

Entropie-Index und Approximation für Lipschitz-Algebren

Dissertation
der Fakultät für Mathematik und Physik
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Jürgen Hengge
aus Leutkirch im Allgäu

2004

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Mai 2004
Dekan: Prof. Dr. Herbert Mütter
1. Berichterstatter: Prof. Dr. Manfred Wolff
2. Berichterstatter: Prof. Dr. Rainer Nagel

Wagner. Mit Eifer hab ich mich der Studien beflissen;
Zwar weiß ich viel, doch möcht ich alles wissen.

Faust. Wie nur dem Kopf nicht alle Hoffnung schwindet,
Der immerfort an schalem Zeuge klebt,
Mit gier'ger Hand nach Schätzen gräbt,
Und froh ist, wenn er Regenwürmer findet!

Goethe, Faust I, Nacht.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	vii
Teil 1. Funktionalanalytische Beschreibung kompakter metrischer Räume und multiplikative Theorie	1
Kapitel 1. Funktionalanalytische Analoga für kompakte metrische Räume	3
1. Lipschitz-Algebren und kompakte quantenmetrische Räume	3
2. W^* -Derivationen und Beispiele	19
3. Vergleich von kompakten Räumen und W^* -Derivationen	27
4. Zwei Konzepte im Vergleich	33
Kapitel 2. Der Entropie-Index	37
1. Der Entropie-Index auf Ebene von kompakten Räumen	37
2. Der multiplikative Entropie-Index	44
Kapitel 3. Kompakte quantenmetrische Räume: Konstruktion und Approximation	59
1. Der inverse Limes von kompakten quantenmetrischen Räumen	59
2. Strukturtheorie beim inversen Limes in den Kategorien LIP und KQR	68
Teil 2. Vollständig positive Theorie	95
Kapitel 4. Der vollständig positive Entropie-Index	97
1. Definition und Eigenschaften des vollständig positiven Entropie-Index	98
2. Verknüpfung linearer und vollständig positiver Abbildungen	104
3. Entropie-Index und Asymptotik des Spektrums von Laplace-Operatoren	106
Kapitel 5. Kommutative kompakte quantenmetrische Räume und direkter Limes	117
1. Beschreibung von $Lip(K)$ mit Hilfe des direkten Limes	117
2. Approximation kompakter T_2 -Räume mit inversen Limites von Graphen	130
Anhang A. Direkter und inverser Limes	141
Anhang B. Definitionsbereich des inversen Limes abgeschlossener Derivationen	149
Literaturverzeichnis	153
Index	157
Danksagung	161

Einleitung

In den letzten 75 Jahren wurde die Theorie der nicht-kommutativen Analysis und Operatoralgebren entwickelt — anfangs sind hier solch klangvolle Namen wie von Neumann oder Gelfand und Naimark zu nennen — und bis heute weit ausgebaut. Dies geschah Hand in Hand mit neuen Entwicklungen auf Gebieten der Anwendungen dieser Theorie, vor allem der Physik.

So arbeitete von Neumann mit der so genannten Transformationstheorie das Bindeglied zwischen zwei Modellen für eine Quantentheorie aus, welche die bis dahin aufgetretenen physikalischen Beobachtungen und Überlegungen auf ein formales und einheitliches mathematisches Fundament stellte: Die „Matrizenmechanik“, maßgeblich entwickelt von Heisenberg, und die von Schrödinger stammende „Wellenmechanik“. Der Gedanke, der hinter der Äquivalenz dieser beiden Beschreibungen steckt, ist die „mathematische Gleichwertigkeit“ der Räume, in denen die jeweilige Darstellung stattfindet; es sind dies die (separablen) Hilberträume $\ell^2(\mathbb{N})$ und $L^2(X, \mu)$ (für einen σ -endlichen Maßraum (X, Σ, μ) mit Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ), die nach dem Satz von Fischer-Riesz unitär äquivalent sind. Aufgrund dieser Isomorphie und der darauf aufbauenden Gleichwertigkeit der mathematischen Beschreibungen der Quantenmechanik, so schreibt von Neumann in [65], *„ist es zu erwarten, daß ein einheitlicher, von der Zufälligkeit des jeweils gewählten formalen Rahmens unabhängiger und nur die sachlich wesentlichen Züge der Quantenmechanik aufweisender Aufbau dann gelingen wird, wenn man nach den inneren, $[\ell^2(\mathbb{N})]$ und $[L^2(X, \mu)]$ gemeinsamen Eigenschaften der Funktionengesamtheiten [in diesen Räumen] sucht, und diese zum Ausgangspunkte wählt.“* Dies nimmt von Neumann auch zum Anlass, sich in der Folge mit abstrakten Hilberträumen und deren Zusammenhang zur Quantenmechanik zu beschäftigen.

Mittlerweile ist wohlbekannt, wie in der Quantenmechanik Probleme mit Hilfe von C^* -Algebren und mit Hilfe von von Neumann-Algebren beschrieben werden können. Würde jemand ein Wörterbuch zusammenstellen wollen, mit dem „klassische“ physikalische Fragestellungen in die Sprache der Quantenmechanik beziehungsweise in eine mathematische, in Bezug auf die Anwendbarkeit und Berechenbarkeit vernünftige quantenmechanische Beschreibung übersetzt werden können, so würde er oder sie es der Einfachheit halber wohl mit den Zuordnungen „komplexe Variable — Operator auf einem Hilbertraum“ und „reelle Variable — quantenmechanische Observable“ beziehungsweise „selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum“ beginnen und dem wachsenden Anspruch der Problemstellung gerecht werdend dann nach Bedarf erweitern. Gleichzeitig gibt einem diese Übertragung eine nicht-kommutative Beschreibung der betrachteten Objekte, welche auf schon viel niedrigerem Niveau beginnt: So könnte man versuchen, maßtheoretische Fragen mit Hilfe von Räumen der Bauart $L^\infty(K, \mu)$ zu modellieren und in einen Zusammenhang mit von Neumann-Algebren

als nicht-kommutativem Pendant zu bringen; zuvor schon kann man (lokal-)kompakte Hausdorff-Räume in (nicht-)unitale C^* -Algebren übersetzen und auf diese Weise eine nicht-kommutative Topologie erhalten.

Aber diese Übertragung geht noch viel weiter. Beispielsweise hat Mitte der 90er Jahre des vergangenen Jahrhunderts Connes in [15] und zusammen mit Chamseddine in [9] entsprechende Techniken auf die nicht-kommutative Geometrie des physikalischen Standardmodells angewendet, um mit Hilfe des Dirac-Operators beziehungsweise dessen Inversem (Dirac-Propagator) den an Gravitation gekoppelten Lagrange-Operator des Standardmodells zu erhalten. Die nicht-kommutative Riemannsche Geometrie wird dabei durch so genannte Spektrale Tripel (A, \mathcal{H}, D) kodiert, vergleiche [14], wobei A eine unitale C^* -Algebra ist, für die eine Darstellung als Algebra von Operatoren auf einem Hilbertraum \mathcal{H} existiert, und D ein unbeschränkter selbstadjungierter Operator auf \mathcal{H} ist, der genau dem eben beschriebenen Dirac-Operator entspricht. Schon zuvor, Ende der 80er Jahre, ist es Connes in [12] gelungen, durch unbeschränkte Fredholm-Moduln (\mathcal{H}, D) über unitalen C^* -Algebren A ein nicht-kommutatives Analogon für Metriken zu beschreiben, was in der nicht-kommutativen Differenzialgeometrie und in Modellen der Quantenfeldtheorie von entscheidender Bedeutung ist (siehe [11]). Die Bezeichnung der unbeschränkten Fredholm-Moduln erinnert schon an die der zeitlich nachfolgenden Spektralen Tripel, und tatsächlich bestehen beide Strukturen aus Objekten mit sehr ähnlichen Eigenschaften.

Inspiziert durch diesen neuen Standpunkt der (metrischen) Geometrie entstanden in der Folge etliche Arbeiten. So beschäftigt sich Rieffel in seinen Arbeiten [55], [56] damit, nicht-kommutative Metriken auf dem Zustandsraum von unitalen C^* -Algebren zu konstruieren. Die Idee, die hinter dieser Vorgehensweise steckt, wird deutlich, wenn wir uns den eingangs erwähnten Zusammenhang zwischen kompakten metrischen Räumen und unitalen C^* -Algebren in Erinnerung rufen: Für einen kompakten metrischen Raum (K, ρ) entspricht der Zustandsraum $S(C(K))$ über der unitalen C^* -Algebra $C(K)$ der stetigen Funktionen auf K genau der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf K , und die Punkte von K können wir mit den reinen Zuständen in $S(C(K))$ identifizieren (Dirac-Maße).

An dieser Stelle kommt die $*$ -Unteralgebra $Lip(K)$ der lipschitzstetigen Funktionen auf K ins Spiel; diese ermöglichen nämlich eine funktionalanalytische Beschreibung der Metrik durch

$$\rho(x, y) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid f \in Lip(K), Lip(f) \leq 1\} \quad \text{für } x, y \in K$$

über die Lipschitz-Halbnorm $Lip(\cdot)$. Diesen Zusammenhang nutzen wir in unserer Arbeit ebenfalls intensiv. Eine Metrik auf dem Zustandsraum $S(C(K))$ erhalten wir nun durch

$$\bar{\rho}(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| \mid f \in Lip(K), Lip(f) \leq 1\} \quad \text{für } \mu, \nu \in S(C(K)),$$

die sogenannte Monge-Kantorovič-Metrik (vgl. [71],[37],[52],[53]). Sie liefert auf den reinen Zuständen die ursprüngliche Metrik ρ zurück, und deren Topologie stimmt unter gewissen Umständen, doch in vielen wichtigen Beispielen, mit der Schwach*-Topologie auf $S(C(K))$ überein. Diese Metrik spielt eine wichtige Rolle im Zusammenhang mit Transport-Problemen (siehe etwa „Monge mass transport problem“, „soil movement“). Als weitere Arbeiten in dieser Richtung wollen wir hier die von Schülern von Rieffel,

Pavlović ([48]) und Weaver nennen. Letztgenannter entwirft in [67] und [66] sein eigenes nicht-kommutatives Gegenstück zu metrischen Räumen, und zwar mit dem Konzept von L^∞ -Derivationen beziehungsweise allgemeiner W^* -Derivationen in W^* -Bimoduln, welches eine etwas andere, reichhaltigere Struktur bietet als die Spektrale Tripel von Connes. Zwischen beiden besteht nichtsdestoweniger (wenig verwunderlich) eine Verwandtschaft, die schon daran ersichtlich wird, dass auch durch Spektrale Tripel implizit eine Derivation (in Form von Bilden des Kommutators mit D) gegeben ist, die wie die Derivation bei Weaver die Metrik und im Kommutativen Lipschitzstetigkeit kodiert. Auch die Vorstellungen, die Weaver entwickelt, finden Anwendung in der Physik: Es besteht eine Verbindung zwischen der metrischen Geometrie des nicht-kommutativen Torus und der String-Theorie, wie Rieffel in [55] explizit erwähnt.

In diesem Geiste einer Beschreibung kompakter metrischer Räume in einem nicht-kommutativen Kontext wollen wir unsere Arbeit verstanden wissen. Daher machen wir uns in **Kapitel 1** als Erstes daran, zwei Konzepte für eine derartige Beschreibung solcher Räume zu entwerfen.

In Abschnitt 1 benutzen wir die Ideen von Rieffel ([55], [56]), um in Lipschitz-Algebren beziehungsweise kompakten quantenmetrischen Räumen geeignete Übersetzungen für kompakte metrische Räume zu finden. Lipschitz-Algebren sind Tripel $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, wobei A eine unitale C^* -Algebra ist — entsprechend dem nicht-kommutativen Analogon eines kompakten Hausdorff-Raumes — und \mathcal{A} eine dichte $*$ -Unteralgebra von A mit Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$, die gewisse Zusatzeigenschaften erfüllt. Die geforderten Merkmale einer Lipschitz-Algebra wie etwa die Vollständigkeit von \mathcal{A} bezüglich $\max(\|\cdot\|_{\mathcal{A}}, \|\cdot\|_A)$ sind wenig überraschend, orientieren wir uns doch am Kommutativen, wo die $*$ -Algebra $Lip(K)$ der lipschitzstetigen Funktionen auf einem kompakten metrischen Raum (K, ρ) doch denselben Informationsgehalt besitzt wie die Metrik ρ und des Weiteren das Tripel $(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ alle geforderten Eigenschaften erfüllt.

Kompakte quantenmetrische Räume sind Lipschitz-Algebren, die zusätzlich die Eigenschaften der totalen Beschränktheit und Unterhalbstetigkeit von $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ erfüllen. Letztgenannte Eigenschaft garantiert, dass die von der bereits beschriebenen Monge-Kantorovič-Metrik auf dem Zustandsraum $S(A)$ induzierte Topologie mit der Schwach*-Topologie übereinstimmt. Die totale Beschränktheit sorgt dafür, dass die Einschränkung der Metrik auf die reinen Zustände im Kommutativen bei oben erwähnter Identifikation der reinen Zustände in $S(C(K))$ mit den Punkten in K die ursprüngliche Metrik ρ auf K zurückliefert. Das Konzept kompakter quantenmetrischer Räume gestattet es uns also, auf dem Zustandsraum einer C^* -Algebra mit einer Metrik in etwa so zu rechnen wie im Kommutativen.

Nach der Behandlung von Beispielen für kompakte quantenmetrische Räume wenden wir uns in Abschnitt 2 von Kapitel 1 der von Weaver ([67], [66]) stammenden Korrespondenz für kompakte metrische Räume, den so genannten W^* -Derivationen, zu. Wie der Name schon sagt, bestehen diese im Wesentlichen aus einer Derivation δ (auf einer von Neumann-Algebra), welche die Metrik ρ via $\|\delta\cdot\|$ beschreibt, ähnlich wie die Lipschitz-Halbnorm $Lip(\cdot)$ im Kommutativen. Unter den zahlreichen Beispielen tauchen auch Spektrale Tripel auf. Daher stellt Weavers Konzept in gewisser Weise eine Verallgemeinerung gegenüber Connes' dar.

In Abschnitt 3 von Kapitel 1 führen wir aus, wie Weaver in [67] eine messbare Version

des Konzepts der Lipschitzstetigkeit entwickelt. Dies dient als Brücke, um im Kommutativen die (messbaren Pseudo-)Metriken zu charakterisieren, die von W^* -Derivationen herrühren, vergleiche Satz 1.23. Dies zeigt sehr schön, dass W^* -Derivationen eher den messbaren Aspekt metrischer Räume berücksichtigen und daher konsequenterweise von Neumann-Algebren und die zugehörige Schwach*-Topologie benutzen, Lipschitz-Algebren hingegen C^* -Algebren mit (Halb-)Normen und die damit verbundenen Topologien heranziehen. Ein ausführlicher Vergleich der beiden Konzepte in Abschnitt 4 beschließt Kapitel 1. Es stellt sich heraus, dass sich Lipschitz-Algebren beziehungsweise vor allem kompakte quantenmetrische Räume wegen ihrer starken Eigenschaften und deren Auswirkungen hauptsächlich in Bezug auf die Monge-Kantorovič-Metrik als nützlich für unsere Zwecke und in Hinblick auf die Vorhaben in den folgenden Kapiteln erweisen als W^* -Derivationen. Daher betrachten wir im Rest der Arbeit ausschließlich Lipschitz-Algebren und kompakte quantenmetrische Räume.

Da wir nun ein geeignetes funktionalanalytisches Analogon für einen kompakten metrischen Raum (K, ρ) gefunden haben, widmen wir uns zwei sehr nahe liegenden Fragestellungen: Im Kommutativen ist dies zum einen das Verhältnis des Kompaktums K als ein Ganzes zu seinen Bestandteilen, also den Punkten beziehungsweise den Punkt-mengen in K . Zum anderen sucht man Kenngrößen, die nähere Auskunft über die Beschaffenheit von K geben.

Um eine solche Größe geht es in **Kapitel 2**. Wir stellen in Abschnitt 1 einen Dimensionsbegriff für kompakte metrische Räume, den so genannten (unteren) Entropie-Index, vor, welcher auf Kolmogorov und Tihomirov zurückgeht ([39]), erklären, wie er in konkreten Fällen berechnet wird, und tun dies schließlich in Beispielen.

In Abschnitt 2 finden wir gleich mehrere Übersetzungen dieses Dimensionsbegriffs für Lipschitz-Algebren $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, das heißt, wir erhalten verschiedene Möglichkeiten, einer Lipschitz-Algebra eine Zahl zuzuordnen, welche für die zum kompakten metrischen Raum (K, ρ) gehörende Lipschitz-Algebra $(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ den Wert des unteren Entropie-Index für K liefert, vergleiche Theorem 2.20. Alle Übertragungsmöglichkeiten benutzen $*$ -Homomorphismen $\pi : A \rightarrow F$ zwischen C^* -Algebren. Solche Homomorphismen sind multiplikativ, und das ist auch genau der Grund, weshalb wir die jeweiligen Übertragungen als multiplikative Entropie-Indizes bezeichnen und wir für Teil 1 „Funktionalanalytische Beschreibung kompakter metrischer Räume und multiplikative Theorie“ als Überschrift gewählt haben. [Im Gegensatz dazu finden wir in Teil 2 einen Dimensionsbegriff für Lipschitz-Algebren, der auf (nicht notwendig multiplikativen) Abbildungen mit allgemeineren Eigenschaften, unter anderem der vollständigen Positivität, basiert. Nicht weniger wichtig als diese neuen Eigenschaften ist jedoch, dass die Abbildungen in Teil 2 die C^* -Algebra A nicht als Urbild, sondern als Bild besitzen, wie wir weiter unten noch näher erläutern werden.] Wir diskutieren im Rest von Kapitel 2 die verschiedenen multiplikativen Entropie-Indizes und vergleichen sie miteinander. Um dies angemessen tun zu können, führen wir die Kategorie der Lipschitz-Algebren und der kompakten quantenmetrischen Räume ein.

In **Kapitel 3** widmen wir uns der zweiten oben angesprochenen Fragestellung nach der Beziehung zwischen dem Kompaktum K und Punkt-mengen darin. Ein kompakter metrischer Raum (K, ρ) ist separabel. Alle wesentlichen Informationen über K sind

schon durch Angabe einer abzählbaren dichten Teilmenge $(X, \rho|_X)$ beziehungsweise einer aufsteigenden Folge (X_m, ρ_m) für $\rho_m = \rho|_{X_m}$ von endlichen Punktfolgen in K , deren Vereinigung dicht in K bezüglich ρ liegt, enthalten. Es ist daher wenig verwunderlich, dass K durch solche endlichen kompakten metrischen Räume aufgebaut, genauer als deren direkter Limes (in der Kategorie vollständiger metrischer Räume mit Kontraktionen als Morphismen) dargestellt werden kann.

In Abschnitt 1 von Kapitel 3 führen wir zunächst den inversen Limes für die Kategorie der Lipschitz-Algebren und kompakten quantenmetrischen Räume ein. Wir zeigen, wie sich vermöge Dualität die Beschreibung von (K, ρ) als direkter Limes der Folge (X_m, ρ_m) in die Darstellbarkeit von $(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ als inverser Limes der inversen Folge $(C(X_m), Lip(X_m), Lip(\cdot))$ kompakter quantenmetrischer Räume übersetzt.

Abschnitt 2 behandelt die entsprechenden Nicht-Kommutativen Fragestellungen: Wir diskutieren die Existenz der inversen Limites in den jeweiligen Kategorien, und geben sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingungen für die Darstellbarkeit von Lipschitz-Algebren als inverse Limites endlichdimensionaler Lipschitz-Algebren an. Interessanterweise ist für eine solche Darstellung eines kompakten quantenmetrischen Raumes die Endlichkeit eines der multiplikativen Entropie-Indizes hinreichend. Damit haben wir die scheinbar getrennt behandelten Aspekte der Kapitel 2 und 3 miteinander verwoben; insofern stellt dieser Abschnitt auch das Kernstück dieser Arbeit dar. Anhand von Beispielen illustrieren wir unser Vorgehen.

Als grundlegende Idee für Teil 2 soll uns die Überlegung dienen, dass neben der Darstellung eines kompakten metrischen Raumes (K, ρ) als direkter Limes einer direkten Folge endlicher kompakter metrischer Räume (X_m, ρ_m) eine ähnliche Darstellung mit Hilfe des inversen Limes existiert, wie wir in den Sätzen 5.1 beziehungsweise 5.3 zeigen. Wir drehen also die Richtungen der verbindenden Abbildungen um. Dies tun wir aber nicht nur auf Ebene kompakter Räume beziehungsweise Punktfolgen, sondern dual dazu auch auf Ebene von Funktionenräumen auf diesen Punktfolgen beziehungsweise allgemeiner C^* - und Lipschitz-Algebren. Insofern bilden die Kapitel 4 und 5 jeweils eine entsprechende Übertragung der Kapitel 2 und 3.

Um einen Dimensionsbegriff für Lipschitz-Algebren $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ zu erhalten, benutzen wir in **Kapitel 4** nun nicht $*$ -Homomorphismen $\pi : A \rightarrow F$, sondern vollständig positive, unital und isometrische Abbildungen $\varphi : F \rightarrow A$ für eine (endlichdimensionale) C^* -Algebra F . Daher nennen wir auch den zugehörigen Dimensionsbegriff, den wir in Abschnitt 1 erhalten, den vollständig positiven Entropie-Index. Wir benutzen somit allgemeinere Abbildungen zwischen C^* -Algebren mit weniger Eigenschaften als $*$ -Homomorphismen, und deshalb gelingt es uns nur, weniger weit reichende Aussagen zu treffen. So ist der vollständig positive Entropie-Index abhängig davon, welche Klasse von C^* -Algebren wir als Urbilder F für die Abbildungen φ zulassen. Genauer gelingt es uns beispielsweise nur zu zeigen, dass der vollständig positive Entropie-Index für $(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ mit dem unteren Entropie-Index für (K, ρ) übereinstimmt, falls wir für F ausschließlich kommutative C^* -Algebren zulassen.

In Abschnitt 2 von Kapitel 4 deuten wir kurz an, wie bei einer Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ vorzugehen ist, betrachten wir Abbildungen von und nach A gemeinsam und nicht getrennt wie in Abschnitt 1 dieses Kapitels beziehungsweise Abschnitt 2

von Kapitel 2. Abschnitt 3 behandelt ein Beispiel für eine mögliche Anwendung des vollständig positiven Entropie-Index: Über das Spektrum des einer L^2 -Derivation d auf einem kompakten metrischen Raum (K, ρ) zugeordneten Laplace-Operators $\Delta = d^*d$ hat Hermann Weyl in der zweiten Dekade des vergangenen Jahrhunderts einen Dimensionsbegriff etabliert, den wir mit unserem vollständig positiven Entropie-Index in Verbindung setzen. Genauer geben wir in Satz 4.20 eine Abschätzung der beiden genannten Dimensionsbegriffe an und besprechen die Ergebnisse in Beispielen.

In **Kapitel 5** zeigen wir in Abschnitt 1 zunächst, wie sich jeder kompakte metrische Raum mit Hilfe des inversen Limes einer inversen Folge endlicher kompakter metrischer Räume, genauer als Quotient bezüglich einer Äquivalenzrelation auf einem solchen Limes, schreiben lässt. In Analogie zu Abschnitt 1 von Kapitel 3 dualisieren wir anschließend die verbindenden Abbildungen, betrachten die zugehörige direkte Folge unitaler C^* -Algebren und machen Aussagen über deren Limes. Nun weichen wir aber von einem zu Kapitel 3 analogen Vorgehen ab: Wir erläutern, weshalb es schon im Kommutativen nicht möglich ist, eine direkte Folge endlichdimensionaler Lipschitz-Algebren $(C(X_m), Lip(X_m), Lip(\cdot))$ zu konstruieren, deren direkter Limes im Sinne von Lipschitz-Algebren auf irgendeine Weise, eventuell durch Übergang zu einer C^* -Unteralgebra, $(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ liefert. Deswegen verzichten wir auf eine kategorientheoretische Behandlung des direkten Limes auf Ebene von Lipschitz-Algebren. Stattdessen benutzen wir den direkten Limes der endlichdimensionalen unitalen C^* -Algebren $C(X_m)$ und sondern darin diejenigen Elemente aus, die den Lipschitzstetigen Funktionen auf K entsprechen, vergleiche Theorem 5.8.

Abschnitt 2 in Kapitel 5 stellt schließlich einen Ansatz dafür dar, wie das Vorgehen aus Abschnitt 1 abzuändern ist, falls wir nur kompakte separable Hausdorff-Räume (ohne Metrik) betrachten. Der Schlüssel liegt darin, nicht nur die (Funktionen auf den) Punktfolgen $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ alleine zu betrachten, sondern (Funktionen auf) Ecken und Kanten einer Folge von Graphen, deren Ecken genau die Punkte in X_m beschreiben. Die Metrik wird also ersetzt durch Angabe einer Kantenmenge, die je zwei Ecken verbindet, wenn diese in einem gewissen Sinne eng zusammenliegen. Statt der Metrik impliziert hier dann die Kantenfolge die entsprechende Äquivalenzrelation auf dem inversen Limes der Eckenfolge. Am Ende gelingt es uns auch, die Aussagen für die C^* -Algebren der stetigen Funktionen auf endlichen Punktfolgen für Funktionen auf Kanten und Ecken zu übertragen.

Teil 1

**Funktionalanalytische Beschreibung
kompakter metrischer Räume und
multiplikative Theorie**

KAPITEL 1

Funktionalanalytische Analoga für kompakte metrische Räume

Wir wollen in diesem Kapitel das Problem diskutieren, für kompakte metrische Räume Beschreibungsmöglichkeiten mit funktionalanalytischen Mitteln beziehungsweise geeignete nicht-kommutative Analoga zu finden. Diesen metrischen Teilaspekt einer nicht-kommutativen Geometrie haben sich Mark Rieffel und dessen Schüler Nik Weaver und Branka Pavlović als Gegenstand ihrer Forschung herausgegriffen, und die Konzepte der beiden Erstgenannten wollen wir hier vorstellen.

In Abschnitt 1 beschäftigen wir uns mit Rieffels kompakten quantenmetrischen Räumen. Diese basieren auf einer Halbnorm auf einer C^* -Algebra, welche den metrischen Aspekt widerspiegelt. Nach der Definition der Objekte, die wir betrachten wollen, erläutern wir ausführlich, weshalb gerade sie sich als nützlich erwiesen haben, kompakte metrische Räume funktionalanalytisch zu beschreiben. Wir orientieren uns natürlich am kommutativen Fall, wo die Angabe einer Metrik ρ auf einem kompakten Hausdorff-Raum dadurch ersetzt wird zu sagen, welche stetigen Funktionen auf K lipschitzstetig (bezüglich ρ) sind, vergleiche Satz 1.3. Aber auch nicht-kommutative Beispiele für kompakte quantenmetrische Räume werden wir behandeln.

Im Gegensatz zu Rieffel beschreibt Nik Weaver die Metrik nicht durch (Halb-)Normen, sondern mit Hilfe von W^* -Derivationen. Die grundlegenden Definitionen und erste Beispiele hierfür enthält Abschnitt 2. In Abschnitt 3 beleuchten wir den Hintergrund für unsere Definition von W^* -Derivationen genauer und geben im kommutativen Fall eine maßtheoretische Charakterisierung für Lipschitzstetigkeit in metrischen Räumen und damit für die Metrik selbst mit Hilfe von W^* -Derivationen. Danach diskutieren wir die Zusammenhänge für diese Charakterisierung.

Schließlich vergleichen wir in Abschnitt 4 die beiden vorgestellten Konzepte miteinander und arbeiten die jeweiligen Vor- und Nachteile beziehungsweise Gemeinsamkeiten heraus.

1. Lipschitz-Algebren und kompakte quantenmetrische Räume

Hier wie in der gesamten Arbeit bezeichnen wir die Norm einer C^* -Algebra A mit $\|\cdot\|_A$.

1.1. DEFINITION. (1) Eine **Lipschitz-Algebra** ist ein Tripel $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, bestehend aus einer unitalen C^* -Algebra A , einer darin bezüglich der C^* -Norm $\|\cdot\|_A$ dicht liegenden $*$ -Unteralgebra \mathcal{A} mit einer Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ auf \mathcal{A} , so dass

- (a) $(\mathcal{A}, \max(\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}))$ ein Banachraum ist,
- (b) für den Kern der Halbnorm $\{a \in \mathcal{A} \mid \|a\|_{\mathcal{A}} = 0\} = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}_A$ gilt,
- (c) die Leibniz-Regel $\|ab\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \cdot \|b\|_{\mathcal{A}} + \|a\|_A \cdot \|b\|_{\mathcal{A}}$ erfüllt ist und
- (d) $\|a\|_{\mathcal{A}} = \|a^*\|_{\mathcal{A}}$ für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt.

Wir setzen $\mathcal{A}^c := \{a \in \mathcal{A} \mid \|a\|_{\mathcal{A}} \leq c\}$ für $0 \leq c \in \mathbb{R}$. Wir wollen $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ auf ganz A definiert ansehen, indem wir auch $+\infty$ im Wertebereich von $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ zulassen und $\|a\|_{\mathcal{A}} = +\infty$ für $a \in A \setminus \mathcal{A}$ setzen.

- (2) Sei $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ eine Lipschitz-Algebra. Wir nennen die Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ **unterhalbstetig**, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ bezüglich $\|\cdot\|_A$ die Ungleichung $\|a\|_{\mathcal{A}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_{\mathcal{A}}$ impliziert. Insbesondere gilt also in diesem Falle für $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ bezüglich $\|\cdot\|_A$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_{\mathcal{A}} < \infty$ schon $a \in \mathcal{A}$.

Weiter sagen wir, die Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ beziehungsweise genauer die Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ erfüllt die **Eigenschaft der totalen Beschränktheit**, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Elemente $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}^1$ existieren, so dass für die Quotientenabbildung $Q : A \rightarrow A/\mathbb{C} \cdot \mathbf{1}_A$, $a \mapsto a + \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}_A$ bezüglich des Kerns $\mathbb{C} \cdot \mathbf{1}_A$ der Halbnorm $\{Q(a) \mid a \in \mathcal{A}^1\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(Q(a_i))$ gilt. Die ε -Kugel $B_\varepsilon(Q(a_i))$ um $Q(a_i)$ ist hierbei bezüglich der (Quotienten-)Norm in $A/\mathbb{C} \cdot \mathbf{1}_A$ gemeint.

- (3) Ist die Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ in einer Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, welche die Eigenschaft der totalen Beschränktheit erfüllt, zusätzlich unterhalbstetig, so nennen wir $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ eine **Lip-Halbnorm** und das Tripel $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ einen **kompakten quantenmetrischen Raum**. Mit der **Dimension einer Lipschitz-Algebra** beziehungsweise der **Dimension eines kompakten quantenmetrischen Raumes** $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ ist die Dimension der C^* -Algebra A (als Vektorraum) gemeint.

1.2. BEMERKUNG. Für ein Tripel $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, bestehend aus einer C^* -Algebra A und einer $*$ -Unteralgebra \mathcal{A} mit Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ auf \mathcal{A} , so dass $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ die Eigenschaft der Unterhalbstetigkeit erfüllt, ist $(\mathcal{A}, \max(\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}))$ ein Banachraum. Ist nämlich $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich $\max(\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, so konvergiert diese gegen ein $a \in A$ wegen der Vollständigkeit von $(A, \|\cdot\|_A)$, und a besitzt aufgrund der Unterhalbstetigkeit sogar endliche Halbnorm, liegt also in \mathcal{A} . Dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ gegen a konvergiert, ergibt sich leicht daraus, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ ist und $\|a - a_n\|_{\mathcal{A}} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|a_m - a_n\|_{\mathcal{A}}$ gilt.

Bevor wir einige Beispiele für kompakte quantenmetrische Räume betrachten, wollen wir die Forderungen an einen solchen Raum und deren Herkunft und Wichtigkeit diskutieren.

Zunächst wollen wir erklären, weshalb wir die in obiger Definition gewählten Bezeichnungen benutzen. Das Konzept des kompakten quantenmetrischen Raumes taucht bei Rieffel (und Ozawa) an mehreren Stellen auf ([55], [56], [57], [58], [45]), wird aber zunächst in größerer Allgemeinheit im Zusammenhang mit **Ordnungs-Eins-Räumen** (engl. „order-unit spaces“) untersucht. Das sind reelle teilweise geordnete Vektorräume V mit einem ausgezeichneten Element e , der **(Ordnungs-)Eins** bezüglich der Halbordnung, so dass (i) für jedes $v \in V$ ein $r \in \mathbb{R}$ mit $v \leq re$ existiert und (ii) für jedes $v \in V$ mit $v \leq re$ für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ schon $v \leq \mathbf{0}$ gilt. Durch $\|v\| := \inf\{r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid -re \leq v \leq re\}$ wird dann eine Norm auf V definiert.

Betrachtet man eine unital C^* -Algebra A , so ist der zugehörige Ordnungs-Eins-Raum die Menge der selbstadjungierten Elemente $V = A_{sa}$ mit $\mathbf{1}_A$ als Ordnungs-Eins e . Als „correct way to specify metrics on compact non-commutative spaces“ bezeichnet Rieffel in [56] (Abschnitt 5) eine Halbnorm auf einem Ordnungs-Eins-Raum, deren Kern

aus den Vielfachen der Eins besteht und welche die Eigenschaften der Unterhalbstetigkeit und der totalen Beschränktheit erfüllt, und betitelt eine derartige Halbnorm als „Lip-Norm“. In [57], [58] und [45] arbeitet Rieffel teils mit Ordnungs-Eins-Räumen, teils mit unitalen C^* -Algebren, die mit einer Halbnorm mit den eben genannten Eigenschaften ausgestattet sind mit Ausnahme der Unterhalbstetigkeit, welche allerdings nur aus Gründen der Bequemlichkeit bei Beweisführungen und in Beispielen weggelassen wird, wie in [58] (Abschnitt 2) explizit erwähnt wird. Dort begründet Rieffel auch seine Bezeichnung derartiger Objekte als „compact quantum metric spaces“ damit, dass in der theoretischen Physik, genauer in der String-Theorie, wo die Konvergenz einer Folge von Operator-Algebren gegen eine weitere Operator-Algebra betrachtet wird, metrische Überlegungen für verschiedene Maßstäbe eine große Rolle spielen. Als Beispiele hierfür führt er [59] an, wo Folgen von Matrix-Algebren aufsteigender Dimension, ausgestattet mit „Metriken“ in gewissem Sinne gegen einen gewöhnlichen metrischen Raum konvergieren, oder als Spezialfall hiervon [30]. Die Bezeichnung der „Vorstufe“ eines kompakten quantenmetrischen Raumes als Lipschitz-Algebra erweist sich angesichts des Zusammenhangs von Metrik und lipschitzstetigen Funktionen auf einem kompakten metrischen Raum (K, ρ) , wie er in Bemerkung 1.4 diskutiert wird, als sinnvoll.

Nach der Diskussion um die Bezeichnung der betrachteten Objekte wollen wir nun auf die Eigenschaften eines kompakten quantenmetrischen Raumes $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ näher eingehen. Wir können mittels der Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ auf dem Zustandsraum $S(A)$ eine Abbildung definieren, welche Werte in $[0, \infty]$ annehmen kann und sonst alle Eigenschaften einer Metrik erfüllt; diese Abbildung ist gegeben durch

$$(1) \quad \rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}} : S(A) \rightarrow [0, \infty], (\mu, \nu) \mapsto \sup\{|\mu(a) - \nu(a)| \mid a \in \mathcal{A}, \|a\|_{\mathcal{A}} \leq 1\},$$

die so genannte **Monge-Kantorovič-Metrik** (siehe [71],[37],[52],[53]). Diese ist auch unter dem Namen **Hutchinson-Metrik** bekannt, vergleiche etwa [5] (9.5). Entsprechend gewinnen wir auf \mathcal{A} eine Abbildung aus $\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}$ zurück, welche Werte in $[0, \infty]$ annehmen kann und sonst alle Eigenschaften einer Halbnorm besitzt, und zwar durch

$$(2) \quad L_{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty], a \mapsto \sup \left\{ \frac{|\mu(a) - \nu(a)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu, \nu)} \mid \mu, \nu \in S(A), \mu \neq \nu \right\}.$$

Wie Rieffel in [56] (Theoreme 3.4 und 4.1) beweist, stimmt diese mit der ursprünglichen Metrik überein, $L_{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}} = \|\cdot\|_{\mathcal{A}}$, falls $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ unterhalbstetig ist. Weiter wird in [55] gezeigt, dass die Bedingung an das Bild von \mathcal{A}^1 in $A/\mathbf{C}\mathbf{1}_A$ unter der Quotientenabbildung $Q : A \rightarrow A/\mathbf{C}\mathbf{1}_A$, total beschränkt bezüglich $\|\cdot\|_{A/\mathbf{C}\mathbf{1}_A}$ zu sein, genau dann erfüllt ist, wenn die von der Metrik $\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}$ induzierte Topologie auf $S(A)$ mit der Schwach*-Topologie übereinstimmt. Insbesondere besitzt $S(A)$ dann bezüglich dieser Metrik endlichen Durchmesser als kompakte Menge. Der **Durchmesser** für eine Teilmenge $\emptyset \neq U$ eines metrischen Raumes (K, ρ) ist dabei gegeben durch $\text{diam}(U) := \sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in U\}$. Die Eigenschaften der Unterhalbstetigkeit und der totalen Beschränktheit einer Halbnorm und der damit ermöglichte Zusammenhang zum Dualraum und einer Metrik dort stellt ein kräftiges Werkzeug dar, das wir zu nutzen wissen werden, siehe etwa Theorem 3.18. Dies ist für uns auch ein Hauptgrund, das Konzept kompakter quantenmetrischer Räume von Rieffel zu übernehmen.

Die übrigen Anforderungen an einen kompakten quantenmetrischen Raum sind alle-
samt natürlich: Da wir keine Ordnungs-Eins-Räume, also keine reellen Vektorräume,
sondern C^* -Algebren betrachten, ist Eigenschaft (d) aus Definition 1.1 wünschenswert,
wie Rieffel in [58] (Abschnitt 2) bemerkt. Deswegen betrachten wir wie im vorangegan-
genen Absatz beschrieben auch eine Metrik auf dem Zustandsraum $S(A)$ und nicht auf
dem Zustandsraum von A_{sa} , doch dieser Übergang bereitet keinerlei Schwierigkeiten.

Das folgende, wohl einfachste Beispiel, welches implizit schon in [56] erwähnt wird,
soll uns als Motivation dienen, dass wir genau die richtigen Eigenschaften für einen
kompakten quantenmetrischen Raum gefordert haben.

1.3. SATZ. *Das Tripel $(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$, bestehend aus den stetigen beziehungs-
weise den lipschitzstetigen Funktionen und der Lipschitz-Halbnorm auf einem kompak-
ten metrischen (Hausdorff-)Raum (K, ρ) , ist ein kompakter quantenmetrischer Raum.
Die Lipschitz-Halbnorm, also die kleinste Lipschitzkonstante für eine Funktion $f \in$
 $Lip(K)$, ist hierbei durch*

$$(3) \quad Lip(f) := \sup_{\substack{x, y \in K \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x, y)}$$

gegeben.

BEWEIS. Dass $Lip(K)$ dicht in $C(K)$ bezüglich $\|\cdot\|_{C(K)} = \|\cdot\|_\infty$ liegt, der Kern der
Lipschitz-Halbnorm aus den konstanten Funktionen besteht, $Lip(\cdot)$ die Leibniz-Regel
erfüllt und $Lip(f) = Lip(\bar{f}) = Lip(f^*)$ gilt, ist klar. Die Banachraum-Eigenschaft weist
man beispielsweise wie folgt nach: Konvergiert die Folge lipschitzstetiger Funktionen
 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich der Norm $\max(\|\cdot\|_\infty, Lip(\cdot))$ gegen eine Funktion f , so ist diese stetig,
weil $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist, und sogar lipschitzstetig: Sind $x, y \in K$ mit
 $x \neq y$ und $\varepsilon > 0$, so existiert ein Index $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_n\|_\infty < \rho(x, y)\varepsilon$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x, y)} &\leq \frac{|f(x) - f_n(x)|}{\rho(x, y)} + \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{\rho(x, y)} + \frac{|f_n(y) - f(y)|}{\rho(x, y)} \\ &< \varepsilon + Lip(f_n) + \varepsilon \leq 2\varepsilon + \sup_{m \in \mathbb{N}} Lip(f_m) < \infty, \end{aligned}$$

also $f \in Lip(K)$.

Um die Unterhalbstetigkeit der Halbnorm $Lip(\cdot)$ zu zeigen, müssen wir aus der Kon-
vergenz von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K)$ gegen f bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ die Ungleichung $Lip(f) \leq$
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} Lip(f_n)$ folgern. Dies ist aber unmittelbar mit der eben durchgeführten
Rechnung ersichtlich.

Dass $(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ die Eigenschaft der totalen Beschränktheit erfüllt, liegt
einfach an der Kompaktheit des zugrunde liegenden Raumes, genauer gesagt am end-
lichen Durchmesser von K . Wir sehen dies leicht ein, wenn wir zunächst einen Punkt
 $x_0 \in K$ auszeichnen und K derart mit einem Netz von endlich vielen Punkten x_0, \dots, x_n
überziehen, dass für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die offenen Kugeln $B_\varepsilon(x_i)$ ($0 \leq i \leq n$)
ganz K überdecken. Wir zeigen zunächst, dass es endlich viele reellwertige Funktio-
nen g_1, \dots, g_n aus $Lip(K)$ gibt, so dass $\bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(Q(g_i)) \supseteq Q(\{f \in Lip(K) \mid Lip(f) \leq$
 $1, f(K) \subseteq \mathbb{R}\})$ für die Quotientenabbildung $Q : C(K) \rightarrow C(K)/\mathcal{C}\mathbf{1}_K$ gilt. Dazu
identifizieren wir $C(K)/\mathcal{C}\mathbf{1}_K$ auf natürliche Weise mit $\{f \in C(K) \mid f(x_0) = 0\}$. Wir
setzen $k_i := \left\lfloor \frac{\rho(x_0, x_i)}{\varepsilon} \right\rfloor$ und betrachten die endlich vielen Funktionen $g \in \mathbb{R}^{\{x_0, \dots, x_n\}}$,

welche $g(x_0) = 0$ und $g(x_i) \in \{-k_i\varepsilon, (-k_i + 1)\varepsilon, \dots, k_i\varepsilon\}$ erfüllen und deren Lipschitz-Halbnorm eingeschränkt auf die Punkte x_0, \dots, x_n höchstens Eins ist. Anschaulich gesprochen haben wir demnach in $K \times \mathbb{R}$ endlich viele Punkte ausgewählt, die von $(x_0, 0)$ aus gesehen in einem Kegel mit einem Öffnungswinkel von 45 Grad gegenüber der K -Achse und für unsere Zwecke genügend dicht verteilt liegen. Dies wird in Abbildung 14 auf Seite 69 für das kompakte Intervall $K = [-m, m]$ illustriert. Jede der Funktionen, welche wir derart erhalten, lässt sich zu einer lipschitzstetigen reellwertigen Funktion gleicher Lipschitz-Halbnorm auf ganz K fortsetzen, vergleiche etwa [40] (Lemma 5.6). Da jede beliebige lipschitzstetige reellwertige Funktion g mit $g(x_0) = 0$ und $Lip(g) \leq 1$ in den Punkten x_i einen Funktionswert besitzt, der sich höchstens um $\frac{\varepsilon}{2}$ von $z_i\varepsilon$ für ein $z_i \in \mathbb{Z}$, $|z_i| \leq k_i$ unterscheidet, der Folge $(z_i)_{0 \leq i \leq n}$ aber genau eine Funktion h der endlich vielen Funktionen entspricht, die wir durch Fortsetzen erhalten haben, unterscheiden sich g und h in der Supremumsnorm höchstens um ε . Diese Überlegung lässt sich ohne weiteres entsprechend auf den komplexen Fall erweitern; eventuell muss ein Faktor $\sqrt{2}$ (wegen der Änderung der Lipschitz-Halbnorm um diesen Faktor beim Fortsetzen) eingebaut werden. \square

1.4. BEMERKUNG. Es ist nur schwer zu glauben, dass nur bekannt ist, dass für eine auf einer Teilmenge M eines metrischen (K, ρ) definierte lipschitzstetige Funktion $f_0 : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine Fortsetzung $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ auf ganz K mit $Lip(f) \leq \sqrt{2}Lip(f_0)$ existiert, aber nicht, ob der Faktor $\sqrt{2}$ dabei auch der bestmögliche ist oder noch verbessert werden kann, vergleiche [67] (1.5.7). Dass solch eine Fortsetzung existiert, wird beispielsweise in [40] (Lemma 5.6) gesagt. Die Aussage dieses Lemmas ist, dass zu jeder lipschitzstetigen Funktion $f_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ für eine Teilmenge (M, ρ_M) eines metrischen Raumes (K, ρ) mit auf M eingeschränkter Metrik ρ_M eine lipschitzstetige Fortsetzung $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $Lip(f) \leq \sqrt{n}Lip(f_0)$ existiert. Dies ist die Anwendung der entsprechenden Aussage für $n = 1$, die in [43] (Theorem 1) gezeigt wird, auf jede Koordinatenfunktion.

Wir sehen auch, dass für einen kompakten Hausdorff-Raum K die Angabe einer Metrik und die Angabe der Menge der lipschitzstetigen Funktionen auf K dieselbe Information beinhalten: Formel (3) sagt uns, wie wir aus einer Metrik die zugehörigen lipschitzstetigen Funktionen erhalten, und umgekehrt gewinnen wir aus der Angabe von $Lip(K)$ für einen kompakten metrischen Raum (K, ρ) die Metrik durch die Formel

$$(4) \quad \rho(x, y) = \sup_{\substack{f \in Lip(K) \\ Lip(f) \leq 1}} |f(x) - f(y)|$$

zurück.

1.5. BEISPIEL. Satz 1.3 impliziert natürlich, dass $(C([0, 1]), Lip([0, 1]), Lip(\cdot))$ ein kompakter quantenmetrischer Raum ist. Bezeichnen wir mit d den üblichen Ableitungsoperator auf $[0, 1]$, so können wir auch das Tripel $(C([0, 1]), C^1([0, 1]), \|d\cdot\|_\infty)$ betrachten. Dies ist allerdings nur eine Lipschitz-Algebra und kein kompakter quantenmetrischer Raum. Natürlich gelten $\|df^*\|_\infty = \|d\bar{f}\|_\infty = \|df\|_\infty$ für $f \in C^1([0, 1])$ und die Leibniz-Regel, und die Dichtheit von $C^1([0, 1])$ in $C([0, 1])$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ist klar. Dass $(C^1([0, 1]), \max(\|\cdot\|_\infty, \|df\|_\infty))$ vollständig ist, ist eine unmittelbare Folge aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Ist nämlich $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f bezüglich $\max(\|\cdot\|_\infty, \|df\|_\infty)$ konvergent, so ist wegen der Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm f stetig und df_n gleichmäßig

konvergent gegen ein $g \in C([0, 1])$, für das

$$\begin{aligned} f(t) - f(0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(t) - f_n(0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t df_n(x) dx = \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} df_n(x) dx \\ &= \int_0^t g(x) dx \end{aligned}$$

gilt. Also ist $df = g$ und $(C^1([0, 1]), \max(\|\cdot\|_\infty, \|df\|_\infty))$ ein Banachraum.

Die Lipschitz-Algebra $(C([0, 1]), C^1([0, 1]), \|d\cdot\|_\infty)$ erfüllt zwar die Eigenschaft der totalen Beschränktheit. Dies kann mit einer Überlegung analog zu Satz 1.3 bewiesen werden, wenn man von einem ε -Netz zu einem $\frac{\varepsilon}{2}$ -Netz übergeht und die endlich vielen lipschitzstetigen Funktionen, die man derart erhält, an den Knickstellen glättet. Schwierigkeiten bereitet aber die Unterhalbstetigkeit von $\|d\cdot\|_\infty$. Dass die

se nicht erfüllt sein kann, sehen wir am Beispiel $f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - x & \text{für } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$, welches eine Funktion in $Lip([0, 1]) \setminus C^1([0, 1])$ mit Lipschitz-Halbnorm 1 ist. Diese kann durch Glätten um die Knickstelle gleichmäßig durch eine Folge $(f_n)_n$ in $C^1([0, 1])$ approximiert werden, so dass $\|df_n\|_\infty = Lip(f_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, wie wir in Abbildung 1 angedeutet haben.

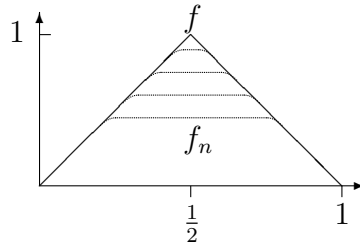


ABBILDUNG 1. Gegenbeispiel zur Gültigkeit der Unterhalbstetigkeit in $(C([0, 1]), C^1([0, 1]), \|d\cdot\|_\infty)$.

Demnach folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ noch nicht $\|df\|_\infty \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|df_n\|_\infty$.

1.6. BEMERKUNG. Das eben behandelte Beispiel zeigt, dass die Unterhalbstetigkeit eine weitere, stärkere Art von Vollständigkeit impliziert als die von $(A, \|\cdot\|_A)$ und $(\mathcal{A}, \max(\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}))$. Damit ein Element $a \in A$ in \mathcal{A} liegt, genügt die Existenz einer bezüglich $\|\cdot\|_A$ konvergenten Folge von Elementen in \mathcal{A} , deren Halbnormen beschränkt ist; dies klingt nach einem C^* -algebraischen Analogon des kleinen Satzes von Lebesgue, welcher besagt (vgl. [26] (20.5.3 (b))): Konvergieren die beschränkten messbaren Funktionen f_n auf einem endlichen Maßraum (X, μ) gleichmäßig gegen f , so folgt die μ -Integrierbarkeit von f (und die Vertauschbarkeit von Limes und μ -Integral). Die Rolle der μ -integrierbaren Funktionen im kleinen Satz von Lebesgue spielen bei uns die Elemente in \mathcal{A} .

Am Ende dieses Abschnitts behandeln wir noch mehrere etwas komplexere und erste nicht-kommutative Beispiele für kompakte quantenmetrische Räume.

1.7. BEISPIEL. Wir werden die Matrix-Algebren $M_n(\mathbb{C})$ mit einer Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ ausstatten, welche $(M_n(\mathbb{C}), \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ für $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ zu einem kompakten quantenmetrischen Raum macht.

Wir definieren die $n \times n$ -Matrizen

$$D_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und bezeichnen mit $\delta_k(\cdot)$ den Kommutator auf $M_n(\mathbb{C})$ mit D_k , $k = 1, 2$. Die Kommutante $C^*(D_1, D_2)'$ der von D_1 und D_2 erzeugten C^* -Algebra ist dann $\mathbb{C}\mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})}$: Die Eigenräume von D_1 sind genau die von den Standardbasis-Einheitsvektoren aufgespannten eindimensionalen Räume. Genauer gilt für $a = (a_{i,j})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$

$$\delta_1(a) = [D_1, a] = ((i-j)a_{i,j})_{i,j} \quad \text{und} \quad \delta_2(a) = [D_2, a] = (a_{i-1(\bmod n),j} - a_{i,j+1(\bmod n)})_{i,j},$$

und somit ist $\delta_1(a) = 0$ genau dann, wenn a Diagonalgestalt besitzt, und offenbar zusätzlich $\delta_2(a) = 0$ genau dann, wenn zusätzlich alle Einträge auf der Diagonalen gleich sind.

Wir definieren nun als Halbnorm

$$\|\cdot\|_{\mathcal{A}} := \sum_{k=1}^2 \|\delta_k(\cdot)\|_{M_n(\mathbb{C})}$$

auf $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$. Falls es bequemer erscheint, können wir auch jede andere p -Norm statt der Norm $\|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})}$ benutzen. Offensichtlich gilt $\|a\|_{\mathcal{A}} < \infty$ für alle $a \in M_n(\mathbb{C})$, und $(M_n(\mathbb{C}), \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ erfüllt alle Eigenschaften eines kompakten quantenmetrischen Raumes aus Definition 1.1: Wie gezeigt ist $\text{Ker}(\|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = \mathbb{C}\mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})}$, und die Leibniz-Regel gilt wegen

$$\begin{aligned} \|ab\|_{\mathcal{A}} &= \sum_{k=1}^2 \|[D_k, ab]\|_{M_n(\mathbb{C})} = \sum_{k=1}^2 \|D_k ab - aD_k b + aD_k b - abD_k\|_{M_n(\mathbb{C})} \\ &\leq \sum_{k=1}^2 (\|D_k a - aD_k\|_{M_n(\mathbb{C})} \|b\|_{M_n(\mathbb{C})} + \|a\|_{M_n(\mathbb{C})} \|D_k b - bD_k\|_{M_n(\mathbb{C})}) \\ &= \|a\|_{\mathcal{A}} \|b\|_{M_n(\mathbb{C})} + \|a\|_{M_n(\mathbb{C})} \|b\|_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Weiter gelten für $D, a \in M_n(\mathbb{C})$ und eine unitäre Matrix $U \in M_n(\mathbb{C})$

$$[D, a^*] = Da^* - a^*D = (aD^* - D^*a)^* = -(D^*a - aD^*)^* = -[D^*, a]^*$$

und

$$\begin{aligned} \|[U, a^*]\|_{M_n(\mathbb{C})} &= \|Ua^* - a^*U\|_{M_n(\mathbb{C})} = \|a^* - U^*a^*U\|_{M_n(\mathbb{C})} = \|(a - U^*aU)^*\|_{M_n(\mathbb{C})} \\ &= \|a - U^*aU\|_{M_n(\mathbb{C})} = \|[U, a]\|_{M_n(\mathbb{C})}, \end{aligned}$$

woraus $\|a^*\|_{\mathcal{A}} = \|a\|_{\mathcal{A}}$ folgt, da D_1 selbstadjungiert beziehungsweise D_2 unitär ist. Wegen der Stetigkeit der Konjugation von Matrizen ist $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ sogar stetig bezüglich $\|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})}$, also auch unterhalbstetig, vergleiche etwa [20] (7.4), [34]. Die Vollständigkeit des normierten Raumes $(\mathcal{A}, \max(\|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}))$ folgt aus der Bemerkung 1.2 beziehungsweise der Endlichdimensionalität des Raumes.

Dass $(M_n(\mathbb{C}), \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ die Eigenschaft der totalen Beschränktheit erfüllt, sehen wir durch folgende Überlegung ein: Sei $\varepsilon > 0$. Die Kerne der Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$

und der Quotientenabbildung $Q : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})/\mathbb{C}\mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})}$ stimmen überein. Für $a \in M_n(\mathbb{C})$ gilt deshalb $\|Q(a)\|_{\mathcal{A}/\mathbb{C}\mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})}} = \|a\|_{\mathcal{A}}$, und $(Q(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{\mathcal{A}/\mathbb{C}\mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})}})$ wird zu einem endlichdimensionalen normierten Raum. In solchen Räumen sind je zwei Normen äquivalent, siehe etwa [33] (Satz 11.3), und daher gibt es zwei Konstanten $c_1, c_2 > 0$ mit $c_1\|\cdot\|_{\mathcal{A}} \leq \|Q(\cdot)\|_{M_n(\mathbb{C})/\mathbb{C}\mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})}} \leq c_2\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ auf $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$. Damit ist $\{Q(a) \mid a \in \mathcal{A}^1\}$ in $c_2\overline{B_1(0)}(M_n(\mathbb{C})/\mathbb{C}\mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})})$, dem c_2 -fachen der normabgeschlossenen Einheitskugel der C^* -Algebra $M_n(\mathbb{C})/\mathbb{C}\mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})}$, enthalten. Diese Kugel ist aufgrund der Endlichdimensionalität von $M_n(\mathbb{C})/\mathbb{C}\mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})}$ kompakt, also relativkompakt. Ist X ein für eine Norm (beziehungsweise allgemeiner eine Metrik) vollständiger Raum und $Y \subset X$, dann ist laut [21] (XIV.3.6) Y genau dann relativkompakt, wenn Y total beschränkt beziehungsweise präkompakt ist, also zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ endlich viele ε -Kugeln zur Überdeckung von Y genügen. Wenden wir dies auf $X = (M_n(\mathbb{C})/\mathbb{C}\mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})}, \|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})/\mathbb{C}\mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})}})$ und $Y = \{Q(a) \mid a \in \mathcal{A}^1\}$ an, erhalten wir die Eigenschaft der totalen Beschränktheit für $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$.

1.8. BEISPIEL (Rationale Drehalgebra — Teil I). Mit den gängigen Bezeichnungen $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ für die Einheitskreislinie und $\mathbf{T}^2 = \{(s, t) \mid s, t \in \mathbb{C}, |s| = |t| = 1\}$ für den 2-Torus definieren wir die Drehalgebra A_ϑ für $\vartheta \in [0, 1[$. Ein Modell der Drehalgebra erhalten wir, wenn wir den Hilbertraum $\mathcal{H} := L^2(S^1)$ betrachten; A_ϑ ist dann diejenige C^* -Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, welche von zwei unitären Operatoren U, V erzeugt wird, welche wir nun näher spezifizieren. Wir setzen $\theta = e^{2\pi i\vartheta}$. Benutzen wir das vollständige Orthonormalsystem $B := \{b_n \in L^2(S^1) \mid b_n(z) = z^n, n \in \mathbb{Z}\}$ für $L^2(S^1)$, so entspricht $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $(Uf)(z) := zf(z)$ gerade dem Rechtsshift, das heißt $Ub_n = b_{n+1}$, und V soll einer Drehung um den Winkel $2\pi\vartheta$ entsprechen, also $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $(Vf)(z) := f(\theta z) = f(e^{2\pi i\vartheta}z)$. Die C^* -Algebra A_ϑ ist dann die von U und V erzeugte C^* -Unteralgebra $C^*(U, V)$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Die beiden Operatoren U und V erfüllen die Vertauschungsrelation

$$(5) \quad VU = \theta UV.$$

Für rationales $\vartheta = \frac{p}{q} \in [0, 1[$ mit $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\text{ggT}(p, q) = 1$, also $p < q$, nennen wir A_ϑ rationale Drehalgebra; in diesem Falle ist $\theta = e^{2\pi i\vartheta}$ primitive q -te Einheitswurzel. Falls $\vartheta \in [0, 1[$ irrational ist, nennen wir A_ϑ irrationale Drehalgebra.

Wie in [2] gezeigt wird, ist eine C^* -Algebra A stets eine zu A_ϑ isomorphe C^* -Algebra (für ein $\vartheta \in [0, 1[$), wenn es eine ergodische und effektive Wirkung des Torus $G = \mathbf{T}^2$, aufgefasst als kompakte topologische Gruppe, auf A gibt, das bedeutet, ein Homomorphismus $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$, $g \mapsto \alpha_g$ in die Automorphismengruppe von A existiert. Mit **ergodisch** ist dabei $\{a \in A \mid \alpha_g(a) = a \forall g \in G\} = \mathbb{C}\mathbf{1}_A$ gemeint, und **effektiv** heißt, dass der Kern von α trivial ist.

Im Falle $\vartheta = 0$ vertauschen die Operatoren U und V , und wir erhalten eine unitale kommutative C^* -Algebra A_0 . Da wir uns hier für ein Beispiel einer nichtkommutativen C^* -Algebra interessieren, setzen wir $\vartheta \in]0, 1[$ voraus, falls wir nicht explizit den Fall $\vartheta = 0$ erwähnen. Außerdem beschränken wir uns auf das Betrachten rationaler ϑ , also von rationalen Drehalgebren A_ϑ . Für $\vartheta = \frac{p}{q}$ wie oben

lässt sich A_ϑ konkret als C^* -Unteralgebra von $C(G) \otimes_{\mathbb{C}} M_q(\mathbb{C}) \cong C(G, M_q(\mathbb{C}))$ konstruieren; dazu beschreiben wir nun die Ergebnisse von [36]. Wir wählen die beiden $q \times q$ -Matrizen

$$(6) \quad U_q := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V_q := \begin{pmatrix} \theta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \theta^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \theta^{q-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

welche dieselbe Veranschaulichungsrelation wie die in Formel (5) angegebene erfüllen. U_q ist wieder der Rechtsshift, diesmal bezüglich der Standardbasis-Vektoren in \mathbb{C}^n , und V_q entspricht wieder der Drehung um einen Winkel $2\pi\vartheta$, analog zu V . Die von U_q und V_q erzeugte C^* -Algebra ist $M_q(\mathbb{C})$. Bezeichnen wir mit x beziehungsweise y die Projektion von $G = \mathbf{T}^2$ auf die erste beziehungsweise zweite Koordinate, so entpuppt sich A_ϑ als die von $x \otimes U_q$ und $y \otimes V_q$ erzeugte C^* -Unteralgebra in $C(G) \otimes_{\mathbb{C}} M_q(\mathbb{C})$. Für unsere Zwecke ist es günstig, die natürliche Isomorphie $C(G) \otimes_{\mathbb{C}} M_q(\mathbb{C}) \cong C(G, M_q(\mathbb{C}))$, welche durch $f \otimes e_{ij} \mapsto fe_{ij}$ für Elementarmatrizen e_{ij} gegeben ist, auszunutzen und A_ϑ als die von xU_q und yV_q erzeugte C^* -Unteralgebra von $C(G, M_q(\mathbb{C}))$ anzusehen; dabei ist beispielsweise xU_q die Abbildung $(s, t) \mapsto sU_q$.

