Beispiele anschließen. Das System OY Car zählt zu der Gruppe der SU UMa-Sterne, dies sind Zwergnovae, die neben den normalen Ausbrüchen sogenannte Superausbrüche zeigen, die etwa 1 mag heller sind. Während dieser Superausbrüche zeigen sie zusätzliche Helligkeitsschwankungen, die Superhumps. SU UMa-Sterne haben ein Massenverhältnis von $q \leq 0.25$ und eine Periode, die unterhalb von zwei Stunden liegt. Diese Systeme besitzen eine Scheibe, die in mehr oder weniger regelmäßigen Abständen Ausbrüche zeigt, die mit dem Scheibeninstabilitätsmodell (DIM) erklärt werden können. Hat sich genügend Masse in der Scheibe angesammelt, beginnt das Scheibenmaterial zu ionisieren, wird optisch dick und heizt auf. Die in diesem Zustand

erhöhte Viskosität bewirkt eine starke Ausdehnung der Scheibe bis über den resonanten Radius $r_{1:3}$. Die so einsetzende resonante Störung des Sekundärsterns lässt die Scheibe nach einigen Bahnperioden exzentrisch werden und löst ihre Präzessionsbewegung aus. Die Superhumpperiode P_{SH} (also die Präzessionsperiode im mitrotierenden Koordinatensystem, im Gegensatz zur 'echten' Präzessionsperiode im ruhenden Koordinatensystem P_b) ist gegenüber der Bahnperiode leicht erhöht, der Periodenexzess beträgt 2.2% für das System OY Car.

Für unsere Testrechnung lösen wir nicht die Energiegleichung, sondern machen die vereinfachte Annahme eines polytropen Gases und einer konstanten Viskosität. Mit dieser Vereinfachung kann der Ausbruch im Rahmen des DIM natürlich nicht reproduziert werden, mit dieser Testrechnung sollen lediglich die wesentlichen dynamischen Einflüsse des Roche-Potentials bei extremen Massenverhältnissen und einer vorhandenen Viskosität untersucht werden. Der Unterschied zu den vorigen Beispielen besteht also nur darin, daß die Scheibe nun mit einer kinematischen Scherviskosität $\nu = \eta/\Sigma$ mit $\nu = 3 \cdot 10^{-8} R_{\odot}^2/\text{s}$ gerechnet wird. Ist eine Scherviskosität vorhanden, so wird sich auch eine deutliche Akkretion einstellen. Dadurch wird sich die Scheibe natürlich sehr schnell entleeren und eine Untersuchung der Präzessionsbewegung über mehrere Bahnperioden P_{orb} ist nicht mehr möglich. Für dieses Beispiel wird daher der Massenüberstrom über den inneren Lagrange-Punkt berücksichtigt. Die Anfangssituation ist eine leere Scheibe, die sich erst durch den Überstrom bildet. Das System wird in SI-Einheiten gerechnet, einige Größen dokumentieren wir zum besseren Vergleich in Solaren Einheiten, diese sind im Anhang aufgeführt.

OY Car besitzt ein großes Massenverhältnis von $q = 0.1$, die Sternmassen sind $M_2 = 0.069 M_{\odot}$ und $M_1 = 0.696 M_{\odot}$, die Bahnperiode beträgt $P_{\text{orb}} = 5454$ s. Für das Gas benutzen wir wieder den polytropen Ansatz mit der Konstanten $k = 3.971 \cdot 10^{-9} R_{\odot}^2$, die Gaskonstanten sind $\gamma = 1.1$ und $\mu = 0.5$. Der Massentransferrate beträgt $\dot{M} = 10^{-9} M_{\odot}/\text{Jahr}$, die Scheibe benötigt damit mindestens 50 Bahnperioden, bis sie eine genügend große Masse erreicht hat.

Techniken für die Modellierung einer Scheibe mit Überstrom

Wie bisher verfahren, stellen wir hier sehr ausführlich die Techniken zur Modellierung des Überstroms und der Scheibe vor, diese Techniken finden dann auch in den zwei Rechnungen im nächsten Kapitel Verwendung.

Im letzten Kapitel wurde erläutert, wie durch geeignete Parametrisierung (Hessman 1999) die thermodynamischen Größen des Überstroms nahe am Überstrompunkt L_1 durch analytische Funktionen beschrieben werden können. Für die Modellierung mit FMM genügt es, bei jedem Restart die thermodynamischen Größen in dem Bereich des Überstroms nicht durch die alten Teilchen zu ermitteln, sondern durch die analytischen Größen f_a vorzugeben. Der geeignete Bereich, in dem der Überstrom parametrisiert wird ist beispielsweise

$$0.05 r_{LP} \leq x \leq 0.12 r_{LP} \quad (4.21)$$

wobei r_{LP} der Abstand vom L_1 -Punkt zum Primärstern ist, der Bereich in y -Richtung ist in der Regel mindestens 3 mal so groß und symmetrisch um die x -Achse gerichtet, er hängt von der Breite des Massenstroms ab. Die beiden Abstände x und y beziehen sich hier relativ zum

L_1 -Punkt. Da innerhalb der Rechenzeit eines Restartintervalls dieser Bereich nicht aufgefüllt wird, muß das Restartintervall kürzer sein als die Zeit, in der der Überstrom den 'analytischen' Bereich durchquert. Die angegebene Ausdehnung in x -Richtung ist in allen dokumentierten Simulationen ausreichend.

Nun ist es möglich, daß eine stark präzedierende Scheibe den Bereich des Zustroms passiert, die Scheibe wird das überströmende Gas ablenken und innerhalb eines Stoßprozesses aufnehmen. Während des Restartverfahrens kann dann schlecht zwischen vorhandenem Scheibenmaterial und neuem Zustrom unterschieden werden. In den Rechnungen hat sich allerdings gezeigt, daß eine Scheibe, die den Zustrombereich durchquert, eine wesentlich größere Dichte besitzt als der Zustrom selbst, die zuströmende Masse kann in diesem Fall vernachlässigt werden. Die für das Restartverfahren benutzten Größen f_R sind also einfach das Maximum aus den analytischen Größen f_a und den evtl. vorzufindenden Größen der simulierten Scheibe f_S .

Aus dem vorgegebenen Überdeckungsgrad der Teilchen folgt, daß manche Teilchen den Rand des Zustrombereichs schneiden, das Restartverfahren ermittelt die Größen dieser Teilchen nun aus Quasiinterpolationspunkten, die zum einen analytisch vorgegebene Größen enthalten und solchen, deren Größen sich aus der vorhandenen Teilchenkonfiguration ergeben. Dieser Umstand spielt in der Praxis keine Rolle, die Parametrisierung des Zustroms ist so gut, daß während der Simulation am Rand des Zustrombereichs keine Diskontinuitäten der thermodynamischen Größen auftreten.

Der so simulierte Massenüberstrom tritt in den Roche-Lobe des Primärsterns ein, die nächste Annäherung an ihn ist r_{\min} . Am Ort des Primärsterns wird das Potential singulär, es muß also ein geeigneter Bereich um den Primärstern aus dem Rechengebiet ausgespart werden. Dies geschieht wieder dadurch, daß dort während des Restartverfahrens keine neuen Teilchen angelegt werden, innerhalb eines Restartintervalls können die Teilchen jedoch in diesen Bereich eindringen. Bei einem geeignet gewählten Restartintervall erreicht jedoch kein Teilchen den singulären Punkt. Der Simulationsbereich ist also ein Kreisring um den Primärstern mit dem Innenradius $r_i = 0.4 r_{\min}$ und dem Außenradius $r_a = r_{L,P}$. Der Roche-Lobe besitzt den größten Abstand zum Primärstern an dem Punkt L_1 , der Simulationsbereich überdeckt also den restlichen Roche-Lobe vollständig. Vollführt eine Scheibe eine starke Präzession, so kann sie diesen Bereich jedoch überschreiten, der Außenradius ist dann geeignet anzupassen, etwa bis $r_a = 1.5 r_{L,P}$ jedoch mit der zusätzlichen Bedingung $x \geq L_{1,x}$. Während einer starken Präzession kann die Scheibe den Roche-Lobe des Sekundärsterns erreichen, in der Simulation wird dieser Anteil der Scheibe aus der Rechnung entfernt. Da der Sekundärstern seinen Roche-Lobe ausfüllt, würde in Wirklichkeit dieser Anteil der Scheibe auf die Oberfläche des Sekundärstern treffen und so akkretiert werden (und später dann wieder über den L_1 -Punkt überströmen, ein Effekt, der nicht Gegenstand unserer Untersuchung ist).

Um den Überstrom mit genügender Teilchenauflösung simulieren zu können, wählen wir jeweils Teilchen, die (für jeden Restart) auf einem uniformen, kartesischen Gitter angeordnet sind, die Auflösung über den gesamten Durchmesser des Rechengebiets sollte mindestens 150 Teilchen betragen, in diesem Beispiel wurden 170 und 250 Teilchen verwendet. Ein geeignetes Restartintervall ist $t_{RS} = P_{\text{orb}}/400$, man beachte, daß innerhalb einer Bahnperiode ein Teilchen auf dem Radius r_i bis zu 60 Umläufe um den Primärstern vollziehen kann.

Zusätzliche Viskosität zur Behandlung von Stößen

In den viskosen Rechnungen von Akkretionsscheiben mit Zustrom über den L_1 -Punkt treten häufig sehr starke Stöße auf. Wie in den bisherigen Beispielen gezeigt wurde, liegt die Strömungsgeschwindigkeit in Akkretionsscheiben stets im Überschallbereich. In den bisherigen Fällen war das Strömungsbild geeignet glatt, so daß der relative Unterschied der Geschwindigkeiten benachbarter Teilchen nur fast die Schallgeschwindigkeit erreichte. In dem vorliegenden Fall treten jedoch Stöße mit hohen Machzahlen von bis zu $M_{\text{Mach}} = 20$ auf. Ein möglicher Ort dieser Stöße ist der 'Hot Spot', also der Punkt, an dem der Zustrom auf die Scheibe trifft. Ist zu Beginn der Rechnung keine Scheibe vorhanden, so wird der Zustrom nach dem ersten Umlauf um den Primärstern sich selbst schneiden, auch dieses Zusammenreffen liegt weit im Überschallbereich. Der Stoß, der numerisch ab schwierigsten zu behandeln ist, ist eine Massenansammlung nahe am L_1 -Punkt, die auf die Scheibe fallen kann. Dieser Effekt erzeugt in der folgenden Rechnung zu AM CVn der Ort höchster Abstrahlungsleistung, zu genaueren Erklärung s. Kapitel 5. Ursache ist die nun berücksichtigte Viskosität, die ein radiales Wachstum der Scheibe bis zum bzw. sogar über den Roche-Radius verursacht. Reicht die Scheibe nahe an den L_1 -Punkt heran, so wechselwirkt das Scheibenmaterial zuerst mit dem Zustrom und wird leicht abgebremst. In diesem flachen Teil des Roche-Potentials besitzt das Scheibenmaterial eine geringe Bahngeschwindigkeit und strömt mit dieser gegen das weiter ansteigende Potential, wird dort aufgestaut und bildet so eine bogenförmige Massenansammlung. Es handelt sich um den Bereich, der in x -Richtung zwischen L_1 -Punkt und dem Massenzentrum liegt und in y -Richtung bis zum unteren Ende des Roche-Lobes des Primärsterns reicht, dieser Massenbogen ist in der Abbildung 4.12 beschrieben. Besitzt die Scheibe eine stark ausgeprägte Exzentrizität, so wird dieser Massenbogen bei jedem Präzessionsumlauf zuerst aufgefüllt, anschließend stürzt diese Masse auf den Außenrand der Scheibe. Aber auch für den Fall, in dem die Scheibe nur eine sehr geringe Präzession beschreibt, ist der Massenbogen keine stationäre Erscheinung, hat sich in ihm genügend Masse angesammelt, so kann er ebenfalls in periodischen Abständen auf den Scheibenrand fallen.

Zur Behandlung von Stößen mit FMM wurden die Reibungskräfte eingeführt. In Testrechnungen wurde gezeigt, daß mit ihnen Stoßfronten gut aufgelöst werden können, ohne daß sich die Teilchen durchdringen. Weiterhin besitzen sie die positive Eigenschaft, die Stoßfront nicht zu verbreitern. Letztere Eigenschaft erweist sich jedoch in dem vorliegenden Fall als nachteilig. In den auftretenden Stößen mit sehr hohen Machzahlen würden sich räumlich sehr kleine und zugleich sehr dichte Stoßfronten ausbilden und die Teilchen stark komprimieren. Sehr kleine Teilchen wirken sich jedoch negativ auf die numerische Steifigkeit aus, zudem müssten sehr starke Reibungskräfte wirken, damit sich diese Teilchen innerhalb der kurzen Distanzen nicht durchdringen. Auch während des Restart-Verfahrens müssten die lokal eng begrenzten Stoßgebiete mit genügender Teilchenzahl aufgelöst werden, in der von uns gewählten Teilchenauflösung würde jedoch ein Teilchenradius das gesamte Stoßgebiet überdecken. Zur Abhilfe dieses Problems wird eine weitere künstliche Viskosität betrachtet, deren Eigenschaft zu einer Glättung der Stoßfronten führt. Die neu eingeführte Kraft ist identisch mit der physikalischen Volumenviskosität, durch sie werden alle Stöße auf ein Maß verbreitert, das in etwa der Teilchenauflösung des Anfangsgitters entspricht. An dieser Stelle

erscheint es sinnvoll, einen Überblick über alle dissipativen Kräfte anzugeben, die auf das Fluid wirken:

- Es wirken Reibungskräfte, die sich nicht stoßverbreiternd auswirken, ihr Parameter R setzt sich wie folgt zusammen $R = R_0 + R_1 |\text{div } \mathbf{v}|$. Die Koeffizienten $R_{0,1}$ werden so gewählt, daß die relative Anordnung benachbarter Teilchen im Stoßgebiet in geeigneter Weise erhalten bleibt.
- Die turbulent erzeugte Viskosität wird durch eine physikalische Scherviskosität mit dem kinematischen Parameter $\nu = \eta / \Sigma = 3.0 \cdot 10^{-8} R_{\odot}^2 / \text{s}$ beschrieben.
- Zur geeigneten numerischen Behandlung wird eine stoßverbreiternde Volumenviskosität mit dem kinematischen Parameter $\zeta' = \zeta / \Sigma = c_{\zeta} \cdot \nu$ eingeführt. Der Parameter wird als Vielfaches des Parameters der Scherviskosität angeben.
- Die molekular verursachten Viskositäten, also die Materialeigenschaft des Fluids, müssten durch zusätzliche Scher- und Volumenviskositäten beschrieben werden. Diese Kräfte sind jedoch um viele Größenordnungen kleiner als die bereits eingeführten Viskositäten, so daß sie nicht berücksichtigt werden.

Alle drei aufgeführten Prozesse sind dissipativ und erzeugen Entropie. In dem jetzigen Beispiel von OY Car betrachten wir zunächst noch eine polytrope Zustandsgleichung, in der die Entropieerzeugung vernachlässigt wird. In den folgenden Rechnungen im nächsten Kapitel wird die Entropieproduktion aller dissipativen Prozesse in der Energiegleichung berücksichtigt.

Ergebnisse

Die Simulation beginnt mit einer leeren Scheibe, die erst durch den Überstrom am L_1 -Punkt gebildet wird, die Ergebnisse hängen damit nicht von einer Anfangsverteilung ab. Nach 75 Bahnperioden hat sich ein quasi-stationärer Zustand gebildet, d.h. außer der geringen Präzession innerhalb einer Bahnperiode ändert sich das Strömungsbild nicht mehr innerhalb den folgenden Bahnperioden. In der Dichtestruktur (s. Abb. 4.12) ist deutlich die zweiarmlige Spiralstruktur zu erkennen, deren Position im mitrotierenden Koordinatensystem stationär ist. In der ersten Rechnung mit hoher Teilchenauflösung musste aus numerischen Gründen eine hohe Volumenviskosität mit $c_{\zeta} = 15$ benutzt werden. Es bildet sich eine Scheibe, die am Außenrand noch recht weit vom Roche-Lobe entfernt ist, es stellt eine sehr kleine Exzentrizität ein.

Wie in der Abb. 4.13 zu erkennen ist, oszilliert der Schwerpunkt mit einer kleinen Amplitude in der Größenordnung von $0.02 a$, dies entspricht in etwa dem 10-fachen Wert, der in den nicht-viskosen Rechnungen ermittelt wurde, der zeitlich gemittelte Schwerpunkt liegt wieder zum Sekundärstern hin verschoben bei etwa $-0.004 a$. Auffallend in dieser Rechnung ist nun die ungewöhnliche Superhumpperiode von $P_{SH} = 0.41 P_{\text{orb}}$. Die Interpretation dieses niedrigen Wertes für P_{SH} erscheint schwierig. Zum einen ist die Scheibe nicht weit genug

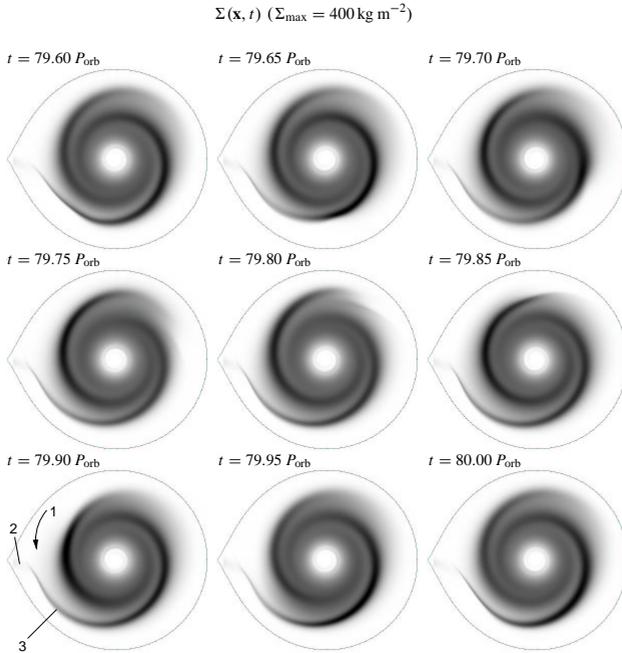


Abbildung 4.12: *Flächendichte in OY Car nach einer Gesamtsimulationszeit von 80 Bahnperioden, die gepunktete Kurve ist der Roche-Lobe des Primärsterns. Die Scheibe präzediert leicht, allerdings mit einer sehr schnellen Periode von 0.41 Bahnperioden bezüglich des mitrotierenden Koordinatensystems. Es entwickelt sich eine zweiarmlige Spiralstruktur, die höchste Dichte nimmt abwechselnd innerhalb der Superhumpperiode der eine und der andere Arm der Spirale ein. Im Bild l.u.: 1 zeigt die Strömungsrichtung an, 2 ist der eigentliche Zustrom, 3 zeigt den im Text erwähnten Massenbogen an. Er besitzt im flachen Bereich des Potentials eine geringe Rotationsgeschwindigkeit und enthält den geringen Massenanteil aus dem Überstrom. Innerhalb der Superhumpperiode nähert sich dieser Massenbogen einmal dem Scheibenrand, im Bild bei $t = 79.6$ und $t = 80.0$.*

ausgedehnt, so daß wesentliche, also massereiche Bereiche der Scheibe den Radius $r_{1,3}$ nicht erreichen, zum anderen könnte die Volumenviskosität einen zu großen dämpfenden Einfluß besitzen.

An dieser Stelle ist es nun angebracht, den Einfluß der künstlich hinzugefügten Volumenviskosität zu untersuchen. Rechnungen mit einem niedrigeren Wert von c_{ζ} sind möglich, wenn größere Teilchen und damit eine niedrigere Auflösung gewählt wird. Innerhalb der dynamischen Zeitskala durchlaufen größere Teilchen einen geringeren Anteil ihrer eigenen Ausdehnung und durchdringen sich gegenseitig nicht so schnell. Zudem werden innerhalb des Restartverfahrens die Stoßgebiete stärker geglättet. Mit einer Auflösung von 176 Teilchen kann man $c_{\zeta} = 3$ wählen. In diesem Fall ergibt sich aus der Schwerpunktsbewegung eine Superhumpperiode in der erwarteten Größenordnung, also leicht überhalb der Bahnperiode.

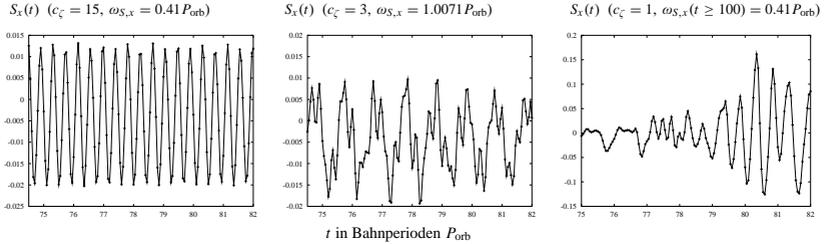


Abbildung 4.13: Schwerpunktsbewegung der Scheibe in x -Richtung in Abhängigkeit von der Volumenviskosität. Links mit einer Auflösung von 250 Teilchen auf dem Durchmesser des Simulationsgebiets $[-r_a : r_a]$, in der Mitte mit 176 und rechts mit 100 Teilchen. Die Bewegung in y -Richtung ist nicht abgebildet, da aus ihr keine neue Information hervorgeht.

Die komplexe Bewegung (s. Abb. 4.13 mitte) des Schwerpunktes lässt die Vermutung zu, daß sie das Ergebnis aus mehreren, sich überlagernden Effekten ist, denn der Anteil der ursprünglichen Periode von $0.41 P_{\text{orb}}$ ist noch zu erkennen. Die Amplitude dieser neuen Präzession hat in dem Fall geringerer Volumenviskosität nicht zugenommen. In einer weiteren Rechnung wurde versucht, ein noch niedrigerer Wert von $c_\zeta = 1$ zu wählen, hierfür wurde die Teilchenauflösung auf 101 reduziert. Als Anfangsbedingung wurde die Scheibe aus der Rechnung mit $c_\zeta = 3$ nach 74 Bahnperioden benutzt. Die Schwerpunktsbewegung zeigt daher zu Beginn noch die Periode aus der Rechnung mit $c_\zeta = 3$, nach weiteren 4 Bahnperioden stellt sich jedoch wieder die kurze Periode von $0.41 P_{\text{orb}}$ ein.

In erster Linie sind die Ergebnisse ernüchternd. Zum einen konnte die erwartete starke Präzession der Scheibe nicht nachgebildet werden, zum anderen scheint der Einfluß der Volumenviskosität, die nur aus numerischen Gründen eingeführt wurde, sehr entscheidend zu sein. Nur aus der Rechnung mit $c_\zeta = 3$ kann man annähernd die komplexen Zusammenhänge der Dynamik in diesem Beispiel erkennen, die Präzession einer Scheibe im Roche-Potential mit großem Massenverhältnis wird wohl eine Überlagerung der Frequenzen mehrerer störender Einflüsse sein.

Bewertet man die Ergebnisse aus astrophysikalischer Sicht, so konnte das Modell die beobachteten Superhumps nicht reproduzieren, denn in allen drei Rechnungen ist die Amplitude der Präzessionsbewegung viel zu klein, als daß daraus deutliche Helligkeitsschwankungen entstehen könnten. Betrachtet man den Modellansatz als richtig, so richtet sich der Zweifel an den willkürlich gewählten Parameter der Scherviskosität, die für die Ausdehnung der Scheibe bis zum resonanten Radius verantwortlich ist.

An dieser Stelle wären nun weitere Parameterstudien angebracht. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß es sich bei diesen Testrechnungen um ein aktuell laufendes Projekt handelt, Vergleichsergebnisse aus Rechnungen mit anderen numerischen Verfahren liegen derzeit noch nicht vor. Parameterstudien im Rahmen des laufenden Projekts werden außerhalb des Rahmens dieser Dissertation weitergeführt. Aus vorläufigen Ergebnissen aus den Rechnungen mit SPH ist jedoch ersichtlich, daß sich dort eine etwas stärkere Präzession der Scheibe einstellt. Rechnungen mit SPH benutzen eine andere Art der künstlichen Viskosität, diese wirkt zum

einen nur für den Fall $\text{div } \mathbf{v} < 0$, also bei Annäherung der Teilchen. Dadurch wird die Scheibe in Gebieten der Expansion nicht gedämpft. Eine entsprechende Formulierung der Volumenviskosität wäre auch in FMM möglich, leider ist das gewählte Zeitschrittverfahren (Gauger et al. 2000) nicht für diese Art der Kraft geeignet. Die sonstigen geschwindigkeitsabhängigen Kräfte, also die Reibung und die Scherviskosität machen das System numerisch so steif, daß mit einem Zeitschrittverfahren wie DOPRI keine Ergebnisse in sinnvoller Rechenzeit erzielbar sind. Der Nachteil der künstlichen Viskosität in den SPH Rechnungen ist der nicht bekannte Scheranteil. Dieser kann letztendes die zusätzliche viskose Kraft liefern, damit sich die Scheibe weiter ausdehnen kann.

Es ist ersichtlich, daß der willkürlich gewählte Wert des konstanten Parameters ν der Scherviskosität zusätzliche Unsicherheiten bezüglich der astrophysikalischen Interpretation der Ergebnisse beinhaltet. Das physikalische System zeigt die deutliche Präzession nur während eines Superausbruchs. Ist genügend Masse in der Scheibe vorhanden, heizt sie sich auf, wird optisch dick, die Viskosität nimmt zu und sie dehnt sich weiter aus. Offenbar beschreibt der konstant gewählte Parameter ν die Größe der tatsächlich vorherrschenden Viskosität nicht richtig.

Letztere Tatsache soll Motivation sein, in den folgenden Rechnungen nun das gesamte, nicht vereinfachte Modell der dünnen Scheibe mit α -Viskosität zu berücksichtigen. Das vollständige Modell wird daher auch den Zusammenhang aus viskoser Heizung und Abkühlung durch Wärmestrahlung selbstkonsistent berücksichtigen müssen.