Die von xU_q und yV_q erzeugte C^* -Unteralgebra $C^*(xU_q, yV_q)$ von $C(G, M_q(\mathbb{C}))$ ist tatsächlich isomorph zu A_ϑ nach oben erwähnter Äquivalenz aus [2], weil wir eine ergodische effektive Wirkung des Torus G auf $C^*(xU_q, yV_q)$ definieren können. Diese Wirkung erhalten wir wie folgt: Wir wissen beispielsweise aus [16] (Kapitel VI), dass es eine Wirkung von G durch Automorphismen α auf A_ϑ gibt, die auf den Erzeugern U und V von A_ϑ gegeben ist durch $\alpha_{(g_1, g_2)}(U) := g_1U$ und $\alpha_{(g_1, g_2)}(V) := g_2V$ für $g = (g_1, g_2) \in G$. Diese Automorphismen kommen demnach durch Multiplizieren mit einem Phasenfaktor zustande. Wir orientieren uns daran und definieren nun Automorphismen β auf $C^*(xU_q, yV_q)$. Wir erhalten ganz $C^*(xU_q, yV_q)$ durch Grenzübergang als Limes von Polynomen $p(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}} c_{n_1, n_2, n_3, n_4} Z_1^{n_1} Z_2^{n_2} Z_3^{n_3} Z_4^{n_4}$ in vier nicht-vertauschenden Unbestimmten Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 , in die wir $xU_q, (xU_q)^*, yV_q, (yV_q)^*$ als Variablen einsetzen. Aufgrund der Vertauschungsrelation (5) und wegen $(xU_q)^* = (xU_q)^{-1}$ und $(yV_q)^* = (yV_q)^{-1}$ können wir die Koeffizienten für konstante Werte von $n_1 - n_2$ und $n_3 - n_4$ zusammenfassen und Polynome der Form $\sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} c_{k_1, k_2} (xU_q)^{k_1} (yV_q)^{k_2}$ betrachten. Das Zentrum Z_ϑ von A_ϑ besteht demnach aus $Z_\vartheta = C^*(x\mathbf{1}_{M_q(\mathbb{C})}, y\mathbf{1}_{M_q(\mathbb{C})}) \subset C^*(xU_q, yV_q)$ und ist damit isomorph zu $C(G)$. Wir definieren jetzt die Wirkung β von G auf $C^*(xU_q, yV_q)$ durch Automorphismen, indem wir für $f \in C^*(xU_q, yV_q) \subset C(G, M_q(\mathbb{C}))$

$$\beta_{(g_1, g_2)}(f(xU_q, yV_q)) := f(g_1xU_q, g_2yV_q)$$

setzen. Dass $\beta(G)$ aus $*$ -Homomorphismen besteht, rechnet man einfach auf der dichten Teilmenge der Polynome nach. [Dabei muss man bei der Multiplikativität beachten, dass sich die Vertauschungsrelation (5), die U_q und V_q erfüllen, im Nicht-Vertauschen der Variablen der Polynome widerspiegelt.] Weiter ist $\beta_{(g_1, g_2)}^{-1} =$

$\beta_{(g_1^{-1}, g_2^{-1})} = \beta_{(\overline{g_1}, \overline{g_2})}$, also $\beta_{(g_1, g_2)}$ bijektiv. Man rechnet $\beta_{(g_1, g_2)}(xU_q), \beta_{(g_1, g_2)}(yV_q) \in C^*(xU_q, yV_q)$ leicht nach. Damit gilt $\beta_{(g_1, g_2)}(C^*(xU_q, yV_q)) \subseteq C^*(xU_q, yV_q)$ für alle $(g_1, g_2) \in G$, und alle Abbildungen β_g für $g \in G$ sind Automorphismen. Im Kommutativen, das heißt, wenn U_q und V_q vertauschen ($\vartheta = 0$), entsprechen diese Automorphismen genau Drehungen in jeder Komponente bei stetigen Funktionen auf dem Torus. Weil aber $\alpha_{(g_1, g_2)}$ und $\beta_{(g_1, g_2)}$ auf den Erzeugern von $C^*(xU_q, yV_q)$ schon übereinstimmen, gilt $\alpha_{(g_1, g_2)} = \beta_{(g_1, g_2)}$ für alle $(g_1, g_2) \in G$, und die angegebenen Automorphismen sind genau die aus der Literatur bekannten. In Zukunft bezeichnen wir diese Wirkungen von G in $\text{Aut}(A_\vartheta)$ mit α . Die Einschränkungen der Wirkung α auf Z_ϑ entspricht demnach den gewöhnlichen Drehungen auf dem Torus.

Übrigens wird in [36] A_ϑ genau als die Menge aller unter den Abbildungen

$$\begin{aligned} h_1 : C(G, M_q(\mathbb{C})) &\rightarrow C(G, M_q(\mathbb{C})), & h_1(f)(s, t) &:= U_q^{-1}f(s, \theta^{-1}t)U_q \quad \text{und} \\ h_2 : C(G, M_q(\mathbb{C})) &\rightarrow C(G, M_q(\mathbb{C})), & h_2(f)(s, t) &:= V_q^{-1}f(\theta s, t)V_q \end{aligned}$$

invarianten Elemente in $C(G, M_q(\mathbb{C}))$ gekennzeichnet. Damit ließe sich obige Invarianz von $C^*(xU_q, yV_q)$ unter β ebenso einfach nachweisen.

Wir folgen Rieffels Ausführungen in [55], um einen kompakten quantenmetrischen Raum zu bekommen. In Abschnitt 2 wird dort beschrieben, wie man solche kompakten quantenmetrischen Räume mittels Längenfunktionen und Wirkungen von kompakten Gruppen G mit Neutralelement e auf C^* -Algebren erhält. Eine **Längenfunktion** auf einer (multiplikativ geschriebenen) Gruppe G ist dabei eine Funktion $l : G \rightarrow [0, \infty[$ mit

$$(i) \ l(g) = 0 \Leftrightarrow g = e, \quad (ii) \ l(g^{-1}) = l(g), \quad (iii) \ l(gh) \leq l(g) + l(h) \quad \forall g, h \in G.$$

Offensichtlich lässt sich daraus eine Metrik ρ auf G gewinnen durch $\rho(g, h) := l(gh^{-1})$. Wirkt nun die kompakte Gruppe G mittels Automorphismen α auf der C^* -Algebra A , so können wir

$$(7) \quad \mathcal{A} := \left\{ a \in A \mid \sup_{e \neq g \in G} \frac{\|\alpha_g(a) - a\|_A}{l(g)} < \infty \right\} \quad \text{und} \quad \|a\|_{\mathcal{A}} := \sup_{e \neq g \in G} \frac{\|\alpha_g(a) - a\|_A}{l(g)}$$

setzen. Man überzeugt sich leicht davon, dass \mathcal{A} eine $*$ -Unteralgebra von A ist und $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ eine Halbnorm darauf, welche die Leibniz-Regel erfüllt. Dass deren Kern genau $\mathbb{C}\mathbf{1}_A$ ist, ergibt sich aus der Ergodizität der Wirkung. Die Norm-Dichtheit von \mathcal{A} in A wird in Proposition 2.2 in [55] nachgewiesen. Der Beweis dieser Aussage ist nicht unaufwändig und benutzt beispielsweise das Haar-Integral auf G , siehe Beispiel 1.9, und die Wirkung α von G auf A wird zurückgespielt auf die Wirkung λ von G auf $L^1(G)$ via Linkstranslation, das heißt Abbildungen der Form $\lambda_g(f) = (h \mapsto f(g^{-1}h))$ für $g, h \in G$ und $f \in L^1(G)$. Nach [55] (Theorem 2.3) liefert die von $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ induzierte Metrik auf dem Zustandsraum von A genau die Schwach*-Topologie zurück, was äquivalent zur Gültigkeit der totalen Beschränktheitseigenschaft ist, und die Unterhalbstetigkeit von $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ bezüglich $\|\cdot\|_A$ gilt aufgrund der Bemerkung nach Proposition 3.7 in [56]. Mit der Unterhalbstetigkeit kann ganz einfach die Vollständigkeit von $(\mathcal{A}, \max(\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}))$ gezeigt werden, vergleiche Bemerkung 1.2.

Wir übertragen diese Erkenntnisse auf die Situation bei der rationalen Drehalgebra. Die Wirkung α von G auf $A_\vartheta = C^*(xU_q, yV_q) \subset C(G, M_q(\mathbb{C}))$ haben wir bereits erörtert. Wir geben noch die Längenfunktion l auf dem Torus G an. Dazu definieren wir die Abbildung $E : [0, 1]^2 \rightarrow G$, $(\sigma, \tau) \mapsto (e^{2\pi i\sigma}, e^{2\pi i\tau})$ und schreiben ein Element $g = (g_1, g_2) \in G$ in der Form $g = E(\sigma, \tau)$ mit $\sigma, \tau \in [0, 1]$, das heißt, wir parametrisieren den Torus mit Hilfe des Einheitsquadrats $[0, 1]^2$ und beachten dabei die Periodizität $e^{2\pi i0} = e^{2\pi i1} = 1$. Jede der vier Ecken des Einheitsquadrats beschreibt demnach denselben Punkt auf dem Torus. Unsere Längenfunktion auf G erhalten wir, indem wir

$$l(e^{2\pi i\sigma}, e^{2\pi i\tau}) := \min \left\{ \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, \sqrt{(1-\sigma)^2 + \tau^2}, \sqrt{\sigma^2 + (1-\tau)^2}, \sqrt{(1-\sigma)^2 + (1-\tau)^2} \right\}$$

setzen, das ist der kleinste (euklidische) Abstand des zu $(e^{2\pi i\sigma}, e^{2\pi i\tau})$ gehörenden „Parameterpunktes“ (σ, τ) in $[0, 1]^2$ zu $(0, 0)$, dem Neutralelement der komponentenweise Addition modulo 1, die $[0, 1]^2$ zu einer Gruppe und $E : [0, 1]^2 \rightarrow G$ zu einem Gruppenhomomorphismus macht. Dass l eine Längenfunktion definiert, ist einfach zu überprüfen, wenn auch bei Eigenschaft (iii) aufwändig, da man einige Fälle zu unterscheiden hat: Man untersucht $\sigma \in [0, \frac{1}{2}[$ bzw. $\{\frac{1}{2}\}$ und $\tau \in [0, \frac{1}{2}[$, $\{\frac{1}{2}\}$ bzw. $]\frac{1}{2}, 1[$ und stellt dann Symmetrieüberlegungen an. So erhalten wir (bis auf eine Konstante) die geodätische Metrik auf dem Torus als die von l induzierte Metrik ρ auf G .

Definieren wir die zu dieser Wirkung von α von G auf A_ϑ und dieser Längenfunktion l gehörende $*$ -Unteralgebra \mathcal{A}_ϑ von A_ϑ mit Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_\vartheta}$ gemäß (7), so erhalten wir für $f \in \mathcal{A}_\vartheta = C^*(xU_q, yV_q) \subset C(G, M_q(\mathbb{C}))$

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{A}_\vartheta} &= \sup_{\substack{g \in G \\ g \neq (1,1)}} \frac{\|\alpha_g(f) - f\|_{\mathcal{A}_\vartheta}}{l(g)} = \sup_{\substack{g \in G \\ g \neq (1,1)}} \frac{\|\alpha_g(f) - f\|_\infty}{l(g)} \\ &= \sup_{\substack{g \in G \\ g \neq (1,1)}} \sup_{h \in G} \frac{\|\alpha_g(f)(h) - f(h)\|_{M_q(\mathbb{C})}}{l(g)} = \sup_{\substack{g \in G \\ g \neq (1,1)}} \sup_{h \in G} \frac{\|f(gh) - f(h)\|_{M_q(\mathbb{C})}}{l(g)} \\ &= \sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|_{M_q(\mathbb{C})}}{l(xy^{-1})} = \sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|_{M_q(\mathbb{C})}}{\rho(x, y)}, \end{aligned}$$

das heißt, die Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_\vartheta}$ besitzt tatsächlich genau die Form der üblichen Lipschitz-Halbnorm für stetige Funktionen, nur dass die hier betrachteten stetigen Funktionen eben matrixwertig sind. Die Einschränkung von $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_\vartheta}$ auf Funktionen im Zentrum Z_ϑ beschreibt über Formel (4) auf Seite 7 (bis auf eine Konstante) genau die geodätische Metrik auf dem Torus.

Es sei zum Schluss noch erwähnt, dass aufgrund der Kommutativität von G wegen

$$\begin{aligned} \|\alpha_h(f)\|_{\mathcal{A}_\vartheta} &= \sup_{\substack{g \in G \\ g \neq (1,1)}} \frac{\|\alpha_g(\alpha_h(f)) - \alpha_h(f)\|_{\mathcal{A}_\vartheta}}{l(g)} = \sup_{\substack{g \in G \\ g \neq (1,1)}} \frac{\|\alpha_h(\alpha_{h^{-1}gh}(f) - f)\|_{\mathcal{A}_\vartheta}}{l(g)} \\ &= \sup_{\substack{g \in G \\ g \neq (1,1)}} \frac{\|\alpha_h(\alpha_g(f) - f)\|_{\mathcal{A}_\vartheta}}{l(hgh^{-1})} = \sup_{\substack{g \in G \\ g \neq (1,1)}} \frac{\|\alpha_g(f) - f\|_{\mathcal{A}_\vartheta}}{l(hgh^{-1})} \\ &= \sup_{\substack{g \in G \\ g \neq (1,1)}} \frac{\|\alpha_g(f) - f\|_{\mathcal{A}_\vartheta}}{l(g)} = \|f\|_{\mathcal{A}_\vartheta} \end{aligned}$$

die Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_\vartheta}$ und damit \mathcal{A}_ϑ α -invariant sind.

1.9. BEISPIEL. Ein weiteres Beispiel für einen kompakten quantenmetrischen Raum ergibt sich aus Rieffels Artikel [57], wo eine Lip-Halbnorm für die getwistete Gruppen- C^* -Algebra $C^*(G, \mathbf{c})$ für einen 2-Kozykel \mathbf{c} und $G = \mathbb{Z}^d$ konstruiert wird. Bevor wir auf die spezielle Situation dort eingehen, treffen wir einige Vorbereitungen, indem wir verschiedene Begriffe einführen und klären.

Ist G eine (multiplikativ geschriebene) lokalkompakte Gruppe mit Neutralelement $\mathbf{1}_G$, so existiert für sie ein (bis auf einen Faktor $\alpha > 0$ eindeutig bestimmtes) linksinvariantes Radon-Maß μ_G , das so genannte **Haar-Maß**. Hier bedeutet **Linksinvarianz** $\mu_G(xH) = \mu_G(H)$ für alle $x \in G$ und alle Borel-Mengen $H \subset G$. Das Haar-Maß ist in der Regel nicht rechtsinvariant, jedoch existiert ein stetiger Homomorphismus $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\mu_G(Hx) = \Delta(x)\mu_G(H)$, welcher **modulare Funktion** genannt wird. Definieren wir für $f, g \in L^1(G, \mu_G)$ eine Multiplikation, die **Konvolution**, und eine Involution durch

$$\begin{aligned} f * g(x) &:= \int_G f(y)g(y^{-1}x) \, d\mu_G(y) = \int_G f(xy)g(y^{-1}) \, d\mu_G(y), \\ f^*(x) &:= \Delta(x)^{-1} \overline{f(x^{-1})}, \end{aligned}$$

so wird $L^1(G, \mu_G)$ hierdurch zu einer Banach-Algebra mit isometrischer Involution. Bezeichnen wir nun mit $M(G)$ den Banachraum aller beschränkten komplexen Radon-Maße auf G , so können wir diesen Raum mit dem Dualraum von $C_0(G)$ identifizieren und $L^1(G, \mu_G)$ als abgeschlossenes $*$ -invariantes Ideal der bezüglich des Haar-Maßes absolutstetigen Maße in $M(G)$ auffassen, vergleiche [49] (7.1.2). Die **universelle Darstellung** (π_u, \mathcal{H}_u) von $L^1(G, \mu_G)$ ist die direkte Summe je eines Vertreters der Restklassen aller nicht-degenerierten Darstellungen von $L^1(G, \mu_G)$ bezüglich unitärer Äquivalenz. Dabei heißt eine Darstellung (π, \mathcal{H}) von $L^1(G, \mu_G)$ **nicht-degeneriert**, wenn $\pi(L^1(G, \mu_G))\mathcal{H}$ dicht im Hilbertraum \mathcal{H} liegt. Die **Gruppen- C^* -Algebra** $C^*(G)$ erhalten wir als Norm-Abschluss von $\pi_u(L^1(G, \mu_G))$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_u)$.

Ein **2-Kozykel** ist eine Borel-Funktion $\mathbf{c} : G \times G \rightarrow S^1$, welche die Bedingungen (i) $\mathbf{c}(\mathbf{1}_G, y) = 1 = \mathbf{c}(x, \mathbf{1}_G)$ und (ii) $\mathbf{c}(xy, z)\mathbf{c}(x, y) = \mathbf{c}(x, yz)\mathbf{c}(y, z)$ für $x, y, z \in G$

erfüllt. Definieren wir nun auf $L^1(G, \mu_G)$ Konvolution und Involution gemäß

$$f * g(x) := \int_G f(y)g(y^{-1}x)\mathfrak{c}(y, y^{-1}x) \, d\mu_G(y),$$

$$f^*(x) := \Delta(x)^{-1}\overline{f(x^{-1})\mathfrak{c}(x, x^{-1})},$$

und bezeichnen wir die dadurch entstehende Banach-Algebra mit $L^1(G, \mathfrak{c})$, so erhalten wir die **getwistete Gruppen-C*-Algebra** (engl. „twisted group C*-algebra“) $C^*(G, \mathfrak{c})$ als Norm-Abschluss von $\pi_u(L^1(G, \mathfrak{c}))$ bezüglich der universellen Darstellung von $L^1(G, \mathfrak{c})$. Statt von $C_c(G)$ mit diesen Verknüpfungen aus, erhalten wir $C_c(G, \mathfrak{c})$ als dichte *-Unteralgebra von $C^*(G, \mathfrak{c})$.

Ist nun G eine diskrete unendliche Gruppe, so können wir μ_G normieren, indem wir $\mu_G(\{\mathbf{1}_G\}) = 1$ beziehungsweise aufgrund der Linksinvarianz $\mu_G(\{x\}) = 1$ und $\Delta(x) = 1$ für alle $x \in G$ setzen. Das Integral bei der Definition der Konvolution geht außerdem in eine Summe über.

Sei nun l eine Längenfunktion auf G (vergleiche Beispiel 1.8). Mit M_l bezeichnen wir den (in der Regel unbeschränkten) Operator der punktweisen Multiplikation mit l auf dem Hilbertraum $\mathcal{H} := L^2(G, \mu_G)$ und mit π die linksreguläre Darstellung (mit der Konvolution als Multiplikation) auf \mathcal{H} , das heißt

$$M_l : L^2(G, \mu_G) \rightarrow L^2(G, \mu_G), \quad f \mapsto M_l(f) \quad \text{mit} \quad M_l(f)(x) := l(x)f(x),$$

$$\pi : C_c(G, \mathfrak{c}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(G, \mu_G)), \quad f \mapsto \pi_f \quad \text{mit} \quad \pi_f(g) := f * g.$$

Wir können π sogar als Abbildung $\pi : M(G) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(G, \mu_G))$, $\mu \mapsto \pi_\mu$ mit $\pi_\mu(g)(x) := \int_G g(y^{-1}x) \, d\mu(y)$ auffassen. Die Fortsetzung von π auf $C^*(G, \mathfrak{c})$ bezeichnen wir ebenfalls mit π .

Wir betrachten nun bis zum Ende dieses Beispiels den Fall $G = \mathbb{Z}^d$ für eine natürliche Zahl d , es sei denn, wir sagen explizit etwas anderes. Ein Beispiel für eine Längenfunktion, welche für unsere Zwecke von Bedeutung ist, erhalten wir durch die **Wort-Längenfunktion**: Sei H eine erzeugende Menge für \mathbb{Z}^d , das heißt, H ist Teilmenge von \mathbb{Z}^d und für jedes $x \in \mathbb{Z}^d$ existiert $(x_h)_{h \in H} \in \mathbb{Z}^H$ mit $x = \sum_{h \in H} x_h h$, so dass alle bis auf endlich viele x_h den Wert Null annehmen. Dann ist die Wort-Längenfunktion bezüglich H durch $l(x) := \inf \{ \sum_{h \in H} |x_h| \mid x = \sum_{h \in H} x_h h \}$ gegeben. Den entscheidenden Satz, welcher uns zu einem weiteren Beispiel für einen kompakten quantenmetrischen Raum führt, können wir nun so formulieren:

1.10. SATZ ([57] (0.1)). *Sei l eine Längenfunktion auf $G = \mathbb{Z}^d$, welche entweder die Wort-Längenfunktion für eine endliche erzeugende Teilmenge von G ist oder die Einschränkung einer Norm von \mathbb{R}^d auf G . Seien weiter \mathfrak{c} ein 2-Kozykel auf G und π die linksreguläre Darstellung von $A := C^*(G, \mathfrak{c})$ auf $\mathcal{H} = L^2(G, \mu_G)$. Dann erfüllt die auf $\mathcal{A} := C_c(G, \mathfrak{c})$ definierte Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$, gegeben durch $\|f\|_{\mathcal{A}} := \|[M_l, \pi_f]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$, die Eigenschaft der totalen Beschränktheit.*

Wegen $C_c(G, \mathfrak{c}) \subset \{f \in C^*(G, \mathfrak{c}) \mid [M_l, \pi_f] \text{ ist beschränkt}\}$ ist die eben angegebene Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ wohldefiniert. Der in [57] durchgeführte Beweis dieses Satzes ist ziemlich lang und kompliziert, und er greift unter anderem auf Connes' Konzept der Kosphären-Algebra ([14]) und auf eine von Gromov (siehe [28]) eingeführte Kompaktifizierung lokalkompakter metrischer Räume, die von der für

hyperbolische metrische Räume verschieden ist, zurück.

Wir wenden uns nun den übrigen Eigenschaften zu, die es nachzuweisen gilt, um zu sehen, dass $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = (C^*(G, \mathfrak{c}), C_c(G, \mathfrak{c}), \|[M_l, \pi]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})})$ ein kompakter quantenmetrischer Raum ist, und diskutieren diese kurz. Analoge Rechnungen wie in Beispiel 1.7 zeigen, dass sowohl die Leibniz-Regel als auch die *-Invarianz der Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ gelten, weil diese als Norm eines Kommutators definiert und M_l ein selbstadjungierter Operator ist. Die Unterhalbstetigkeit ergibt sich aus Proposition 3.7 in [56]: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{A} , welche bezüglich der Norm in A gegen $a \in A$ konvergiert und für die $\|a_n\|_{\mathcal{A}} \leq k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ für ein $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt. Der (auf $\mathcal{H} = L^2(G, \mu_G)$ unbeschränkte) Operator M_l ist auf ganz $C_c(G)$ und damit dicht definiert. Wir können den Kommutator $[M_l, \pi_f]$ wegen

$$\langle [M_l, \pi_f]\xi, \eta \rangle = \langle (M_l \pi_f - \pi_f M_l)\xi, \eta \rangle = \langle \pi_f \xi, M_l \eta \rangle - \langle M_l \xi, \pi_f^* \eta \rangle$$

für $f \in C_c(G, \mathfrak{c})$ und $\xi, \eta \in \text{Def}(M_l) = \{g \in L^2(G, \mu_G) \mid \|M_l g\|_{\mathcal{H}} < \infty\}$ als Sesquilinearform auf $\text{Def}(M_l)$ auffassen, vergleiche [13] und [66] (S. 275). Diese besitzt wegen ihrer Beschränktheit und der dichten Definiertheit von M_l eine Fortsetzung auf ganz \mathcal{H} . Den zugehörigen beschränkten Operator bezeichnen wir wieder mit $[M_l, \pi_f]$. Dann gilt für $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ mit $\|\xi\|_{\mathcal{H}} = \|\eta\|_{\mathcal{H}} = 1$

$$\langle [M_l, \pi_a]\xi, \eta \rangle = \langle \pi_a \xi, M_l \eta \rangle - \langle M_l \xi, \pi_a^* \eta \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle [M_l, \pi_{a_n}]\xi, \eta \rangle,$$

aber auch $|\langle [M_l, \pi_{a_n}]\xi, \eta \rangle| \leq k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und deswegen $\|[M_l, \pi_a]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq k$. Aus der Unterhalbstetigkeit folgt die Vollständigkeit von $(\mathcal{A}, \max(\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}))$ gemäß der Bemerkung 1.2.

Es bleibt $\text{Ker}(\|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = \mathbb{C}\mathbf{1}_A$ zu zeigen. Die Eins in der C^* -Algebra $A = C^*(G, \mathfrak{c})$ ist das Dirac-Maß $\delta_{\mathbf{1}_G}$ im Neutralelement $\mathbf{1}_G = \mathbf{0}_{\mathbb{Z}^d}$. Hier fassen wir die Linkstranslation $\delta_{\mathbf{1}_G}$ (siehe Beispiel 1.8) als charakteristische Funktion im Punkte $\mathbf{1}_G$ auf, ganz im Sinne der eingangs erwähnten Identifikation von Elementen in $L^1(G, \mu_G)$ und den entsprechenden Elementen in der Menge $M(G)$ von Maßen. Für $x \in G$ berechnet man (sogar für allgemeines G)

$$\begin{aligned} \|[M_l, \pi_{\delta_x}]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 &= \sup_{\substack{g \in \mathcal{H} \\ \|g\|_{\mathcal{H}} \leq 1}} \|M_l \pi_{\delta_x}(g) - \pi_{\delta_x} M_l(g)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \sup_{\substack{g \in \mathcal{H} \\ \|g\|_{\mathcal{H}} \leq 1}} \int_G |l(y) - l(x^{-1}y)|^2 |g(x^{-1}y)\mathfrak{c}(x, x^{-1}y)|^2 d\mu_G(y) \\ &= \sup_{\substack{g \in \mathcal{H} \\ \|g\|_{\mathcal{H}} \leq 1}} \int_G |l(y) - l(x^{-1}y)|^2 |g(x^{-1}y)|^2 d\mu_G(y) = l(x)^2, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit unmittelbar aus $l(x) = \sup_{y \in G} |l(y) - l(x^{-1}y)|$ folgt, was mit Hilfe der Eigenschaften einer Längenfunktion, speziell der Dreiecksungleichung, leicht gezeigt werden kann. Weiter erhalten wir für eine endliche Linearkombination $\nu = \sum_{i=1}^n s_i \delta_{x_i}$ von Dirac-Maßen und die über das Kronecker-Symbol

definierte Funktion $g_0 = \delta_{x, \mathbf{1}_G}$

$$\begin{aligned} \|[M_l, \pi_{\delta_\nu}]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 &= \sup_{\substack{g \in \mathcal{H} \\ \|g\|_{\mathcal{H}} \leq 1}} \int_G \left| \sum_{i=1}^n s_i (l(y) - l(x_i^{-1}y)) g(x_i^{-1}y) \right|^2 d\mu_G(y) \\ &\geq \int_G \left| \sum_{i=1}^n s_i (l(y) - l(x_i^{-1}y)) g_0(x_i^{-1}y) \right|^2 d\mu_G(y) \\ &= \sum_{i=1}^n |s_i (l(x_i) - l(\mathbf{1}_G))|^2 = \sum_{i=1}^n |s_i l(x_i)|^2. \end{aligned}$$

Wir ersehen daraus $\|[M_l, \pi_{\delta_\nu}]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = 0$ genau dann, wenn $n = 1$ und $x_1 = \mathbf{1}_G = \mathbf{0}_{\mathbb{Z}^d}$ für beliebiges $s_1 \in \mathbb{C}$. Damit erhalten wir $\text{Ker}(\|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = \mathbb{C}\mathbf{1}_A$ (vergleiche auch [57] (Proposition 2.3)). Also ist $(C^*(G, \mathfrak{c}), C_c(G, \mathfrak{c}), \|[M_l, \pi_{\delta_\nu}]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})})$ ein kompakter quantenmetrischer Raum.

Bei einem Blick in die Literatur finden sich noch andere Darstellungsmöglichkeiten für die getwistete Gruppen- C^* -Algebra $C^*(G, \mathfrak{c})$, auf die Rieffel allerdings nicht hinweist. Durch die folgenden Bemerkungen wollen wir den Zusammenhang zu einigen Artikeln, die weitere Konstruktionsmöglichkeiten für $C^*(G, \mathfrak{c})$ beschreiben, herstellen. In Appendix 1 von [47] findet sich ein Überblick über die meisten äquivalenten Formulierungen für $C^*(G, \mathfrak{c})$, welchem wir nun folgen wollen.

Eine Abbildung $f : X \rightarrow B$ von einem lokalkompakten Raum X mit abzählbarer Basis in eine separable C^* -Algebra B heißt **Borel-messbar**, wenn $f^{-1}(C)$ für jede offene Menge C von B eine Borel-messbare Menge in X ist, beziehungsweise **strikt Borel-messbar**, wenn die Abbildungen $x \mapsto f(x)b$ und $x \mapsto bf(x)$ für jedes $b \in B$ Borel-messbar sind. Weiter heißt die Borel-messbare Funktion $f : X \rightarrow B$ (bezüglich eines Borel-Maßes auf X) **Bochner-integrierbar**, falls $x \mapsto \|f(x)\|_B$ im herkömmlichen Sinne integrierbar ist. Die Menge der Bochner-integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $L^1(X, B)$. Für $B = \mathbb{C}$ ist also $L^1(X, B) = L^1(X)$ einfach die Menge der integrierbaren Funktionen auf G .

Ein **getwistetes dynamisches System** $(A, G, \alpha, \mathfrak{c})$ wird in [46] definiert als Quadrupel, bestehend aus einer separablen C^* -Algebra A , einer lokalkompakten Gruppe G mit abzählbarer Basis, einer Abbildung $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ in die Gruppe der $*$ -Automorphismen von A und einer strikt Borel-messbaren Abbildung $\mathfrak{c} : G \times G \rightarrow UM(A)$ in die Menge der unitären Elemente in der Multiplier-Algebra $M(A)$ von A , so dass zusätzlich die Abbildung $\alpha(a) : G \rightarrow A$, $x \mapsto \alpha_x(a)$ für jedes $a \in A$ Borel-messbar ist und (a) $\alpha_{\mathbf{1}_G} = \text{id}_A$, (b) $\alpha_x \circ \alpha_y(a) = \mathfrak{c}(x, y)\alpha_{xy}(a)\mathfrak{c}(x, y)^*$, (c) $\mathfrak{c}(\mathbf{1}_G, x) = 1 = \mathfrak{c}(y, \mathbf{1}_G)$ und (d) $\mathfrak{c}(xy, z)\mathfrak{c}(x, y) = \alpha_x(\mathfrak{c}(y, z))\mathfrak{c}(x, yz)$ für $x, y, z \in G$ und $a \in A$ gelten. Hierbei bezeichnen wir die von α auf $M(A)$ beziehungsweise $UM(A)$ induzierte Wirkung von G ebenfalls mit α . Diese Fortsetzung existiert, vergleiche etwa [49] (3.12.10). Die Eigenschaften (c) und (d) ersetzen die oben angegebenen 2-Kozykel-Eigenschaften (i) und (ii), und (b) gilt anstelle der Homomorphie-Eigenschaft von α in einem gewöhnlichen C^* -dynamischen System, vergleiche auch Beispiel 3.12. Übrigens wurden die Twists (α, \mathfrak{c}) mit den Eigenschaften (a) bis (d) erstmals von Busby und Smith eingeführt, vergleiche

[8], um kovariante Darstellungen des Systems $(A, G, \alpha, \mathbf{c})$ zu untersuchen.

Für ein getwistetes dynamisches System $(A, G, \alpha, \mathbf{c})$ ist eine **kovariante Darstellung** durch ein Paar (ϖ, U) mit einer nicht-degenerierten Darstellung $\varpi : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auf einem Hilbertraum \mathcal{H} und einer Borel-messbaren Abbildung U von G in die Menge der unitären Elemente von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ gegeben, so dass $U_x U_y = \varpi(\mathbf{c}(x, y)) U_{xy}$ und $\varpi(\alpha_x(a)) = U_x \varpi(a) U_x^*$ für $x, y \in G$ und $a \in A$ erfüllt sind. Wieder bezeichnen wir die gemäß [49] (3.7.7) eindeutig existierende Fortsetzung von ϖ von A auf $UM(A)$ mit demselben Symbol. Die Borel-Messbarkeit von U kann dabei so interpretiert werden, dass $G \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \langle U_x \xi, \eta \rangle_{\mathcal{H}}$ Borel-messbar für alle $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ ist. Ist A unital und $\mathbf{c}(x, y) = \mathbf{1}_A$ für alle $x, y \in G$, so handelt es sich bei (ϖ, U) um eine herkömmliche kovariante Darstellung eines C^* -dynamischen Systems.

Wir benötigen nun noch die **strikte Konvergenz** auf der Multiplier-Algebra $M(A)$ einer C^* -Algebra A : Ein Netz $(m_\lambda)_\lambda \subset M(A)$ heißt strikt konvergent gegen $m \in M(A)$, wenn $\lim_\lambda a m_\lambda = a m$, $\lim_\lambda m_\lambda a = m a$ für alle $a \in A$ gilt. Statten wir $UM(A)$ mit der strikten Topologie aus, so wird $UM(A)$ dadurch zu einer topologischen Gruppe, sogar zu einem Polnischen Raum, siehe [54] (Abschnitt 3) und [46] (Bemerkung 3.3).

Damit definieren wir das zu einem getwisteten dynamischen System $(A, G, \alpha, \mathbf{c})$ gehörende **getwistete verschränkte Produkt** $A \times_{\alpha, \mathbf{c}} G$ als eine C^* -Algebra, welche wir ebenfalls mit $A \times_{\alpha, \mathbf{c}} G$ bezeichnen, zusammen mit einem nicht-degenerierten Homomorphismus $i_A : A \rightarrow M(A \times_{\alpha, \mathbf{c}} G)$ und einer strikt Borel-messbaren Abbildung $i_G : G \rightarrow UM(A \times_{\alpha, \mathbf{c}} G)$, so dass

(1) (i_A, i_G) kovariant in dem Sinne ist, dass für $a \in A, x, y \in G$

$$i_A(\alpha_x(a)) = i_G(x) i_A(a) i_G(x)^* \quad \text{und} \quad i_G(x) i_G(y) = i_A(\mathbf{c}(x, y)) i_G(xy)$$

gilt,

(2) es für jede kovariante Darstellung (ϖ, U) von $(A, G, \alpha, \mathbf{c})$ auf einem Hilbertraum \mathcal{H} eine nicht-degenerierte Darstellung $\varpi \times U$ von $A \times_{\alpha, \mathbf{c}} G$ auf \mathcal{H} gibt, die so genannte **integrierte Form** von (ϖ, U) , mit $\varpi = (\varpi \times U) \circ i_A$ und $U = (\varpi \times U) \circ i_G$,

(3) die Menge $\left\{ \int_G i_A(f(x)) i_G(x) d\mu_G(x) \mid f \in L^1(G, A) \right\}$ der mit Hilfe der strikten Konvergenz definierten Bochner-Integrale $\int_G i_A(f(x)) i_G(x) d\mu_G(x)$ ein in $A \times_{\alpha, \mathbf{c}} G$ dichter Unterraum ist.

Bis auf Isomorphie ist $A \times_{\alpha, \mathbf{c}} G$ eindeutig bestimmt, vergleiche [46] (2.7). Laut [46] (Appendix 1) gilt nun bei Betrachtung des getwisteten dynamischen Systems $(\mathbb{C}, G, \text{id}_A, \mathbf{c})$

$$C^*(G, \mathbf{c}) \cong \mathbb{C} \times_{\text{id}_A, \mathbf{c}} G.$$

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit ergibt sich mittels [27], vergleiche auch [46] (Abschnitt 5) und [47] (Appendix 1): Ein **getwistetes kovariantes System** $(H, A, \beta, \mathcal{T})$ besteht aus einer lokalkompakten Gruppe H mit abzählbarer Basis, einer C^* -Algebra A und einer Wirkung $\beta : N \rightarrow \text{Aut}(A)$ für einen Normalteiler N von H , in Zeichen $N \trianglelefteq H$, und einem strikt stetigen Homomorphismus $\mathcal{T} : N \rightarrow UM(A)$ mit (I) $\beta_n(a) = \mathcal{T}(n) a \mathcal{T}(n)^{-1}$ und (II) $\beta_x(\mathcal{T}(n)) = \mathcal{T}(x n x^{-1})$ für $n \in N, x \in H$ und $a \in A$; (II) bedeutet also eine Fortsetzung des Automorphismus β . Die **getwistete Kovarianz-Algebra** $C^*(H, A, \mathcal{T})$ ist nun die

ein­hüllende C^* -Algebra der normierten $*$ -Algebra $C_c(H, A, \mathcal{T})$ stetiger Funktionen $f : H \rightarrow A$ mit $f(nx) = f(x)\mathcal{T}(n)^{-1}$ für $x \in H, n \in N$, so dass die Abbildung $H/N \rightarrow \mathbb{R}, xN \mapsto \|f(x)\|_A$ kompakten Träger in H/N besitzt. Eine andere Darstellungsmöglichkeit von $C^*(H, A, \mathcal{T})$ findet sich in [46] (Abschnitt 5) als Quotient der gewöhnlichen Transformationsgruppen- C^* -Algebra $A \times_\beta H$, also des gewöhnlichen verschränkten Produktes $A \times_\beta H = A \times_{\beta, \mathbf{1}_{H \times H}} H$, modulo dem Ideal

$$I_{\mathcal{T}} := \bigcap \{ \text{Ker}(\varpi \times U) \mid (\varpi, U) \text{ ist kovariante Darstellung von } (A, H, \beta, \mathbf{1}_{H \times H}), \\ U|_N = \varpi \circ \mathcal{T} \}.$$

Ist nun $s : H/N \rightarrow H$ ein Borel-messbarer Schnitt, das bedeutet $s(\mathbf{1}_{H/N}) = \mathbf{1}_H$ und $Q \circ s = \text{id}_{H/N}$ für die Quotientenabbildung $Q : H \rightarrow H/N$, können wir $G := H/N, \alpha : H/N \rightarrow A, xN \mapsto \beta_{s(x)}$ und $\mathbf{c} : G \times G \rightarrow UM(A), (xN, yN) \mapsto \mathcal{T}(s(x)s(y)s(xy)^{-1})$ setzen, und dann gilt

$$(A \times_\beta H)/I_{\mathcal{T}} \cong C^*(H, A, \mathcal{T}) \cong A \times_{\alpha, \mathbf{c}} G.$$

Insbesondere konstruiert man durch die eben getroffenen Festlegungen aus einem getwisteten kovarianten System $(H, A, \beta, \mathcal{T})$ ein getwistetes dynamisches System $(A, G, \alpha, \mathbf{c})$. Natürlich können wir umgekehrt aus einem getwisteten dynamischen System $(A, G, \alpha, \mathbf{c})$ auch ein getwistetes kovariantes System $(H, A, \beta, \mathcal{T})$ gewinnen, indem wir die Menge $H := UM(A) \times G$ mit der Multiplikation $(u, x)(v, y) := (u\alpha_x(v)\mathbf{c}(x, y), xy)$ ausstatten, welche H zu einer lokalkompakten Gruppe mit abzählbarer Basis macht, und $\beta_{(u, x)}(a) := u\alpha_x(a)u^*$ für $a \in A$ beziehungsweise $\mathcal{T} : N = UM(A) \times \{\mathbf{1}_G\} \rightarrow UM(A), (u, \mathbf{1}_G) \mapsto u$ setzen, siehe [54] ((1.5) und 3).

Wir definieren im Rahmen unserer konkreten Situation eines 2-Kozykels \mathbf{c} auf $G = \mathbb{Z}^d$ und $A = \mathbb{C}$, $\alpha = \text{id}_{\mathbb{C}}$ nun $H := S^1 \times G$, stattdessen die Menge H mit der Multiplikation $(n_1, x_1)(n_2, x_2) := (n_1 n_2 \mathbf{c}(x_1, x_2), x_1 x_2)$ aus und benutzen $N := S^1 \times \{\mathbf{1}_G\}$ als Normalteiler von H . Für $\mathcal{T} : N \rightarrow U(\mathbb{C}) = S^1, (z, \mathbf{1}_G) \mapsto z$ erhalten wir

$$C^*(G, \mathbf{c}) \cong \mathbb{C} \times_{\text{id}_{\mathbb{C}}, \mathbf{c}} G \cong C^*(H, \mathbb{C}, \mathcal{T}) \cong (\mathbb{C} \times_{\text{id}_{\mathbb{C}}} H)/I_{\mathcal{T}} = C^*(H)/I_{\mathcal{T}},$$

das bedeutet, die getwistete Gruppen- C^* -Algebra $C^*(G, \mathbf{c})$ ist als Quotient einer gewöhnlichen Gruppen- C^* -Algebra darstellbar.

2. W^* -Derivationen und Beispiele

In diesem Abschnitt stellen wir ein weiteres Konzept vor, durch das metrische Räume ähnlich wie mit Hilfe von Lipschitz-Algebren beziehungsweise kompakten quantenmetrischen Räumen funktionalanalytisch beschrieben werden können. Zunächst führen wir den auf Weaver zurückgehenden Begriff der W^* -Derivation ein und geben Beispiele an.

1.11. DEFINITION (vgl. [67], [66], [24]). *Seien \mathcal{M}, \mathcal{N} zwei von Neumann-Algebren.*

- (1) *Eine bezüglich der Schwach*-Topologie abgeschlossene unitale $*$ -Unteralgebra E von \mathcal{N} heißt **W^* - \mathcal{M} -Bimodul**, wenn zwei unitale schwach*-stetige $*$ -Homomorphismen $\pi_l, \pi_r : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ existieren, so dass $\pi_l(a)e, e\pi_r(a) \in E$ für*

alle $a \in \mathcal{M}$ und alle $e \in E$ gilt. Das heißt also, es sollen Rechts- beziehungsweise Links-Wirkung von \mathcal{M} auf E existieren, die schwach*-stetig sind und $\|\pi_l(a)e\pi_r(b)\|_{\mathcal{N}} \leq \|a\|_{\mathcal{M}}\|e\|_{\mathcal{N}}\|b\|_{\mathcal{M}}$ für $a, b \in \mathcal{M}$, $e \in E$ erfüllen.

- (2) Eine **W*-Derivation** $\delta = (\delta, \text{Def}(\delta))$ ist eine (unbeschränkte) lineare Abbildung $\delta : \mathcal{M} \supseteq \text{Def}(\delta) \rightarrow E$ von einer von Neumann-Algebra \mathcal{M} in ein W^* - \mathcal{M} -Bimodul E , welche

$$\delta(a)^* = \delta(a^*), \quad \delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b \quad \forall a, b \in \text{Def}(\delta)$$

erfüllt, so dass $\text{Def}(\delta)$ eine unitale und bezüglich der Schwach*-Topologie dicht in \mathcal{M} liegende *-Unteralgebra von \mathcal{M} ist, und der Graph von δ schwach*-abgeschlossen in $\mathcal{M} \oplus E$ ist. Wir statten $\text{Def}(\delta)$ mit der zur Graphennorm äquivalenten Norm $\|\cdot\|_{\text{Def}(\delta)} = \max(\|\cdot\|_{\mathcal{M}}, \|\delta\cdot\|_{\mathcal{N}})$ aus.

Ein Tripel (\mathcal{M}, E, δ) , genauer $(\mathcal{M}, E \subset \mathcal{N}, (\delta, \text{Def}(\delta)))$, heißt **W*-Derivation**. Sind dabei \mathcal{M} und \mathcal{N} kommutative von Neumann-Algebren, so sagen wir zu (\mathcal{M}, E, δ) **kommutative W*-Derivation**.

Die Bezeichnung der Derivation δ und des ganzen Tupels $(\mathcal{M}, E \subset \mathcal{N}, (\delta, \text{Def}(\delta)))$ aus dieser Definition mit demselben Begriff ist ein erster deutlicher Hinweis darauf, dass die Derivation die eigentliche Information über die Metrik enthält.

1.12. BEMERKUNG.

- (1) W^* -Algebren stellen wir uns stets als von Neumann-Algebren vor; genauer sind laut Definition **W*-Algebren** diejenigen C^* -Algebren, welche einen Banachraum als Prädual (siehe unten) besitzen, und somit entsprechen von Neumann-Algebren den treuen Darstellungen von W^* -Algebren, denn jede von Neumann-Algebra besitzt einen Prädual, vergleiche [19] (I.3.3, Theorem 1), ist also eine W^* -Algebra. Umgekehrt existiert nach [60] (1.16.7) zu jeder W^* -Algebra \mathcal{M} eine **treue** Darstellung (π, \mathcal{H}) , (das heißt $\pi(a) = \mathbf{0} \Leftrightarrow a = \mathbf{0}$), so dass \mathcal{M} *-isomorph zu einer schwach-abgeschlossenen *-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist. Daher ist es möglich, in Definition 1.11 von der Schwach*-Topologie zu sprechen (statt beispielsweise von der ultraschwachen Topologie). Besitzt eine von Neumann-Algebra \mathcal{M} auf einem Hilbertraum \mathcal{H} als **Prädual** \mathcal{M}_* , das heißt, ist \mathcal{M}_* ein Banachraum mit $(\mathcal{M}_*)^* = \mathcal{M}$, so stimmen die Schwach*-Topologie auf \mathcal{M} (aufgefasst als Dualraum von \mathcal{M}_*) und die ultraschwache Topologie überein, siehe etwa [50] (4.6.17). Dabei ist die **ultraschwache Topologie** auf \mathcal{M} die von der Familie von Halbnormen $a \mapsto |\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle a\xi_n, \eta_n \rangle_{\mathcal{H}}|$ für $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\eta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|\xi_n\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty$ und $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|\eta_n\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty$ erzeugte Topologie. Die Eindeutigkeit des Präduals einer von Neumann-Algebra wurde von Sakai gezeigt, siehe etwa [60] (1.13.3).
- (2) Die in kommutativen W^* -Derivationen auftauchenden (kommutativen) von Neumann-Algebren besitzen stets eine gewisse Form. Laut [64] (III.1.18) sind für eine C^* -Algebra A nämlich die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) A besitzt eine treue Darstellung (π, \mathcal{H}) , so dass $\pi(A)$ eine kommutative von Neumann-Algebra ist.

(b) Es existiert ein lokalkompakter (Hausdorff-)Raum mit positivem Radon-Maß μ , so dass A isomorph zur C^* -Algebra $L^\infty(X, \mu)$ aller μ -wesentlich beschränkten Funktionen auf X ist.

Kommutative W^* -Derivationen sind also Tripel der Bauart $(L^\infty(X, \mu), E \subset L^\infty(Y, \nu), (\delta, \text{Def}(\delta)))$.

Wir geben nun Beispiele für W^* -Derivationen an. Zunächst beschäftigen wir uns mit einem kommutativen Fall. Dabei sehen wir, wie ein kompakter metrischer Raum (K, ρ) durch eine W^* -Derivation kodiert wird, analog zur Beschreibung mit Hilfe eines kompakten quantenmetrischen Raumes in Satz 1.3. Hierfür benötigen wir aber noch eine Derivation, welche uns in der gesamten Arbeit immer wieder begegnen wird und deren Zusammenhang zur Lipschitzstetigkeit von Funktionen auf K offensichtlich ist.

1.13. DEFINITION (vergleiche [17]). Sei (K, ρ) ein kompakter metrischer Raum. Wir definieren

$$\tilde{K} := K \times K \setminus \{(x, x) \mid x \in K\}.$$

Die Abbildung

$$d : Lip(K) \rightarrow \ell^\infty(\tilde{K})$$

$$f \mapsto df \quad \text{mit} \quad df(x, y) := \frac{f(x) - f(y)}{\rho(x, y)}$$

heißt **de Leeuw-Abbildung**. Wir können d als unbeschränkten linearen Operator von $\ell^\infty(K)$ in $\ell^\infty(\tilde{K})$ mit Definitionsbereich $\text{Def}(d) = Lip(K)$ auffassen.

1.14. BEISPIEL. Seien (K, ρ) ein kompakter metrischer Raum und μ das Zählmaß auf K , das heißt $\mu(A) = |A|$ für $A \subset K$. Nach Bemerkung 1.12 (2) sind $L^\infty(K, \mu)$ und $L^\infty(\tilde{K}, \tilde{\mu})$ mit $\tilde{\mu} = (\mu \times \mu)|_{\tilde{K}}$ von Neumann-Algebren, und wir erhalten eine kommutative W^* -Derivation durch das Tripel

$$(\mathcal{M}, E \subset \mathcal{N}, (\delta, \text{Def}(\delta))) = (L^\infty(K, \mu), L^\infty(\tilde{K}, \tilde{\mu}) \subset L^\infty(\tilde{K}, \tilde{\mu}), (d, Lip(K))),$$

wobei d die de Leeuw-Abbildung ist. Als Bimodul-Wirkung benutzen wir die natürliche, das heißt $(\pi_l(f_1) g \pi_r(f_2))(x, y) = f_1(x)g(x, y)f_2(y)$ für $g \in L^\infty(\tilde{K}, \tilde{\mu})$ und $f_1, f_2 \in L^\infty(K, \mu)$. Dass diese Festlegungen tatsächlich eine kommutative W^* -Derivation ergeben, wird ausführlich in [67] gezeigt. Auf dieses kommutative Beispiel werden wir im nun Folgenden in größerer Allgemeinheit noch intensiver eingehen. Es zeigt aber schon an dieser Stelle, dass wir uns häufig auf den Fall $E = \mathcal{N}$ in obiger Definition beschränken können.

1.15. BEISPIEL. Verwandt zu Beispiel 1.14 ist das Folgende (siehe auch [67] (7.1.5)): Wir betrachten auf $K = [0, 1]$ das Lebesgue-Maß $\mu = \lambda^1|_{[0,1]}$ und die gewöhnliche Ableitung δ (im Sinne absolutstetiger Funktionen) als Derivation mit Definitionsbereich $\text{Def}(\delta) = Lip(K)$ (als Teilmenge der Menge der absolutstetigen Funktionen auf K). Wie in Definition 1.11 stattdessen wir $\text{Def}(\delta)$ mit $\max(\|\cdot\|_\infty, \|\delta\cdot\|_\infty) = \max(\|\cdot\|_\infty, Lip(\cdot))$ als Norm aus. Als Bimodul-Wirkung benutzen wir die Identität auf $L^\infty(X)$, das bedeutet $\pi_l = \pi_r = \text{id}_{L^\infty([0,1])}$. Dann ist $(L^\infty([0, 1]), L^\infty([0, 1]) \subset L^\infty([0, 1]), (\delta, Lip([0, 1])))$ eine kommutative W^* -Derivation.

Der Beweis verläuft ähnlich wie für den Fall eines allgemeinen kompakten metrischen Raumes oben; wir geben exemplarisch einen kleinen Eindruck hiervon. Die Schwach*-Abgeschlossenheit des Graphen Γ_δ von δ in $L^\infty([0, 1]) \oplus L^\infty([0, 1])$ beispielsweise benutzt den **Satz von Krein-Šmulian** (siehe etwa [68] (Korollar VIII.3.16)), der besagt, dass ein Unterraum U eines Banachraumes V^* , der selbst Dualraum eines Banachraumes V ist, genau dann schwach*-abgeschlossen ist, wenn der Schnitt von U mit der normabgeschlossenen Einheitskugel von

V^* schwach*-abgeschlossen ist. Daher genügt es, die Schwach*-Abgeschlossenheit von Γ_δ auf beschränkten Netzen nachzuweisen. Ist nun $(f_\lambda, \delta(f_\lambda))_\lambda$ ein gegen $(g, h) \in L^\infty([0, 1]) \oplus L^\infty([0, 1])$ schwach*-konvergentes, bezüglich der Norm $\max(\|\cdot\|_\infty, \|\delta\cdot\|_\infty)$ beschränktes Netz in Γ_δ , so können wir nach dem Hauptsatz $g_\lambda(x) := f_\lambda(x) - f_\lambda(0) = \int_0^x \delta(f_\lambda)(t) d\mu(t)$ und $H(x) := \int_0^x h(t) d\mu(t)$ setzen. Dann ist H absolutstetig, und es gilt

$$|H(x) - g_\lambda(x)| = \left| \int_0^x (h - \delta(f_\lambda))(t) d\mu(t) \right| \leq \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,1]}(t) |h - \delta(f_\lambda)|(t) d\mu(t) \rightarrow 0$$

wegen der Schwach*-Konvergenz von $\delta(f_\lambda)$ gegen h . Damit erhalten wir $f_\lambda(x) - f_\lambda(0) \rightarrow H(x)$ überall punktweise, wegen der gleichzeitigen Schwach*-Konvergenz von f_λ existiert $\alpha := \lim_\lambda f_\lambda(0)$, und H ist sogar lipschitzstetig wegen

$$|H(x) - H(y)| = \lim_\lambda |g_\lambda(x) - g_\lambda(y)| = \lim_\lambda |f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \leq M|x - y|$$

für die von der Beschränktheit des Netzes $(f_\lambda)_\lambda$ bezüglich $\max(\|\cdot\|_\infty, \|\delta\cdot\|_\infty)$ herührenden Konstante M . Wegen der Kompaktheit des Intervalls $[0, 1]$, der von der Schwach*-Konvergenz implizierten punktwisen Konvergenz von $(f_\lambda)_\lambda$ gegen $H + \alpha$ und der gleichmäßigen Beschränktheit von $(\|\delta(f_\lambda)\|_\infty)_\lambda = (Lip(f_\lambda))_\lambda$ folgt schon $H + \alpha = g$, also gilt $g \in \text{Def}(\delta)$ mit $\delta(g) = h$ fast überall, so dass wir $(g, h) \in \Gamma_\delta$ und damit die Abgeschlossenheit von δ bezüglich der Schwach*-Topologie erhalten.

Jetzt betrachten wir Beispiele nicht-kommutativer W^* -Derivationen.

1.16. BEISPIEL. Wir zeigen, dass der Begriff der W^* -Derivation von Weaver eine Verallgemeinerung von Connes' unbeschränkten Fredholm-Moduln ([12]) beziehungsweise Spektralen Tripeln ([14]) ist. Dazu definieren wir:

1.17. DEFINITION ([14]). Ein **Spektrales Tripel** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ besteht aus

- einem Hilbertraum \mathcal{H} ,
- einer $*$ -Unteralgebra \mathcal{A} in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ von beschränkten linearen Operatoren auf \mathcal{H} und
- einem unbeschränkten selbstadjungierten Operator D auf \mathcal{H} , so dass für alle $a \in \mathcal{A}$ der Kommutator $[D, a] := Da - aD$ beschränkt ist und für $\lambda \notin \mathbb{R}$ die Resolvente $(D - \lambda)^{-1}$ kompakt ist.

Die letzte Bedingung sichert, dass das Spektrum von D reell ist und diskret in \mathbb{R} liegt. Über die Eigenwerte λ mit Vielfachheit $m(\lambda)$ im Spektrum $\sigma(D)$ von D ordnet Connes dem Spektralen Tripel eine Dimension zu, und zwar folgt aus $\sum_{\lambda \in \sigma(D)} m(\lambda) |\lambda|^{-d} < \infty$, dass die Dimension des Spektralen Tripels $\leq d$ ist, vergleiche [14] (S. 6199). Ähnlich werden wir in Kapitel 2 vorgehen, siehe Definition 2.4.

Verwandt zur Definition des Spektralen Tripels ist die des unbeschränkten Fredholm-Moduls, bei dem \mathcal{A} durch eine unitale C^* -Algebra A ersetzt wird, welche \mathcal{H} durch eine Darstellung zu einem A -Linksmodul macht und in der die Menge \mathcal{A} von Elementen in A , deren Kommutatoren mit D beschränkt sind, dicht liegt. Weiter wird die Kompaktheit von $(\mathbf{1} + D^2)^{-1}$ statt $(D - \lambda)^{-1}$ gefordert. Connes

benutzt diesen Rahmen, um Riemannsche Mannigfaltigkeiten zu beschreiben. Als Prototyp dient ihm dabei eine kompakte Spin-Mannigfaltigkeit M . Weiter ist A ist die C^* -Algebra $C(M)$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf M , und \mathcal{H} ist der Hilbertraum der L^2 -Spinoren auf M , auf dem A beziehungsweise \mathcal{A} als Menge von Multiplikationsoperatoren wirkt, und D ist der Dirac-Operator, siehe [12].

Aus einem Spektralen Tripel $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ (und damit aus einem unbeschränkten Fredholm-Modul) können wir auf folgende Art eine W^* -Derivation $(\mathcal{M}, E \subset \mathcal{N}, (\delta, \text{Def}(\delta)))$ gewinnen:

Wir nehmen zunächst an, dass $\mathcal{A} = \{a \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid [D, a] \text{ ist beschränkt}\}$. Dabei fassen wir wie Connes in [13] wegen

$$\langle [D, a]\xi, \eta \rangle = \langle (Da - aD)\xi, \eta \rangle = \langle a\xi, D\eta \rangle - \langle D\xi, a^*\eta \rangle$$

für $\xi, \eta \in \text{Def}(D)$ den Kommutator $[D, a]$ als Sesquilinearform auf $\text{Def}(D)$ auf, vergleiche auch Beispiel 1.9. Die Beschränktheit von $[D, a]$ bedeutet in Termen dieser Form genau $|\langle a\xi, D\eta \rangle - \langle D\xi, a^*\eta \rangle| \leq c\|\xi\|\|\eta\|$ für alle $\xi, \eta \in \text{Def}(D)$ und eine Konstante $c \geq 0$, vergleiche [66] (Seite 275). Weil D dicht definiert ist, existiert eine Fortsetzung dieser Sesquilinearform und damit des zugehörigen Operators auf ganz \mathcal{H} , welche wir jeweils wieder mit $\langle [D, a], \cdot, \cdot \rangle$ beziehungsweise $[D, a]$ bezeichnen. Wir erkennen, dass \mathcal{A} eine $*$ -Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist, denn definieren wir

$$\delta = [D, \cdot] : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \supset \text{Def}(\delta) := \mathcal{A} \rightarrow E, a \mapsto [D, a],$$

was wegen

$$\begin{aligned} \delta(ab) &= [D, ab] = Dab - abD = aDb - abD + Dab - aDb = a[D, b] + [D, a]b \\ &= a\delta(b) + \delta(a)b \end{aligned}$$

insbesondere eine Derivation darstellt, so ist für $|\langle a\xi, D\eta \rangle - \langle D\xi, a^*\eta \rangle| \leq c_a\|\xi\|\|\eta\|$ und $|\langle b\xi, D\eta \rangle - \langle D\xi, b^*\eta \rangle| \leq c_b\|\xi\|\|\eta\|$ mit $\xi, \eta \in \text{Def}(D)$

$$\begin{aligned} |\langle [D, a^*]\xi, \eta \rangle| &= |\langle a^*\xi, D\eta \rangle - \langle D\xi, a\eta \rangle| = |-\overline{\langle a\eta, D\xi \rangle - \langle D\eta, a^*\xi \rangle}| \\ &= \overline{|\langle [D, a]\eta, \xi \rangle|} \leq c_a\|\xi\|\|\eta\| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |\langle [D, ab]\xi, \eta \rangle| &= |\langle a[D, b]\xi, \eta \rangle + \langle [D, a]b\xi, \eta \rangle| \leq |\langle [D, b]\xi, a^*\eta \rangle| + |\langle b\xi, [D, a]^*\eta \rangle| \\ &\leq \|a\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \cdot |\langle [D, b]\xi, \eta \rangle| + \|b\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \cdot |\langle \xi, [D, a]^*\eta \rangle| \\ &= \|a\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \cdot |\langle [D, b]\xi, \eta \rangle| + \|b\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \cdot |\langle [D, a]\xi, \eta \rangle| \\ &\leq (\|a\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}c_b + c_a\|b\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})})\|\xi\|\|\eta\|. \end{aligned}$$

Also sind mit $\delta(a), \delta(b)$ auch $\delta(a^*)$ und $\delta(ab)$ beschränkt.

Für \mathcal{M} nehmen wir nun die einhüllende von Neumann-Algebra von \mathcal{A} in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, also $\mathcal{M} = \mathcal{A}''$, und setzen $E = \mathcal{N} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Damit liegt \mathcal{A} dicht in \mathcal{M} bezüglich der Schwach*-Topologie. Wir beweisen nun die Abgeschlossenheit des Graphen Γ_δ von δ bezüglich der Schwach*-Topologie. Bezeichnen wir mit $B_1(0)(V)$ die

normabgeschlossene Einheitskugel in einem Banachraum V , so genügt es aufgrund des Satzes von Krein-Šmulian ([68] (Korollar VIII.3.16)), die Schwach*-Abgeschlossenheit von $\Gamma_\delta \cap B_1(0)(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})$ zu zeigen. Weil laut [44] (Theorem 4.2.9) die Schwach*-Topologie mit der ultraschwachen Topologie übereinstimmt und letztere laut [19] (I.3, Theorem 2) auf der abgeschlossenen Einheitskugel mit der schwachen Topologie, genügt es, die Abgeschlossenheit von $\Gamma_\delta \cap B_1(0)(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})$ bezüglich der schwachen Topologie zu zeigen. Sei hierzu $(a_\lambda, \delta(a_\lambda))_\lambda$ ein Netz in $\Gamma_\delta \cap B_1(0)(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})$, welches schwach konvergent gegen $(a, b) \in B_1(0)(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})$ ist. Wir müssen $a \in \mathcal{A}$ und $\delta(a) = b$ zeigen. Nun impliziert die schwache Konvergenz von a_λ gegen a die von a_λ^* gegen a^* , und daher gilt für alle $\xi, \eta \in \text{Def}(D)$

$$\begin{aligned} |\langle a\xi, D\eta \rangle - \langle D\xi, a^*\eta \rangle| &= \lim_\lambda |\langle a_\lambda\xi, D\eta \rangle - \langle D\xi, a_\lambda^*\eta \rangle| = \lim_\lambda |\langle [D, a_\lambda]\xi, \eta \rangle| \\ &= \lim_\lambda |\langle \delta(a_\lambda)\xi, \eta \rangle| = |\langle b\xi, \eta \rangle| \leq \|b\|_{\mathcal{N}}\|\xi\|\|\eta\|. \end{aligned}$$

Somit ist $\delta(a)$ beschränkt mit $\delta(a) = b$, und δ ist insgesamt schwach*-abgeschlossen.

Die Schwach*-Abgeschlossenheit von $E = \mathcal{N} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist klar, ebenso die Stetigkeit der beiden *-Homomorphismen $\pi_l, \pi_r : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, verkörpert durch die links- und rechtsreguläre Darstellung, in der entsprechenden Topologie. Tatsächlich erhalten wir aus einem Spektralen Tripel also eine W^* -Derivation.

Falls \mathcal{A} nur eine *-Unteralgebra von $\{a \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid [D, a] \text{ ist beschränkt}\}$ ist, erhalten wir mit δ nur einen bezüglich der Schwach*-Topologie abschließbaren Operator.

Übrigens definiert Connes in [12] eine Metrik d auf dem Spektrum der C^* -Algebra A in einem unbeschränkten Fredholm-Modul durch

$$d(\varphi, \psi) := \sup \left\{ |\varphi(a) - \psi(a)| \mid a \in A, \|[D, a]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1 \right\},$$

was genau der Monge-Kantorovič-Metrik bei Rieffel aus Formel (1) auf Seite 5 entspricht.

1.18. BEISPIEL. Für Riemannsche Mannigfaltigkeiten können wir aber auch direkt und nicht über den Umweg in Beispiel 1.16, also eine Beschreibung der Mannigfaltigkeiten a la Connes, eine W^* -Derivation gewinnen, wie wir nun gemäß [67] (7.1.6) darstellen.

Sei X eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Mittels der Riemannschen Metrik erhalten wir dann im Tangentialraum $T_p X$ im Punkt p von X ein inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ in den Skalkörper. Ist dieser reell, so setzen wir $E := E_0$, ansonsten $E := E_0 \oplus iE_0$, wobei E_0 die Menge aller wesentlich beschränkten messbaren Vektorfelder auf X ist. E hat dann die Struktur eines $L^\infty(X)$ -Moduls, denn für $f \in L^\infty(X)$ und $\phi \in E$ ist $f\phi$ mit der punktweisen Verknüpfung wieder in E . Auf E erhalten wir des Weiteren eine Norm, indem wir $\|\phi\|^2 = \sup \text{ess}_{p \in X} \langle \phi, \phi \rangle_p$, das wesentliche Supremum der Werte des inneren Produkts über die einzelnen Punkte in X , nehmen. Wir ziehen nun das so genannte Einheitsphärenbündel $Y := \{(p, v) \mid p \in X, v \in T_p X, \|v\| = 1\}$ heran und definieren den Operator

$$T : E \rightarrow L^\infty(Y), \phi \mapsto T(\phi) \text{ mit } T(\phi)(p, v) := \langle \phi_p, v \rangle_p,$$

welcher dann eine Isometrie darstellt, und $T(E)$ ist schwach*-abgeschlossen. Eine Bimodulstruktur erhalten wir, indem wir $\pi_l, \pi_r : L^\infty(X) \rightarrow L^\infty(Y)$ durch

$\pi_l(f)(p, v) = \pi_r(f)(p, v) = f(p)$ festlegen. Die Derivation

$$\delta : L^\infty(X) \supset \text{Def}(\delta) \rightarrow T(E) \subset L^\infty(Y), \delta(f)(p, v) := D_p f(v) = \langle Df_p, v \rangle_p$$

macht dann $(L^\infty(X), T(E) \subset L^\infty(Y), (\delta, \text{Def}(\delta)))$ zu einer W^* -Derivation mit Definitionsbereich $\text{Def}(\delta) = \text{Lip}(X)$, die Algebra der beschränkten, bezüglich der Riemannschen Metrik lipschitzstetigen Funktionen, siehe auch [66] (Abschnitt III). Dabei ist $D_p f(v)$ die Ableitung von f in $p \in X$ in Richtung v und Df das Gradientenvektorfeld von f .