5 Akkretionsscheiben in Kataklysmischen Variablen

Ausgehend von den bisherigen Überlegungen zu dünnen Akkretionsscheiben und den Erfahrungen aus den Testrechnungen wird nun das Simulationsmodell um die Berücksichtigung der Wärmebilanz erweitert. Die Rechnungen beschreiben die Scheibe in dünner Näherung und mit der α -Parametrisierung der Viskosität in der Weise, wie sie in Kapitel 3 vorgestellt wurde.

Es werden Simulationen zu zwei verschiedenen Doppelsternsystemen vorgestellt. Zum einen ist dies der Superhumper AM CVn, ein System mit extremem Massenverhältnis, in dem eine präzedierende Scheibe zu erwarten ist und zum zweiten die Zwerg-Nova U Geminorum, die in astronomischen Beobachtungen Ausbrüche zeigt und in der wir eine thermische Instabilität nach dem Scheibeninstabilitätsmodell erwarten. Der gemischte Typ der SU UMa-Sterne, in denen die Scheibe einen Ausbruch aufweist und während diesem eine Präzessionsbewegung ausbildet, haben wir für den Fall von OY Car im letzten Kapitel in einer Testrechnung betrachtet.

Der Unterschied zu den bisherigen Simulationen liegt in der Berücksichtigung der Energiegleichung. Die Scheibe unterliegt einer Wärmeproduktion durch die drei genannten dissipativen Prozesse und einem Wärmeverlust durch Schwarzkörperstrahlung. Die zugehörigen Gleichungen und die Materialgesetze, insbesondere die Opazitäten, wurden bereits vorgestellt. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird die numerische Behandlung dieser speziellen Form der Energiegleichung für die Methode der Finiten Massen erläutert.

Die Simulationen der beiden Systeme beginnen mit einer leeren Scheibe, die sich erst durch den Massenüberstrom am inneren Lagrange-Punkt ausbildet. Die Scheibe entwickelt sich infolge diesem dynamisch als auch thermisch selbstkonsistent. Die thermodynamischen Druckkräfte beeinflussen die Dynamik in der Scheibenebene nur marginal. Innerhalb des Modells der dünnen Scheibe bestimmen sie jedoch das Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung und legen damit die Scheibenhöhe fest, die in die Parametrisierung der Scherviskosität eingeht. Die viskosen Kräfte dominieren in zweiter Linie nach den äußeren Kräfte die Scheibendynamik. Die Berücksichtigung der Wärmebilanz wird sich vermutlich wesentlich auf die Evolution der Scheibe auswirken.

5.1 Behandlung der Schwarzkörperstrahlung in vertikaler Richtung

Die Behandlung der Kühlrate der Scheibe durch Abstrahlung von Wärmestrahlung ist kein grundlegendes Problem, sondern führt lediglich auf numerisch sehr steife Anteile in den Gleichungen. Sind lokal die zweidimensionalen thermodynamischen Variablen bekannt, erhält man über sie die Scheibenhöhe H und dadurch die dreidimensionale Dichte ρ , aus dieser lassen sich geeignete Beschreibungen der Opazitäten angeben. Sind diese bekannt, kann der Energieverlust durch Schwarzkörperstrahlung eindeutig beschrieben werden. Die Wärmebilanz ergibt sich aus dissipativer Heizung und Strahlungsverlust

$$\delta Q^{R,v,\zeta'} - \delta Q^{BB} \quad (5.1)$$

und bestimmt dadurch eine Entropieänderung S' .

In kataklysmischen Variablen besitzen die Scheiben oft eine sehr hohe Temperatur, die Wärmestrahlung, die proportional zur vierten Potenz in der Temperatur ist, liefert dabei Kühlraten auf sehr kurzen Zeitskalen. Sehr starke Kühlraten zwingen eine Scheibe natürlich auch sehr schnell in das Gleichgewicht aus dissipativer Heizung und strahlungsbedingter Kühlung. In der Praxis zeigte sich jedoch, daß immer lokal Gebiete vorhanden sind, in denen der eine oder andere Term überwiegt, dies führt letztlich zu numerisch steifen Gleichungen. Um dies zu verdeutlichen, stellen wir tabellarisch die Zeitskalen der verschiedenen Prozesse gegenüber, die Zahlenangaben gelten für eine Scheibe in dem System U Gem.

Abkühlung einer optisch dünnen Scheibe von $T = 1.2 \cdot 10^5$ K auf $1.0 \cdot 10^5$ K	$\Delta t \approx 0.1$ s
Keplerperiode eines Testteilchens bei $r = r_{\text{zirk}}$	$P_K \approx 300$ s
Bahnperiode des Systems	$P_{\text{orb}} \approx 1.5 \cdot 10^4$ s
Gesamtsimulationszeit 100 Bahnperioden	$t \approx 1.5 \cdot 10^6$ s
Erreichbare Zeitschrittweite des Integrators ohne Integration der Entropie; dynamische Zeitskala	$t_d \approx 1 - 3$ s

Das Zeitschrittverfahren, wie es in [Gauger et al. \(2000\)](#) beschrieben wird, löst die Entropiegleichung nach einem halb expliziten und halb impliziten Verfahren. Sei \mathbf{z} der Vektor aller Teilchenentropien und $\mathbf{w}(\mathbf{z})$ die mit der Temperatur skalierte Wärmeproduktion, so liefert dieses Verfahren die Entropien zum folgenden Zeitschritt $k + 1$ mit der Zeitschrittweite t_d über die Gleichung

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + \frac{t_d}{2} \mathbf{w}(\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k) + \frac{t_d}{2} \mathbf{w}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1}). \quad (5.2)$$

Die Gleichung wird innerhalb des erweiterten Verlet-Schemas an dem versetzten Halbschritt ausgewertet, an dem die Geschwindigkeit um einen Halbschritt integriert wurde, also bei $\mathbf{v}_{k+1/2}$, die beiden Wärmeproduktionen werden an den zwei Teilchenpositionen \mathbf{x}_k und \mathbf{x}_{k+1} ausgewertet.

Durch die Art, wie in FMM die Entropie dargestellt wird (durch den Überlapp der Teilchen), sind die Komponenten der Gleichung nicht entkoppelt, können also nicht für die Teilchen einzeln gelöst werden. Zur Lösung des Gleichungssystems wird in Gauger et al. (2000) eine Fixpunktiteration vorgeschlagen. Wird in unserer Energiegleichung der steife Kühlterm berücksichtigt, konvergiert dieses Verfahren nicht mehr für sinnvolle Zeitschrittweiten t_d . Es wurde an dieser Stelle versucht, die Gleichung 5.2 mit einem Sekantenverfahren zu lösen. Das Sekantenverfahren soll die Funktion

$$\mathbf{g} = -\mathbf{z}_{k+1} + \hat{\mathbf{z}} + \frac{t_d}{2} \mathbf{w}(\cdot, \mathbf{z}_{k+1}) \quad (5.3)$$

minimieren, es ist $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{z}_k + t_d/2 \mathbf{w}(\cdot, \mathbf{z}_k)$. Zwei geeignete Startwerte sind $\mathbf{z}_1 = \hat{\mathbf{z}}$ und $\mathbf{z}_2 = \hat{\mathbf{z}} + t_d \mathbf{w}(\cdot, \mathbf{z}_k)$. Dieses Verfahren eignet sich etwas besser als die Fixpunktiteration, leider konnten dennoch keine geeigneten Schrittweiten auf der dynamischen Zeitskala erreicht werden.

Wir entscheiden uns daher für einen anderen Weg, die Kühlung der Scheibe zu berücksichtigen und führen einen lokalen Kühlterm ein, der für jedes Teilchen einzeln ausgewertet wird. Betrachtet man zunächst den Kühlterm, der die Temperatur in der vierten Potenz enthält, so wird sich die Temperatur in der Scheibe, unter Vernachlässigung der dissipativen Heizung, wie folgt entwickeln

$$\frac{\partial T}{\partial t} \propto T^4, \quad (5.4)$$

die lokale strahlungsbedingte Kühlung kann aus dieser Gleichung explizit bestimmt werden. In der Zeit Δt kühlt die Scheibe von der Anfangstemperatur T_0 auf die Temperatur

$$T_1 = \left[\frac{8\sigma}{\tau \Sigma c_v} \Delta t + T_0^{-3} \right]^{-\frac{1}{3}} \quad (5.5)$$

ab. Diese Gleichung gilt exakt für beliebig große Δt , solange die lokalen Scheibengrößen τ und Σ als konstant angesehen werden können. Wir werden nun mit Hilfe der Gleichung 5.5 eine Kühlprozedur sowie eine dissipative Heizung für jedes einzelne Teilchen definieren. Die Idee besteht nun darin, durch Operatorsplitting die dynamische Entwicklung sowie die Heiz- und Kühlterme zu entkoppeln. Während eines Zeitschritts t_d auf der dynamischen Zeitskala, der durch das Zeitschrittverfahren vorgegeben wird, wird auf jedes Teilchen mehrmals abwechselnd eine Heiz- und Kühlprozedur angewendet. Die neue Zeitschrittweite bezeichnen wir mit t_w und benutzen zur Nummerierung der Unterzeitschritte den Index n . Für die teilchenbezogene Heizprozedur führen wir für jedes Teilchen i die näherungsweise thermodynamischen Größen

$$\Sigma_i = a_{\psi} \det \mathbf{H}_i^{-1} m_i \quad \text{und} \quad (5.6)$$

$$s_i = a_{\psi} \det \mathbf{H}_i^{-1} m_i S_i \quad (5.7)$$

der zweidimensionalen Massen- und Entropiedichte ein. Diese Näherungen sollen die tatsächlich vorherrschenden thermodynamischen Größen im Teilchenträger näherungsweise beschreiben, sie sind aus dem Restartverfahren motiviert und entsprechen einer Quasiinterpolation mit einer 1-Punkt Formel für Teilchen, die auf einem uniformen Gitter angeordnet

sind. Sind die Größen Σ und s innerhalb eines Teilchens konstant, so entspricht diese Gleichung sogar der Quasiinterpolation höherer Ordnung. In [Gauger \(2000\)](#) und in dem Abschnitt über das Restartverfahren wurde gezeigt, wie aus gegebenen thermodynamischen Feldern Σ und s die Teilchengrößen m_i und S_i hergeleitet werden können. Aus den Simulationen zu den viskosen Scheiben ist bekannt, daß die Dichte lokal eine hinreichend glatte Funktion ist, weiterhin ist das Restartintervall so klein, daß sich die Teilchenpositionen zu jedem Zeitpunkt nahezu wie auf einem uniformen Gitter angeordnet befinden, vernachlässigt man den Bereich sehr nahe der Zentralmasse. Daraus folgt, daß die Näherungen in [5.6](#) ausreichend genau sind. Zu dem festgehaltenen Zeitpunkt auf der dynamischen Zeitskala mit dem Index k ist die Wärmeproduktion $\dot{z}_{i,k} = w_{i,k}(z_{i,k})$ für jedes Teilchen i bekannt, aus ihr folgt die Änderung der Entropiedichte innerhalb der Teilchen

$$\hat{w}_{i,k} = w_{i,k} \Sigma_{i,k}. \quad (5.8)$$

Mit dieser Wärmeproduktion definieren wir den teilchenbezogenen Heizungsprozeß innerhalb der Zeit t_w als eine Integration mit einem expliziten Eulerverfahren

$$s_{i,n+1}^a = s_{i,n} + t_w \hat{w}_{i,k} / T_{i,n}, \quad (5.9)$$

dabei folgen die abhängigen, teilchenbezogenen thermodynamischen Größen aus der gegebenen Zustandsgleichung $T_i = T_i(\Sigma_i, s_i)$. Aus der neuen Temperatur nach dem Heizungsprozeß $T_{i,n+1}^a$ wird nun die neue, teilchenbezogene optische Tiefe

$$\tau_{i,n+1} = \tau_{i,n+1}(\Sigma_{i,k}, T_{i,n+1}^a) \quad (5.10)$$

aus den Gleichungen der dünnen Scheibe bestimmt, also mit der auf der dynamischen Zeitskala festgehaltenen Flächendichte $\Sigma_{i,k}$, aber der aktualisierten Temperatur $T_{i,n+1}^a$. Aus dem nun folgenden Kühlprozeß wird die neue Temperatur nach Gleichung [5.5](#) bestimmt

$$T_{i,n+1}^b = T_{i,n+1}^b(\Sigma_{i,k}, T_{i,n+1}^a, \tau_{i,n+1}, t_w) \quad (5.11)$$

und aus dieser mit Hilfe der Zustandsgleichung die neue Entropiedichte

$$s_{i,n+1}^b = s_{i,n+1}^b(\Sigma_{i,k}, T_{i,n+1}^b). \quad (5.12)$$

Danach folgt wieder ein neuer Heizprozeß. Nach dem letzten Kühlprozeß erhält man die neue Teilchenentropie

$$S_{i,k+1} = S_{i,k+1}(s_{i,n+1}^b) \quad (5.13)$$

aus Gleichung [5.7](#).

Diese Vorgehensweise zur Lösung der Energiegleichung ist in der Praxis sehr vorteilhaft, die teilchenbezogene Sichtweise erlaubt eine schnelle und effiziente Implementierung und Parallelisierung, dies wiederum erlaubt es, eine geeignet kleine Zeitschrittweite zu wählen. In den folgenden Rechnungen wurde $300 \cdot t_w = t_d$ gewählt. Ist die Scheibe im Gleichgewicht und vernachlässigt man Randgebiete sehr geringer Masse, so kann durch die hohe Anzahl an Heiz- und Kühlschritten die Bedingung

$$|T_n^b - T_{n+1}^b| \simeq 10^{-4} \bar{T} \quad (5.14)$$

erfüllt werden, \bar{T} sei eine typische Temperatur der Scheibe. Die Temperatur der Scheibe ist also zu jeder Zeit hinreichend gut definiert. Betrachtet man typische Scheibengrößen, so lässt sich die Entkopplung wie folgt rechtfertigen; die Zeit, die eine Schallwelle mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c_s benötigt, um die Scheibenhöhe H in vertikaler Richtung zu durchlaufen, liegt in der Größenordnung der dynamischen Zeitskala t_d , während dieser Zeit kann die Flächendichte, die Scheibenhöhe und deshalb auch die dreidimensionale Dichte als konstant angenommen werden. Für konstantgehaltene Scheibenhöhe kann auch die α -Parametrisierung der Viskosität als konstant angenommen werden und damit auch die viskose Heizung w_k . Die Ionisation des Gases ist durch atomaren Zeitskalen bestimmt, die thermische Entwicklung der Scheibe erfolgt im Vergleich zur dynamischen Zeitskala quasi instantan. Für jeden thermischen Schritt wird daher die optische Tiefe, die aus den Opazitäten folgt, neu berechnet. Die lokalen thermodynamischen Variablen können dadurch innerhalb eines dynamischen Zeitschritts den sprunghaften Verlauf auf der S-Kurve zum optisch dicken bzw. optisch dünnen Zustand beschreiben. Die gewählte Vorgehensweise erscheint geeignet dafür zu sein, den thermischen Zustand der Scheibe in ausreichender Weise so zu beschreiben, daß damit die in dem Scheibeninstabilitätsmodell enthaltenen Vorhersagen gut reproduziert werden können.

5.2 Der Superhumper AM Canum Venaticorum

Das System AM CVn ist Namensgeber einer weiteren Gruppe massetransferierender Doppelsterne, diese werden oft als Extremfall zu den Kataklysmischen Variablen gezählt, manchmal auch als eigene Klasse behandelt, die Ähnlichkeiten zu den CV's aufweisen. In den Beobachtungsdaten solcher Systeme finden sich Helligkeitsschwankungen auf sehr kurzen Zeitskalen, die auf kurze Bahnperioden von unter 20 min. schließen lassen. Spektroskopische Beobachtungen lassen reine Heliumlinien ohne Anteile von Wasserstoff erkennen. Aus beiden Beobachtungen folgt, daß auch der Sekundärstern ein Weißer Zwerg ist, sein Roche-Volumen ausfüllt und Helium aus seiner Atmosphäre an den Primärstern, ebenfalls ein Helium-Weißer Zwerg, verliert.

Die Interpretation der Beobachtungsdaten von AM CVn war lange Zeit unklar, die Lichtkurve zeigt Variationen unterschiedlicher Frequenzen. Aus neueren Beobachtungen (Harvey et al. 1998) konnte das Signal mit der Periode 1051 s nun eindeutig als das Signal einer präzedierenden Scheibe mit dieser Superhumperperiode festgelegt werden, aus Langzeitmessungen wurde die Bahnperiode von $P_{\text{orb}} = 1028.7325 \pm 0.0004$ s ermittelt. Dieses Ergebnis wird auch von photometrischen Messungen des Hot-Spots (Nelemans et al. 2001) bestätigt. Aus der dauernden Existenz beider Signale lässt sich AM CVn als permanenter Superhumper identifizieren, die Scheibe ist in ihrem Ausbruch nach dem DIM gefangen, ist also dauernd optisch dick und heiß. Die dauernd präzedierende, exzentrische Scheibe befindet sich in einem quasi-stationären Zustand, die Akkretionsrate auf den Primärstern ist im Gleichgewicht mit der für dieses System sehr hohen Überstromrate von $\dot{M} = 3.9 \cdot 10^{-9} M_{\odot}/\text{Jahr}$. Die hohe Massentransferrate ist vermutlich dafür verantwortlich, die Scheibe in ihrem Ausbruch gefangen zu halten. AM CVn besitzt ein extremes Massenverhältnis von $q = 0.0844$, das die

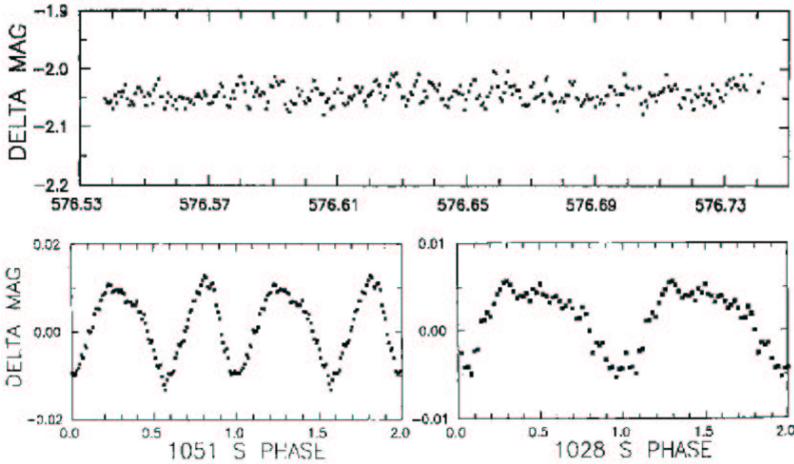


Abbildung 5.1: Die Lichtkurve aus photometrischen Beobachtungen zeigt (oben) eine Überlagerung von Variationen mit verschiedenen Frequenzen. Summiert man die Lichtkurve in einem bestimmten Phasenabstand auf (unten), so erhält man das Hauptsignal bei 1051 s und die Bahnperiode mit 1028 s, die typischerweise zwei benachbarte Maxima aufweist. (Aus Harvey et al. (1998)).

Existenz des Superhumpphenomens begünstigt.

Aus der hydrodynamischen Simulation der Akkretionsscheibe sollte sich folgendes bestätigen: ausgehend von der Bahnperiode, die aus den Beobachtungsdaten gewonnen wurde, und dem parametrisierten Überstrom, soll sich eine präzedierende Scheibe entwickeln, die eine Superhumpperiode nahe der beobachteten aufweist. Die einzigsten Eingangsparameter sind die Parameter des Binärsystems \dot{M} , $M_{1,2}$, P_{orb} , die Parameter des Überstroms, die Materialparameter für ionisiertes Helium inklusive der zugehörigen Opazitäten aus Iglesias & Rogers (1996) und einer geeigneten Wahl eines zeitlich und räumlich konstanten Parameters α der Scherviskosität. Die Rechnungen beginnen mit einer leeren Scheibe, diese entwickelt sich selbstkonsistent aus dem Massenüberstrom. Aus den Ergebnissen erwartet man eine Bestätigung, daß sich die Scheibe in einem permanent heißen, optisch dicken Zustand befindet, weiterhin soll die Lokalität des eigentlichen Superhumpphenomens, also die Orte erhöhter Dissipation innerhalb der Superhumpperiode bestimmt werden.

5.2.1 Simulation der Scheibe von AM CVn

Alle wesentlichen Modellierungstechniken sind bereits aus den Testrechnungen bekannt. Wir benutzen wieder Teilchen, die in ihrer Ausgangslage auf einem uniformen, kartesischen Gitter angeordnet sind, die Entwicklung der Scheibe kann während der ersten Bahnperioden mit einer kleinen Auflösung von 200 Teilchen auf dem Durchmesser des gesamten Gebiets gerechnet werden. Ist die Scheibe ausgebildet, wird die Auflösung auf 280 Teilchen angehoben, bei dieser Auflösung sind insgesamt ca. 34000 Teilchen an der Simulation beteiligt. Innerhalb

der ersten Bahnperiode wird die Energiegleichung vernachlässigt und mit einer polytropen Zustandsgleichung gerechnet. Der Zustrom, der zu Beginn in das Vakuum einfließt, würde sich zu stark abkühlen. Wieder wird für die erste Bahnperiode, bis sich eine kleine Scheibe nahe bei r_{zirk} gebildet hat, eine hohe Volumenviskosität von $\zeta' = 9 \cdot 10^{-7} R_{\odot}^2/\text{s}$ benutzt, die danach auf ein Drittel dieses Wertes verringert wird. Da wegen der stoßverbreiternden Volumenviskosität keine steilen Druckgradienten mehr erzeugt werden, kann zur Raumintegration über die Teilchen die 9-Punkt-Sparse Quadraturformel benutzt werden. Das Restartverfahren arbeitet mit einem 3-stufigen Glättungsverfahren auf einem engmaschigen Gitter mit $g_{SM} = 0.0625$ für die Massen- und Entropiedichte. In der Rechnung werden keine Randbedingungen betrachtet. Wegen der steifen Terme aus der Schwarzkörperstrahlung können am Rand der Scheibe nachteilige numerische Effekte auftreten, aufgrund der sehr geringen Massendichte besitzt dort die Scheibe eine sehr geringe Wärmekapazität und kühlt schnell ab, daher muß für die Gleichung 5.5 eine kleinste mögliche Temperatur von $T_{\text{min}} = 10\text{ K}$ eingeführt werden, dies ist für die sehr heißen Scheiben ein genügend kleiner Wert. Durch das Restartverfahren können am Rand durch Approximationsfehler sehr hohe Temperaturen erzeugt werden, so wird die neue Temperatur nach dem Restart auf $T_{\text{max}} = 10^7\text{ K}$ begrenzt, Teile der Scheibe mit hoher Massendichte erreichen Temperaturen von typischerweise $10^4 - 10^5\text{ K}$, die Temperaturobergrenze ist für unsere Fälle genügend hoch. Grund für den Approximationsfehler ist das Vorgehen, nach dem das Restartverfahren nur Teilchen mit einer bestimmten Mindestmasse erzeugen darf. Für die Massendichte ist dieses Vorgehen sinnvoll, da sie am Rand über einen geeigneten breiten Bereich flach abfällt, dieses Verhalten gilt jedoch nicht für die Entropiedichte. In den Rechnungen wird der Wert $\alpha = 0.5$ für den Parameter der turbulent erzeugten Scherviskosität benutzt, der Wert ist im Raum und in der Zeit konstant.

5.2.2 Ergebnisse der Simulation von AM CVn

Nach einer Simulationszeit von etwa 50 Bahnperioden hat sich eine stark exzentrische, präzedierende Scheibe ausgebildet. In diesem Zustand befindet sich die Scheibe in einem quasi-stationären Zustand, die Exzentrizität ist voll ausgebildet und ändert sich über mehrere Bahnperioden nur unwesentlich, die Präzessionsperiode ist ebenfalls über mehrere Bahnperioden stabil. Der äußere Scheibenradius überschreitet dabei deutlich den resonanten Radius $r_{1,3}$, in bestimmten Phasen der Superhumperperiode überschreitet er sogar den Roche-Lobe des Primärsterns (s. Abb. 5.2), diese Teile der Scheibe besitzen also eine höhere potentielle Energie im Roche-Potential als der Überstrom am L_1 -Punkt. Diese Beobachtung verdeutlicht die enorme Dynamik der Präzessionsbewegung und den Einfluß der viskosen Kräfte.

Während der Präzessionsbewegung überschreitet der Außenrand der Scheibe auch den Punkt des Überstroms, in der Simulation wird zu diesen Zeiten der Zustrom vernachlässigt, da auch in dem realen System die Überstrombedingungen gestört sein dürften. Das Simulationsgebiet ist weiterhin auf das Gebiet $x \geq L_{1,x}$ begrenzt, in der Simulation verliert daher die Scheibe zusätzlich an Masse durch Ausstrom in Richtung des Sekundärsterns. Zur Erklärung der Bilder sei nochmals auf die Wahl des mitrotierenden Koordinatensystems hingewiesen, dieses rotiert gegen den Uhrzeigersinn, den gleichen Umlaufsinn hat das Gas um den Primärstern, die Präzessionsbewegung verläuft für den mitrotierenden Beobachter im Uhrzei-

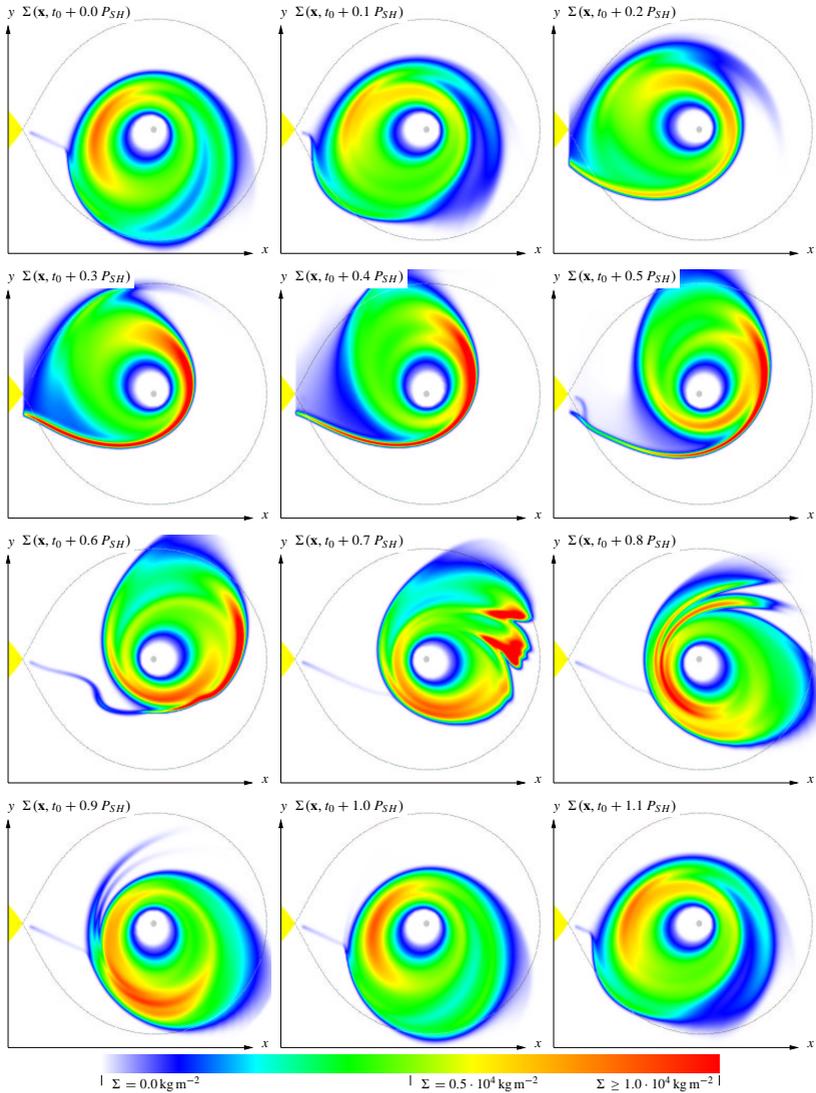


Abbildung 5.2: Flächendichte der präzidierenden, exzentrischen Scheibe innerhalb einer Superhumperperiode ($1 P_{SH} = 1051$ s, $1 P_{orb} = 1029$ s). Die gelbe Fläche links ist der Roche-Lobe des Sekundärsterns, die gepunktete Linie der Roche-Lobe des Primärsterns und der graue Punkt zeigt die Position des Primärsterns an.

gersinn. Die Periode der Präzession im mitrotierenden Koordinatensystem ist die Superhumperperiode P_{SH} , mit dieser Periode überschreitet der Scheibenrand den Ort des Überstroms L_1 . Für einen ruhenden Beobachter ist die Präzessionsperiode der Scheibe die Schwebungsperiode P_b . Zeigt die Exzentrizität der Scheibe in Richtung des L_1 -Punktes, so sammelt sich dort im flachen Bereich des Potentials vermehrt Scheibenmaterial an. Das entgegen des Uhrzeigersinns strömende Gas staut sich in dem wieder ansteigenden Potential zu dem bereits beschriebenden Massenbogen auf. Bewegt sich nun die exzentrische Ausprägung der Scheibe von diesem Ort weg, wird der Massenbogen immer weniger mit neuem Material gefüttert, so daß er schließlich nicht mehr gegen das ansteigende Potential aufgestaut werden kann und auf den Außenrand der Scheibe fällt. Die fallende Masse beschreibt dabei einen Weg, der sehr nahe an dem Weg des Massenüberstroms liegt, der Auftreffpunkt auf die Scheibe liegt demnach ebenfalls sehr nahe am Hot-Spot, also dem Auftreffpunkt des Überstroms. Im Bild zur Zeit $t_0 + 0.5 P_{SH}$ besitzt der Massenbogen ein doppeltes Ende, der obere Teil ist dabei der Überstrom, der von dem Außenbereich der Scheibe mit sehr geringer Dichte auf den Massenbogen gelenkt wird.

In der nächsten Abbildung 5.3 ist der Vorgang, bei dem der Massenbogen auf die Scheibe stürzt, nochmals in kürzeren Zeitabständen dargestellt. Es wird hier die abgestrahlte Energie $D^{0.25}$ abgebildet, die bereits als einfaches Abstrahlungsmodell für Licht im sichtbaren Bereich vorgestellt wurde. Die Funktion der gesamten abgestrahlten Energie D besitzt einen so hohen Kontrast, daß sie, auf einer linearen Farbskala abgebildet, zu keinen informativen Abbildungen führen würde. Es ist deutlich der Vorgang zu erkennen, in dem der Massenbogen auf die Scheibe stürzt, dies ist der Ort und der Zeitpunkt höchster lokaler Abstrahlungsleistung (im der Abb. in blauer Farbe bei $t_0 + 0.12 P_{SH}$). Daraufhin folgt eine kurze Phase erhöhter Dissipation am Scheibenrand.

Der beschriebende Vorgang stellt einen Anteil des beobachteten Superhumperphänomens dar, der Ort stark erhöhter Dissipation ist dabei lokal eng auf den Bereich begrenzt, in dem der Hot-Spot beobachtet wird, man kann den Vorgang also auch als eine Art Verstärkung des Hot-Spots beschreiben. Die Ausbildung der Schockfront folgt in unseren Rechnungen natürlich dem zweidimensionalen Ansatz. In einer dreidimensionalen Beschreibung könnte ein Teil dieses Materials über und unter die Scheibe gelangen. In den beobachteten Lichtkurven ist jedoch die Abstrahlung der gesamten Scheibe enthalten, auch diese ändert sich natürlich innerhalb einer Superhumperperiode. Bereits aus den Bildern der Flächendichte erkennt man, daß die Scheibe nicht einfach elliptisch deformiert ist, die Form bleibt innerhalb einer Superhumperperiode nicht einmal selbstähnlich, die Scheibe wird in dem nicht axialsymmetrischen Potential in ihrer globalen Form abwechselnd deformiert, sprichwörtlich durchgeknetet. Für die Beobachtungen folgt daher, daß mittels photometrischen Messungen dennoch zwischen dem Hot-Spot und den der erhöhten Dissipation der gesamten Scheibe unterschieden werden kann, wie in Nelemans et al. (2001) dargelegt wird. In der Abb. 5.3 ist zur Zeit $t_0 + 0.225 P_{SH}$ deutlich der Hot-Spot als Ort höchster Abstrahlungsleistung zu erkennen, die Beobachtung dieses Punktes wird durch Abdeckung mit der Bahnperiode P_{orb} moduliert. Neben dem Hot-Spot ist zu diesem Zeitpunkt der Innenbereich der Scheibe der Ort höchster Abstrahlung, da dort aufgrund der Scherkräfte die höchste Dissipation auftritt. Das Zusammenspiel beider Effekte liefert die komplexe Struktur der beobachteten Lichtkurve. Würden wir

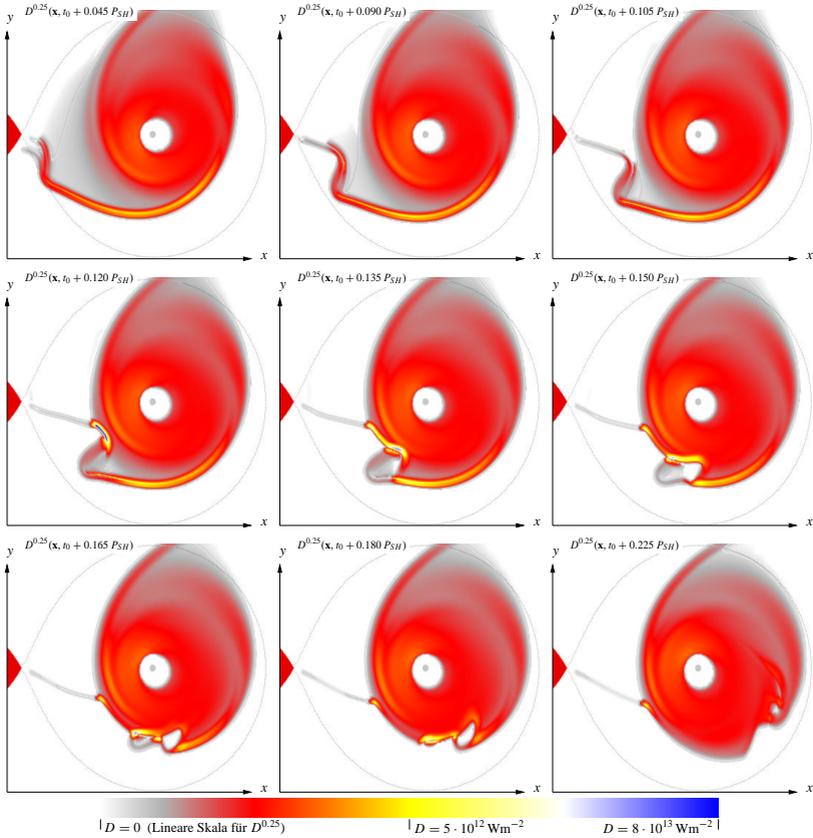


Abbildung 5.3: Abstrahlungsleistung während des Superhumpphenomens zeitlich hoch aufgelöst. Die angestaute Massenansammlung stürzt auf den Außenrand der Scheibe, der Ort höchster Abstrahlungsleistung (blau, bei $t = t_0 + 0.12 P_{SH}$) liegt sehr nahe am Ort des Hot-Spot, bei $t = t_0 + 0.225 P_{SH}$ ist der Hot-Spot der Ort höchster Abstrahlungsleistung.

annehmen, das System besitze keine präzedierende Scheibe, sondern die Lichtkurve würde durch eine Modulation der Überstromrate verursacht, was etwa bei einem Doppelsternsystem der Fall sein könnte, das in elliptischen anstatt kreisförmigen Keplerbahnen rotiert, so würde der modulierte Überstrom eine Modulation des Hot-Spots mit sich führen und so insgesamt einen ähnlichen beobachtbaren Effekt auslösen. Allerdings wäre diese Modulation natürlich an die Bahnperiode gekoppelt und es könnte keine Lichtkurve entstehen, die eine Überlagerung mehrerer Frequenzen aufweist.

Integriert man die Abstrahlungsleistung D über die gesamte Scheibe zu verschiedenen Zeiten, erhält man die simulierte Lichtkurve des Systems, sie ist in Abb. 5.4 zu sehen.

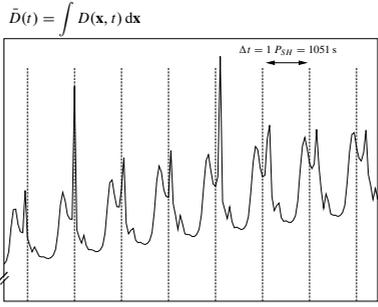


Abbildung 5.4: Die simulierte Lichtkurve von AM CVn entsteht durch Integration der Abstrahlungsleistung über die gesamte Scheibe. In der Simulation wurde eine Superhumperperiode von $P_{SH, \text{sim}} = 1080 \text{ s} \pm 10 \text{ s}$ ermittelt, und liegt damit etwas über der beobachteten Periode von $P_{SH} = 1051 \text{ s}$.

Die beobachtete Lichtkurve berücksichtigt nur den sichtbaren Bereich des abgestrahlten Spektrums. Da zudem keine Ortsauflösung in der Beobachtung möglich ist, enthält sie neben dem Licht aus der Scheibe auch die Abstrahlung beider Sterne inklusive aller möglichen Abdeckungseffekte. Der quantitative Vergleich aus beobachteter und simulierter Lichtkurve berücksichtigt daher nur die Frequenz der zeitlichen Modulation und nicht die Amplitude der Strahlungsleistung. Die simulierte Superhumperperiode stimmt mit $P_{SH, \text{sim}} = 1080 \text{ s} \pm 10 \text{ s}$ in ausreichender Weise mit der beobachteten $P_{SH} = 1051 \text{ s}$ überein. Wie bereits in den Abbildungen zu erkennen ist, hängt die zeitliche Modulation der integrierten Abstrahlungsleistung sehr eng mit der Dynamik der präzedierenden Scheibe zusammen. Zur Bestätigung wurde die Zeitabhängigkeit des Massenflusses

$$\vec{j}(t) = \int \mathbf{v}(t, r, \phi = \text{const.}) \cdot \Sigma(t, r, \phi = \text{const.}) dr \quad (5.15)$$

durch einen beliebig zu wählenden Radius, aus der Sicht des Primärsterns, bestimmt. Nach der Simulationszeit t_0 sind Präzession und Exzentrizität der Scheibe voll ausgebildet und die Modulation des Massenstroms $\vec{j}(t)$ besitzt exakt dieselbe Frequenz wie die der integrierten Abstrahlungsleistung $\bar{D}(t)$.

In Abbildung 5.5 sind einige typische Scheibengrößen zu dem Zeitpunkt dargestellt, an dem die höchste lokale als auch integrierte Abstrahlungsleistung bestimmt wurde. Die dargestellten Größen sind auch für andere Phasen der Superhumperperiode charakteristisch. Aus den Größen folgt im wesentlichen, daß sich das Helium überall im ionisierten Zustand befindet und damit die Scheibe global auf dem heißen Ast der S-Kurve nach dem DIM. Die Modellannahme von AM CVn als permanenter Superhumper, der in seinem Ausbruch nach dem DIM gefangen ist, kann dadurch bestätigt werden. Die Scheibe ist sehr heiß und erreicht, bis auf manche Teile des Außenrandes, Temperaturen von über 10^5 K . Durch die hohe Temperatur und trotz der geringen optischen Tiefe erreicht die Scheibe eine sehr hohe lokale Abstrahlungsleistung.

Die hohe Abstrahlungsleistung kann in gewisser Weise als eine Art Zwangsbedingung für die Scheibengrößen betrachtet werden. Im Gleichgewicht wird genausoviel Masse akkretiert

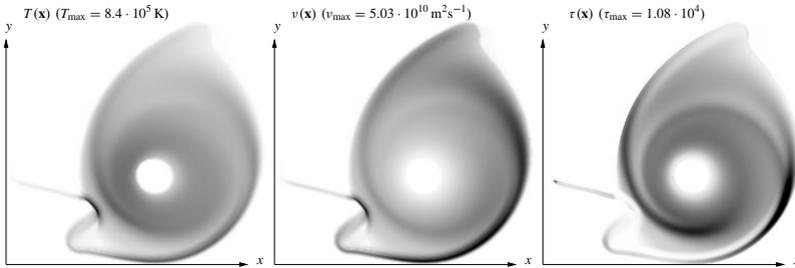


Abbildung 5.5: Verteilung weiterer Scheibengrößen zum Zeitpunkt stärkster lokaler Abstrahlungsleistung $t = t_0 + 0.12 P_{SH}$. Im Bild ist der angegebene Maximalwert schwarz wiedergegeben. Typische Scheibentemperaturen liegen bei 10^5 K, im Schockgebiet noch deutlich darüber. Aus der α -Parametrisierung mit dem Wert $\alpha = 0.5$ folgt die Verteilung des Parameters ν der kinematischen Scherviskosität, der angegebene Maximalwert entspricht $1.04 \cdot 10^{-7} R_{\odot}^2 s^{-1}$, der mittlere Wert in der Scheibe liegt sehr nahe dem oft in der Literatur benutzten konstanten Wert von $3 \cdot 10^{-8} R_{\odot}^2 s^{-1}$. Die gesamte Scheibe befindet sich im ionisierten Zustand, dies erkennt man aus der Verteilung der optischen Tiefe. Nach dem DIM befindet sich die Scheibe global auf dem heißen, hoch viskosen Ast, dieser Zustand ist in allen Phasen der Superhumpperiode erreicht.

wie vom Sekundärstern überströmt, wobei die potentielle Energie durch dissipative Kräfte in Strahlung umgewandelt werden muß, entsprechend dem prinzipiellen Mechanismus aller Akkretionsscheiben. Da das System AM CVn sehr klein ist, seine gesamte Ausdehnung ist kleiner als unsere Sonne, und einen sehr hohen Massenüberstrom aufweist, müssen starke dissipative Prozesse zu hohen Temperaturen führen. Bemerkenswert ist, daß die Scheibe am Ort des Auftreffens des Massenbogens optisch dünn ist. Dort sammelt sich in kurzer Zeit so viel heiße Masse an, daß der thermodynamische Druck in vertikaler Richtung zu einer großen Scheibenhöhe H führt, die dreidimensionale Dichte nimmt ab und das Gas wird wieder für Strahlung durchlässig. Zusammen mit der hohen Temperatur erhält man so die enorm hohe Abstrahlungsleistung in Kombination mit einer hohen Kühlrate.

Aus den Scheibenvariablen und der α -Parametrisierung läßt sich die Verteilung des Koeffizienten der kinematischen Scherviskosität ν bestimmen. In der in Abb. 5.5 dargestellten Situation ist der Ort höchster Abstrahlungsleistung gleichzeitig der Ort höchster Viskosität, die Scheibenhöhe als auch die Temperatur erreichen dort ihr Maximum. Die überwiegenden dissipativen Prozesse in diesem Gebiet werden jedoch durch Schockdissipation hervorgerufen. In Vergleichsrechnungen wie in Kunze (2000), die mit einem polytropen Modell und konstantem Parameter ν arbeiten, wird oft der Wert $\nu = 3 \cdot 10^{-8} R_{\odot}^2 s^{-1}$ vorgeschlagen, diese Wahl scheint gerechtfertigt zu sein. In unserem Modell mit konstantem Parameter $\alpha = 0.5$ und der selbstkonsistenten Beschreibung der anderen Scheibenvariablen unter Berücksichtigung der Schwarzkörperabstrahlung in der Energiegleichung folgen Werte für ν in eben dieser Größenordnung.

Wie in den Testrechnungen zu dem Superhumpphänomen wurde die Rechnung mit einem zweiten Parameter für die aus numerischen Gründen eingeführte Volumenviskosität durchgeführt. In der Vergleichsrechnung wird ein dreifach höherer Wert benutzt, also $\zeta' = 9 \cdot 10^{-7} R_{\odot}^2 s^{-1}$. Die Rechnungen mit höherer Volumenviskosität ergeben qualitativ die glei-

chen Ergebnisse, allerdings ist die Exzentrizität der Scheibe nicht so stark ausgeprägt.

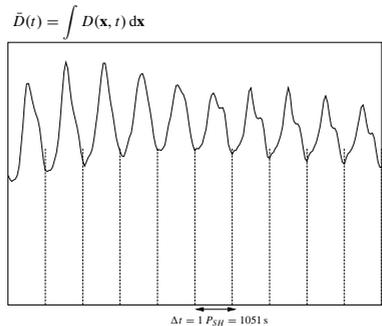


Abbildung 5.6: Die simulierte Lichtkurve wird bei höherer Volumenviskosität glatter, die relative Amplitude nimmt ab und die simulierte Superhumperperiode $P_{SH, \text{sim}} = 1045 \text{ s} \pm 10 \text{ s}$ stimmt sehr gut mit der beobachteten überein.

Die Modulation in der simulierten Lichtkurve (s. Abb. 5.6) zeigt eine geringere Amplitude und die Superhumperperiode stimmt nun sehr gut mit der beobachteten überein.

5.2.3 Diskussion der Ergebnisse aus der Simulation von AM CVn

Durch die zweidimensionale hydrodynamische Simulation der Akkretionsscheibe in AM CVn konnte die Modellvorstellung eines permanenten Superhumpers für dieses System bestätigt werden. Die Simulationsergebnisse liefern eine Scheibe, die thermisch stabil und gleichzeitig gezeiteninstabil ist. Ausgehend von dem Modell der dünnen Scheibe mit α -Parametrisierung der turbulent erzeugten Scherviskosität gehen in die Rechnungen lediglich die Parameter des Binärsystems und die Parameter der Viskositäten α und ζ' ein, alle diese Parameter beeinflussen die Dynamik der Scheibe wesentlich. Die aus der beobachteten Lichtkurve gewonnene Superhumperperiode ist die einzige Beobachtungsgröße, die zum Vergleich mit den Simulationsergebnissen herangezogen werden kann. Die simulierte Superhumperperiode stimmt, je nach Wahl der frei zu wählenden Parameter, ausreichend bis sehr gut mit den Beobachtungsdaten überein.

Der gegenseitige Vergleich aus Beobachtung und Simulation bietet die Möglichkeit, die letzten frei zu wählenden Parameter der Viskositäten auf einen engen Bereich einzuschränken. Dies könnte entscheidend zum besseren Verständnis der tatsächlich in den Scheiben vorherrschenden dissipativen Prozessen führen. In diesem Kontext erscheint es etwas unbefriedigend, daß gerade die Volumenviskosität, die eigentlich nur aus numerischen Gründen eingeführt wurde, einen entscheidenden Einfluß gewinnen könnte. Es ist natürlich nicht auszuschließen, daß die in den Scheiben vermuteten starken Turbulenzen die Scheibendynamik in einer Art und Weise beeinflussen, die nicht nur durch eine Scherviskosität sondern auch durch eine Volumenviskosität beschrieben werden kann. Der Vorteil der benutzten numerischen Methode FMM ist, daß sie keine zusätzliche inhärente dissipative Eigenschaften besitzt, die sich bemerkbar auf die Scheibendynamik auswirken könnten. Die zusätzlich vorhandene Reibungs-

kraft ist sehr viel geringer als die modellierten Viskositäten. Andere numerische Verfahren benutzen künstliche Viskositäten, die einen unbekanntem Anteil an Scher- und Volumenviskosität erzeugen. In unserem Fall kann der numerisch notwendige Term als physikalische Volumenviskosität modelliert werden, deren Größe jederzeit bekannt ist. Bislang unbekannt ist der Einfluß des Parameters α der Scherviskosität, der in zukünftigen Parameterstudien untersucht werden muß. Es muß ebenfalls noch untersucht werden, inwieweit die zweidimensionale Behandlung einen Einfluß auf die Präzessionsfrequenz haben kann. Dreidimensionale Rechnungen, in denen der Zustrom mitberücksichtigt wird (z.B. [Kunze et al. 2001](#)), liefern eine andere Wechselwirkung des Zustroms mit der Scheibe. Gas aus dem Zustrom wird dabei nicht am Außenrand der Scheibe in einem Stoßgebiet aufgenommen, sondern kann teilweise über- und unterhalb der Scheibe strömen und zu einem späteren Zeitpunkt und einem anderen Ort auf die Scheibe treffen.

Die Unsicherheiten dieser Modellbeschreibung beschränken sich nicht nur auf die hydrodynamische Behandlung der Akkretionsscheiben, denn auch die Parameter des Binärsystems M_1 , M_2 , q und $-\dot{M}_2$ sind nicht genügend genau gesichert, da diese nur indirekt aus Beobachtungsdaten mittels einfacher Modelle gewonnen werden können. So folgt das Massenverhältnis aus der beobachteten Schwebungsperiode nach der für Kataklysmische Variablen gefundenen Formel 4.19, die auf den Fall der doppelt entarteten Binärsysteme extrapoliert wurde. Eine Abschätzung der mittleren Dichte des Sekundärsterns in Abhängigkeit von der Bahnperiode liefert [Faulkner et al. \(1972\)](#) und [Savonije et al. \(1986\)](#) gibt eine Masse- Radius- beziehung für den teilweise entarteten Sekundärstern an. Die Massentransferrate erhält man aus einem Modell ([Nelson et al. 1986](#); [King 1988](#)) für Binärsysteme, das nur durch Gravitationswellenabstrahlung Drehimpuls verliert. In den zukünftigen Parameterstudien muß also auch die Abhängigkeit dieser Größen auf die Scheibendynamik untersucht werden. Sind die Parameter der hydrodynamischen Simulation einmal gesichert, so könnten aus den Simulationsergebnissen und der beobachteten Lichtkurve ein ergänzendes Modell zur Bestimmung der unbekanntem Größen des Binärsystems hergeleitet werden. Der wechselseitige Vergleich aus Beobachtung und Simulation liefert so für die Zukunft, insbesondere für zukünftige Computergenerationen, noch genügend Aufgaben.

5.3 Die Zwergnova U Geminorum

U Geminorum ist Namensgeber einer Unterklasse der Kataklysmischen Variablen, den normalen Zwergnovae oder U-Gem-Sterne. U Gem ist die erste beobachtete CV (Hind 1856) und wurde bis heute ausführlich photometrisch untersucht (s. z.B. Smak 1993). U Gem besitzt eine relativ lange Bahnperiode von 4 h 15 min und kann unter dem Inklinationwinkel von $i = 69^\circ.7$ beobachtet bzw. photometrisch vermessen werden. Unter diesem Winkel zeigt das System eine streifende Bedeckung, die Akkretionsscheibe ist partiell verdeckt.

Von dem System U Gem ist bekannt, daß es Zwergnova-Ausbrüche in Abständen von 30 bis 250 Tagen aufzeigt (Warner 1995), mit den Sternmassen $M_1 = 1.15 M_\odot$ und $M_2 = 0.67 M_\odot$ weist es ein ausgewogenes Massenverhältnis von $q = 0.58$ auf. Aus der Modellvorstellung für Superhumper ist dieser Wert zu groß, als daß eine Scheibenpräzession zu erwarten wäre, tatsächlich wird diese weder im Ruhezustand noch im Ausbruch der Scheibe beobachtet.

Der letzte beobachtete und in der Literatur dokumentierte Ausbruch wird von Groot (2001) beschrieben, er startete am 1. März 2000 und hielt bis zum 21. März an, der Helligkeitsanstieg betrug 4-5 mag. Während des Ausbruchs wurde die Scheibe von Groot (2001) zeitaufgelöst photometrisch vermessen. In den Dopplertomogrammen der aufgenommenen He II Linien zeigt sich eine deutliche, zweiarmige Spiralstruktur, diese Struktur ist während des gesamten Ausbruchs sichtbar, nicht jedoch im Ruhezustand der Scheibe. Spiralstrukturen in den Akkretionsscheiben von CVs wurden erst kürzlich zum ersten Mal von Steeghs et al. (1997) in dem System IP Peg während dessen Ausbruchs beobachtet, IP Peg zählt wie U Gem zu den normalen Zwergnovae.