1.19. BEISPIEL (nicht-kommutativer Torus, s. [66], [67]). Ehe wir den nicht-kommutativen Torus als Beispiel für eine W^* -Derivation kennen lernen, beschäftigen wir uns allgemein mit W^* -dynamischen Systemen.

1.20. DEFINITION (vgl. [49]). *Ein W^* -dynamisches System (\mathcal{M}, G, α) besteht aus einer von Neumann-Algebra \mathcal{M} , einer lokalkompakten Gruppe G und einem stetigen Homomorphismus $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M})$ in die Gruppe von $*$ -Automorphismen auf \mathcal{M} , seinerseits ausgestattet mit der Schwach*-Topologie. Das heißt, für alle $a \in \mathcal{M}$ ist die Abbildung $\alpha(a) : G \rightarrow \mathcal{M}$, $t \mapsto \alpha_t(a)$ stetig in der Schwach*-Topologie von \mathcal{M} , und als Topologie auf $\text{Aut}(\mathcal{M})$ benutzen wir die starke Topologie bezüglich der Schwach*-Topologie für \mathcal{M} .*

Daraus erhalten wir eine W^* -Derivation $(\mathcal{M}, E \subset \mathcal{N}, (\delta, \text{Def}(\delta)))$ wie folgt: Wir benutzen $G = \mathbb{R}$ und definieren $\mathcal{N} = E = \mathcal{M}$ und

$$\text{Def}(\delta) := \left\{ a \in \mathcal{M} \mid \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_t(a) - a}{t} \text{ existiert bzgl. der Schwach*-Topologie} \right\},$$

$$\delta : \mathcal{M} \supset \text{Def}(\delta) \rightarrow E, \quad \delta(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_t(a) - a}{t}.$$

Wir erinnern daran, dass laut Bemerkung 1.12 (1) die Schwach*- und die ultraschwache Topologie auf \mathcal{M} übereinstimmen. Laut [66] (Proposition 18 und Theorem 19) ist $\text{Def}(\delta)$ invariant unter α und Definitionsbereich der W^* -Derivation δ von \mathcal{M} in \mathcal{N} . In Theorem 20 von [66] wird

$$\text{Def}(\delta) = \{ a \in \mathcal{M} \mid t \mapsto \alpha_t(a) \text{ ist ultraschwach stetig differenzierbar} \}$$

gezeigt in dem Sinne, dass eine ultraschwach-stetige Abbildung $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ mit $\delta(\alpha_t(a)) = \beta(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert. Ist \mathcal{M} die Algebra der Observablen eines physikalischen Systems und repräsentiert α die Zeitentwicklung dieses Systems, so kann δ physikalisch als Generator der Zeitentwicklung interpretiert werden, und $\text{Def}(\delta)$ besteht dann genau aus den Observablen, deren Erwartungswerte sich in jedem Zustand in stetig differenzierbarer Weise entwickeln.

Dies lässt sich sehr leicht auf den Fall eines W^* -dynamischen Systems $(\mathcal{M}, \mathbb{R}^n, \alpha)$ ausdehnen: Hierzu wählen wir eine Basis $\{f_1, \dots, f_n\}$ in \mathbb{R}^n und definieren die Einparameter-Wirkungen α_j für $1 \leq j \leq n$ durch $\alpha_t^j = \alpha_{t f_j}$; wir schränken uns also auf die Untergruppe, bestehend aus dem eindimensionalen Unterraum $\mathbb{R} f_j$ von \mathbb{R}^n , ein. So erhalten wir wie im oben diskutierten Einparameter-Fall für jedes j eine Derivation δ_j , die wir zur Derivation $\delta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^n$, $a \mapsto (\delta_j(a))_{1 \leq j \leq n}$ mit Definitionsbereich $\text{Def}(\delta) := \bigcap_{1 \leq j \leq n} \text{Def}(\delta_j)$ zusammenfassen.

Dies wenden wir auf den nicht-kommutativen Torus an: Für $\vartheta \in [0, 1[$ definieren wir die unitären Operatoren $U, V \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}^2))$ durch

$$Ue_{m,n} := e_{m+1,n} \quad \text{und} \quad Ve_{m,n} := e^{2\pi i \vartheta m} e_{m,n+1},$$

wobei $e_{m,n}$ die kanonische Basis in $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ ist; \mathcal{M}_ϑ sei die von U und V erzeugte von Neumann-Algebra. Für $\vartheta = 0$ ist vermöge Fourier-Transformation $\mathcal{M}_0 = L^\infty(\mathbf{T}^2)$, wobei \mathbf{T}^2 der herkömmliche 2-Torus ist. Wir definieren die beiden unbeschränkten selbstadjungierten Operatoren D_1, D_2 auf $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ durch $D_1 e_{m,n} := m e_{m,n}$ und entsprechend $D_2 e_{m,n} := n e_{m,n}$, was für $\vartheta = 0$ den Operatoren $i \frac{\partial}{\partial x}$ und $i \frac{\partial}{\partial y}$ auf $L^\infty(\mathbf{T}^2)$ entspricht. Wir erhalten zwei vertauschende Flüsse $\alpha_t^k(a) = e^{-itD_k} a e^{itD_k}$, $k \in \{1, 2\}$, welche im Falle $\vartheta = 0$ den Translationen auf $L^\infty(\mathbf{T}^2)$ in den beiden Variablen x und y entsprechen. Betrachten wir die zu diesen Flüssen gehörenden Generatoren δ_1 und δ_2 , das bedeutet $\delta_k(a) = i[D_k, a]$ für $k = 1, 2$, so legen diese eine W^* -Derivationen $\delta : \mathcal{M}_\vartheta \rightarrow \mathcal{M}_\vartheta \oplus \mathcal{M}_\vartheta$, $a \mapsto (\delta_1(a), \delta_2(a))$ mit Definitionsbereich $\text{Def}(\delta) := \text{Def}(\delta_1) \cap \text{Def}(\delta_2)$ fest. Hierbei ist $\mathcal{M}_\vartheta \oplus \mathcal{M}_\vartheta$ in natürlicher Weise ein \mathcal{M}_ϑ -Bimodul. Im Falle $\vartheta = 0$ erhalten wir so tatsächlich $\text{Def}(\delta) = \text{Lip}(\mathbf{T}^2)$, und für $\vartheta \in]0, 1[$ eine nicht-kommutative Entsprechung.

Wir wollen noch kurz den Zusammenhang zur rationalen Drehalgebra aus Beispiel 1.8 herstellen. Definieren wir analog zum von Neumann-Algebra-Fall

$$\begin{aligned} A &:= \{a \in \mathcal{M} \mid \lim_{t \rightarrow 0} \|\alpha_t(a) - a\| = 0\}, \\ \text{Def}(\tilde{\delta}) &:= \left\{ a \in \mathcal{M} \mid \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_t(a) - a}{t} \text{ existiert bzgl. der Norm-Topologie} \right\}, \\ \tilde{\delta} : \mathcal{M} \supset \text{Def}(\tilde{\delta}) &\rightarrow E, \quad \tilde{\delta}(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_t(a) - a}{t}, \end{aligned}$$

so ist wieder laut [66] (Proposition 18 und Theorem 19) A eine unital C^* -Algebra und $\text{Def}(\tilde{\delta})$ invariant unter α (und Definitionsbereich der C^* -Derivation $\tilde{\delta}$ von A in sich). Weiter kann

$$\begin{aligned} A &= \{a \in \mathcal{M} \mid t \rightarrow \alpha_t(a) \text{ ist norm-stetig}\}, \\ \text{Def}(\tilde{\delta}) &= \{a \in \mathcal{M} \mid t \mapsto \alpha_t(x) \text{ ist norm-stetig differenzierbar}\} \end{aligned}$$

in dem Sinne gezeigt werden, dass eine norm-stetige Abbildung $\tilde{\beta} : \mathbb{R} \rightarrow A$ mit $\tilde{\delta}(\alpha_t(a)) = \tilde{\beta}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert.

Wir können dies wie oben auf den mehrdimensionalen Fall übertragen und auf die beim nicht-kommutativen Torus vorliegende Situation anwenden. Hierzu bezeichnen wir für $\vartheta \in [0, 1[$ mit A_ϑ die von $U, V \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}^2))$ erzeugte C^* -Algebra, analog zu \mathcal{M}_ϑ oben. Diese ist (bis auf Isomorphie) die rationale Drehalgebra zur rationalen Zahl ϑ , vergleiche Beispiel 1.8. Denn U und V sind zwei unitäre Operatoren auf einem Hilbertraum, welche die Vertauschungsrelation (5) von Seite 10 erfüllen. Also ist durch $\alpha_{(g_1, g_2)} U := g_1 U$ und $\alpha_{(g_1, g_2)} V := g_2 V$ eine ergodische und effektive Wirkung des Torus $G = \mathbf{T}^2$ auf den Erzeugern und damit der ganzen von U und V erzeugten C^* -Algebra gegeben, und dies reicht laut [2] schon aus,

damit $C^*(U, V)$ die Drehalgebra zur Zahl ϑ ist. Für diese wird in [66] (Theorem 20) die Beziehung

$$(8) \quad A_\vartheta = \{a \in \mathcal{M}_\vartheta \mid t \rightarrow \alpha_t^k(a) \text{ ist norm-stetig für } k = 1, 2\}$$

gezeigt, wobei wir wieder $\alpha_t^k(a) = e^{-itD_k} a e^{itD_k}$, $k \in \{1, 2\}$, als vertauschende Flüsse benutzen, vergleiche oben. Weil nun A_ϑ die Drehalgebra zur Zahl ϑ ist, bedeutet dies, dass wir für rationales ϑ die rationale Drehalgebra als C^* -Unteralgebra von \mathcal{M}_ϑ erhalten, und zwar beschrieben durch (8).

3. Vergleich von kompakten Räumen und W^* -Derivationen

Wir beleuchten jetzt den Hintergrund, weshalb sich gerade W^* -Derivationen als zweckmäßig für ein nicht-kommutatives Analogon kompakter metrischer Räume erweisen. Dabei folgen wir im Wesentlichen dem Vorgehen im sechsten Kapitel von [67] und führen den Begriff der messbaren (Pseudo-)Metrik auf einem σ -endlichen Maßraum ein. Satz 1.23 und Bemerkung 1.25 vermitteln daraufhin die Einsicht, dass W^* -Derivationen im kommutativen Fall eine richtige funktionalanalytische Beschreibung kompakter metrischer Räume darstellen. Im Anschluss an Satz 1.23 diskutieren wir noch gewisse Feinheiten, die im Nicht-Kommutativen Beachtung finden müssen; hierbei spielt der Begriff der Atomarität von von Neumann-Algebren eine wichtige Rolle, vergleiche Seite 31.

1.21. DEFINITION. Sei (X, μ) ein σ -endlicher Maßraum. Wir bezeichnen mit Ω die Menge aller messbaren Teilmengen A von X modulo Nullmengen mit $\mu(A) > 0$.

- (a) Eine **messbare Pseudometrik** auf (X, μ) ist eine Abbildung $\rho : \Omega^2 \rightarrow [0, \infty]$ mit den Eigenschaften
- (i) $\rho(A, A) = 0$,
 - (ii) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$,
 - (iii) $\rho(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, B) = \inf_{i \in \mathbb{N}} \rho(A_i, B)$,
 - (iv) $\rho(A, C) \leq \sup_{B' \subset B} (\rho(A, B') + \rho(B', C))$
- für alle $A, B, C, A_i \in \Omega$.

- (b) Eine **messbare Metrik** auf (X, μ) ist eine messbare Pseudometrik, für welche die zugrunde liegende messbare σ -Algebra modulo Nullmengen als Verband durch $\{A \mid A \subset X, \forall B \subset \Omega [A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists B' \subset B, \rho(B', A) > 0]\}$ erzeugt wird.

1.22. BEMERKUNG. (a) Man denke beim Begriff messbarer Pseudometriken etwa an den Abstand von Mengen, das heißt, an das Infimum des Abstands zweier Punkte in den jeweiligen Mengen, vergleiche Abbildung 2. Dort sind für drei Mengen $A, B, C \in \Omega$ diejenigen Punkte $a_{AB} \in A$ und $b_{AB} \in B$ eingezeichnet, deren Abstand den Abstand der Mengen A und B liefert; Entsprechendes gilt für analog indizierte Punktepaare.

Daher besitzt die Entsprechung der Dreiecksungleichung für messbare Pseudometriken auch nicht die Form $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$ für alle $A, B, C \in \Omega$, sondern ist von Form (iv), welche für beliebig kleine Durchmesser von B' in

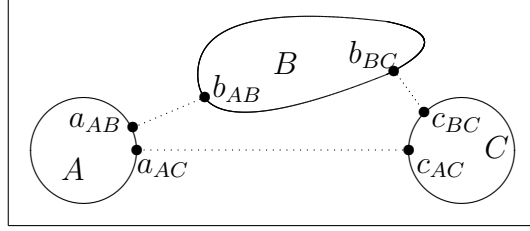


ABBILDUNG 2. Veranschaulichung zur messbaren Metrik.

die gewöhnliche Dreiecksungleichung für Punkte übergeht. Im Falle **atomarer Maßräume** (X, μ) beziehungsweise **atomarer Maße** μ auf X , das heißt $\mu(\{x\}) > 0 \forall x \in X$, definiert $\tilde{\rho}(p, q) := \rho(\{p\}, \{q\})$ eine punktweise Metrik auf X , und es gilt $\rho(A, B) = \inf_{p \in A, q \in B} \tilde{\rho}(p, q)$. Umgekehrt erhalten wir mit dieser Gleichung als Definition aus jeder punktweisen Metrik $\tilde{\rho}$ eine messbare Pseudometrik ρ , siehe etwa [67] (6.1.4).

- (b) Die in Definition 1.21 (b) angegebene σ -Algebra modulo Nullmengen ist ein vollständiger Verband, wie [67] (6.1.2) zeigt, und der von einer Teilmenge davon erzeugte Verband ist der kleinste vollständige Verband, welcher diese Teilmenge enthält, also der Schnitt über alle vollständigen Teilverbände, welche diese Teilmenge enthalten. In [67] (6.1) nach der Definition messbarer (Pseudo-)Metriken merkt Weaver an, dass man stets von messbaren Pseudometriken zu messbaren Metriken durch Übergang zu einer kleineren σ -Algebra gelangt, dieses Vorgehen einem aber kaum große Vorteile verschafft und messbare Pseudometriken genauso bequem sind wie messbare Metriken. Der Übergang zur kleineren σ -Algebra und damit von einer messbaren Pseudometrik zu einer messbaren Metrik ist aber wünschenswert, wenn es möglichst wenige Paare in Ω^2 mit Abstand Null geben soll.

Auch für einen σ -endlichen Maßraum (X, μ) mit messbarer Pseudometrik ρ lässt sich ein Analogon zu den lipschitzstetigen Funktionen für (punktweise) metrische Räume erklären: Mit \mathcal{U}_x bezeichnen wir die Menge aller offenen Umgebungen von $x \in \mathbb{C}$ bezüglich der üblichen Topologie. Für eine messbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ und $A, B \subset X$ μ -messbar definieren wir

$$\rho_f(A, B) := \inf\{|a - b| \mid a, b \in \mathbb{C}, \mu((f|_C)^{-1}(U_c)) > 0 \forall U_c \in \mathcal{U}_c, (c, C) \in \{(a, A), (b, B)\}\}$$

und weiter

$$Lip(f) := \sup_{A, B \in \Omega} \frac{\rho_f(A, B)}{\rho(A, B)} \text{ mit der Festlegung } \frac{0}{0} = 0,$$

$$Lip(X, \mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid \max(\|f\|_\infty, Lip(f)) < \infty\}.$$

Die erste Formel bedarf wohl einer anschaulichen Erklärung. Ist $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, so heißt die Menge $\{c \in \mathbb{C} \mid \mu(f^{-1}(U_c)) > 0 \forall U_c \in \mathcal{U}_c\}$ das **wesentliche Bild** von f . $\rho_f(A, B)$ gibt dann den Abstand zwischen den wesentlichen Bildern von $f|_A$ und $f|_B$ an, siehe Abbildung 3. Im Falle eines atomaren Maßraumes stimmt die Definition von $Lip(X, \mu)$ mit der herkömmlichen für lipschitzstetige Funktionen auf X überein. Wir haben somit eine messbare Version für lipschitzstetige Funktionen erhalten. Identifizieren wir Funktionen, die sich höchstens auf Nullmengen unterscheiden,

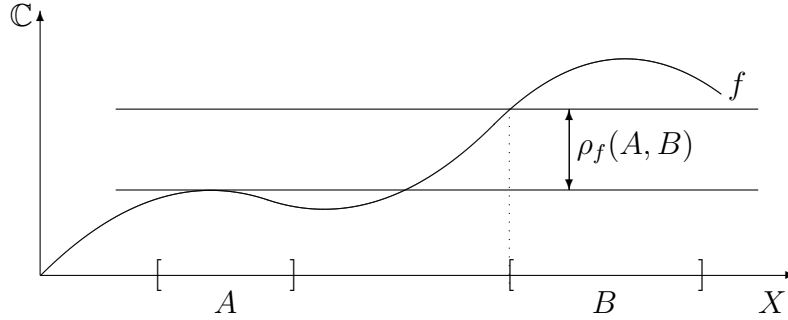


ABBILDUNG 3. Veranschaulichung für den Abstand der wesentlichen Bilder von $f|_A$ und $f|_B$.

so gilt $Lip(X, \mu) \subset L^\infty(X, \mu)$.

Wir haben nun alle Begriffe zusammengetragen, um den Hintergrund für die Definition von W^* -Derivationen darzustellen: Dieser wird durch einen Satz wiedergegeben, in dem Lipschitzstetigkeit in kommutativen W^* -Derivationen im maßtheoretischen Kontext charakterisiert wird. Er besagt das Folgende.

1.23. SATZ (vgl. [67] (Theorem 7.2.5)). Seien (X, μ) und (Y, ν) σ -endliche Maßräume, $E \subset L^\infty(Y, \nu)$ ein W^* -Bimodul über $L^\infty(X, \mu)$ und $\delta : L^\infty(X, \mu) \rightarrow E$ eine W^* -Derivation. Dann existiert eine messbare (Pseudo-)Metrik ρ auf X , so dass $\text{Def}(\delta)$ und $Lip(X, \mu)$ (wie eben definiert) isometrisch isomorph sind (vgl. Satz A.11) und insbesondere $Lip(f) = \|\delta(f)\|_\infty$ für alle $f \in \text{Def}(\delta)$ gilt.

Ist umgekehrt (X, μ) ein σ -endlicher Maßraum mit messbarer (Pseudo-)Metrik ρ , so gewinnt man $Lip(X, \mu)$ bis auf isometrische Isomorphie als Definitionsbereich einer W^* -Derivation δ auf $L^\infty(X, \mu)$ und die Lipschitz-Halbnorm von $f \in Lip(X, \mu)$ als $\|\delta(f)\|_\infty$.

1.24. BEMERKUNG. Ein Wort zur Formulierung dieses Satzes in [67] und zu dessen Beweis:

- (1) Als Rahmen für die Formulierung des Satzes wählt Weaver endlich zerlegbare Maßräume als Verallgemeinerung σ -endlicher Maßräume. Ein **endlich zerlegbarer Maßraum** (X, μ) ist ein Maßraum, so dass eine Partition der Menge X in eine (möglicherweise unendliche) Familie von messbaren Teilmengen X_i , $i \in I$, endlichen Maßes existiert, für welche für alle $A \subset X$
 - (a) die μ -Messbarkeit von $A \cap X_i$ für alle $i \in I$ die μ -Messbarkeit von A impliziert und
 - (b) in diesem Falle $\mu(A) = \sum_{i \in I} \mu(A \cap X_i)$ gilt.

Dies ist eine Verallgemeinerung der Definition σ -endlicher Maße: Ist $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$ für eine aufsteigende Folge $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Teilmengen endlichen Maßes und $Z_0 := \emptyset$, so erfüllen die induktiv definierten Mengen $X_n := Z_n \setminus Z_{n-1}$ obige Bedingungen, und umgekehrt ist jeder endlich zerlegbare Maßraum mit abzählbarer Partition σ -endlich.

Für einen endlich zerlegbaren Maßraum (X, μ) ändert sich auch die Definition einer messbaren (Pseudo-)Metrik: Wir müssen Bedingung (iii) durch

$$(iii') \quad \rho\left(\bigcup_{i \in I} A_i, B\right) = \inf_{i \in I} \rho(A_i, B)$$

für eine Indexmenge I ersetzen. Die Vereinigung auf der linken Seite ist dabei essenziell; die **essenzielle Vereinigung** der μ -messbaren Mengen A_i , $i \in I$, ist eine (laut [67] (6.1.2) bis auf μ -Nullmengen eindeutig existierende) μ -messbare Menge A mit $\mu(A_i \setminus A) = 0 \forall i \in I$, so dass für jede andere messbare Menge C mit dieser Eigenschaft schon $\mu(A \setminus C) = 0$ gilt. Die Formulierung von Satz 1.23 bleibt allerdings dieselbe, wenn wir „endlich zerlegbar“ anstelle von „ σ -endlich“ schreiben.

Diese allgemeinere Sichtweise wird benötigt, um beispielsweise auch das (atomare) Zählmaß μ auf einer überabzählbaren Menge X betrachten zu können; ansonsten müssten wir uns bei atomaren σ -endlichen Maßräumen auf abzählbare Mengen einschränken.

- (2) Im Beweis von Satz 1.23 arbeitet Weaver verbandstheoretisch mit reellwertigen Funktionen, also mit ähnlichen Mitteln wie Rieffel, der in [56] Ordnungseins-Räume benutzt, siehe den Kommentar auf Seite 4. Der Beweis des ersten Teils der Aussage des Satzes benutzt die oben definierte Metrik ρ_f , aus der dann durch die Festlegung $\rho(A, B) := \sup\{\rho_f(A, B) \mid f \in F, \|f\|_0 \leq 1\}$ eine messbare Pseudometrik ρ auf X gewonnen wird, wobei $F = \text{Def}(\delta)$ und $\|f\|_0 := \|\delta(f)\|_\infty$ gesetzt wird. Dies erinnert an Formel (4) auf Seite 7, mit der sich die Metrik auf einem Kompaktum aus der Angabe der Lipschitzstetigen Funktionen darauf wiedergewinnen lässt. Für die umgekehrte Richtung lässt sich eine Derivation d definieren, die die de Leeuw-Abbildung verallgemeinert, und zwar in dem Sinne, dass ein Element im Bild von d nicht auf Paare von Punkten aus X wirkt, sondern auf Paare von messbaren Mengen in X .

Wir ergreifen die Gelegenheit und stellen jetzt die verschiedenen Sichtweisen metrischer Räume, die in diesem Abschnitt angeklungen sind, nochmals zusammen und Verbindungen dazwischen her. Dazu betrachten wir Abbildung 4.

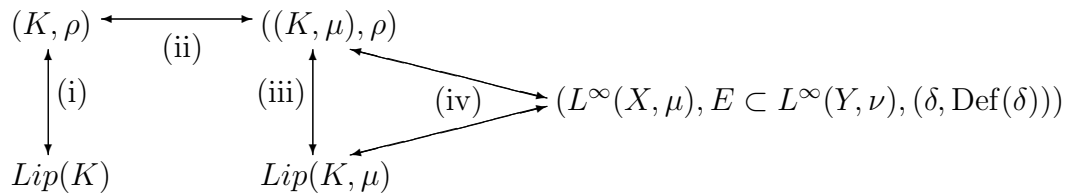


ABBILDUNG 4.

- (i) Ist (K, ρ) ein kompakter metrischer Raum, so erhalten wir wie bekannt die Lipschitzstetigen Funktionen auf K als $\left\{ f \in \mathbb{C}^K \mid \sup_{x, y \in K, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x, y)} < \infty \right\}$, und umgekehrt erhalten wir aus Angabe der Menge der Lipschitzstetigen Funktionen $Lip(K)$ auf einem kompakten Hausdorff-Raum die Metrik zurück durch $\rho(x, y) := \sup\{|f(x) - f(y)| \mid f \in Lip(K), Lip(f) \leq 1\}$.
- (ii) Von einem abzählbaren (kompakten) metrischen Raum (X, ρ) kommen wir zu einem σ -endlichen Maßraum (X, μ) mit messbarer (Pseudo-)Metrik ρ , indem wir auf X als Maß das Zählmaß μ benutzen, das heißt, wir setzen $\mu(\{x\}) =$

1 für alle $x \in X$. Umgekehrt aber liefert jeder σ -endliche Maßraum (X, μ) mit messbarer (Pseudo-)Metrik ρ , so dass der Maßraum atomar ist, wie in Bemerkung 1.22 diskutiert, eine (Pseudo-)Metrik auf X , indem wir ρ einfach auf einpunktige Mengen einschränken.

Wollen wir uns nicht auf abzählbare Räume einschränken, müssen wir, wie in Bemerkung 1.24 besprochen, zu endlich zerlegbaren Maßräumen übergehen, was aber keinerlei Schwierigkeiten bedeutet.

- (iii) Diese Äquivalenz ist als messbares Analogon zu (i) zu verstehen.
- (iv) Ist (X, μ) ein σ -endlicher (beziehungsweise endlich zerlegbarer) Maßraum mit messbarer (Pseudo-)Metrik ρ , so können wir dieser mit Hilfe von Satz 1.23 eine W^* -Derivation von der Form $(L^\infty(X, \mu), L^\infty(\tilde{X}, \mu \times \mu|_{\tilde{X}}), \delta)$ zuordnen, wobei δ die de Leeuw-Abbildung ist, und Satz 1.23 liefert ebenso die Umkehrung. Erinnern wir uns, dass (ii) nur für atomare Maße auch von rechts nach links gültig war, können wir uns fragen, unter welcher Bedingung an eine kommutative W^* -Derivation $(L^\infty(X, \mu), E \subset L^\infty(Y, \nu), (\delta, \text{Def}(\delta)))$ wir (über (iv) und (ii)) zu einem herkömmlichen metrischen Raum kommen. Diese Bedingung drückt sich durch die Atomarität der von Neumann-Algebra $L^\infty(X, \mu)$ aus. Wir erinnern daran, dass eine W^* -Algebra \mathcal{M} **atomar** heißt, wenn für jede Projektion $q \neq \mathbf{0}_{\mathcal{M}}$ in \mathcal{M} eine minimale Projektion $x \in \mathcal{M}$ existiert mit $x \leq q$. Als Ordnungsrelation ist hierbei die des Verbandes der Projektionen in der W^* -Algebra \mathcal{M} gemeint. Die minimalen Projektionen in $L^\infty(X, \mu)$ sind genau die charakteristischen Funktionen auf den einzelnen Punkten von X , und man kann zeigen, dass in diesem Falle $L^\infty(X, \mu) \cong \ell^\infty(X)$ gilt. Dieses Maß macht X dann zu einem σ -endlichen (beziehungsweise endlich zerlegbaren) Maßraum mit atomarem Maß.

Wir beschließen diese Zusammenstellung mit einem Wort zur Vollständigkeit: Starten wir mit einem vollständigen metrischen Raum (X, ρ) , so erhalten wir laut (iv) eine kommutative W^* -Derivation $(L^\infty(X, \mu), E \subset L^\infty(Y, \nu), (\delta, \text{Def}(\delta)))$, und umgekehrt daraus einen metrischen Raum (X, ρ) mit punktweiser Metrik aufgrund der Atomarität des Maßes μ , doch ist nicht unmittelbar klar, dass dieser vollständig ist. Wie jedoch Bemerkung 1.12 (2) lehrt, ist der Raum X aus der kommutativen von Neumann-Algebra lokal-kompakt, und ein lokalkompakter metrischer Raum ist vollständig laut [21] (XIV.2.4). Den Zusammenhang zwischen vollständigen metrischen Räumen und dem Begriff der W^* -Derivation zeigt für den kommutativen Fall noch einmal deutlich die folgende kategorientheoretische Überlegung.

1.25. BEMERKUNG. Wir betrachten die Kategorie W^*D , bestehend aus W^* -Derivationen der Form $(\mathcal{M}, E \subset \mathcal{N}, (\delta, \text{Def}(\delta)))$ als Objekten und Paaren (π, τ) von schwach*-stetigen *-Homomorphismen $\pi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2, \tau : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$, für die das Diagramm aus Abbildung 5 kommutiert, als Morphismen.

Des Weiteren bezeichne KW^*D die Unterkategorie von W^*D , in der \mathcal{M} und \mathcal{N} kommutative von Neumann-Algebren sind, also isomorph zu $L^\infty(X, \mu)$ für jeweils einen lokalkompakten Hausdorffraum X und ein positives Radonmas μ laut [64] (Theorem III.1.18). Schließlich sei KW^*D_a die Unterkategorie von W^*D beziehungsweise KW^*D , in der zusätzlich \mathcal{M} die atomare einhüllende von Neumann-Algebra des Normabschlusses $\overline{\text{Def}(\delta)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{M}}}$ von $\text{Def}(\delta)$ ist. Da wir, wie bereits gesagt, den Zusammenhang von

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}_1 \supset \text{Def}(\delta_1) & \xrightarrow{\pi} & \text{Def}(\delta_2) \subset \mathcal{M}_2 \\
\downarrow \delta_1 & & \downarrow \delta_2 \\
\mathcal{N}_1 \supset E_1 & \xrightarrow{\tau} & E_2 \subset \mathcal{N}_2
\end{array}$$

ABBILDUNG 5.

W^* -Derivationen im kommutativen Fall und vollständigen metrischen Räumen kategoriell ausdrücken wollen, betrachten wir außerdem die Kategorie VM, bestehend aus vollständigen metrischen Räumen als Objekten und Kontraktionen als Morphismen.

Dann sind die Kategorie VM und die zu KW^*D_a entgegengesetzte beziehungsweise duale Kategorie $\text{KW}^*D_a^{op}$ **äquivalent**, das bedeutet, es gibt kovariante Funktoren $S : \text{VM} \rightarrow \text{KW}^*D_a^{op}$ und $T : \text{KW}^*D_a^{op} \rightarrow \text{VM}$, so dass $ST \cong \mathbf{1} : \text{KW}^*D_a^{op} \rightarrow \text{KW}^*D_a^{op}$ und $TS \cong \mathbf{1} : \text{VM} \rightarrow \text{VM}$ natürliche Isomorphismen sind. Hierbei entsteht die duale Kategorie aus einer Kategorie, indem Urbild und Bild bei allen verbindenden Morphismen ausgetauscht und entsprechend die Komposition von Morphismen abgeändert werden.

Anstatt kovariante Funktoren $S : \text{VM} \rightarrow \text{KW}^*D_a^{op}$ und $T : \text{KW}^*D_a^{op} \rightarrow \text{VM}$ anzugeben, werden wir kontravariante Funktoren $S : \text{VM} \rightarrow \text{KW}^*D_a$ und $T : \text{KW}^*D_a \rightarrow \text{VM}$ benutzen, so dass $ST \cong \mathbf{1} : \text{KW}^*D_a \rightarrow \text{KW}^*D_a$ und $TS \cong \mathbf{1} : \text{VM} \rightarrow \text{VM}$ natürliche Isomorphismen sind. Kontravarianz bedeutet dabei beispielsweise für S , dass für Objekte A, B, C aus VM und Morphismen $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ das Bild einer existierenden Komposition gf unter S gegeben ist durch $S(gf) = (S(f))(S(g))$ statt wie bei kovarianten Funktoren durch $(S(g))(S(f))$. Beim Übergang von KW^*D_a zu $\text{KW}^*D_a^{op}$ werden dann aus den kontravarianten Funktoren in natürlicher Weise kovariante Funktoren.

Den Funktor S wollen wir konkret angeben: Wir benutzen für einen vollständigen metrischen Raum (K, ρ) die de Leeuw-Abbildung $d : \text{Def}(d) = \text{Lip}(K) \rightarrow L^\infty(\tilde{K})$ und das Zählmaß μ auf K und definieren

$$\begin{aligned}
S : \text{VM} &\rightarrow \text{KW}^*D_a, \\
(K, \rho) &\mapsto (L^\infty(K, \mu), L^\infty(\tilde{K}, \mu \times \mu|_{\tilde{K}}) \subset L^\infty(\tilde{K}, \mu \times \mu|_{\tilde{K}}), (d, \text{Def}(d))), \\
\psi &\mapsto (\psi^*, (\psi \times \psi|_{\tilde{K}})^*),
\end{aligned}$$

wobei ψ^* die zu ψ adjungierte beziehungsweise duale Abbildung darstellt, also $\psi^*(f) := f \circ \psi$ erfüllt.

In umgekehrter Richtung erhalten wir einen Funktor

$$\begin{aligned}
T : \text{KW}^*D_a &\rightarrow \text{VM}, \\
O &:= (L^\infty(K, \mu), E \subset L^\infty(Y, \nu), (\delta, \text{Def}(\delta))) \mapsto (X, \rho), \\
(\pi, \tau) &\mapsto \psi,
\end{aligned}$$

indem wir Satz 1.23 benutzen: Damit und nach der Diskussion in Anschluss an Abbildung 4 auf Seite 30 (zusammen mit Bemerkung 1.24 (1)) erhalten wir alle Objekte in VM bis auf isometrische Isomorphie aus einem Objekt O in KW^*D_a zurück,

wenn wir den zugehörigen endlich zerlegbaren Maßraum mit messbarer Metrik betrachten und dann das atomare Maß außer Acht lassen. Ist $O := (L^\infty(K, \mu), E \subset L^\infty(Y, \nu), (\delta, \text{Def}(\delta))) = (\mathcal{M}, E \subset \mathcal{N}, (\delta, \text{Def}(\delta)))$ ein Objekt in KW^*D_a , so ist der Normabschluss $\overline{\text{Def}(\delta_1)}^{\|\cdot\|_\infty}$ eine in \mathcal{M} dicht liegende C^* -Unteralgebra. Für einen Morphismus $(\pi, \tau) : O_1 \rightarrow O_2$ vermittelt die Einschränkung von π auf $\overline{\text{Def}(\delta_1)}^{\|\cdot\|_\infty}$ beziehungsweise $\overline{\text{Def}(\delta_2)}^{\|\cdot\|_\infty}$ demnach zwischen (kommutativen unitalen) C^* -Algebren. Aus der zu diesem $*$ -Homomorphismus gehörigen kanonischen dualen beziehungsweise adjungierten Abbildung gewinnt man dann auf natürliche Weise eine Abbildungen zwischen den **Spektren** $\overline{\text{Def}(\hat{\delta}_2)}^{\|\cdot\|_\infty}$ und $\overline{\text{Def}(\hat{\delta}_1)}^{\|\cdot\|_\infty}$ dieser C^* -Algebren, das sind die Äquivalenzklassen nichttrivialer irreduzibler Darstellungen dieser C^* -Algebren bezüglich unitärer Äquivalenz. Diese Spektren sind nach dem Satz von Gelfand-Naimark kompakte Hausdorff-Räume, auf denen nach obiger Überlegung beziehungsweise laut [66] (Theorem 16) jeweils eine (punktweise) Metrik etabliert ist, welche die Hausdorff-Topologie induziert. Die verbindende Abbildung zwischen diesen Hausdorff-Räumen, welche wir dadurch erhalten, ist kontraktiv, da sie von der dualen Abbildung eines (kontraktiven) $*$ -Homomorphismus herrührt. Diese benutzen wir als Morphismen in VM.

1.26. **BEMERKUNG.** Die **atomare einhüllende von Neumann-Algebra** einer C^* -Algebra A ist die größte atomare von Neumann-Algebra, die A umfasst und in der Bikommutante A'' enthalten ist. Sie kommt ähnlich wie die einhüllende von Neumann-Algebra von A zustande, nur bildet man nicht die Bikommutante der direkten Summe der zu allen Zuständen gehörenden Darstellungen, also die Bikommutante der universon Darstellung von A , sondern benutzt nur alle reinen Zustände. Die aus diesem Vorgehen resultierende von Neumann-Algebra ist dann atomar, vgl. [49] (4.3.7 und 4.3.8).

4. Zwei Konzepte im Vergleich

Zum Schluss dieses Kapitels vergleichen wir nun noch die beiden bisher vorgestellten Konzepte — W^* -Derivationen und kompakte quantenmetrische Räume —, die wir als funktionalanalytische Beschreibungen beziehungsweise als nicht-kommutative Analoga für kompakte metrische Räume etabliert haben.

Die Eigenschaft einer Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ in einem kompakten quantenmetrischen Raum $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ ist ziemlich stark. Dies wurde schon in der Diskussion über den Zusammenhang der Halbnorm-Eigenschaften in einem kompakten quantenmetrischen Raum und einer Metrik auf dem Zustandsraum von A mit günstigen Eigenschaften deutlich, vergleiche die Formeln (1) und (2) auf Seite 5 und die umgebenden Erläuterungen. Aber auch, wenn es in Kapitel 3 um die Konstruktion (beziehungsweise Rekonstruktion) von kompakten quantenmetrischen Räumen mit Hilfe des inversen Limes gehen wird, werden wir die Eigenschaften einer Halbnorm in solchen Räumen zu schätzen wissen, denn diese übertragen sich (fast) ohne weiteres von einer inversen Folge von kompakten quantenmetrischen Räumen auf den inversen Limes (und umgekehrt bei deren Rekonstruktion oder „Approximation“), vergleiche die Sätze 3.10 auf Seite 71 und 3.18 auf Seite 81.

Solch eine einfache Übertragung gibt es für W^* -Derivationen nicht. So ist beispielsweise im Allgemeinen falsch, dass beim Bilden des inversen Limes einer inversen Folge von W^* -Derivationen $(\mathcal{M}_m, E_m \subset \mathcal{N}_m, (\delta_m, \text{Def}(\delta_m)))$ komponentenweise der Limes der Definitionsbereiche wieder dicht im inversen Limes \mathcal{M} der W^* -Algebren \mathcal{M}_m liegt; so könnte Erstgenannter in ungünstigen Fällen nur aus $\{\mathbf{0}\}$ bestehen, im Gegensatz zu \mathcal{M} . Man müsste deshalb in der Kategorie W^*D arbeiten beziehungsweise in der Kategorie W^*D_a , das bedeutet, nur solche Objekte $(\mathcal{M}_m, E_m \subset \mathcal{N}_m, (\delta_m, \text{Def}(\delta_m)))$ betrachten, in der die atomare Einhüllende des Schwach*-Abschlusses von $\text{Def}(\delta_m)$ schon \mathcal{M} ist und Morphismen, die dies respektieren, um die Vollständigkeit der zu betrachtenden Räume (X, ρ) nicht-kommutativ zu kodieren. Dies ist aber eine Einschränkung zusätzlich zu den Einschränkungen, die durch die Definition (kommutativer) W^* -Derivationen ohnehin schon auftreten, und durch die reichhaltigen Anforderungen an einen solchen Raum ist es schwierig, nichttriviale Beispiele zu finden; so müsste stets eine W^* -Derivation auf einer von Neumann-Algebra konstruiert werden, eine nichttriviale Aufgabe.

Doch auch die Sichtweise von Weaver und W^* -Derivationen ihre Vorzüge. So zeichnet Satz 1.23 gerade diejenigen Halbnormen (von der Form $\|\delta\|_{\mathcal{N}}$) in kommutativen W^* -Derivationen aus, die von einer Metrik herrühren.

Eine derartige Charakterisierung existiert auch bei Rieffel, was wir kurz näher erläutern wollen. In [56] wird für diese Charakterisierung der Verband der reellwertigen stetigen Funktionen $C(K, \mathbb{R})$ auf einem Kompaktum K benutzt. Dieses Umfeld ist natürlich, weil in [56] Halbnormen auf Ordnungs-Eins-Räumen betrachtet werden, was im Falle der kommutativen C^* -Algebra $C(K)$ gerade dem Benutzen von Halbnormen auf der Menge der selbstadjungierten Elemente in $C(K)$, also der reellwertigen Funktionen auf K entspricht. Diese erfüllen die Ungleichung $Lip(f \vee g) \leq Lip(f) \vee Lip(g)$ ($f, g \in C(K, \mathbb{R})$), falls auf K eine Metrik ρ mit zugehöriger Lipschitz-Halbnorm $Lip(\cdot)$ existiert, wobei wir für $f, g \in C(K) \setminus Lip(K)$ als Wert für die Lipschitz-Halbnorm $Lip(f) = Lip(g) = +\infty$ setzen. Dabei wird auf [66] verwiesen, wo diese Verbands-Ungleichung allgemeiner für W^* -Derivationen kommutativer Strukturen bewiesen wird. Wir geben nun den Satz über die Charakterisierung der von Metriken stammenden Halbnormen an, den Rieffel für den Ordnungs-Eins-Raum $C(K, \mathbb{R})$ formuliert. Die Übertragung auf den Fall komplexwertiger Funktionen $C(K)$ auf einem Kompaktum K ist aber problemlos möglich, und zwar schlicht durch Einschränkung auf reellwertige Funktionen bei der Verbandsungleichung.

1.27. SATZ (vgl. [56] (8.1)). *Seien K ein kompakter Hausdorff-Raum, \mathcal{A} ein dichter Unterraum von $C(K, \mathbb{R})$, der die konstanten Funktionen enthält, und L eine Lip-Halbnorm. Weiter bezeichne \overline{L} den **Abschluss** von L , das heißt, ist $\overline{\mathcal{A}^1}$ der Abschluss von \mathcal{A}^1 in $C(K, \mathbb{R})$ bezüglich $\|\cdot\|_{\infty}$, so ist \overline{L} definiert durch*

$$\overline{L}(b) := \inf \left\{ r \geq 0 \mid b \in r \overline{\mathcal{A}^1} \right\}.$$

(Da wir für L den Wert $+\infty$ zulassen, tun wir dies auch für \overline{L} . Damit ist \overline{L} eine Halbnorm auf $\overline{\mathcal{A}}$.) Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent.

- (I) *Die Lip-Halbnorm L ist die Einschränkung der üblichen, durch Formel (3) auf Seite 6 gegebenen und zu einer Metrik auf K (nämlich $\rho_L|_K$, vergleiche Formel (1) auf Seite 5) gehörenden Lipschitz-Halbnorm auf \mathcal{A} .*

(II) Für alle $f, g \in C(K, \mathbb{R})$ gilt $\bar{L}(f \vee g) \leq \bar{L}(f) \vee \bar{L}(g)$.

Es gibt aber Beispiele (siehe etwa [56] (7.1)) für kommutative kompakte quantenmetrische Räume $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ mit $A = C(K)$, so dass die Einschränkung der Monge-Kantorovič-Metrik $\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}$ auf dem Zustandsraum $S(A)$ gemäß Formel (1) auf die reinen Zustände, also den zugrunde liegenden kompakten Raum, dort eine Metrik ρ_0 ergibt, so dass die laut Formel (2) zugehörige Halbnorm L_{ρ_0} verschieden von $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ ist, das heißt, $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ wird nicht von einer Metrik auf K induziert. Daher sind auch die von L_{ρ_0} auf dem Zustandsraum induzierte Metrik $\rho_{L_{\rho_0}}$ und $\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}$ verschieden, auch wenn sie auf den Extrempunkten übereinstimmen.

Geschickt wäre sicherlich, eine Theorie zu entwickeln, die beide Ansätze — sowohl den Rieffelschen mit kompakten quantenmetrischen Räumen als auch den von Weaver mit W^* -Derivationen — vereint. Und es gibt tatsächlich Bezugspunkte: So ist für ein Objekt $(\mathcal{M}, E \subset \mathcal{N}, (\delta, \text{Def}(\delta))) \in W^*D$ die Halbnorm $\|\delta\|_{\mathcal{N}}$ schon unterhalbstetig, wie in Proposition 3.6 in [56] gezeigt wird. Außerdem impliziert die Abgeschlossenheit des Graphen von δ in $\mathcal{M} \oplus E$ bezüglich der Schwach*-Topologie die Abgeschlossenheit des Graphen von δ bezüglich der Normtopologie, wie man sich leicht überlegt. Ebenso einfach ist die Äquivalenz der Abgeschlossenheit des Graphen von δ bezüglich der Normtopologie und die Vollständigkeit von $(\mathcal{A} = \text{Def}(\delta), \max(\|\cdot\|_{\mathcal{M}}, \|\delta\|_{\mathcal{N}}))$, was genau die Banachraum-Eigenschaft (a) aus Definition 1.1 für Lipschitz-Algebren beziehungsweise kompakte quantenmetrische Räume ist. Damit $(\overline{\text{Def}(\delta)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{M}}}, \text{Def}(\delta), \|\delta\|_{\mathcal{N}})$ eine Lipschitz-Algebra ist, muss also nur noch die Forderung $\text{Ker}(\delta) = \mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathcal{M}}$ erhoben werden, denn die Leibniz-Regel erfüllt die Derivation δ ohnehin, und fordert man zusätzlich die Eigenschaft der totalen Beschränktheit für das Tripel $(\overline{\text{Def}(\delta)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{M}}}, \text{Def}(\delta), \|\delta\|_{\mathcal{N}})$, so ist dieses sogar ein kompakter quantenmetrischer Raum.

Des Weiteren existiert bei beiden Formulierungen nicht-kommutativer metrischer Räume teilweise die Möglichkeit, Sachverhalte auszudrücken, welche für einen metrischen Raum (K, ρ) und damit für $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = (C(K), \text{Lip}(K), \text{Lip}(\cdot))$ auf Seiten von Rieffel und $(\mathcal{M}, E, (\delta, \text{Def}(\delta))) = (L^\infty(K), L^\infty(\tilde{K}), (d, \text{Lip}(K)))$ auf Seiten von Weaver offensichtlich sind. So haben wir etwa in Beispiel 1.5 beziehungsweise Bemerkung 1.6 gesehen, dass die Unterhalbstetigkeit in kompakten quantenmetrischen Räumen eine Art von Vollständigkeit widerspiegelt, die stärker ist als die Banachraumeigenschaften von $(A, \|\cdot\|_A)$ oder $(\mathcal{A}, \max(\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}))$: Aus der Konvergenz von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Lip}(K)$ gegen a bezüglich $\|\cdot\|_A$ und der Beschränktheit von $(\|a_n\|_{\mathcal{A}})_{n \in \mathbb{N}}$ folgt $a \in \mathcal{A}$. Bei W^* -Derivationen entspricht diese Eigenschaft der Schwach*-Abgeschlossenheit des Graphen von δ . Um ähnliche Aussagen zu erhalten, benutzt das eine Konzept also (Halb-)Normen und die damit verbundenen Topologien, das andere die Schwach*-Topologie.

KAPITEL 2

Der Entropie-Index

Ein Hauptziel dieser Arbeit ist unter anderem, kompakte metrische Räume und vor allem deren nicht-kommutative Analogien approximativ zu beschreiben und zu rekonstruieren, und zwar durch endliche beziehungsweise endlichdimensionale Strukturen. Einen ersten Schritt in diese Richtung tun wir in diesem Kapitel.

Dazu führen wir zunächst in Abschnitt 1 einen fraktalen Dimensionsbegriff für kompakte metrische Räume ein, den so genannten (unteren) Entropie-Index. Seine Definition geschieht mit Hilfe von endlichen Teilmengen oder — in einer äquivalenten Darstellung — von endlichen Überdeckungen des Kompaktums und natürlich der Metrik darauf.

Nachdem wir in einigen Beispielen die Berechnung des Entropie-Index durchgeführt haben, geben wir in Abschnitt 2 mit dem (ersten und zweiten) multiplikativen Entropie-Index für Lipschitz-Algebren eine (erste) funktionalanalytische Darstellung, das bedeutet, die beiden multiplikativen Entropie-Indizes liefern für die (kommutative) Lipschitz-Algebra $(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ denselben Wert wie der über die Metrik definierte untere Entropie-Index auf Ebene des Kompaktums K selbst. Neben dem Beweis für diese Aussage zeigen wir, welche Bedeutung den bei der Definition der multiplikativen Entropie-Indizes verwendeten Größen anschaulich zukommt, wie die verschiedenen multiplikativen Entropie-Indizes zusammenhängen, und geben Abschätzungen zwischen ihnen an. Daneben definieren wir die Kategorien von Lipschitz-Algebren beziehungsweise von kompakten quantenmetrischen Räumen und beweisen, dass die multiplikativen Entropie-Indizes invariant unter Isomorphismen in diesen Kategorien sind. Das beschreibende Adjektiv „multiplikativ“ für die Entropie-Indizes rührt daher, dass zur funktionalanalytischen Beschreibung der Indizes $*$ -Homomorphismen zwischen C^* -Algebren benutzt werden, welche multiplikativ sind — im Gegensatz zu etwa nur positiven Abbildungen, welche wir später in Kapitel 4 zur funktionalanalytischen Beschreibung des unteren Entropie-Index heranziehen werden.

1. Der Entropie-Index auf Ebene von kompakten Räumen

Um 1975 entwirft Benoît Mandelbrot in [41] den Begriff des Fraktals, um damit in der Natur vorkommende Objekte und deren Eigenschaften mathematisch gut beschreiben zu können. Er definiert ein Fraktal als Teilmenge eines kompakten metrischen Raumes, für welche die topologische Dimension echt kleiner ist als die Hausdorff-Besicovitch-Dimension. An dieser Definition können wir schon sehen, dass es eine Vielzahl verschiedener (und für die jeweiligen Zwecke auch nützlicher) Dimensionsbegriffe gibt, die oftmals für „zahme“ Räumen wie etwa $[0, 1]$ mit der vom Betrag induzierten Metrik denselben Wert liefern, aber auf „wildem Gebilden“ differieren können. Auf die eben

erwähnten Dimensionsbegriffe wollen wir nur insofern eingehen, als dass wir sagen, dass wir uns mit dem so genannten (unteren) Entropie-Index den für unsere eigenen Zwecke nützlichen Dimensionsbegriff schaffen, dessen Definition ganz ähnlich geartet ist wie die der Hausdorff-Besicovitch-Dimension, welche wir zum Vergleich nun angeben. Für einen kompakten metrischen Raum (K, ρ) und eine Teilmenge $M \subset K$ ist das **äußere s -dimensionale Hausdorff-Maß** von M gegeben durch

$$\overline{H^s(M)} := \liminf_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(A_i)^s \mid M \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \text{diam}(A_i) < \varepsilon \right\},$$

und die **Hausdorff-Besicovitch-Dimension** von M ist der kritische Wert s_0 für s mit

$$\overline{H^s(M)} = \begin{cases} \infty & \text{falls } s < s_0 \\ 0 & \text{falls } s > s_0 \end{cases}. \text{ Der Begriff des Durchmessers } \text{diam}(A) \text{ einer Teilmenge}$$

A von K ist dabei auf die übliche Weise zu verstehen, vergleiche Seite 5.

Es bezeichne (K, ρ) stets einen kompakten metrischen Raum.

2.1. DEFINITION (vgl. [23] (1.4, S. 32)). Seien (K, ρ) ein kompakter metrischer Raum und $\varepsilon > 0$.

Eine Menge $U \subset K$ heißt **ε -separiert**, wenn für $x, y \in U$ und $x \neq y$ gilt: $\rho(x, y) \geq \varepsilon$.

Die Größe

$$\varepsilon_U := \begin{cases} \sup\{\varepsilon > 0 \mid U \text{ ist } \varepsilon\text{-separiert}\} & \text{falls existent} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt **Separiertheit** von U in (K, ρ) .

Eine Menge \mathcal{E} von Teilmengen in K heißt **ε -fein**, wenn für alle $E \in \mathcal{E}$ gilt: $\text{diam}(E) \leq 2\varepsilon$.

Wir setzen

$$M_\varepsilon(K) := \max\{|U| \mid U \subset K, U \text{ ist } \varepsilon\text{-separiert}\} \quad \text{und}$$

$$N_\varepsilon(K) := \min\{|\mathcal{E}| \mid \mathcal{E} \text{ ist } \varepsilon\text{-fein, } \mathcal{E} \text{ ist } \varepsilon\text{-Überdeckung von } K\}.$$

Dann heißen $\log_2(M_\varepsilon(K))$ bzw. $\log_2(N_\varepsilon(K))$ **ε -Kapazität** bzw. **ε -Entropie** von (K, ρ) .

Offensichtlich gilt $\varepsilon_U = \inf\{\rho(x, y) \mid x, y \in U, x \neq y\}$.

Die Begriffe ε -Kapazität und ε -Entropie stammen aus der Informationstheorie, also der Theorie der Übertragung und Speicherung von Daten, und gehen auf Kolmogorov und Tihomirov zurück, vgl. [39]. Wir betrachten den kompakten metrischen Raum als Menge von Daten, die man übertragen oder speichern muss, und interpretieren ε als Genauigkeit, mit der dies geschehen soll. Natürlich kann im Allgemeinen nicht die kontinuierliche Datenmenge K vollständig abgespeichert werden, sondern nur eine diskrete Teilmenge. Statt eines bestimmten Signals speichert man also ein anderes Signal ab, das vom ursprünglichen einen Abstand höchstens ε hat, und dies soll noch als genügend genau angesehen werden. Die Größe $N_\varepsilon(K)$ gibt dann an, wieviele verschiedene Signale man mindestens abspeichern können muss, um ein gegebenes Datum aus einer Datenmenge beim Wiederaufrufen nach dem Speichern mit Genauigkeit ε zu rekonstruieren. Ähnlich können zwei Daten aus der vorgegebenen Datenmenge als (verlässlich) verschieden angesehen werden, wenn sie einen Abstand größer als oder

gleich ε haben, und die Größe $M_\varepsilon(K)$ gibt dann an, wieviele verschiedene Daten man höchstens abspeichern kann, damit beim Wiederauslesen zweier verschiedener abgespeicherten Daten diese immer noch als verschieden erkannt werden. Die ε -Kapazität beziehungsweise ε -Entropie entspricht dann genau der jeweiligen Anzahl von Bits, die beim Speichern oder Übertragen als binärer Code nötig sind. Wie die eben beschriebenen Maßzahlen $M_\varepsilon(K)$ und $N_\varepsilon(K)$ zusammenhängen, wird durch das folgende Lemma gezeigt.

2.2. LEMMA (vgl. [23] (Proposition 1.4.6)). *Seien (K, ρ) ein kompakter metrischer Raum, $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) := \{y \in K \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$ die offene Kugel um $x \in K$ mit Radius ε und $N_\varepsilon^*(K) := \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \{x_1, \dots, x_n\} \subset K, K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{B_\varepsilon(x_i)} \right\}$. Dann gilt für alle $\delta > 0$*

$$M_{2\varepsilon+\delta}(K) \leq N_\varepsilon(K) \leq N_\varepsilon^*(K) \leq M_\varepsilon(K).$$

BEWEIS. Sei $\{x_1, \dots, x_{M_\varepsilon(K)}\}$ eine maximale ε -separierte Teilmenge in K . Dann gibt es für alle $y \in K$ einen Index i_y mit $\rho(x_{i_y}, y) < \varepsilon$, denn sonst wäre $\{y, x_1, \dots, x_{M_\varepsilon(K)}\}$ ε -separiert, im Widerspruch zur Maximalität. Es gilt also $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_\varepsilon(K)} \overline{B_\varepsilon(x_i)}$, und es folgt $N_\varepsilon^*(K) \leq M_\varepsilon(K)$.

Die Abschätzung $N_\varepsilon(K) \leq N_\varepsilon^*(K)$ ist offensichtlich, weil Kugeln mit Radius ε spezielle Mengen mit Durchmesser höchstens 2ε sind.

Sei $\{U_1, \dots, U_n\}$ eine Überdeckung von K mit $\text{diam}(U_i) \leq 2\varepsilon$ für $1 \leq i \leq n$. Jedes U_i kann höchstens einen Punkt einer $(2\varepsilon+\delta)$ -separierten Teilmenge enthalten. Dies gilt insbesondere für $n = N_\varepsilon(K)$ und eine minimale derartige Überdeckung $\{U_1, \dots, U_{N_\varepsilon(K)}\}$ von K . Daher gilt $M_{2\varepsilon+\delta}(K) \leq N_\varepsilon(K)$. \square

2.3. BEMERKUNG. Weil wir nur kompakte Räume K betrachten, sind die Größen $M_\varepsilon(K)$ und $N_\varepsilon(K)$ stets endlich. Sind $|K| = n$ und ε genügend klein, so gilt $M_\varepsilon(K) = N_\varepsilon(K) = N_\varepsilon^*(K) = n$. Besteht K aus unendlich vielen Punkten, so gilt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon(K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_\varepsilon(K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_\varepsilon^*(K) = \infty$, und die Geschwindigkeit, mit der diese Größen für ε gegen 0 divergieren, liefert den für unsere Zwecke geeigneten Dimensionsbegriff, den wir im Folgenden definieren wollen.

2.4. DEFINITION (vgl. [23] (1.4, S. 33)). *Sei (K, ρ) ein kompakter metrischer Raum. Für $\varepsilon, s > 0$ definieren wir die Funktionen*

$$J(s, \varepsilon) := M_\varepsilon(K) \cdot \varepsilon^s \quad \text{und} \quad J(s) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J(s, \varepsilon).$$

Mit $\text{lei}(K)$ werde der kritische Wert s_0 mit

$$J(s) = \begin{cases} \infty & \text{für } s < s_0 \\ 0 & \text{für } s > s_0 \end{cases}$$

bezeichnet. Dieser heißt (**unterer**) **Entropie-Index** (engl. „lower entropy index“). Er wird von uns mit $\text{lei}(K)$ abgekürzt.

In der Definition in [23] war die Funktion J ursprünglich gegeben durch $J(s, \varepsilon) := M_\varepsilon(K) \cdot (2\varepsilon)^s$, doch der Faktor 2 ändert nichts am kritischen Wert s_0 , so dass wir ihn getrost vernachlässigen können.

Um für gegebene kompakte metrische Räume den Entropie-Index berechnen zu können, bestimmen wir nun Formeln, welche ebenfalls diesen Wert liefern. Außerdem bietet der

folgende Satz eine Rechtfertigung für den Namen „Entropie-Index“ für unseren neuen Dimensionsbegriff, welcher ja über die mit der ε -Kapazität zusammenhängenden Größe $M_\varepsilon(K)$ und nicht über die entsprechende, von der ε -Entropie stammende Größe $N_\varepsilon(K)$ definiert ist.

2.5. SATZ. *Für einen kompakten metrischen Raum (K, ρ) gilt*

$$(9) \quad \text{lei}(K) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_\varepsilon(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon^*(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

BEWEIS. Wegen

$$M_{3\varepsilon}(K) \leq N_\varepsilon(K) \leq N_\varepsilon^*(K) \leq M_\varepsilon(K)$$

und demnach

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln M_\varepsilon(K)} &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln N_\varepsilon^*(K)} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln N_\varepsilon(K)} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln M_{3\varepsilon}(K)} \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln M_{3\varepsilon}(K)} + \frac{\ln \frac{1}{3}}{\ln M_{3\varepsilon}(K)} \right) + \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\ln \frac{1}{3}}{\ln M_{3\varepsilon}(K)} \\ &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{3\varepsilon}}{\ln M_{3\varepsilon}(K)} + 0 = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln M_\varepsilon(K)} \end{aligned}$$

genügt es zu zeigen, dass $\text{lei}(K) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_\varepsilon(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ gilt.

Für alle $r \geq 0$ mit $r < \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_\varepsilon(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $\frac{\ln M_\varepsilon(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \geq r$ für $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, also $M_\varepsilon(K) \geq \frac{1}{\varepsilon^r}$. Deswegen ist $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon(K) \cdot \varepsilon^s \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^s}{\varepsilon^r} = \infty$ für alle $s < r$, woraus $\text{lei}(K) \geq r$ und damit $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_\varepsilon(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \text{lei}(K)$ aus der Beliebigkeit von $r < \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_\varepsilon(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ folgt.

Sei umgekehrt $s > \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_\varepsilon(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$. Dann gibt es ein $\tau > 0$ und eine positive Nullfolge

$(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\frac{\ln M_{\delta_n}(K)}{\ln \frac{1}{\delta_n}} < s - \tau$, also $M_{\delta_n}(K) < \left(\frac{1}{\delta_n}\right)^{s-\tau}$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} M_{\delta_n}(K) \delta_n^s \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\delta_n)^\tau = 0$. Damit ist aber $J(s) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon(K) \varepsilon^s = 0$, also $s \geq \text{lei}(K)$. Weil $s > \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_\varepsilon(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ beliebig war, folgt $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_\varepsilon(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \geq \text{lei}(K)$. \square

Aus diesem Satz und Bemerkung 2.3 folgt, dass $\text{lei}(K) = 0$, falls K nur aus endlich vielen Punkten besteht.

Im Folgenden werden wir in Beispielen den Entropie-Index berechnen. Um dies zu tun, führen wir einen weiteren Index ein, den so genannten Kästchen-Zähl-Index, zeigen, dass dieser denselben Wert liefert wie der Entropie-Index, und berechnen diesen. Wir betrachten dabei ausschließlich Kompakta in \mathbb{R}^d mit der von der euklidischen Norm induzierten Metrik für eine natürliche Zahl d .

2.6. DEFINITION (vgl. [23] (1.4, S. 36)). *Seien $\varepsilon > 0$ beliebig und $K \subset \mathbb{R}^d$ ein Kompaktum in \mathbb{R}^d . Wir überziehen \mathbb{R}^d mit einem Netz so genannter **Kästchen**, das sind halboffene Quader, der Form*

$$[n_1\varepsilon, (n_1 + 1)\varepsilon[\times \dots \times [n_d\varepsilon, (n_d + 1)\varepsilon[\quad \text{für } n_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq d.$$

Bezeichnet dann $\mathcal{K}_\varepsilon(K)$ die Anzahl solcher Kästchen, die mit K nichtleeren Schnitt haben, so wird $\text{kzi}(K) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mathcal{K}_\varepsilon(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ als **Kästchen-Zähl-Index** bezeichnet.

2.7. LEMMA. Seien K ein Kompaktum in \mathbb{R}^d , versehen mit der euklidischen Metrik, und $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Dann gilt die Abschätzung $M_{\varepsilon\sqrt{d}+\delta}(K) \leq \mathcal{K}_\varepsilon(K) \leq 3^d M_\varepsilon(K)$. Insbesondere gilt $\text{lei}(K) = \text{kzi}(K)$.