5.3.1 Diskussion über Drehimpulstransport und Spiralstrukturen in Akkretionsscheiben

Ziel der folgenden hydrodynamischen Simulation der Scheibe in U Gem soll sein, möglichst viele der Beobachtungsdaten, wenn möglich auch die Entstehung der mysteriösen Spiralstrukturen, nachzubilden und dadurch modellhaft zu erklären.

Auch wenn die eben gemachte Aussage wie selbstverständlich klingt, so sind bei diesem Vorhaben alle bisher gewonnenen Erkenntnisse über Modellannahmen, Instabilitäten und die Interpretation numerisch gewonnener Ergebnisse zu berücksichtigen. Alle Aspekte wurden bereits in den Rechnungen idealisierter Scheiben und denen zu realen Systemen angesprochen. In dieser abschließenden Diskussion, die wir den Ergebnissen vorausschicken wollen, werden alle wesentlichen Überlegungen nochmals aufgegriffen.

Der entscheidende Punkt in den Überlegungen ist der Umstand, daß die tatsächlich vorherrschenden physikalischen Prozesse in der Scheibe, die zum Drehimpulstransport und schließlich zur Akkretion führen, nicht ausreichend bekannt sind. Das vorgestellte Modell der α -Scheibe beschreibt die Auswirkungen der in der Scheibe vermuteten Turbulenz. Aber auch durch andere nicht viskose Modelle kann der Drehimpulstransport erklärt werden. In den Abschnitten zur baroklinen Instabilität und der homentrop gestörten Scheibe, jeweils im Zentralpotential betrachtet, wurde der Einfluß ausgedehnter Wirbelstrukturen oder der einer Rossby-Wellen Instabilität auf den Drehimpulstransport untersucht. In Binärsystemen sind weitere

Störungen durch den Einfluß des Begleitsterns zu erwarten. In den Rechnungen zum Superhumpphänomen entstanden in den nicht viskosen Scheiben eine signifikante zweiarmlige Spiralstruktur, deren Ursache im direkten Zusammenhang mit dem Vorhandensein des Sekundärsterns steht. Obwohl dort extreme Massenverhältnisse, durch die die Superhumper ausgezeichnet sind, untersucht wurden, kann diese Störung auch bei geringeren Massenverhältnissen erwartet werden.

Für die folgenden Rechnungen haben wir uns wieder für das viskose α -Modell entschieden. Man muß sich dabei im Klaren sein, daß allein durch die Wahl dieses Modells einige der möglichen dynamischen Instabilitätseffekte ausgedämpft werden, global ausgedehnte Wirbel werden unter Betrachtung der hohen Scherviskosität sicher nicht entstehen. Inwieweit die durch Gezeitenkräfte angeregte zweiarmlige Spiralstruktur durch den viskosen Ansatz gedämpft wird, bleibt als spannende Frage noch offen. Treten sie dennoch auf, so werden auch sie zum Drehimpulstransport beitragen, wie von *Savonije et al. (1994)* gezeigt wurde.

Auch wenn man die Störung des Sekundärsterns vernachlässigt, folgt aus der Wahl des viskosen α -Modells nun nicht, daß aufgrund der starken Dämpfung keine Instabilitäten zu erwarten sind. Aus dem Beispiel des viskos zerfließenden Staubrings weiß man, daß eine rein viskose Scheibe im Zentralpotential instabil gegen die Entstehung einer einarmigen Spiralstruktur ist. Unsere Testrechnung hat diese Instabilität zwar nicht reproduziert und zeigte stattdessen eine axialsymmetrische Störung, die als numerische Instabilität bzw. als numerischer Fehler interpretiert wurde. Damit sind wir am einem Punkt angelangt, der am Anfang dieser Arbeit schon angesprochen wurde, physikalische Instabilitäten müssen nicht zwangsläufig von dem numerischen Modell wiedergegeben werden und umgekehrt.

Wir wollen noch auf eine Auswirkung der in dem α -Modell enthaltenen Scherviskosität hinweisen. Wie aus der Testrechnung zum viskosen Staubring hervorgeht, bewirkt die Scherviskosität das Zerfließen einer erhöhten lokalen Massenansammlung in der Scheibe. Alle viskosen Scheibenrechnungen führen zu Strukturen mit lokal geringem Dichtekontrast. Auch die Spiralen, die nicht als Instabilität in dem viskosen Modell enthalten sind, müssten demnach unter dem Einfluß der Scherviskosität zerfließen. Der Aufbau von eventuell vorkommenden Dichteansammlungen, etwa in Spiralen, muß also von einer Kraft bewerkstelligt werden, die der viskosen Kraft überlegen ist. Da die Druckkraft in der Scheibenebene die schwächste vorkommende Kraft ist, kann dieser Prozeß nur von den Potentialkräften übernommen werden. Das Roche-Potential besitzt genau diese Eigenschaft, eine spiralförmige Störung mit der Modenzahl zwei zu induzieren, sofern diese nicht durch viskose Kräfte ausgedämpft wird, diese Spirale findet sich letztlich auch in den Beobachtungsdaten.

Die Intention für unsere viskose Simulation im Kontext dieser Diskussion kann etwa wie folgt formuliert werden; wir benutzen das α -Modell einer dünnen Scheibe für den Test, ob dieses Modell die beobachtete Spiralstruktur reproduziert. Sollte dies gelingen, kann durch wechselseitigen Vergleich aus Beobachtungsdaten und numerischer Simulation neue Erkenntnisse über die Natur der Viskosität gewonnen werden, etwa eine Einschränkung des Parameters α . Dieses Vorgehen haben wir schon bei der Rechnung zu AM CVn begründet. Der Vergleich mit anderen numerischen Ergebnissen wird zusätzlich die Interpretation der hier gewonnenen Ergebnisse festigen. Die Simulation kann daher als ein Baustein für das Forschungsgebiet der Akkretionsscheiben betrachtet werden.

Die letzte Anmerkung in dieser Diskussion gilt der Wahl des Parameters α , eine Ausführung hierüber wurde in der Erklärung des DIM und der S-Kurve gegeben. Durch die selbstkonsistente Betrachtung des thermischen Zustands wird das Instabilitätsverhalten nach dem DIM durch geeignete Materialparameter, die Opazitäten, beschrieben. Es ist daher angebracht, keine weitere Annahmen in die Wahl von α einzubringen. Der Parameter α wird in Zeit und Raum konstant sein, wir testen in zwei unabhängigen Simulationen zwei verschiedene Werte.

In einer Arbeit von [Armitage & Murray \(1998\)](#) wird eine Simulation mit SPH von dem System IP Peg vorgestellt, in der die zweiarmige Spiralstruktur mit dem α -Modell reproduziert wurde. In dieser Rechnung wird jedoch eine einfache Annahme über zwei verschiedene Werte von α für die zwei Zustände der Scheibe gemacht, den heißen, optisch dicken und optisch dünnen, die Energiegleichung blieb unberücksichtigt.

5.3.2 Simulation der Scheibe von U Gem

Alle grundlegenden Simulationstechniken sind bereits aus den vorangegangenen Rechnungen bekannt. Da es sich hier um eine normale Zwergnova handelt, werden die Materialparameter für Wasserstoff benutzt, entsprechend also auch die Opazitäten von [Bell & Lin \(1994\)](#).

Der Radius des Rechenbereichs ist der Abstand vom inneren Lagrange-Punkt zum Primärstern, er ist damit deutlich größer als die Ausdehnung des Roche-Lobes des Primärsterns. Es werden die zwei Auflösungen 230 und 330 Teilchen auf dem Durchmesser des Rechenbereichs benutzt, die voll entwickelte Scheibe wird dann durch ca. 20 000 bzw. 40 000 Teilchen repräsentiert. Die Teilchen werden für jeden Restart auf einem uniformen, kartesischen Gitter angeordnet. In der viskosen Rechnung werden keine steilen Stoßfronten erwartet, so daß die 9-Punkt-Sparse Quadraturformel benutzt werden kann. In den Rechnungen wird wieder eine unterstützende Volumenviskosität $3 \cdot 10^{-8} R_{\odot}^2 \text{ s}^{-1} \leq \zeta' \leq 3 \cdot 10^{-7} R_{\odot}^2 \text{ s}^{-1}$ benutzt, der niedrige Wert kann für die kleine Auflösung und einer Scheibe im Ruhezustand benutzt werden, der höhere Wert für die Scheibe im Ausbruch mit hoher Teilchenauflösung.

Die Scheibe benötigt über hundert Bahnperioden, um sich voll zu entwickeln. In dieser Zeit ist die gesamte Scheibe optisch dünn, es zeigen sich keine wesentlichen Strukturen in der Flächendichte, es stellt sich keine Präzession ein und sie ist nahezu axialsymmetrisch. Für den Anfang dieser Entwicklungszeit ist es praktikabel, die Simulation ohne Lösen der Energiegleichung auszuführen, stattdessen wird eine polytrophe Zustandsgleichung für das Gas benutzt. Zur weiteren Reduzierung der Rechenzeit kann die Entwicklung der Scheibe mit einer stark verringerten Teilchenauflösung gerechnet werden, die nach und nach erhöht wird.

5.3.3 Ergebnisse der Simulation von U Gem

Nachdem sich die Scheibe lange Zeit entwickelt hat und massereicher geworden ist, folgt ein Zustand, in dem sich die Scheibe bis über den Roche-Lobe ausgedehnt hat, sie ist immer noch optisch dünn und zeigt ein nahezu stationäres Strömungsbild. Die Scheibe ist dabei leicht deformiert, sie weist eine erhöhte Ausdehnung senkrecht zur Systemachse hin auf. Danach entwickelt sich an dem zum Sekundärstern hin zugewandten Außenrand eine bogenförmige

Struktur erhöhter Flächendichte. Dies ist der Zustand, in dem die optische Tiefe ihren Minimalwert von $\tau_{\min} = 8/3$, für beide Scheibenseiten, erstmals übersteigt. Zu diesem Zeitpunkt besitzt die Scheibe die Gesamtmasse von $1.43 \cdot 10^{20}$ kg, diese Masse entspricht dem Massenüberstrom innerhalb von 26 Tagen oder 150 Bahnperioden. Diese Situation ist in der Abb. 5.7 dargestellt, wir bezeichnen diesen Zeitpunkt mit $t = 0$.

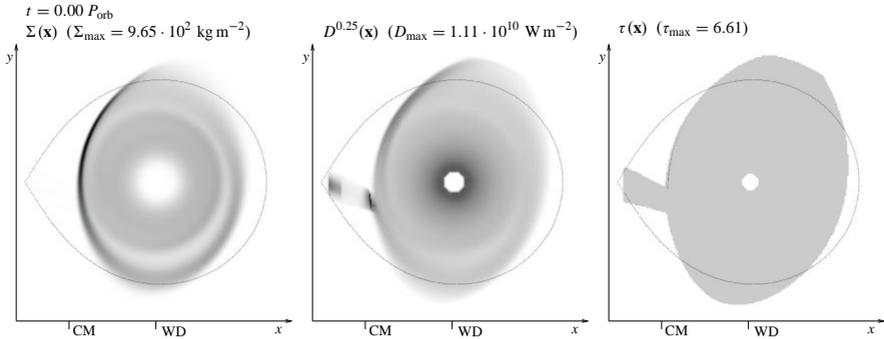


Abbildung 5.7: Die Scheibe in U Gem kurz vor dem Ausbruch. Der Maximalwert der kinematischen Viskosität zu diesem Zeitpunkt beträgt $v_{\max}(\mathbf{x}) = 1.80 \cdot 10^{-8} R_{\odot}^2/s$.

Aus den simulierten Größen Σ und der Entropiedichte s können die restlichen thermodynamischen Größen T_c und P bestimmt werden, die restlichen Scheibengrößen H , D , τ und ν folgen aus dem Modell der dünnen Scheibe mit der α -Parametrisierung der Viskosität. In den folgenden Abbildungen werden die Größen $\Sigma(\mathbf{x})$, $\tau(\mathbf{x})$ und $D^{0.25}(\mathbf{x})$ gezeigt. Wie auch in dem Beispiel von AM CVn liefert die Funktion $D^{0.25}(\mathbf{x})$ ein einfaches Abstrahlungsmodell für den sichtbaren Bereich des Lichts, zudem ist der Kontrastumfang gegenüber $D(\mathbf{x})$ besser für die Abbildungen geeignet. Die Größe $\tau(\mathbf{x})$ weist ebenfalls einen sehr hohen Kontrast auf, es wird jeweils der Bereich $8/3 \leq \tau \leq 100$ abgebildet, die Farbe schwarz steht dabei für $\tau \geq 100$, für das Minimum steht hellgrau oder weiß; im ersten Fall zeigt die hellgraue Fläche die aktuelle Ausdehnung des Rechenbereichs an, in dem eine Temperatur definiert ist. Aus dieser Größe lässt sich sehr zuverlässig der Zustand der Scheibe auf der S-Kurve des DIM ablesen. Es zeigt sich, daß die Scheibe in Teilbereichen entweder optisch dünn ist ($\tau = 8/3$) oder optisch dick mit einer optischen Tiefe von $\tau \geq 100$. In den Abbildungen ist die Position des Primärsterns auf der x -Achse mit WD und das Massenzentrum mit CM gekennzeichnet, die gepunktete Linie steht wieder für den Roche-Lobe des Primärsterns. Der Überstrom besitzt eine so kleine Flächendichte, daß er in den Abbildungen von Σ nicht zu erkennen ist. In den Abbildungen der Größe $D^{0.25}$ erkennt man den Zustrom gut. Nahe am L_1 -Punkt sind die Scheibengrößen analytisch vorgegeben, aus der vorgegebenen Temperatur von 6000 K ergibt sich die dargestellte Abstrahlungsleistung. Verlässt der Überstrom den parametrisierten Bereich, kühlt er sehr schnell ab, entsprechend nimmt die Abstrahlungsleistung stark ab. Am Auftreffpunkt auf die Scheibe, dem Hot-Spot, erhitzt sich der Überstrom wieder. In der Abbildung 5.7 zeigt die senkrechte schwarze Linie den Hot-Spot in geringer Auflösung. In den

Abbildungen wird der zu diesem Zeitpunkt vorkommende Maximalwert der Größen immer mit der Farbe schwarz abgebildet, der Maximalwert selbst ist ebenfalls angegeben. In den Abbildungen der Größe $D^{0.25}$ wird das Maximum von $D(\mathbf{x})$ angegeben.

In der Abbildung 5.8 ist nun der weitere Verlauf des Zwergnova-Ausbruchs wiedergegeben. Zuerst bildet sich die Massenansammlung links oben, also dem Sekundärstern zugewandt, stärker aus. Dies ist der Bereich, der zuerst optisch dick wird. Gleichzeitig entwickelt sich der zweite Arm der Spiralstruktur, er ist zuerst in der Flächendichte sichtbar und erreicht weniger als eine Bahnperiode später ebenfalls den heißen, optisch dicken Zustand. Diese Situation zur Zeit $t = 2.0 P_{\text{orb}}$ ist in der oberen Zeile der Abbildung 5.8 zu sehen. Beide Spiralarme sind nahezu symmetrisch zum Primärstern angeordnet, dieser Zustand ist quasistationär, d.h. die Lage der Spiralarme ist stationär im mitrotierenden Koordinatensystem, von ihrer weiteren Entwicklung und Zunahme ihrer Ausdehnung abgesehen. Diese zweiarmlige Spiralstruktur ist bereits aus den Rechnungen zum Superhumpphenomen bekannt. Auch hier hat sich ein quasistationäres Strömungsbild mit zwei Spiralen entwickelt, deren Position relativ zur Systemachse an diese Spiralen erinnert. Als Ursache dieser Spiralstruktur wurde die Störung durch den Begleitstern genannt.

Offenbar sind erst während der Ausbildung dieser Störung die Bedingungen an die Scheibenvariablen so eingestellt, daß die dort vorherrschende hohe Massendichte zur Ionisation des Gases führt. Dieser Bereich wird zuerst für Strahlung undurchlässig und heizt auf, der optisch dicke Ast der S-Kurve ist erreicht. In diesen Bereichen herrscht nun, gegenüber den benachbarten, eine erhöhte Viskosität. Die hohe Scherviskosität müsste eigentlich zu einem Zerfließen der lokalen Massenansammlung führen. Dieser Prozeß steht jedoch im Gegensatz zu den Kräften der Gezeitenstörung, die in diesem Fall überwiegen und weiterhin die Spiralen mit Masse füttern. Wie in der Abb. 5.8 zu sehen ist, wächst der optisch dicke Bereich weiter an, innerhalb einer Bahnperiode haben sich die beiden Spiralen zu einem gemeinsamen heißen Bereich vereinigt. Die Entwicklung ist deutlich in den Größen D und τ zu erkennen, während bis zu diesem Zeitpunkt ($t = 3.0 P_{\text{orb}}$) nur eine geringe Veränderung in der Flächendichte zu erkennen ist. Dieses Verhalten ist konsistent mit dem DIM, die heißen Gebiete erhöhter Viskosität heizen die benachbarten Gebiete auf, eine Heizfront breitet sich über die Scheibe aus. Die Ausbreitung dieses thermischen Zustands ist dabei von der Gasdynamik weitgehend entkoppelt. Dies ist in dem Sinne zu verstehen, daß die heißen Bereiche nicht einfach mit der Strömung mittransportiert werden. In diesem Scheibenzustand wird eine Testmasse an Gas während ihres Umlaufs um den Primärstern optische dicke und dünne Bereiche passieren und abwechselnd aufgeheizt und gekühlt werden.

Ab dem Zeitpunkt ($t = 3.0 P_{\text{orb}}$) entwickelt sich nahe am Innenrand der Scheibe ein weiterer ringförmiger Bereich bei $r \approx 0.07 a$, in dem sich die Scheibe im optisch dicken Zustand befindet. Von diesem Ring aus breitet sich ebenfalls eine Heizfront radial nach außen aus, dieser Bereich wird sich mit dem von den Spiralen gebildeten zur Zeit ($t = 3.22 P_{\text{orb}}$) vereinigen. In unserer Simulation startet der Ausbruch also in den zwei Spiralen und, zeitlich leicht versetzt, am inneren Bereich der Scheibe, das Erreichen des oberen Astes der S-Kurve folgt in diesen drei Gebieten jeweils unabhängig voneinander. Ab diesem Zeitpunkt wird die dem Sekundärstern abgewandte Spirale instabil, in unregelmäßigen Abständen stürzt die in der Spirale enthaltene Masse bis in den Innenbereich der Scheibe und verursacht starke Schocks,

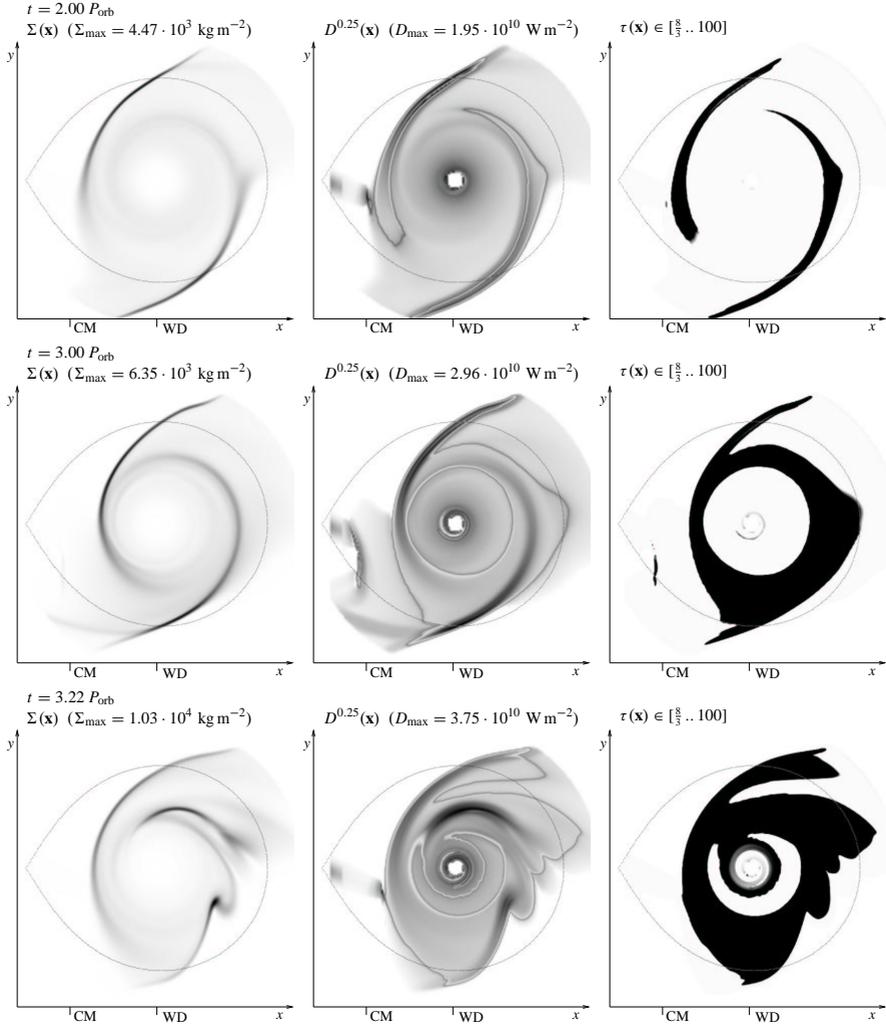


Abbildung 5.8: Der Ausbruch startet am Außenrand der Scheibe, zwei spiralförmige Massenansammlungen befinden sich im optisch dicken, heißen Zustand ($t = 2.0 P_{\text{orb}}$). Eine Bahnperiode später ($t = 3.0 P_{\text{orb}}$) haben sich diese Gebiete zu einer geschlossenen Fläche vereinigt, fast gleichzeitig bildet sich nahe am Innenrand ein ringförmiger optisch dicker Bereich, der sich kurze Zeit später ($t = 3.22 P_{\text{orb}}$) mit dem äußeren verbindet. Ab jetzt wird der zweite Spiralarm (rechts unten) instabil.

die Scheibenstruktur wird dadurch stark gestört. Es bilden sich kurzzeitig große Wirbelzonen aus, die jedoch sehr schnell von den viskosen Kräften gedämpft werden. Die Temperatur

erreicht in diesen Schocks Werte von $T_c = 1.76 \cdot 10^5$ K, die zerstörte Spirale bildet sich nach diesem Vorgang wieder neu aus. In der Simulation zeigte der andere Spiralarm keine vergleichbaren Instabilitäten.

Die Abbildungen der Größe $D^{0.25}$ zeigt zu Beginn des Ausbruchs ihr Maximum am Übergang zwischen optisch dünnen und dicken Bereichen der Scheibe. Im optisch dicken Fall ist die Scheibe zwar für Strahlung weniger durchlässig, durch die höhere Temperatur ist dennoch auch die Abstrahlungsleistung erhöht. In der Heizfront, also an der Berandung optisch dünner und dicker Bereiche, scheinen sich die Scheibengrößen so einzustellen, daß eine erhöhte Temperatur im optisch dünnen Gas zu einem Abstrahlungsmaximum führt.

Der Einfluß der Grenzschicht zwischen Scheibe und dem weißen Zwerg

Einige theoretische Modelle zu Zwergnovaausbrüchen gehen davon aus, daß die thermische Instabilität von der Oberfläche des Weißen Zwergs aus starten muß. Zwischen der Oberfläche und der Akkretionsscheibe bildet sich eine Grenzschicht, in der das Gas auf die Rotationsgeschwindigkeit des Primärsterns abgebremst und schließlich akkretiert wird. In dieser Grenzschicht ist das Gas sehr heiß und ionisiert. Wegen des geringen Radius des Weißen Zwergs kann die Grenzschicht in der Simulation nicht aufgelöst werden, zudem würde nur eine dreidimensionale Behandlung sinnvoll erscheinen. Es stellt sich die Frage, ob diese Grenzschicht nicht schon viel früher den Ausbruch induzieren kann, indem eine vom Primärstern ausgehende Heizfront die gesamte Scheibe in den optisch dicken Zustand überführt, noch bevor die Gezeiteninstabilität die Spiralen ausbilden konnte. Diese Frage wollen wir, zumindest ansatzweise, mit einem Test in der Simulation beantworten. An einem klein gewählten Radius $r_i = 0.02 a$ lassen wir eine erhöhte Massenansammlung zu. Zu diesem Zweck wird einfach ab einem geeigneten Zeitpunkt das Potential des Primärsterns gekürzt, die Gravitationskraft wird dazu mit dem Faktor

$$f_r = \left(\frac{r}{r_i}\right)^3 \quad \text{für } r < r_i \quad \text{und} \quad f_r = 1 \quad \text{sonst.} \quad (5.16)$$

multipliziert. An dem Radius r_i bildet sich nun eine unphysikalische Massenansammlung aus, die heiß und optisch dick ist. In der Simulation zeigte sich, daß sich von diesem Bereich aus keine Heizfront über die Scheibe ausbreitet. Statt dessen entwickelt sich der Ausbruch wie in der bereits vorgestellten Simulation, zwei Spiralarme und ein Ring bei kleinem Radius erreichen, unabhängig voneinander, den heißen Zustand. Diese Situation ist in Abbildung 5.10 dargestellt.

Die Spiralen haben sich zum abgebildeten Zeitpunkt bereits zu dem äußeren Ring vereinigt, unabhängig davon hat sich wieder bei etwa $r = 0.07 a$ ein Ring im heißen Zustand ausgebildet. Der innerste Ring bei $r = 0.02 a$ verübte keinen Einfluß auf die Entwicklung des Ausbruchs.

Inwieweit die Grenzschicht nun Einfluß auf die Scheibenentwicklung zu Beginn des Ausbruchs hat, kann mit diesem Modell natürlich nicht ausreichend beantwortet werden, schließlich wird auch der Strahlungstransport in der Scheibenebene vernachlässigt. Die Rechnungen zeigen jedoch, daß das Modell eines Zwergnovaausbruchs nicht zwingend den Einfluß der

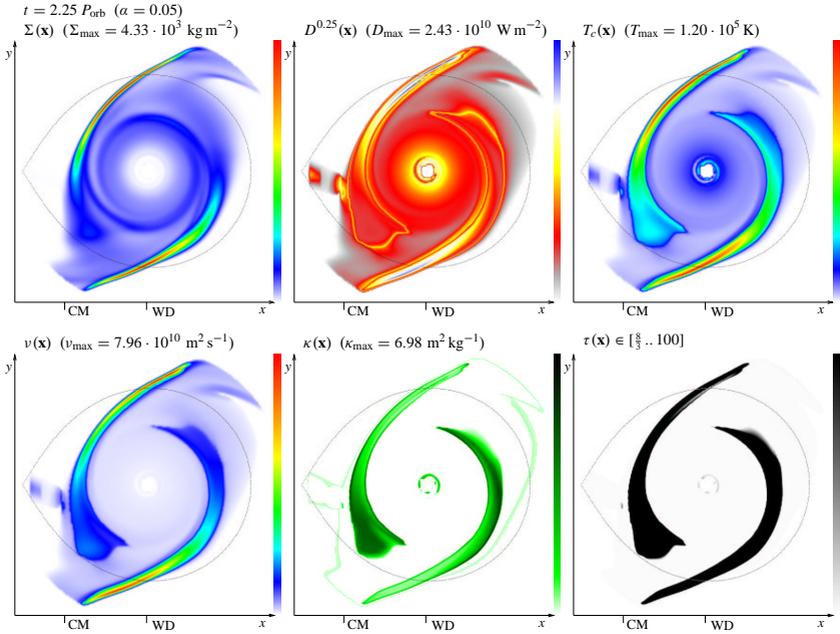


Abbildung 5.9: Typische Größen der Scheibe während der Entwicklung des Ausbruchs, sie folgen aus den simulierten Variablen Σ und s (Entropiedichte) und aus dem Scheibenmodell. In den spiralförmigen Ausbruchsgebieten ist das Gas bei sehr hoher Temperatur vollständig ionisiert. Die Spiralbereiche bei großen Radien sind neben dem Innenbereich am leuchtsärksten, dort gilt bereits die Kramer'sche Regel für die Opazitäten. In diesen Bereichen erreichen die Größen D , v , T_c und τ mit $\tau_{\text{max}} > 3000$ ihre Maximalwerte. Diese Bereiche liegen weit außen im Potential, die Scheibenhöhe H erreicht dort ebenfalls ihren Maximalwert, die dreidimensionale Dichte ρ (nicht abgeb.) jedoch nur einen mittleren Wert, dasselbe gilt für die Opazitäten. Die Maximalwerte der Größen ρ und κ liegen am Rand der heißen Bereiche bei gleichzeitig kleineren Radien. Diese Randbereiche stellen die sich ausbreitende, ionisierende Heizfront dar, in diese Richtungen wird sich der Ausbruch weiterentwickeln. Die Innenbereiche dieser Spiralen sind, kurz nachdem sie den heißen Zustand erreicht haben, noch nicht auffallend leuchtstärker als die benachbarten kühlen Bereiche. Die kinematische Viskosität v zeigt einen hohen Kontrast. Der Maximalwert (hier $v_{\text{max}} = 1.64 \cdot 10^{-7} R_{\odot}^2 \text{ s}^{-1}$) ist um etwa den Faktor 10 gegenüber dem Maximalwert der Scheibe im Ruhezustand, etwa zwei Bahnperioden vor dem Ausbruch, erhöht. Der hohe Kontrast gegenüber den benachbarten kühlen Bereichen kann die Dynamik wesentlich beeinflussen, im vorgeschrittenen Stadium kann die zweite Spirale instabil werden und in die Scheibe stürzen, wie in Abb. 5.8 zur Zeit $t = 3.22 P_{\text{orb}}$ zu sehen ist.

Grenzschicht als induzierenden Faktor benötigt. Weiterhin konnte gezeigt werden, daß ein heißer Bereich am Innenrand nicht automatisch eine radial nach außen verlaufende Heizfront nach sich zieht.

Der Einfluß des Hot-Spots

Neben der Grenzschicht an der Oberfläche des Primärsterns existiert noch ein zweiter Bereich, der die sich ausbreitende Heizfront induzieren könnte, dies ist der Hot-Spot. Am Auftreffpunkt des Überstroms auf den Außenrand der Scheibe entstehen in einer Stoßfront sehr hohe

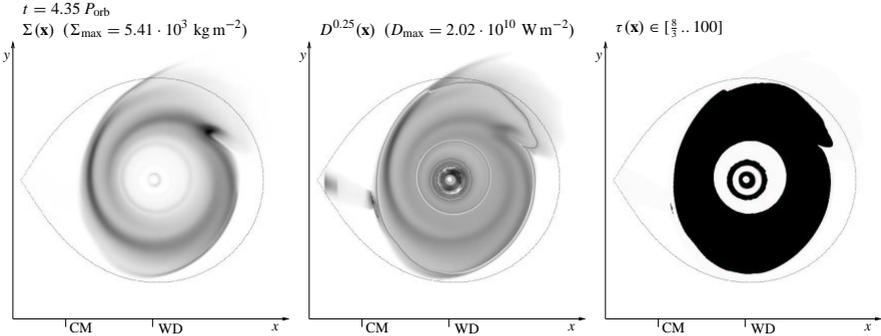


Abbildung 5.10: Das Potential des Weißen Zwergs ist gekürzt und führt zu einer unphysikalischen Akkretion an dem innersten Ring. Der mittlere und äußere Ring hat sich selbstkonsistent ausgebildet.

Temperaturen. Der Überstrom und der Hot-Spot waren in den bisherigen Simulationen zwar enthalten, durch die benutzte Volumenviskosität wurde die Stoßfront jedoch stark geglättet, zudem war dieser Bereich nicht genügend hoch aufgelöst. Es wird nun der Bereich um den Hot-Spot mit hoher Teilchenauflösung und unter Verzicht der Volumenviskosität simuliert. Als Ausgangspunkt benutzen wir eine Scheibe aus der Simulation mit dem höheren Parameter $\alpha = 0.5$ zu einem Zeitpunkt, in dem die erste, dem Sekundärstern zugewandte Spirale bereits den optisch dicken Zustand eingenommen hat. Innerhalb des Restartverfahrens wird der Bereich um den Hot-Spot mit einer Auflösung von 450×450 Teilchen neu aufgesetzt, die Volumenviskosität ausgeschaltet und als Ausgleich der Koeffizient der Reibungskräfte erhöht. In dieser Konfiguration kann FMM starke Stoßfronten lokal innerhalb weniger Teilchenradien gut reproduzieren. Die Simulation erfolgte mit einer stark reduzierten Zeitschrittweite.

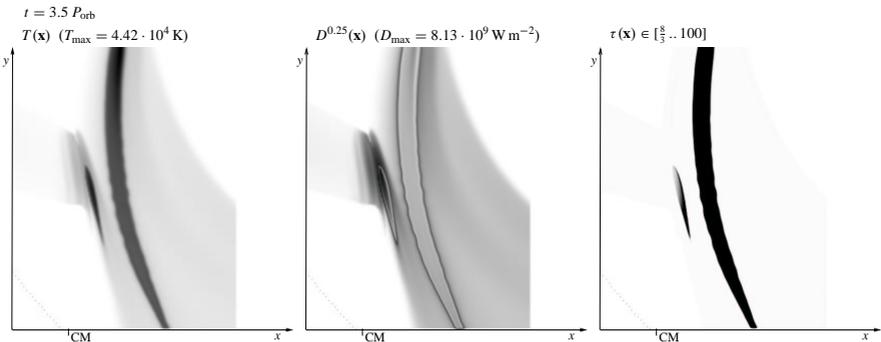


Abbildung 5.11: Rechnung eines Teilabschnitts mit einer hohen Auflösung von 348×348 Teilchen im gezeigten Ausschnitt, es wird keine künstliche Volumenviskosität benutzt. Der Hot-Spot ist heller, aber nicht signifikant heißer als der Spiralarm. Die beiden Gebiete im ionisierten Zustand beeinflussen sich nicht gegenseitig.

Die Simulationszeit beträgt etwa fünf mal die Zeit, die eine freifallende Testmasse vom L_1 -Punkt bis zum Hot-Spot benötigt. Innerhalb dieser Zeit hat sich die neue, hoch aufgelöste Stoßfront zu einem stationären Zustand entwickelt. Im Ergebnis, das in Abbildung 5.11 zu sehen ist, zeigt sich folgendes; der Hot-Spot erreicht zwar hohe Temperaturen, diese liegen jedoch unterhalb derer, die in den heißen Bereichen der Scheibe vorherrschen. Große Teile des Hot-Spots befinden sich im optisch dünnen Zustand, insgesamt wird eine hohe lokale Abstrahlungsleistung erreicht. Lediglich in der Mitte des Hot-Spots ist innerhalb eines länglichen, linsenförmigen Gebiets der optisch dicke Zustand erreicht. Dieser Bereich wächst jedoch im Laufe der Simulation, im Gegensatz zu dem Spiralarm, nicht an, von ihm aus wird also keine sich ausbreitende Heizfront induziert. Die Ausdehnung der Stoßfront ist dabei größer, als daß dies auf die Teilchenauflösung oder das Verhalten von FMM zurückzuführen wäre, die Berücksichtigung der Abstrahlung auch in der Stoßfront besitzt wohl glättende Eigenschaften. Das Ergebnis dieser Simulation ist, daß der Hot-Spot den Ausbruch nicht induziert. In dem Fall von U Gem mit ausgeglichenem Massenverhältnis liegt der Hot-Spot, im Fall einer weit ausgedehnten Scheibe, sehr weit von den beiden Sternen entfernt und relativ nahe am L_1 -Punkt. An diesem Ort besitzt der Zustrom eine gemäßigte Geschwindigkeit. Der große Abstand zu den beiden Sternen hat eine geringe Gravitationskraft in vertikaler Richtung zur Folge, dadurch ist eine große Scheibenhöhe mit geringer (dreidimensionaler) Dichte möglich. Diese Eigenschaften sind ungünstig, um die Scheibe in den optisch dicken Zustand zu führen.

Der Einfluß des Parameters α

Die Simulation des Ausbruchs wurde zweimal vollständig mit verschiedenen Werten für α ausgeführt. In der zweiten Simulation verwenden wir den 10-fach höheren Wert $\alpha = 0.5$. Aus dieser Simulation werden keine neuen prinzipiellen Erkenntnisse zum Ausbruchverhalten gewonnen. Quantitativ ergeben sich geringe Abweichungen in den Scheibengrößen, die wesentlichen Unterschiede werden hier im Text qualitativ beschrieben.

Der Ausbruch beginnt wieder in zwei Spiralarmen und in dem ringförmigen Bereich bei einem kleinen Radius. Der Kontrast in der Flächendichte ist im Vergleich zur Simulation mit $\alpha = 0.05$ leicht reduziert, d.h. die Spiralstruktur zeigt sich breiter und etwas stärker geglättet. Beide Spiralarme in der Flächendichte weisen im Vergleich eine höhere Symmetrie bezüglich des Primärsterns auf und besitzen einen etwas kleineren Winkel relativ zur y -Achse. Während der erste Spiralarm (links, dem Sekundärstern zugewandt) sehr schnell den optisch dicken Zustand erreicht und von dort die sich ausbreitende Heizfront auslöst, ist der zweite Spiralarm instabil und breitet sich nicht aus. Instabil ist in diesem Sinn so zu verstehen, daß die Flächendichte zwar einen stationären Spiralarm ausbildet, der Bereich in der Spirale, der den heißen Zustand repräsentiert, jedoch stark fluktuiert. Der heiße Bereich kann so groß werden wie der des ersten Arms oder auch ganz verschwinden. Diese Fluktuationen dauern so lange an, bis der dem ersten Spiralarm zugeordnete heiße Bereich sich zu einem geschlossenen Ring ausgebreitet hat. Von da an verläuft der Ausbruch wie in der Simulation mit kleinerem α . Der äußere und innere Ring breiten sich in radialer Richtung so lange aus, bis die gesamte Scheibe den optisch dicken Zustand erreicht hat.

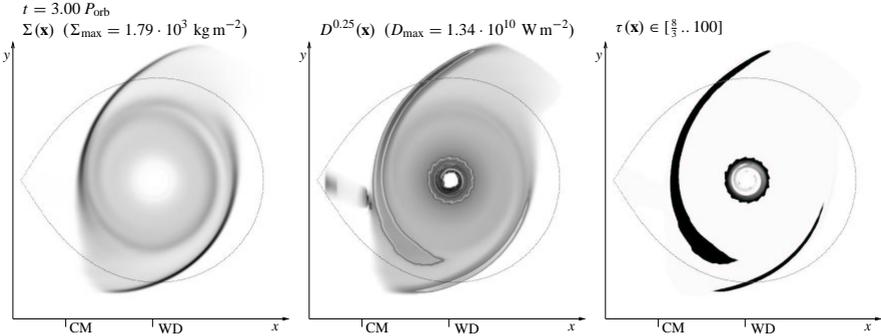


Abbildung 5.12: Beginn des Ausbruchs mit dem höheren Wert $\alpha = 0.5$. Der Ausbruch startet wieder in den zwei Spiralarmen, der zweite Arm ist weniger ausgeprägt, seine Ausdehnung fluktuiert stark. Kurz nach dem Ausbruch im ersten Spiralarm erreicht die Scheibe nahe am Innenrand ebenfalls den heißen Zustand.

Der voll entwickelte Ausbruch

Nachdem die Heizfronten die gesamte Scheibe passiert haben, ist die Scheibe global ionisiert, lediglich sehr weit außenliegende Gebiete mit geringer Flächendichte sowie der Zustrom verbleiben im optisch dünnen Zustand. In der Simulation mit $\alpha = 0.05$ ist dieser Zustand nach etwas mehr als 5 Bahnperioden, also knapp einem Tag erreicht. Die kinematische Viskosität besitzt zu diesem Zeitpunkt innerhalb des heißen Bereichs wieder einen gemäßigten Kontrast, so daß sich ein quasistationärer Zustand bilden kann. Die Flächendichte und Abstrahlungsleistung verändern sich in den nächsten Bahnperioden kaum noch. Es beginnt nun der Zeitpunkt, an dem durch die hohe Viskosität mehr Materie akkretiert wird als über den L_1 -Punkt zuströmt. Aus Gründen begrenzter Rechenzeit wurde die Simulation an diesem Punkt beendet. Das Ausbruchsverhalten wird in Intervallen von 30 bis 250 Tagen beobachtet, in dieser Zeit füllt sich die Scheibe im Ruhezustand mit Masse um sich während des Ausbruchs durch erhöhte Akkretion wieder zu entleeren. Wird in Zukunft genügend Rechenzeit zur Verfügung stehen, wäre es sicher interessant, mehrere solcher Zyklen zu simulieren. Beschreibt das Modell mit konstantem α die erhöhte Akkretion in richtiger Weise, so würde auch die Differenz der Scheibenmasse kurz vor und nach dem Ausbruch richtig wiedergegeben und damit automatisch das richtige Ausbruchsintervall.

Die wesentliche Erkenntnis aus der Simulation ist jedoch, daß im Zustand des voll entwickelten Ausbruchs nun wieder eine Spiralstruktur sowohl in der Flächendichte als auch in der Größe $D^{0.25}$ zu erkennen ist (s. Abb. 5.13). Diese zweiarmlige Spiralstruktur erinnert an die Spiralen in der Rechnung zum Superhumpphänomen. Sie treten in der Simulation zu U Gem nur dann auf, wenn sich die Scheibe im heißen, hoch viskosen Zustand befindet, bis kurz vor dem Ausbruch war diese Struktur nicht zu erkennen. Die Spiralarme sind nahezu punktsymmetrisch zum Primärstern angeordnet, über lange Zeit stationär und stabil. Aus den Beobachtungen von Groot (2001) folgt, daß die Spiralen während des gesamten Ausbruchs zu sehen sind, der sich über 20 Tage erstreckt. In dieser Zeit muß sich der Ausbruch über

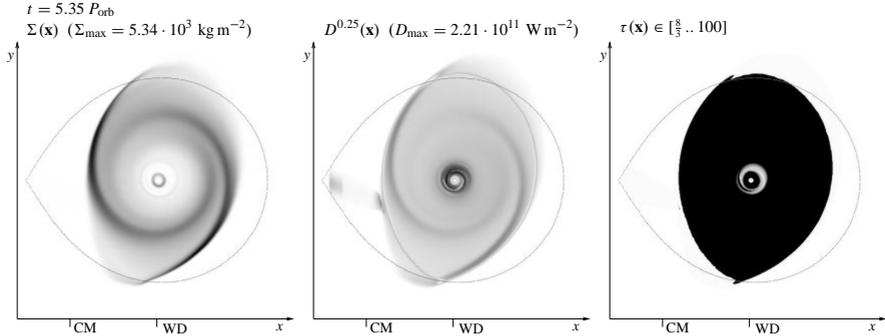


Abbildung 5.13: Der voll entwickelte Ausbruch aus der Rechnung mit gekürztem Potential, $\alpha = 0.05$ und hoher Teilchenauflösung. Es ist noch die unphysikalische Akkretion bei r_i zu erkennen. Innerhalb des heißen Bereichs haben sich zwei markante Spiralen entwickelt. Der Maximalwert der kinematischen Viskosität zu diesem Zeitpunkt beträgt $v_{\max}(\mathbf{x}) = 1.03 \cdot 10^{-7} R_{\odot}^2/\text{s}$.

die gesamte Scheibe und bis zur Oberfläche des Weißen Zwergs ausgedehnt haben. Nur so kann sich die Scheibe durch erhöhte Akkretion wieder entleeren und den Ausbruch beenden. Diese Beobachtung wird von der Simulation reproduziert. Nicht die zwei spiralförmig angeordneten heißen, optisch dicken Bereiche, die nur zu Beginn des Ausbruchs bestehen, sind für die beobachteten Spiralen verantwortlich. Die Gezeitenkräfte des Sekundärsterns induzieren die zweiarmlige Spirale auch in dem Zustand, in dem sich die Scheibe global im heißen Zustand befindet. Diese Aussage unterscheidet sich von denen in [Armitage & Murray \(1998\)](#). Hier wurde mit einem SPH Verfahren eine Spiralstruktur in der Scheibe von IP Peg simuliert, die Simulation endet jedoch zu einem Zeitpunkt, der in unserem Fall der Zeit $t = 2.0 P_{\text{orb}}$ entspricht.

Die Lage der Spiralen in den zwei beschriebenen Fällen unterscheiden sich leicht, eine quantitative Auswertung und ein Vergleich mit den Beobachtungsdaten geben wir im folgenden Abschnitt, in dem die Scheibengrößen in den Geschwindigkeitsraum transformiert werden.

Die simulierten Dopplertomogramme

Auch mit modernen Teleskopen lassen sich selbst nahe Binärsysteme nicht ortsauflösend beobachten. Eine interessante Methode stellt daher die Doppler-Tomographie dar ([Marsh & Horne 1988](#)). [Groot \(2001\)](#) untersuchte die Entwicklung der He II $\lambda 4686$ -Linie der Scheibe in U Gem während des Ausbruchs im März 2000 mit einer Auflösung von 1.1 \AA . Durch diese photometrische Untersuchung erhält man den Fluß der Linie im Geschwindigkeitsraum, zunächst jedoch nur eindimensional in Beobachtungsrichtung. Aus der Kenntnis der Bahnphase und des Inklinationswinkels werden mehrere Messungen zu einem zweidimensionalen Bild der Scheibe im Geschwindigkeitsraum rekonstruiert. Diese Rekonstruktion enthält nun photometrische Messungen zu verschiedenen Bahnphasen, ist also zeitverzerrt. Das so ge-

wonnene Dopplertomogramm liefert ein Bild der aktuellen Verteilung der Strahlungsleistung im Geschwindigkeitsraum, sofern diese Verteilung während der Dauer der Messungen als stationär im mitrotierenden Koordinatensystem angesehen werden kann. Die Dopplertomogramme von Groot (2001) sind in Abbildung 5.14 zu sehen.

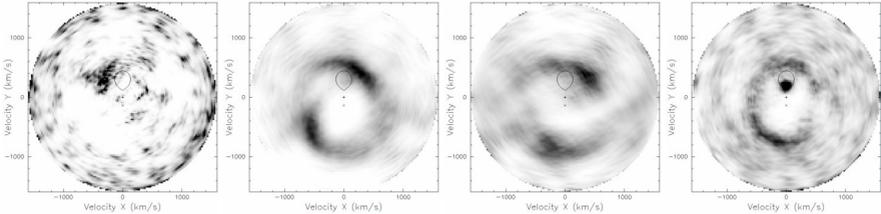


Abbildung 5.14: Dopplertomogramme von Groot (2001). Das '+' zeigt die Geschwindigkeit des Primärsterns, an das 'x' das Massenzentrum und die gepunktete Linie den Roche-Lobe des Sekundärsterns. In der ersten Aufnahme vor dem Ausbruch (links) sind keine Spiralen zu erkennen. Die drei späteren Messungen wurden einige Tage nach Beginn des Ausbruchs gemacht, sie zeigen eine zweiarmige Spirale. Die zweite, untere Spirale fluktuiert etwas stärker in ihrer Position und Helligkeit.

Aus den Simulationsdaten werden nun ebenfalls Dopplertomogramme berechnet. Diese sind nicht zeitverzerrt, da die Daten zu einer bestimmten Simulationszeit in den Geschwindigkeitsraum transformiert wurden. Als die zu transformierende Größe wird wieder $D^{0.25}$ benutzt, die eine gute Näherung der Strahlungsleistung für den sichtbaren Bereich liefert. Für die Berechnung der Tomogramme aus den Simulationsdaten gehen wir folgendermaßen vor. Die Größe $D^{0.25}(\mathbf{x})$ und die simulierte Geschwindigkeit im mitrotierenden Koordinatensystem $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ werden im Ortsraum auf einem feinen, uniformen, kartesischen Gitter der Auflösung 2000×2000 ausgewertet. Zu der simulierten Geschwindigkeit wird die ortsabhängige Geschwindigkeit des mitrotierenden Koordinatensystems addiert, man erhält die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ im Inertialsystem. Die Werte in den Gitterpunkten werden nun auf ein ebenfalls uniformes Gitter im Geschwindigkeitsraum mit der Auflösung 550×550 transformiert. Die kontinuierlich verteilten Werte $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ müssen nun den diskreten Werten \mathbf{v}_i des Gitters im Geschwindigkeitsraum zugeordnet werden, wobei durch die Zuordnung Artefakte entstehen können. In der Literatur wird oft vorgeschlagen, diese Artefakte mit einer Gauß' ähnlichen Funktion zu glätten. Für die hier gezeigte Tomogramme wird ein anderes Verfahren gewählt. Jedem Wert $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ordnen wir ein Intervall $\Delta \mathbf{v}$ im Geschwindigkeitsraum zu, das genau der Gitterweite $\Delta \mathbf{v}_i$ entspricht. Bei der Transformation überschneiden nun die Intervalle $\Delta \mathbf{v}(\mathbf{x})$ mehrere Gitterpunkte \mathbf{v}_i zu bestimmten Bruchteilen. Die Summation der auszuwertenden Größe $D^{0.25}(\mathbf{v}_i)$ erfolgt nun proportional zu diesen Bruchteilen in den entsprechenden Gitterpunkten.

Die Transformation in den Geschwindigkeitsraum besitzt zwei wesentliche Eigenschaften. Zum einen ist der ursprüngliche Kontrast der Abstrahlungsleistung im Ortsraum nicht erhalten, Gas nahe dem Primärstern rotiert mit hoher Geschwindigkeit, diese wird im Geschwindigkeitsraum von einer großen Anzahl an Gitterpunkten repräsentiert, die dortigen Strukturen werden stark verschmiert. Umgekehrt werden die außenliegenden Spiralen, in denen das Gas eine geringere Rotationsgeschwindigkeit aufweist, überproportional abgebildet. Zum zweiten

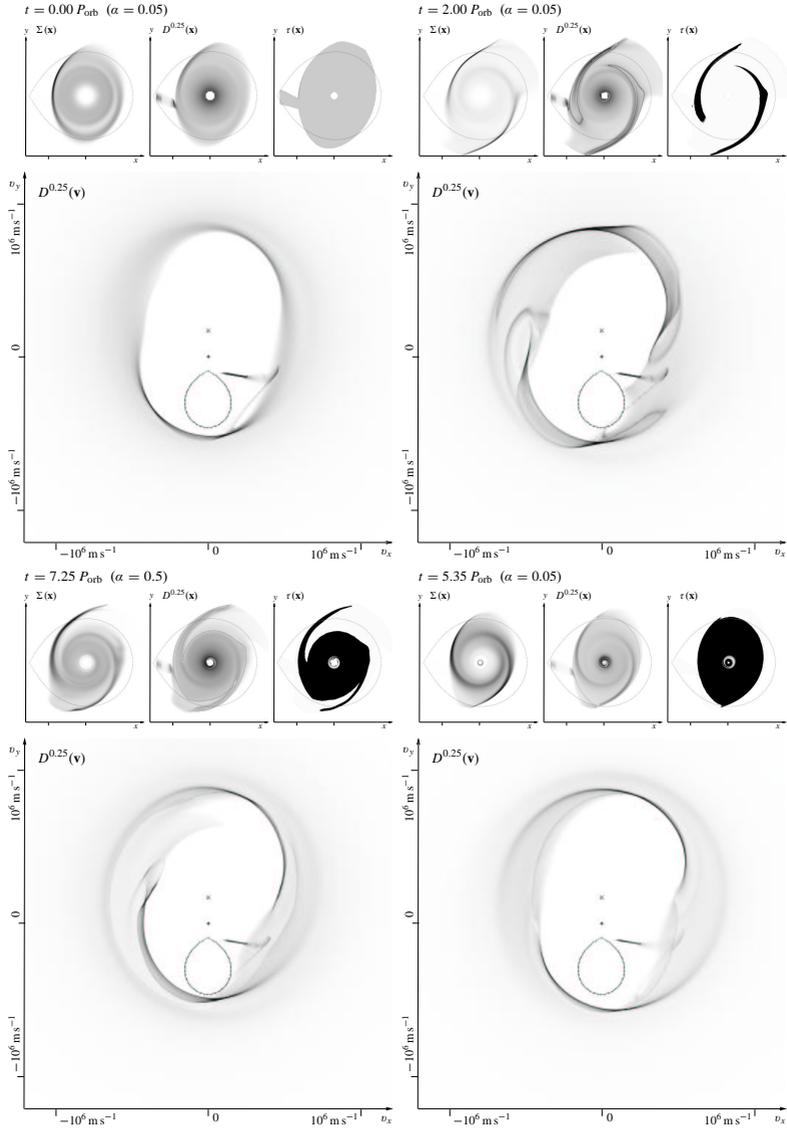


Abbildung 5.15: Die aus den Simulationsdaten erzeugten Dopplertomogramme, das + steht für das Massenzentrum ($v = 0$), das \times für den Primärstern, die gestrichelte Linie für den Roche-Lobe des Sekundärsterns. Die weitere Erläuterung folgt im Text.

bewirkt die mitberücksichtigte Rotationsgeschwindigkeit des Koordinatensystems eine geometrische Verzerrung der Scheibe. Strukturen, wie etwa die Spiralen, die im Ortsraum noch symmetrisch zum Primärstern erscheinen, verlieren diese Symmetrie im Geschwindigkeitsraum. Durch das geringe Massenverhältnis von U Gem ist das Massenzentrum weit vom Ort des Primärsterns verschoben.