BEWEIS. Ist $\{x_1, \dots, x_{M_\varepsilon(K)}\}$ eine maximale ε -separierte Teilmenge in K , so überdeckt $\left\{ \overline{B_\varepsilon(x_i)} \mid 1 \leq i \leq M_\varepsilon(K) \right\}$ ganz K , denn sonst gäbe es ein $y \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{M_\varepsilon(K)} \overline{B_\varepsilon(x_i)}$, und $\rho(x_i, y) > \varepsilon$ für $1 \leq i \leq M_\varepsilon(K)$, also wäre $\{y, x_1, \dots, x_{M_\varepsilon(K)}\}$ ε -separiert, im Widerspruch zur Maximalität. Jede der Kugeln $\overline{B_\varepsilon(x_i)}$ kann aber mit höchstens 3^d Kästchen obiger Form nichtleeren Schnitt haben, wie Abbildung 6 für den Fall $d = 2$ andeutet. Also ist K in höchstens $3^d M_\varepsilon(K)$ Kästchen enthalten. Es folgt $\mathcal{K}_\varepsilon(K) \leq 3^d M_\varepsilon(K)$.

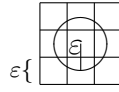


ABBILDUNG 6.

Umgekehrt kann jedes Kästchen $[n_1\varepsilon, (n_1 + 1)\varepsilon[\times \dots \times [n_d\varepsilon, (n_d + 1)\varepsilon[$ von einer abgeschlossenen Kugel $B_{\sqrt{d}\frac{\varepsilon}{2}}\left(\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\varepsilon, \dots, \left(n_d + \frac{1}{2}\right)\varepsilon\right)$ mit Radius $\frac{1}{2}\sqrt{d}\varepsilon$, also Durchmesser $\sqrt{d}\varepsilon$, überdeckt werden, und jede solche Kugel enthält höchstens einen Punkt einer $(\sqrt{d}\varepsilon + \delta)$ -separierten Menge, also $\mathcal{K}_\varepsilon(K) \geq M_{\varepsilon\sqrt{d}+\delta}(K)$.

Der Rest folgt analog zu Satz 2.5. \square

Das folgende Lemma gestattet es uns, beim Berechnen des Entropie-Index statt allen Folgen $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ nur spezielle Nullfolgen einer bestimmten Form zu betrachten.

2.8. LEMMA. Sei K ein Kompaktum in \mathbb{R}^d , versehen mit der euklidischen Metrik. Weiter seien $0 < r < 1$, $C > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon_n := C \cdot r^n$. Dann gilt $\text{lei}(K) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln M_{\varepsilon_n}(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon_n}}$.

BEWEIS. Dieser Beweis ist die Übertragung des Beweises einer ähnlichen Aussage aus [5] (Satz 5.1 auf Seite 201).

Wir zeigen, dass $\text{lei}(K) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_n}^*(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon_n}}$ gilt. Die Behauptung folgt dann aus Satz 2.5.

Wir setzen $Z := \{\varepsilon_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Seien $\varepsilon > 0$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varepsilon < r$. Wir definieren $m(\varepsilon) := \max\{\varepsilon_n \mid \varepsilon_n \in Z, \varepsilon_n \leq \varepsilon\}$. Dann gilt $m(\varepsilon) \leq \varepsilon \leq \frac{m(\varepsilon)}{r}$ und $N_{m(\varepsilon)}^*(K) \geq N_\varepsilon^*(K) \geq N_{\frac{m(\varepsilon)}{r}}^*(K)$. Wegen der Monotonie der Logarithmus-Funktion folgt

$$(10) \quad \frac{\ln N_{\frac{m(\varepsilon)}{r}}^*(K)}{\ln \frac{1}{m(\varepsilon)}} \leq \frac{\ln N_\varepsilon^*(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \leq \frac{\ln N_{m(\varepsilon)}^*(K)}{\ln \frac{r}{m(\varepsilon)}}.$$

Für die rechte Seite von (10) gilt

$$(11) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_{m(\varepsilon)}^*(K)}{\ln \frac{r}{m(\varepsilon)}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_n}^*(K)}{\ln \frac{r}{\varepsilon_n}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_n}^*(K)}{\ln r + \ln \frac{1}{\varepsilon_n}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_n}^*(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon_n}},$$

und für die linke Seite von (10)

$$(12) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_{\frac{1}{m(\varepsilon)}}^*(K)}{\ln \frac{1}{m(\varepsilon)}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_{n-1}}^*(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon_n}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_{n-1}}^*(K)}{\ln \frac{1}{r} + \ln \frac{1}{\varepsilon_{n-1}}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_n}^*(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon_n}}.$$

Die rechten Seiten von (11) und (12) stimmen überein. Wegen (10) gilt dann $\text{lei}(K) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_n}^*(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon_n}}$. \square

2.9. BEISPIEL.

- 1.) Seien $K = [0, 1]$ das Einheitsintervall und $\varepsilon > 0$. Hier benötigen wir den Kästchen-Zähl-Index noch nicht, denn offensichtlich ist $\{k\varepsilon \mid 0 \leq k \leq [\frac{1}{\varepsilon}]\}$ eine maximale ε -separierte Teilmenge von $[0, 1]$ und daher

$$\text{lei}([0, 1]) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln([\frac{1}{\varepsilon}] + 1)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 1.$$

Genauso einfach hätten wir in $[0, 1]$ eine minimale Überdeckung, bestehend aus Mengen mit Durchmesser höchstens 2ε angeben können, und zwar die Überdeckung $\{[2k\varepsilon, 2(k+1)\varepsilon] \mid 0 \leq k \leq [\frac{1}{2\varepsilon}] - 1\} \cup \{[[\frac{1}{2\varepsilon}]2\varepsilon, 1]\}$

- 2.) Im Fall $K = [0, 1] \times [0, 1]$ ist es schwieriger, eine ε -separierte Teilmenge anzugeben oder eine Überdeckung, bestehend aus Mengen vom Durchmesser höchstens 2ε . Hier benutzen wir den Kästchen-Zähl-Index. Wir überdecken K mit Kästchen der Kantenlänge ε , was in Abbildung 7 für $\varepsilon = \frac{1}{5}$ angedeutet ist.

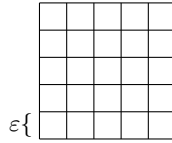


ABBILDUNG 7. $K = [0, 1] \times [0, 1]$.

Insgesamt benötigt man zum Überdecken $([\frac{1}{\varepsilon}] + 1)^2$ Kästchen, was den Kästchen-Zähl-Index $\text{kzi}(K) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(([\frac{1}{\varepsilon}] + 1)^2)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 2$, also $\text{lei}(K) = 2$ liefert.

- 3.) Nun betrachten wir als Kompaktum $K = \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ das Sierpinski-Dreieck. Um dieses zu konstruieren, starten wir mit einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck \mathcal{S}_1 der Kathetenlänge 1 und unterteilen dieses in vier kongruente Teildreiecke, indem wir die Seitenmitten verbinden. Nehmen wir das offene mittlere Dreieck heraus, erhalten wir das Kompaktum \mathcal{S}_2 . Führen wir diesen Schritt für jedes der verbleibenden Teildreiecke, deren Vereinigung \mathcal{S}_2 bildet, aus, erhalten wir auf diese Weise neun kongruente Teildreiecke, deren Vereinigung wir mit \mathcal{S}_3 bezeichnen. Jedes Glied \mathcal{S}_n der auf diesem Wege konstruierten absteigenden Folge von kompakten Mengen $(\mathcal{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also die Vereinigung von 3^{n-1} kongruenten rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecken der Kathetenlänge $(\frac{1}{2})^{n-1}$. Zwei Schritte dieses Vorgehens sind in

Abbildung 8 ausgeführt; dabei ist \mathcal{S}_n die aus allen schraffierten Dreiecken zusammengesetzte Punktmenge. Das Sierpinski-Dreieck ist nun der Schnitt dieser Kompakta und damit wieder kompakt: $\mathcal{S} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n$.

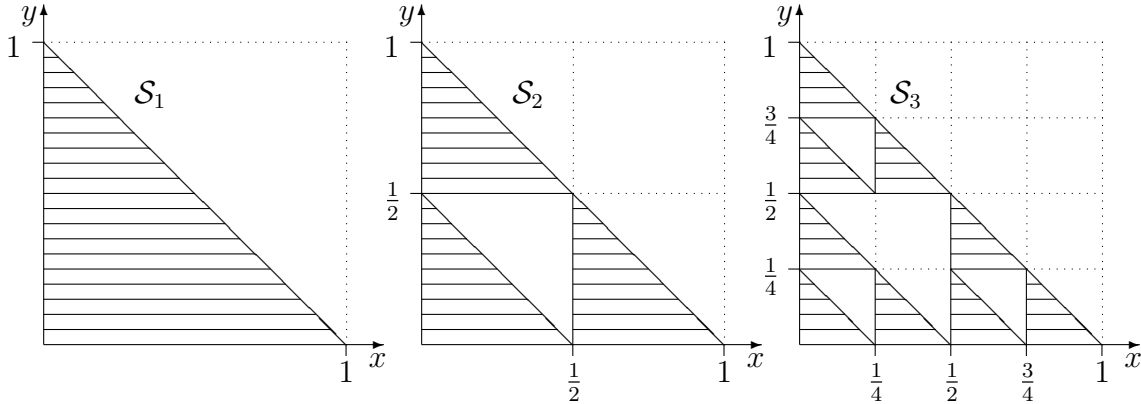


ABBILDUNG 8. Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks, überdeckt mit einem Kästchen-Netz.

Jede der Figuren \mathcal{S}_n hat also mit 3^{n-1} Kästchen der Kantenlänge $\frac{1}{2^{n-1}}$ nicht-leeren Schnitt. Die Aussage von Lemma 2.8 kann für den Kästchen-Zähl-Index anstelle des Entropie-Index genauso gezeigt werden. Somit ergibt sich $\text{lei}(K) = \text{kzi}(K) = \frac{\ln 3}{\ln 2}$.

Dass der Entropie-Index und der Kästchen-Zähl-Index für Kompakta in \mathbb{R}^d denselben Wert liefern, können wir uns auch am Konzept der metrischen Äquivalenz klar machen. Bei der Berechnung des Entropie-Index überdecken wir ein Kompaktum mit Kugeln vom Durchmesser (höchstens) 2ε bezüglich der von der euklidischen Norm induzierten Metrik, was uns auf N_ε^* führt. Hingegen sind Kästchen nichts anderes als Kugeln vom Durchmesser ε bezüglich der von der Supremumsnorm induzierten Metrik, und durch die Betrachtung solcher Kugeln erhalten wir die Größe \mathcal{K}_ε . Man kann diese Normen beziehungsweise die zugehörigen Metriken aber gegeneinander abschätzen, und dies führt stets auf denselben Entropie-Index, wie wir sehen werden.

2.10. DEFINITION. Zwei Metriken ρ_1, ρ_2 auf dem kompakten Raum K heißen **äquivalent**, wenn es Konstanten $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ gibt mit $c_1 \rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq c_2 \rho_1(x, y)$ für alle $x, y \in K$.

Zwei metrische Räume (K_1, ρ_1) und (K_2, ρ_2) heißen **metrisch äquivalent**, wenn es eine bijektive Abbildung $h : K_1 \rightarrow K_2$ gibt, so dass die Metriken ρ_1 und $\tilde{\rho}_1$ auf K_1 mit $\tilde{\rho}_1(x, y) := \rho_2(h(x), h(y))$ für $x, y \in K_1$ äquivalent sind. In diesem Falle heißt h **metrische Äquivalenz**.

Damit können wir nun die oben aufgestellte Behauptung wie folgt formulieren.

2.11. SATZ ([5] (Satz 5.3)). Sind (K_1, ρ_1) und (K_2, ρ_2) kompakte metrisch äquivalente Räume mit verbindender metrischer Äquivalenz $h : K_1 \rightarrow K_2$, so gilt $\text{lei}(K_1) = \text{lei}(K_2)$.

Unter metrischen Äquivalenzen bleibt der Entropie-Index also erhalten. Man beachte: Jede metrische Äquivalenz ist ein Homöomorphismus.

2. Der multiplikative Entropie-Index

Auch in diesem Abschnitt sei (K, ρ) ein kompakter metrischer Raum. Wie angekündigt betrachten wir zwei funktionalanalytisch mit Hilfe von $*$ -Homomorphismen zwischen C^* -Algebren definierte Entropie-Indizes für eine Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$. Wir werden zeigen, dass beide im kommutativen Fall, das heißt für die Lipschitz-Algebra $(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$, mit dem unteren Entropie-Index für K übereinstimmen.

2.12. DEFINITION. Gegeben seien eine Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ und eine C^* -Algebra F . Wir betrachten $\varepsilon > 0$.

- (1) Mit $\mathbf{kdim}(F)$ bezeichnen wir die Dimension einer maximalen kommutativen C^* -Unteralgebra von F und mit $S^e(A)$ die Menge der Extrempunkte im Zustandsraum $S(A)$ der C^* -Algebra A , also die Menge der **reinen Zustände** auf A .
- (2) Für einen $*$ -Homomorphismus $\pi : A \rightarrow F$ definieren wir die Größen

$$\varepsilon_{\pi}^1 := \sup_{\substack{a \in \mathcal{A}^1 \\ \pi(a) = \mathbf{0}}} \inf_{c \in \text{Ker}(\|\cdot\|_{\mathcal{A}})} \|a - c\|_A,$$

$$M_{\varepsilon}^1(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) := \inf\{\mathbf{kdim}(F) \mid \exists * \text{-Homomorphismus } \pi : A \rightarrow F, \varepsilon_{\pi}^1 \leq \varepsilon\},$$

$$\text{mei}^1 = \text{mei}^1(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_{\varepsilon}^1(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

und bezeichnen ε_{π}^1 als **erste Separiertheit** von π und mei^1 als **ersten multiplikativen Entropie-Index** der Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$.

- (3) Des Weiteren definieren wir für einen $*$ -Homomorphismus $\pi : A \rightarrow F$

$$\varepsilon_{\pi}^2 := \sup_{\varphi \in S^e(A)} \inf_{\psi \in S^e(F)} \rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\varphi, \psi \circ \pi),$$

$$M_{\varepsilon}^2(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) := \inf\{\mathbf{kdim}(F) \mid \exists * \text{-Homomorphismus } \pi : A \rightarrow F, \varepsilon_{\pi}^2 \leq \varepsilon\},$$

$$\text{mei}^2 = \text{mei}^2(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_{\varepsilon}^2(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

und bezeichnen ε_{π}^2 als **zweite Separiertheit** von π und mei^2 als **zweiten multiplikativen Entropie-Index** der Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$.

Wollen wir nicht zwischen dem ersten und zweiten multiplikativen Entropie-Index unterscheiden oder meinen wir beide multiplikative Entropie-Indizes, so sprechen wir einfach von dem multiplikativen Entropie-Index.

- 2.13. BEMERKUNG. (1) An dieser Stelle sei erwähnt, dass die Idee, den ersten multiplikativen Entropie-Index als funktionalanalytisches Analogon für den unteren Entropie-Index mit Hilfe eines Vergleichs von (Halb-)Normen — dieses Vorgehen werden wir in Anschluss an Satz 2.18 ausführlich diskutieren — zu definieren, von Jürgen Schweizer stammt. Dasselbe gilt für den dritten multiplikativen Entropie-Index, welchen wir in Bemerkung 2.24 besprechen.
- (2) Bezeichnen wir mit $Q^{\mathcal{A}}$ die Einschränkung der Quotientenabbildung $Q : A \rightarrow A/\mathbf{C}\mathbf{1}_A$ auf \mathcal{A} , und versehen wir Urbild- und Bildbereich mit der jeweiligen natürlichen (Halb-)Norm, betrachten wir also die Abbildung $Q^{\mathcal{A}} : (\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) \rightarrow$

$(A/\mathbb{C}\mathbf{1}_A, \|\cdot\|_{A/\mathbb{C}\mathbf{1}_A})$, so ist die erste Separiertheit von π genau die Operatornorm $\|Q^A|_{\text{Ker}(\pi)}\|$ der Abbildung $Q^A|_{\text{Ker}(\pi)}$.

- (3) Natürlich können der erste beziehungsweise der zweite multiplikative Entropie-Index den Wert $+\infty$ annehmen. Ist beispielsweise A eine einfache unendlichdimensionale C^* -Algebra, so gilt schon $M_\varepsilon^1 = M_\varepsilon^2 = \infty$. Aber auch, wenn die Größen M_ε^i endlich ist, kann der Limes inferior in der Definition von mei^i , $i = 1, 2$, unendlich sein.
- (4) Für kommutative endlichdimensionale C^* -Algebren A gilt $\dim(A) = \text{kdim}(A)$. Ist A hingegen nicht-kommutativ, laut [64] (Theorem I.11.2) also darstellbar als direktes Produkt von Matrix-Algebren $A = \prod_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{C})$, so ist $\dim(A) = \sum_{i=1}^k n_i^2$, jedoch $\text{kdim}(A) = \sum_{i=1}^k n_i$. Dass diese zuletzt genannte Größe und nicht die übliche Dimension für C^* -Algebren bei der Definition des Entropie-Index zu benutzen ist, zeigt sich in Beispielen: In Beispiel 1.8 beziehungsweise Beispiel 3.20 auf Seite 88 behandeln wir die rationale Drehalgebra A_ϑ für eine rationale Zahl $\vartheta \in [0, 1[$, die im Falle $\vartheta = 0$ mit der kommutativen C^* -Algebra $A_\vartheta = C(\mathbf{T}^2)$ der stetigen Funktionen auf dem 2-Torus übereinstimmt. Der zu $C(\mathbf{T}^2)$ gehörige multiplikative Entropie-Index stimmt laut Theorem 2.20 mit dem Entropie-Index von \mathbf{T}^2 überein, ist also 2. Dadurch, dass wir bei der Definition des multiplikativen Entropie-Index auf die Dimension einer maximalen kommutativen C^* -Unteralgebra von endlichdimensionalen C^* -Algebren zurückgreifen, können wir zeigen, dass der zu A_ϑ für rationales ϑ gehörige multiplikative Entropie-Index ebenfalls 2 und nicht größer ist, wie anderenfalls zu erwarten wäre.

Ähnlich wie beim unteren Entropie-Index für einen kompakten metrischen Raum sehen wir auch hier, dass $\text{mei}^1(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A) = \text{mei}^2(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A) = 0$ für endlichdimensionale C^* -Algebren A gilt, weil wir $F = A$ und $\pi = \text{id}_A$ betrachten können. Eine weitergehende Aussage über das Verhältnis zwischen dem ersten und zweiten multiplikativen Entropie-Index liefert der Satz 2.15. Vorweg beweisen wir ein Lemma.

2.14. LEMMA. *Für eine C^* -Algebra A und $a \in A$ gilt $\frac{1}{2}\|a\|_A \leq \sup_{\varphi \in S^e(A)} |\varphi(a)| \leq \|a\|_A$.*

BEWEIS. Ist $a \in A$ selbstadjungiert, so existiert sogar ein reiner Zustand φ mit $\|a\|_A = |\varphi(a)|$, (vergleiche etwa [16] (Lemma I.9.10),) und deshalb gilt $\sup_{\varphi \in S^e(A)} |\varphi(a)| \stackrel{(*)}{=} \|a\|_A$ für selbstadjungierte $a \in A$.

Sei also $a \in A$ nicht selbstadjungiert mit der kanonischen Zerlegung $a = b + ic$ für selbstadjungierte Elemente $b = \frac{a+a^*}{2}, c = \frac{a-a^*}{2i}$. Dann gilt $\sup_{\varphi \in S^e(A)} |\varphi(a)| \leq \sup_{\varphi \in S(A)} |\varphi(a)| \leq \|a\|_A$.

Andererseits ist

$$|\varphi(a)| = |\varphi(b) + i\varphi(c)| = \sqrt{\varphi(b)^2 + \varphi(c)^2} \geq \max(|\varphi(b)|, |\varphi(c)|)$$

für alle $\varphi \in S^e(A)$, und somit gilt

$$\sup_{\varphi \in S^e(A)} |\varphi(a)| \geq \max\left(\sup_{\varphi \in S^e(A)} |\varphi(b)|, \sup_{\varphi \in S^e(A)} |\varphi(c)|\right).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|a\|_A &= \frac{1}{2}\|b + ic\|_A \leq \frac{1}{2}(\|b\|_A + \|c\|_A) \leq \max(\|b\|_A, \|c\|_A) \\ &= \max\left(\sup_{\varphi \in S^e(A)} |\varphi(b)|, \sup_{\varphi \in S^e(A)} |\varphi(c)|\right) \leq \sup_{\varphi \in S^e(A)} |\varphi(a)| \end{aligned}$$

wegen der Gleichheit (*) für die selbstadjungierten Elemente b, c . \square

2.15. SATZ. Ist $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A)$ eine Lipschitz-Algebra, so gilt

$$\text{mei}^1(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A) \leq 2 \cdot \text{mei}^2(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A).$$

BEWEIS. Seien F eine C^* -Algebra, $\pi : A \rightarrow F$ ein $*$ -Homomorphismus, $d \in \mathcal{A}$, $\varphi \in S^e(A)$ und $\psi \in S^e(F)$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\varphi(d)| &= |\varphi(d) - \psi \circ \pi(d) + \psi \circ \pi(d)| \leq |\varphi(d) - \psi \circ \pi(d)| + |\psi \circ \pi(d)| \\ &\leq |\varphi(d) - \psi \circ \pi(d)| + \sup_{\tilde{\psi} \in S^e(F)} \left| \tilde{\psi} \circ \pi(d) \right| \\ &\leq \rho_{\|\cdot\|_A}(\varphi, \psi \circ \pi) \cdot \|d\|_A + \sup_{\tilde{\psi} \in S^e(F)} \left| \tilde{\psi} \circ \pi(d) \right|. \end{aligned}$$

Da dies für beliebiges $\psi \in S(F)$ gilt, folgt

$$(13) \quad |\varphi(d)| \leq \inf_{\psi \in S^e(F)} \rho_{\|\cdot\|_A}(\varphi, \psi \circ \pi) \cdot \|d\|_A + \sup_{\tilde{\psi} \in S^e(F)} \left| \tilde{\psi} \circ \pi(d) \right|.$$

Für $a \in \mathcal{A}^1 \cap \text{Ker}(\pi)$ erhalten wir aus Formel (13) die Abschätzung (*) in der Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \inf_{c \in \text{Ker}(\|\cdot\|_A)} \|a - c\|_A &\stackrel{(2.14)}{\leq} \|a\|_A \leq 2 \sup_{\varphi \in S^e(A)} |\varphi(a)| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} 2 \sup_{\varphi \in S^e(A)} \inf_{\psi \in S^e(F)} \rho_{\|\cdot\|_A}(\varphi, \psi \circ \pi) \cdot \|a\|_A + 2 \sup_{\tilde{\psi}_m \in S^e(F)} \left| \tilde{\psi}_m \circ \pi(a) \right| \\ &= 2\varepsilon_\pi^2 \cdot 1 + 0 = 2 \cdot \varepsilon_\pi^2 \end{aligned}$$

und damit die Behauptung durch Bilden des Supremums über alle $a \in \mathcal{A}^1 \cap \text{Ker}(\pi)$ auf der linken Seite. \square

2.16. BEMERKUNG. Eine Abschätzung in die umgekehrte Richtung, also von ε_π^2 durch ein Vielfaches von ε_π^1 nach oben ist nicht so einfach möglich: Man erkennt auf der Suche nach einer Abschätzung, dass die Existenz gewisser Elemente in A beziehungsweise die Konstruktion von Fortsetzungen von stetigen Funktionen auf den reinen Zuständen der C^* -Algebra A zu affinen stetigen Funktionen auf ganz $S(A)$ nötig wären, analog etwa zur Konstruktion der Funktion g im Beweis von Theorem 2.20. Derartiges Fortsetzen ist aber nicht ohne weiteres möglich, vergleiche hierzu etwa [3] (II.3 und II.4) oder [4].

Mit dem multiplikativen Entropie-Index haben wir für das Tripel $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A)$ eine Invariante gefunden, analog zum Entropie-Index für kompakte metrisch äquivalente Räume, vergleiche Satz 2.11. Wir wollen dies in Satz 2.18 zeigen. Um die Aussage dort aber

adäquat formulieren zu können und der Tatsache, dass wir zum ersten Mal Abbildungen zwischen Lipschitz-Algebren betrachten, gebührend Rechnung zu tragen, führen wir zunächst die Kategorie der Lipschitz-Algebren (und der kompakten quantenmetrischen Räume) ein und erklären, was wir unter Isomorphismen zwischen derartigen Objekten verstehen wollen.

2.17. DEFINITION. *Mit LIP (KQR) bezeichnen wir die **Kategorie der Lipschitz-Algebren (der kompakten quantenmetrischen Räume)**. Deren Objekte bestehen aus Lipschitz-Algebren (kompakten quantenmetrischen Räumen), und Morphismen $\pi : (A_1, \mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1}) \rightarrow (A_2, \mathcal{A}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2})$ zwischen derartigen Objekten sind (kontraktive) $*$ -Homomorphismen $\pi : A_1 \rightarrow A_2$ zwischen C^* -Algebren, so dass $\pi(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_2$ gilt und $\pi|_{\mathcal{A}_1}$ eine Kontraktion bezüglich der jeweiligen Halbnorm ist.*

*Zwei Objekte $(C, \mathcal{C}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$ und $(D, \mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}})$ aus LIP beziehungsweise KQR heißen **isomorph**, wenn es einen Morphismus $\pi : (C, \mathcal{C}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}}) \rightarrow (D, \mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}})$ gibt, so dass $\pi : C \rightarrow D$ ein Isomorphismus von C^* -Algebren ist, $\pi|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ bijektiv ist und die Halbnormen $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ äquivalent sind. Der Morphismus $\pi : (C, \mathcal{C}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}}) \rightarrow (D, \mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}})$ heißt in diesem Falle ein **Isomorphismus**.*

2.18. SATZ. *Seien $(A_1, \mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1})$ und $(A_2, \mathcal{A}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2})$ zwei isomorphe Lipschitz-Algebren mit Isomorphismus $\gamma : (A_1, \mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1}) \rightarrow (A_2, \mathcal{A}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2})$. Dann gelten für die Konstanten $c_1, c_2 > 0$ mit $c_1\|a\|_{\mathcal{A}_1} \leq \|\gamma(a)\|_{\mathcal{A}_2} \leq c_2\|a\|_{\mathcal{A}_1}$ für alle $a \in \mathcal{A}_1$ die Abschätzungen*

$$M_{c_2\varepsilon}^1(A_1, \mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1}) \leq M_\varepsilon^1(A_2, \mathcal{A}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2}) \leq M_{c_1\varepsilon}^1(A_1, \mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1})$$

und

$$M_{c_2\varepsilon}^2(A_1, \mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1}) \leq M_\varepsilon^2(A_2, \mathcal{A}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2}) \leq M_{c_1\varepsilon}^2(A_1, \mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1})$$

Insbesondere ist $\text{mei}^1(A_1, \mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1}) = \text{mei}^1(A_2, \mathcal{A}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2})$ und $\text{mei}^2(A_1, \mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1}) = \text{mei}^2(A_2, \mathcal{A}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2})$.

BEWEIS. Die Abbildung γ ist als injektiver $*$ -Homomorphismus unitaler C^* -Algebren mit $\gamma(\mathbf{1}_{A_1}) = \mathbf{1}_{A_2}$ isometrisch. Weiter induziert jeder $*$ -Homomorphismus $\pi_1 : A_1 \rightarrow F$ in eine endlichdimensionale C^* -Algebra F einen $*$ -Homomorphismus $\pi_2 : A_2 \rightarrow F$, nämlich $\pi_2 := \pi_1 \circ \gamma^{-1}$, und wird von eben diesem $*$ -Homomorphismus π_2 induziert. Folglich gilt $\pi_1(a) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \pi_2(\gamma(a)) = \mathbf{0}$ beziehungsweise $\gamma(\text{Ker}(\pi_1)) = \text{Ker}(\pi_2)$. Wegen $c_1\|a\|_{\mathcal{A}_1} \leq \|\gamma(a)\|_{\mathcal{A}_2} \leq c_2\|a\|_{\mathcal{A}_1}$ für zwei positive Konstanten c_1, c_2 und alle $a \in \mathcal{A}_1$ folgt $\text{Ker}(\|\cdot\|_{\mathcal{A}_2}) = \gamma(\text{Ker}(\|\cdot\|_{\mathcal{A}_1}))$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\pi_2}^1 &= \sup_{\substack{b \in \mathcal{A}_2 \\ \|\gamma(b)\|_{\mathcal{A}_2} \leq 1 \\ \pi_2(b) = \mathbf{0}}} \inf_{m \in \text{Ker}(\|\cdot\|_{\mathcal{A}_2})} \|b - m\|_{\mathcal{A}_2} = \sup_{\substack{a \in \mathcal{A}_1 \\ \|\gamma(a)\|_{\mathcal{A}_2} \leq 1 \\ \pi_2 \circ \gamma(a) = \mathbf{0}}} \inf_{m \in \text{Ker}(\|\cdot\|_{\mathcal{A}_1})} \|\gamma(a) - \gamma(m)\|_{\mathcal{A}_2} \\ &\leq \sup_{\substack{a \in \mathcal{A}_1 \\ c_1\|a\|_{\mathcal{A}_1} \leq 1 \\ \pi_2 \circ \gamma(a) = \mathbf{0}}} \inf_{m \in \text{Ker}(\|\cdot\|_{\mathcal{A}_1})} \|a - m\|_{\mathcal{A}_1} = \sup_{\substack{a \in \mathcal{A}_1 \\ \|a\|_{\mathcal{A}_1} \leq 1 \\ \pi_2 \circ \gamma(a) = \mathbf{0}}} \inf_{m \in \text{Ker}(\|\cdot\|_{\mathcal{A}_1})} \left\| \frac{1}{c_1}a - m \right\|_{\mathcal{A}_1} = \frac{1}{c_1} \varepsilon_{\pi_2 \circ \gamma}^1. \end{aligned}$$

Analog zeigt man $\varepsilon_{\pi_1}^1 \leq c_2 \varepsilon_{\pi_1 \circ \gamma^{-1}}^1$, und die Behauptung für den ersten multiplikativen Entropie-Index folgt.

Des Weiteren induziert jeder reine Zustand $\varphi_1 : A_1 \rightarrow \mathbb{C}$ den Zustand $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \gamma^{-1}$ auf A_2 beziehungsweise wird von einem reinen Zustand φ_2 auf A_2 via $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \gamma$ induziert.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\pi_1}^2 &= \sup_{\varphi_1 \in S^e(A_1)} \inf_{\psi \in S^e(F)} \rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}_1}}(\varphi_1, \psi \circ \pi_1) = \sup_{\varphi_1 \in S^e(A_1)} \inf_{\psi \in S^e(F)} \sup_{\substack{a \in \mathcal{A}_1 \\ \|a\|_{\mathcal{A}_1} \leq 1}} |\varphi_1(a) - \psi \circ \pi_1(a)| \\
&= \sup_{\varphi_2 \in S^e(A_2)} \inf_{\psi \in S^e(F)} \sup_{\substack{a \in \mathcal{A}_1 \\ \|a\|_{\mathcal{A}_1} \leq 1}} |\varphi_2 \circ \gamma(a) - \psi \circ \pi_1(a)| \\
&= \sup_{\varphi_2 \in S^e(A_2)} \inf_{\psi \in S^e(F)} \sup_{\substack{b \in \mathcal{A}_2 \\ \|\gamma^{-1}(b)\|_{\mathcal{A}_1} \leq 1}} |\varphi_2(b) - \psi \circ \pi_1 \circ \gamma^{-1}(b)| \\
&\leq \sup_{\varphi_2 \in S^e(A_2)} \inf_{\psi \in S^e(F)} \sup_{\substack{b \in \mathcal{A}_2 \\ \|b\|_{\mathcal{A}_2} \leq c_2}} |\varphi_2(b) - \psi \circ \pi_1 \circ \gamma^{-1}(b)| = c_2 \varepsilon_{\pi_1 \circ \gamma^{-1}}^2.
\end{aligned}$$

Mit einer ähnlichen Rechnung ergibt sich $\varepsilon_{\pi_2}^2 \leq \frac{1}{c_1} \varepsilon_{\pi_2 \circ \gamma}^2$. Die Behauptung folgt. \square

Wir wollen die Formel für die erste Separiertheit eines Homomorphismus π von A in eine C^* -Algebra F interpretieren. Zu diesem Zweck abstrahieren beziehungsweise vereinfachen wir die Gegebenheiten weiter und betrachten allgemein einen Vektorraum V zusammen mit einer Norm $\|\cdot\|$ und einer Halbnorm $\|\cdot\|_H$. Falls notwendig können wir auch die beiden Normen $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|'_H$ auf dem Quotientenraum von V modulo $\text{Ker}(\|\cdot\|_H)$ betrachten. Bezogen auf unseren Fall, dass eine Lipschitz-Algebra vorliegt, stimmt V mit $\mathcal{A} \cap \text{Ker}(\pi)$, versehen mit der Norm $\|\cdot\|_A$ und der Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$, überein; die C^* -Algebra A , die wir jederzeit zurückgewinnen können, indem wir \mathcal{A} bezüglich $\|\cdot\|_A$ vervollständigen, vergessen wir für den Augenblick. Die erste Separiertheit von π vergleicht nun diese Normen, das heißt, wir nehmen uns Vektoren $v \in V$, die bezüglich der einen Norm höchstens eine gewisse Größe haben, und untersuchen, wie groß sie bezüglich der anderen Norm werden können:

$$(14) \quad \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_H \leq 1}} \|v\|' = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_H \leq 1}} \inf_{m \in \text{Ker}(\|\cdot\|_H)} \|v - m\|$$

Wir messen also Abstände im Vektorraum, hier den Abstand der Menge von Vektoren v mit $\|v\|_H \leq 1$ zum Kern der Halbnorm. Eine weitere, für unsere Zwecke viel günstigere und aussagekräftigere Interpretation dieser Formel werden wir einsehen, wenn wir in Theorem 2.20 gezeigt haben, dass für einen kompakten metrischen Raum (K, ρ) die Indizes übereinstimmen, also $\text{lei}(K) = \text{mei}^i(C(K), \text{Lip}(K), \text{Lip}(\cdot))$ für $i = 1, 2$ gilt. Damit haben wir dann gezeigt, dass der multiplikative Entropie-Index einen funktionalanalytischen Ausdruck für den Entropie-Index darstellt. Ebenso geben wir dann auch eine einfache anschauliche Interpretation für den zweiten multiplikativen Entropie-Index. Vorweg nehmen wir ein Lemma, in dem wir die $*$ -Homomorphismen von $C(K)$ nach \mathbb{C} beschreiben.

2.19. LEMMA. *Seien K ein kompakter Hausdorff-Raum und $\mathbf{0} \neq \pi : C(K) \rightarrow \mathbb{C}$ ein $*$ -Homomorphismus. Dann ist $\pi = \delta_x : C(K) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(x)$ eine Punktauswertung für ein $x \in K$.*

BEWEIS. Wir verweisen auf [68]. Dort wird für kompakte Hausdorff-Räume K gezeigt, dass $I \subset C(K)$ genau dann ein abgeschlossenes Ideal ist, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge $D \subset K$ mit $I = J_D := \{f \in C(K) \mid f|_D = 0\}$ gibt, vergleiche [68] (IX.2, Beispiel (g)). Aufgrund der bijektiven Korrespondenz zwischen den maximalen Idealen

in $C(K)$ und den Homomorphismen $\mathbf{0} \neq \pi : C(K) \rightarrow \mathbb{C}$ (siehe etwa [68] (IX.2.7 (b))) und aufgrund der Abgeschlossenheit maximaler Ideale in C^* -Algebren ([68] (IX.2.5 (b))) ergibt sich dann die Behauptung. \square

2.20. THEOREM. *Für die zu einem kompakten metrischen Raum (K, ρ) gehörende kommutative Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = (C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ gilt*

$$\text{lei}(K) = \text{mei}^1(C(K), Lip(K), Lip(\cdot)) = \text{mei}^2(C(K), Lip(K), Lip(\cdot)).$$

BEWEIS. Der Kern der Lipschitz-Halbnorm ist $\mathcal{A}^0 = \mathbb{C}\mathbf{1}_K$.

Wir sehen, dass A nicht einfach ist. Also existieren $*$ -Homomorphismen in endlichdimensionale C^* -Algebren F . Sei π ein $*$ -Homomorphismus von $C(K)$ in die endlichdimensionale unitale C^* -Algebra F , welche laut [64] (Theorem I.11.2) als direkte Summe von Matrix-Algebren mit Einträgen in \mathbb{C} dargestellt werden kann. Als Bild einer kommutativen C^* -Algebra unter einem $*$ -Homomorphismus ist das Bild von π kommutativ; deswegen können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit F als direkte Summe von Diagonalmatrizen oder einfacher als \mathbb{C}^{m_π} für eine natürliche Zahl m_π mit koordinatenweiser Multiplikation auffassen. Dann besteht $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_{m_\pi})$ aus einem m_π -Tupel von $*$ -Homomorphismen von $C(K)$ nach \mathbb{C} , und jeder derartige $*$ -Homomorphismus π_i entspricht einer Punktauswertung in einem Punkt $x_i \in K$ nach Lemma 2.19. Wir bezeichnen des Weiteren die Menge der Auswertungspunkte von π mit $X_\pi := \{x_1, \dots, x_{m_\pi}\}$ und π als Punktauswertung in X_π . Außerdem nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Surjektivität von π an.

Wir definieren die Hilfsgrößen

$$\mu_\pi := \begin{cases} \sup \{r > 0 \mid \exists x \in K \text{ mit } B_r(x) \cap \{x_1, \dots, x_{m_\pi}\} = \emptyset\} & \text{falls existent} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$M_\varepsilon^\mu(K) := \min \{n \in \mathbb{N} \mid \exists * \text{-Homomorphismus } \pi : C(K) \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ mit } \mu_\pi \leq \varepsilon\}.$$

Die Größe μ_π heißt **Maschenweite** der Punktauswertung π in $\{x_1, \dots, x_{m_\pi}\}$. Der Name rührt daher, dass man sich die Auswertungspunkte von π vorstellen kann wie die Maschen eines Netzes, und die Maschenweite von π ist dann genau die maximale Größe eines Fisches, der gerade noch durch die Maschen hindurchpasst. Wir geben nun für spätere Zwecke eine Umformulierung der Maschenweite.

2.21. LEMMA. *Seien (K, ρ) ein kompakter metrischer Raum und $\pi : C(K) \rightarrow F$ ein $*$ -Homomorphismus in eine endlichdimensionale C^* -Algebra F . Dann gilt $\mu_\pi = \sup_{x \in K} \min_{y \in X_\pi} \rho(x, y) \leq \text{diam}(K)$. Außerdem wird μ_π stets angenommen, das heißt, es existiert ein $z \in K$ mit $\mu_\pi = \min_{y \in X_\pi} \rho(z, y)$.*

BEWEIS. Wir setzen $d_x := \min_{y \in X_\pi} \rho(x, y)$ für $x \in K$ und weiter $R := \sup_{x \in K} d_x = \sup_{x \in K} \min_{y \in X_\pi} \rho(x, y)$.

Falls $K = X_\pi$, so existiert kein $r > 0$ mit $B_r(x) \cap X_\pi = \emptyset$ für $x \in K$, also gilt $\mu_\pi = 0 = R$.

Sei also $K \neq X_\pi$. Dann existiert ein $x \in K \setminus X_\pi$, und daher ist $\mu_\pi > 0$ und ebenso $d_x > 0$. Für alle $0 < \delta < d_x$ gilt $B_\delta(x) \cap X_\pi = \emptyset$, also existiert für alle $\delta < d_x$ ein $z \in K$ (nämlich z.B. x) mit $B_\delta(z) \cap X_\pi = \emptyset$. Somit gilt $\delta \leq \mu_\pi$, folglich $d_x \leq \mu_\pi$, und Bilden des Supremums auf der linken Seite liefert $R \leq \mu_\pi$.

Seien umgekehrt $\varepsilon > 0$ beliebig und $r > 0$ mit $0 < \mu_\pi - \varepsilon < r \leq \mu_\pi$. Dann existiert ein $x \in K$ mit $B_r(x) \cap X_\pi = \emptyset$, das heißt $d_x \geq r > \mu_\pi - \varepsilon$. Bilden wir auf der linken Seite

der letzten Ungleichung das Supremum, so erhalten wir $R \geq \mu_\pi - \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die andere Abschätzung und damit $\mu_\pi = \sup_{x \in K} \min_{y \in X_\pi} \rho(x, y)$.

Die Abschätzung $\mu_\pi \leq \text{diam}(K)$ ist klar.

Falls $K = X_\pi$, so erfüllt $z := y_1$ die Behauptung $\mu_\pi = \min_{y \in X_\pi} \rho(z, y)$.

Sei wieder $K \neq X_\pi$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir setzen $\delta := \varepsilon$. Seien $x_1, x_2 \in K$ mit $\rho(x_1, x_2) < \delta$. Wir wählen $y_i \in X_\pi$ mit $d_{x_i} = \rho(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2$). Es gilt

$$\rho(x_1, y_1) \stackrel{(1)}{\leq} \rho(x_1, y_2) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, y_2) < \delta + \rho(x_2, y_2),$$

$$\rho(x_2, y_2) \stackrel{(2)}{\leq} \rho(x_2, y_1) \leq \rho(x_2, x_1) + \rho(x_1, y_1) < \delta + \rho(x_1, y_1),$$

wobei (i) aufgrund der Definition von y_i gilt ($i = 1, 2$). Somit ist $|d_{x_1} - d_{x_2}| = |\rho(x_1, y_1) - \rho(x_2, y_2)| < \delta = \varepsilon$, und $x \mapsto d_x$ ist (gleichmäßig) stetig, nimmt also auf K sein Supremum an. \square

Wir fahren mit dem Beweis von Theorem 2.20 fort und zeigen als Nächstes $\frac{1}{2}\mu_\pi \leq \varepsilon_\pi^1 \leq \mu_\pi$.

Die Abbildung $g : K \rightarrow [0, \text{diam}(K)]$, $x \mapsto \min\{\rho(x, x_i) \mid 1 \leq i \leq m_\pi\}$ erfüllt offensichtlich $g \in \text{Lip}(K)$, $\text{Lip}(g) \leq 1$, $\pi(g) = \mathbf{0}$ und $\|g\|_\infty = \sup_{x \in K} \min_{1 \leq i \leq m_\pi} \rho(x, x_i) = \mu_\pi$.

Mit $c_0 := \frac{1}{2}\|g\|_\infty$ gilt

$$\varepsilon_\pi^1 = \sup_{\substack{h \in \text{Lip}(K) \\ \text{Lip}(h) \leq 1 \\ \pi(h) = \mathbf{0}}} \inf_{c \in \mathbb{C}} \|h - c\mathbf{1}_K\|_\infty \geq \inf_{c \in \mathbb{C}} \|g - c\mathbf{1}_K\|_\infty = \|g - c_0\mathbf{1}_K\|_\infty = \frac{1}{2}\|g\|_\infty = \frac{1}{2}\mu_\pi,$$

und wir erhalten $\frac{1}{2}\mu_\pi \leq \varepsilon_\pi^1$.

Sei umgekehrt $h \in \text{Lip}(K)$ mit $\text{Lip}(h) \leq 1$ und $\pi(h) = \mathbf{0}$. Dann kann h wegen $h(x_i) = 0$ für $1 \leq i \leq m_\pi$ aber höchstens Funktionswerte vom Betrag μ_π annehmen. Damit können sich die Funktionswerte von h in zwei beliebigen Punkten von K vom Betrag her höchstens um $2\mu_\pi$ unterscheiden, nämlich dann, wenn $y_0, z_0 \in K$ existieren mit $|h(y_0)| = |h(z_0)| = \mu_\pi$ und $h(y_0) = -h(z_0)$. In diesem Falle ist also $\mu_\pi = \|h\|_\infty = \inf_{c \in \mathbb{C}} \|h - c\mathbf{1}_K\|_\infty$. Da diese Betrachtung für alle lipschitzstetigen Funktionen h mit Lipschitz-Halbnorm ≤ 1 und Funktionswert 0 auf $\{x_1, \dots, x_{m_\pi}\}$ angestellt wurde, gilt die andere Ungleichung

$$\mu_\pi \geq \sup_{\substack{h \in \text{Lip}(K) \\ \text{Lip}(h) \leq 1 \\ \pi(h) = \mathbf{0}}} \inf_{c \in \mathbb{C}} \|h - c\mathbf{1}_K\|_\infty = \varepsilon_\pi^1.$$

Insgesamt gilt also $\frac{1}{2}\mu_\pi \leq \varepsilon_\pi^1 \leq \mu_\pi$.

Außerdem stimmen μ_π und ε_π^2 überein wegen

$$\begin{aligned} \mu_\pi &= \sup_{x \in K} \min_{y \in X_\pi} \rho(x, y) = \sup_{x \in K} \inf_{y \in X_\pi} \sup_{\substack{g \in \text{Lip}(K) \\ \text{Lip}(g) \leq 1}} |g(x) - g(y)| \\ &= \sup_{\varphi \in S^e(A)} \inf_{\psi \in S^e(\text{Im}(\pi))} \sup_{\substack{g \in \text{Lip}(K) \\ \text{Lip}(g) \leq 1}} |\varphi(g) - \psi \circ \pi(g)| \\ &= \sup_{\varphi \in S^e(A)} \inf_{\psi \in S^e(F)} \rho_{\text{Lip}(\cdot)}(\varphi, \psi \circ \pi) = \varepsilon_\pi^2, \end{aligned}$$

wie wir mit Hilfe von Lemma 2.21 und wegen der Surjektivität von π erhalten und weil die reinen Zustände auf $C(K)$ genau die Punktauswertungen auf K sind.

Der eben gezeigte Zusammenhang zwischen der Maschenweite und den multiplikativen Entropie-Indizes liefert $M_{2\varepsilon}^\mu(K) \leq M_\varepsilon^1(C(K), Lip(K), Lip(\cdot)) \leq M_\varepsilon^\mu(K)$ und $M_\varepsilon^2(C(K), Lip(K), Lip(\cdot)) = M_\varepsilon^\mu(K)$.

Wir zeigen nun noch $N_\varepsilon(K) \leq M_\varepsilon^\mu(K) \leq M_\varepsilon(K)$. Insgesamt folgt dann aber $M_\varepsilon(K) \geq M_\varepsilon^i(C(K), Lip(K), Lip(\cdot)) \geq N_{2\varepsilon}(K)$ für $i = 1, 2$, und deswegen liefern auch M_ε^1 und M_ε^2 den Entropie-Index, was wie in Satz 2.5 gezeigt wird.

Sei also $\{y_1, \dots, y_{M_\varepsilon(K)}\}$ eine maximale ε -separierte Teilmenge von K . Dann überdeckt $\left\{ \overline{B_\varepsilon(y_i)} \mid 1 \leq i \leq M_\varepsilon(K) \right\}$ ganz K , also liegt für jedes $x \in K$ in einer abgeschlossenen Kugel um x mit Radius ε ein $y \in \{y_1, \dots, y_{M_\varepsilon(K)}\}$. Es folgt $\mu_\pi \leq \varepsilon$ und demnach $M_\varepsilon(K) \geq M_\varepsilon^\mu(K)$.

Ist $\pi : C(K) \rightarrow \mathbb{C}^{M_\varepsilon^\mu(K)}$ eine Punktauswertung in $M_\varepsilon^\mu(K)$ Punkten $\{x_1, \dots, x_{M_\varepsilon^\mu(K)}\}$ und $\mu_\pi \leq \varepsilon$, so überdeckt $\left\{ \overline{B_\varepsilon(x_i)} \mid 1 \leq i \leq M_\varepsilon^\mu(K) \right\}$ ganz K , denn für jedes $x \in K$ gilt $\min_{1 \leq i \leq M_\varepsilon^\mu(K)} \rho(x, x_i) \leq \mu_\pi \leq \varepsilon$. Es folgt $M_\varepsilon^\mu(K) \geq N_\varepsilon(K)$.

Damit ist alles gezeigt. \square

2.22. BEMERKUNG. Man zeigt genauso einfach, dass für die Maschenweite

$$\mu_\pi = \sup_{\substack{f \in Lip(K) \\ Lip(f) \leq 1 \\ \pi(f) = \mathbf{0}}} \|f\|_\infty$$

gilt, woraus oben gezeigte Abschätzung zwischen $\frac{1}{2}\mu_\pi \leq \varepsilon_\pi^1 \leq \mu_\pi$ ebenso leicht ersichtlich ist.

Die Diskussion nach Satz 2.18 um die Bedeutung des ersten multiplikativen Entropie-Index im Spezialfall der Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = (C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ für einen kompakten metrischen Raum (K, ρ) führen wir nun weiter. In diesem Falle muss die erste Separiertheit ε_π^1 und damit $mei^1(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ selbst mit der Abstandsmessung in (K, ρ) zusammenhängen, wie die Abschätzung $\frac{1}{2}\mu_\pi \leq \varepsilon_\pi^1 \leq \mu_\pi$ aus dem Beweis von Theorem 2.20 beziehungsweise der Formel in Bemerkung 2.22 hervorgeht.

Wir diskutieren ein Beispiel und betrachten das Einheitsintervall $K = [0, 1]$ mit der vom Betrag induzierten Metrik ρ und darauf eine lipschitzstetige Funktion f . Diese ist gleichmäßig stetig, das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass aus $\rho(x, y) < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in K$ folgt, und wir können f gleichmäßig durch stückweise affine Funktionen approximieren, wie wir in Abbildung 9 angedeutet haben. Als Stützstellen dieser stückweise affinen Funktionen, das sind die endlich vielen Punkte, in denen diese Funktionen nicht differenzierbar sind, haben wir Punkte aus der dyadischen Unterteilung des Einheitsintervalls gewählt, also aus $\left\{ \frac{k}{2^n} \mid 0 \leq k \leq 2^n, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Geben wir uns nun eine Genauigkeit ε vor, mit der eine lipschitzstetige Funktion f approximiert werden soll, so ist das zugehörige δ für gleichmäßige Approximation eine Funktion von ε . Dasselbe gilt für die Zahl der Stützstellen: Anstatt die Stützstellen wie in Abbildung 9 äquidistant zu wählen, können wir dort, wo sich die Steigung von f rasch ändert, mehr Stützstellen verwenden, um die Approximation gleichmäßig zu

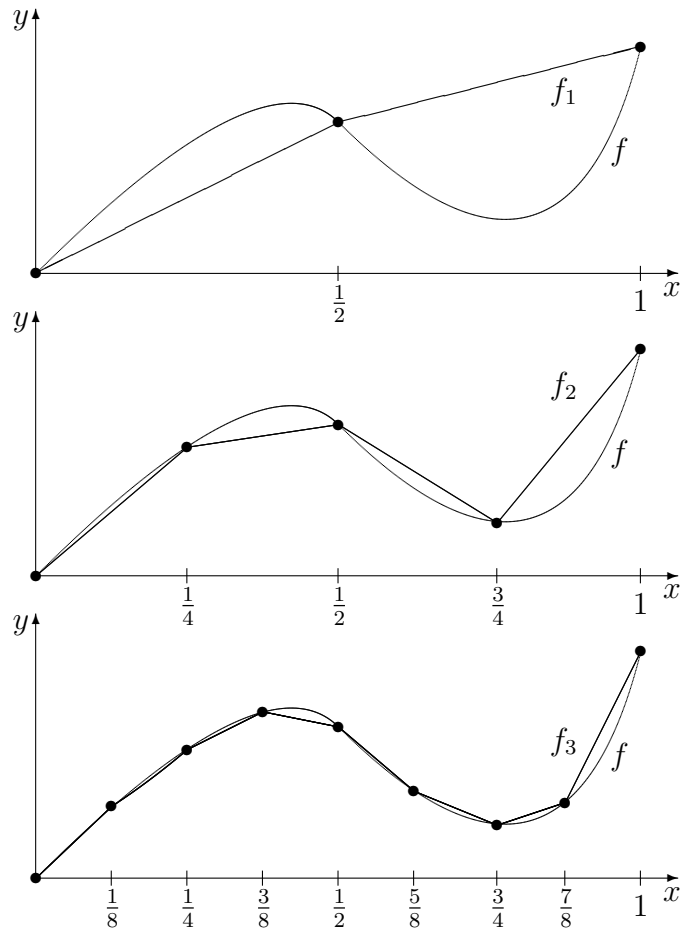


ABBILDUNG 9. Approximation einer stetigen Funktion durch stückweise affine Funktionen.

machen; dort, wo sich die Funktionswerte von f nur langsam ändern, kommen wir mit weniger Stützstellen aus. Es ist gleichwertig, $\delta(\varepsilon)$ oder die Mindestzahl an Stützstellen für gleichmäßige Approximation $n(\varepsilon)$ zu betrachten: Ist für eine stetige Funktion f und gegebenes ε das δ groß, braucht man also nur wenige Stützstellen zur gleichmäßigen Approximation mit stückweise affinen Funktionen, so ändert f die Funktionswerte langsam, und f ist eine vergleichsweise glatte Funktion. Halten wir umgekehrt die Stützstellenzahl n fest, so hängt die Genauigkeit der Approximation von der Glattheit von f und der Lage der n Stützstellen in K ab.

Bei allgemeinen kompakten Räumen kommt ein weiterer Aspekt hinzu: Wenn K sehr „ausgedünnt“ ist, braucht man von vorne herein weniger Stützstellen zum gleichmäßigen Approximieren einer stetigen Funktion auf K als bei „dichten“ Kompakta. Die Genauigkeit der Approximation hängt hier also ab von

- der Glattheit von f ,
- der Lage der Stützstellen in K ,
- der Dimension von K .

Wenn wir nun die ersten beiden Abhängigkeiten ausschalten, so ist die Größe, die wir erhalten, ein Maß für die Dimension von K , also den Entropie-Index. Die Abhängigkeit

von der Glattheit eliminieren wir, indem wir nur genügend glatte Funktionen approximieren, wie wir es in Formel (14) durch die Forderung $\|v\|_H \leq 1$ getan haben, was im Spezialfall $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = (C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ gerade $Lip(f) \leq 1$ bedeutet. Die Abhängigkeit von der Wahl der Stützstellen schalten wir aus, indem wir alle möglichen Wahlen von n Stützstellen betrachten. Somit bleibt nur noch die Abhängigkeit von der Dimension übrig.

Die letztgenannte Forderung, alle möglichen Wahlen von Stützstellen zu betrachten, wird bei der Definition des ersten multiplikativen Entropie-Index dahingehend übersetzt, dass die Größe $M_{\varepsilon}^1(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ gerade das Minimum über die Anzahl der Auswertungspunkte aller möglichen $*$ -Homomorphismen π von $C(K)$ in endlichdimensionale C^* -Algebren mit einer bestimmten Eigenschaft ($\varepsilon_{\pi}^1 \leq \varepsilon$) angibt. Diese Eigenschaft macht anschaulich eine Aussage über die Lage der Stützstellen beziehungsweise Auswertungspunkte von π : Diese sollen so gut im Kompaktum K verteilt liegen, dass „genügend glatte“ lipschitzstetige Funktionen f , das heißt solche mit $Lip(f) \leq 1$, außerhalb von den Auswertungspunkten von π , in welchen sie den Funktionswert 0 haben sollen, von diesem Wert höchstens um ε abweichen können. Die erste Separiertheit von π ist demnach ein Maß für diese Abweichung: Je größer ε_{π}^1 , desto größer ist die Abweichung für die zu π gehörende Menge von Stützstellen beziehungsweise Auswertungspunkten. Diese Abweichung stimmt im Falle $K = [0, 1]$ genau mit der größtmöglichen Abweichung einer lipschitzstetigen Funktion auf K mit Lipschitz-Halbnorm höchstens Eins und ihrer stückweise affinen Approximation, welche in Abbildung 9 exemplarisch für mehrere Wahlen von Stützstellen dargestellt wurde, überein.

Insofern können wir tatsächlich den ersten multiplikativen Entropie-Index für eine Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ als Maß dafür, wie gut \mathcal{A} (und damit auch A wegen der Dichtheit von \mathcal{A} in A) höchstens (aber immerhin) durch endlichdimensionale Strukturen beschrieben werden kann.

Eine weitere anschauliche Interpretation erhalten wir für den zweiten multiplikativen Entropie-Index, wenn wir die reinen Zustände auf der C^* -Algebra $C(K)$ als Punktauswertungen verstehen und mit den entsprechenden Punkten in K identifizieren. In Lemma 2.23 zeigen wir, dass sich die zweite Separiertheit für eine Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ auch durch

$$(15) \quad \varepsilon_{\pi}^2 = \sup_{\varphi \in S^e(A)} \inf_{\substack{\psi \in S^e(A) \\ \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}}} \rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\varphi, \psi \circ \pi) = \sup_{\varphi \in S^e(A)} \inf_{\substack{\psi \in S^e(A) \\ \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}}} \sup_{a \in \mathcal{A}^1 \cap \text{Ker}(\psi)} |\varphi(a)|$$

schreiben lässt. Im Kommutativen ist ε_{π}^2 also genau der maximale Funktionswert, den eine lipschitzstetige Funktion a mit $Lip(a) \leq 1$ in einem Punkt φ annehmen kann, welche im φ am nächsten gelegenen Auswertungspunkt $\psi \in X_{\pi}$ von π den Funktionswert 0 annimmt.

Wir zeigen nun noch die eben angesprochene Umformulierung für die zweite Separiertheit.

2.23. LEMMA. *Sind $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ eine Lipschitz-Algebra und $\pi : A \rightarrow B$ ein surjektiver $*$ -Homomorphismus in eine unitale C^* -Algebra B , so gelten*

$$\{\psi \mid \psi \in S(A), \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}\} = \{\tau \circ \pi \mid \tau \in S(B)\}$$

und

$$\{\psi \mid \psi \in S^e(A), \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}\} = \{\tau \circ \pi \mid \tau \in S^e(B)\}$$

und insbesondere

$$\begin{aligned} \varepsilon_\pi^2 &= \sup_{\varphi \in S^e(A)} \inf_{\tau \in S^e(B)} \rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\varphi, \tau \circ \pi) = \sup_{\varphi \in S^e(A)} \inf_{\substack{\psi \in S^e(A) \\ \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}}} \sup_{a \in \mathcal{A}^1} |\varphi(a) - \psi(a)| \\ &= \sup_{\varphi \in S^e(A)} \inf_{\substack{\psi \in S^e(A) \\ \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}}} \sup_{a \in \mathcal{A}^1 \cap \text{Ker}(\psi)} |\varphi(a)| \end{aligned}$$

für die zweite Separiertheit ε_π^2 von $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$.

BEWEIS. Wir zeigen die ersten beiden Gleichungen.

„ \subseteq “: Sei $\psi \in S(A)$ mit $\psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}$. Wir setzen $\tau(\pi(a)) := \psi(a)$ für $a \in A$. Dies ist wohldefiniert auf ganz B , denn π ist surjektiv, und gilt $\pi(a) = \pi(b)$, so gilt $a - b \in \text{Ker}(\pi)$, deshalb $\tau \circ \pi(a - b) = \psi(a - b) = \mathbf{0}$ und damit $\tau(\pi(a)) = \tau(\pi(b))$. Weil ψ und π positiv sind, ist auch τ ein positives lineares Funktional auf B , welches nach [44] (Theorem 3.3.1 und Korollar 3.3.4) beschränkt mit $\tau(\mathbf{1}_B) = \|\tau\|$ ist. Außerdem ist $\tau(\mathbf{1}_B) = \tau(\pi(\mathbf{1}_A)) = \psi(\mathbf{1}_A) = 1$, also ist τ ein Zustand auf B .

Sei ψ zusätzlich ein reiner Zustand. Angenommen $\tau = \lambda\tau_1 + (1 - \lambda)\tau_2$ für $\lambda \in [0, 1]$ und $\tau_1, \tau_2 \in S(B)$. Wir definieren $\psi_i := \tau_i \circ \pi$ für $i = 1, 2$. Dies sind Zustände auf A , was sich mit einer analogen Überlegung wie eben ergibt. Dann ist $\psi(a) = \tau \circ \pi(a) = \lambda\tau_1 \circ \pi(a) + (1 - \lambda)\tau_2 \circ \pi(a) = \lambda\psi_1(a) + (1 - \lambda)\psi_2(a)$, also $\lambda \in \{0, 1\}$, und τ ist ein reiner Zustand.

„ \supseteq “: Sei $\tau \in S(B)$ ($S^e(B)$). Wir setzen $\psi(a) := \tau \circ \pi(a)$ für $a \in A$. Mit einer analogen Überlegung wie in „ \subseteq “ erhalten wir, dass ψ ein (reiner) Zustand auf A ist.

Wegen $\text{Ker}(\|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = \mathbb{C}\mathbf{1}_A$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \varepsilon_\pi^2 &= \sup_{\varphi \in S^e(A)} \inf_{\tau \in S^e(B)} \rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\varphi, \tau \circ \pi) = \sup_{\varphi \in S^e(A)} \inf_{\substack{\psi \in S^e(A) \\ \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}}} \rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\varphi, \psi) \\ &= \sup_{\varphi \in S^e(A)} \inf_{\substack{\psi \in S^e(A) \\ \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}}} \sup_{a \in \mathcal{A}^1} |\varphi(a) - \psi(a)| \\ &= \sup_{\varphi \in S^e(A)} \inf_{\substack{\psi \in S^e(A) \\ \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}}} \sup_{a \in \mathcal{A}^1} \underbrace{|\varphi(a - \psi(a)\mathbf{1}_A)|}_{\in \text{Ker}(\psi)} - \underbrace{|\psi(a - \psi(a)\mathbf{1}_A)|}_{=0} \\ &= \sup_{\varphi \in S^e(A)} \inf_{\substack{\psi \in S^e(A) \\ \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}}} \sup_{a \in \mathcal{A}^1 \cap \text{Ker}(\psi)} |\varphi(a)|, \end{aligned}$$

und der Beweis ist vollständig. \square

2.24. BEMERKUNG. Wir erhalten noch einen weiteren multiplikativen Index für Lipschitz-Algebren, der im Kommutativen ohne den Umweg über die Maschenweite auskommt. Diesen werden wir in dieser Bemerkung, die sich bis zum Ende dieses Kapitels erstreckt, behandeln.

Hierzu betrachten wir wie bei den ersten beiden multiplikativen Entropie-Indizes einen $*$ -Homomorphismus $\pi : A \rightarrow F$ in eine C^* -Algebra F . Bei den ersten beiden multiplikativen Entropie-Indizes konnten wir jeweils dessen Surjektivität annehmen. Dies bedeutete keine Einschränkung: Bei der Definition der Größe $M_\varepsilon^i(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ haben wir ohnehin das Infimum über die Dimension maximaler kommutativer C^* -Unteralgebren von F genommen, und wäre π nicht surjektiv, würde die eben angesprochene Dimension höchstens größer.