In der folgenden Abbildung sind vier verschiedene Doppler-Tomogramme wiedergegeben. Entsprechend der Notation von Groot (2001) ist der Roche-Lobe des Sekundärsterns, das Massenzentrum (+) und der Primärstern (×) gekennzeichnet. Zusätzlich sind die Größen Σ , $D^{0.25}$ und τ im Ortsraum abgebildet, in diesen Bildern ist der Roche-Lobe des Primärsterns durch die gepunktete Linie angezeigt.

Das erste Bild ($t = 0$) zeigt das Tomogramm der Scheibe kurz vor dem Ausbruch. Es ist bereits die beginnende Ausbildung der ersten Spirale zu erkennen, ebenfalls dominant erscheint der Hot-Spot. Der Massenüberstrom nahe am L_1 -Punkt ist überdeutlich zu sehen, da dort die Größen aus der Parametrisierung stammen. In den folgenden anderen Tomogrammen ist die Farbdarstellung der Größe $D^{0.25}$ jeweils unterschiedlich, zum Vergleich kann die Intensität der Spiralen mit der des Hot-Spots verglichen werden. Zum Zeitpunkt ($t = 0$) sind die restlichen Strukturen noch so lichtschwach, daß der Hot-Spot noch zu den dominierenden Erscheinungen zählt. Zum Zeitpunkt ($t = 2.0 P_{\text{orb}}$) befinden sich die Bereiche um die Spiralen im heißen Zustand, diese sind im Geschwindigkeitsraum ebenfalls sehr gut zu erkennen. Das Tomogramm zum Zeitpunkt $t = 7.25 P_{\text{orb}}$ stammt aus der Simulation mit $\alpha = 0.5$, die Entwicklung des Ausbruchs erfolgt auf einer anderen Zeitskala als in der Simulation mit $\alpha = 0.05$. Der heiße Bereich erstreckt sich in dieser Situation bis zum Innenrand der Scheibe, am äußeren Rand sind nur die Bereiche um die Spiralarms sehr heiß. Die Gebiete bei kleinen Radien besitzen hier eine sehr hohe Abstrahlungsleistung, diese sind im Doppler-Tomogramm jedoch nicht zu erkennen, da sie einen großen Bereich im Geschwindigkeitsraum überdecken, wieder sind die Spiralen die dominante Erscheinung. Im Bild zur Zeit $t = 5.35 P_{\text{orb}}$ aus der Simulation mit $\alpha = 0.05$ ist der Ausbruch vollständig ausgebildet, diese Situation ist über mehrere Bahnperioden konstant. Die gesamte Scheibe befindet sich im heißen Zustand, innerhalb des heißen Bereichs bilden sich wieder zwei Spiralen aus, die das Bild im Geschwindigkeitsraum dominieren. Die Abstrahlungsleistung der Spiralen liegt deutlich höher als die des Hot-Spots.

Für einen quantitativen Vergleich mit den Beobachtungsdaten definieren wir den Radius $r_{v,2}$ des zweiten Spiralarms als den Abstand im Geschwindigkeitsraum vom Primärstern auf der Diagonalen im ersten Quadrant, also in Richtung positiver Geschwindigkeiten $v_{x,y} > 0$, $v_x = v_y$. Aus den Simulationen mit $\alpha = 0.05$ erhalten wir $r_{v,2}(t = 2.0 P_{\text{orb}}) \approx 530 \text{ km s}^{-1}$ und $r_{v,2}(t = 5.35 P_{\text{orb}}) \approx 660 \text{ km s}^{-1}$. Die Spiralen im Zustand des voll ausgebildeten Ausbruchs liegen näher am Primärstern, das Gas in ihnen besitzt eine höhere Rotationsgeschwindigkeit. Aus den Beobachtungsdaten schätzen wir den Radius mit $r_{v,2,\text{obs}} \approx 650 \text{ km s}^{-1}$ ab. Die Beobachtungsdaten wurden einige Tage nach Ausbruchbeginn gewonnen, auf unserer Zeitskala also bei $t \geq 60 P_{\text{orb}}$.

5.3.4 Diskussion der Ergebnisse aus der Simulation von U Gem

In der Simulation konnte der Ausbruch der Zwergnova U Geminorum wiedergegeben werden. Das wichtigste Ergebnis ist die Reproduktion der zweiarmigen Spiralstruktur während des Ausbruchs. In der Simulation wie auch in den Beobachtungen liefert diese Spirale den dominanten Anteil in den Doppler-Tomogrammen. Die Spirale ist im mitrotierenden Koordinatensystem stationär, im Ruhezustand der Scheibe ist sie nicht vorhanden. Die Hauptcharakteristika der Spirale wie Lage, Radius und Symmetrie stimmen in hervorragender Weise mit den Beobachtungsdaten überein.

Der Ausbruch entwickelt sich innerhalb weniger Bahnperioden, die erst kurz vor dem Ausbruch entstandenen spiralförmigen Massenansammlungen werden zuerst heiß, sie bilden die dominierende Erscheinung in den Doppler-Tomogrammen. Die Lage der Spiralen stimmt nur grob mit den Beobachtungsdaten überein. Diese Deutung der Spiralen gaben auch [Armitage & Murray \(1998\)](#) in ihrer Rechnung zu IP Peg. In unserer Simulation entwickelt sich der Ausbruch jedoch schnell bis zu dem Zeitpunkt weiter, in dem die gesamte Scheibe im optisch dicken Zustand verhartet. Die hoch viskose Scheibe hat sich im Roche-Lobe des Primärsterns weit ausgedehnt und unterliegt somit der Gezeiteninstabilität des Sekundärsterns, es bildet sich eine Spiralstruktur mit der Modenzahl $m = 2$ aus. Genau diese Struktur ist nach unserer Interpretation in den Beobachtungsdaten enthalten. Die Spiralstruktur ist über mehrere Bahnperioden stabil und stationär im mitrotierenden Koordinatensystem, sie ist symmetrisch zum Primärstern und erscheint im Doppler-Tomogramm aufgrund des rotierenden Koordinatensystems nicht mehr symmetrisch. Die erhöhte Viskosität in diesem Zustand wird eine höhere Akkretionsrate verursachen und dadurch das Ende des Ausbruchs bestimmen.

Theoretische Überlegungen zu Akkretionsscheiben in CVs sagen voraus, daß die Scheiben im Ruhezustand kühl und optisch dünn sind und sich nicht bis zu dem Radius ausdehnen, am dem die Gezeitenstörung einsetzt. Diese Aussage ist konsistent mit den Beobachtungen von CVs, in denen keine Spiralstrukturen im Ruhezustand der Scheibe entdeckt wurden. In unserer Simulation ist die Scheibe lange Zeit überall optisch dünn, erst kurz vor dem Ausbruch bilden sich die Spiralen aus. Die Folgerung aus dieser Tatsache ist nicht, daß der Übergang zum heißen Zustand die Spiralstruktur induziert, sondern umgekehrt. Die kühle Scheibe sammelt so lange Masse an, bis auch sie sich so weit ausgedehnt hat, daß der Störeinfluß des Begleitsterns eine weit außenliegende Spiralstruktur induziert. Diese Orte erhöhter Massenansammlung werden zuerst ionisiert und definieren letztlich den Ort, an dem der Ausbruch gestartet wird. Die Grenzschicht an der Oberfläche des weißen Zwergs und der Hot-Spot haben in unseren Rechnungen keinen Einfluß auf die Entwicklung des Ausbruchs.

An dieser Stelle wollen wir die durch den Sekundärstern verursachten Störeinflüsse auf die Akkretionsscheibe im Überblick und im Kontext der Rechnungen in dieser Arbeit diskutieren. In der Rechnung zum Superhumpphänomen wurde eine nicht-viskose Scheibe in einem System betrachtet, das ein extremes Massenverhältnis aufweist. In dieser Systemgeometrie war die Scheibe bis zu dem Radius ausgedehnt, ab dem der Gezeiteneinfluß des Sekundärsterns die stationäre, zweiarmige Spiralstörung induzieren konnte. Das nicht viskose Modell ließ die Scheibe jedoch nicht weit genug über den resonanten Radius $r_{1,3}$ hinweg ausdehnen, so daß sich keine exzentrische und präzedierende Scheibe entwickeln konnte, die zur

Erklärung des Superhumpphenomens nötig wäre. In der Rechnung zu U Gem, das ein sehr ausgeglichenes Massenverhältnis aufweist, konnte sich die Scheibe im kühlen und niedrig-viskosen Zustand nicht weit genug ausdehnen, es bildeten sich keine Spiralstrukturen. Erst im heißen, hoch-viskosen Zustand dehnte sich die Scheibe bis zum Roche-Lobe aus und es wurde in ihr die spiralförmige Störung induziert. Auch in diesem Zustand konnte aufgrund der Systemgeometrie der resonante $r_{1:3}$ Radius nicht weit genug überschritten werden, eine Präzessionsbewegung bildete sich deshalb nicht aus. Erst in der Rechnung zu AM CVn mit extremem Massenverhältnis konnte die Scheibe im optisch dicken, hoch-viskosen Zustand auch den resonanten Radius überschreiten und entwickelte eine starke Exzentrizität. Während der ausgeprägten Präzessionsbewegung konnten sich verständlicherweise wiederum keine Spiralen ausbilden.

In der Simulation der Scheibe in U Gem wurde mit Hilfe der Näherung für dünne Scheiben und dem viskosen α -Modell der Ausbruch mit einem konstanten Wert für α reproduziert. Durch die geeignete Behandlung der Energiegleichung konnten die in dem Scheibeninstabilitätsmodell enthaltenen Lösungen selbstkonsistent wiedergegeben werden. Mit dem starken Temperaturanstieg während des Ausbruchs geht auch ein Anstieg der kinematischen Scherviskosität ν einher. Der zu den betreffenden Zeitpunkten benutzte Maximalwert liegt in der Größenordnung $\nu_{\max}(\mathbf{x}) = 10^{-8} R_{\odot}^2 \text{s}^{-1}$ vor, und um den etwa zehnfach höheren Wert im voll entwickelten Ausbruch. Aus dieser Beobachtung ist ersichtlich, daß einfachere Scheibenmodelle, in denen die Energiegleichung vernachlässigt wird, zwei verschiedene Werte der Viskosität im heißen und kühlen Zustand benötigen, um Zwergnova-Ausbrüche richtig zu erklären. Aus der Untersuchung der zeitabhängigen Radialstruktur und unter der Annahme einer axialsymmetrischen Scheibe kommt Smak (1984) zu dem Schluß, daß zwei verschiedene Werte für α nötig sind, um das Ausbruchsverhalten, insbesondere die Ausbruchszyklen, zu erklären. In diesen eindimensionalen Modellen konnte die Störung des Sekundärsterns nicht berücksichtigt werden. Diese ist es jedoch, die zu den dominierenden Kräften in der Scheibenebene zählt, Masse in Spiralarmlen ansammeln lässt und somit der glättenden Eigenschaft der Scherviskosität entgegenwirkt. In den eindimensionalen Modellen zerfließen die heißen Bereiche und erreichen viel zu schnell wieder den kühlen Zustand, so daß mit konstantem α viel zu kurze Ausbruchszyklen wiedergegeben werden. Die erhebliche Schwäche der eindimensionalen Modelle motiviert die aufwendigen zweidimensionalen, hydrodynamischen Rechnungen. Die vorgestellten Ergebnisse lassen berechtigterweise Zweifel an der Notwendigkeit zweier verschiedener Werte für α zu, wie sie oft in den in der Literatur zu findenden Überlegungen gefordert werden.

Die Verwendung des viskosen Ansatzes innerhalb des α -Modells stand nicht im Widerspruch zur Ausbildung der spiralförmigen Störung, welche letztlich auf den Störeinfluß des Sekundärsterns zurückzuführen ist. Andere angesprochene Instabilitäten, wie etwa die Rossby-Wellen in Scheiben, die im Zentralpotential betrachtet werden, treten in der Betrachtung im Roche-Potential wohl kaum auf, und die Ausbildung großer Wirbel ist wiederum nicht vereinbar mit dem viskosen Ansatz. Die Tatsache, daß das viskose α -Modell die Entstehung der Spiralen zulässt, spricht für seine Verwendung in Kataklysmischen Variablen. Die gute Übereinstimmung mit den Beobachtungsdaten interpretieren wir letztlich auch als Qualitätsmerkmal für dieses Modell.

Weitere zukünftige Parameterstudien im Wechselspiel mit noch höher aufgelösten Beobachtungen könnten letztlich zu einer genaueren Beschreibung der noch ungeklärten Parameter, etwa dem Wert für α selbst, führen. Die Relevanz dieses Vorgehens wurde schon in der Diskussion zu den Ergebnissen zu AM CVn diskutiert, an diese Argumentation wollen wir hier anschließen.

Natürlich sind für zukünftige Untersuchungen auch Erweiterungen des Modells notwendig. Dreidimensionale Rechnungen unter vollständigen Berücksichtigung des Strahlungstransports und die Einbeziehung der Grenzschicht an der Oberfläche des Weißen Zwergs werden noch genügend Aufgaben für noch schnellere Computer liefern.

Es ist beabsichtigt, die Ergebnisse aus diesem Abschnitt in der Zeitschrift 'Astronomy & Astrophysics' zu veröffentlichen (Klingler 2003).

A Die Behandlung fester Ränder

In diesem Anhang stellen wir ein Konzept zur Behandlung von festen Rändern für die Methode der Finiten Massen vor. In den astrophysikalischen Problemstellungen mussten keine festen Ränder berücksichtigt werden, dieser Anhang kann daher von den vorigen Kapiteln getrennt betrachtet werden.

Die Notwendigkeit zur Behandlung fester Ränder tritt dann auf, wenn die Umströmung von Körpern wie etwa Fahr- und Flugzeugen oder Turbinenschaufeln beschrieben werden soll. Finite Volumen- oder Differenzenverfahren besitzen eine ortsfeste Diskretisierung, die eine Berücksichtigung von Randbedingungen einfach erscheinen lässt. In Randzellen werden die aus den Randbedingungen folgenden Größen analytisch vorgegeben. Für Lagrangesche Teilchenmethoden können solche Terme nicht ohne weiteres angegeben werden. Ein erster Ansatz, die Teilchen von der Durchdringung der Randgebiete abzuhalten, wäre die Einführung künstliche Potentialkräfte. Dieser Ansatz liefert in der praktischen Umsetzung jedoch einige Nachteile. Innerhalb des Randpotentials können sich die Teilchen nicht so überlagern, daß die Approximationseigenschaften erhalten bleiben. Die Auflösung der Ränder wird durch die Ausdehnung des Randpotentials bestimmt, steil ansteigende Randpotentiale liefern wiederum große Kräfte und damit steife Gleichungen.

Eine bessere Methode, die Teilchen am Durchdringen der Ränder zu hindern, ist die Einführung von Spiegelteilchen. Schneidet ein Teilchen die Berandung, so wird ein zur Berandung symmetrisches Teilchen angelegt, das seine Druckkräfte senkrecht zur Berandung ausgleicht sowie die Normalkomponente der Geschwindigkeit dämpft. Zu den Vorteilen dieses Ansatzes gehört, daß sich die Teilchen und Spiegelteilchen über den Rand hinweg geeignet überlappen können, die Approximationseigenschaften und damit die Ordnung des Verfahrens sind so über den Rand hinweg erhalten. Stellt der feste Rand eine Hyperebene im Simulationsgebiet dar, so kann die Anordnung der Teilchen und Spiegelteilchen ersatzweise als eine zur Hyperebene symmetrische Anordnung ohne Rand angesehen werden. Durch die Symmetriebedingung verschwindet automatisch die Normalkomponente der Geschwindigkeit auf der Hyperebene. Das Verfahren verhält sich nun genauso wie im Fall ohne Ränder, es entstehen keine neuen numerischen Schwierigkeiten, die Zeitintegration und die Integration über die Teilchen, aus denen die Kräfte folgen, bleiben unverändert.

Die grundlegenden Überlegungen zur der Methode der Spiegelteilchen entstanden ganz am Anfang dieser Arbeit. Zu diesem Zeitpunkt war das Restartverfahren noch nicht vollständig entwickelt, welches in den hier gezeigten Rechnungen nicht benötigt wird. Während der Zeit, in der die astrophysikalischen Rechnungen entstanden, wurde diese Methode weiterentwickelt und an neuen Beispiele von Peter Leinen getestet. Die endgültige Fassung mit den neuen Rechnungen, die auch die Behandlung gekrümmter Ränder umfasst, ist in [Klingler et al.](#)

(2003) dokumentiert. In diesem Kapitel werden deshalb nur die Simulationen behandelt, die von mir zu Beginn dieser Arbeit ausgeführt wurden, ebenfalls werden nur die Grundgedanken der Methode erläutert.

A.1 Spiegelung an Hyperebenen

Die Spiegelung einer Koordinate \mathbf{x} an einer Hyperebene durch den Punkt \mathbf{p} mit der nach außen gerichteten Normalen \mathbf{n} ist durch die Transformation

$$\mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{p} + \mathbf{S}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \quad (\text{A.1})$$

mit der Spiegelmatrix

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} - 2\mathbf{nn}^T \quad (\text{A.2})$$

gegeben. Für jedes Teilchen i mit den Positionen \mathbf{q}_i , \mathbf{H}_i und den Geschwindigkeiten \mathbf{q}'_i , \mathbf{H}'_i kann ein an der Hyperebene gespiegeltes Teilchen mit den Positionen

$$\bar{\mathbf{q}}_i = \mathbf{p} + \mathbf{S}(\mathbf{q}_i - \mathbf{p}), \quad \bar{\mathbf{H}}_i = \mathbf{S}\mathbf{H}_i \quad (\text{A.3})$$

und den Geschwindigkeiten

$$\bar{\mathbf{q}}'_i = \mathbf{S}\mathbf{q}'_i, \quad \bar{\mathbf{H}}'_i = \mathbf{S}\mathbf{H}'_i \quad (\text{A.4})$$

definiert werden.

Bei solchen symmetrischen Anordnungen ist man nur an der Lösung auf einer Seite der Hyperebene $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \leq 0$ interessiert. Es genügt daher, nur für diejenigen Teilchen ein Spiegelteilchen zu definieren, welche die Hyperebene schneiden. Die Hyperebene kann dann als feste Berandung eines Problems definiert werden, das selbst nur im Gebiet $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \leq 0$ definiert ist. Aufgrund der symmetrischen Anordnung der Teilchenkonfiguration unter Einbeziehung ihrer gespiegelten Partner verschwinden die senkrechten Komponenten der Gradienten der thermodynamischen Größen ρ und s , daraus folgt direkt das Druckgleichgewicht auf der Hyperebene

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \pi = 0. \quad (\text{A.5})$$

Ebenfalls verschwindet die Normalkomponente der Geschwindigkeit

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{A.6})$$

damit sind die Bedingungen an eine feste Berandung erfüllt. Da der Ort der Berandung, also die Hyperebene fest vorgegeben wird und die Spiegelteilchen genau symmetrisch angeordnet werden können, ist der Rand im Ort exakt definiert, also nicht etwa nur in der Größenordnung der Teilchenauflösung.

Positionen und Geschwindigkeiten der Spiegelteilchen werden zu jedem Zeitpunkt der Kräfteauswertung bestimmt, nur für die Originalteilchen werden die Kräfte ausgewertet, welche dann in der Zeit integriert werden. In der algorithmischen Umsetzung müssen die Spiegelteilchen nicht vollständig mit ihrem Quadraturpunkten angelegt werden. Es genügt, nur die Quadraturpunkte der Originalteilchen anzulegen und diese zu spiegeln. Das Verfahren gleicht

dem, das für die Behandlung periodischer Randbedingungen bereits in [Gauger \(2000\)](#) benutzt wurde. Sei \mathbf{T} eine Transformation, die entweder Koordinaten in den periodischen Rechenbereich transformiert oder in den Rechenbereich spiegelt. Der Algorithmus kann dann wie folgt beschrieben werden; lege für alle Originalteilchen Quadraturpunkte an und transformiere sie mit \mathbf{T} , benutze Teilchen in ihren originalen und transformierten Koordinaten um die Dichten und Geschwindigkeiten in den Quadraturpunkten auszuwerten. Bei der Auswertung der Kräfte geht man analog vor, benutze wieder die Teilchen in ihren originalen und transformierten Positionen und suche die Quadraturpunkte, die im Träger des Teilchens liegen, summiere die Kräfte auf. Wird ein Quadraturpunkt für die Kräfteberechnung ausgewertet, während sich das Teilchen in einer transformierten Position befindet, so muß der daraus resultierende Kraftanteil, bevor er zur Gesamtkraft aufaddiert wird, zuerst mit \mathbf{T}^{-1} zurücktransformiert werden.

Mit dieser Methode können nun Ränder berücksichtigt werden, die durch eine Hyperebene beschrieben werden. Es ist ebenfalls möglich, mehrere Hyperebenen in einer Simulation zu berücksichtigen und diese lokal zu begrenzen, damit werden komplexere Randstrukturen möglich. Schneiden sich mehrere Hyperebenen an Orten, die zum Rechenggebiet gehören, so sind dort geeignete Maßnahmen zu treffen. In [Klingler et al. \(2003\)](#) wird beschrieben, wie beliebige Ränder berücksichtigt werden können. Im diesem allgemeinen Fall erhält jedes Teilchen eine eigene ihm zugeordnete Hyperebene

$$\mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}_i) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Der Schnitt des einzelnen Teilchens mit dem allgemeinen Rand bildet eine Hyperfläche. Aus der mit der Formfunktion ψ_i gewichteten Mittelung der Normalen und dem Massenschwerpunkt dieser Hyperfläche erhält man die gemittelten Größen \mathbf{n}_i und \mathbf{p}_i der individuellen Hyperebene. Ebenfalls wird beschrieben, wie im Falle bewegter Ränder zu verfahren ist. In den hier gezeigten Beispielen wird von diesen Methoden noch kein Gebrauch gemacht.

In dem letzten gezeigten Beispiel einer laminaren Strömung werden feste und periodische Randbedingungen gemischt verwendet. Die zwei festen Ränder bei $y = y_{1,2}$ und die periodischen bei $x = x_{1,2}$ bilden einen rechteckigen Kasten. An den Ecken können die Teilchen beiden Randbedingungen gleichzeitig unterliegen. Ist ein Teilchen so stark ausgedehnt, daß es das periodische Intervall mehrmals überdeckt, so erzeugt die periodische Transformation \mathbf{P} allein schon mehrere transformierte Positionen, die zusätzlich gespiegelt werden müssen. Dadurch entstehen im Außenbereich der Ecken zusätzliche Teilchen. Liefert die periodische Verschiebung n verschiedene Positionen, so kann ein Teilchen durch die Spiegelung an einer Hyperebene $2n$ verschiedene Positionen und Geschwindigkeiten einnehmen, es unterliegt den möglichen Transformationen

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{P}_1, \mathbf{SP}_1, \dots, \mathbf{P}_n, \mathbf{SP}_n. \quad (\text{A.8})$$

A.2 Der Machkegel

In dieser zweidimensionalen Simulation testen wir eine Anordnung mit drei Hyperebenen, die dritte Hyperebene wird dabei unter dem Winkel $\vartheta = 20^\circ$ mit der Machzahl $v/c_{s,ad} = M = 3$

schräg angeströmt. Es entsteht eine schräge Schockfront, die als ein Teil eines symmetrischen Machkegels interpretiert werden kann, wie er bei der Umströmung eines Tragflächenflügels im Überschallbereich auftritt.

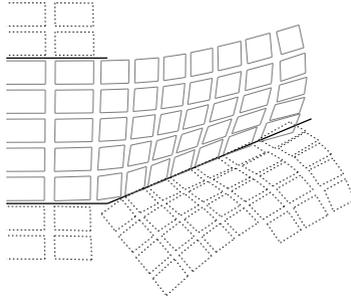


Abbildung A.1: Schematische Darstellung der Teilchenpositionen mit einer Auflösung von 5 Teilchen in y -Richtung. Die Teilchengröße ist 5 mal kleiner dargestellt, die gepunkteten Teilchen sind die Spiegelpartner der Originalen (grau). Die drei schwarzen Linien sind die Hyperebenen.

Die Anordnung dieser Situation ist denkbar einfach, im linken Gebiet wird eine konstante Massen- und Entropiedichte angesetzt, dies gelingt exakt bis zu den beiden horizontalen Hyperebenen, die das Gas an der Expansion ins Vakuum hindern. Die drei letzten Teilchen am linken Rand erfahren keine Kräfte, so daß hier ein Ausfließen verhindert wird. Sie dienen als Kolben, der mit konstanter Geschwindigkeit das Gas in positive x -Richtung führt. Die Geschwindigkeiten seien $v_y = 0$ und $v_x/c_{s,ad} = M_1 = 3$. Im Verlauf der Simulation expandiert das Gas nach rechts in den offenen Bereich, die daraus resultierende Geschwindigkeit addiert sich zur anfänglichen Strömungsgeschwindigkeit. Nach geeignet langer Zeit ist der Einfluß der Expansion nahe am Schnittpunkt der zwei unteren Hyperebenen nicht mehr erkennbar und es stellt sich eine schräge, stationäre Schockfront ein. Die Zuordnung der Teilchen zu den Hyperebenen an deren Schnittpunkt erfolgt einfach anhand der x -Koordinate des Teilchenmittelpunkts. Diese Rechnung wird in Klingler et al. (2003) mit der erweiterten Methode der individuellen Hyperebenen und in höherer Auflösung nochmals vorgestellt.

Die Schockrelationen, also die thermodynamischen Größen hinter der Schockfront sowie deren Winkel können analytisch angegeben werden (Anderson 1990). Der Winkel β , den die Schockfront mit der x -Achse einnimmt, folgt aus der Gleichung

$$\tan \vartheta = 2 \cot \beta \left[\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right]. \quad (\text{A.9})$$

Diese Gleichung legt zugleich den maximalen Winkel ϑ fest, für den eine gerade Schockfront bei gegebenen M_1 noch möglich ist. Bei zu großen Ablenkungswinkeln bildet sich ein bogenförmiger Schock aus, der die ablenkende Fläche nicht mehr berührt. Die Gleichung liefert eine zweite Lösung für die starke Schocklösung bei großem Winkel β , an der wir hier

nicht interessiert sind. Aus unseren Materialkonstanten $\gamma = 1.4$ und $c_v = 2.5$ und den Anfangswerten vor der Schockfront $p_1 = \rho_1 = T_1 = c_s = 1$ und $v_{x,1} = M_1 = 3$ folgt der Winkel $\beta = 37.5^\circ$.

Für ein ideales Gas können die folgenden Schockrelationen hergeleitet werden, der Index 2 bezeichnet die thermodynamischen Größen, die sich hinter der Schockfront einstellen

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_{n1}^2}{(\gamma - 1)M_{n1}^2 + 2} \quad (\text{A.10})$$

mit der zur Schockfront normalen Komponente der Geschwindigkeit $v_{n1}/c_{s,\text{ad}} = M_{n1} = M_1 \sin \beta$. Für Druck und Temperatur gilt entsprechend

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_{n1}^2 - 1) \quad \text{und} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (\text{A.11})$$

Für die Normalkomponente der Geschwindigkeit nach dem Schock gilt

$$M_{n2}^2 = \frac{M_{n1}^2 + [2/(\gamma - 1)]}{[2\gamma/(\gamma - 1)]M_{n1}^2 - 1} \quad \text{und} \quad M_2 = \frac{M_{n2}}{\sin(\beta - \vartheta)}. \quad (\text{A.12})$$

Die Schockrelationen und der Ablenkungswinkel lassen sich also vollständig aus den Größen γ und M_1 ableiten.

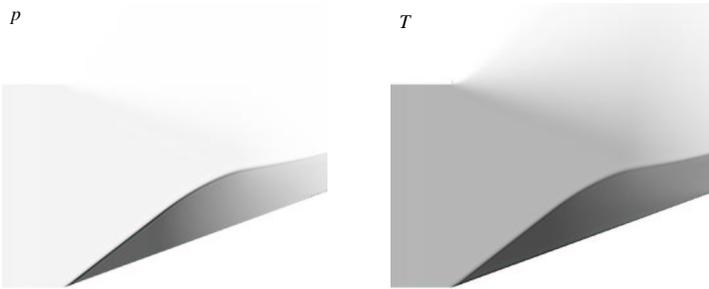


Abbildung A.2: Druck p und Temperatur T aus der Simulation mit 100 Teilchen in y – Richtung. Es stellt sich eine stationäre Schockfront ein, der Winkel von $\beta = 37.5^\circ$ wird sehr gut wiedergegeben.

Die Simulationsergebnisse in Abb. A.2 weisen zwei numerische Artefakte auf. Zum einen ist in der Schockfront ein Überschwingen der thermodynamischen Größen zu beobachten, die hinter dem Schock jedoch schnell gedämpft werden. Die Ausdehnung dieses Bereichs entspricht der Teilchenauflösung. Dieses Verhalten ist bereits aus vielen anderen Schockrechnungen mit FMM bekannt und ist auch in zahlreichen anderen numerischen Verfahren zu beobachten. Die zweite Eigenschaft ist ein Aufheizen am Rand. Dort wird die Normalkomponente der Geschwindigkeit durch die Spiegelteilchen stark gedämpft, die dissipativen

Reibungskräfte erzeugen dort zusätzliche Entropie. Dieser Effekt ist ebenfalls aus den Gittermethoden als “Wall Heating” bekannt. Der Bereich ist in den Rechnungen ebenfalls auf wenige Teilchenradien beschränkt. Mit der erhöhten Temperatur geht eine verringerte Dichte einher, so daß die Druckkräfte im Gleichgewicht sind, wie in der Abbildung sehr schön zu erkennen ist.

Die analytische Lösung des Schocks ergibt für unsere Parameter u.a. $\rho_2/\rho_1 = 2.40$. Aus den simulierten Daten können hinter der Schockfront, jedoch außerhalb der überschwingenden Bereiche und im geeigneten Abstand zum Rand Werte für $\rho_2/\rho_1 \in [2.38 : 2.42]$ ermittelt werden.

A.3 Berücksichtigung äußerer Kräfte

Die Einbeziehung äußerer Kraftfelder erfolgt nach dem bisherigen Prinzip der Symmetrieforderung an den Spiegelebenen. Das Kraftfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist außerhalb der Ränder durch die gespiegelte Form zu ersetzen,

$$\tilde{\mathbf{f}}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}), & \text{für } \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}_i) \leq 0 \\ \mathbf{S}_i \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}), & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

für den allgemeinen Fall beliebiger Ränder, in denen jedes Teilchen seine eigene Spiegelebene nach A.7 besitzt. Der einfachere Fall gemeinsamer Hyperebenen für alle Teilchen folgt ebenfalls daraus.

Schneidet ein Teilchen seine Hyperebene, so erfährt es eine externe Kraft, die aus der Integration über das am Rand diskontinuierliche Kraftfeld $\tilde{\mathbf{f}}$ hervorgeht. Die für externe Kräfte eingeführte 3-Punkt Integrationsformel kann in solchen Fällen ungeeignet sein. Betrachtet man eine einfache, eindimensionale Konfiguration im konstanten Kraftfeld $\mathbf{f}(x) = -g$, so kann der Rand als Potentialtopf angesehen werden. Ein einzelnes Teilchen, das sich im Randbereich aufhält, kann in seiner Lage im Potentialtopf allein unter Verwendung der äußeren Kraft stabilisiert werden. Dies gelingt natürlich nur, wenn die Integration des Kraftfeldes über die Teilchenausdehnung geeignet gewählt wird. Eine grobe 3-Punkt Integrationsformel führt dabei zu Oszillationen um den Gleichgewichtszustand.

In einem einfachen Beispiel testen wir die eben beschriebene Anordnung, es werden zwei Hyperebenen bei x_1 und x_2 eingeführt und das äußere Kraftfeld sei konstant $\mathbf{f}(x) = -g$. Diese eindimensionale Anordnung entspricht einem Gas, das in einem Kasten eingeschlossen ist und einem konstanten Gravitationsfeld ausgesetzt wird, wie etwa die Atmosphäre auf der Erdoberfläche. Im Gleichgewichtszustand befindet sich die Gravitationskraft und der entgegengesetzt gerichtete Druckgradient im Gleichgewicht, dieser Zustand wird durch die barometrische Höhenformel beschrieben. Wir führen hier eine zusätzliche Vereinfachung ein und nehmen eine global konstante Temperatur θ_c an, der exponentielle Abfall des Drucks mit der Höhe x gilt dann auch für die Dichte ρ , der Gleichgewichtszustand lautet dann

$$\rho(x) = \rho_0 \exp \left[-\frac{gx}{c_v(\gamma - 1)\theta_c} \right] \quad \text{und} \quad v = 0. \quad (\text{A.14})$$

In der Simulation wurden die äußeren Kräfte mit der einfachen 3-Punkt Integrationsformel berechnet, die beschriebenen Oszillationen konnten gut durch die zusätzlichen Reibungskräfte der Spiegelteilchen gedämpft werden. Die Ausgangssituation entspricht dem Gleichgewichtszustand A.14 mit $g = 2.0$, die Simulation wird jedoch mit einem Wert $g = 1.8$ ausgeführt. Das Gas wird zunächst eine Beschleunigung in positiver x -Richtung erfahren, die am Rand eintreffenden Wellen werden reflektiert und durch die Reibungskräfte schließlich gedämpft. Aufgrund der isothermen Beschreibung wird das Gas nach genügend langer Zeit den Gleichgewichtszustand nach A.14 mit dem Wert $g = 1.8$ einnehmen.

Die Ergebnisse der Simulation lassen sich einfach beschreiben, die Teilchen im neuen Gleichgewichtszustand geben die erwartete Lösung gut wieder. Besonderes Augenmerk gilt eher den Reibungskräften, die zur Dämpfung der Dynamik eingesetzt werden. Von den Teilchen am Rand abgesehen, beschreiben sie, nach dem sie vom Gleichgewichtszustand abgelenkt worden sind, ein relativ glattes Geschwindigkeitsfeld. Die Reibungskräfte wirken auf solche Geschwindigkeiten jedoch nur sehr schwach dämpfend. Bei einer Erhöhung des Reibungskoeffizienten führt die Dämpfung der Spiegelteilchen am Rand zu steifen Gleichungen. Gleichzeitig tritt im Innenraum des Rechengebiets kaum Dämpfung auf und das System pendelt sehr lange um seine Gleichgewichtslage.

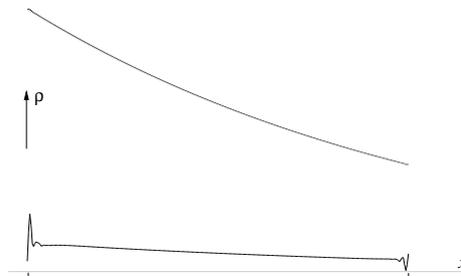


Abbildung A.3: Suche der Gleichgewichtslage mit dem Runge-Kutta-Verfahren für Gleichungssysteme erster Ordnung. Der exponentielle Verlauf der Dichte wird gut wiedergegeben. Abgebildet ist die analytische Lösung (grau) und das Ergebnis der Simulation (schwarz) sowie die Differenz, mit dem Faktor 100 vergrößert (untere Linie).

Erst durch die Einführung einer Volumenviskosität konnte die Geschwindigkeit schnell genug gedämpft werden. Die Schwingungen um die Gleichgewichtslage liefern in den jeweiligen Gebieten abwechselnd eine Dehnung und Komprimierung des Gases und damit Geschwindigkeiten mit $|\operatorname{div} \mathbf{v}| \geq 0$. Die Beobachtung, daß Geschwindigkeiten, die im Teilchenmodell sehr gut approximiert werden können, kaum durch die Reibungskräfte gedämpft werden, wurde schon mehrmals angesprochen. In der Einführung von FMM im Abschnitt der Reibungskräfte wurde gezeigt, daß in einer Komprimierung mit einer Geschwindigkeit, die exakt approximiert werden kann, gar keine Dissipation durch Reibungskräfte stattfindet. Im Gegensatz hierzu steht die Volumenviskosität, die über das Auftreten von $|\operatorname{div} \mathbf{v}| \geq 0$ definiert

ist. In [Speith \(1998\)](#) wird eine ähnliche Rechnung für ein ideales Gas im konstanten Gravitationsfeld mit der SPH Methode vorgestellt. Innerhalb dieses Verfahrens wird eine künstliche Viskosität benutzt, die im eindimensionalen Fall und im Falle der Kompression der physikalischen Volumenviskosität sehr ähnlich ist. Die zeitliche Entwicklung der Dichte in der SPH Rechnung ist damit sehr ähnlich zu den Ergebnissen aus FMM unter Benutzung der Volumenviskosität.

Der Gleichgewichtszustand für das eingeführte Beispiel lässt sich jedoch einfach durch Lösen der Gleichung erster Ordnung in der Zeit herleiten. Für das Ergebnis, das in [A.3](#) abgebildet ist, benutzen wir ein Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung und lösen damit direkt

$$(\mathbf{q}_i, \mathbf{H}_i) = \int (\mathbf{F}_i, \mathbf{M}_i) dt \quad (\text{A.15})$$

und verzichten auf die Berechnung der zeitlichen Entwicklung.

A.4 Laminare Randbedingungen

Durch die Zwangsbedingung der Spiegelsymmetrie an den Hyperebenen konnte $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ erreicht werden. Diese Randbedingung ist in physikalischen Fluiden nur für den nicht viskosen Fall vollständig. Die bisherigen Überlegungen stehen zwar nicht im Widerspruch zur Existenz von viskosen Kräften, die beispielsweise nur im Fluid, jedoch nicht am Rand wirken könnten. Physikalische, viskose Fluide bilden am Rand jedoch eine laminare Grenzschicht, die aus der Randbedingung

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\text{A.16})$$

folgt, damit verschwindet auch die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit am Rand.

Auch diese Randbedingung lässt sich mit der Idee der Spiegelteilchen umsetzen. Es wird verlangt, daß die Teilchen und Spiegelteilchen am Rand jeweils Geschwindigkeiten approximieren, die sich gegenseitig aufheben. Dies kann durch Punktspiegelung erreicht werden, in den bisherigen Überlegungen wird einfach die Transformation der Spiegelung durch eine Punktspiegelung ersetzt $\mathbf{S}_i = -\mathbb{1}$ und liefert die Transformationen

$$\bar{\mathbf{q}}_i = \mathbf{p}_i - (\mathbf{q}_i - \mathbf{p}_i), \quad \bar{\mathbf{H}}_i = -\mathbf{H}_i \quad (\text{A.17})$$

für die Koordinaten und

$$\bar{\mathbf{q}}'_i = -\mathbf{q}'_i, \quad \bar{\mathbf{H}}'_i = -\mathbf{H}'_i \quad (\text{A.18})$$

für die Geschwindigkeiten. Die Transformationen gelten für den allgemeinen Fall beliebiger Ränder, die durch teilchenbezogene Hyperebenen $(\mathbf{n}_i, \mathbf{p}_i)$ genähert werden, der spezielle Fall gerader Ränder durch global gültige Hyperebenen folgt ebenfalls daraus. Der Symmetriepunkt der Punktspiegelung \mathbf{p}_i ist im Fall von globalen Hyperebenen dann ebenfalls der Schwerpunkt der Hyperfläche, die aus dem Schnitt von Rand und Teilchen hervorgeht.

In einer Testrechnung untersuchen wir ein viskoses Fluid zwischen zwei planparallelen Platten. Eine analytische Lösung für den inkompressiblen und stationären Fall ist in [Landau](#)

& Lifschitz (1966) angegeben. Aus den Randbedingungen $\mathbf{v} = 0$ für $y = 0$ und $y = h$ folgt die Geschwindigkeit in Flußrichtung x

$$v_x = -\frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y(y-h). \quad (\text{A.19})$$

Für die Geschwindigkeit ergibt sich also quer zur Flüssigkeitsschicht eine parabolische Abhängigkeit, in der Mitte der Schicht erreicht die Geschwindigkeit ihren größten Wert. Für den stationären Fall folgt automatisch $v_y = 0$.

In unserer Simulation lösen wir die Gleichungen in den zwei Dimensionen (x, y) wie folgt; die planparallelen Platten werden durch zwei parallele Hyperebenen bei $y = 0$ und $y = h$ dargestellt, an denen die Punktsymmetrie entsprechend der laminaren Randbedingungen gelten soll. In x -Richtung verwenden wir periodische Randbedingungen, damit ist die Konfiguration in dieser Richtung unendlich ausgedehnt. Die Mischung beider Randbedingungen wurde am Anfang dieses Anhangs erläutert. Mit unserem Modell kann der inkompressible Fall nicht direkt modelliert werden, wir erreichen ihn jedoch über die folgende Abänderung. Die Anfangsbedingungen seien $\rho = \text{const.}$, $s = \text{const.}$ und damit auch $p = \text{const.}$ Die antreibende Kraft, die im inkompressiblen Modell ein Druckgradient ist, der sich über das gesamte Volumen gleichmäßig verteilt, wird durch eine äußere Volumenkraft $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = g \mathbf{e}_1$ ersetzt

$$\frac{dp}{dx} \rightarrow g\rho \quad (\text{A.20})$$

mit der konstanten Schwerebeschleunigung g in x -Richtung. Die Anfangsgeschwindigkeit sei $\mathbf{v}(t = 0) = 0$, die Simulation wird so lange ausgeführt, bis sich der stationäre Zustand nahezu eingestellt hat. Es wird beobachtet, daß sich die Dichte während der Simulation nicht ändert, es bilden sich deshalb auch keine zusätzlichen Druckgradienten aus. Zusätzlich wird die Wärmeproduktion vernachlässigt. Die Auflösung in y -Richtung beträgt 160 Teilchen und in x -Richtung ein Teilchen.

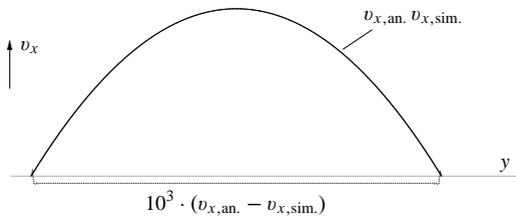


Abbildung A.4: Im stationären Zustand stimmt das Simulationsergebnis, auch bis zum Rand, sehr gut mit der analytischen Lösung überein, die beiden Linien sind in der Abbildung nicht voneinander zu unterscheiden. Der relative Fehler für v_x in der Mitte bei $y = h/2$ beträgt $4.16 \cdot 10^{-5}$.

Wie in der Abbildung A.4 gut zu erkennen ist, wird die analytische Lösung in hervorragender Weise reproduziert.

Um die Vorteile unseres Ansatzes noch einmal zu unterstreichen, wurde eine Simulation mit einer herkömmlichen Art der Behandlung von Randbedingungen ausgeführt. Ähnlich

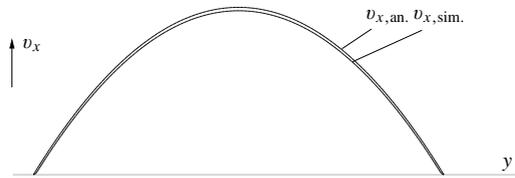


Abbildung A.5: Herkömmliche Art der Randbedingung. Teilchen am Rand erhalten die Zwangsbedingung $\mathbf{q}'_i = \mathbf{H}'_i = 0$. Der Fehler liegt in der Größenordnung der Teilchengröße.

wie in Gittermethoden, in denen in den Randzellen die gewünschten Werte vorgegeben werden, verwenden wir hier Randteilchen mit verschwindender Geschwindigkeit. Wieder stellt sich der parabolische Verlauf der Geschwindigkeit ein. Die Lösung entspricht dabei einem Abstand der laminaren Ränder $h - \Delta h$, wobei Δh in der Größenordnung eines Teilchendurchmessers liegt. Der Rand konnte in dieser Rechnung also nur in der Größenordnung der Diskretisierung aufgelöst werden. Bei der Verwendung von Symmetriebedingungen an Hyperebenen wird der Rand exakt aufgelöst.

B Das Restartverfahren mit lokaler Entropie- und Massenerhaltung

In dieser Arbeit wurde mehrfach ein kleiner Nachteil des Restartverfahrens angesprochen. Durch die Verwendung der Quasiinterpolation von [Gauger \(2000\)](#) kann die Massen- und Entropiedichte innerhalb des Restartverfahrens sehr gut approximiert werden. Die Erhaltung von Gesamtmasse und Entropie ist dabei durch die Approximationsgüte festgelegt, der relative Fehler je Restart lag in den Simulationen zu Akkretionsscheiben bei weniger als 10^{-4} . Sind jedoch viele Restarts innerhalb einer Simulation notwendig, so kann sich der kumulative Fehler störend auf das Ergebnis auswirken. Eine globale Normierung der Massen wurde aus verschiedenen Gründen abgelehnt. Erst nachdem alle Simulationen ausgeführt waren, die in dieser Arbeit dokumentiert sind, wurde ein Ansatz mit lokaler Massenerhaltung entwickelt, der analog auch für die Entropie angewendet werden kann.

Wir betrachten den Fall, in dem die neuen Teilchen i auf einem uniformen, kartesischen Gitter angeordnet sind. Wir untersuchen den Bereich des Rechengebiets, der weit genug vom Rand entfernt ist, so daß sich im Gebiet die neuen Teilchen vollständig überlappen, insbesondere gilt dort

$$\chi_i(\mathbf{x}) \propto \psi_i(\mathbf{x}). \quad (\text{B.1})$$

In diesem Fall besitzen die neuen Teilchen identische Verformungen, so daß

$$A \equiv a_\psi \det \mathbf{H}_i = \text{const.} \quad \forall i \quad (\text{B.2})$$

gilt. Die neuen Teilchenmassen m_i gehen aus den Dichten in den Quasiinterpolationspunkten nach [2.86](#) mit den normierten Gewichten $\sum g_j = 1$ hervor, in unserem Fall also

$$m_i = A^{-1} \sum_j g_j \rho(\mathbf{p}_j). \quad (\text{B.3})$$

Die Quasiinterpolationspunkte sind so angeordnet, daß sie mit denen ihrer Nachbarpartikeln zusammenfallen. Die einzelnen Gewichte der neuen Teilchen in den gemeinsamen Punkten sind damit automatisch normiert

$$\sum_i g_{i,j}(\mathbf{x} = \mathbf{p}_j) = 1 \quad \forall j. \quad (\text{B.4})$$

Alle gemeinsamen Punkte \mathbf{p}_j bilden ein Gitter, welches das Rechengebiet vollständig abdeckt. Diese Punkte können als Mittelpunkte von Gitterzellen verstanden werden, die eine Zerlegung des Rechengebiets in disjunkte Zellen Ω_j liefert

$$\mathbf{p}_j \in \Omega_j, \quad \Omega_k \cap_{k \neq l} \Omega_l = \emptyset, \quad \cup_j \Omega_j = \Omega. \quad (\text{B.5})$$

In den Gitterzellen befindet sich die aus den alten Teilchen dargestellte Masse

$$m_j = \int_{\Omega_j} \rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (\text{B.6})$$

die Gitterzelle besitzt das Volumen

$$V_j = \int_{\Omega_j} d\mathbf{x} \quad (\text{B.7})$$

und es sei in ihr die gemittelte Dichte

$$\bar{\rho}_j = \frac{m_j}{V_j} \quad (\text{B.8})$$

definiert. Die Lage und Anzahl der Quasiinterpolationspunkte ist geeigneterweise so gewählt, daß jedes Teilchen in a_{ψ}^2 Gitterzellen j unterteilt werden kann, die dieselbe lineare Deformation wie die Teilchen besitzen. Ihre Größe ist entsprechend

$$a_{\psi}^2 \det \mathbf{H}_j = \det \mathbf{H}_i \quad (\text{B.9})$$

definiert. Da alle neuen Teilchen dieselbe Verformung \mathbf{H}_i besitzen, folgt dies auch für die Gitterzellen und deren Volumina $V = V_j$ und es kann

$$A \cdot V = 1 \quad (\text{B.10})$$

erreicht werden.

Die Masse ist dann exakt erhalten, wenn

$$\rho(\mathbf{p}_j) = \bar{\rho}_j \quad (\text{B.11})$$

gewählt wird. Die Masse der neuen Teilchen hat mit [B.11](#) die Darstellung

$$M_{\text{neu}} = \sum_i m_i = A^{-1} \sum_{i,j} g_{i,j} \bar{\rho}_j, \quad (\text{B.12})$$

mit der Definition unserer Gitterzellen

$$M_{\text{neu}} = (AV)^{-1} \sum_{i,j} g_{i,j} m_j \quad (\text{B.13})$$

und der Beobachtung aus [B.4](#) erhält man

$$\sum_{j,i} g_{j,i} m_j = \sum_j m_j = M_{\text{alt}}. \quad (\text{B.14})$$

Die letzte Gleichung gilt, da die Gitterzellen eine vollständige und disjunkte Zerlegung der Massenverteilung aus den alten Teilchen liefern

$$\sum_j m_j = \sum_a m_a. \quad (\text{B.15})$$

Die bisherige Schwierigkeit bestand darin, die Integrale B.6 exakt zu lösen. In einer Simulation wurde das Integral mit der 5-Punkt Gauß-Quadraturformel ausgeführt, wie sie auch für die Kräfteberechnung benutzt wird. Erstaunlicherweise konnte kaum eine Verbesserung gegenüber dem einfachen Fall beobachtet werden, in dem $\rho(\mathbf{p}_j)$ und ein mehrstufiges Glättungsverfahren benutzt wurde.