Nun fordern wir aber die Surjektivität von π . Ohne diese Forderung wäre die folgende Konstruktion nicht möglich. Aufgrund der Surjektivität von π ist die duale Abbildung $\pi^* : F^* \rightarrow A^*$ injektiv, also auch die Einschränkung von π^* auf $S(F)$ beziehungsweise $S^e(F)$. Nach Lemma 2.23 lassen sich $S(F)$ beziehungsweise $S^e(F)$ mit den Mengen $\{\psi \mid \psi \in S(A), \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}\}$ beziehungsweise $\{\psi \mid \psi \in S^e(A), \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}\}$ identifizieren. Wir erhalten dann eine Halbnorm auf F , indem wir für $b \in F$

$$(16) \quad \|b\|_{\mathcal{F}} := \sup_{\substack{\varphi, \psi \in S^e(F) \\ \varphi \neq \psi}} \frac{|\varphi(b) - \psi(b)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\varphi, \psi)} \quad \text{und} \quad \mathcal{F} := \{b \in F \mid \|b\|_{\mathcal{F}} < +\infty\}$$

setzen. Dann gilt $\pi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F}$ wegen $\|\pi(a)\|_{\mathcal{F}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$, denn das Supremum in der Definition von $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ wird nur über eine Teilmenge gebildet im Vergleich zum Supremum in der Gleichung $\|\cdot\|_{\mathcal{A}} \stackrel{(*)}{=} \sup_{\substack{\varphi, \psi \in S(A) \\ \varphi \neq \psi}} \frac{|\varphi(\cdot) - \psi(\cdot)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\varphi, \psi)}$, welche für kompakte quantenmetrische Räume gilt, nicht aber für Lipschitz-Algebren, denn ist die Eigenschaft der Unterhalbstetigkeit nicht erfüllt, so gilt in Gleichung (*) in der Regel nur „ \geq “, vergleiche [56] (3.2, 4.1). Setzen wir weiter

$$\varepsilon_{\pi}^3 := \frac{2}{\sup_{\substack{b \in \mathcal{F} \\ \|b\|_{\mathcal{F}} \leq 1}} \|b\|_{\mathcal{F}}},$$

$$M_{\varepsilon}^3(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) := \sup\{\text{kdim}(F) \mid \exists \text{ surjekt. } *\text{-Homomorphismus } \pi : A \rightarrow F, \varepsilon_{\pi}^3 \geq \varepsilon\},$$

$$\text{mei}^3(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_{\varepsilon}^3(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})}{\ln \frac{1}{\varepsilon}},$$

so stellt $\text{mei}^3(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ einen weiteren Index dar, welchen wir **dritten multiplikativen Entropie-Index** nennen wollen und entsprechend ε_{π}^3 **dritte Seperiertheit**. Diese Namen sind gerechtfertigt, denn im Falle des kommutativen kompakten quantenmetrischen Raumes $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = (C(K), \text{Lip}(K), \text{Lip}(\cdot))$ auf einem kompakten metrischen Raum (K, ρ) beschreibt ε_{π}^3 genau die Separiertheit $\varepsilon_{X_{\pi}}$ der Punktmenge X_{π} der Auswertungspunkte von π in K , das heißt, ε_{π}^3 ist die maximale Zahl ε , so dass X_{π} ε -separiert im Sinne von Definition 2.1 ist.

Diese letzte Aussage sehen wir durch die folgende Rechnung und die zugehörigen Erläuterungen ein: F ist eine kommutative unitale C^* -Algebra als Bild einer solchen unter einem $*$ -Homomorphismus. Aufgrund der Gelfand-Korrespondenz zwischen den Punkten eines kompakten Hausdorff-Raumes K und dem Spektrum von $C(K)$ können wir das Spektrum von F mit einer abgeschlossenen Teilmenge B von K identifizieren: $\widehat{C(B)} = S^e(F) \subset S^e(A) = \widehat{C(K)}$. Demnach entspricht $\varphi \in S^e(F)$ einer Punktauswertung in einem Punkt $x_{\varphi} \in K$, und zwar in einem der Auswertungspunkte von π wegen $\varphi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}$, woraus $B = X_{\pi}$ folgt. Dies zeigt (a) in

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\pi}^3 &= \frac{2}{\sup_{\substack{b \in \mathcal{F} \\ \|b\|_{\mathcal{F}} \leq 1}} \|b\|_{\mathcal{F}}} = \frac{2}{\sup_{\substack{b \in \mathcal{F} \\ \|b\|_{\mathcal{F}} \leq 1}} \sup_{\substack{\varphi, \psi \in S^e(F) \\ \varphi \neq \psi}} \frac{|\varphi(b) - \psi(b)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\varphi, \psi)}} \\ &\stackrel{(a)}{=} \frac{2}{\sup_{\substack{b \in \mathcal{F} \\ \|b\|_{\mathcal{F}} \leq 1}} \sup_{\substack{x_{\varphi}, x_{\psi} \in X_{\pi} \\ x_{\varphi} \neq x_{\psi}}} \frac{|b(x_{\varphi}) - b(x_{\psi})|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\varphi, \psi)}} \stackrel{(b)}{=} \frac{2}{\sup_{\substack{b \in \mathcal{F} \\ \|b\|_{\mathcal{F}} \leq 1}} \sup_{\substack{x_{\varphi}, x_{\psi} \in X_{\pi} \\ x_{\varphi} \neq x_{\psi}}} \frac{|b(x_{\varphi}) - b(x_{\psi})|}{\rho(x_{\varphi}, x_{\psi})}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(c)}{=} \frac{2}{\min_{\substack{x_\varphi, x_\psi \in X_\pi \\ x_\varphi \neq x_\psi}} \rho(x_\varphi, x_\psi)} = \min_{\substack{x_\varphi, x_\psi \in X_\pi \\ x_\varphi \neq x_\psi}} \rho(x_\varphi, x_\psi) = \sup\{\varepsilon > 0 \mid X_\pi \text{ ist } \varepsilon\text{-separiert in } K\} \\
& = \varepsilon_{X_\pi}.
\end{aligned}$$

Gleichung (b) gilt, weil nach der Rieffelschen Theorie für den kompakten quantenmetrischen Raum $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = (C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ die Monge-Kantorovič-Metrik $\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}$, eingeschränkt auf die reinen Zustände auf $C(K)$, also auf K , die Ausgangsmetrik ρ liefert. Insbesondere bedeutet $b \in \mathcal{F}$ genau $b \in Lip(X_\pi)$ bezüglich $\rho|_{X_\pi}$. Für ein derartiges b wird das (erste) Supremum im Nenner des Bruches auf der rechten Seite von Gleichung (b) aber genau dann angenommen, wenn b in den beiden am dichtesten beieinander liegenden Punkten aus X_π die Funktionswerte $+c$ und $-c$ für eine komplexe Zahl c vom Betrag 1 besitzt. Hieraus ergibt sich Gleichung (c). Demnach gilt $M_\varepsilon(K) = M_\varepsilon^3(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ und $lei(K) = mei^3(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$. Das folgende Lemma gestattet es uns noch, den dritten multiplikativen Entropie-Index auf andere Weise zu formulieren.

2.25. LEMMA. *Seien A eine C^* -Algebra, \mathcal{A} ein Unterraum von A und $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ eine Halbnorm auf \mathcal{A} . Wir definieren*

$$z_1 := \inf_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ \|a\|_{\mathcal{A}} \geq 1}} \|a\|_A \quad \text{und} \quad z_2 := \inf_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ \|a\|_{\mathcal{A}} \leq 1}} \frac{1}{\|a\|_{\mathcal{A}}}.$$

Gilt $z_1 \neq 0$ oder $z_2 \neq 0$, so folgt $z_1 = z_2$. Insbesondere erhalten wir dann für die dritte Separiertheit bei einer Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ für einen surjektiven $$ -Homomorphismus $\pi : A \rightarrow F$ die Gleichheit*

$$\varepsilon_\pi^3 = 2 \inf_{\substack{a \in \mathcal{F} \\ \|a\|_{\mathcal{F}} \geq 1}} \|a\|_F$$

für die zugehörigen und gemäß (16) definierten Objekte \mathcal{F} und $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$.

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$.

Ist $z_1 > 0$, so existiert ein $b \in \mathcal{A}$ mit $\|b\|_{\mathcal{A}} = 1$ und $z_1 \leq \|b\|_A < z_1 + \varepsilon$. Dann ist

$$\left\| \frac{b}{z_1 + \varepsilon} \right\|_{\mathcal{A}} \leq 1 \quad \text{und} \quad z_2 = \inf_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ \|a\|_{\mathcal{A}} \leq 1}} \frac{1}{\|a\|_{\mathcal{A}}} \leq \frac{1}{\left\| \frac{b}{z_1 + \varepsilon} \right\|_{\mathcal{A}}} = z_1 + \varepsilon. \quad \text{Wir erhalten } z_2 \leq z_1.$$

Ist umgekehrt $z_2 > 0$, so existiert ein $b \in \mathcal{A}$ mit $\|b\|_{\mathcal{A}} = 1$ und $z_2 \leq \frac{1}{\|b\|_A} < z_2 + \varepsilon$. Dann ist $\|(z_2 + \varepsilon)b\|_{\mathcal{A}} > 1$ und $z_1 = \inf_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ \|a\|_{\mathcal{A}} \geq 1}} \|a\|_A \leq \|(z_2 + \varepsilon)b\|_A = z_2 + \varepsilon$, woraus $z_1 \leq z_2$ folgt.

Der Rest ist klar. □

Wie beim ersten oder zweiten multiplikativen Entropie-Index gilt $mei^3(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = 0$, falls A endlichdimensional ist, unabhängig von $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$. Die Argumentation, die uns auf diese Tatsache führt, ist aber wesentlich verschieden von der für die ersten beiden multiplikativen Entropie-Indizes, für welche wir das entsprechende Ergebnis erhielten, indem wir $F := A$ und $\pi = id_A$ setzten. Beim dritten multiplikativen Entropie-Index nutzen wir die vorausgesetzte Surjektivität der zu betrachtenden $*$ -Homomorphismen $\pi : A \rightarrow F$ aus. Als C^* -Algebren F kommen demnach ausschließlich Quotientenalgebren von A in Frage. Die Dimension von F und damit auch $kdim(F)$ sind deswegen (durch die entsprechenden Größen für A) nach oben beschränkt, und wir erhalten

$$\text{mei}^3(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = 0.$$

Leider können wir im Augenblick keine Beziehung zwischen dem ersten und zweiten multiplikativen Entropie-Index zum dritten herstellen. Ohnehin wäre dies nicht durch einen Vergleich der ersten und zweiten Separiertheit mit der dritten möglich, wie wir am kommutativen Fall sehen, wo ε_{π}^1 und ε_{π}^2 (bis auf einen Faktor 2) genau mit der Maschenweite μ_{π} übereinstimmen, vergleiche den Beweis von Theorem 2.20, ε_{π}^3 hingegen mit der Separiertheit von X_{π} . Obwohl die Punktmenge $X_{\pi} \subset K$ sehr kleine Separiertheit besitzen kann, kann die Maschenweite groß sein, wie Abbildung 10 zeigt.

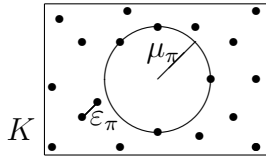


ABBILDUNG 10.

Ebenso leicht lässt sich ein Beispiel konstruieren, in dem ε_{π}^3 groß im Verhältnis zu μ_{π} ist, etwa $X_{\pi} = \left\{ \frac{k}{n} \mid 0 \leq k \leq n \right\}$ und $K = X_{\pi} \cup \{\varepsilon\}$ für $0 < \varepsilon \ll \frac{1}{n}$. Insofern wäre auch der Name „erste/zweite Maschenweite“ statt „erste/zweite Separiertheit“ für $\varepsilon_{\pi}^{1/2}$ treffend.

Deswegen müssten wir bei einer Abschätzung des ersten oder zweiten gegen den dritten multiplikativen Entropie-Index auf die Größen M_{ε}^i , $i = 1, 2, 3$, zurückgreifen. Nach dem Beweis von Theorem 2.20 gilt im Kommutativen aber $M_{\varepsilon}^3(C(K), Lip(K), Lip(\cdot)) = M_{\varepsilon}(K) \geq M_{\varepsilon}^2(K) = M_{\varepsilon}^2(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$. Eine derartige Abschätzung scheitert im allgemeinen Fall aber aus demselben Grund wie eine Abschätzung von ε_{π}^2 durch ein Vielfaches von ε_{π}^1 nach oben, wenn man versucht, den Beweis aus dem Kommutativen zu übertragen: Elemente in A , aufgefasst als affine Funktionen auf $S(A)$, mit gewissen Eigenschaften sind nicht ohne weiteres konstruierbar, vergleiche Bemerkung 2.16 auf Seite 46.

Die Abschätzung von $M_{\varepsilon}^{\mu}(K)$ in die andere Richtung, also nach unten, benutzt die Größe $N_{\varepsilon}(K)$, welche aus der Feinheit möglicher Überdeckungen von K hervorgeht. Derartige Überdeckungen erhalten wir allerdings nicht mit $*$ -Homomorphismen $\pi : A = C(K) \rightarrow F$ in endlichdimensionale C^* -Algebren F , sondern durch vollständig positive, unital und isometrische Abbildungen $\varphi : F \rightarrow A$ in umgekehrter Richtung, denn ist $F = \prod_{m=1}^r M_{n_m}(\mathbb{C})$ und bezeichnen wir Elementarmatrizen in F mit e_{ij}^m , so stellt $\{\text{supp}(\varphi(e_{ij}^m)) \mid 1 \leq i, j \leq n_m, 1 \leq m \leq r\}$ eine Überdeckung von K dar. Derartige Abbildungen betrachten wir in Kapitel 4. Eventuell stellt dies eine Quelle der Inspiration für eine Abschätzung in eine Richtung dar.

KAPITEL 3

Kompakte quantenmetrische Räume: Konstruktion und Approximation

Die ersten beiden Kapitel werden wir in diesem Teil unserer Arbeit zusammenbringen. In Kapitel 2 haben wir schon einen ersten Schritt zur Beschreibung von kompakten quantenmetrischen Räumen mit Hilfe von $*$ -Homomorphismen in endlichdimensionale C^* -Algebren getan, und dies wollen wir ausbauen. Beispielsweise geben wir ein Kriterium an, wann ein kompakter quantenmetrischer Raum $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ als „inverser Limes“ solcher Räume endlicher Dimension geschrieben beziehungsweise rekonstruiert werden kann und überlegen uns gleichzeitig, welche Struktur die C^* -Algebra A in solch einem Tripel besitzen muss, damit das möglich ist. An dieser Stelle soll besonders hervorgehoben werden, dass die Idee für eine Beschäftigung mit der Fragestellung, wann und wie eine (Re-)Konstruktion von (unendlichdimensionalen) kompakten quantenmetrischen Räumen als inverser Limes endlichdimensionaler kompakter quantenmetrischer Räume möglich ist, von Jürgen Schweizer stammt. Anhand von Beispielen zeigen wir, wie solch eine (Re-)Konstruktion beziehungsweise Approximation von stattdessen geht, etwa in Beispiel 3.12 oder für die rationale Drehalgebra, vergleiche Beispiel 3.20.

1. Der inverse Limes von kompakten quantenmetrischen Räumen

Zunächst wollen wir das weitere Vorgehen in Bezug auf die Approximation und Konstruktion unserer nicht-kommutativen Analoga kompakter metrischer Räume mit dem inversen Limes motivieren. Hierzu betrachten wir einen kompakten metrischen Raum (K, ρ) und versuchen, diesen mit Hilfe von endlichen Punktfolgen zu beschreiben beziehungsweise zu rekonstruieren. Anschließend erklären wir den inversen Limes für Lipschitz-Algebren beziehungsweise für kompakte quantenmetrische Räume als den geeigneten Begriff für eine entsprechende nicht-kommutative Beschreibung.

In Anhang A haben wir einige Aussagen über inverse und direkte Limites exemplarisch anhand der für unsere Zwecke wichtigen Kategorien zusammengestellt. Insbesondere gilt dies für deren Konstruktion und für Eindeutigkeitsätze, welche Kriterien angeben, wann ein gegebenes Objekt mit dem Limes einer inversen beziehungsweise direkten Folge von Objekten übereinstimmt. Bei allen Überlegungen im Zusammenhang mit dem inversen und direkten Limes gelte für dabei auftretende Indizes m_1, m_2, m_3, \dots stets $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \dots$.

3.1. SATZ. Seien (K, ρ) ein kompakter metrischer Raum und $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge endlicher Teilmengen von K , so dass $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$ dicht in K bezüglich ρ liegt. Weiter sollen $\rho_m := \rho|_{X_m}$ die Einschränkung von ρ auf X_m und $\phi_m : X_m \rightarrow K$ beziehungsweise $\psi_{m_1, m_2} : X_{m_1} \rightarrow X_{m_2}$ die Einbettungsabbildungen bezeichnen. Dann bildet $(X_m, \rho_m, \psi)_m$ eine direkte Folge in der Kategorie VM der vollständigen metrischen Räume, und der direkte Limes $\lim_{\rightarrow} X_m$ in dieser Kategorie ist isometrisch isomorph zu K .

BEWEIS. Offensichtlich ist (X_m, ρ_m) als endlicher metrischer Raum vollständig. Die Abbildungen ψ_{m_1, m_2} sind Isometrien und erfüllen (i) $\psi_{m, m} = \text{id}_{X_m}$ und (ii) $\psi_{m_2, m_3} \circ \psi_{m_1, m_2} = \psi_{m_1, m_3}$ für m, m_1, m_2, m_3 in \mathbb{N} . Daher bildet $(X_m, \rho_m, \psi)_m$ eine direkte Folge vollständiger metrischer Räume, vergleiche Definition A.1.

Nach Satz A.4 existiert außerdem eine bijektive Isometrie zwischen K und $\lim_{\rightarrow} X_m$, denn nach Voraussetzung ist K ein vollständiger metrischer Raum, die Vereinigung $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \phi_m(X_m) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$ liegt für die Isometrien ϕ_m dicht in K und die Gleichung $\phi_{m_1} = \phi_{m_2} \circ \psi_{m_1, m_2}$ ist für alle $m_1 \leq m_2$ in \mathbb{N} erfüllt. \square

Es ist wohlbekannt, dass für eine stetige Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ zwischen kompakten Hausdorff-Räumen die dazu adjungierte beziehungsweise duale Abbildung $\phi^* : C(Y) \rightarrow C(X)$, $f \mapsto f \circ \phi$ ein $*$ -Homomorphismus zwischen C^* -Algebren ist. Durch den Übergang zur Adjungierten drehen sich also die Richtungen der verbindenden Abbildungen in Bezug auf X und Y um. Berücksichtigen wir dies, so kommen wir auf natürliche Weise vom direkten Limes auf Ebene kompakter metrischer Räume im gerade bewiesenen Satz zum inversen Limes für das nicht-kommutative Analogon.

Als Nächstes müssen wir erklären, was wir unter dem inversen Limes von Lipschitz-Algebren beziehungsweise für kompakte quantenmetrische Räume, den wir eben ins Spiel gebracht haben, verstehen wollen.

3.2. DEFINITION. Eine Folge $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})_m$, genauer $((A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}), \|\cdot\|_{A_m}, \pi)_m$ (vergleiche Definition A.8 auf Seite 145) von Lipschitz-Algebren (von kompakten quantenmetrischen Räumen) zusammen mit einer Familie von Morphismen

$$\pi_{m_2, m_1} : (A_{m_2}, \mathcal{A}_{m_2}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_{m_2}}) \rightarrow (A_{m_1}, \mathcal{A}_{m_1}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_{m_1}})$$

heißt **inverse Folge von Lipschitz-Algebren (inverse Folge von kompakten quantenmetrischen Räumen)**, wenn $\pi_{m, m} = \text{id}_{(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})}$ und $\pi_{m_2, m_1} \circ \pi_{m_3, m_2} = \pi_{m_3, m_1}$ im Sinne der Kategorie LIP (beziehungsweise KQR) gilt.

Ein Tripel $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ zusammen mit Abbildungen $\pi_m : A \rightarrow A_m$ heißt **inverser Limes** der inversen Folge $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})_m$ von Lipschitz-Algebren (kompakten quantenmetrischen Räumen), wenn $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ ein Objekt und π_m Morphismen in der Kategorie LIP (beziehungsweise KQR) sind, das Diagramm in Abbildung 11 kommutiert und für jedes andere Objekt $(D, \mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}})$ aus LIP (beziehungsweise KQR) mit Morphismen $\phi_m : (D, \mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}}) \rightarrow (A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$ mit $\phi_{m_1} = \pi_{m_2, m_1} \circ \phi_{m_2}$ ein eindeutig bestimmter Morphismus $\phi : (D, \mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}}) \rightarrow (A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ mit $\pi_m \circ \phi = \phi_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ existiert, also die **universelle Eigenschaft** im Sinne der Kategorie LIP (beziehungsweise KQR) erfüllt ist, vergleiche Definition A.8 auf Seite 145. Wir schreiben hierfür $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = \lim_{\leftarrow} (A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$.

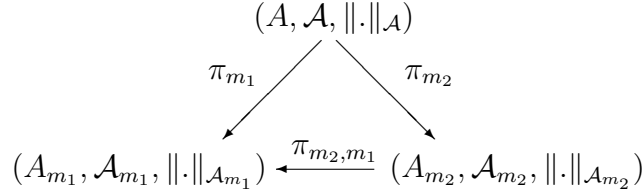


ABBILDUNG 11. Zur universellen Eigenschaft.

Wir geben nun ein leicht zu überprüfendes Kriterium an, wann ein Tripel $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ inverser Limes einer inversen Folge $((A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}), \|\cdot\|_{A_m}, \pi)_m$ von Lipschitz-Algebren beziehungsweise kompakten quantenmetrischen Räumen ist; dieses werden wir in vielen Beispielen verwenden. Über die Existenz des inversen Limes werden wir in Satz 3.10 eine Aussage treffen. Im Falle der Existenz folgt offensichtlich unmittelbar aus der universellen Eigenschaft die Eindeutigkeit des inversen Limes bis auf Isomorphie (vergleiche Definition 2.17).

3.3. SATZ. *Sei $((A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}), \|\cdot\|_{A_m}, \pi)_m$ eine inverse Folge von Lipschitz-Algebren (kompakten quantenmetrischen Räumen), für die der inverse Limes existiert. Das Tripel $(C, \mathcal{C}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$ zusammen mit Abbildungen $\phi_m : C \rightarrow A_m$ ist der (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) inverse Limes von $((A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}), \|\cdot\|_{A_m}, \pi)_m$, wenn*

- (i) $(C, \mathcal{C}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$ eine Lipschitz-Algebra (ein kompakter quantenmetrischer Raum) ist und die Abbildungen ϕ_m Morphismen von $(C, \mathcal{C}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$ nach $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$ in der Kategorie LIP (beziehungsweise KQR) sind,
- (ii) $(\mathcal{C}, \max(\|\cdot\|_{\limleftarrow A_m}, \|\cdot\|_{\limleftarrow A_m}))$ in der Kategorie involutiver Banach-Algebren BALG, bestehend aus involutiven Banach-Algebren als Objekten und kontraktiven $*$ -Homomorphismen als Morphismen, der inverse Limes der inversen Folge $(\mathcal{A}_m, \max(\|\cdot\|_{A_m}, \|\cdot\|_{A_m}), \pi)_m$ ist und
- (iii) C (bis auf Isomorphie) der Normabschluss von $\mathcal{C} = \limleftarrow A_m$ im inversen Limes $(\limleftarrow A_m, \|\cdot\|_{\limleftarrow A_m})$ von C^* -Algebren ist und ϕ_k die Einschränkung der kanonischen Projektion $\pi_k : \limleftarrow A_m \rightarrow A_k$ auf C darstellt.

BEWEIS. Nach Voraussetzung (iii) gilt $\pi_{m_2, m_1} \circ \phi_{m_2} = \phi_{m_1}$.

Ist $(D, \mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}})$ ein anderes Objekt in LIP (beziehungsweise KQR) mit Morphismen $\Phi_m : (D, \mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}}) \rightarrow (A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$, welche $\pi_{m_2, m_1} \circ \Phi_{m_2} = \Phi_{m_1}$ erfüllen, so definieren wir den nach der universellen Eigenschaft für C^* -Algebren eindeutig existierenden $*$ -Homomorphismus $\Phi : D \rightarrow \limleftarrow A_m$, $d \mapsto (\Phi_m(d))_{m \in \mathbb{N}}$, vergleiche Satz A.9. Dieser erfüllt $\pi_m \circ \Phi = \Phi_m$. Für $d \in \mathcal{D}$ gelten dann $\Phi_{m_1}(d) = \pi_{m_2, m_1} \circ \Phi_{m_2}(d) \in \mathcal{A}_{m_1}$, $\|\Phi(d)\|_{\mathcal{C}} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|\Phi_m(d)\|_{A_m} \leq \|d\|_{\mathcal{D}} < \infty$ und $\|\Phi(d)\|_{\mathcal{C}} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|\Phi_m(d)\|_{A_m} \leq \|d\|_{\mathcal{D}} < \infty$, also $\Phi(\mathcal{D}) \subset \limleftarrow \mathcal{A}_m = \mathcal{C}$ nach (ii). Weil \mathcal{D} dicht in D bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ liegt, folgt $\Phi(D) = \overline{\Phi(\mathcal{D})}^{\|\cdot\|_{\mathcal{D}}} \subset \overline{\Phi(\mathcal{D})}^{\|\cdot\|_{\limleftarrow A_m}} \subset \overline{\mathcal{C}}^{\|\cdot\|_{\limleftarrow A_m}} \stackrel{(iii)}{=} C$. Offensichtlich gilt $\phi_m \circ \Phi = \Phi_m$. Also erfüllt $(C, \mathcal{C}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$ zusammen mit den Morphismen ϕ_m die universelle Eigenschaft für inverse Limites im Sinne der Kategorie von Lipschitz-Algebren (kompakten quantenmetrischen Räumen). \square

Es ist äußerst wichtig zu bemerken, dass in obigem Satz nicht gefordert wird, dass die C^* -Algebra C im inversen Limes-Tripel $(C, \mathcal{C}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$ der inverse Limes der inversen Folge

$(A_m, \|\cdot\|_{A_m}, \pi)_m$ im Sinne von C^* -Algebren sein muss. Dies wäre auch im Allgemeinen falsch beziehungsweise nicht möglich, wie eine Kombination aus Korollar 3.5 und Satz 3.7 zeigt. Weil der inverse Limes $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ eine Lipschitz-Algebra ist, muss die C^* -Algebra A nur so geartet sein, dass \mathcal{A} „dicht“ darin liegt, und Bedingung (iii) besagt, dass die Dichtheit bezüglich der Norm in $\lim_{\leftarrow} A_m$ gemeint ist, A also der Normabschluss von \mathcal{A} bezüglich $\|\cdot\|_{\lim_{\leftarrow} A_m}$ ist und damit als C^* -Unteralgebra in $\lim_{\leftarrow} A_m$ liegt. Die Vorbereitungen für Korollar 3.5 beziehungsweise Satz 3.7 und deren Beweis wird beinahe den Rest dieses Abschnitts in Anspruch nehmen.

3.4. SATZ. *Sei $(A_m, \|\cdot\|_{A_m}, \pi)_{m \in \mathbb{N}}$ eine inverse Folge endlichdimensionaler C^* -Algebren, so dass die verbindenden C^* -Algebra-Homomorphismen $\pi_{m_2, m_1} : A_{m_2} \rightarrow A_{m_1}$ surjektiv sind. Dann besitzt $A := \lim_{\leftarrow} A_m$ eine Darstellung der Form $\prod_{j \in \mathbb{N}} M_{n_j}(\mathbb{C})$ als direktes Produkt von Matrix-Algebren.*

BEWEIS. Als endlichdimensionale C^* -Algebra ist A_m von der Form $A_m = \bigoplus_{i=1}^{r_m} M_{k_i^m}(\mathbb{C})$ für $k_i^m \in \mathbb{N}$, also eine direkte Summe von Matrix-Algebren. Wir können hierfür auch $A_m = \prod_{i=1}^{r_m} M_{k_i^m}(\mathbb{C})$ schreiben, denn endliches direktes Produkt und endliche direkte Summe von C^* -Algebren stimmen überein. Da $M_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, keine nichttrivialen Ideale besitzt, ist der Kern von $\pi_{m_2, m_1} : A_{m_2} \rightarrow A_{m_1}$ von der Form $L_1^{m_2, m_1} \oplus \dots \oplus L_{r_{m_2}}^{m_2, m_1}$, wobei $L_i \in \left\{ \{0\}, M_{k_i^{m_2}}(\mathbb{C}) \right\}$ gilt. Wegen der Surjektivität von π_{m_2, m_1} gilt nach dem Homomorphiesatz

$$A_{m_1} = \text{Im}(\pi_{m_2, m_1}) \cong A_{m_2} / \text{Ker}(\pi_{m_2, m_1}) \cong J_1^{m_2, m_1} \oplus \dots \oplus J_{r_{m_2}}^{m_2, m_1} \text{ mit}$$

$$J_i^{m_2, m_1} = \begin{cases} \{0\} & \text{falls } L_i^{m_2, m_1} = M_{k_i^{m_2}}(\mathbb{C}) \\ M_{k_i^{m_2}}(\mathbb{C}) & \text{falls } L_i^{m_2, m_1} = \{0\} \end{cases}.$$

Daher kann A_{m_1} als Ideal in A_{m_2} aufgefasst werden. Also ist

$$A_{m_2} / A_{m_1} \cong A_{m_2} / \bigoplus_{i=1}^{r_{m_2}} J_i^{m_2, m_1} \cong \text{Ker}(\pi_{m_2, m_1}) \cong \bigoplus_{i=1}^{r_{m_2}} L_i^{m_2, m_1}$$

beziehungsweise

$$A_{m_2} \cong A_{m_1} \oplus A_{m_2} / A_{m_1} \cong \bigoplus_{i=1}^{r_{m_2}} J_i^{m_2, m_1} \oplus \bigoplus_{i=1}^{r_{m_2}} L_i^{m_2, m_1},$$

wobei genau die Hälfte der aufgeführten Summanden auf der rechten Seite der letzten Zeile $\{0\}$ ist und die andere Hälfte den $M_{k_i^{m_2}}$, $1 \leq i \leq r_{m_2}$, entspricht. Wir benutzen daher folgendes Modell von A_m beziehungsweise A_m / A_{m-1} :

$$A_1 := \bigoplus_{i=1}^{r_1} L_i^{1,0}, \text{ wobei } L_i^{1,0} := M_{k_i^1}(\mathbb{C}) \text{ und } A_1 / A_0 := A_1,$$

$$A_m = A_{m-1} \oplus \bigoplus_{i=1}^{r_m} L_i^{m, m-1} = \bigoplus_{k=1}^m \bigoplus_{i=1}^{r_k} L_i^{k, k-1} = \bigoplus_{k=1}^m A_k / A_{k-1} \text{ mit } A_m / A_{m-1} = \bigoplus_{i=1}^{r_m} L_i^{m, m-1}.$$

Dann haben die verbindenden Abbildungen die Form

$$\begin{aligned}\pi_{m_1, m_2} : A_{m_2} &= \bigoplus_{i=1}^{m_2} A_i/A_{i-1} \rightarrow A_{m_1} = \bigoplus_{i=1}^{m_1} A_i/A_{i-1} \\ (g_1, g_2, \dots, g_{m_2}) &\mapsto (g_1, g_2, \dots, g_{m_1}) \\ \text{und } \pi_m : \lim_{\leftarrow} A_m &\rightarrow A_m = \bigoplus_{k=1}^m A_k/A_{k-1} \\ (f_m)_{m \in \mathbb{N}} &\mapsto f_m,\end{aligned}$$

wobei $f_m \in A_m = \bigoplus_{k=1}^m A_k/A_{k-1}$ von der Form $f_m = (g_1^m, \dots, g_m^m)$ mit $g_k^m \in A_k/A_{k-1}$ ist. π_m ist also genau die Projektion auf die m -te Koordinate. Es gilt $\pi_{m_2, m_1}(f_{m_2}) = f_{m_1}$, also $\pi_{m_2, m_1}(g_1^{m_2}, \dots, g_{m_2}^{m_2}) = (g_1^{m_1}, \dots, g_{m_1}^{m_1})$, und f_{m_1} ist ein „Anfang“ für f_{m_2} .

Wir zeigen, dass die Voraussetzungen von Satz A.11, angewendet auf $\prod_{k \in \mathbb{N}} A_k/A_{k-1}$, erfüllt sind: $\prod_{m \in \mathbb{N}} A_k/A_{k-1}$ ist eine C^* -Algebra mit linearen Kontraktionen

$$\begin{aligned}\phi_m : \prod_{k \in \mathbb{N}} A_k/A_{k-1} &= \prod_{k \in \mathbb{N}} \bigoplus_{i=1}^{r_k} L_i^{k, k-1} \rightarrow A_m = \bigoplus_{k=1}^m \bigoplus_{i=1}^{r_k} L_i^{k, k-1} = \prod_{k=1}^m A_k/A_{k-1}, \\ (g_k)_{k \in \mathbb{N}} &\mapsto (g_1, g_2, \dots, g_m),\end{aligned}$$

für welche $\pi_{m_2, m_1} \circ \phi_{m_2}((g_k)_k) = \pi_{m_2, m_1}(g_1, \dots, g_{m_2}) = (g_1, \dots, g_{m_1}) = \phi_{m_1}((g_k)_k)$ gilt. Weiter ist für $g = (g_m)_m \in \prod_{m \in \mathbb{N}} A_m/A_{m-1}$

$$\|g\|_{\prod_{m \in \mathbb{N}} A_m/A_{m-1}} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|g_m\|_{A_m/A_{m-1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k \leq m} \|g_k\|_{A_k/A_{k-1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\phi_m(g)\|_{A_m}.$$

Die nach der universellen Eigenschaft des inversen Limes eindeutig existierende Abbildung $\phi : \prod_{m \in \mathbb{N}} A_m/A_{m-1} \rightarrow \lim_{\leftarrow} A_m$ ist durch $(g_m)_m \mapsto (g_1, (g_1, g_2), (g_1, g_2, g_3), \dots)$ gegeben, denn diese Abbildungsvorschrift ist linear und wegen

$$\begin{aligned}\|(g_m)_m\|_{\prod_{m \in \mathbb{N}} A_m/A_{m-1}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k \leq m} \|g_k\|_{A_k/A_{k-1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k \leq m} \|(g_1, \dots, g_k)\|_{A_k} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|(g_1, \dots, g_m)\|_{A_m} = \|(g_1, (g_1, g_2), (g_1, g_2, g_3), \dots)\|_{\lim_{\leftarrow} A_m}\end{aligned}$$

isometrisch, also kontraktiv, und erfüllt außerdem $\pi_m \circ \phi = \phi_m$ wegen

$$\pi_m \circ \phi((g_k)_{k \in \mathbb{N}}) = \pi_m(g_1, (g_1, g_2), (g_1, g_2, g_3), \dots) = (g_1, \dots, g_m) = \phi_m((g_k)_{k \in \mathbb{N}}).$$

Schließlich ist ϕ surjektiv. Sei dazu $g = (g_1, (g_1, g_2), (g_1, g_2, g_3), \dots) \in \lim_{\leftarrow} A_m$. Wir definieren $f := (g_m)_m$. Es gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} \|(g_1, \dots, g_m)\|_{A_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\pi_m(g)\|_{A_m} = \|g\|_{\lim_{\leftarrow} A_m} < \infty$ und deswegen $\sup_{m \in \mathbb{N}} \|g_m\|_{A_m/A_{m-1}} < \infty$. Daher ist f bereits in $\prod_{m \in \mathbb{N}} A_m/A_{m-1}$, und wir erhalten

$$\|f\|_{\prod_{m \in \mathbb{N}} A_m/A_{m-1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\phi_m(f)\|_{A_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|(g_1, \dots, g_m)\|_{A_m} = \|g\|_{\lim_{\leftarrow} A_m}$$

und $\phi(f) = g$. □

Wir wenden diesen Satz in Korollar 3.5 auf den Spezialfall kommutativer unitaler C^* -Algebren an, welche wir im Zusammenhang mit Satz 3.1 erhalten. Dazu stellen wir nochmals die benötigten Objekte zusammen.

Seien (K, ρ) ein kompakter metrischer Raum und $(X_m, \rho_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit $\rho_m := \rho|_{X_m}$ eine in Satz 3.1 erwähnte aufsteigende Folge endlicher vollständiger (kompakter) metrischer Räume, deren Vereinigung $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$ dicht in K bezüglich ρ liegt. Dann kann K als direkter Limes der Räume (X_m, ρ_m) dargestellt werden. Die verbindenden Abbildungen bei der entsprechenden direkten Folge vollständiger metrischer Räume beziehungsweise die kanonische Einbettung bezeichnen wir mit $\psi_{m_1, m_2} : X_{m_1} \rightarrow X_{m_2}$ und $\psi_m : X_m \rightarrow K \cong \lim_{\rightarrow} X_m$.

Außerdem betrachten wir die unitalen C^* -Algebren $(D_m, \|\cdot\|_{D_m}) = (\ell^\infty(X_m), \|\cdot\|_\infty) = (C(X_m), \|\cdot\|_\infty) = (Lip(X_m), \|\cdot\|_\infty)$ — die Gleichheit gilt jeweils wegen der Endlichkeit von X_m — zusammen mit den linearen Kontraktionen $\pi_{m_2, m_1} : D_{m_2} \rightarrow D_{m_1}, f \mapsto f \circ \psi_{m_1, m_2} = f|_{X_{m_1}}$, also den zu ψ_{m_1, m_2} dualen beziehungsweise adjungierten Abbildungen. Offensichtlich bildet $(D_m, \|\cdot\|_{D_m}, \pi)_m = (\ell^\infty(X_m), \|\cdot\|_\infty, \pi)_m$ eine inverse Folge von C^* -Algebren, deren nach A.9 existierenden inversen Limes wir mit D bezeichnen.

Wir erinnern nochmals an die in der Definition der de Leeuw-Abbildung 1.13 auftretende Festlegung $\tilde{Y} := Y \times Y \setminus \{(y, y) \mid y \in Y\}$ für einen kompakten metrischen Raum Y und an die in Beispiel 1.14 auf Seite 21 auftretende $\ell^\infty(Y)$ -Bimodul-Struktur des Banachraums $(\ell^\infty(\tilde{Y}), \|\cdot\|_\infty)$, gegeben durch

$$f_1 \cdot g \cdot f_2(x, y) := f_1(x)g(x, y)f_2(y) \quad \forall f_1, f_2 \in \ell^\infty(Y), g \in \ell^\infty(\tilde{Y}), (x, y) \in \tilde{Y}.$$

Setzen wir $(E_m, \|\cdot\|_{E_m}) = (\ell^\infty(\tilde{X}_m), \|\cdot\|_\infty)$ und analog zur Definition der Abbildungen π oben $\tau_{m_2, m_1} : E_{m_2} \rightarrow E_{m_1}, g \mapsto g|_{\tilde{X}_{m_1}} = g \circ (\psi_{m_1, m_2} \times \psi_{m_1, m_2})$, so sind die Abbildungen τ_{m_2, m_1} allesamt lineare Kontraktionen und $(E_m, \|\cdot\|_{E_m}, \tau)_m$ eine inverse Folge von D_m -Banach-Bimodulen, deren inversen Limes wir mit E bezeichnen.

3.5. KOROLLAR. *Seien $X_0 = \tilde{X}_0 = \emptyset$. Dann gelten für die eben erwähnten inversen Limes*

$$\begin{aligned} D &= \lim_{\leftarrow} (D_m, \|\cdot\|_{D_m}, \pi)_m = \lim_{\leftarrow} (\ell^\infty(X_m), \|\cdot\|_\infty, \pi)_m \\ &\cong \ell^\infty\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m\right) \cong \prod_{m=1}^{\infty} \ell^\infty(X_m \setminus X_{m-1}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E &= \lim_{\leftarrow} (E_m, \|\cdot\|_{E_m}, \tau)_m = \lim_{\leftarrow} (\ell^\infty(\tilde{X}_m), \|\cdot\|_\infty, \tau)_m \\ &\cong \ell^\infty\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{X}_m\right) \cong \prod_{m=1}^{\infty} \ell^\infty(\tilde{X}_m \setminus \tilde{X}_{m-1}). \end{aligned}$$

Insbesondere existiert ein injektiver $$ -Homomorphismus von $C(K)$ in $\lim_{\leftarrow} D_m$.*

BEWEIS. Es gilt $D \cong \prod_{m=1}^{\infty} \ell^\infty(X_m \setminus X_{m-1})$ nach Satz 3.4 wegen $\ell^\infty(X_m \setminus X_{m-1}) \cong \ell^\infty(X_m)/\ell^\infty(X_{m-1})$.

Wir weisen $D \cong \ell^\infty\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m\right)$ mittels Satz A.11 nach. Die linearen Kontraktionen $\phi_m : Z \rightarrow \ell^\infty(X_m), f \mapsto f|_{X_m}$ auf dem Banachraum $Z := (\ell^\infty\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m\right), \|\cdot\|_\infty)$ genügen der Gleichung $\phi_{m_1} = \pi_{m_2, m_1} \circ \phi_{m_2}$ für $m_1 \leq m_2$ in \mathbb{N} , und es gilt für $g \in Z$ die Gleichung $\|g\|_Z = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\phi_m(g)\|_{D_m} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|\phi_m(g)\|_{D_m}$. Die nach der universellen Eigenschaft eindeutig bestimmte lineare Kontraktion $\phi : Z \rightarrow D$, welche gegeben ist durch $\phi : g \mapsto (\phi_m(g))_{m \in \mathbb{N}}$, vergleiche Satz A.9, ist auch surjektiv, denn ist $f = (f_m)_m \in$

D , so definiert man $g \in Z$ durch $g(x) := f_m(x)$ falls $x \in X_m$; dies ist wohldefiniert aufgrund der Eigenschaften von π , und es gilt $\phi(g) = f$. Somit sind die Voraussetzungen von Satz A.11 erfüllt, und die Behauptung folgt.

Analog zeigt man die Existenz einer linearen bijektiven Isometrie

- (1) $\phi^1 : \ell^\infty \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{X}_m \right) \rightarrow E$, $g \mapsto (g|_{\tilde{X}_m})_{m \in \mathbb{N}}$, welche surjektiv ist, da man $\phi(g) = f$ erhält für $f = (f_m)_m \in E$ und $g \in \ell^\infty \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{X}_m \right)$, wobei g durch $g(x, y) := f_m(x, y)$ für $(x, y) \in \tilde{X}_m$ gegeben ist, und
- (2) $\phi^2 : \prod_{m=1}^{\infty} \ell^\infty(\tilde{X}_m \setminus \tilde{X}_{m-1}) \rightarrow E$, $(g_m)_{m \in \mathbb{N}} \mapsto (f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ für $f_m \in \ell^\infty(\tilde{X}_m)$ mit $f_m(x, y) = g_n(x, y)$ falls $x \in X_{n_x} \setminus X_{n_x-1}$, $y \in X_{n_y} \setminus X_{n_y-1}$, $n := \max(n_x, n_y)$ für alle $m \geq n \geq 1$. Dies ist wohldefiniert, und diese Abbildung ϕ^2 surjektiv ist, da man für $f = (f_m)_m \in E$ und $g = (f_m|_{\tilde{X}_m \setminus \tilde{X}_{m-1}})_{m \in \mathbb{N}}$ analog zu (1) die Gleichheit $\phi^2(g) = f$ erhält.

Natürlich kann man statt (2) auch einen Satz analog zu Satz 3.4 beweisen.

Die übrige Behauptung ergibt sich aus der Tatsache, dass $C(K) \rightarrow \lim_{\leftarrow} \ell^\infty(X_m)$, $f \mapsto (f|_{X_m})_{m \in \mathbb{N}}$ ein injektiver $*$ -Homomorphismus ist, da $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$ dicht in K liegt. \square

Korollar 3.5 hat also gezeigt, dass wir zwar nicht die C^* -Algebra $C(K)$ als inversen Limes von endlichdimensionalen C^* -Algebren darstellen können, sondern nur den Raum $\ell^\infty(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m)$. Die weiteren Überlegungen führen uns aber darauf, dass wir sehr wohl die dichte $*$ -Unteralgebra $Lip(K)$ von $C(K)$ als inversen Limes darstellen können. Der Schlüssel dazu wird die de Leeuw-Abbildung d sein. Wir erinnern daran, dass $Lip(f) = \|df\|_\infty$ für $f \in Lip(K)$ gilt, und stellen im folgenden Lemma noch weitere Eigenschaften zusammen.

3.6. LEMMA. Sei $D_m = \ell^\infty(X_m) = C(X_m) = Lip(X_m)$. Die de Leeuw-Abbildung $d_m : D_m \rightarrow \ell^\infty(\tilde{X}_m)$ ist eine Derivation von der unitalen kommutativen C^* -Algebra D_m in den unitalen D_m -Banach-Bimodul $E_m = \ell^\infty(\tilde{X}_m)$, und das Diagramm in Abbildung 12

$$\begin{array}{ccc}
 D_{m_1} & \xleftarrow{\pi_{m_2, m_1}} & D_{m_2} \\
 \downarrow d_{m_1} & & \downarrow d_{m_2} \\
 E_{m_1} & \xleftarrow{\tau_{m_2, m_1}} & E_{m_2}
 \end{array}$$

ABBILDUNG 12.

kommutiert.

BEWEIS. Die Unitalität von D_m und E_m ist ebenso offenkundig wie die Tatsache, dass d_m die Leibnizsche Produktregel $d_m(fg) = d_m(f) \cdot g + f \cdot d_m(g)$ für $f, g \in D_m$ erfüllt. Die Abbildung d_m ist abgeschlossen, weil die endlichdimensionalen normierten Räume

$\ell^\infty(X_m)$ und $\ell^\infty(\tilde{X}_m)$ vollständig sind. Für $f \in \ell^\infty(X_{m_2})$ und $(x, y) \in \tilde{X}_{m_1}$ gilt

$$\begin{aligned} d_{m_1} \circ \pi_{m_2, m_1}(f)(x, y) &= \frac{\pi_{m_2, m_1}(f)(x) - \pi_{m_2, m_1}(f)(y)}{\rho_{m_1}(x, y)} = \frac{f|_{X_{m_1}}(x) - f|_{X_{m_1}}(y)}{\rho_{m_2}(\psi_{m_1, m_2}(x), \psi_{m_1, m_2}(y))} \\ &= \frac{f(\psi_{m_1, m_2}(x)) - f(\psi_{m_1, m_2}(y))}{\rho_{m_2}(\psi_{m_1, m_2}(x), \psi_{m_1, m_2}(y))} = \tau_{m_2, m_1} \circ d_{m_2}(f)(x, y). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. \square

Die de Leeuw-Abbildung

$$d_m : (D_m, \|\cdot\|_{D_m}) = (\ell^\infty(X_m), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E_m, \|\cdot\|_{E_m}) = (\ell^\infty(\tilde{X}_m), \|\cdot\|_\infty)$$

ist nicht kontraktiv. Deswegen können wir auch nicht den inversen Limes der Folge von Abbildungen $(d_m)_m$ gemäß A.12 bilden. In Anhang B haben wir ausführlich gezeigt — und eine Kurzversion geben wir nun wieder — wie wir dieser Schwierigkeit begegnen und zumindest für die Abbildungen

$$\begin{aligned} \hat{d}_m : (\hat{D}_m, \|\cdot\|_{\hat{D}_m}) = (\ell^\infty(X_m), \max(\|\cdot\|_{D_m}, \|d_m \cdot\|_{E_m})) &\rightarrow (E_m, \|\cdot\|_{E_m}) = (\ell^\infty(\tilde{X}_m), \|\cdot\|_\infty) \\ f &\mapsto d_m(f) \end{aligned}$$

den inversen Limes bilden können, welchen wir mit \hat{d} bezeichnen und der auf ganz $\hat{D} = \varprojlim (\hat{D}_m, \|\cdot\|_{\hat{D}_m})$ definiert ist — $(\hat{D}_m, \|\cdot\|_{\hat{D}_m}, \pi)_m$ ist offensichtlich wieder eine inverse Folge von Banachräumen. In Satz B.1 zusammen mit einer zuvor angestellten Injektivitätsüberlegung wird gezeigt, dass der Definitionsbereich \hat{D} von \hat{d} in D eingebettet werden kann. Bezeichnen wir diese Einbettung von $\hat{D} = \text{Def}(\hat{d})$ in D mit k , so erhalten wir einfach durch „Zurückziehen“ einen unbeschränkten linearen Operator $d : D \rightarrow E$ mit Definitionsbereich $\text{Def}(d) = k(\text{Def}(\hat{d}))$, das heißt

$$(17) \quad d : D \supset \text{Def}(d) = k(\varprojlim (\hat{D}_m, \|\cdot\|_{\hat{D}_m})), \rightarrow \varprojlim (E_m, \|\cdot\|_{E_m}), \quad d(k(f)) := \hat{d}(f).$$

Der folgende Satz besagt nun, dass $\text{Def}(d)$ tatsächlich genau so aussieht wie erwartet.

3.7. SATZ. *Es gelten*

$$\begin{aligned} \text{Def}(d) \cong \hat{D} = \varprojlim (\ell^\infty(X_m), \max(\|\cdot\|_\infty, \|d_m \cdot\|_\infty)) &\stackrel{(i)}{\cong} \left(\text{Lip}\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m\right), \max(\|\cdot\|_\infty, \text{Lip}(\cdot)) \right) \\ &\stackrel{(ii)}{\cong} (\text{Lip}(K), \max(\|\cdot\|_\infty, \text{Lip}(\cdot))) \end{aligned}$$

und

$$\|d(f)\|_E = \lim_{m \rightarrow \infty} \|d_m(\pi_m(f))\|_{E_m} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|d_m(\pi_m(f))\|_{E_m}$$

für alle $f \in \text{Def}(d)$.

BEWEIS. Wir setzen

$$L_1 := \left(\text{Lip}\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m\right), \max(\|\cdot\|_\infty, \text{Lip}(\cdot)) \right) \text{ und } L_2 := (\text{Lip}(K), \max(\|\cdot\|_\infty, \text{Lip}(\cdot))).$$

- (i) ergibt sich aus dem Eindeutigkeitsatz A.11 für den inversen Limes, denn $\phi_m : L_1 \rightarrow X_m, f \mapsto f|_{X_m}$ erfüllt die dort geforderten Eigenschaften, und die zugehörige Abbildung $\phi : L_1 \rightarrow \hat{D}, f \mapsto (f|_{X_m})_m$ ist surjektiv, denn $g \in L_1$ mit $g(x) := g_m(x)$ falls $x \in X_m$ ist ein wohldefiniertes Urbild für $(g_m)_m \in \hat{D}$ unter ϕ . Außerdem ist L_1 vollständig nach [67] (1.6.2).
- (ii) folgt aus der Tatsache, dass $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$ dicht in K bezüglich ρ liegt und es daher zu $f \in Lip(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m)$ genau eine lipschitzstetige Fortsetzung g gleicher Lipschitz-Halbnorm und Supremumsnorm auf ganz K gibt. Laut [67] (1.6.2) ist L_2 ein Banachraum.

Die zweite Behauptung ergibt sich ebenso aus der Dichtheit von $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$ in K . \square

Betrachten wir Korollar 3.5 und Satz 3.7 gemeinsam, so erkennen wir, dass die Folge $(D_m, \hat{D}_m, \|d_m \cdot\|_{E_m})_{m \in \mathbb{N}} = (C(X_m), Lip(X_m), Lip(\cdot))_{m \in \mathbb{N}}$ beziehungsweise genauer $((C(X_m), Lip(X_m), Lip(\cdot)), \|\cdot\|_\infty, \pi)_{m \in \mathbb{N}}$ eine inverse Folge von kompakten quantenmetrischen Räumen darstellt, deren inverser Limes $(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ ist, vergleiche Satz 3.3. Wir sehen auch, dass der erste Eintrag im inversen Limes-Tripel $C(K)$ nicht der inverse Limes $\lim_{\leftarrow} C(X_m) = \ell^\infty(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m)$ im Sinne von C^* -Algebren ist, sondern genau der Abschluss von $Lip(K) = \lim_{\leftarrow} Lip(X_m)$ bezüglich der Norm in $\ell^\infty(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m)$. Es ist also nicht sinnvoll, in Satz 3.3 (iii) zu fordern, dass A der inverse Limes der Folge $(A_m, \|\cdot\|_{A_m}, \pi)_m$ im Sinne von C^* -Algebren ist, wenn $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A)$ inverser Limes der inversen Folge von Lipschitz-Algebren beziehungsweise von kompakten quantenmetrischen Räume $((A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{A_m}), \|\cdot\|_{A_m}, \pi)_m$ sein soll.

Wir werden in Beispiel 3.12 und in Beispiel 3.20 auf Seite 88 im Zusammenhang zur rationalen Drehalgebra nicht-kommutative Beispiele für den inversen Limes endlichdimensionaler kompakter quantenmetrischer Räume behandeln.

3.8. BEMERKUNG. Wir können die de Leeuw-Abbildung auch auf dem ganzen Raum K , mit dem wir gestartet sind und den wir in endliche Teilräume X_m mit $K = \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m}$ „zerlegt“ haben, implementieren. Diese wollen wir nun mit d' bezeichnen. Wir erhalten also die kontraktive Abbildung

$$d' : (Lip(K), \max(\|\cdot\|_\infty, Lip(\cdot))) \rightarrow (\ell^\infty(\tilde{K}), \|\cdot\|_\infty).$$

Sie steht auf folgende Weise in Zusammenhang mit der inversen Limes-Abbildung \hat{d} von $(\hat{d}_m)_m$ aus der Diskussion vor Satz 3.7 und damit mit der zurückgezogenen Abbildung d aus Formel (17) auf Seite 66: Bezeichnen wir die lineare bijektive Isometrie von $(Lip(K), \max(\|\cdot\|_\infty, Lip(\cdot)))$ nach \hat{D} aus Satz 3.7 mit Φ , so erhalten wir das Diagramm aus Abbildung 13.

$$\begin{array}{ccc} (Lip(K), \max(\|\cdot\|_\infty, \|d'\|_\infty)) & \xrightarrow{d'} & (\ell^\infty(\tilde{K}), \|\cdot\|_\infty) \\ \Phi \downarrow & & \varphi_1 \downarrow \quad \uparrow \varphi_2 \\ \hat{D} = \lim_{\leftarrow} (\ell^\infty(X_m), \max(\|\cdot\|_\infty, \|d_m \cdot\|_\infty)) & \xrightarrow{\hat{d}} & \lim_{\leftarrow} (\ell^\infty(\tilde{X}_m)) \cong \ell^\infty(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{X}_m) \end{array}$$

ABBILDUNG 13.

Benutzen wir $(\ell^\infty(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{X}_m), \|\cdot\|_\infty) \cong \lim_{\leftarrow} (\ell^\infty(\tilde{X}_m), \|\cdot\|_\infty)$ und betrachten wir die Abbildungen

$$\varphi_1 : \ell^\infty(\tilde{K}) \rightarrow \ell^\infty\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{X}_m\right), f \mapsto f|_{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{X}_m} \quad \text{und}$$

$$\varphi_2 : \ell^\infty\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{X}_m\right) \rightarrow \ell^\infty(\tilde{K}), g \mapsto \varphi_2(g), \varphi_2(g)(x, y) := \begin{cases} g(x, y) & \text{falls } (x, y) \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{X}_m, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

so sind φ_1 und φ_2 Modulhomomorphismen, das heißt, für $f_1, h_1 \in \hat{D}$, $f_2, h_2 \in Lip(K)$, $g_1, g_2 \in \ell^\infty(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{X}_m)$ und $g_3, g_4 \in \ell^\infty(\tilde{K})$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi_2(g_1 + g_2) &= \varphi_2(g_1) + \varphi_2(g_2), & \varphi_2(f_1 g_1 h_1) &= \Phi^{-1}(f_1) \varphi_2(g_1) \Phi^{-1}(h_1), \\ \varphi_1(g_3 + g_4) &= \varphi_1(g_3) + \varphi_1(g_4), & \varphi_1(f_2 g_3 h_2) &= \Phi(f_2) \varphi_1(g_3) \Phi(h_2), \end{aligned}$$

und obiges Diagramm kommutiert: $\hat{d} = \varphi_1 \circ d' \circ \Phi^{-1}$.

In diesem Sinne entspricht die de Leeuw-Abbildung auf den endlichen Teilräumen X_m von K der de Leeuw-Abbildung auf ganz K . Das Bild von \hat{d} entspricht also einem Untermodul von $\ell^\infty(\tilde{K})$, der isometrisch isomorph zum Modul $\lim_{\leftarrow} (\ell^\infty(\tilde{X}_m)) \cong \ell^\infty(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{X}_m)$ ist.

2. Strukturtheorie beim inversen Limes in den Kategorien LIP und KQR

In diesem Abschnitt machen wir uns Gedanken über die Konstruktion und Rekonstruktion von Lipschitz-Algebren und kompakten quantenmetrischen Räumen mit Hilfe des inversen Limes. Ein besonderes Augenmerk richten wir dabei auf die Limes inverser Folgen von endlichdimensionalen kompakten quantenmetrischen Räumen. Als Erstes überlegen wir uns, unter welchen Voraussetzungen sich alle Eigenschaften einer Lipschitz-Algebra beziehungsweise eines kompakten quantenmetrischen Raumes auf den inversen Limes übertragen, treffen also eine Existenzaussage über den inversen Limes derartiger Räume. Im Anschluss daran untersuchen wir, was geschieht, wenn wir den inversen Limes $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ einer inversen Folge endlichdimensionaler Lipschitz-Algebren $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})_m$ bilden, genauer gesagt, welcher Klasse von C^* -Algebren die Limes-Algebra A angehört. Schließlich widmen wir uns der Rekonstruktion von kompakten quantenmetrischen Räumen als inverser Limes endlichdimensionaler kompakter quantenmetrischer Räume und zeigen einen Zusammenhang zum multiplikativen Entropie-Index aus Abschnitt 2 in Kapitel 2 auf.

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir den inversen Limes für eine Folge von Lipschitz-Algebren beziehungsweise kompakter quantenmetrischer Räume definiert und nebenbei für den kommutativen Fall ein Beispiel konstruiert: Für einen kompakten metrischen Raum (K, ρ) und eine aufsteigende Folge von endlichen Teilmengen X_m , deren Vereinigung dicht in K liegt, haben wir den kompakten quantenmetrischen Raum $(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ als inversen Limes der endlichdimensionalen kompakten quantenmetrischen Räume $(C(X_m), Lip(X_m), Lip(\cdot))$ gewonnen. Wir haben aber noch keine allgemeine Aussage über die Existenz des inversen Limes von Lipschitz-Algebren oder

von kompakten quantenmetrischen Räumen getroffen. Satz 3.10 zeigt, dass der inverse Limes einer inversen Folge $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})_m$ von Lipschitz-Algebren stets existiert. Wir können uns des Weiteren fragen, ob für eine inverse Folge $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})_m$ kompakter quantenmetrischer Räume die Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ im zugehörigen inversen Limes $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ auch wieder die Eigenschaften der Unterhalbstetigkeit und der totalen Beschränktheit erfüllt. Im Allgemeinen müssen wir dies verneinen, wie wir in einem Gegenbeispiel zeigen, und es stellt sich heraus, dass sich die totale Beschränktheitseigenschaft nicht automatisch auf den inversen Limes überträgt, ganz im Gegensatz zur Bedingung der Unterhalbstetigkeit der Halbnormen $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$. Satz 3.10 gibt eine Bedingung an, unter der sich beide Eigenschaften auf den inversen Limes vererben.

3.9. BEISPIEL. Wir setzen $A_m := C([-m, m])$, $\mathcal{A}_m := Lip([-m, m])$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m} := Lip(\cdot)$. Offenbar ist $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})_m$ eine inverse Folge kompakter quantenmetrischer Räume, und wir erhalten im inversen Limes $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ für A die Algebra $C^b(\mathbb{R})$ der stetigen beschränkten Funktionen auf \mathbb{R} , des Weiteren $\mathcal{A} = C^b(\mathbb{R}) \cap Lip(\mathbb{R})$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{A}} := Lip(\cdot)$. Dass die Eigenschaft der totalen Beschränktheit für $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$ gültig ist, sehen wir, indem wir wie im Beweis von Satz 1.3 auf Seite 6 vorgehen. Das heißt, wir betrachten die Quotientenabbildung $Q_m : A_m \rightarrow A_m/\mathbb{C}\mathbf{1}_{A_m}$ und identifizieren die Menge $Q_m(\mathcal{A}_m^1)$ mit $\{f \in Lip([-m, m]) \mid Lip(f) \leq 1, f(0) = 0\}$. Weiter konstruieren wir in $[-m, m] \times \mathbb{C}$, genauer in der Teilmenge $[-m, m] \times B_m(0)$ davon, einen Kegel, in welchem wir eine endliche Punktmenge auswählen und dazu endlich viele lipschitzstetige Funktionen g konstruieren, so dass in deren ε -Umgebungen für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Menge $\{f \in Lip([-m, m]) \mid Lip(f) \leq 1, f(0) = 0\}$ enthalten ist. Die Funktionen g sind also stückweise affin und haben außerhalb der Menge der möglichen Knickstellen $\{z\varepsilon \mid -\lfloor \frac{m}{\varepsilon} \rfloor \leq z \leq \lfloor \frac{m}{\varepsilon} \rfloor\}$ Steigung 0, 1 oder -1 . Abbildung 14 soll dies für den Fall $\varepsilon = \frac{m}{5}$ illustrieren, in welchem wir uns auf reellwertige Funktionen beschränken, die wir angedeutet haben.

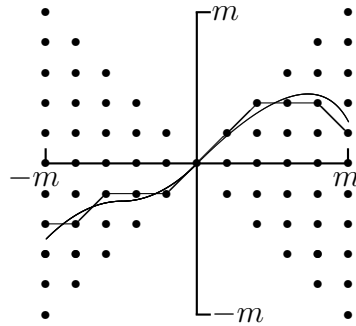


ABBILDUNG 14.

In diesem reellwertigen Fall erfüllen die Funktionen g

$$g(0) = 0$$

$$g(z\varepsilon) \in \{g((z-1)\varepsilon), g((z-1)\varepsilon) + \varepsilon, g((z-1)\varepsilon) - \varepsilon\} \quad 1 \leq z \leq \left\lfloor \frac{m}{\varepsilon} \right\rfloor, z \in \mathbb{Z},$$

$$g(z\varepsilon) \in \{g((z+1)\varepsilon), g((z+1)\varepsilon) + \varepsilon, g((z+1)\varepsilon) - \varepsilon\} \quad -1 \leq z \leq -\left\lfloor \frac{m}{\varepsilon} \right\rfloor, z \in \mathbb{Z}.$$

Dieses Vorgehen ist für $C^b(\mathbb{R})$ anstelle von $C([-m, m])$ offenbar nicht möglich; die totale Beschränktheitseigenschaft wird von $(C^b(\mathbb{R}), C^b(\mathbb{R}) \cap Lip(\mathbb{R}), Lip(\cdot))$ nicht erfüllt. Wir betrachten dies in größerem Zusammenhang: Wir können den Zustandsraum $S(C^b(\mathbb{R}))$ von $C^b(\mathbb{R})$ als Stone-Čech-Kompaktifizierung $\beta\mathbb{R}$ von \mathbb{R} auffassen. In dieser Kompaktifizierung besitzt dann beispielsweise die Folge $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, anders als in \mathbb{R} mit der vom Betrag induzierten Metrik, welche durch die Lipschitzstetigen Funktionen über die bereits erwähnte Formel

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid f \in Lip(\mathbb{R}), Lip(f) \leq 1\}$$

wiedergegeben wird. Wäre die Eigenschaft der totalen Beschränktheit für $C^b(\mathbb{R}) \cap Lip(\mathbb{R})$ erfüllt, so würde, wie Rieffel festgestellt hat, die Schwach*-Topologie mit der Topologie der von der Halbnorm induzierten Metrik auf dem Zustandsraum des Kompaktums übereinstimmen, siehe Seite 5. Die Einschränkung dieser Metrik in $S(C^b(\mathbb{R}))$ auf die reinen Zustände müsste dann aber die Metrik auf \mathbb{R} zurückliefern. Da $S(C^b(\mathbb{R}))$ kompakt in der Schwach*-Topologie ist, besitzt $S^e(C^b(\mathbb{R})) \subset S(C^b(\mathbb{R}))$ endlichen Durchmesser bezüglich der Metrik auf dem Zustandsraum. Also müsste \mathbb{R} bezüglich der vom Betrag induzierten Metrik endlichen Durchmesser haben, was offenbar nicht der Fall ist.