Der fehlerverursachende Einfluß ist die Integration über die alten Teilchen. Ohne Glättungsverfahren stellt die Summation der Dichten in \mathbf{p}_j eine Mittelpunktsregel mit den Positionen \mathbf{p}_j und den Gewichten V dar. Die Auflösung beträgt mit der gewählten Quasiinterpolationsformel nur drei Punkte im Durchmesser der neuen Teilchen, dabei kann dieser eben auch größer sein als derjenige der alten Teilchen. Man kann jedoch nun diese Integration auf Massenerhaltung normieren, und zwar je einzeln für jedes alte Teilchen. Die Masse eines einzelnen, deformierten Teilchens a wird exakt durch die neuen Teilchen reproduziert, wenn

$$m_a = \sum_j m_j = V \sum_j \bar{\rho}_j \stackrel{!}{=} V \sum_j m_a \psi_a(\mathbf{p}_j) \quad (\text{B.16})$$

erreicht werden kann. Sind die Werte $\psi_a(\mathbf{p}_j)$ bekannt, kann eine für jedes alte Teilchen individuelle Normierungskonstante n_a bestimmt werden, so daß

$$n_a V \sum_j \psi_a(\mathbf{p}_j) = 1 \quad (\text{B.17})$$

gilt.

Masse wird dabei lokal erhalten, entsprechend wird bei der Entropie vorgegangen. Haben alte Teilchen den Rand des Rechengebiets erreicht und sollen nur teilweise wieder durch neue Teilchen dargestellt werden, kann wie folgt verfahren werden. Man lege das neue Teilchengitter so an, daß alle alten Teilchen vollständig überdeckt werden und führe das normierte Restartverfahren durch. Danach können die neuen Teilchen entfernt werden, die außerhalb des Rechengebiets liegen.

C Symbole und Konstanten

In diesem Verzeichnis sind die wichtigsten Symbole und Konstanten tabellarisch aufgeführt. Symbole, die lediglich in einzelnen Abschnitten Verwendung finden und dort lokal definiert sind, werden hier zumeist nicht aufgeführt.

Generelle Schreibweisen

Skalare Größen A oder a werden kursiv gesetzt, während Vektoren \mathbf{v} in Fettschrift erscheinen, Tensoren zweiter Stufe oder Matrizen werden mit fetten Großbuchstaben \mathbf{H} gesetzt. Ortsableitungen werden mit dem Symbol ∇ gekennzeichnet, so ist $\nabla \mathbf{v}$ die Jacobimatrix des Vektorfeldes \mathbf{v} , während $\operatorname{div} \mathbf{v}$ oder auch $\nabla \cdot \mathbf{v}$ die Divergenz ist. Zeitableitungen werden mit f' oder auch mit \dot{f} bezeichnet.

Die Komponenten der kartesischen Koordinaten heißen x , y und z . In den zweidimensionalen Simulationen liegt das Rechengebiet in der $x-y$ -Ebene. In den Rechnungen zu Binärsystemen stimmt die Systemachse mit der x -Achse überein, die y -Achse liegt in der Bahnebene und der Ursprung liegt im Schwerpunkt des Systems. Zylinderkoordinaten heißen R , ϕ und z .

Physikalische Größen werden, sofern sie nicht in einer dimensionslosen Form dargestellt werden, in SI-Einheiten, also in kg, m, s, A angegeben. Zum Vergleich mit der angegebenen Literatur werden manche Größen zusätzlich in solaren Einheiten beschrieben, d.h. Längen werden in Sonnenradien und Massen in Sonnenmassen angegeben. Auf die Verwendung der in der Astrophysik üblichen *cgs*-Einheiten wurde bewusst verzichtet.

Symbole in der Thermodynamik und in der Methode der Finiten Massen

m_i	Teilchenmasse
S_i	Spezifische Entropie eines Teilchens
\mathbf{q}_i	Teilchenschwerpunkt
\mathbf{H}_i	Formmatrix eines Teilchens
\mathbf{q}'_i	Geschwindigkeit des Teilchenschwerpunkts
\mathbf{H}'_i	Geschwindigkeit der Verformung
\mathbf{F}_i	Positionskraft
\mathbf{M}_i	Verformungskraft, Teilchenmomente
ψ	Normierte Formfunktion
ψ_i	Transformierte Formfunktion

a_ψ	Koeffizient der Formfunktion
χ_i	Funktion des Massenanteils
θ_i	Teilchentemperatur
δQ_i	Wärmezuwachs eines Teilchens
J	Trägheitsmoment in der Referenzkonfiguration
R	Reibungskoeffizient
ρ	Massendichte
s	Entropiedichte
π	Druck
θ	Temperatur
ε	Dichte der inneren Energie
\mathbf{v}	Geschwindigkeit
\mathbf{j}	Massenfluß
\mathbf{D}	Symmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradienten
\mathbf{T}	Spannungstensor
γ	Adiabatexponent
c_v	Spezifische Wärme bei konstantem Volumen
η	Koeffizient der dynamischen Scherviskosität
ζ	Koeffizient der dynamischen Volumenviskosität
ν	Koeffizient der kinematischen Scherviskosität
ζ'	Koeffizient der kinematischen Volumenviskosität
μ	Mittleres Molekulargewicht
$c_s, c_{s,\text{isoth.}}$	Isotherme Schallgeschwindigkeit
$c_{s,\text{ad.}}$	Adiabatische Schallgeschwindigkeit

Symbole in den astrophysikalischen Simulationen

In den astrophysikalischen Simulationen wurde die hydrodynamischen Gleichungen durch Integration in z -Richtung in zwei Dimensionen überführt. Die daraus entstandenen zweidimensionalen thermodynamischen Größen erhalten daher neue Bezeichnungen.

Σ	Flächendichte
P	In z -Richtung integrierter Druck
T	Temperatur
T_c	Zentraltemperatur der Scheibe in dünner Näherung

Weitere Symbole

α	Parameter der turbulenten Scherviskosität
D	Leistung der Schwarzkörperstrahlung
L_1	Innerer Lagrange-Punkt
h_p	Druckskalenhöhe
H	Scheibenhöhe

κ_{Kr}	Kramersche Opazität
κ_R	Mittlere Rosseland-Opazität
Ω	Winkelgeschwindigkeit
Ω_K	Winkelgeschwindigkeit auf Kepler'schen Kreisbahnen
Φ	Potential der äußeren Kraft
Φ_R	Roche-Potential
P_{SH}	Superhumpperiode
P_{orb}	Bahnperiode
P_b	Schwebungsperiode zw. P_{SH} und P_{orb}
q	Massenverhältnis M_2/M_1
R_{L_1}	Abstand des Primärsterns zum L_1 -Punkt
r_{zirk}	Zirkulationsradius
r_{min}	Kleinster Abstand des Überstroms zum Primärstern
τ	Optische Tiefe
v_K	Geschwindigkeit auf Kepler'schen Kreisbahnen
v_R, v_ϕ	Radial-, Azimutalgeschwindigkeit

Verzeichnis der Konstanten

$AU = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	Astromische Einheit
$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$	Lichtgeschwindigkeit
$G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	Gravitationskonstante
$k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$	Boltzmann-Konstante
$m_H = 1.661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	Masse des Wasserstoffatoms
$M_\odot = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	Sonnenmasse
$R_\odot = 6.960 \cdot 10^8 \text{ m}$	Sonnenradius
$\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	Stefan-Boltzmann-Konstante

Abbildungsverzeichnis

2.1	Parallelisierungsansatz	29
3.1	Die benutzten Opazitäten	39
3.2	Schematische Darstellung der S-Kurve	41
3.3	Das Roche-Potential	44
3.4	Größenvergleich der Roche-Lobes und des resonanten Radius	48
4.1	Oszillierende Dichte des viskosen Staubrings	57
4.2	Nicht oszillierende Dichte des viskosen Staubrings	60
4.3	Teilchengitter mit $r - \phi$ -Symmetrie	63
4.4	Flächendichte bei unterschiedlicher Teilchenauflösung in druckdominierten Scheiben	67
4.5	Radialgeschwindigkeit und Fluktuationsenergie in druckdominierten Scheiben	67
4.6	Wirbelbildung in druckdominierten Scheiben, Darstellung der Flächendichte und Geschwindigkeit	68
4.7	Drehimpulstransport durch Wirbel in druckdominierten Scheiben	69
4.8	Flächendichte einer stabilen Scheibe	71
4.9	Flächendichte einer baroklin instabilen Scheibe	73
4.10	Ergebnisse aus der Testrechnung zum Superhumpphänomen	78
4.11	Das Superhumpphänomen ohne Randbedingungen	81
4.12	Flächendichte der Scheibe in OY Car	87
4.13	Schwerpunktsbewegung der Scheibe in OY Car	88
5.1	Beobachtete Lichtkurve von AM CVn	96
5.2	Präzedierende Scheibe in AM CVn	98
5.3	Abstrahlungsleistung der Scheibe in AM CVn	100
5.4	Simulierte Lichtkurve von AM CVn	101
5.5	Typische Scheibengrößen in AM CVn	102
5.6	Lichtkurve von AM CVn bei hoher Volumenviskosität	103
5.7	Die Scheibe in U Gem kurz vor dem Ausbruch	108
5.8	Der Verlauf des Ausbruchs in U Gem	110
5.9	Typische Scheibengrößen in U Gem	112
5.10	Simulation mit gekürztem Potential in U Gem	113
5.11	Simulation des Hot-Spots in U Gem	113

5.12	Simulation mit höherem α in U Gem	115
5.13	Der voll entwickelte Ausbruch der Scheibe in U Gem	116
5.14	Die beobachteten Spiralen in U Gem	117
5.15	Dopplertomogramme der Scheibe in U Gem	118
A.1	Schematische Darstellung der Spiegelteilchen	126
A.2	Druck und Temperatur im Machkegel	127
A.3	Gas im konstanten Gravitationsfeld	129
A.4	Laminare Strömung	131
A.5	Laminare Strömung mit feststehenden Randteilchen	132

Literaturverzeichnis

- Anderson, J. D. J. 1990, *Modern Compressible Flow with Historical Perspective*, 2nd Ed. (McGraw-Hill, Inc.) [A.2](#)
- Armitage, P. J. & Murray, J. R. 1998, *Simulations of spiral structure in the accretion disc of IP Pegasi during outburst*, MNRAS, **297**, L81-L85 [5.3.1](#), [5.3.3](#), [5.3.4](#)
- Bath, G. T. 1973, *Novae-Periodicity and disks in dwarf novae*, Nature Physical Science, **246**, 84 [3.1.6](#)
- Bell, K. R. & Lin, D. N. C. 1994, *Using FU Orionis outbursts to constrain self-regulated protostellar disk models*, ApJ, **427**, 987-1004 [3.1.5](#), [5.3.2](#)
- Cannizzo, J. K. 1993, *The Accretion Disk Limit Cycle Model: Toward an Understanding of the Long-Term Behavior of SS Cygni*, ApJ, **419**, 318 [3.1.6](#)
- Cannizzo, J. K., Wheeler, J. C., & Polidan, R. S. 1986, *Dwarf nova burst asymmetry and the physics of accretion disks*, ApJ, **301**, 634-640
- Duschl, W. J. 1989, *Accretion disk models with a self-consistent viscosity parameter alpha in convective zones*, A&A, **225**, 105-111 [3.1.6](#)
- Eggleton, P. P. 1983, *Approximations to the radii of Roche lobes*, ApJ, **268**, 368 [4.3.1](#)
- Faulkner, J., Flannery, B. P., & Warner, B. 1972, *Ultrashort-Period Binaries. II. HZ 29 (=AM CVn): a Double-White Semidetached Postcataclysmic Nova?*, ApJ, **175**, L79 [5.2.3](#)
- Frank, J., King, A. R., & Raine, D. J. 1992, *Accretion Power in Astrophysics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press) [3.1](#), [3.1.1](#), [3.1.4](#), [3.1.4](#), [3.3](#)
- Gauger, C. 2000, *Erweiterung der Methode der Finiten Massen*, Dissertation, Eberhard-Karls-Universität Tübingen [1](#), [1](#), [2.1](#), [2.6](#), [2.9](#), [2.11](#), [2.11](#), [4](#), [4.1.1](#), [4.1.2](#), [4.2.1](#), [5.1](#), [A.1](#), [B](#)
- Gauger, C., Leinen, P., & Yserentant, H. 2000, *The finite mass method*, SIAM J. Numer. Anal., **37**, 1768-1799 [1](#), [2.1](#), [2.3](#), [2.5](#), [2.6](#), [2.6](#), [1](#), [1](#), [2.9](#), [2.10](#), [4](#), [4.3.2](#), [5.1](#), [5.1](#)
- Groot, P. J. 2001, *Evolution of Spiral Shocks in U Geminorum during Outburst*, ApJ, **551**, L89-L92 [5.3](#), [5.3.3](#), [5.3.3](#), [5.14](#), [5.3.3](#)

- Harvey, D. A., Skillman, D. R., Kemp, J., et al. 1998, *The Orbital Period of AM Canum Venaticorum*, ApJ, **493**, L105 5.2, 5.1
- Heemskerck, M. H. M. 1994, *Hydrodynamic calculations of accretion discs in close binaries. The superhump phenomenon*, A&A, **288**, 807-818 4.3.1, 4.3.1, 4.10, 4.3.1
- Hessman, F. V. 1999, *On the Occurrence of Stream Overflow in Cataclysmic Variables with Accretion Disks*, ApJ, **510**, 867-873 3.2.2, 3.2.2, 4.3.2
- Hessman, F. V. & Hopp, U. 1990, *The massive, nearly face-on cataclysmic variable GD 552*, A&A, **228**, 387-398 3.2.1
- Hind, J. R. 1856, *On a new Variable Star*, MNRAS, **16**, 56 5.3
- Hirose, M. & Osaki, Y. 1990, *Hydrodynamic simulations of accretion disks in cataclysmic variables - Superhump phenomenon in SU UMa stars*, PASJ, **42**, 135-163 4.3.1, 4.3.1
- . 1993, *Superhump periods in SU Ursae Majoris stars: Eigenfrequency of the eccentric mode of an accretion disk*, PASJ, **45**, 595-604 4.3.1
- Iglesias, C. A. & Rogers, F. J. 1996, *Updated Opal Opacities*, ApJ, **464**, 943 3.1.5, 5.2
- King, A. R. 1988, *The evolution of compact binaries*, QJRAS, **29**, 1-25 5.2.3
- Klahr, H. & Bodenheimer, P. 2001, in *Astronomische Gesellschaft Meeting Abstracts*, Vol. 18, 38 4.2, 4.2.4
- Klahr, H. H. & Bodenheimer, P. 2000, in *IAU Symposium*, Vol. 202 4.2, 4.2.4, 4.2.4
- Klahr, H. H., Henning, T., & Kley, W. 1999, *On the Azimuthal Structure of Thermal Convection in Circumstellar Disks*, ApJ, **514**, 325-343 4.2
- Klingler, M. 2003, *Hydrodynamic simulations of the accretion disk in U Geminorum. The occurrence of a two armed spiral structure during outburst*, SFB-Report Nr. **190**, SFB 382, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, submitted to A&A 5.3.4
- Klingler, M., Leinen, P., & Yserentant, H. 2003, *The Finite Mass Method on Domains with Boundary*, to appear in SIAM J. Scient. Comput. 2003 A, A.1, A.2
- Kunze, S. 2000, *Numerische Simulation von Akkretionsscheiben in Kataklysmischen Variablen mit Smoothed Particle Hydrodynamics*, Dissertation, Eberhard-Karls-Universität Tübingen 3.2.3, 4.3.1, 4.3.1, 5.2.2
- Kunze, S., Speith, R., & Hessman, F. V. 2001, *Substantial stream-disc overflow found in three-dimensional SPH simulations of cataclysmic variables*, MNRAS, **322**, 499-514 5.2.3
- Landau, L. D. & Lifschitz, E. M. 1966, *Hydrodynamik* (Akademie-Verlag Berlin) A.4

- Leinen, P. 2002, *Realization of the finite mass method*, Techn. rep., P.M.A. Sloot, C.J. Kenneth Tan, J.J. Dongarra, A.G. Hoekstra (Eds.): International Conference on Computational Science (ICCS 2002), Amsterdam, The Netherlands, April 21-24, 2002. Proceedings, Part II LNCS 2330 (2002), 470-479 [2.12](#), [2.1](#)
- Li, H., Colgate, S. A., Wendroff, B., & Liska, R. 2001, *Rossby Wave Instability of Thin Accretion Disks. III. Nonlinear Simulations*, ApJ, **551**, 874-896 [4.2](#), [4.2.2](#), [4.2.2](#), [4.2.2](#)
- Li, H., Finn, J. M., Lovelace, R. V. E., & Colgate, S. A. 2000, *Rossby Wave Instability of Thin Accretion Disks. II. Detailed Linear Theory*, ApJ, **533**, 1023-1034 [4.2](#), [4.2.2](#), [4.2.2](#)
- Lin, D. N. C., Faulkner, J., & Papaloizou, J. 1985, *On the evolution of accretion disc flow in cataclysmic variables. III - Outburst properties of constant and uniform-alpha model discs*, MNRAS, **212**, 105-149 [3.1.6](#)
- Lovelace, R. V. E., Li, H., Colgate, S. A., & Nelson, A. F. 1999, *Rossby Wave Instability of Keplerian Accretion Disks*, ApJ, **513**, 805-810 [4.2.2](#)
- Lubow, S. H. 1991a, *A model for tidally driven eccentric instabilities in fluid disks*, ApJ, **381**, 259-267 [4.3.1](#)
- . 1991b, *Simulations of tidally driven eccentric instabilities with application to superhumps*, ApJ, **381**, 268-277 [4.3.1](#)
- Lubow, S. H. & Shu, F. H. 1975, *Gas dynamics of semidetached binaries*, ApJ, **198**, 383-405 [3.2.1](#), [3.2.2](#)
- . 1976, *Gas dynamics of semidetached binaries. II - The vertical structure of the stream*, ApJ, **207**, L53-L55 [3.2.2](#)
- Ludwig, K., Meyer-Hofmeister, E., & Ritter, H. 1994, *Systematics of dwarf nova outbursts: a parameter study in the framework of the disk-instability model*, A&A, **290**, 473-486 [3.1.6](#)
- Marsh, T. R. & Horne, K. 1988, *Images of accretion discs. II - Doppler tomography*, MNRAS, **235**, 269-286 [5.3.3](#)
- Meyer, F. & Meyer-Hofmeister, E. 1984, *Outbursts in dwarf novae accretion disks*, A&A, **132**, 143-150 [3.1.6](#)
- . 1989, *Constraints from the UV delay in dwarf nova outbursts*, A&A, **221**, 36-40 [3.1.6](#)
- Meyer-Hofmeister, E. & Meyer, F. 1988, *The pre-outburst state of dwarf novae*, A&A, **194**, 135-142 [3.1.6](#)
- Monaghan, J. J. 1992, *Smoothed particle hydrodynamics*, ARA&A, **30**, 543-574 [1](#)
- Monaghan, J. J. & Gingold, R. A. 1983, *Shock Simulations by the Particle Method SPH*, J. Comp. Phys., **52**, 374 [2.6](#)

- Nelemans, G., Steeghs, D., & Groot, P. J. 2001, *Spectroscopic evidence for the binary nature of AM CVn*, MNRAS, **326**, 621-627 5.2, 5.2.2
- Nelson, L. A., Rappaport, S. A., & Joss, P. C. 1986, *The evolution of ultrashort period binary systems*, ApJ, **304**, 231-240 5.2.3
- Osaki, Y. 1974, *An accretion model for the outbursts of U Geminorum stars*, PASJ, **26**, 429-436 3.1.6
- Ott, F. 1995, *Smoothed Particle Hydrodynamics, Grundlagen und Test eines speziellen Ansatzes für viskose Wechselwirkungen*, Diplomarbeit, Institut für Astronomie und Astrophysik, Eberhard-Karls-Universität Tübingen 4.1.2
- Papaloizou, J. & Pringle, J. E. 1977, *Tidal torques on accretion discs in close binary systems*, MNRAS, **181**, 441-454 4.2
- Papaloizou, J. C. B. & Lin, D. N. C. 1995, *Theory Of Accretion Disks I: Angular Momentum Transport Processes*, ARA&A, **33**, 505-540 4.2
- Pringle, J. E. 1981, *Accretion discs in astrophysics*, ARA&A, **19**, 137-162 4.1
- Savonije, G. J., de Kool, M., & van den Heuvel, E. P. J. 1986, *The minimum orbital period for ultra-compact binaries with helium burning secondaries*, A&A, **155**, 51-57 5.2.3
- Savonije, G. J., Papaloizou, J. C. B., & Lin, D. N. C. 1994, *On Tidally Induced Shocks in Accretion Discs in Close Binary Systems*, MNRAS, **268**, 13 5.3.1
- Shakura, N. I. & Sunyaev, R. A. 1973, *Black holes in binary systems. Observational appearance.*, A&A, **24**, 337-355 3.1, 3.1.4
- Smak, J. 1984, *Accretion in cataclysmic binaries. IV - Accretion disks in dwarf novae*, Acta Astronomica, **34**, 161-189 3.1.6, 5.3.4
- . 1993, *Period variations and outburst behavior of U GEM*, Acta Astronomica (ISSN 0001-5237), vol. 43, no. 2, p. 121-126., **43**, 121-126 5.3
- Speith, R. 1998, *Untersuchung von Smoothed Particle Hydrodynamics anhand astrophysikalischer Beispiele*, Dissertation, Eberhard-Karls-Universität Tübingen 4.1.1, 4.1.2, A.3
- Steeghs, D., Harlaftis, E. T., & Horne, K. 1997, *Spiral structure in the accretion disc of the binary IP Pegasi*, MNRAS, **290**, L28-L32 5.3
- von Neumann, J. & Richtmyer, R. D. 1950, *A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks*, Journal of Applied Physics, **21**, 380-385 2.6
- Warner, B. 1995, *Cataclysmic Variable Stars* (Cambridge: Cambridge Univ. Press) 5.3

- Whitehurst, R. 1988, *Numerical simulations of accretion disks. I - Superhumps - A tidal phenomenon of accretion disks*, MNRAS, **232**, 35-8711 [4.3.1](#)
- Whitehurst, R. & King, A. 1991, *Superhumps, resonances and accretion discs*, MNRAS, **249**, 25-35 [3.2.3](#)
- Wolf, S. & Klahr, H. 2002, *Large-Scale Vortices in Protoplanetary Disks: On the Observability of Possible Early Stages of Planet Formation*, ApJ, **578**, L79-L82 [4.2](#)
- Yserentant, H. 1997a, *A new class of particle methods*, Numer. Math., **76**, 87–109 [2.1](#)
- . 1997b, *A particle model of compressible fluids*, Numer. Math., **76**, 111–142 [2.1](#)
- . 1999a, *Entropy generation and shock resolution in the particle model of compressible fluids*, Numer. Math., **82**, 161–177 [2.1](#)
- . 1999b, *Particles of variable size*, Numer. Math., **82**, 143–159 [2.1](#)
- . 2000, *A convergence analysis for the Finite Mass Method for flows in external force and velocity fields*, SFB-Report Nr. **136**, SFB 382, Eberhard-Karls-Universität Tübingen [2.1](#), [2.3](#), [2.8](#)
- . 2001, *The propagation of sound in particle models of compressible fluids*, Numer. Math., **88**, 581–601 [2.1](#)

Folgende Zeitschriften sind abgekürzt:

ARA&A	Annual Review of Astronomy and Astrophysics
A&A	Astronomy and Astrophysics
ApJ	Astrophysical Journal
MNRAS	Monthly Notices of the Royal Astronomical Society
PASJ	Publications of the Astronomical Society of Japan
QJRAS	Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society

Danksagung

Besonders danken möchte ich Herrn Prof. Dr. Harry Yserentant für die Möglichkeit, diese Dissertation in dem Arbeitsbereich Numerische Analysis anzufertigen. Er unterstützte mich fachkundig in allen Bereichen (nicht zuletzt mit einer DFG-Stelle im DFB 382) und ließ mir gleichzeitig freie Hand bei der Auswahl der zu betrachtenden astrophysikalischen Problemstellungen.

Mein Dank gilt auch Dr. Peter Leinen für die fruchtbare Zusammenarbeit bei der Implementierung der Methode der Finiten Massen sowie allen anderen Mitarbeitern des Arbeitsbereiches für hilfreiche Anregungen, aber auch für die freundschaftliche Atmosphäre, in der diese Arbeit entstand.

Danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. Hanns Ruder, der als Betreuer aus dem Fachbereich Astrophysik das Zustandekommen dieser interdisziplinären Arbeit ermöglichte.

Zuletzt möchte ich all denjenigen Mitarbeitern aus den Fachbereichen Theoretische Astrophysik und Computational Physics danken, die mir mit ihren Erfahrungen in astrophysikalischer Hydrodynamik hilfreich zur Seite standen und dadurch mit zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Lebenslauf

Markus Klingler

Geboren am 03. Februar 1969 in Urach (jetzt Bad Urach)

Schulbildung

1975 – 1979	Freie Evangelische Schule, Reutlingen
1979 – 1988	Johannes Kepler Gymnasium, Reutlingen
Mai 1988	Abitur

Studium

Okt. 1988 – Juni 1997	Studium der Physik an der Universität Tübingen
Jan. 1991	Diplom-Vorprüfung an der Universität Tübingen
Feb. 1998 – Feb. 2003	Anfertigung der vorliegenden Dissertation Betreuer Prof. Dr. Hanns Ruder

Tätigkeiten

Juli 1997 – Dez. 1997	wissenschaftliche Hilfskraft am Lehr- und Forschungsbereich Theoretische Astrophysik der Eberhard-Karls-Universität Tübingen davon in Zeitraum Sep. – Dez. 1997 im Auftrag der Robert Bosch GmbH
seit April 1998	wissenschaftlicher Angestellter am Sonderforschungsbereich 382 “Numerische Verfahren und Algorithmen zur Simulation physikalischer Prozesse auf Höchstleistungsrechnern” im Arbeitsbereich Numerik des Mathematischen Instituts der Universität Tübingen bei Prof. Dr. Harry Yserentant

Akademische Lehrer

In Tübingen: M. Baumann, W. Dittrich, A. Fäßler, H. Fischer, F. Gönnenwein, W.-D. Hartmann, R. Hübenner, U. Kraus, H. Lichte, E. Lindner, O. Lutz, G. Mertens, H. Müther, H. Pfister, H. Reinhardt, H. Riffert, H. Ruder, A. Schwenk, G. Staudt, J. Strähle, H. Stumpf, G. Wagner, H. Wittern