Man kann sich an dieser Stelle die Frage stellen, ob wir mit der euklidischen Metrik auf \mathbb{R} und der Lipschitz-Halbnorm $Lip(\cdot)$ der zugehörigen Lipschitzstetigen Funktionen nur die falsche Wahl getroffen haben, und es vielleicht eine andere in $C^b(\mathbb{R})$ dichte *-Unteralgebra mit Halbnorm gibt, mit der wir einen kompakten quantenmetrischen Raum erhalten. Aber auch das ist nicht möglich, denn sonst wäre der Zustandsraum $S(C^b(\mathbb{R}))$ und damit via obiger Identifikation $\beta\mathbb{R}$ bezüglich der von dieser Halbnorm induzierten Metrik — also bezüglich der Schwach*-Topologie — ein kompakter Hausdorff-Raum. Ein solcher Raum X ist aber laut [68] (I.2) genau dann metrisierbar, wenn $C(X)$ separabel ist; in unserem Falle bedeutete dies die Separabilität von $C(\beta\mathbb{R})$, welche aber nicht erfüllt sein kann: Die Funktionen aus $M := \{h_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{ixt} \mid x \in \mathbb{R}\}$ besitzen Norm 1 und sind gleichmäßig stetig, und es existiert wegen der Dichtheit von \mathbb{R} in $\beta\mathbb{R}$ eine eindeutige und normgleiche Fortsetzung auf $\beta\mathbb{R}$. Für $x \neq y$ erhalten wir wegen $\|h_x - h_y\|_\infty = \|h_x(\mathbf{1} - h_{y-x})\|_\infty = \|\mathbf{1} - h_{y-x}\|_\infty$ und $h_{y-x}\left(\frac{\pi}{y-x}\right) = -1$ dann $\|h_x - h_x\|_\infty \geq 2$. Also kann M als überabzählbare Menge von Funktionen mit Abstand mindestens 2 in der Einheitskugel von $C(\beta\mathbb{R})$ aufgefasst werden, so dass $C(\beta\mathbb{R})$ nicht separabel sein kann.

Die Bedingungen im folgenden Satz sagen aber, in welchen Fällen die Situation beherrschbar ist. Wir betrachten sie im Zusammenhang mit dem eben behandelten Beispiel 3.9 und Satz 3.1 von Seite 60, in dem wir die Approximation eines kompakten metrischen Raumes mit einer aufsteigenden Folge endlicher Punktmengen und dem direkten Limes durchgeführt haben. Diese Approximation übersetzt sich nach der Diskussion im Anschluss an Satz 3.1 genau in die Approximation des zugehörigen kompakten quantenmetrischen Raumes $(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ mit Hilfe des inversen Limes, die wir, wie wir vor Beispiel 3.9 in Erinnerung gerufen haben, in Abschnitt 1 dieses Kapitels nebenbei durchgeführt haben. Wir sehen, dass die Voraussetzungen, unter denen

sich die Eigenschaft der totalen Beschränktheit auf den inversen Limes vererbt, mit dem Durchmesser des jeweils zugrunde liegenden Kompaktums zusammenhängen: In Beispiel 3.9 finden wir zu jedem kompakten Intervall $[-m, m]$ eine lipschitzstetige beschränkte Funktion auf \mathbb{R} mit Lipschitz-Halbnorm höchstens Eins, deren Supremumsnorm beliebig groß ist, und die Bedingung (i) des folgenden Satzes kann demnach nicht erfüllt sein. Dies beschreibt genau die Tatsache beziehungsweise ist eine Folge davon, dass \mathbb{R} keinen endlichen Durchmesser besitzt. Genauso impliziert der endliche Durchmesser im Beispiel aus Abschnitt 1 dieses Kapitels aber die Gültigkeit der Bedingung (i) im folgenden Satz. Bedingung (ii) entspricht im kommutativen Fall der Existenz von lipschitzstetigen Fortsetzungen lipschitzstetiger Funktionen, so dass die Lipschitz-Halbnorm der Fortsetzung höchstens das C -fache der Lipschitz-Halbnorm der Ausgangsfunktion für eine universelle Konstante C beträgt. Dies ist im Kommutativen aber laut [40] (Lemma 5.6) sowieso erfüllt, denn die Konstante C hängt nur von der (reellen) Dimension n des Bildraumes ab, vergleiche Bemerkung 1.4. Der Bildraum ist bei uns $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, also $n = 2$, so dass $C = \sqrt{2}$ ist.

In abstrakten kompakten quantenmetrischen Räumen, die als inverse Limites von kompakten quantenmetrischen Räumen auftauchen, sichern die folgenden Bedingungen demnach eine gewisse Endlichkeitsbedingung an A .

3.10. SATZ. *Der inverse Limes einer inversen Folge von Lipschitz-Algebren existiert stets.*

Sei $((A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}), \|\cdot\|_{A_m}, \pi)_m$ eine inverse Folge kompakter quantenmetrischer Räume mit inversem Limes $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ im Sinne von Lipschitz-Algebren, so dass zusätzlich

- (i) $\|\pi_m(\cdot)\|_{\mathcal{A}_m}$ gleichmäßig auf \mathcal{A}^1 gegen $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ konvergiert, das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq m_0$ und alle $a \in \mathcal{A}^1$ die Ungleichung $|\|a\|_{\mathcal{A}} - \|\pi_m(a)\|_{\mathcal{A}_m}| < \varepsilon$ erfüllt ist und
- (ii) es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $a_m \in \mathcal{A}_m^1$ ein $a \in \mathcal{A}$ existiert mit $\pi_m(a) = a_m$ und $\|a\|_{\mathcal{A}} \leq C$.

Dann ist auch $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ ein kompakter quantenmetrischer Raum. Dabei bezeichnet wie üblich $\pi_m : A \rightarrow A_m$ die kanonische Projektion.

BEWEIS. Sei $((A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}), \|\cdot\|_{A_m}, \pi)_m$ eine inverse Folge von Lipschitz-Algebren. Wir setzen $B := \lim_{\leftarrow} A_m$ im Sinne von C^* -Algebren, bilden darin den inversen Limes \mathcal{A} der $*$ -Algebren \mathcal{A}_m , das heißt

$$\mathcal{A} := \{(a_m)_{m \in \mathbb{N}} \mid a_m \in \mathcal{A}_m, (a_m)_m \in B, \lim_{m \rightarrow \infty} \|a_m\|_{\mathcal{A}_m} < \infty\},$$

setzen $\|(a_m)_m\|_{\mathcal{A}} := \lim_{m \rightarrow \infty} \|a_m\|_{\mathcal{A}_m}$ für $(a_m)_m \in \mathcal{A}$ und definieren schließlich A als Normabschluss von \mathcal{A} in B .

Dann ist $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ der inverse Limes der Folge $((A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}), \|\cdot\|_{A_m}, \pi)_m$, denn es gilt

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\|\cdot\|_{\mathcal{A}}) &= \{(a_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \mid (a_m)_m \in A, \sup_{m \in \mathbb{N}} \|a_m\|_{\mathcal{A}_m} = 0\} \\ &= \{(a_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \mid a_m \in \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}_{A_m}, \pi_{m+k, m}(a_{m+k}) = a_m \forall m, k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}_A. \end{aligned}$$

Weiter ist offensichtlich, dass sich sowohl die Leibniz-Regel als auch die $*$ -Treue der Halbnorm auf den inversen Limes übertragen, da sie komponentenweise für jedes Limes-Element gültig sind; ebenso ist \mathcal{A} bezüglich $\max(\|\cdot\|_{\mathcal{A}}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ ein Banachraum, denn

ist $(a^n)_{n \in \mathbb{N}} = ((a_m^n)_m)_n$ eine Cauchyfolge in \mathcal{A} bezüglich dieser Norm, $a^n = (a_m^n)_m \in \mathcal{A}$, so überträgt sich wegen $\|a_m^{n_1} - a_m^{n_2}\|_{\mathcal{A}_m} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|a_m^{n_1} - a_m^{n_2}\|_{\mathcal{A}_m} = \|a^{n_1} - a^{n_2}\|_{\mathcal{A}}$ die Eigenschaft, Cauchyfolge zu sein, von $((a_m^n)_m)_n$ auf $(a_m^n)_n$ für jedes $m \in \mathbb{N}$, und dasselbe ergibt sich für $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ statt $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$. Damit konvergiert $(a_m^n)_n$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ gegen $c_m \in \mathcal{A}_m$ bezüglich $\max(\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$. Aus $\pi_{m_2, m_1}(a_{m_2}^n) = a_{m_1}^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\|\pi_{m_2, m_1}(c_{m_2}) - c_{m_1}\|_{\mathcal{A}_{m_1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\pi_{m_2, m_1}(a_{m_2}^n) - a_{m_1}^n\|_{\mathcal{A}_{m_1}} = 0.$$

Daher gilt $c = (c_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, und $(\mathcal{A}, \max(\|\cdot\|_{\mathcal{A}}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}))$ ist ein Banachraum. Somit ist $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ eine Lipschitz-Algebra. Diese erfüllt offenbar alle Bedingungen von Satz 3.3, und daher ist der inverse Limes in der Kategorie LIP stets existent.

Sei nun $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})_m$ eine Folge kompakter quantenmetrischer Räume. Sei weiter $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a^n = (a_m^n)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A , welche bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ gegen $a = (a_m)_{m \in \mathbb{N}} \in A$ konvergiert, das heißt, es gilt

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(a_m^n)_m - (a_m)_m\|_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \|a_m^n - a_m\|_{\mathcal{A}_m}$$

und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_m^n = a_m$ bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Unterhalbstetigkeit von $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$ folgt

$$\|a_m\|_{\mathcal{A}_m} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|a_m^n\|_{\mathcal{A}_m} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} \|a_k^n\|_{\mathcal{A}_k} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|_{\mathcal{A}},$$

woraus die Unterhalbstetigkeit von $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ bezüglich $\|\cdot\|_A$ folgt, indem wir auf der linken Seite das Supremum über alle $m \in \mathbb{N}$ bilden.

Es bezeichnen Q_m beziehungsweise Q die Quotientenabbildungen von \mathcal{A}_m beziehungsweise \mathcal{A} bezüglich des Kerns der jeweiligen Halbnorm. Es gelten (i) und (ii). Seien $a \in \mathcal{A}^1$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen m_0 so groß, dass für alle $m \geq m_0$ und alle $b \in \mathcal{A}^1$ die Ungleichung $\|b\|_A - \|\pi_m(b)\|_{\mathcal{A}_m} < \frac{\varepsilon}{2(C+1)}$ gilt, was nach (i) möglich ist. Sei $m \geq m_0$. Aufgrund der totalen Beschränktheitseigenschaft für $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$ gibt es endlich viele Elemente $a_1^m, \dots, a_{k_m}^m \in \mathcal{A}_m^1$ mit $\bigcup_{i=1}^{k_m} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(Q_m(a_i^m)) \supseteq Q_m(\mathcal{A}_m^1)$. Wegen (ii) können wir zu a_i^m ein Element $b_i^m \in \mathcal{A}$ derart wählen, dass $\pi_m(b_i^m) = a_i^m$ und $\|b_i^m\|_{\mathcal{A}} \leq C$ gilt. Dann ist $\|Q(a) - Q(b_i^m)\|_{A/\mathbb{C}\mathbf{1}_A} = \inf_{c \in \mathbb{C}} \|a - b_i^m + c\mathbf{1}_A\|_A$ und $\|a - b_i^m + c\mathbf{1}_A\|_A = \|a - b_i^m\|_A \leq C + 1$, also gilt für alle $r \geq m_0$ nach (i)

$$\left\| \pi_r \left(\frac{a - b_i^m + c\mathbf{1}_A}{C+1} \right) \right\|_{\mathcal{A}_r} + \frac{\varepsilon}{2(C+1)} > \left\| \frac{a - b_i^m + c\mathbf{1}_A}{C+1} \right\|_A \geq \left\| \pi_r \left(\frac{a - b_i^m + c\mathbf{1}_A}{C+1} \right) \right\|_{\mathcal{A}_r},$$

und somit für $r = m$

$$\|\pi_m(a - b_i^m + c\mathbf{1}_A)\|_{\mathcal{A}_m} + \frac{\varepsilon}{2} > \|a - b_i^m + c\mathbf{1}_A\|_A \geq \|\pi_m(a - b_i^m + c\mathbf{1}_A)\|_{\mathcal{A}_m}.$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} \|Q(a) - Q(b_i^m)\|_{A/\mathbb{C}\mathbf{1}_A} &= \inf_{c \in \mathbb{C}} \|a - b_i^m + c\mathbf{1}_A\|_A < \inf_{c \in \mathbb{C}} \|\pi_m(a - b_i^m + c\mathbf{1}_A)\|_{\mathcal{A}_m} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \|Q_m(\pi_m(a)) - Q_m(a_i^m)\|_{\mathcal{A}_m/\mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathcal{A}_m}} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für mindestens einen Index $i \in \{1, \dots, k_m\}$. Somit ist die Eigenschaft der totalen Beschränktheit auch für $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ gezeigt. \square

3.11. BEMERKUNG. Aus der Bedingung, dass $\|\pi_m \cdot\|_{\mathcal{A}_m}$ gleichmäßig auf der Menge \mathcal{A}^1 gegen $\|\cdot\|_A$ konvergiert, ließe sich ähnlich zum multiplikativen Entropie-Index aus Definition 2.12 ein weiterer Index gewinnen, welcher in gewissem Zusammenhang zur

Approximation eines kompakten quantenmetrischen Raumes mittels endlichdimensionaler kompakter quantenmetrischer Räume steht. Hierzu könnten wir für einen $*$ -Homomorphismus $\pi : A \rightarrow F$ in eine C^* -Algebra F

$$\begin{aligned}\gamma_\pi &:= \sup_{a \in \mathcal{A}^1} (\|a\|_A - \|\pi(a)\|_F), \\ M_\varepsilon^\gamma(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A) &:= \inf \{ \text{kdim}(F) \mid \exists * \text{-Homomorphismus } \pi : A \rightarrow F, \gamma_\pi \leq \varepsilon \}, \\ \text{ind}_\gamma(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A) &:= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_\varepsilon^\gamma(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}\end{aligned}$$

setzen, und es wäre sicherlich interessant, die Beziehungen zwischen diesem neuen und dem multiplikativen Entropie-Index zu untersuchen. Wir widmen uns aber im Folgenden dem multiplikativen Entropie-Index.

Um die Bedingungen aus Satz 3.10 noch etwas besser zu illustrieren, konstruieren wir im folgenden Beispiel eine Folge von kompakten quantenmetrischen Räumen, deren inverser Limes existiert.

3.12. BEISPIEL. Wir wollen an Beispiel 1.7 anknüpfen, in welchem wir auf den $n \times n$ -Matrizen eine Halbnorm definiert haben, welche $M_n(\mathbb{C})$ zu einem kompakten quantenmetrischen Raum gemacht hat. Diese Konstruktion benutzen wir hier, um ein Beispiel für eine inverse Folge von kompakten quantenmetrischen Räumen angeben zu können, deren inverser Limes wieder ein kompakter quantenmetrischer Raum ist.

Dazu definieren wir $A_m := \bigoplus_{i=1}^m M_n(\mathbb{C})$ für eine natürliche Zahl n und fassen A_m als Teilmenge von $M_{mn}(\mathbb{C})$ auf. Als verbindende Abbildungen zwischen diesen C^* -Algebren für den inversen Limes benutzen wir die kanonischen Projektionen $\pi_{m_2, m_1} : A_{m_2} \rightarrow A_{m_1}, (a_1, \dots, a_{m_2}) \mapsto (a_1, \dots, a_{m_1})$.

Die Menge $U_n(\mathbb{C})$ der unitären Elemente in $M_n(\mathbb{C})$ bildet eine kompakte topologische Gruppe bezüglich der Normtopologie, welche auf $M_n(\mathbb{C})$ durch $*$ -Automorphismen wirkt: Jeder $*$ -Automorphismus auf der C^* -Algebra der kompakten Operatoren auf einem Hilbertraum besteht aus der Konjugation mit einem unitären Element, siehe etwa [44] (Theorem 2.4.8). Das Tripel $(M_n(\mathbb{C}), U_n(\mathbb{C}), \alpha)$ mit $\alpha_U(a) := U^* a U$ für $a \in M_n(\mathbb{C})$ und $U \in U_n(\mathbb{C})$ stellt sogar ein **C^* -dynamisches System** dar, das heißt, es existiert ein stetiger Homomorphismus α von der (lokal-)kompakten Gruppe $U_n(\mathbb{C})$ in die Gruppe $\text{Aut}(M_n(\mathbb{C}))$ der $*$ -Automorphismen auf der mit der Normtopologie ausgestatteten C^* -Algebra $M_n(\mathbb{C})$, wobei $\text{Aut}(M_n(\mathbb{C}))$ mit der Topologie der punktweisen (starken) Konvergenz ausgestattet ist, also die Abbildungen $\alpha(a) : U_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C}), U \mapsto \alpha_U(a)$ für alle $a \in M_n(\mathbb{C})$ stetig sind, vergleiche mit Beispiel 1.9.

Ist G eine abgeschlossene Untergruppe von $U_n(\mathbb{C})$, so wählen wir eine abzählbare dichte Teilmenge $X = \{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in G derart aus, dass $g_1 = \mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})}$ gilt. Ist ρ eine Metrik auf G , welche (G, ρ) zu einer kompakten topologischen Gruppe macht und bezüglich der die Abbildungen $(G, \rho) \rightarrow (M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})}), g \mapsto \alpha_g(a)$ für $a \in M_n(\mathbb{C})$ stetig sind, also etwa $\rho(g, h) := \|g - h\|_{M_n(\mathbb{C})} = \|gh^{-1} - \mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})}\|_{M_n(\mathbb{C})}$ für $g, h \in G$, so bezeichnen wir die Einschränkung von ρ auf X ebenfalls mit ρ . Eine Halbnorm, welche A_m zu einem kompakten quantenmetrischen Raum macht, erhalten wir wie folgt. Wir setzen $X_m := \{g_1, \dots, g_m\}$ für $m \in \mathbb{N}$, und für $m \geq 2$

und $(a_1, \dots, a_m) \in A_m$ definieren wir die Halbnorm

$$\|(a_1, \dots, a_m)\|_{(X_m, \rho)} := \sup \left\{ \frac{\|a_i - \alpha_{g_i g_j^{-1}}(a_j)\|_{M_n(\mathbb{C})}}{\rho(g_i, g_j)} \mid 1 \leq i, j \leq m, i \neq j \right\}.$$

Wir ordnen also implizit dem j -ten Eintrag a_j von $(a_1, \dots, a_m) \in A_m$ den Punkt g_j aus $X_m \subset X$ zu und messen, wie groß der Abstand zwischen a_i und $\alpha_{g_i g_j^{-1}}(a_j)$, gewichtet mit dem Abstand zwischen g_i und g_j , höchstens werden kann. Weil die Konjugation mit unitären Elementen die Norm in $M_n(\mathbb{C})$ erhält, gilt für jedes feste $k \in \{1, \dots, m\}$

$$(18) \quad \|(a_1, \dots, a_m)\|_{(X_m, \rho)} = \sup \left\{ \frac{\|\alpha_{g_k g_i^{-1}}(a_i) - \alpha_{g_k g_j^{-1}}(a_j)\|_{M_n(\mathbb{C})}}{\rho(g_i, g_j)} \mid 1 \leq i, j \leq m, i \neq j \right\}.$$

Ist weiter $\|\cdot\|_H$ eine Halbnorm auf $M_n(\mathbb{C})$, die $(M_n(\mathbb{C}), M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|_H)$ zu einem kompakten quantenmetrischen Raum macht, etwa die Halbnorm aus Beispiel 1.7, so definieren wir auf A_m die Halbnorm

$$(19) \quad \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m} := \begin{cases} \|\cdot\|_H & \text{falls } m = 1 \\ \|\cdot\|_{(X_m, \rho)} + \|\pi_{m,1}(\cdot)\|_H & \text{falls } 2 \leq m \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Diese gibt jedem Element aus A_m endliche Halbnorm, und deshalb setzen wir $\mathcal{A}_m := A_m$. Damit wird $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$ zu einem kompakten quantenmetrischen Raum, was wir nun kurz darlegen. Ist $\|(a_1, \dots, a_m)\|_{\mathcal{A}_m} = 0$, so gilt $\|a_1\|_H = 0$ nach Voraussetzung, woraus $a_1 = c \mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})}$ für ein $c \in \mathbb{C}$ folgt, und wegen $\alpha_{g_i g_j^{-1}}(c \mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})}) = c \mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})}$ für $1 \leq i, j \leq m$ gilt schon $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{C} \mathbf{1}_{A_m}$. Weiter erfüllt $\|\cdot\|_H$ die Leibniz-Regel, und ebenso $\|\cdot\|_{(X_m, \rho)}$ wegen

$$\begin{aligned} \|(a_1, \dots, a_m)(b_1, \dots, b_m)\|_{(X_m, \rho)} &= \|(a_1 b_1, \dots, a_m b_m)\|_{(X_m, \rho)} \\ &= \sup_{\substack{1 \leq i, j \leq m \\ i \neq j}} \frac{\|a_i b_i - \alpha_{g_i g_j^{-1}}(a_j b_j)\|_{M_n(\mathbb{C})}}{\rho(g_i, g_j)} \\ &\leq \sup_{\substack{1 \leq i, j \leq m \\ i \neq j}} \frac{\|a_i b_i - a_i \alpha_{g_i g_j^{-1}}(b_j)\|_{M_n(\mathbb{C})}}{\rho(g_i, g_j)} + \sup_{\substack{1 \leq i, j \leq m \\ i \neq j}} \frac{\|a_i \alpha_{g_i g_j^{-1}}(b_j) - \alpha_{g_i g_j^{-1}}(a_j b_j)\|_{M_n(\mathbb{C})}}{\rho(g_i, g_j)} \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq m} \|a_i\|_{M_n(\mathbb{C})} \sup_{\substack{1 \leq i, j \leq m \\ i \neq j}} \frac{\|b_i - \alpha_{g_i g_j^{-1}}(b_j)\|_{M_n(\mathbb{C})}}{\rho(g_i, g_j)} \\ &\quad + \sup_{\substack{1 \leq i, j \leq m \\ i \neq j}} \frac{\|a_i - \alpha_{g_i g_j^{-1}}(a_j)\|_{M_n(\mathbb{C})}}{\rho(g_i, g_j)} \sup_{1 \leq i \leq m} \|\alpha_{g_i g_j^{-1}}(b_i)\|_{M_n(\mathbb{C})} \\ &= \|(a_1, \dots, a_m)\|_{\mathcal{A}_m} \|(b_1, \dots, b_m)\|_{(X_m, \rho)} + \|(a_1, \dots, a_m)\|_{(X_m, \rho)} \|(b_1, \dots, b_m)\|_{\mathcal{A}_m}. \end{aligned}$$

Also erfüllt auch $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$ die Leibniz-Regel. Die $*$ -Treue von $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$ ist wegen der von $\|\cdot\|_H$ ebenso offensichtlich wie die Unterhalbstetigkeit von $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$ bezüglich $\|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})}$ wegen der Normstetigkeit von $\alpha_{g_i g_j^{-1}}$ und der Unterhalbstetigkeit von $\|\cdot\|_H$ bezüglich $\|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})}$. Hieraus folgt die Vollständigkeit von $(\mathcal{A}_m, \max(\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}, \|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})}))$,

die in endlichdimensionalen normierten Räumen ohnehin erfüllt ist. Schließlich besitzt $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$ die Eigenschaft der totalen Beschränktheit, was wie in Beispiel 1.7 gezeigt wird. Somit ist $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$ ein kompakter quantenmetrischer Raum.

Da die Projektionen $\pi_{m_2, m_1} : A_{m_2} \rightarrow A_{m_1}$ sowohl bezüglich der Normen als auch bezüglich der Halbnormen kontraktiv sind, bildet $((A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}), \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}, \pi)_{m_1}$ ein inverses System kompakter quantenmetrischer Räume, deren inverser Limes $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ im Sinne von Lipschitz-Algebren laut Satz 3.10 existiert. Ein zum Standard-Modell (vergleiche Satz A.9) äquivalentes Modell für diesen inversen Limes erhalten wir, indem wir auf dem inversen Limes im Sinne von C^* -Algebren

$$\lim_{\leftarrow} A_m := \left\{ (a_m)_{m \in \mathbb{N}} \mid (a_m)_m \in \prod_{m \in \mathbb{N}} A_m, \pi_{m_2, m_1}(a_{m_2}) = a_{m_1} \text{ für } m_2 \geq m_1 \right\}$$

mit den kanonischen Projektionen $\pi_m : \lim_{\leftarrow} A_m \rightarrow A_m$, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto (a_k)_{1 \leq k \leq m}$ die Abbildung $\|\cdot\|_{\mathcal{A}} : \lim_{\leftarrow} A_m \rightarrow [0, +\infty]$, $(a_m)_{m \in \mathbb{N}} \mapsto \sup_{m \in \mathbb{N}} \|(a_k)_{1 \leq k \leq m}\|_{\mathcal{A}_m}$ definieren. Diese erfüllt bis auf die Tatsache, dass auch der Wert $+\infty$ zugelassen ist, alle Eigenschaften einer Halbnorm. Setzen wir nun

$$\mathcal{A} := \left\{ a \in \lim_{\leftarrow} A_m \mid \|a\|_{\mathcal{A}} < \infty \right\} \quad \text{und} \quad A := \overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_{\lim_{\leftarrow} A_m}},$$

so erhalten wir mit $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ den inversen Limes von $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})_m$ im Sinne von Lipschitz-Algebren, völlig in Einklang mit Satz 3.3.

Bildeten die Einträge eines Elements $a = (a_m)_{m \in \mathbb{N}} \in A$ genau eine α -Bahn, das hieße $\alpha_{g_i g_j^{-1}}(a_j) = a_i$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$, so wäre $\|a\|_{\mathcal{A}} = \|a_1\|_H$. Damit ein Element $a = (a_m)_{m \in \mathbb{N}} \in A$ endliche Halbnorm besitzt, müssen die einzelnen Komponenten also nahezu eine α -Bahn bilden: Je enger g_i und g_j bezüglich der Metrik ρ auf G beziehungsweise X beieinander liegen, desto näher müssen auch a_i und $\alpha_{g_i g_j^{-1}}(a_j)$ bezüglich $\|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})}$ liegen.

Um zu zeigen, dass auch der inverse Limes im Sinne kompakter quantenmetrischer Räume existiert, weisen wir die Bedingungen (i) und (ii) aus Satz 3.10 nach. Wir widmen uns Bedingung (i). Seien $\varepsilon > 0$ und $a = (a_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^1$ beliebig. Dann wählen wir m_0 so groß, dass $\min_{1 \leq i \leq m_0} \rho(g, g_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $g \in G$ gilt, was wegen der Dichtheit von X in G möglich ist. Sei $m \geq m_0$. Es gilt $\|a\|_{\mathcal{A}} - \|\pi_m(a)\|_{\mathcal{A}_m} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|a_k\|_{M_n(\mathbb{C})} - \sup_{1 \leq i \leq m} \|a_i\|_{M_n(\mathbb{C})}$. Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|a\|_{\mathcal{A}} \geq \|a_{k_0}\|_{M_n(\mathbb{C})} > \|a\|_{\mathcal{A}} - \frac{\varepsilon}{2}$. Falls $1 \leq k_0 \leq m_0$ gilt, ist $\|a\|_{\mathcal{A}} - \|\pi_m(a)\|_{\mathcal{A}_m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei also $k_0 > m_0$. Für $1 \leq i \leq m_0$ gilt dann

$$\begin{aligned} \left| \|a_{k_0}\|_{M_n(\mathbb{C})} - \|a_i\|_{M_n(\mathbb{C})} \right| &= \left| \|\alpha_{g_i g_{k_0}^{-1}}(a_{k_0})\|_{M_n(\mathbb{C})} - \|a_i\|_{M_n(\mathbb{C})} \right| \\ &\leq \|a_i - \alpha_{g_i g_{k_0}^{-1}}(a_{k_0})\|_{M_n(\mathbb{C})} \\ &\leq \sup_{\substack{s, t \in \mathbb{N} \\ s \neq t}} \frac{\|a_s - \alpha_{g_s g_t^{-1}}(a_t)\|_{M_n(\mathbb{C})}}{\rho(g_s, g_t)} \cdot \rho(g_i, g_{k_0}) \\ &\leq \|a\|_{\mathcal{A}} \cdot \rho(g_i, g_{k_0}) = \rho(g_i, g_{k_0}). \end{aligned}$$

Zu $g = g_{k_0}$ existiert ein Index $i_0 \leq m_0$ mit $\rho(g_{i_0}, g_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Im Falle von $\|a_{i_0}\|_{M_n(\mathbb{C})} > \|a_{k_0}\|_{M_n(\mathbb{C})}$ gilt $\|a\|_{\mathcal{A}} - \frac{\varepsilon}{2} < \|a_{k_0}\|_{M_n(\mathbb{C})} < \|a_{i_0}\|_{M_n(\mathbb{C})} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$ und

folglich

$$\|a\|_A - \|\pi_m(a)\|_{A_m} = \|a\|_A - \sup_{1 \leq i \leq m} \|a_i\|_{M_n(\mathbb{C})} \leq \|a\|_A - \|a_{i_0}\|_{M_n(\mathbb{C})} < \varepsilon.$$

Im Falle von $\|a_{i_0}\|_{M_n(\mathbb{C})} \leq \|a_{k_0}\|_{M_n(\mathbb{C})}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|a\|_A - \|\pi_m(a)\|_{A_m} &\leq \|a\|_A - \|a_{k_0}\|_{M_n(\mathbb{C})} + \|a_{k_0}\|_{M_n(\mathbb{C})} - \|\pi_m(a)\|_{A_m} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \rho(g_{i_0}, g_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist Eigenschaft (i) nachgewiesen.

Um Eigenschaft (ii) aus Satz 3.10 zu zeigen, betrachten wir auf $M_n(\mathbb{C})$ neben der Operatornorm $\|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})}$ die Norm $\|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})}^\infty$ der größten Zeilenbetragssumme und die Norm $\|\cdot\|_{|\cdot|}$ des betragsmäßig größten Eintrags einer Matrix. Dann gelten die Abschätzungen $\|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})}^\infty \leq \sqrt{n}\|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})} \leq n\|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})}$ und $\|\cdot\|_{|\cdot|} \leq \|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})}^\infty \leq n\|\cdot\|_{|\cdot|}$, also auch $\|\cdot\|_{|\cdot|} \leq \sqrt{n}\|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})} \leq n^2\|\cdot\|_{|\cdot|}$. Sei nun $(a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{A}_m^1$. Wir betrachten die Folge $(\alpha_{g_1 g_j^{-1}}(a_j))_{1 \leq j \leq m}$ und fassen jedes Folgenglied darin als (lipschitzstetige) Funktion auf den m Punkten g_1, \dots, g_m des metrischen Raumes $X \subset G$ mit Metrik $\rho|_{\{g_1, \dots, g_m\}}$ mit n^2 Koordinaten und Werten in \mathbb{C} auf. Indem wir $k = 1$ in (18) setzen, erhalten wir

$$\sup_{\substack{1 \leq i, j \leq m \\ i \neq j}} \frac{\|\alpha_{g_1 g_i^{-1}}(a_i) - \alpha_{g_1 g_j^{-1}}(a_j)\|_{|\cdot|}}{\rho(g_i, g_j)} \leq \sqrt{n} \sup_{\substack{1 \leq i, j \leq m \\ i \neq j}} \frac{\|\alpha_{g_1 g_i^{-1}}(a_i) - \alpha_{g_1 g_j^{-1}}(a_j)\|_{M_n(\mathbb{C})}}{\rho(g_i, g_j)} \leq \sqrt{n}.$$

Nun existiert zu jeder Koordinatenfunktion eine Fortsetzung auf ganz G mit einer Lipschitz-Halbnorm von höchstens $\sqrt{2}\sqrt{n}$, vergleiche [40] (Lemma 5.6) beziehungsweise Bemerkung 1.4. Einschränken dieser Fortsetzung auf X liefert eine Funktion, für welche wegen (18)

$$\sup_{\substack{i, j \in \mathbb{N} \\ i \neq j}} \frac{\|a_i - \alpha_{g_i g_j^{-1}}(a_j)\|_{M_n(\mathbb{C})}}{\rho(g_i, g_j)} \leq n^{\frac{3}{2}} \sup_{\substack{i, j \in \mathbb{N} \\ i \neq j}} \frac{\|\alpha_{g_1 g_i^{-1}}(a_i) - \alpha_{g_1 g_j^{-1}}(a_j)\|_{|\cdot|}}{\rho(g_i, g_j)} \leq n^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}\sqrt{n}$$

gilt. Dann definiert $C := \sqrt{2}n^2$ eine universelle Konstante im Sinne von Bedingung (ii) aus Satz 3.10. Damit haben wir gezeigt, dass $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ ein kompakter quantenmetrischer Raum ist.

Wir wollen am Ende dieses Beispiels noch erläutern, dass der kompakte quantenmetrische Raum, den wir konstruiert haben, mit dem kompakten quantenmetrischen Raum $(C(G, M_n(\mathbb{C})), Lip(G, M_n(\mathbb{C})), Lip(\cdot))$ übereinstimmt, wobei wir

$$Lip(f) := \sup_{\substack{g, h \in G \\ g \neq h}} \frac{\|f(g) - f(h)\|_{M_n(\mathbb{C})}}{\rho(g, h)} + \|f(\mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})})\|_H$$

für $f \in C(G, M_n(\mathbb{C}))$ und $Lip(G, M_n(\mathbb{C})) := \{f \in C(G, M_n(\mathbb{C})) \mid Lip(f) < \infty\}$ definieren; hierbei beachten wir, dass wir $g_1 = \mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})}$ gesetzt hatten. Wir statuen also die lipschitzstetigen Funktionen auf G mit Werten in $M_n(\mathbb{C})$ nicht mit der herkömmlichen (auf matrixwertige Funktionen verallgemeinerten) Lipschitz-Halbnorm aus, sondern mit der Summe dieser Halbnorm und der Halbnorm $\|f(\mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})})\|_H$, analog zur Festlegung in (19). Die Menge $Lip(G, M_n(\mathbb{C}))$ stimmt

dennoch mit der Menge der lipschitzstetigen Funktionen auf G bezüglich der verallgemeinerten Lipschitz-Halbnorm für matrixwertige Funktionen überein, weil $\|f(\mathbf{1}_{M_n(\mathbb{C})})\|_H$ für alle $f \in C(G, M_n(\mathbb{C}))$ endlich ist.

Zwischen

$$C^\alpha(X, M_n(\mathbb{C})) := \left\{ (a_m)_m \mid (a_m)_m \in \prod_{m \in \mathbb{N}} M_n(\mathbb{C}), \lim_{g_k \rightarrow g_i} \|a_i - \alpha_{g_i g_k^{-1}}(a_k)\|_{M_n(\mathbb{C})} = 0 \right\},$$

ausgestattet mit der Einschränkung der Norm in $\prod_{m \in \mathbb{N}} M_n(\mathbb{C})$, und $C(X, M_n(\mathbb{C}))$ existiert ein Isomorphismus, der gegeben ist durch

$$\Phi : C(X, M_n(\mathbb{C})) \rightarrow C^\alpha(X, M_n(\mathbb{C})), \quad f \mapsto (\alpha_{g_m}(f(g_m)))_{m \in \mathbb{N}},$$

$$\Phi^{-1} : C^\alpha(X, M_n(\mathbb{C})) \rightarrow C(X, M_n(\mathbb{C})), \quad (a_m)_{m \in \mathbb{N}} \mapsto f \text{ mit } f(g_m) := \alpha_{g_m^{-1}}(a_m).$$

Dies ist möglich, da die Metrik ρ so definiert ist, dass die Abbildungen $(G, \rho) \rightarrow (M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})})$, $g \mapsto \alpha_g(a)$ für alle $a \in M_n(\mathbb{C})$ stetig sind. Wir fassen also $a \in C^\alpha(X, M_n(\mathbb{C}))$ wie oben bereits als stetige Funktion auf dem kompakten metrischen Raum (X, ρ) auf, und die m -te Komponente von a liefert den Funktionswert auf $g_m \in X$. Natürlich ist mit f auch h , gegeben durch die Abbildungsvorschrift $h(g_m) := \pi_m(\Phi(f))$, ein Element in $C(X, M_n(\mathbb{C}))$. Genauer beschreibt diese Abbildungsvorschrift $f \mapsto h$ einen $*$ -Automorphismus auf $C(X, M_n(\mathbb{C}))$, bei dem nur der Funktionswert von f auf g_m entsprechend α „verdreh“ wird, was aber an der Norm dieses Funktionswertes nichts ändert: $\|f(g_m)\|_{M_n(\mathbb{C})} = \|\alpha_{g_m}(f(g_m))\|_{M_n(\mathbb{C})}$. Von daher wäre es (im Moment noch) nicht nötig, bei der Definition von Φ den Automorphismus α zu berücksichtigen. Es wird aber nötig, damit Φ isometrisch von $(Lip(X, M_n(\mathbb{C})), Lip(\cdot))$ auf $(Lip^\alpha(X, M_n(\mathbb{C})), \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ mit

$$Lip^\alpha(X, M_n(\mathbb{C})) := \left\{ a = (a_m)_m \mid a \in C^\alpha(X, M_n(\mathbb{C})), \sup_{\substack{i, j \in \mathbb{N} \\ i \neq j}} \frac{\|\alpha_{g_i^{-1}}(a_i) - \alpha_{g_j^{-1}}(a_j)\|_{M_n(\mathbb{C})}}{\rho(g_i, g_j)} + \|a_1\|_H = \|a\|_{\mathcal{A}} < \infty \right\}$$

wird. Offensichtlich gilt aber $(Lip^\alpha(X, M_n(\mathbb{C})), \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = (\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$. Weil aber jede lipschitzstetige Funktion gleichmäßig stetig ist und jede gleichmäßig stetige Funktion aus $C(X, M_n(\mathbb{C}))$ eine eindeutig bestimmte Fortsetzung auf den Abschluss $\overline{X}^\rho = G$ besitzt, folgen

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) &\cong (Lip^\alpha(X, M_n(\mathbb{C})), \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) \stackrel{(a)}{\cong} (Lip(X, M_n(\mathbb{C})), Lip(\cdot)) \\ &\stackrel{(b)}{\cong} (Lip(G, M_n(\mathbb{C})), Lip(\cdot)) \end{aligned}$$

und

$$A = \overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}} \cong \overline{Lip(G, M_n(\mathbb{C}))}^{\|\cdot\|_{C(X, M_n(\mathbb{C}))}} \stackrel{(c)}{=} C(G, M_n(\mathbb{C})) \cong C(G) \otimes M_n(\mathbb{C}).$$

Genauer wird (a) via Φ vermittelt. Um (die nichttriviale Richtung bei) (b) zu sehen, können notfalls $Lip(X, M_n(\mathbb{C}))$ als Teilmenge von $M_n(C(X))$ aufgefasst und jede der n^2 Koordinatenfunktionen lipschitzstetig auf ganz G fortgesetzt werden. Weil X dicht in G liegt, bleibt die Halbnorm bei diesem Vorgang erhalten. Schließlich erhalten wir (c) wieder durch eine koordinatenweise Überlegung und wegen

der Dichtheit von $Lip(G)$ in $C(G)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Es sei noch bemerkt, dass bei den eben genannten Übergängen zu den einzelnen Koordinatenfunktionen wieder die Normabschätzung $\|\cdot\|_{|\cdot|} \leq \sqrt{n} \|\cdot\|_{M_n(\mathbb{C})} \leq n^2 \|\cdot\|_{|\cdot|}$ verwendet werden muss.

Wir können wir uns die Frage stellen, welche Struktur Lipschitz-Algebren besitzen, die als inverser Limes endlichdimensionaler Lipschitz-Algebren dargestellt werden können. Ein notwendiges Kriterium, wann dies der Fall sein kann, ergibt sich unmittelbar aus Satz 3.4: Ist $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ inverser Limes der Folge $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})_m$, so ist A nach Bedingung (iii) in Satz 3.3 eine $*$ -Unteralgebra von $\lim_{\leftarrow} A_m$, und aus Satz 3.4 geht hervor, dass im Falle endlichdimensionaler C^* -Algebren A_m deren inverser Limes eine Darstellung als direktes Produkt von Matrix-Algebren hat, und somit auch A selbst. Die folgende Definition stellt eine Verbindung zur in der Strukturtheorie der C^* -Algebren üblichen Sprachregelung dar.

3.13. DEFINITION. *Eine C^* -Algebra A heißt **residual endlichdimensional** (engl. „residual finite dimensional“) oder kurz **RFD-Algebra**, wenn es einen injektiven $*$ -Homomorphismus von A in eine C^* -Algebra B gibt, welche ihrerseits isomorph zum direkten Produkt endlichdimensionaler C^* -Algebren ist.*

Dies ist laut [7] genau denn der Fall, wenn die endlichdimensionalen (irreduziblen) Darstellungen von A Punkte trennen. Damit können höchstens Lipschitz-Algebren $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ inverser Limes endlichdimensionaler Lipschitz-Algebren sein, wenn A residual endlichdimensional ist. Somit ergibt sich aber ein wesentlicher Unterschied zum Kommutativen: Satz 3.1 besagt, dass jeder kompakte metrische Raum als direkter Limes von endlichen kompakten metrischen Räumen darstellbar ist; beim nicht-kommutativen Analogon gilt dies nicht mehr, denn es gibt nicht-residual endlichdimensionale C^* -Algebren.

Als natürliche Fragen ergeben sich aus dieser Diskussion, unter welchen Bedingungen die unital C^* -Algebra A einer Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ residual endlichdimensional ist und ob in diesem Falle eine Darstellung als inverser Limes endlichdimensionaler Lipschitz-Algebren existiert. Die beiden folgenden Theoreme 3.16 und 3.18 geben eine Antwort für kompakte quantenmetrische Räume, was für uns lediglich eine Einschränkung darstellt, die wir gerne in Kauf nehmen, weil in vielen wichtigen Beispielen von Lipschitz-Algebren die Halbnormen die entsprechenden Zusatzeigenschaften erfüllen. Wir werden sehen, dass bei endlichem zweiten multiplikativen Entropie-Index für einen kompakten quantenmetrischen Raum eine Rekonstruktion mit endlichdimensionalen kompakten quantenmetrischen Räumen möglich, bei endlichem ersten multiplikativen Entropie-Index aber nur unter einer Zusatzbedingung, welche wir im Anschluss an Theorem 3.16 diskutieren wollen. Um diese Zusatzbedingung adäquat formulieren zu können, benötigen wir die folgende Definition und Satz 3.15.

3.14. DEFINITION. *Sei $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ eine Lipschitz-Algebra. Für $b \in A$ bezeichnen wir mit $\sigma(b)$ das Spektrum von b .*

*Wir sagen, auf \mathcal{A} existiert ein **C^1 -Funktionalkalkül**, wenn für jedes selbstadjungierte Element $b \in \mathcal{A}$ und alle auf $\sigma(b)$ stetig differenzierbaren Funktionen $f \in C^1(\sigma(b))$ schon $f(b) \in \mathcal{A}$ gilt.*

3.15. SATZ. Sei $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A)$ eine Lipschitz-Algebra. Existiert auf \mathcal{A} ein C^1 -Funktionalkalkül, so besitzt jedes nichttriviale abgeschlossene Ideal $I \subset A$ einen nichttrivialen Schnitt mit \mathcal{A} .

BEWEIS. Es existiere ein C^1 -Funktionalkalkül für \mathcal{A} . Sei I ein nichttriviales abgeschlossenes Ideal in A . Seien weiter $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{5}$ und $\mathbf{0}_A \neq a \in I$ positiv mit $\|a\|_A = 1$. Weil \mathcal{A} normdicht in A liegt, existiert ein $b \in \mathcal{A}$ mit $\|a - b\|_A < \varepsilon$. Wir können b als selbstadjungiert annehmen, denn sonst betrachten wir statt b das selbstadjungierte Element $\frac{b+b^*}{2}$, für das

$$\begin{aligned} \left\| a - \frac{b+b^*}{2} \right\|_A &= \left\| \frac{a-b}{2} + \frac{a-b^*}{2} \right\|_A \leq \left\| \frac{a-b}{2} \right\|_A + \left\| \frac{a^*-b^*}{2} \right\|_A < \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \left(\frac{a-b}{2} \right)^* \right\|_A \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \frac{a-b}{2} \right\|_A < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

gilt. Wir definieren $f \in C^1(\mathbb{R})$ derart, dass $f(x) = 0$ für $x \leq 2\varepsilon$ und $f(x) = 1$ für $x \geq 1 - 2\varepsilon$ gilt, etwa

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in]-\infty, 2\varepsilon[\\ \frac{1}{4} \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{2\varepsilon-\frac{1}{2}} \right)^3 - \frac{3}{4} \cdot \frac{x-\frac{1}{2}}{2\varepsilon-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} & \text{für } x \in]2\varepsilon, 1-2\varepsilon[\\ 1 & \text{für } x \in [1-2\varepsilon, \infty[\end{cases}$$

Es gilt $f(b) \in \mathcal{A}$ wegen der Existenz eines C^1 -Funktionalkalküls auf $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A)$. Fassen wir die C^* -Algebra A als in ihr Bidual A^{**} eingebettet auf, dann existiert zum Ideal I eine eindeutig bestimmte zentrale Projektion $p \in A^{**}$ mit $I = \{a \in A \mid pa = ap = a\} = A \cap A^{**}p$, vergleiche [1] (2.6) beziehungsweise [49] (3.10.7, 3.11.9 und 3.11.10). [Ist $\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ eine approximative Eins für I , so konvergiert diese bezüglich der Schwach*-Topologie gegen p mit dieser Eigenschaft.]

Ist B die von b, p und $\mathbf{1} - p$ erzeugte unitale kommutative C^* -Algebra, dann ist $B \cong C(X)$ für einen kompakten T_2 -Raum nach dem Satz von Gelfand-Naimark. Bezeichnen wir das b entsprechende Element in $C(X)$ ebenfalls mit b , so können wir $f(b)$ als die Hintereinanderausführung $f \circ b$ von (reellwertigen stetigen) Funktionen auffassen. Weil p und $\mathbf{1} - p$ orthogonale Projektionen sind, gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon > \|a - b\|_A &= \|(a - b)(p + (\mathbf{1} - p))\|_A = \|ap + \underbrace{a(\mathbf{1} - p)}_{=0 \text{ da } a \in I} - bp - b(\mathbf{1} - p)\|_A \\ &= \|(a - b)p - b(\mathbf{1} - p)\|_A = \max\{\|(a - b)p\|_A, \|b(\mathbf{1} - p)\|_A\}. \end{aligned}$$

Es folgt $\|b(\mathbf{1} - p)\|_A < \varepsilon$, also $\sigma(b(\mathbf{1} - p)) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, und nach Konstruktion von f gilt $f(b)(\mathbf{1} - p) = \mathbf{0}$ wegen $f([-\varepsilon, \varepsilon]) = \{0\}$. Damit gilt $f(b) = f(b)p$, was $f(b) \in I$ bedeutet. Für den Spektralradius von b gilt $|\|a\|_A - r(b)| = |\|a\|_A - \|b\|_A| \leq \|a - b\|_A < \varepsilon$, und die Selbstadjungiertheit von $f(b)$ liefert $\|f(b)\|_A = r(f(b)) = f(r(b)) \geq f(1 - \varepsilon) = 1$. Das bedeutet $I \cap \mathcal{A} \neq \{\mathbf{0}\}$. \square

3.16. THEOREM. Ist der erste multiplikative Entropie-Index einer Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A)$ endlich und besitzt jedes nichttriviale abgeschlossene Ideal $I \subset A$ einen nichttrivialen Schnitt mit \mathcal{A} , so ist A residual endlichdimensional.

Ist der zweite multiplikative Entropie-Index einer Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A)$ endlich, so ist A residual endlichdimensional.

BEWEIS. Für einen $*$ -Homomorphismus $\pi : A \rightarrow F$ in eine C^* -Algebra F hatten wir in Definition 2.12 die Größen

$$\varepsilon_\pi^1 := \sup_{\substack{a \in \mathcal{A}^1 \\ \pi(a) = \mathbf{0}}} \inf_{c \in \text{Ker}(\|\cdot\|_{\mathcal{A}})} \|a - c\|_{\mathcal{A}},$$

$$M_\varepsilon^1(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) := \inf \{ \text{kdim}(F) \mid \exists * \text{-Homomorphismus } \pi : A \rightarrow F, \varepsilon_\pi^1 \leq \varepsilon \}$$

definiert. Für den ersten multiplikativen Entropie-Index $\text{mei}^1 = \text{mei}^1(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ gelte nun $\text{mei}^1 = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_\varepsilon^1(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} < \infty$, und jedes nichttriviale abgeschlossene Ideal $I \subset A$ besitze mit \mathcal{A} nichtleeren Schnitt. Aufgrund der ersten Bedingung gibt es zu jedem $\delta > 0$ und für $0 < \varepsilon_0 < 1$ ein $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ mit $\text{mei}^1 - \delta < \frac{\ln M_\varepsilon^1(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} < \text{mei}^1 + \delta$.

Formen wir diese Ungleichung um und setzen wir die Definition für $M_\varepsilon^1(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ ein, so erhalten wir zu jedem $\delta > 0$ und jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $\varepsilon_m \in]0, \frac{1}{m}[$ und einen unitalen $*$ -Homomorphismus $\pi_m : A \rightarrow F_m$ für eine endlichdimensionale C^* -Algebra F_m mit $\varepsilon_{\pi_m}^1 \leq \varepsilon_m < \frac{1}{m}$ und $\left(\frac{1}{\varepsilon_m}\right)^{\text{mei}^1 - \delta} < \text{kdim}(F_m) < \left(\frac{1}{\varepsilon_m}\right)^{\text{mei}^1 + \delta}$.

Wir wählen zu $\delta > 0$ eine derartige Folge von $*$ -Homomorphismen $\pi_m : A \rightarrow F_m$ mit $\varepsilon_{\pi_m}^1 < \frac{1}{m}$ und definieren das direkte Produkt $F := \prod_{m \in \mathbb{N}} F_m$ im Sinne von C^* -Algebren und den $*$ -Homomorphismus

$$\pi : A \rightarrow F, a \mapsto (\pi_m(a))_{m \in \mathbb{N}}.$$

Wir zeigen als Nächstes die Injektivität von $\pi|_{\mathcal{A}}$. Dazu wählen wir $a \in \mathcal{A}$ und nehmen $\pi(a) = \mathbf{0}$ an. Weiter gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\|a\|_{\mathcal{A}} \leq 1$. Aus der Definition von $\varepsilon_{\pi_m}^1$ folgt $\inf_{\substack{c \in \mathcal{A} \\ \|c\|_{\mathcal{A}} = 0}} \|a - c\|_{\mathcal{A}} < \frac{1}{m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also $\inf_{z \in \mathbb{C}} \|a - z \cdot \mathbf{1}_A\|_{\mathcal{A}} = 0$. Es folgt $a = c \cdot \mathbf{1}_A$ für ein $c \in \mathbb{C}$, aber es gilt $\mathbf{0} = \pi(a) = \pi(c \cdot \mathbf{1}_A) = c \cdot \pi(\mathbf{1}_A) = c \cdot \mathbf{1}_F$ aufgrund der Unitalität von π , und somit $c = 0$ beziehungsweise $a = \mathbf{0}_A$, das heißt, $\pi|_{\mathcal{A}}$ ist injektiv.

Da $I \cap \mathcal{A} \neq \{\mathbf{0}\}$ für jedes nichttriviale abgeschlossene Ideal I in A gilt, aber $\text{Ker}(\pi) \cap \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$ ist, folgt $\text{Ker}(\pi) = \{\mathbf{0}\}$, und π ist injektiv.

Sei nun der zweite multiplikative Entropie-Index endlich. Wie oben existieren $*$ -Homomorphismen $\pi_m : A \rightarrow F_m$ mit $\varepsilon_{\pi_m}^2 < \frac{1}{m}$. Die Injektivität von $\pi = \prod_{m \in \mathbb{N}} \pi_m : A \rightarrow \prod_{m \in \mathbb{N}} F_m$ ist zu zeigen.

Seien $a \in \text{Ker}(\pi) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker}(\pi_m)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a - b_n\|_{\mathcal{A}} = 0$, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\pi_m(b_n)\|_{F_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\pi_m(a) - \pi_m(b_n)\|_{F_m} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|a - b_n\|_{\mathcal{A}} = 0.$$

Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|a - b_{n_0}\|_{\mathcal{A}} \leq \frac{\varepsilon}{5}$ gilt, und setzen außerdem $b := b_{n_0}$. Dann ist $\|\pi_m(b)\|_{F_m} \leq \frac{\varepsilon}{5}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nun können wir $m \in \mathbb{N}$ derart wählen, dass

$$\varepsilon_{\pi_m}^2 \leq \begin{cases} \frac{\varepsilon}{5\|b\|_{\mathcal{A}}} & \text{falls } \|b\|_{\mathcal{A}} \neq 0 \\ 1 & \text{falls } \|b\|_{\mathcal{A}} = 0 \end{cases} \text{ gilt. Tun wir dies, so impliziert die im Beweis von Satz}$$

2.15 auf Seite 46 auftauchende Formel (13) Ungleichung (*) in der Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|a\|_A &\leq \|a - b\|_A + \|b\|_A \leq \frac{\varepsilon}{5} + \|b\|_A \stackrel{(2.14)}{\leq} \frac{\varepsilon}{5} + 2 \sup_{\varphi \in S^e(A)} |\varphi(b)| \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon}{5} + 2 \sup_{\varphi \in S^e(A)} \inf_{\psi_m \in S^e(F_m)} \rho_{\|\cdot\|_A}(\varphi, \psi_m \circ \pi_m) \cdot \|b\|_A + 2 \sup_{\tilde{\psi}_m \in S^e(F_m)} |\tilde{\psi}_m \circ \pi_m(b)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{5} + 2 \cdot \varepsilon_{\pi_m}^2 \cdot \|b\|_A + 2 \|\pi_m(b)\|_{F_m} \leq \frac{\varepsilon}{5} + \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{2\varepsilon}{5} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt $\|a\|_A = 0$, und damit ist π auch in diesem Falle injektiv. \square

Es sei explizit erwähnt, dass wir die Eigenschaften einer Lip-Halbnorm im Beweis nirgends benötigt haben.

3.17. BEMERKUNG. Die Zusatzbedingung, welche beim ersten multiplikativen Entropie-Index von Nöten ist, um die Injektivität von π und damit die residuale Endlichdimensionalität von A sicherzustellen, ist eine recht natürliche Forderung, genauso die Existenz eines C^1 -Funktionalkalküls, welche die Zusatzbedingung gemäß Satz 3.15 impliziert. Beides ist im Kommutativen automatisch erfüllt: Für $(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ existiert nicht nur ein C^1 -Funktionalkalkül, sondern sogar ein Lipschitz-Funktionalkalkül. Die Idee, an dieser Stelle die Existenz eines solchen Funktionalkalküls zu fordern, geht auf Jürgen Schweizer zurück.

Die Bedingung, dass der Schnitt jedes nichttrivialen abgeschlossenen Ideals in $C(K)$ mit $Lip(K)$ nichttrivialen Schnitt hat, ist äquivalent dazu, dass zu jeder echten abgeschlossenen Teilmenge U von K eine lipschitzstetige Funktion $f \neq \mathbf{0}$ mit $f|_U = \mathbf{0}$ existiert, was, wie bereits mehrfach erwähnt, mit Hilfe eines Fortsetzungssatzes in [43] (Theorem 1) möglich ist, vergleiche Bemerkung 1.4.

Umgekehrt bedeutete die Unmöglichkeit eines solchen lipschitzstetigen Fortsetzens die Existenz echter offener beschränkter Teilmengen V von K , für die keine nichttriviale, auf V lebende und im Unendlichen verschwindende lipschitzstetige Funktion existiert. Insofern besäße K in gewissem Sinne Löcher, und entsprechend $C(K)$. Wir vermuten, dass dies für allgemeine Lipschitz-Algebren nicht zutrifft, und dass es daher keine Schwäche der Rieffelschen Theorie darstellt, dass wir Theorem 3.16 nicht ohne Zusatzanforderung an den ersten multiplikativen Entropie-Index zeigen können, sondern dass die Theorie einfach noch nicht genügend ausgebaut ist.

3.18. THEOREM. *Sei $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A)$ ein kompakter quantenmetrischer Raum, für den $\text{mei}^1(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A) < \infty$ oder $\text{mei}^2(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A) < \infty$ gilt und im erstgenannten Falle jedes nichttriviale abgeschlossene Ideal $I \subset A$ einen nichttrivialen Schnitt mit \mathcal{A} besitzt, vergleiche Theorem 3.16. Dann existiert eine inverse Folge $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{A_m})_{m \in \mathbb{N}}$ von endlichdimensionalen kompakten quantenmetrischen Räumen, deren inverser Limes isomorph zu $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A)$ ist.*

BEWEIS. Wir konstruieren zunächst eine inverse Folge kompakter quantenmetrischer Räume endlicher Dimension und weisen dann die Bedingungen aus Satz 3.3 nach.

Nach Voraussetzung über den Entropie-Index existieren eine Folge von $*$ -Homomorphismen $\tau_m : A \rightarrow F_m$ in eine endlichdimensionale C^* -Algebra F_m , welche wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit als surjektiv annehmen dürfen, mit $\varepsilon_{\tau_m} < \frac{1}{m}$ und ein

injektiver $*$ -Homomorphismus $\tau : A \rightarrow F := \prod_{m \in \mathbb{N}} F_m$, $a \mapsto (\tau_m(a))_{m \in \mathbb{N}}$ in das direkte Produkt der C^* -Algebren F_m , vergleiche Theorem 3.16. Wir definieren

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\tau_1(a) \mid a \in A\} \cong F_1, \\ A_2 &:= \{(\tau_1(a), \tau_2(a)) \mid a \in A\}, \\ A_m &:= \{(\tau_j(a))_{1 \leq j \leq m} \mid a \in A\} \subset \prod_{j=1}^m F_j \quad \text{für } m \geq 3, \\ A_\infty &:= \{(\tau_j(a))_{j \in \mathbb{N}} \mid a \in A\} \subset \prod_{j \in \mathbb{N}} F_j, \\ \sigma_m &: F \rightarrow \prod_{j=1}^m F_j, (b_j)_{j \in \mathbb{N}} \mapsto (b_j)_{1 \leq j \leq m}. \end{aligned}$$

Aus der Folge endlichdimensionaler C^* -Algebren $(F_m)_{m \in \mathbb{N}}$ haben wir also eine aufsteigende Folge endlichdimensionaler C^* -Algebren $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ gewonnen. Dann ist τ eine Einbettung von A in F mit Bild $\tau(A) = A_\infty$, denn τ ist injektiv nach Voraussetzung. Die Abbildungen τ und σ_m sowie weitere im Beweis verwandte werden im Diagramm in Abbildung 15 dargestellt.

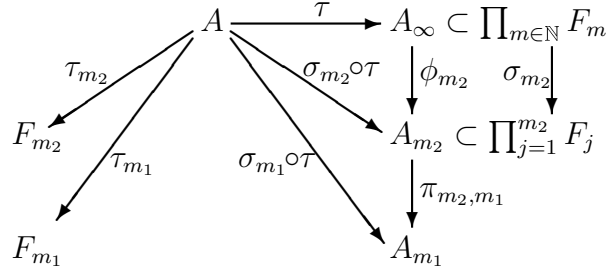


ABBILDUNG 15. Übersicht über die verwendeten Abbildungen.

Nun ist $(A_m, \|\cdot\|_{A_m}, \pi)_m$ für die verbindenden $*$ -Homomorphismen

$$\pi_{m_2, m_1} : A_{m_2} \rightarrow A_{m_1} \quad (\tau_j(a))_{1 \leq j \leq m_2} \mapsto (\tau_j(a))_{1 \leq j \leq m_1}$$

eine inverse Folge von endlichdimensionalen C^* -Algebren, denn A_m ist eine C^* -Algebra als Bild der C^* -Algebra A unter dem $*$ -Homomorphismus $\sigma_m \circ \tau$, und offenbar sind $\pi_{m_2, m_1} \circ \pi_{m_3, m_2} = \pi_{m_3, m_1}$ und

$$\|(\tau_j(a))_{1 \leq j \leq m}\|_{A_m} = \|(\tau_j(a))_{1 \leq j \leq m}\|_{\prod_{j=1}^m F_j} |_{A_m} = \sup_{1 \leq j \leq m} \|\tau_j(a)\|_{F_j}$$

erfüllt.

Die Abbildungen $\phi_m : A_\infty \rightarrow A_m$, $(\tau_j(a))_{j \in \mathbb{N}} \mapsto (\tau_j(a))_{1 \leq j \leq m}$ erfüllen offenbar $\phi_{m_1} = \pi_{m_2, m_1} \circ \phi_{m_2}$, und für die kanonischen Projektionen

$$\pi_m : \varprojlim A_k \rightarrow A_m, ((\tau_1(a), \dots, \tau_j(a))_{1 \leq j \leq k})_{k \in \mathbb{N}} \mapsto (\tau_j(a))_{1 \leq j \leq m},$$

was genau der Projektion auf die m -te Komponente entspricht, gilt wegen obiger Rechnung

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \|\pi_m((\tau_1(a), \dots, \tau_j(a))_{1 \leq j \leq k})_{k \in \mathbb{N}}\|_{A_m} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|(\tau_j(a))_{1 \leq j \leq m}\|_{A_m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq j \leq m} \|\tau_j(a)\|_{F_j} = \|\tau(a)\|_F. \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$\phi : A_\infty \rightarrow \lim_{\leftarrow} A_m, (\tau_j(a))_{j \in \mathbb{N}} \mapsto ((\tau_1(a), \dots, \tau_j(a))_{1 \leq j \leq k})_{k \in \mathbb{N}}$$

ist offensichtlich injektiv. Wir können daher A und A_∞ mit einer C^* -Unteralgebra von $\lim_{\leftarrow} A_m$ (via $\pi := \phi \circ \tau$ beziehungsweise ϕ) identifizieren. Es gilt also $\tau(A) = A_\infty \subset \lim_{\leftarrow} A_m \subset F$. Die Einschränkung der kanonischen Projektionen von $\lim_{\leftarrow} A$ in A_m auf A , welche $\sigma_m \circ \tau$ ersetzen, bezeichnen wir im Folgenden mit π_m . Wir definieren weiter $\mathcal{A}_m := \pi_m(\mathcal{A}) \subset A_m$, und $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$ als Quotientenhalbnorm, das heißt $\|\pi_m(a)\|_{\mathcal{A}_m} := \inf_{j \in \text{Ker}(\pi_m) \cap \mathcal{A}} \|a - j\|_{\mathcal{A}}$. Dass $\mathcal{A} = \lim_{\leftarrow} \mathcal{A}_m$ im Sinne von Satz 3.3 (ii) gilt, folgt ganz einfach mit Hilfe von Satz A.11, wenn wir $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\pi_m(a)\|_{\mathcal{A}_m} = \|a\|_{\mathcal{A}}$ für alle $a \in \mathcal{A}$ gezeigt haben, was wir nun tun.

Aus der Injektivität von π folgt $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker}(\pi_m) = \{\mathbf{0}\}$. $\text{Ker}(\pi_m)$ selbst ist ein abgeschlossenes Ideal in A , und laut [4] (Korollar 3.63) gibt es eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen den abgeschlossenen Idealen in einer C^* -Algebra A und den schwach*-abgeschlossenen aufspaltenden Seiten (engl. „split faces“) des Zustandsraumes $S(A)$. Dabei heißt eine konvexe Teilmenge V einer konvexen Menge M **Seite**, wenn für jedes $x \in V$, das eine Darstellung $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ mit $\lambda \in]0, 1[$ und $y, z \in M$ besitzt, schon $y, z \in V$ gilt. Weiter heißt eine solche Seite V in M **aufspaltend**, wenn es eine weitere Seite W in M gibt, so dass die konvexe Hülle $\text{co}(V \cup W) = M$ ist und jeder Punkt x aus M eindeutig als Konvexkombination $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ für $\lambda \in]0, 1[$, $y \in V$ und $z \in W$ geschrieben werden kann. Dabei ist die **konvexe Hülle** $\text{co}(V)$ einer Menge $V \subset S(A)$ die Menge aller endlichen Konvex-Kombinationen aus V . Die zuletzt genannte Korrespondenz geschieht über die Zuordnung $I \mapsto I^\circ := \{\varphi \in S(A) \mid \varphi(a) = \mathbf{0} \forall a \in I\}$ für ein abgeschlossenes Ideal I in A beziehungsweise umgekehrt $V \mapsto V^\circ := \{a \in A \mid \varphi(a) = \mathbf{0} \forall \varphi \in V\}$ für eine schwach*-abgeschlossene aufspaltende Seite V in $S(A)$. Man beachte die Verwandtschaft zum Bipolarenatz, vergleiche etwa [68] (VIII.3.9). Wir definieren $V_m := \text{Ker}(\pi_m)^\circ$. Nach obiger Konstruktion der A_m gilt $\text{Ker}(\pi_{m_1}) \supseteq \text{Ker}(\pi_{m_2})$ für $m_1 \leq m_2$ und folglich $V_{m_1} \subseteq V_{m_2}$. Deswegen ist die Vereinigung V der Seiten V_m wieder eine Seite. Außerdem ist der Abschluss \overline{V}^{w^*} von V bezüglich der Schwach*-Topologie in $S(A)$ eine schwach*-abgeschlossene aufspaltende Seite in $S(A)$ laut [4] (Proposition 3.77). Die oben erwähnte Korrespondenz ordnet nun umgekehrt dieser Seite ein abgeschlossenes Ideal $I_0 := \overline{V}^{w^* \circ}$ zu, für das

$$\begin{aligned} I_0 &= \left\{ a \in A \mid \varphi(a) = 0 \forall \varphi \in \overline{V}^{w^*} \right\} \subseteq \left\{ a \in A \mid \varphi(a) = 0 \forall \varphi \in V \right\} \\ &= \left\{ a \in A \mid \varphi(a) = 0 \forall \varphi \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m \right\} \subseteq \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker}(\pi_m) = \{\mathbf{0}\} \end{aligned}$$

gilt. Mit anderen Worten: Die Menge $V = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{\varphi \in S(A) \mid \varphi|_{\text{Ker}(\pi_m)} = \mathbf{0}\} \stackrel{(*)}{=} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{\varphi_m \circ \pi_m \mid \varphi_m \in S(A_m)\}$ liegt schwach*-dicht in $S(A)$, beziehungsweise $S(A) = \overline{V}^{w^*}$, weil $S(A)$ konvex und schwach*-abgeschlossen ist; Gleichung (*) wurde bereits in Lemma 2.23 gezeigt.

Wie wir in den Bemerkungen vor Satz 1.3 beschrieben haben, können wir mittels der Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ auf dem Zustandsraum $S(A)$ die Monge-Kantorovič-Metrik $\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}$ (Formel (1) auf Seite 5) definieren, die wegen der totalen Beschränktheitseigenschaft für $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ die Schwach*-Topologie induziert, also insbesondere $S(A)$ endlichen

Durchmesser gibt. Aus dieser Metrik gewinnt man eine Halbnorm $L_{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}}$ auf \mathcal{A} (Formel (2) auf Seite 5), die aufgrund der Unterhalbstetigkeit der Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ mit dieser übereinstimmt.

Sind nun $a \in \mathcal{A}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, dann existieren $\mu_0, \nu_0 \in S(A)$ mit $\mu_0 \neq \nu_0$ und $\|a\|_{\mathcal{A}} - \frac{\varepsilon}{5} < \frac{|\mu_0(a) - \nu_0(a)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0)} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$. Für $\|a\|_{\mathcal{A}} = 0$ gilt ohnehin schon $\|a\|_{\mathcal{A}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\pi_m(a)\|_{\mathcal{A}_m}$ wegen $\|\pi_m(a)\|_{\mathcal{A}_m} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$. Sei also $\|a\|_{\mathcal{A}} \neq 0$. Wir wählen m so groß, dass in $S(A_m)$ zwei Zustände φ_μ, φ_ν existieren, welche die Ungleichungen $\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \varphi_\mu \circ \pi_m) < \frac{\varepsilon \cdot \rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0)}{5\|a\|_{\mathcal{A}}}$ und $\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\nu_0, \varphi_\nu \circ \pi_m) < \frac{\varepsilon \cdot \rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0)}{5\|a\|_{\mathcal{A}}}$ erfüllen, was wegen der Dichtheit von $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{\varphi \circ \pi_m \mid \varphi \in S(A_m)\}$ in $S(A)$ möglich ist. Setzen wir $\mu_1 := \varphi_\mu \circ \pi_m$ und $\nu_1 := \varphi_\nu \circ \pi_m$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
(20) \quad & \|a\|_{\mathcal{A}} - \inf_{c \in \text{Ker}(\pi_m) \cap \mathcal{A}} \|a - c\|_{\mathcal{A}} \\
&= \|a\|_{\mathcal{A}} - \inf_{c \in \text{Ker}(\pi_m) \cap \mathcal{A}} \sup_{\substack{\mu, \nu \in S(A) \\ \mu \neq \nu}} \frac{|\mu(a - c) - \nu(a - c)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu, \nu)} \\
&\leq \|a\|_{\mathcal{A}} - \inf_{c \in \text{Ker}(\pi_m) \cap \mathcal{A}} \sup_{\substack{\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in S(A_m) \\ \tilde{\mu} \neq \tilde{\nu}}} \frac{|\tilde{\mu} \circ \pi_m(a - c) - \tilde{\nu} \circ \pi_m(a - c)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\tilde{\mu} \circ \pi_m, \tilde{\nu} \circ \pi_m)} \\
&\stackrel{(20.1)}{=} \|a\|_{\mathcal{A}} - \sup_{\substack{\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in S(A_m) \\ \tilde{\mu} \neq \tilde{\nu}}} \frac{|\tilde{\mu} \circ \pi_m(a) - \tilde{\nu} \circ \pi_m(a)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\tilde{\mu} \circ \pi_m, \tilde{\nu} \circ \pi_m)} \\
&\leq \|a\|_{\mathcal{A}} - \frac{|\mu_1(a) - \nu_1(a)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_1, \nu_1)} \\
&\leq \frac{|\mu_0(a) - \nu_0(a)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0)} + \frac{\varepsilon}{5} - \frac{|\mu_1(a) - \nu_1(a)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_1, \nu_1)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{5} + \left| \frac{\mu_0(a) - \nu_0(a)}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0)} - \frac{\mu_1(a) - \nu_1(a)}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_1, \nu_1)} \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{5} + \left| \frac{\mu_0(a) - \nu_0(a)}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0)} - \frac{\mu_1(a) - \nu_1(a)}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0)} \right| \\
&\quad + \left| \frac{\mu_1(a) - \nu_1(a)}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0)} - \frac{\mu_1(a) - \nu_1(a)}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_1, \nu_1)} \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{5} + \frac{|\mu_0(a) - \mu_1(a)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0)} + \frac{|\nu_0(a) - \nu_1(a)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0)} \\
&\quad + |\mu_1(a) - \nu_1(a)| \cdot \left| \frac{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0) - \rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_1, \nu_1)}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0) \cdot \rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_1, \nu_1)} \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{5} + L_{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}}(a) \cdot \frac{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \mu_1)}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0)} + L_{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}}(a) \cdot \frac{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\nu_0, \nu_1)}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0)} \\
&\quad + L_{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}}(a) \cdot \rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_1, \nu_1) \cdot \frac{|\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0) - \rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_1, \nu_1)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0) \cdot \rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_1, \nu_1)} \\
&< \frac{3\varepsilon}{5} + \|a\|_{\mathcal{A}} \cdot \frac{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \mu_1) + \rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\nu_1, \nu_0)}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\mu_0, \nu_0)} < \frac{3\varepsilon}{5} + \frac{2\varepsilon}{5} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt $\|a\|_{\mathcal{A}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\pi_m(a)\|_{\mathcal{A}_m}$.

Wir müssen nur noch für $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$ die Eigenschaften eines kompakten quantenmetrischen Raumes nachweisen, dann sind alle Bedingungen von Satz 3.3 gezeigt. Offensichtlich gilt $\text{Ker}(\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}) = \pi_m(\text{Ker}(\|\cdot\|_{\mathcal{A}})) = \pi_m(\mathbb{C}\mathbf{1}_A) = \mathbb{C}\mathbf{1}_{A_m}$. Die Leibniz-Regel vererbt sich unmittelbar von \mathcal{A} auf \mathcal{A}_m (beziehungsweise von A auf A_m , wenn wir unendliche Werte der Halbnorm zulassen), ebenso die $*$ -Treue der Halbnorm, und der Raum $(\mathcal{A}_m, \max(\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}))$ ist vollständig aufgrund seiner Endlichdimensionalität.

Wie üblich bezeichne $Q : A \rightarrow A/\mathbb{C}\mathbf{1}_A$ beziehungsweise $Q_m : A_m \rightarrow A_m/\mathbb{C}\mathbf{1}_{A_m}$ die jeweilige Quotientenabbildung.

Nun widmen wir uns der Eigenschaft der totalen Beschränktheit für $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$. Ist X ein für eine Norm (beziehungsweise allgemeiner eine Metrik) vollständiger Raum und $Y \subset X$, dann ist laut [21] (XIV.3.6) Y genau dann relativkompakt, wenn Y total beschränkt beziehungsweise präkompakt ist, also zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ endlich viele ε -Kugeln zur Überdeckung von Y genügen. Das Bild $Q_m(\mathcal{A}_m^1)$ von \mathcal{A}_m^1 in $Q_m(A_m)$ ist relativkompakt, was wir wie folgt einsehen: Es gilt $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m} = \|Q_m(\cdot)\|_{A_m/\mathbb{C}\mathbf{1}_{A_m}}$ auf \mathcal{A}_m , und $\|\cdot\|_{A_m/\mathbb{C}\mathbf{1}_{A_m}}$ ist eine Norm auf $Q_m(\mathcal{A}_m)$, ebenso wie die Quotientennorm $\|\cdot\|_{A_m/\mathbb{C}\mathbf{1}_{A_m}}$. Beide Normen auf diesem endlichdimensionalen Raum sind äquivalent, siehe etwa [33] (Satz 11.3). Der Abschluss bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{A_m/\mathbb{C}\mathbf{1}_{A_m}}$ der in der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$ durch die Zahl 1 beschränkten Menge $Q_m(\mathcal{A}_m^1)$ (welche also auch bezüglich der Quotientennorm $\|\cdot\|_{A_m/\mathbb{C}\mathbf{1}_{A_m}}$ beschränkt ist) ist eine abgeschlossene beschränkte Menge in einem endlichdimensionalen normierten Raum, also kompakt. Damit ist $Q_m(\mathcal{A}_m^1)$ relativkompakt, und nach obiger Äquivalenz total beschränkt.

Nach der eben erwähnten Äquivalenzaussage von Normen in endlichdimensionalen Räumen erhalten wir für $a \in \mathcal{A}$ die Abschätzung

$$(21) \quad c_1 \|Q_m(a)\|_{A_m/\mathbb{C}\mathbf{1}_{A_m}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}_m} = \|Q_m(a)\|_{A_m/\mathbb{C}\mathbf{1}_{A_m}} \leq c_2 \|Q_m(a)\|_{A_m/\mathbb{C}\mathbf{1}_{A_m}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}_m},$$

und somit ist die Halbnorm bezüglich der Norm stetig, also auch unterhalbstetig, vergleiche etwa [20] (7.4), [34]. Abschätzung (21) zeigt insbesondere, dass die Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$ auf ganz A_m endlich ist, also $A_m = \mathcal{A}_m$ gilt. Damit ist alles gezeigt. \square

3.19. BEMERKUNG. (i) Überraschenderweise lässt sich der einfache Beweis aus dem Kommutativen auf den nicht-kommutativen Fall übertragen: Die etwas kompliziert anmutende Konstruktion der Folge $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ endlichdimensionaler C^* -Algebren trägt nur der Tatsache Rechnung, dass wir im Kommutativen eine aufsteigende Folge von endlichen Punktmengen X_m benutzen. Deren Dichtheit im kompakten metrischen Raum (K, ρ) übersetzt sich in die Formel $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker}(\pi_m) = \{\mathbf{0}\}$ beziehungsweise $\overline{\{\varphi \circ \pi_m \mid \varphi \in S(A_m)\}}^{w^*} = S(A)$ auf Ebene der Zustände. Der Übergang zum Zustandsraum bietet sich an, weil im Kommutativen die Punkte in K genau den reinen (multiplikativen) Zuständen in $S(C(K))$ entsprechen. Dank der Resultate von Rieffel kann man die Rechnung in (20) direkt aus dem Kommutativen übertragen; dort erhält man die entsprechende Aussage sofort, wenn man π_m als Punktauswertung in der endlichen Menge $X_m \subset K$ interpretiert. Die benutzte Eigenschaft über die totale Beschränktheit sichert endlichen Durchmesser von $S(A)$ bezüglich der Metrik $\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}$, was bei kompakten metrischen Räumen ohnehin gegeben ist.

- (ii) Im eben durchgeführten Beweis haben wir aus der Injektivität der Abbildung $\pi = \prod_{m \in \mathbb{N}} \pi_m$ die Schwach*-Dichtheit von $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{\psi_m \circ \pi_m \mid \psi_m \in S(A_m)\}$ in $S(A)$ gefolgert. Es gilt aber auch die umgekehrte Implikation: Ist $a \in \text{Ker}(\pi)$, so ist $\pi_m(a) = \mathbf{0}$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also ist $\psi_m \circ \pi_m(a) = 0$ für alle $\psi_m \in S(A_m)$, und wegen der Schwach*-Dichtheit folgt $\varphi(a) = 0$ für alle $\varphi \in S(A)$, also $\|a\|_A \leq 2 \sup_{\varphi \in S(A)} |\varphi(a)| = 0$, also $a = \mathbf{0}$, und π ist injektiv.

Wir rufen uns die zweite Separiertheit für einen *-Homomorphismus $\pi : A \rightarrow F$ in eine (endlichdimensionale) C^* -Algebra F in Erinnerung:

$$\varepsilon_\pi^2 = \sup_{\varphi \in S^e(A)} \inf_{\psi \in S^e(F)} \rho_{\|\cdot\|_A}(\varphi, \psi \circ \pi).$$

Beachten wir, dass die konvexe Hülle der reinen Zustände einer C^* -Algebra schwach*-dicht im Zustandsraum dieser C^* -Algebra liegt und die Metrik $\rho_{\|\cdot\|_A}$ gerade die Schwach*-Topologie liefert, so bedeutet die Endlichkeit des zweiten multiplikativen Entropie-Index beziehungsweise die damit verbundene Existenz einer Folge von *-Homomorphismen $(\pi_m)_m$ in endlichdimensionale C^* -Algebren A_m mit zugehöriger Nullfolge $(\varepsilon_{\pi_m}^2)_m$ gerade, dass die Zustände $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{\psi_m \circ \pi_m \mid \psi_m \in S(A_m)\}$ dicht in $S(A)$ liegen, und die eben besprochene Äquivalenz liefert die Injektivität von π .

Insofern geht der zweite multiplikative Entropie-Index den Problemen des ersten, welche es in Theorem 3.16 nötig machen, eine Zusatzbedingung zu stellen, um die Injektivität von $\pi = \prod_{m \in \mathbb{N}} \pi_m$ zu erhalten, aus dem Weg.

- (iii) Es bietet sich noch eine weitere Möglichkeit an, aus den im Beweis von Theorem 3.18 definierten Größen A_m und π_m endlichdimensionale kompakte quantenmetrische Räume $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$ zu gewinnen, deren inverser Limes wieder $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A)$ ist, indem wir die Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$ anders definieren. Das entsprechende Vorgehen führen wir im Rest dieser Bemerkung vor.

Die Abbildungen $\pi_m : A \rightarrow A_m$ sind surjektiv. (Dies waren die Einschränkungen der kanonischen Projektionen von $\lim_{\leftarrow} A_m$ in A_m auf A , welche $\sigma_m \circ \tau$ ersetzen.) Dann ist die dazu duale Abbildung $\pi_m^* : A_m^* \rightarrow A^*$, $\varphi \mapsto \pi_m^*(\varphi) = \varphi \circ \pi_m$ injektiv, und somit auch die Einschränkung $\pi_m^*|_{S(A_m)} : S(A_m) \rightarrow S(A)$. Also können wir $S(A_m)$ als Teilmenge von $S(A)$ betrachten, nämlich als $\{\varphi \in S(A) \mid \varphi|_{\text{Ker}(\pi_m)} = \mathbf{0}\}$, wie wir uns schon in Lemma 2.23 überlegt hatten. Als Metrik auf $S(A_m)$ kann uns also die Einschränkung der zur Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$ gehörenden Metrik dienen: $\rho_m := \rho_{\|\cdot\|_A}|_{S(A_m)}$.

Nun besagt Theorem 9.11 in [56] das Folgende: Eine die Schwach*-Topologie liefernde Metrik ρ auf dem Zustandsraum einer C^* -Algebra B rührt genau dann von einer Halbnorm L auf B , welche auch den Wert $+\infty$ annehmen kann und die Eigenschaften (b) und (d) aus Definition 1.1 und die Eigenschaften der Unterhalbstetigkeit und der totalen Beschränktheit erfüllt, her, wenn die Metrik konvex, mittelpunktsausgeglichen und mittelpunktskonvex ist. In diesem Fall ist die Relation zwischen Metrik und Halbnorm dann genau die in Formel (1) auf Seite 5 angegebene. Dabei heißt die Metrik ρ auf $S(B)$

- **konvex**, wenn $\rho(\mu, t\nu_1 + (1-t)\nu_2) \leq t\rho(\mu, \nu_1) + (1-t)\rho(\mu, \nu_2)$,
- **mittelpunktsausgeglichen**, wenn $\mu_1 - \nu_1 = \mu_2 - \nu_2$ ($\Leftrightarrow \frac{\mu_1 + \nu_2}{2} = \frac{\mu_2 + \nu_1}{2}$)
 $\Rightarrow \rho(\mu_1, \nu_1) = \rho(\mu_2, \nu_2)$,
- **mittelpunktskonvex**, wenn $\rho\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\rho(\mu_1, \nu_1) + \rho(\mu_2, \nu_2))$

für $\mu, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2 \in S(B)$ und $t \in [0, 1]$ gilt. [Die Aussage von Rieffels Theorem stimmt so, wie sie in [56] (9.11) für allgemeine Ordnungs-Eins-Räume A formuliert ist, nicht: In [57] (S. 5) weist Rieffel darauf hin, dass die Vollständigkeit von $(A, \|\cdot\|_A)$ verlangt werden muss.]

In unserem Fall stammt die Metrik $\rho_{\|\cdot\|_A}$ von einer Halbnorm, welche die oben angegebenen Eigenschaften erfüllt. Daher ist $\rho_{\|\cdot\|_A}$ konvex, mittelpunktsausgeglichen und mittelpunktskonvex, und mit ihr auch die Einschränkungsmetriken ρ_m . Weil $S(A_m)$ (als Annihilator des abgeschlossenen Ideals $\text{Ker}(\pi_m)$) mit einer schwach*-abgeschlossenen aufspaltenden Seite in $S(A)$ identifiziert werden kann, sind auch die Metriken ρ_m konvex, mittelpunktsausgeglichen und mittelpunktskonvex. Diesen entsprechen Halbnormen $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m} := L_{\rho_m}$ auf A_m , (welche auch den Wert $+\infty$ annehmen können und) welche die Eigenschaft der totalen Beschränktheit erfüllen, wie man mit einem Argument ähnlich dem im Beweis von Theorem 3.18 sieht. Also liefert ρ_m die Schwach*-Topologie, und wir können wieder die Korrespondenz aus [56] (9.11), diesmal in umgekehrter Richtung, anwenden. Dass die Halbnormen $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$ alle Eigenschaften aus Definition 1.1 erfüllen, auch die nicht in obiger Korrespondenz genannten, und damit $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$ mit $\mathcal{A}_m := \{a \in A \mid \|a\|_{\mathcal{A}_m} < \infty\}$ zu einem kompakten quantenmetrischen Raum machen, folgt wiederum analog zum Nachweis in Theorem 3.18.

Natürlich ist die Abbildung $\pi_m|_{\mathcal{A}} : (\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) \rightarrow (\mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$ kontraktiv wegen

$$\|a\|_{\mathcal{A}} = \sup_{\substack{\varphi, \psi \in S(A), \\ \varphi \neq \psi}} \frac{|\varphi(a) - \psi(a)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\varphi, \psi)} \geq \sup_{\substack{\varphi, \psi \in S(A_m), \\ \varphi \neq \psi}} \frac{|\varphi(a) - \psi(a)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\varphi, \psi)} = \|\pi_m(a)\|_{\mathcal{A}_m},$$

und diese Rechnung zeigt auch, weshalb wir die Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$ als Einschränkungshalbnorm (im Vergleich zur Quotientenhalbnorm) bezeichnen wollen. Weil wir die Folge $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ aufsteigend und dementsprechend die Folge $(\text{Ker}(\pi_m))_{m \in \mathbb{N}}$ absteigend gewählt haben, gilt für $a \in \mathcal{A}$ nach Lemma 2.23

$$\begin{aligned} \sup_{m \in \mathbb{N}} \|\pi_m(a)\|_{\mathcal{A}_m} &= \sup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{\varphi, \psi \in S(A_m), \\ \varphi \neq \psi}} \frac{|\varphi(a) - \psi(a)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\varphi, \psi)} \\ &= \sup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{\varphi, \psi \in S(A), \\ \varphi \neq \psi \\ \psi|_{\text{Ker}(\pi_m)} = \mathbf{0} = \varphi|_{\text{Ker}(\pi_m)}}} \frac{|\varphi(a) - \psi(a)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\varphi, \psi)} \\ &= \sup_{\substack{\varphi, \psi \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker}(\pi_m)^\circ, \\ \varphi \neq \psi}} \frac{|\varphi(a) - \psi(a)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\varphi, \psi)} \stackrel{(i)}{\leq} \sup_{\substack{\varphi, \psi \in (\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker}(\pi_m))^\circ, \\ \varphi \neq \psi}} \frac{|\varphi(a) - \psi(a)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\varphi, \psi)} \\ &\stackrel{(ii)}{=} \sup_{\substack{\varphi, \psi \in S(A), \\ \varphi \neq \psi}} \frac{|\varphi(a) - \psi(a)|}{\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(\varphi, \psi)} = \|a\|_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Dabei gilt zunächst (i) wegen $(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker}(\pi_m))^\circ = \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker}(\pi_m)^\circ}^{w^*}$, was nichts anderes besagt, als dass $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{\varphi \in S(A) \mid \varphi|_{\text{Ker}(\pi_m)} = \mathbf{0}\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{\varphi \circ \pi_m \mid \varphi \in S(A_m)\}$ schwach*-dicht in $S(A)$ liegt, vergleiche den Beweis von

Theorem 3.18. Außerdem folgt (ii) aus der Injektivität von π . Dass in (i) sogar Gleichheit und damit $\|a\|_{\mathcal{A}} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|\pi_m(a)\|_{\mathcal{A}_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\pi_m(a)\|_{\mathcal{A}_m}$ gilt, folgt aus der eben erwähnten Schwach*-Dichtheit mit genau derselben Argumentation, wie sie im Beweis von Theorem 3.18 durch die Rechnung in (20) erfolgt, denn rechts von (20.1) steht genau $\|a\|_{\mathcal{A}} - \|\pi_m(a)\|_{\mathcal{A}_m}$ für die Einschränkungshalbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$. Insbesondere impliziert (20), dass die Einschränkungshalbnorm höchstens so groß ist wie die Quotientenhalbnorm.

Also haben wir mit der Einschränkungshalbnorm eine zweite Möglichkeit gefunden, $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ als inversen Limes kompakter quantenmetrischer Räume darzustellen.

Zum Ende dieses Abschnitts greifen wir Beispiel 1.8 auf Seite 10 nochmals auf und stellen die rationale Drehalgebra ebenfalls als inversen Limes endlichdimensionaler kompakter quantenmetrischer Räume dar.

3.20. BEISPIEL (Rationale Drehalgebra — Teil II). Wir hatten in Beispiel 1.8 zur rationalen Drehalgebra $A_{\vartheta} = C^*(xU_q, yV_q) \subset C(\mathbf{T}^2, M_q(\mathbb{C}))$ für $\vartheta = \frac{p}{q}$ mit $\theta = e^{2\pi i \vartheta}$ den kompakten quantenmetrischen Raum $(A_{\vartheta}, \mathcal{A}_{\vartheta}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_{\vartheta}})$ mit Hilfe einer Gruppenwirkung α des Torus $G = \mathbf{T}^2 = S^1 \times S^1$ auf A_{ϑ} durch *-Automorphismen und einer Längenfunktion l auf G , welche die „flache“ geodätische Metrik ρ auf dem Torus induziert, konstruiert: Wir hatten

$$\mathcal{A}_{\vartheta} := \left\{ a \in A_{\vartheta} \mid \sup_{e \neq g \in G} \frac{\|\alpha_g(a) - a\|_{A_{\vartheta}}}{l(g)} = \sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{\|a(x) - a(y)\|_{M_q(\mathbb{C})}}{\rho(x, y)} < \infty \right\}$$

und

$$\|a\|_{\mathcal{A}_{\vartheta}} := \sup_{e \neq g \in G} \frac{\|\alpha_g(a) - a\|_{A_{\vartheta}}}{l(g)} = \sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{\|a(x) - a(y)\|_{M_q(\mathbb{C})}}{\rho(x, y)}$$

definiert. Mit unserer Parametrisierung des Torus durch das Einheitsquadrat via $E : [0, 1]^2 \rightarrow G$, $(\sigma, \tau) \mapsto (e^{2\pi i \sigma}, e^{2\pi i \tau})$ können wir für den Torus eine aufsteigende Folge $(X_m)_m$ endlicher Punktfolgen konstruieren, deren Vereinigung dicht in G bezüglich ρ ist, indem wir

$$Y_m := \left\{ \left(\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_2}{2^m} \right) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, 0 \leq k_1, k_2 < 2^m \right\}, \quad X_m := E(Y_m)$$

setzen und weiter

$$A_m := \{f|_{X_m} \mid f \in A_{\vartheta}\} \subseteq C(X_m, M_q(\mathbb{C})) \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_m := \{f|_{X_m} \mid f \in \mathcal{A}_{\vartheta}\}.$$

Die zur Einbettungsabbildung $\psi_m : X_m \rightarrow G$ adjungierte Einschränkungsbildung bezeichnen wir wie üblich mit π_m und die Quotientennorm beziehungsweise -halbnorm von $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_{\vartheta}}$ und $\|\cdot\|_{A_{\vartheta}}$ bezüglich π_m mit $\|\cdot\|_{A_m}$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$. Diese Abbildung $\pi_m : A_{\vartheta} \rightarrow A_m$, $f \mapsto f|_{X_m}$ ist ein *-Homomorphismus, und $(A_m, \|\cdot\|_{A_m}, \pi)_m$ ist eine inverse Folge von C^* -Algebren. Die natürlichen verbindenden Einschränkungsabbildungen $\pi_{m_2, m_1} : A_{m_2} \rightarrow A_{m_1}$ sind aufgrund der Definition der Norm beziehungsweise Halbnorm in A_m und \mathcal{A}_m als Quotienten(halb)norm kontraktiv. Klar sind $\text{Ker}(\|\cdot\|_{A_m}) = \mathbf{C}\mathbf{1}_{A_m}$, die *-Treue von $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$, die Vollständigkeit

von $(\mathcal{A}_m, \max(\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}))$ wegen der Endlichdimensionalität und die Dichtigkeit von \mathcal{A}_m in A_m . Somit ist $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$ eine Lipschitz-Algebra. Außerdem ergibt sich die Unterhalbstetigkeit von $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$ ebenfalls aus der Endlichdimensionalität von A_m , siehe den Beweis von Theorem 3.18; der Beweis der Eigenschaft der totalen Beschränktheit für die Lipschitz-Algebra $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$ ist ebenfalls derselbe wie der dortige. Damit ist $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})$ sogar ein kompakter quantenmetrischer Raum.

Schließlich ist der inverse Limes der inversen Folge $(A_m, \mathcal{A}_m, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m})_m$ kompakter quantenmetrischer Räume tatsächlich das Tripel $(A_\vartheta, \mathcal{A}_\vartheta, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_\vartheta})$ laut Satz 3.3, denn es gilt $(\mathcal{A}_\vartheta, \max(\|\cdot\|_{\mathcal{A}_\vartheta}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_\vartheta})) = \lim_{\leftarrow} (\mathcal{A}_m, \max(\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}), \pi)_m$, weil \mathcal{A}_ϑ zusammen mit den verbindenden Abbildungen $\pi_m|_{\mathcal{A}_\vartheta} : \mathcal{A}_\vartheta \rightarrow \mathcal{A}_m$ und $\mathcal{A}_\vartheta \rightarrow \lim_{\leftarrow} \mathcal{A}_m, f \mapsto (\pi_m(f))_{m \in \mathbb{N}}$ die universelle Eigenschaft erfüllt, vergleiche auch Satz A.11. Dass A_ϑ der Normabschluss von \mathcal{A}_ϑ in $(\lim_{\leftarrow} A_m, \|\cdot\|_{\lim_{\leftarrow} A_m})$ ist, sieht man wegen

$$\begin{aligned} & \lim_{\leftarrow} A_m \\ &= \left\{ (f_m)_m \mid f_m = f|_{X_m}, f \in C^*(xU_q, yV_q), \pi_{m+1,m}(f_{m+1}) = f_m, \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|_{A_m} < \infty \right\} \\ &\subseteq \ell^\infty \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m, C^*(U_q, V_q) \right) \cong \ell^\infty \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m, M_q(\mathbb{C}) \right) \end{aligned}$$

analog zum in Abschnitt 1 dieses Kapitels diskutierten kommutativen Beispiel, in dem wir $(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ als inversen Limes endlichdimensionaler kompakter quantenmetrischer Räume dargestellt haben. Insbesondere ist also A_ϑ residual endlichdimensional.

Im allgemeinen Fall, das heißt bei abstrakten Lipschitz-Algebren, welche eine Darstellung als inverser Limes besitzen, ist es nur natürlich, die Algebren in der inversen Folge mit der Quotientennorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$ beziehungsweise -halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$ auszustatten, wie wir es oben getan haben. Da A_ϑ aber aus stetigen (matrixwertigen) Funktionen besteht und die Einschränkungen $\pi_m(a)$ für $a \in A_\vartheta$ in $C(X_m, C^*(U_q, V_q))$ liegen, könnten wir A_m beziehungsweise \mathcal{A}_m auch mit der Einschränkung der üblichen Supremumsnorm beziehungsweise Lipschitz-Halbnorm auf X_m , also mit

$$\begin{aligned} \|\pi_m(a)\|_{\mathcal{A}_m}^E &:= \sup_{x \in X_m} \|a(x)\|_{M_q(\mathbb{C})}, \\ \|\pi_m(a)\|_{\mathcal{A}_m}^E &:= \sup_{\substack{x, y \in X_m \\ x \neq y}} \frac{\|a(x) - a(y)\|_{M_q(\mathbb{C})}}{\rho_m(x, y)} \end{aligned}$$

ausstatten, wobei ρ_m die Einschränkung von ρ auf X_m ist. Im Falle der Halbnorm liefert diese Festlegung andere Ergebnisse als die Quotientenhalbnorm, aber man kann beide Halbnormen gegeneinander abschätzen: Es gilt $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}^E \leq \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m} \leq \sqrt{2} \cdot q^3 \|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}^E$. Die erste Ungleichung ist klar wegen

$$\sup_{\substack{x, y \in X_m \\ x \neq y}} \frac{\|a(x) - a(y)\|_{M_q(\mathbb{C})}}{\rho_m(x, y)} \leq \sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{\|(a + j)(x) - (a + j)(y)\|_{M_q(\mathbb{C})}}{\rho(x, y)} \quad \forall j \in \text{Ker}(\pi_m),$$

weil $j(z) = \mathbf{0}$ für $z \in X_m$ und $j \in \text{Ker}(\pi_m)$. Die zweite Ungleichung ergibt sich wie folgt: Die Norm $\|\cdot\|_{M_q(\mathbb{C})}$, die $M_q(\mathbb{C})$ zu einer C^* -Algebra macht, ist die von der euklidischen Vektornorm induzierte. Bezeichnen wir wie in Beispiel 3.12 mit $\|\cdot\|_{M_q(\mathbb{C})}^\infty$ die Norm der größten Zeilenbetragssumme, so gilt die Abschätzung $\|\cdot\|_{M_q(\mathbb{C})}^\infty \leq \sqrt{q} \|\cdot\|_{M_q(\mathbb{C})} \leq q \|\cdot\|_{M_q(\mathbb{C})}^\infty$. Fassen wir eine Matrix in $M_q(\mathbb{C})$ als Vektor in \mathbb{C}^{q^2} auf und bezeichnen mit $\|\cdot\|_{|\cdot|}$ die Maximumsnorm dieses Vektors, so gilt $\|\cdot\|_{|\cdot|} \leq \|\cdot\|_{M_q(\mathbb{C})}^\infty \leq q \|\cdot\|_{|\cdot|}$. Außerdem gibt es laut Bemerkung 1.4 zu jeder lipschitzstetigen Funktion $f_0 : X_m \rightarrow \mathbb{R}^n$ für eine Teilmenge (X_m, ρ_m) eines metrischen Raumes (K, ρ) mit auf X_m eingeschränkter Metrik ρ_m eine lipschitzstetige Fortsetzung $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\text{Lip}(f) \leq \sqrt{n} \text{Lip}(f_0)$. Wir wenden diese Überlegungen auf unseren Fall an, indem wir $\pi_m(a)$ als stetige Funktion auf X_m mit Werten in $\mathbb{R}^{2q^2} \cong \mathbb{C}^{q^2}$ auffassen und $\|\cdot\|_{M_q(\mathbb{C})}$ durch $\|\cdot\|_{|\cdot|}$ abschätzen; das liefert einen Faktor $\sqrt{q} \cdot q$. Lipschitzstetiges Fortsetzen auf ganz G liefert zusätzlich einen Faktor $\sqrt{2} \cdot q$, und für das umgekehrte Abschätzen der Normen benötigen wir wieder einen Faktor \sqrt{q} , so dass wir die zweite Ungleichung erhalten.

Solche Schwierigkeiten ergeben sich zunächst auch im Falle der Normen; hier erhalten wir $\|\pi_m(a)\|_{A_m}^E \leq \|\pi_m(a)\|_{A_m} \leq q^2 \|\pi_m(a)\|_{A_m}^E$. Dies ergibt sich mit Hilfe derselben Überlegungen wie bisher, nur dass man anstatt einer Aussage über die Fortsetzung reellwertiger lipschitzstetiger Funktionen den Fortsetzungssatz von Tietze für reellwertige stetige Funktionen verwendet, siehe etwa [50] (1.5.8). Man fasst dann $\pi_m(a)$ als Funktion in \mathbb{R}^{2q^2} auf und setzt koordinatenweise fort. Außerdem ist zu beachten, dass U_q und V_q schon ganz $M_q(\mathbb{C})$ erzeugen; dies ist wichtig, weil man aus diesem Grund nicht durch gesonderte Überlegungen sicherzustellen braucht, dass eine (koordinatenweise) Fortsetzung von $\pi_m(a)$, ausgewertet in einem Punkt von G , wieder in $C^*(U_q, V_q)$ liegt. Weil aber sowohl $\|\cdot\|_{A_m}$ als auch $\|\cdot\|_{A_m}^E$ A_m zu einer C^* -Algebra machen und die C^* -Norm eindeutig ist, gilt schon $\|\pi_m(a)\|_{A_m} = \|\pi_m(a)\|_{A_m}^E$ für alle $a \in A_\vartheta$.

Dass beim Fortsetzen lipschitzstetiger Funktionen ein Faktor ins Spiel kommt, sieht man schon an dem einfachen Beispiel eines vierpunktigen metrischen Raumes (K, ρ) mit $K = \{e, p_1, p_2, p_3\}$ mit $\rho(e, p_i) = \frac{1}{2}$ und $\rho(p_i, p_j) = 1$ für $i \neq j$, wobei die Funktion $f_0 : \{p_1, p_2, p_3\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f_0(p_1) = -\frac{1}{2}$, $f_0(p_2) = \frac{1}{2}$ und $f_0(p_3) = i\frac{\sqrt{3}}{2}$ auf ganz K lipschitzstetig fortgesetzt werden soll. Die Funktionswerte sind also die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks der Seitenlänge 1. Als kleinstmögliche Lipschitz-Halbnorm ergibt sich $\frac{2}{\sqrt{3}}$, wenn man den Wert der fortgesetzten Funktion in e mit $i\frac{\sqrt{3}}{6}$, dem Schwerpunkt des Dreiecks, festlegt.

Wir zeigen nun noch mit Hilfe der Abschätzungen zwischen den eben betrachteten Normen $\|\cdot\|_{M_q(\mathbb{C})}$, $\|\cdot\|_{M_q(\mathbb{C})}^\infty$ und $\|\cdot\|_{|\cdot|}$ für $q \times q$ -Matrizen, dass für die beiden multiplikativen Entropie-Indizes $\text{mei}^1(A_\vartheta, \mathcal{A}_\vartheta, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_\vartheta}) = \text{mei}^2(A_\vartheta, \mathcal{A}_\vartheta, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_\vartheta}) = 2$ gilt.

Wir beweisen hierzu zunächst, dass jeder $*$ -Homomorphismus π von A_ϑ in eine endlichdimensionale C^* -Algebra eine Punktauswertung in einer endlichen Teilmenge $X_\pi \subset G$ entspricht, das heißt, für $a \in A_\vartheta$ ist $\pi(a)$ direkte Summe der

Matrizen $a(x)$ ($x \in X_\pi$). Es genügt, alle irreduziblen Darstellungen (π, \mathcal{H}) von $A_\vartheta \subset C(G, M_q(\mathbb{C}))$ als Punktauswertungen $\pi : A_\vartheta \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $a \mapsto \pi(a) \in M_q(\mathbb{C})$ mit $\pi(a) = a(x)$ für ein $x \in G$ zu charakterisieren. Hierzu benötigen wir etwas Theorie: Wir betrachten zum einen das Spektrum \hat{A} (vergleiche Bemerkung 1.25) für eine C^* -Algebra A , bestehend aus den Äquivalenzklassen nichttrivialer irreduzibler Darstellungen bezüglich unitärer Äquivalenz. Zum anderen benutzen wir das **primitive Spektrum** \check{A} von A , das ist die Menge aller Kerne nichttrivialer irreduzibler Darstellungen. Weil unitär äquivalente irreduzible Darstellungen schon denselben Kern besitzen, existiert eine kanonische Surjektion Φ von \hat{A} auf \check{A} . Definieren wir für eine Teilmenge $F \subset \check{A}$ von Kernen irreduzibler Darstellungen $\text{Ker}(F) := \bigcap_{I \in F} I$, was ein abgeschlossenes Ideal in A darstellt, und umgekehrt $\text{hull}(B) := \{I \in \check{A} \mid B \subset I\}$ für eine Teilmenge B von A , so kann man zeigen, dass $\{\text{hull}(B) \mid B \subset A\}$ genau die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf \check{A} , der so genannten **Jacobson-Topologie**, sind, und $A \rightarrow \check{A}$, $J \mapsto \text{hull}(J)$ eine Bijektion zwischen den abgeschlossenen Idealen in A und den in der Jacobson-Topologie abgeschlossenen Teilmengen von \check{A} mit Umkehrabbildung $\text{Ker}(\cdot)$ vermittelt, vergleiche etwa [44] (5.4) oder [49] (4.1.3). Entsprechend können wir auch \hat{A} mit der Jacobson-Topologie, der Initialtopologie der Abbildung Φ , ausstatten.

Weiter sagen wir, eine C^* -Algebra A besitzt **stetige Spur** (engl.: „continuous trace“), wenn die Menge aller positiven Elemente $a \in A_+$, für welche die Abbildung $\hat{a} : \hat{A} \rightarrow [0, \infty]$, $[(\pi, \mathcal{H})] \mapsto \text{Spur}(\pi(a))$ ein Element in $C^b(\hat{A})$ ist, dicht in der Menge der positiven Elemente A_+ liegt; natürlich ist die Abbildung \hat{a} dabei unabhängig vom Vertreter der Restklasse in $[(\pi, \mathcal{H})]$. Laut [25] (Theorem 4.3) ist jede C^* -Algebra A , deren sämtliche irreduziblen Darstellungen dieselbe endliche Dimension n besitzen, eine C^* -Algebra mit stetiger Spur.

Die rationale Drehalgebra A_ϑ erfüllt aber diese Eigenschaft; dies können wir durch folgende Überlegung leicht einsehen: Sei (π, \mathcal{H}) eine irreduzible Darstellung für die rationale Drehalgebra A_ϑ , die von zwei unitären Operatoren U, V erzeugt wird, welche ihrerseits die Vertauschungsrelation $VU = \theta UV$ erfüllen. Dann sind aufgrund dieser Relation U^q und V^q im Zentrum von A_ϑ . Weiter ist zur Irreduzibilität der Darstellung (π, \mathcal{H}) auf der C^* -Algebra A_ϑ die Bedingung $\pi(A_\vartheta)' = \mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ äquivalent nach [44] (4.1.12); hierbei bezeichnet A' die Kommutante von $A \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Es folgt $\pi(U^q), \pi(V^q) \in \mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$, und wir können U_q und V_q derart normieren, dass $\pi(U^q) = \pi(V^q) = \mathbf{1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ gilt. Da U und V einen Raum der Dimension höchstens q^2 mit Basis $\{U^k V^l \mid 1 \leq k, l \leq q\}$ aufspannen, ist $\pi(A_\vartheta)\zeta$ für $\zeta \in \mathcal{H}$ ein invarianter Unterraum von \mathcal{H} der größtmöglichen Dimension q^2 . Aufgrund der Vertauschungsrelation $\pi(V)\pi(U) = \theta\pi(U)\pi(V)$ ist für jeden Eigenvektor ξ von $\pi(U)$ zu einem Eigenwert λ aber $\pi(V)\xi$ Eigenvektor zu $\pi(U)$ zum Eigenwert $\frac{\lambda}{\theta}$, und umgekehrt für jeden Eigenvektor η von $\pi(V)$ zum Eigenwert μ analog $\pi(U)\eta$ Eigenvektor von $\pi(V)$ zum Eigenwert $\theta\mu$. Wegen $\pi(U^q) = \pi(V^q) = \mathbf{1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ sind höchstens die q -ten Einheitswurzeln $\{\theta^m \mid 0 \leq m \leq q-1\}$ Eigenwerte dieser beschränkten linearen Operatoren. Die zugehörigen Eigenräume sind eindimensional aufgrund der Irreduzibilität von π , denn wäre H ein Eigenraum etwa von $\pi(U)$ zum Eigenwert λ mit zwei orthonormalen Eigenvektoren $\xi_1, \xi_2 \in H$, so gälten für $1 \leq k \leq q$ die Relationen $\pi(U)^k \xi_1 \in \mathbb{C}\xi_1$, und $\pi(V)^k \xi_1$ wäre ξ_1 für $k = q$ beziehungsweise als Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{\lambda}{\theta^k}$ orthogonal zu ξ_2 für $1 \leq k \leq q-1$.

Somit ist der Aufspann der Vektoren $\{\pi^k(U)\xi_1, \pi^k(V)\xi_1 \mid 0 \leq k \leq q-1\}$ ein π -invarianter Unterraum von \mathcal{H} , zu dem ξ_2 orthogonal ist, was einen Widerspruch zur Irreduzibilität von π darstellt. Schließlich besitzen sowohl $\pi(U)$ als auch $\pi(V)$ jeweils alle q -ten Einheitswurzeln als Eigenwerte mit eindimensionalen Eigenräumen, weil nach Voraussetzung $\text{ggT}(p, q) = 1$ gilt und damit θ primitive q -te Einheitswurzel ist, also beispielsweise $\frac{\lambda}{\theta^k}$ für $0 \leq k \leq q-1$ alle q -ten Einheitswurzeln durchläuft. Daher können wir zu $\pi(U)$ beziehungsweise $\pi(V)$ ein vollständiges Orthonormalsystem aus Eigenvektoren ξ_m beziehungsweise η_m ($0 \leq m \leq q-1$) finden, so dass die Eigenvektoren zyklisch vertauscht werden, das bedeutet $\pi(U)(\eta_m) = \eta_{m+1(\text{mod } q)}$ und $\pi(V)(\xi_m) = \xi_{m-1(\text{mod } q)}$. [Dies steht völlig im Einklang mit den in Beispiel 1.8 (6) auf Seite 11 angegebenen Matrizen U_q und V_q , welche wir als Modell für $\pi(U)$ beziehungsweise $\pi(V)$ ansehen können; für diese ist eine Basis aus orthonormalen Eigenvektoren mit eben genannten Eigenschaften in der Tabelle von Abbildung 16 angegeben.]

m	0	1	2	...	$q-1$
Eigenwert	1	θ	θ^2	...	θ^{q-1}
Eigenvektoren von U_q	$\frac{1}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} 1 \\ \theta^{q-1} \\ \theta^{2(q-1)} \\ \vdots \\ \theta^{(q-1)^2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} 1 \\ \theta^{q-2} \\ \theta^{2(q-2)} \\ \vdots \\ \theta^{(q-1)(q-2)} \end{pmatrix}$...	$\frac{1}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ \theta^2 \\ \vdots \\ \theta^{q-1} \end{pmatrix}$
Eigenvektoren von V_q	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$...	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ABBILDUNG 16. Zusammenstellung einer Basis aus Eigenvektoren für die Matrizen U_q und V_q aus Beispiel 1.8 (6) auf Seite 11.

Insgesamt ist also die Dimension jeder irreduziblen Darstellung genau q , und damit besitzt A_ϑ stetige Spur.

Als C^* -Algebra mit stetiger Spur ist A_ϑ laut [49] (6.1.11) eine **C^* -Algebra vom Typ I_0** (oder **CCR-** beziehungsweise **liminale C^* -Algebra**). [Das bedeutet, dass A_ϑ von ihren abelschen Elementen erzeugt wird; dabei heißt $x \in A_\vartheta$ **abelsch**, wenn die von x erzeugte hereditäre C^* -Unteralgebra $\overline{x A_\vartheta x}^{\|\cdot\|_{A_\vartheta}}$ kommutativ ist.] Insbesondere ist A_ϑ **vom Typ I** (beziehungsweise **postliminal**), [das heißt, jeder nichttriviale Quotient von A_ϑ enthält ein abelsches Element,] und nach [49] (6.8.7) ist in diesem Falle die Surjektion $\Phi : \hat{A}_\vartheta \rightarrow \check{A}_\vartheta$ bijektiv. Laut [44] (5.4.8) folgt aus der Unitalität von A_ϑ sogar, dass \check{A}_ϑ und damit \hat{A}_ϑ kompakt sind. Beachten wir nun noch den Satz von Dauns-Hofmann ([49] (4.4.8)), welcher die Existenz eines Isomorphismus vom Zentrum (der Multiplier-Algebra) von A_ϑ auf die Klasse der beschränkten stetigen Funktionen auf \check{A}_ϑ besagt, so

erhalten wir $C(G) \cong C(\hat{A}_\vartheta)$, wobei \hat{A}_ϑ laut [49] (6.1.11) ein lokalkompakter Hausdorff-Raum ist. Damit sind aber G und \hat{A}_ϑ als kompakte Hausdorff-Räume schon homöomorph, denn sind $\phi : C(G) \rightarrow C(\hat{A}_\vartheta)$ der eben erwähnte Isomorphismus und $\delta^G : G \rightarrow C(G)^*$, $x \mapsto \delta_x^G = (a \mapsto a(x))$ beziehungsweise entsprechend $\delta^{\hat{A}_\vartheta}$ die Auswertungshomomorphismen, so ist $(\delta^G)^{-1} \circ \phi^* \circ \delta^{\hat{A}_\vartheta}$ der zugehörige Homöomorphismus von \hat{A}_ϑ nach G . Mit anderen Worten: Jeder Kern einer nicht-trivialen irreduziblen Darstellung (π, \mathcal{H}) von A_ϑ entspricht einem Punkt in G . Weil die Punktauswertungen $\pi_g : A_\vartheta \rightarrow M_q(\mathbb{C})$, $a \mapsto a(g)$ ($g \in G$) schon derartige Darstellungen auf $\mathcal{H} = \mathbb{C}^q$ sind, sind dies bis auf unitäre Äquivalenz alle.

Mit dieser Charakterisierung folgt $\|\pi(a)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \max_{x \in X_\pi} \|a(x)\|_{M_q(\mathbb{C})}$ für eine endlichdimensionale Darstellung (π, \mathcal{H}) von A_ϑ . Wie üblich bezeichnet X_m dabei die Menge der Auswertungspunkte von π . Wir betrachten den Fall $\vartheta \in]0, 1[$ und zeigen als Nächstes $\frac{1}{2}\mu_\pi \leq \varepsilon_\pi^1 \leq q^2\mu_\pi$, wobei ε_π^1 die erste Separiertheit aus Definition 2.12 und μ_π die (natürliche Verallgemeinerung der) Maschenweite von π aus dem Beweis von Theorem 2.20 ist. Für $a \in A_\vartheta$ betrachten wir hierzu $a(x)$ als Vektor in \mathbb{C}^{q^2} . Sei x_0 ein Punkt in G mit $\min_{x \in X_\pi} \rho(x, x_0) = \mu_\pi$. Wir definieren $a \in A_\vartheta$ komponentenweise durch

$$a_{ij}(z) := \begin{cases} \max(0, \mu_\pi - \rho(z, x_0)) & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dies ist möglich wegen $\vartheta = \frac{p}{q} \in]0, 1[$, $\text{ggT}(p, q) = 1$, also $q \geq 2$. Also liegt a im Zentrum $Z_\vartheta = C(G)\mathbf{1}_{M_q(\mathbb{C})} \subset A_\vartheta$. Wir erhalten durch diese Festlegung $a_{11}(z) = \|a(z)\|_{M_q(\mathbb{C})} = 2 \inf_{c \in \mathbb{C}} \|a(z) - c\mathbf{1}_{M_q(\mathbb{C})}\|_{M_q(\mathbb{C})}$. Hieraus folgt sofort $\inf_{c \in \mathbb{C}} \|a - c\mathbf{1}_{A_\vartheta}\|_{A_\vartheta} = \inf_{c \in \mathbb{C}} \sup_{z \in G} \|a(z) - c\mathbf{1}_{M_q(\mathbb{C})}\|_{M_q(\mathbb{C})} = \frac{1}{2}\mu_\pi$, und es ist

$$\|a\|_{A_\vartheta} = \sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{\|a(x) - a(y)\|_{M_q(\mathbb{C})}}{\rho(x, y)} = \frac{|a_{11}(x) - a_{11}(y)|}{\rho(x, y)} = 1,$$

also $a \in \mathcal{A}_\vartheta^1 \cap \text{Ker}(\pi)$. Insgesamt gilt also $\varepsilon_\pi^1 \geq \frac{1}{2}\mu_\pi$.

Umgekehrt sei $a \in \mathcal{A}_\vartheta$ mit $\|a\|_{A_\vartheta} = \sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{\|a(x) - a(y)\|_{M_q(\mathbb{C})}}{\rho(x, y)} \leq 1$ und $a|_{X_\pi} \equiv \mathbf{0}$.

Aus $\|\cdot\|_{|\cdot|} \leq q^{\frac{1}{2}}\|\cdot\|_{M_q(\mathbb{C})}$ folgt $\sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{\|a(x) - a(y)\|_{|\cdot|}}{\rho(x, y)} \stackrel{(*)}{\leq} q^{\frac{1}{2}}$. Wegen $a_{ij}|_{X_\pi} = \mathbf{0}$ komponentenweise können sich für $x, y \in G$ mit $x \neq y$ die Werte von $a_{ij}(x)$ und $a_{ij}(y)$ höchstens um $2q^{\frac{1}{2}}\mu_\pi$ unterscheiden, nämlich dann, wenn x und y zwei verschiedene Punkte in G mit $\mu_\pi = \min_{z \in X_\pi} \rho(x, z) = \min_{z \in X_\pi} \rho(y, z)$ sind, analog zur Argumentation im Beweis von Theorem 2.20. Somit gilt

$$\begin{aligned} \inf_{c \in \mathbb{C}} \|a - c\mathbf{1}_{A_\vartheta}\|_{A_\vartheta} &= \inf_{c \in \mathbb{C}} \sup_{z \in G} \|a(z) - c\mathbf{1}_{M_q(\mathbb{C})}\|_{M_q(\mathbb{C})} \leq \sup_{z \in G} \|a(z)\|_{M_q(\mathbb{C})} \\ &\leq q^{\frac{3}{2}} \sup_{z \in G} \|a(z)\|_{|\cdot|} \leq q^2\mu_\pi. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt dabei aufgrund von $\|a(z)\|_{|\cdot|} = \|a(z) - \underbrace{a(x)}_{=0}\|_{|\cdot|}$ für

jeden Auswertungspunkt $x \in X_\pi$ und wegen Abschätzung (*). Da $a \in \mathcal{A}_\vartheta$ mit $\pi(a) = \mathbf{0}$ und $\|a\|_{A_\vartheta} \leq 1$ beliebig war, folgt $\varepsilon_\pi^1 \leq q^2\mu_\pi$.

Als Nächstes zeigen wir $\frac{1}{4}\mu_\pi \leq \varepsilon_\pi^2 \leq q^2\mu_\pi$. Die erste Ungleichung ergibt sich aus der Abschätzung $\frac{1}{2}\mu_\pi \leq \varepsilon_\pi^1 \leq q^2\mu_\pi$ und der Aussage $\varepsilon_\pi^1 \leq 2\varepsilon_\pi^2$ aus dem Beweis von Lemma 2.15. Ist φ ein reiner Zustand auf A_ϑ , entspricht dieser einer Punktauswertung in einem Punkt $x_\varphi \in G$ über die zugehörige zyklische irreduzible GNS-Darstellung $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \xi_\varphi)$, für welche

$$\begin{aligned}
\inf_{\substack{\psi \in S^e(A_\vartheta) \\ \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}}} \sup_{b \in \mathcal{A}_\vartheta^1} |\varphi(b) - \psi(b)| &= \inf_{\substack{\psi \in S^e(A_\vartheta) \\ \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}}} \sup_{b \in \mathcal{A}_\vartheta^1 \cap \text{Ker}(\psi)} |\varphi(b)| \\
&= \inf_{\substack{\psi \in S^e(A_\vartheta) \\ \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}}} \sup_{b \in \mathcal{A}_\vartheta^1 \cap \text{Ker}(\psi)} | \langle \pi_\varphi(b)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle_{\mathcal{H}_\varphi} | \\
&\leq \inf_{\substack{\psi \in S^e(A_\vartheta) \\ \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}}} \sup_{b \in \mathcal{A}_\vartheta^1 \cap \text{Ker}(\psi)} \|\pi_\varphi(b)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\varphi)} \\
&= \inf_{\substack{\psi \in S^e(A_\vartheta) \\ \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}}} \sup_{b \in \mathcal{A}_\vartheta^1 \cap \text{Ker}(\psi)} \|b(x_\varphi)\|_{M_q(\mathbb{C})} \\
&\leq q^{\frac{3}{2}} \inf_{\substack{\psi \in S^e(A_\vartheta) \\ \psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}}} \sup_{b \in \mathcal{A}_\vartheta^1 \cap \text{Ker}(\psi)} \|b(x_\varphi)\|_{|\cdot|}
\end{aligned}$$

gilt. Wie φ entspricht auch ψ einem Auswertungspunkt x_ψ in G , wobei $x_\psi \in X_\pi$ wegen $\psi|_{\text{Ker}(\pi)} = \mathbf{0}$ beziehungsweise $\text{Ker}(\pi) \subset \text{Ker}(\psi)$ gilt. Außerdem ist $\|b(x_\varphi)\|_{|\cdot|}$ der größtmögliche Eintrag in der Matrix $b(x_\varphi)$. Weil $b(x_\psi) = \mathbf{0}$ und $\|b\|_{\mathcal{A}_\vartheta} \leq 1$ wegen $b \in \mathcal{A}_\vartheta^1 \cap \text{Ker}(\psi)$ gelten, ist

$$\|b(x_\varphi)\|_{|\cdot|} = \|b(x_\varphi) - b(x_\psi)\|_{|\cdot|} \leq q^{\frac{1}{2}}\rho(x_\varphi, x_\psi)$$

und damit auch

$$\sup_{b \in \mathcal{A}_\vartheta^1 \cap \text{Ker}(\psi)} \|b(x_\varphi)\|_{|\cdot|} \leq q^{\frac{1}{2}}\rho(x_\varphi, x_\psi).$$

Insgesamt ergibt sich die andere gewünschte Ungleichung $\varepsilon_\pi^2 \leq q^2\mu_\pi$.

Die Metrik ρ ist die von $[0, 1]^2$ induzierte, und mit Hilfe von $E : [0, 1]^2 \rightarrow G$, $(s, t) \mapsto (e^{2\pi is}, e^{2\pi it})$ können wir $(C(G), Lip(G), Lip(\cdot))$ mit einer entsprechenden Lipschitz-Algebra über $[0, 1]^2$ identifizieren, und deren multiplikative Entropie-Indizes stimmen laut Satz 2.18 und Theorem 2.20 mit $\text{lei}([0, 1]^2)$ überein. Wegen $\frac{1}{2}\mu_\pi \leq \varepsilon_\pi^1 \leq q^2\mu_\pi$ und $\frac{1}{4}\mu_\pi \leq \varepsilon_\pi^2 \leq q^2\mu_\pi$ stimmen also die Indizes $\text{mei}^1(A_\vartheta, \mathcal{A}_\vartheta, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_\vartheta})$, $\text{mei}^2(A_\vartheta, \mathcal{A}_\vartheta, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_\vartheta})$ und $\text{lei}([0, 1]^2)$ überein, und deren gemeinsamer Wert ist 2 laut 2.) in Beispiel 2.9.

Falls schließlich $\vartheta = 0$ gilt, so ist $A_\vartheta = C(G)$, und die Behauptung folgt aus der Überlegung im letzten Absatz, genauer gesagt mit Hilfe von Satz 2.18 wegen $(C(G), Lip(G), Lip(\cdot)) \cong (C([0, 1]^2), Lip([0, 1]^2), Lip(\cdot))$ und weil die Metrik auf G die von der in $[0, 1]^2$ induzierte ist.

Teil 2

Vollständig positive Theorie

In Abschnitt 2 von Kapitel 2 haben wir mit dem ersten und zweiten multiplikativen Entropie-Index für eine Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ zwei funktionalanalytische Formulierungen des unteren Entropie-Index gefunden. Diese benutzen $*$ -Homomorphismen $\pi : A \rightarrow F$ von der C^* -Algebra A in (endlichdimensionale) C^* -Algebren F . Der Kern eines solchen Homomorphismus π von A in eine n -dimensionale C^* -Algebra F ist ein abgeschlossenes Ideal der Kodimension höchstens n in A , aber A kann eine einfache C^* -Algebra sein, muss also keine echten nichttrivialen Ideale enthalten. Homomorphismen $\pi : A \rightarrow F$ brauchen also gar nicht zu existieren, und in diesem Falle würden die multiplikativen Entropie-Indizes mit dem Wert $+\infty$ belegt.

Im Rest dieser Arbeit wollen wir andeuten, wie wir dem eben angesprochenen Problem begegnen können. Dazu formulieren wir in Abschnitt 1 von Kapitel 4 den vollständig positiven Entropie-Index ${}^{\mathfrak{R}}\text{vpei}(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ für Lipschitz-Algebren $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$. Dieser benutzt (lineare,) vollständig positive, unitale und isometrische Abbildungen $\varphi : F \rightarrow A$ von einer (endlichdimensionalen) C^* -Algebra F nach A , das heißt, wir betrachten nun Abbildungen in umgekehrter Richtung und anderen Eigenschaften im Vergleich zu Teil 1. Derartige Abbildungen existieren stets zur Genüge. Allerdings sind diese nicht mehr notwendig multiplikativ wie die bisher verwandten $*$ -Homomorphismen. Im kommutativen Fall, also für $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = (C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ für einen kompakten metrischen Raum (K, ρ) muss demnach die C^* -Algebra F nicht automatisch kommutativ sein. Je nachdem, welche Klasse \mathfrak{K} von C^* -Algebren wir als mögliche Urbilder von φ zulassen, beispielsweise die Menge aller endlichdimensionalen, aller endlichdimensionalen kommutativen C^* -Algebren oder aller vollen Matrix-Algebren, erhalten wir im Allgemeinen verschiedene, von \mathfrak{K} abhängige Indizes ${}^{\mathfrak{R}}\text{vpei}(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$.

Wir verwenden also statt wie in Abschnitt 2 von Kapitel 2 Abbildungen von A in endlichdimensionale C^* -Algebren F im Folgenden Abbildungen in umgekehrter Richtung. Verständlicherweise können wir bei der Frage, wie sich der Limes einer Folge von Lipschitz-Algebren verhält, nicht mehr erwarten, dass uns der inverse Limes weiterhilft. Deswegen betrachten wir — zumindest für den kommutativen Fall — den direkten Limes von Lipschitz-Algebren; den inversen Limes benötigen wir aber, wann immer wir uns auf Ebene von kompakten (metrischen) Räumen K selbst und nicht in den ihnen zugeordneten kompakten quantenmetrischen Räumen $(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ bewegen, in völliger Analogie zur Benutzung des direkten Limes in Satz 3.1 auf Seite 60. Beides — das Betrachten von direkten Limites bei kommutativen kompakten quantenmetrischen Räumen und von inversen Limites auf Ebene von kompakten Räumen — geschieht in Kapitel 5. Insofern bietet der Rest der Arbeit einen am kommutativen Fall orientierten Ausblick, wie die Behandlung der Approximation von Lipschitz-Algebren beziehungsweise kompakten quantenmetrischen Räumen durch den direkten Limes endlichdimensionaler derartiger Objekte aussehen kann.

KAPITEL 4

Der vollständig positive Entropie-Index

In Abschnitt 1 dieses Kapitels definieren wir zunächst den vollständig positiven Entropie-Index für Lipschitz-Algebren $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$. Dieser benutzt vollständig positive, unital und isometrische Abbildungen $\varphi : F \rightarrow A$ von einer C^* -Algebra F und ist abhängig von der Klasse \mathfrak{K} von C^* -Algebren, welche als Urbilder für φ zugelassen sind, etwa die Klasse **Fin** aller endlichdimensionalen C^* -Algebren, das heißt aller direkten Summen von Matrix-Algebren, die Klasse **kFin** aller endlichdimensionalen kommutativen C^* -Algebren oder die Klasse **Mat** aller Matrix-Algebren. Die jeweilige Klasse \mathfrak{K} wird als Index links oben angegeben werden, etwa durch ${}^{\mathfrak{K}}\text{vpei}$ beim Entropie-Index.

Wie bereits angemerkt kann dieser auch im Falle einfacher C^* -Algebren A definiert und endlich sein. Diese scheinbar größere Allgemeinheit erkaufen wir uns aber auf Kosten einer (durchaus erträglichen) Einschränkung im Kommutativen: Nicht mehr für alle kompakten metrischen Räume (K, ρ) stimmt (wie noch im Falle des multiplikativen Entropie-Index) der vollständig positive Entropie-Index ${}^{\text{kFin}}\text{vpei}(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ mit dem unteren Entropie-Index von K überein, sondern nur noch für Kompakta mit einer gewissen Zusatz-Eigenschaft, der so genannten Verdoppelungs-Eigenschaft. Diese ist aber für die am häufigsten betrachteten kompakten metrischen Räume gewährleistet.

Danach betrachten wir in Abschnitt 2 lineare Abbildungen $\psi : A \rightarrow F$ und vollständig positive, unital und isometrische Abbildungen $\varphi : F \rightarrow A$ gemeinsam, um einen Index zu erhalten, der eine weitere nicht-kommutative Verallgemeinerung des unteren Entropie-Index darstellt. Diese werden wir hier aber nicht weiter verfolgen.

Im darauffolgenden Abschnitt nehmen wir uns kommutativen kompakten quantenmetrischen Räumen $(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ an und betten diese in einen größeren Zusammenhang ein: Wir betrachten $C(K)$ als Teilmenge des Hilbertraumes $\mathcal{H} = L^2(K, \mu)$ für ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ und nehmen an, dass auf $C(K)$ eine L^2 -Derivation d existiert. Dies gestattet es uns, auf K einen Laplace-Operator $\Delta = d^*d$ zu definieren. Dessen Spektrum hängt stark mit der Beschaffenheit des zugrunde liegenden Kompaktums K zusammen. Auf diesen erstmals von Hermann Weyl geknüpften Zusammenhang gehen wir in der Folge ein und definieren für K eine „spektrale Dimension“, die wir danach mit unserem vollständig positiven Entropie-Index vergleichen, was wir ausführlich an Beispielen diskutieren.

1. Definition und Eigenschaften des vollständig positiven Entropie-Index

Wir erinnern zunächst an den Begriff der vollständigen Positivität: Eine lineare Abbildung $\varphi : A \rightarrow B$ zwischen zwei C^* -Algebren A, B heißt **positiv**, falls $\varphi(a) \geq 0$ für alle $0 \leq a \in A$ gilt. Sie heißt **n-positiv**, falls die Abbildung $\varphi_n : M_n(A) \rightarrow M_n(B)$, $(a_{ij})_{ij} \mapsto (\varphi(a_{ij}))_{ij}$ positiv ist, und **vollständig positiv**, falls sie n -positiv für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

4.1. DEFINITION. Gegeben seien eine Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, $\varepsilon > 0$ und eine C^* -Algebra F aus einer Klasse von C^* -Algebren \mathfrak{K} .

Für eine vollständig positive, unitale und isometrische Abbildung $\varphi : F \rightarrow A$ setzen wir

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &:= \sup_{a \in \mathcal{A}^1} \inf_{c \in F} \|a - \varphi(c)\|_A, \\ \mathfrak{K}N'_\varepsilon &= \mathfrak{K}N'_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) \\ &:= \inf\{\text{kdim}(F) \mid \exists \varphi : F \rightarrow A \text{ vollst. positiv, unital, isometr., } F \in \mathfrak{K}, \varepsilon_\varphi \leq \varepsilon\}, \\ \mathfrak{K}\text{vpei} &= \mathfrak{K}\text{vpei}(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mathfrak{K}N'_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

und nennen ε_φ **Feinheit** von φ und $\mathfrak{K}\text{vpei}$ **vollständig positiven Entropie-Index** der Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ bezüglich \mathfrak{K} .

4.2. BEMERKUNG. (a) Gilt für zwei Klassen \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 von C^* -Algebren $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}_2$, so folgt offensichtlich $\mathfrak{K}_2 N'_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) \leq \mathfrak{K}_1 N'_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ und $\mathfrak{K}_2 \text{vpei} \leq \mathfrak{K}_1 \text{vpei}$.

(b) Wie der erste multiplikative Entropie-Index gibt auch der vollständig positive Entropie-Index eine Operatornorm wieder, nämlich die der Quotienten-Abbildung $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) \rightarrow (A/\text{Im}(\varphi), \|\cdot\|_{A/\text{Im}(\varphi)})$. Die Idee, den vollständig positiven Entropie-Index mit Hilfe dieser Normen zu definieren, geht auf Jürgen Schweizer zurück. Dies gilt ebenso für die Größe $\varepsilon_{\psi, \varphi}$ aus Definition 4.10.

(c) Wir möchten an dieser Stelle noch einige Bemerkungen zu (vollständig) positiven Abbildungen $\varphi : A \rightarrow B$ zwischen zwei C^* -Algebren anbringen. Ist die Abbildung φ positiv, so ist sie auch $*$ -treu; ist sie zusätzlich unital, so folgt deren Stetigkeit, siehe etwa [4] (Lemma 2.10). Betrachten wir nun eine positive Abbildung φ und ist A oder B eine kommutative C^* -Algebra, so ist φ schon vollständig positiv, vergleiche [62], [63]. Dies ist auch ein Grund, weshalb wir von vorne herein vollständig positive anstatt nur positive Abbildungen betrachten: Vollständige Positivität kann als geeignete Verallgemeinerung der Positivität ins Nicht-Kommutative angesehen werden. Außerdem besitzen positive Abbildungen im Vergleich zu vollständig positiven nur wenige günstige Eigenschaften. In [62] werden beispielsweise die vollständig positiven Abbildungen $\varphi : A \rightarrow B$ charakterisiert: Sind (π_A, \mathcal{H}_A) und (π_B, \mathcal{H}_B) Darstellungen von A und B , so kann φ als Faktorisierung der Form $\varphi = c_v \circ \pi_A$ geschrieben werden, wobei $c_v : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$, $x \mapsto v^* x v$ die Konjugation mit einem linearen beschränkten Operator $v : \mathcal{H}_B \rightarrow \mathcal{H}_A$ ist, welcher $v^* \pi_A(A) v \subset B$

erfüllt, und jede derartige Faktorisierung ist vollständig positiv. Diese Aussage wird als **Satz von Stinespring** bezeichnet. Für nur positives φ ist eine derartige Charakterisierung nicht möglich.

Mit dem vollständig positiven Entropie-Index haben wir eine Invariante für Lipschitz-Algebren gefunden, analog zur entsprechenden Aussage für die multiplikativen Entropie-Indizes, vergleiche Satz 2.18.

4.3. SATZ. Seien $(A_1, \mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1})$ und $(A_2, \mathcal{A}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2})$ zwei isomorphe Lipschitz-Algebren mit Isomorphismus $\gamma : (A_1, \mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1}) \rightarrow (A_2, \mathcal{A}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2})$. Dann gilt für die Konstanten $c_1, c_2 > 0$ mit $c_1 \|a\|_{\mathcal{A}_1} \leq \|\gamma(a)\|_{\mathcal{A}_2} \leq c_2 \|a\|_{\mathcal{A}_1}$ für alle $a \in \mathcal{A}_1$ und jede Klasse \mathfrak{K} von C^* -Algebren die Abschätzung

$$\mathfrak{K}N'_{c_2\varepsilon}(A_1, \mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1}) \leq \mathfrak{K}N'_\varepsilon(A_2, \mathcal{A}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2}) \leq \mathfrak{K}N'_{c_1\varepsilon}(A_1, \mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1}).$$

Insbesondere ist $\mathfrak{K}\text{vpei}(A_1, \mathcal{A}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_1}) = \mathfrak{K}\text{vpei}(A_2, \mathcal{A}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{A}_2})$.

BEWEIS. Mit derselben Argumentation wie in Satz 2.18 sehen wir, dass jede vollständig positive, unitale und isometrische Abbildung $\varphi_1 : F \rightarrow A_1$ eine Abbildung $\varphi_2 : F \rightarrow A_2$ mit denselben Eigenschaften induziert, nämlich $\varphi_2 := \gamma \circ \varphi_1$, und von eben dieser Abbildung via $\varphi_1 = \gamma^{-1} \circ \varphi_2$ induziert wird, weil γ ebenfalls alle Eigenschaften besitzt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi_1} &= \sup_{a \in \mathcal{A}_1^1} \inf_{c \in F} \|a - \varphi_1(c)\|_{A_1} = \sup_{\substack{b \in \mathcal{A}_2 \\ \gamma^{-1}(b) \in \mathcal{A}_1^1}} \inf_{c \in F} \|\gamma^{-1}(b) - \varphi_1(c)\|_{A_1} \\ &= \sup_{\substack{b \in \mathcal{A}_2 \\ \|\gamma^{-1}(b)\|_{\mathcal{A}_1} \leq 1}} \inf_{c \in F} \|\gamma(\gamma^{-1}(b) - \varphi_1(c))\|_{A_2} \leq \sup_{\substack{b \in \mathcal{A}_2 \\ \|b\|_{\mathcal{A}_2} \leq c_2}} \inf_{c \in F} \|b - \gamma \circ \varphi_1(c)\|_{A_2} \\ &= c_2 \varepsilon_{\gamma \circ \varphi_1} \end{aligned}$$

und ebenso $\varepsilon_{\varphi_2} \leq \frac{1}{c_1} \varepsilon_{\gamma^{-1} \circ \varphi_2}$, woraus die Behauptung folgt. \square

Unser nächstes Ziel ist es zu beweisen, dass der vollständig positive Entropie-Index $\text{kFinvpei}(C(K), \text{Lip}(K), \text{Lip}(\cdot))$ für einen kompakten metrischen Raum (K, ρ) tatsächlich mit dem unteren Entropie-Index $\text{lei}(K)$ übereinstimmt (— zumindest für kompakte metrische Räume mit der Verdoppelungs-Eigenschaft). Dies werden wir in Theorem 4.8 tun, in welchem wir Abbildungen der Form

$$\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow C(K), \quad a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \mapsto \varphi(a)$$

für die Standardbasis $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ von \mathbb{C}^n betrachten. Hierbei fassen wir \mathbb{C}^n als kommutative C^* -Algebra mit komponentenweisen Verknüpfungen auf. Es ist grundsätzlich nicht sinnvoll zu fordern, dass φ wie π in Kapitel 2 ein $*$ -Homomorphismus sein soll, denn dann würde sich die Eigenschaft $e_i = (e_i)^2 = e_i^*$ der Einheitsvektoren $e_i \in \mathbb{C}^n$ auf $\varphi(e_i) \in C(K)$ übertragen, und nur die Nullfunktion auf ganz K oder charakteristische Funktionen auf einer Zusammenhangskomponente von K besitzen diese Eigenschaft. Wir haben daher an φ abgeschwächte Bedingungen gestellt und verlangt, dass $\varphi : (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ vollständig positiv, unital und isometrisch ist. (Die ersten beiden Eigenschaften besitzen auch $*$ -Homomorphismen; die Isometrie-Eigenschaft

zu fordern, welche die Injektivität von φ impliziert, ist vernünftig, weil sonst Funktionen auf verschiedene Arten gut approximiert werden können, was ein Zeichen dafür ist, dass die Dimension n des Urbildraumes künstlich hoch gehalten wird.) Wir geben zunächst eine Charakterisierung dieser Eigenschaft.

4.4. LEMMA. *Gegeben seien ein kompakter Hausdorff-Raum K und eine (vollständig) positive und unital Abbildung $\varphi : (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C(K), \|\cdot\|_\infty)$. Es sei $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ die Darstellung eines Vektors $a \in \mathbb{C}^n$ bezüglich der Standardbasis. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig.*

- (i) φ ist isometrisch und ein Ordnungsisomorphismus auf das Bild von φ .
- (ii) φ ist isometrisch.
- (iii) $\|\varphi(e_1)\|_\infty = \dots = \|\varphi(e_n)\|_\infty = 1$.
- (iv) Es gibt einen $*$ -Homomorphismus $\pi : C(K) \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit $\pi \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$.

BEWEIS. (i) \Rightarrow (ii): Diese Implikation ist offensichtlich.

(ii) \Rightarrow (iii): Es gilt $\|\varphi(e_i)\|_\infty = \|e_i\|_\infty = 1$.

(iii) \Rightarrow (iv): Für $1 \leq i \leq n$ sei $x_i \in K$ mit $\varphi(e_i)(x_i) = 1$. Weil φ unital ist, ist $\varphi(e_i)(x_j) = \delta_{ij}$. Wir setzen $\pi : C(K) \rightarrow \mathbb{C}^n$, $f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_n))$. Dann gilt für $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in \mathbb{C}^n$

$$\pi \circ \varphi(a) = \pi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(e_i) \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \pi(\varphi(e_i)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \underbrace{\varphi(e_i)(x_j)}_{\delta_{ij}} e_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = a.$$

(iv) \Rightarrow (i): Es gilt

$$\|a\|_\infty = \|\pi \circ \varphi(a)\|_\infty \leq \|\varphi(a)\|_\infty \leq \|a\|_\infty,$$

weil π als $*$ -Homomorphismus zwischen unitalen C^* -Algebren mit $\pi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ kontraktiv ist, und weiter $\mathbf{0} \leq \varphi(a) \Rightarrow \mathbf{0} \leq \pi \circ \varphi(a) = a$, weil π als $*$ -Homomorphismus zwischen kommutativen C^* -Algebren (vollständig) positiv ist. \square

Wir geben ein Beispiel für eine derartige Abbildung φ .

4.5. BEISPIEL. Wir betrachten das Einheitsintervall $K = [0, 1]$ als Kompaktum und zerlegen es in $n - 1$ Teilintervalle durch die Punkte $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$.

Wir definieren φ wie folgt:

$$\begin{aligned} \varphi(e_1)(x) &:= \begin{cases} -\frac{1}{x_2-x_1}x + 1 & \text{für } x \in [x_1, x_2[\\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \varphi(e_i)(x) &:= \begin{cases} \frac{1}{x_i-x_{i-1}}x - \frac{x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{für } x \in [x_{i-1}, x_i[\\ -\frac{1}{x_{i+1}-x_i}x + \frac{x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i} & \text{für } x \in [x_i, x_{i+1}[\\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } 2 \leq i \leq n-1 \\ \varphi(e_n)(x) &:= \begin{cases} \frac{1}{x_n-x_{n-1}}x - \frac{x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} & \text{für } x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

In Abbildung 17 ist $\varphi(e_i)$, $1 \leq i \leq 5$, für ungerade i gepunktet beziehungsweise gestrichelt und für gerade i als durchgezogene Linie dargestellt.

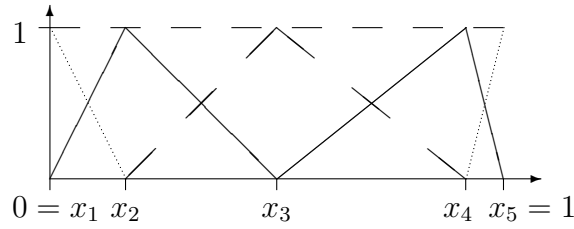


ABBILDUNG 17. Beispiel für eine vollständig positive, unitale, isometrische Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow C([0, 1])$.

Die Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow C(K)$, $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \mapsto \varphi(a) := \alpha_i \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)$ ist dann vollständig positiv, unital und isometrisch nach Lemma 4.4.

Betrachten wir nun eine stetige Funktion f auf $K = [0, 1]$, dann liefert $\varphi(a)$ genau die in Abbildung 9 auf Seite 52 beschriebene Approximation an f durch eine stückweise affine Funktion, wenn wir in $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ für α_i den Funktionswert von f in x_i einsetzen, also $a = \pi(f)$ benutzen, wobei π die Punktauswertung in den n Punkten x_1, \dots, x_n ist. Die Größe ε_φ misst daher, wie gut diese Approximation für alle genügend glatten Funktionen ist. Entledigen wir uns noch der speziellen Wahl von φ , was der Lage der Stützstellen in $K = [0, 1]$ entspricht, so ist zu erwarten, dass die daraus resultierende Größe ${}^{\text{kFin}}N'_\varepsilon(C([0, 1]), Lip([0, 1]), Lip(\cdot))$ mit dem Entropie-Index zusammenhängt.

Wir kehren nun zum allgemeinen kommutativen Fall zurück. Wie angekündigt gelingt es uns nicht zu zeigen, dass für allgemeine kompakte metrische Räume $\text{lei}(K) = {}^{\text{kFin}}\text{vpei}(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ gilt. Zeigen lässt sich die Aussage dennoch für die in der folgenden Definition beschriebene große Klasse von Räumen, die alle wichtigen Beispiele enthält.

4.6. DEFINITION (vgl. [29] (B.2.3)). *Man sagt, ein metrischer Raum (K, ρ) besitzt die **Verdoppelungs-Eigenschaft** (engl. „doubling property“), wenn es eine Konstante $U \in \mathbb{N}$ gibt, so dass jede Kugel B in K von höchstens U Kugeln überdeckt werden kann, die als Radius den halben Radius von B besitzen. Die kleinste derartige Konstante heißt in diesem Falle **Verdoppelungs-Konstante** für (K, ρ) .*

Dies ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn es eine Konstante \tilde{U} gibt, so dass jede Kugel B in K von höchstens \tilde{U} Teilmengen von K überdeckt werden kann, die einen Durchmesser besitzen, der höchstens so groß wie der Radius von B ist. Besitzt ein Raum die Verdoppelungs-Eigenschaft, so auch jeder Unterraum.

Die Verdoppelungs-Eigenschaft für einen metrischen Raum oder allgemeiner die Verdoppelungs-Eigenschaft für ein positives Borel-Maß μ auf einem metrischen Raum (K, ρ) — das ist ein Maß, für das zusätzlich eine Konstante $U > 0$ mit $\mu(B_r(x)) \leq U\mu(B_{\frac{1}{2}r}(x))$ für alle $x \in K$ und alle $r > 0$ existiert — spielen in der geometrischen Maßtheorie eine wichtige Rolle. Existiert auf einem metrischen Raum (K, ρ) ein Maß mit der Verdoppelungs-Eigenschaft, so besitzt (K, ρ) automatisch die Verdoppelungseigenschaft, siehe etwa [29] (B.3.4). In derartigen Räumen gelingen gewisse analytische Überlegungen, welche in rein metrischen Räumen oder reinen Maßräumen nicht angewendet werden können, siehe etwa [29] (B.8), [42]. Als Beispiel für ein Maß mit der

Verdoppelungs-Eigenschaft wollen wir an dieser Stelle das Lebesgue-Maß auf einem euklidischen Raum erwähnen. Die Verdoppelungseigenschaft in metrischen Räumen (K, ρ) dient dazu, die Geometrie von Objekten in K , welche in verschiedenen Größenordnungen und an verschiedenen Stellen betrachtet werden, zu vergleichen, wie Semmes in [29] (B.2) schreibt, und kann somit als zur Eigenschaft der Selbstähnlichkeit von Objekten in K verwandt angesehen werden.

Bevor wir für kompakte metrische Räume (K, ρ) mit der Verdoppelungs-Eigenschaft zeigen, dass $\text{lei}(K) = {}^{\text{kFin}}\text{vpei}(C(K), \text{Lip}(K), \text{Lip}(\cdot))$ gilt, beweisen wir ein Lemma, das wir dafür benötigen.

4.7. LEMMA (vgl. [29] (B.7.3)). *Seien $s, \varepsilon > 0$ und (K, ρ) ein metrischer Raum mit der Verdoppelungs-Eigenschaft und Verdoppelungs-Konstante U . Ist $\{x_1, \dots, x_n\} \subset K$ ε -separiert, dann gibt es eine Konstante $C = C(s, U)$ derart, dass kein Punkt x in K in mehr als $C(s)$ Kugeln aus der Menge $\{B_{s\varepsilon}(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ liegt.*

BEWEIS. Seien $x \in K$ und $Y := \{x_1, \dots, x_n\} \cap B_{s\varepsilon}(x)$. Dann ist Y ε -separiert. Es gilt $\frac{s\varepsilon}{2^n} \leq \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(s+1)}{\ln 2}$. Wir setzen $m := \left\lceil \frac{\ln(s+1)}{\ln 2} \right\rceil + 1$. Dann impliziert die iterierte (m -fache) Anwendung der Verdoppelungs-Eigenschaft für K , dass $B_{s\varepsilon}(x)$ von höchstens $C(s, U) := U^m$ Kugeln vom Radius $\frac{\varepsilon}{2}$ überdeckt werden kann, und jede dieser Kugeln enthält höchstens einen der Punkte aus Y wegen der ε -Separiertheit von Y . Also enthält $Y \subset B_{s\varepsilon}(x)$ höchstens $C(s, U)$ Elemente. \square

4.8. THEOREM. *Für einen kompakten metrischen Raum (K, ρ) mit der Verdoppelungs-Eigenschaft gilt für die Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = (C(K), \text{Lip}(K), \text{Lip}(\cdot))$ die Ungleichung*

$$\begin{aligned} \text{lei}(K) &= {}^{\text{kFin}}\text{vpei}(C(K), \text{Lip}(K), \text{Lip}(\cdot)) \geq {}^{\text{Mat}}\text{vpei}(C(K), \text{Lip}(K), \text{Lip}(\cdot)) \\ &\geq {}^{\text{Fin}}\text{vpei}(C(K), \text{Lip}(K), \text{Lip}(\cdot)). \end{aligned}$$

BEWEIS. Wir zeigen die Abschätzung $M_{2C\varepsilon}^{\mu}(K) \leq {}^{\text{kFin}}N'_{C\varepsilon}(C(K), \text{Lip}(K), \text{Lip}(\cdot)) \leq M_{\varepsilon}(K)$. Damit kann ${}^{\text{kFin}}N'_{\varepsilon}(C(K), \text{Lip}(K), \text{Lip}(\cdot))$ nach oben und unten durch Größen abgeschätzt werden, die in Formel (9) auf Seite 40 anstelle von etwa $N_{\varepsilon}(K)$ eingesetzt den Entropie-Index liefern, und daher liefert auch ${}^{\text{kFin}}N'_{\varepsilon}(C(K), \text{Lip}(K), \text{Lip}(\cdot))$ in diese Formel eingesetzt den Entropie-Index.

(i) Wir zeigen zunächst $M_{2\varepsilon}^{\mu}(K) \leq {}^{\text{kFin}}N'_{\varepsilon}$. Seien $\delta > 0$, $F \in \text{kFin}$, also $F = \mathbb{C}^n$ für eine natürliche Zahl n , und $\varphi : F = \mathbb{C}^n \rightarrow C(K)$ vollständig positiv, unital, isometrisch. Dann gibt es zu jeder lipschitzstetigen Funktion f mit $\text{Lip}(f) \leq 1$ einen Vektor $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in \mathbb{C}^n$ mit $\|f - \varphi(a)\|_{\infty} = \|f - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(e_i)\|_{\infty} \leq \varepsilon_{\varphi} + \delta$.

Wir wählen $\{x_1, \dots, x_n\}$ mit $\varphi(e_j)(x_i) = \delta_{ij}$, was nach in Lemma 4.4 möglich ist, denn wegen $\|\varphi(e_j)\|_{\infty} = 1$ existiert zunächst ein Punkt $x_j \in K$ mit $|\varphi(e_j)(x_j)| = 1$, aus der Positivität von φ und $e_j \geq \mathbf{0}$ folgt $\varphi(e_j)(x_j) = 1$, und schließlich das Gewünschte aus der Unitalität von φ . Wir bezeichnen mit $\pi : C(K) \rightarrow \mathbb{C}^n$ die Punktauswertung in diesen n Punkten. Seien $x \in K$ und $r > 0$ so gewählt, dass $B_r(x) \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \emptyset$. Wir definieren die Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \max\{0, r - \rho(x, z)\}$. Dann ist f lipschitzstetig mit Lipschitz-Halbnorm 1, und weiter gelten $\|f\|_{\infty} = r$ und $f(x_i) = 0$ für $1 \leq i \leq n$. Wir erhalten

$$\varepsilon_{\varphi} + \delta \geq \|f - \varphi(a)\|_{\infty} \geq \left| f(x_i) - \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi(e_j)(x_i) \right| = |0 - \alpha_i| = |\alpha_i|$$

und aufgrund der Isometrie von φ

$$\begin{aligned} r = \|f\|_\infty &\leq \left\| f - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(e_i) \right\|_\infty + \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(e_i) \right\|_\infty \leq \varepsilon_\varphi + \delta + \left\| \varphi \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right) \right\|_\infty \\ &= \varepsilon_\varphi + \delta + \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\|_\infty = \varepsilon_\varphi + \delta + \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i| \leq 2(\varepsilon_\varphi + \delta). \end{aligned}$$

Folglich gilt für die Maschenweite $\mu_\pi \leq 2\varepsilon_\varphi$ wegen der Beliebigkeit von $\delta > 0$ und damit $M_{2\varepsilon}^\mu(K) \leq {}^{\text{kFin}}N_{C\varepsilon}'(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$.

(ii) Sei umgekehrt $\{x_1, \dots, x_{M_\varepsilon(K)}\}$ eine maximale ε -separierte Teilmenge in K . Wir konstruieren nun eine vollständig positive, unitale und isometrische Abbildung $\varphi_0 : F := \mathbb{C}^{M_\varepsilon(K)} \rightarrow C(K)$ mit $\varepsilon_{\varphi_0} \leq C\varepsilon$ für eine nur von der Verdoppelungs-Konstanten U für (K, ρ) abhängigen Konstanten C und erhalten ${}^{\text{kFin}}N_{C\varepsilon}'(C(K), Lip(K), Lip(\cdot)) \leq M_\varepsilon(K)$.

Wir setzen $\phi(e_i) : K \rightarrow \mathbb{C}$ fest durch $\phi(e_i)(x) := \max\{0, \varepsilon - \rho(x, x_i)\}$ für alle $x \in K$ und $1 \leq i \leq M_\varepsilon(K)$. Dann gilt $K \subset \bigcup_{i=1}^{M_\varepsilon(K)} B_\varepsilon(x_i)$, denn gäbe es ein $x \in K$, welches nicht in dieser Vereinigung liegt, wäre $\rho(x, x_i) \geq \varepsilon$ für alle $i \in \{1, \dots, M_\varepsilon(K)\}$, was einen Widerspruch zur Maximalität der Menge $\{x_1, \dots, x_{M_\varepsilon(K)}\}$ darstellt. Damit ist die Festlegung

$$\varphi_0(e_i)(x) := \frac{\phi(e_i)(x)}{\sum_{i=1}^{M_\varepsilon(K)} \phi(e_i)(x)}$$

wohldefiniert, denn $\sum_{i=1}^{M_\varepsilon(K)} \phi(e_i)(x) \neq 0$ für alle $x \in K$. Dann ist die Abbildung $\varphi_0 : \mathbb{C}^{M_\varepsilon(K)} \rightarrow C(K)$, $a = \sum_{i=1}^{M_\varepsilon(K)} \alpha_i e_i \rightarrow \alpha_i \sum_{i=1}^{M_\varepsilon(K)} \varphi_0(e_i)$ nach Konstruktion linear, unital, vollständig positiv und isometrisch nach Lemma 4.4 wegen $\varphi_0(e_i)(x_j) = \delta_{ij}$ aufgrund von $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ für $i, j \in \{1, \dots, M_\varepsilon(K)\}$ und $i \neq j$.

Sind $x \in K$ und $f \in Lip(K)$ mit $Lip(f) \leq 1$ beliebig, so gilt für $a_0 := \sum_{i=1}^{M_\varepsilon(K)} f(x_i) e_i$

$$\begin{aligned} |f(x) - \varphi_0(a_0)(x)| &= \left| f(x) \underbrace{\sum_{i=1}^{M_\varepsilon(K)} \varphi_0(e_i)(x)}_{=1} - \sum_{i=1}^{M_\varepsilon(K)} f(x_i) \varphi_0(e_i)(x) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{M_\varepsilon(K)} ((f(x) - f(x_i)) \varphi_0(e_i)(x)) \right| \end{aligned}$$

aufgrund der Unitalität von φ_0 . Ist $\varphi_0(e_i)(x) \neq 0$, so gilt $x \in B_\varepsilon(x_i)$, und dies kann nach Lemma 4.7 nur für eine durch eine Konstante $C = C(1, U) = U^2$ begrenzte Anzahl von Indizes geschehen. (Wir können sogar $C = U$ setzen.) Für jeden solchen Index gilt $|f(x) - f(x_i)| \leq \varepsilon$ wegen der Lipschitzstetigkeit von f , also auch

$$|f(x) - \varphi_0(a_0)(x)| \leq \sum_{i=1}^{M_\varepsilon(K)} (|f(x) - f(x_i)| \varphi_0(e_i)(x)) \leq \sum_{i=1}^{M_\varepsilon(K)} (\varepsilon \cdot \varphi_0(e_i)(x)) \leq C \cdot \varepsilon.$$

Es folgt ${}^{\text{kFin}}N_{C\varepsilon}'(C(K), Lip(K), Lip(\cdot)) \leq M_\varepsilon(K)$ aufgrund der speziellen Wahl von $a_0 \in \mathbb{C}^n$ und der Beliebigkeit von $x \in K$ und $f \in Lip(K)$ mit $Lip(f) \leq 1$. Damit ist die Gleichheit $\text{lei}(K) = {}^{\text{kFin}}\text{vpei}(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ gezeigt.

(iii) Die übrigen Abschätzungen ergeben sich aus Teil (ii) beziehungsweise Bemerkung 4.2 (a), und das Theorem ist bewiesen. \square

BEMERKUNG. Teil (ii) im eben geführten Beweis ist mit einigen Anpassungen [29] (B.7.4, B.7.8) entnommen.

4.9. BEMERKUNG. Natürlich gilt ${}^{\mathfrak{R}}\text{vpei}(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = 0$, falls $A \in \mathfrak{K}$. Allerdings ist etwa für $A \in \text{Fin}$ oder $A \in \text{Mat}$ nicht ohne weiteres klar, ob ${}^{\text{kFin}}\text{vpei}(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = 0$ gilt, unabhängig von der Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$, wie dies für die multiplikativen Entropie-Indizes der Fall gewesen ist, für die $\text{mei}(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = 0$ für jede endlichdimensionale Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ galt, wie vor Lemma 2.14 beziehungsweise nach Lemma 2.25 diskutiert wurde. Hierzu müssten nämlich vollständig positive, unitale und isometrische Abbildungen konstruiert werden, was keineswegs eine triviale Aufgabe darstellt. Hingegen erhalten wir mit einer ähnlichen Überlegung ${}^{\text{Mat}}\text{vpei}(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = 0$ für eine Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ mit $A \in \text{Fin}$, indem wir $F = M_k(\mathbb{C})$ und $\varphi = \text{id}_{M_k(\mathbb{C})}$ setzen, falls $A \cong \bigoplus_{i=1}^m M_{n_i}(\mathbb{C})$ mit $k := \sum_{i=1}^m n_i$ gilt.

2. Verknüpfung linearer und vollständig positiver Abbildungen

In diesem Abschnitt betrachten wir lineare Abbildungen $\psi : A \rightarrow F$ von der C^* -Algebra A einer Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ in eine C^* -Algebra F und vollständig positive, unitale und isometrische Abbildungen φ in umgekehrter Richtung gemeinsam. Wir beachten, dass wir hier nicht wie bei der Definition des multiplikativen Entropie-Index $*$ -Homomorphismen π von A in F benötigen, sondern mit linearen Abbildungen ψ auskommen. Dennoch können wir aus den eben angegebenen Daten einen Index definieren, welcher wieder von der als Urbilder für φ zugelassenen Klasse \mathfrak{K} von C^* -Algebren F abhängt. Dieser Index stimmt im kommutativen Fall für $\mathfrak{K} = \text{kFin}$ wie der vollständig positive Entropie-Index mit dem unteren Entropie-Index für kompakte metrische Räume mit der Verdoppelungs-Eigenschaft überein. Der Index — welchem wir keinen eigenen Namen geben wollen, weil wir ihn im Folgenden nicht mehr betrachten werden — lässt sich mit Hilfe der folgenden Größen beschreiben.

4.10. DEFINITION. Gegeben seien eine Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ und $\varepsilon > 0$. Für ein Paar (ψ, φ) mit einer linearen Abbildung $\psi : A \rightarrow F$ und einer vollständig positiven, unitalen und isometrischen Abbildung $\varphi : F \rightarrow A$ mit $F \in \mathfrak{K}$ für eine Klasse von C^* -Algebren \mathfrak{K} definieren wir die Größen

$$\varepsilon_{\psi, \varphi} := \sup_{a \in \mathcal{A}^1} \|a - \varphi \circ \psi(a)\|_A$$

$${}^{\mathfrak{K}}\tilde{N}_{\varepsilon} = {}^{\mathfrak{K}}\tilde{N}_{\varepsilon}(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$$

$$:= \inf \{ \text{kdim}(F) \mid \exists \varphi : F \rightarrow A \text{ vollständig positiv, unital und isometrisch,} \\ \exists \psi : A \rightarrow F \text{ linear, } F \in \mathfrak{K}, \varepsilon_{\psi, \varphi} \leq \varepsilon \}$$

und bezeichnen $\varepsilon_{\psi, \varphi}$ als **Güte** des Paares (ψ, φ) .

4.11. BEMERKUNG. Die Güte von (ψ, φ) ist genau die Operatornorm der linearen Abbildung $\text{id}_A - \psi \circ \varphi : (\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) \rightarrow (A, \|\cdot\|_A)$. Es lässt sich durch genauso einfache Rechnungen wie in den Beweisen der Sätze 2.18 und 4.3 zeigen, dass die Größe

$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mathfrak{R} \tilde{N}_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ eine Invariante unter Isomorphismen von Lipschitz-Algebren darstellt.

Wir wollen nun die Betrachtungen, welche wir bisher für lineares π aus Abschnitt 2 in Kapitel 2 und für das φ aus Abschnitt 1 dieses Kapitels separat angestellt haben, koppeln. Einen ersten Schritt dazu haben wir in Lemma 4.4 schon getan. Dort haben wir bereits festgestellt, dass zu jeder vollständig positiven, unitalen und isometrischen Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow C(K)$ ein $*$ -Homomorphismus $\pi : C(K) \rightarrow \mathbb{C}^n$ existiert mit $\pi \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$. Wir können uns nun umgekehrt die Frage stellen, welche Bedeutung $\varphi \circ \pi$ zukommt. Dazu betrachten wir nochmals die in Beispiel 4.5 erwähnten speziellen Abbildungen φ auf dem Einheitsintervall. Dort definieren wir $\pi(f)$ für $f \in C(K)$ als Punktauswertung in den Punkten x_1, \dots, x_n , also $\pi(f) := (f(x_1), \dots, f(x_n))$. Damit ist $\varphi \circ \pi(f)$ genau die stückweise affine Approximationsfunktion für f , die in den Auswertungspunkten von π mit f übereinstimmt. Wir können $\varphi \circ \pi$ demnach deuten als Approximation von $\text{id}_{C(K)}$ durch einen Operator von endlichem Rang, und die in Definition 4.10 erklärte Güte $\varepsilon_{\pi, \varphi}$ des Paares (π, φ) ist genau die Operatornorm der Abbildung $\text{id}_{C(K)} - \varphi \circ \pi : (Lip(K), Lip(\cdot)) \rightarrow (C(K), \|\cdot\|_\infty)$, beschreibt also, wie gut diese Approximation für genügend glatte Funktionen ist.

Statt $*$ -Homomorphismen π können wir nun beliebige lineare Abbildungen ψ von $C(K)$ nach \mathbb{C}^n betrachten. Dies ist ohnehin günstiger, denn im Falle allgemeiner, nicht notwendig kommutativer C^* -Algebren brauchen $*$ -Homomorphismen, wie bereits erwähnt, nicht zu existieren. Die Definition der Größe $\mathfrak{R} \tilde{N}_\varepsilon$ befreit uns wieder von der Abhängigkeit der Approximation von der speziellen Wahl des Paares (ψ, φ) , hängt also nach der Diskussion im Anschluss an Bemerkung 2.22 in Abschnitt 2 von Kapitel 2 nur noch von der Dimension von K ab. Tatsächlich gilt das folgende Theorem.

4.12. THEOREM. Für jede Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ gilt

$$\mathfrak{R} \text{vpei}(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mathfrak{R} \tilde{N}_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Für einen kompakten metrischen Raum (K, ρ) mit der Verdoppelungs-Eigenschaft gilt für die Lipschitz-Algebra $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = (C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} \text{lei}(K) &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \text{kFin} \tilde{N}_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \text{Mat} \tilde{N}_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \text{Fin} \tilde{N}_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

BEWEIS. (i) Für $F \in \mathfrak{K}$, $\varphi : F \rightarrow A$ vollständig positiv, unital, isometrisch und $\psi : A \rightarrow F$ linear gilt

$$\varepsilon_{\psi, \varphi} = \sup_{a \in \mathcal{A}^1} \|a - \varphi \circ \psi(a)\|_A \geq \sup_{a \in \mathcal{A}^1} \inf_{c \in F} \|a - \varphi(c)\|_A = \varepsilon_\varphi$$

und folglich $\mathfrak{R} \tilde{N}_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) \geq \mathfrak{R} N'_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$.

(ii) Die Abschätzung von $\text{kFin} \tilde{N}_\varepsilon(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ nach oben können wir fast wörtlich aus Teil (ii) des Beweises von Theorem 4.8 übernehmen, wenn wir die Größe $\text{kFin} N'_\varepsilon(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ durch $\text{kFin} \tilde{N}_\varepsilon(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ ersetzen: Wir konstruieren zusätzlich zu φ_0 eine lineare Abbildung $\psi_0 : C(K) \rightarrow \mathbb{C}^n$ durch $\psi_0(f) :=$

$(f(x_1), \dots, f(x_n)) (= a_0)$ und ersetzen in der Argumentation im Beweis von Theorem 4.8 (ii) a_0 durch $\psi_0(f)$. Damit ergibt sich direkt $\tilde{N}_{C_\varepsilon}(C(K), Lip(K), Lip(\cdot)) \leq M_\varepsilon(K)$ für eine (von der Verdoppelungs-Konstanten für (K, ρ) abhängige) Konstante C .

Wir haben also ${}^{\text{kFin}}\tilde{N}_{C_\varepsilon}(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$ sowohl nach oben (durch $M_\varepsilon(K)$) als auch nach unten (durch ${}^{\text{kFin}}N'_{C_\varepsilon}(C(K), Lip(K), Lip(\cdot))$) durch Größen abgeschätzt, die eingesetzt in Formel (9) auf Seite 40 (statt beispielsweise $M_\varepsilon(K)$) den Entropie-Index liefern. Der Rest der Behauptung folgt aus ${}^{\mathfrak{K}_1}\tilde{N}_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A) \geq {}^{\mathfrak{K}_2}\tilde{N}_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A)$ für $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}_2$. \square

4.13. BEMERKUNG. Es ist auf jeden Fall sinnvoll zu verlangen, dass ψ (vollständig) positiv und unital ist, wenn wir uns daran erinnern, dass der Entropie-Index informationstheoretisch motiviert war. Um diese Aussage zu erläutern, betrachten wir eine spezielle Form der Informations-Übertragung beziehungsweise -Verarbeitung, nämlich das menschliche Sehen: Wir interpretieren das Kompaktum K als die Netzhaut beziehungsweise als Retina, das ist die Schicht von Photorezeptoren, Neuronen und Ganglienzellen, die die Transformation der ins Auge einfallenden Lichtintensität in Nervenimpulse bewirkt, welche ihrerseits von den Ganglienzellen über den Sehnerv in verschiedene Hirnregionen zur Weiterverarbeitung geleitet werden. Wenn wir der Einfachheit halber von bloßem Schwarz-Weiß-Sehen ausgehen, interpretieren wir weiter eine Funktion $f \in C(K)$ als Grau-Wert-Verteilung auf der Netzhaut, welche von Licht, das ins Auge fällt, herrührt. Betrachten wir zunächst wie früher Homomorphismen $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n) : C(K) \rightarrow \mathbb{C}^n$, so werten diese f in n Punkten von K aus, was dem Grau-Wert in n über die Netzhaut verteilten, diskreten und punktförmig gedachten Photorezeptoren entspricht; $\pi(f)$ ist dann die gesamte an das Gehirn gehende Information.

Nun sind Sehzellen nicht punktförmig, sondern empfindlich für den Lichteinfall auf einer ganzen Teilfläche der Netzhaut. Dies rechtfertigt, statt Homomorphismen allgemeine Abbildungen $\psi : C(K) \rightarrow \mathbb{C}^n$ zu betrachten und deren (vollständige) Positivität zu verlangen. Dann entspricht für $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ jedes $\psi_i : C(K) \rightarrow \mathbb{C}$ nämlich einem Maß auf K nach dem Darstellungssatz von Riesz (vgl. [6] (29.1)), welches wir ebenfalls mit ψ_i bezeichnen wollen, und $\psi_i(f) = \int_K f d\psi_i$ einem auf dem Träger des Maßes beziehungsweise dem Wahrnehmungsbereich eines Photorezeptors gewichteten Lichteinfall oder Grauwert.

Verlangt man zusätzlich die Unitalität von ψ , so bedeutet dies nichts anderes als zu fordern, dass das Licht, welches von einer gleichmäßig hellen Fläche, also beispielsweise von einer grau eingefärbten Wand, auf der die Farbpigmente unterhalb des Auflösungsvermögens des Auges vollständig homogen verteilt sind, in unser Auge reflektiert wird, von uns auch als gleichmäßig hell empfunden wird.

3. Entropie-Index und Asymptotik des Spektrums von Laplace-Operatoren

Wir betrachten nun die unitale C^* -Algebra $(A, \|\cdot\|_A) = (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ für einen kompakten metrischen Raum (K, ρ) in einem größeren Zusammenhang und betten diese in einen Hilbertraum \mathcal{H} ein, indem wir ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf K einführen und $\mathcal{H} := L^2(K, \mu)$ setzen. Des Weiteren nehmen wir eine L^2 -Derivation

$d : \text{Def}(d) \rightarrow \Omega$ vom Definitionsbereich $\mathcal{A} := \text{Def}(d)$ mit

$$\mathcal{A} = \text{Def}(d) \subseteq A = C(K) \subseteq \mathcal{H} = L^2(K, \mu)$$

in einen Hilbertraum Ω als gegeben an, das heißt:

4.14. DEFINITION ([61]). Sei \mathcal{A} eine dichte $*$ -Unteralgebra der unitalen C^* -Algebra A . Eine Abbildung $d : \mathcal{A} \rightarrow \Omega$ heißt **L²-Derivation**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Für $a, b \in \mathcal{A}$ und $\xi, \eta \in \Omega$ gilt

- (i) Ω ist ein unitaler A -Bimodul ($\mathbf{1}_A \cdot \xi \cdot \mathbf{1}_A = \xi$) und gleichzeitig ein Hilbertraum,
- (ii) d ist abgeschlossen, linear, und es gilt die Produktregel $d(ab) = d(a)b + ad(b)$,
- (iii) $*$ ist eine antilineare Involution mit $(a\xi b)^* = b^* \xi^* a^*$ und $d(a^*) = (d(a))^*$,
- (iv) $\|a\xi b\|_\Omega \leq \|a\|_A \cdot \|\xi\|_\Omega \cdot \|b\|_A$,
- (v) $\|\xi^*\|_\Omega = \|\xi\|_\Omega$,
- (vi) $\langle a\xi b, \eta \rangle_\Omega = \langle \xi, a^* \eta b^* \rangle_\Omega$.

4.15. BEMERKUNG. Setzen wir $\|\cdot\|_{\mathcal{A}} = \|d\cdot\|_\Omega$, dann ist $\mathcal{A} = \{a \in A \mid \|a\|_{\mathcal{A}} < \infty\}$, und wir sehen, dass es sich bei $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ um eine Lipschitz-Algebra handelt, wenn wir $\text{Ker}(\|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = \text{Ker}(\|d\cdot\|_\Omega) = \mathbb{C}\mathbf{1}_A$ voraussetzen. Dies wollen wir im Folgenden tun.

In unserem Fall ist \mathcal{A} eine $*$ -Unteralgebra von $A = C(K)$, versehen mit einer Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}} = \|d\cdot\|_\Omega$. Die Hilbertraumstruktur ist nötig, um Operatoren adjungieren zu können. Somit können wir einen Laplace-Operator $\Delta := d^*d : \text{Def}(\Delta) \rightarrow \mathcal{H}$ mit $\text{Def}(\Delta) = \{f \in \text{Def}(d) \mid df \in \text{Def}(d^*)\}$ definieren. Wir nehmen an, Δ besitze positives, rein diskretes Spektrum, bestehend aus Eigenwerten $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ mit ∞ als einzigem Häufungspunkt und gezählt mit ihrer jeweiligen Vielfachheit, mit zugehörigem Orthonormalsystem aus Eigenvektoren v_1, v_2, v_3, \dots . Das Spektrum des Laplace-Operators Δ hängt vom gewählten Wahrscheinlichkeitsmaß μ ab. Deshalb bezeichnen wir, wenn wir diese Abhängigkeit betonen wollen, den Laplace-Operator auch mit Δ_μ statt Δ . Wir betrachten also Funktionen aus $C(K)$ oder $\text{Def}(d)$ bezüglich einer schwächeren Norm als der Supremumsnorm, nämlich bezüglich der Hilbertraum-Norm in \mathcal{H} , gegeben durch $\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \|f\|_\mu^2 = \int_K |f|^2 d\mu$.

Wie Weyl in [69], [70] unter gewissen Regularitätsbedingungen gezeigt hat, hängt das Spektrum eines Laplace-Operators Δ_μ , genauer sein asymptotischen Verhalten, das heißt, die Geschwindigkeit, mit der die Eigenwerte gegen ∞ divergieren, mit der Dimension des zugrunde liegenden Kompaktums K , auf dem Δ_μ definiert ist, zusammen: Er zeigt, dass für den Laplace-Operator $\Delta = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ auf einem beschränkten Gebiet U des \mathbb{R}^n mit Dirichlet'schen Randbedingungen für $r(x) := \max\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n \leq x\}$ die Gleichung ([38] (0.1))

$$(22) \quad r(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot V^n(B_1(0)(\mathbb{R}^n)) \cdot V^n(U) \cdot x^{\frac{n}{2}} + o\left(x^{\frac{n}{2}}\right) \text{ für } x \rightarrow \infty$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnet $V^n(E)$ das n -dimensionale Volumen einer Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B_1(0)(\mathbb{R}^n)$ die Einheitskugel im \mathbb{R}^n , und $f(x) = o(g(x))$ für $x \rightarrow x_0$ bedeutet, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung Y von x_0 gibt mit $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ für alle $x \in Y$.

In diesem Abschnitt wollen versuchen, einen ähnlichen Zusammenhang für den bei uns vorliegenden Fall, genauer eine Verbindung zwischen dem vollständig positiven

Entropie-Index von $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = (C(K), \text{Def}(d), \|d\cdot\|_{\Omega})$ als unserem Dimensionsbegriff und dem Spektrum $\Delta = d^*d$, herzustellen. Hierzu erinnern wir nochmals daran, dass die in Definition 4.1 eingeführte Feinheit

$$\varepsilon_{\varphi} = \sup_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ \|a\|_{\mathcal{A}} \leq 1}} \inf_{c \in F} \|a - \varphi(c)\|_A$$

für eine vollständig positive, unitale und isometrische Abbildung $\varphi : F \rightarrow A$ von einer C^* -Algebra F in die unitale C^* -Algebra A beschreibt, wie groß für Elemente $a \in \mathcal{A}^1 = \{a \in \mathcal{A}, \|a\|_{\mathcal{A}} \leq 1\}$ deren Quotientenhalbnormen modulo $\text{Im}(\varphi)$ höchstens werden können. Die Feinheit, welche also (Quotienten-)Norm und Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ miteinander vergleicht, lieferte laut Theorem 4.8 für $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = (\text{Lip}(K), \text{Lip}(\cdot))$ den Entropie-Index. Jetzt betrachten wir jedoch allgemeiner $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = (\text{Def}(d), \|d\cdot\|_{\Omega})$. Zu beachten ist, dass dieser neue Ausgangspunkt für ε_{φ} nicht mehr den ursprünglichen Entropie-Index für das Kompaktum K , den man für $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) = (\text{Lip}(K), \text{Lip}(\cdot))$ statt $(\text{Def}(d), \|d\cdot\|_{\Omega})$ erhalten würde, zu liefern braucht, denn die mit d zusammenhängende Metrik

$$(23) \quad \text{dist}(x, y) := \sup\{|f(x) - f(y)| \mid f \in \text{Def}(d), \|df\|_{\Omega} \leq 1\}$$

auf K muss nicht mit der Metrik ρ auf K , welche man gemäß Formel (4) auf Seite 7 erhält, übereinstimmen. Nur, wenn die Metriken ρ und dist äquivalent sind, erhält man dasselbe Ergebnis für den Entropie-Index.

Bei der Einführung des Laplace-Operators Δ_{μ} taucht mit der Hilbertraum-Norm $\|\cdot\|_{\Omega}$ eine weitere Norm auf. Es erscheint nur natürlich, dass es möglich ist, einen Zusammenhang zwischen dem Entropie-Index und dem Spektrum von Δ_{μ} durch einen Vergleich dieser Hilbertraum-Norm mit den bisherigen herzustellen.

Bezeichnen wir mit P_V die orthogonale Projektion im Hilbertraum \mathcal{H} auf einen Unterraum V und mit φ^{\perp} den Unterraum $\text{Im}(\varphi)^{\perp}$, so gilt offensichtlich wegen $\|\cdot\|_A = \|\cdot\|_{\infty} \geq \|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ die Abschätzung

$$(24) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{\varphi} &= \sup_{\substack{f \in \mathcal{A} = \text{Def}(d) \\ \|df\|_{\Omega} \leq 1}} \inf_{c \in \text{Im}(\varphi)} \|f - c\|_{\infty} \geq \sigma_{\varphi, \mu} := \sup_{\substack{f \in \mathcal{A} = \text{Def}(d) \\ \|df\|_{\Omega} \leq 1}} \|P_{\varphi^{\perp}}(f)\|_{\mathcal{H}} \\ &\geq \tau_{\varphi, \mu} := \sup_{\substack{f \in \mathcal{A} = \text{Def}(\Delta_{\mu}) \\ \langle \Delta_{\mu} f, f \rangle = \|df\|_{\Omega}^2 \leq 1}} \|P_{\varphi^{\perp}}(f)\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Wir schreiben auch σ_{φ} statt $\sigma_{\varphi, \mu}$ und τ_{φ} statt $\tau_{\varphi, \mu}$, wenn bezüglich des Maßes μ keine Unklarheit besteht. Die Größen $\sigma_{\varphi, \mu}$ und $\tau_{\varphi, \mu}$ entstehen also durch Vergleich der Halbnorm $\|\cdot\|_{\Omega}$ mit der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ statt mit der Norm $\|\cdot\|_A$ wie bei ε_{φ} . Diesen Vergleich der Normen formulieren wir in dem nun folgenden Lemma um, was es uns in Satz 4.20 gestatten wird, eine Verbindung zwischen dem Entropie-Index und dem asymptotischen Verhalten des Spektrums von Δ_{μ} herzustellen.

4.16. LEMMA. *Sei μ ein beliebiges Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf K .*

(a) *Ist $\sigma_{\varphi, \mu} \neq 0$, so folgt*

$$\inf_{f \in \text{Def}(d)} \|df\|_{\Omega} = \frac{1}{\sigma_{\varphi, \mu}} \quad \text{bzw.} \quad \inf_{f \in \text{Def}(d)} \|df\|_{\Omega} = 1. \\ \inf_{\|P_{\varphi^{\perp}}(f)\|_{\mathcal{H}} \geq 1} \quad \inf_{\|P_{\varphi^{\perp}}(f)\|_{\mathcal{H}} \geq \sigma_{\varphi, \mu}}$$

(b) Ist $\tau_{\varphi,\mu} \neq 0$, so folgt

$$\inf_{\substack{f \in \text{Def}(\Delta_\mu) \\ \|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} \stackrel{(\geq)}{=} 1}} \|df\|_\Omega = \frac{1}{\tau_{\varphi,\mu}} \quad \text{bzw.} \quad \inf_{\substack{f \in \text{Def}(\Delta_\mu) \\ \|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} \stackrel{(\geq)}{=} \tau_{\varphi,\mu}}} \|df\|_\Omega = 1 \quad \text{bzw.}$$

$$\inf_{\substack{f \in \text{Def}(\Delta_\mu) \\ \|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} \stackrel{(\geq)}{=} 1}} \langle \Delta_\mu f, f \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{(\tau_{\varphi,\mu})^2} \quad \text{bzw.} \quad \inf_{\substack{f \in \text{Def}(\Delta_\mu) \\ \|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} \stackrel{(\geq)}{=} \tau_{\varphi,\mu}}} \langle \Delta_\mu f, f \rangle_{\mathcal{H}} = 1.$$

Dabei steht „ $\stackrel{(\geq)}{=}$ “ für wahlweise „ \geq “ oder „ $=$ “.

BEWEIS. Es ist offensichtlich, dass die zu folgernden Gleichheiten äquivalent sind.

(a) Sei $f \in \text{Def}(d)$ mit $\|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} \geq \sigma_{\varphi,\mu}$. Zu zeigen ist $\|df\|_\Omega \geq 1$. Angenommen es gälte $c := \|df\|_\Omega < 1$. (Es ist $c \neq 0$, denn sonst folgte $f = \text{const} \cdot \mathbf{1}_K$ fast überall (vergleiche Bemerkung 4.15), also $\|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} = 0$ wegen $\text{const} \cdot \mathbf{1}_K \in \text{Im}(\varphi)$ aufgrund der Unitalität von φ .) Dann ist $\|d \frac{f}{c}\|_\Omega = \frac{1}{c} \|df\|_\Omega = 1$, also $\|P_{\varphi^\perp}(\frac{f}{c})\|_{\mathcal{H}} \leq \sigma_{\varphi,\mu} \Leftrightarrow \|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} \leq c \cdot \sigma_{\varphi,\mu} < \sigma_{\varphi,\mu}$ nach Definition von $\sigma_{\varphi,\mu}$, im Widerspruch zu $\|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} \geq \sigma_{\varphi,\mu}$. Also ist $\|df\|_\Omega \geq 1$.

Das Infimum wird sogar angenommen, denn zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $f \in \text{Def}(d)$ mit $\|df\|_\Omega = 1$ und $\sigma_{\varphi,\mu} \geq m := \|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} > \sigma_{\varphi,\mu} - \varepsilon$ nach Definition von $\sigma_{\varphi,\mu}$. Es folgt $\|P_{\varphi^\perp}(\frac{\sigma_{\varphi,\mu} f}{m})\|_{\mathcal{H}} = \sigma_{\varphi,\mu}$ und $\|d \frac{\sigma_{\varphi,\mu} f}{m}\|_\Omega = \frac{\sigma_{\varphi,\mu}}{m} \|df\|_\Omega = \frac{\sigma_{\varphi,\mu}}{m} < \frac{\sigma_{\varphi,\mu}}{\sigma_{\varphi,\mu} - \varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{\sigma_{\varphi,\mu} - \varepsilon}$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

(b) Wegen $\|df\|_\Omega^2 = \langle df, df \rangle_\Omega = \langle d^* df, f \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \Delta f, f \rangle_{\mathcal{H}}$ kann diese Aussage analog gezeigt werden. \square

Dass die Größen $\sigma_{\varphi,\mu}$ und $\tau_{\varphi,\mu}$ eng zusammenhängen, zeigt der folgende Satz. Zuvor erinnern wir daran, dass ein linearer abschließbarer Operator T_0 auf einem Hilbertraum \mathcal{H} **Gen** für einen abgeschlossenen Operator T auf \mathcal{H} genannt wird, wenn der Abschluss $\overline{T_0}$ von T_0 mit T übereinstimmt. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Definitionsbereich $\text{Def}(T_0)$ dicht in $\text{Def}(T)$ bezüglich der Graphennorm von T liegt, siehe [26] (23.2.3). In diesem Falle wird $\text{Def}(T_0)$ ein **Genbereich** (engl. „core“) für den Operator T genannt.

4.17. SATZ. Ist $\text{Def}(\Delta_\mu)$ ein Genbereich für den Operator $d : \text{Def}(d) \subset \mathcal{H} \rightarrow \Omega$, so ist $\sigma_{\varphi,\mu} = \tau_{\varphi,\mu}$.

BEWEIS. Seien $f \in \text{Def}(d)$ mit $\|df\|_\Omega \leq 1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\text{Def}(\Delta_\mu)$ einen Genbereich von d darstellt, gibt es ein $g \in \text{Def}(\Delta)$ mit $\|((f-g), d(f-g))\|_{\mathcal{H} \times \Omega}^2 = \|f-g\|_{\mathcal{H}}^2 + \|d(f-g)\|_\Omega^2 < \varepsilon$, also gilt (i) $\|f-g\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$ und (ii) $\|d(f-g)\|_\Omega < \varepsilon$. Weiter ist

$$(iii) \quad \left| \|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} - \|P_{\varphi^\perp}(g)\|_{\mathcal{H}} \right| \leq \|P_{\varphi^\perp}(f) - P_{\varphi^\perp}(g)\|_{\mathcal{H}} = \|P_{\varphi^\perp}(f-g)\|_{\mathcal{H}} \leq \|f-g\|_{\mathcal{H}} \stackrel{(i)}{<} \varepsilon$$

und

$$(iv) \quad \left| \|df\|_\Omega - \|dg\|_\Omega \right| \leq \|df - dg\|_\Omega = \|d(f-g)\|_\Omega \stackrel{(ii)}{<} \varepsilon.$$

Wir setzen

$$h := \begin{cases} g & \text{falls } \|dg\|_\Omega \leq 1 \\ \frac{g}{\|dg\|_\Omega} & \text{falls } \|dg\|_\Omega > 1, \text{ also } \|df\|_\Omega \leq 1 < \|dg\|_\Omega \stackrel{\text{(iv)}}{<} \|df\|_\Omega + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon \end{cases} \quad (\text{v})$$

Dann ist $h \in \text{Def}(\Delta_\mu)$ mit $\|dh\|_\Omega \leq 1$, und es gelten im Falle von $\|dg\|_\Omega > 1$

$$\begin{aligned} \|P_{\varphi^\perp}(f) - P_{\varphi^\perp}(h)\|_{\mathcal{H}} &\leq \|P_{\varphi^\perp}(f) - P_{\varphi^\perp}(g)\|_{\mathcal{H}} + \|P_{\varphi^\perp}(g) - P_{\varphi^\perp}(h)\|_{\mathcal{H}} \\ &\stackrel{\text{(iii)}}{<} \varepsilon + \|P_{\varphi^\perp}(g) - P_{\varphi^\perp}(h)\|_{\mathcal{H}} \\ &= \varepsilon + \left\| P_{\varphi^\perp} \left(\left(1 - \frac{1}{\|dg\|_\Omega}\right) g \right) \right\|_{\mathcal{H}} \\ &= \varepsilon + \left(1 - \frac{1}{\|dg\|_\Omega}\right) \|P_{\varphi^\perp}(g)\|_{\mathcal{H}} \\ &\stackrel{\text{(iii),(v)}}{<} \varepsilon + \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon}\right) (\|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon) \\ &= \varepsilon \left(1 + \frac{\|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon}{1 + \varepsilon}\right) \\ &< \varepsilon (1 + \|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon) \end{aligned}$$

beziehungsweise $\|P_{\varphi^\perp}(f) - P_{\varphi^\perp}(h)\|_{\mathcal{H}} = \|P_{\varphi^\perp}(f) - P_{\varphi^\perp}(g)\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$ im Falle von $\|dg\|_\Omega \leq 1$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\tau_{\varphi,\mu} = \sup_{\substack{h \in \text{Def}(\Delta) \\ \|dh\|_\Omega \leq 1}} \|P_{\varphi^\perp}(h)\|_{\mathcal{H}} \geq \|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}}$. Da $f \in \text{Def}(d)$ mit $\|df\|_\Omega \leq 1$ beliebig war, folgt $\tau_{\varphi,\mu} \geq \sigma_{\varphi,\mu}$. Die Abschätzung $\sigma_{\varphi,\mu} \geq \tau_{\varphi,\mu}$ gilt stets, also ist insgesamt $\sigma_{\varphi,\mu} = \tau_{\varphi,\mu}$. \square

Zur besseren Anschauung des von uns eben Gezeigten betrachten wir ein Beispiel.

4.18. BEISPIEL (vgl. [26] (23.3.3, 23.4.3)). Wir betrachten ein kompaktes Intervall $K = [a, b]$ in \mathbb{R} und als Maß die Gleichverteilung $\mu = \frac{1}{b-a} \lambda^1|_{[a,b]}$, also $\mathcal{H} := L^2([a, b]) = L^2([a, b], \mu)$. Bezeichnen wir mit $\text{Abs}(K)$ die Menge der absolutstetigen Funktionen auf K und mit f' die Ableitung einer Funktion $f \in \text{Abs}(K)$, so definieren wir den Raum

$$\begin{aligned} \text{Def}(d) &:= W_0^1([a, b]) \\ &:= \left\{ f \in L^2([a, b]) \mid f \in \text{Abs}(K), f' \in L^2([a, b]), f(a) = f(b) = 0 \right\} \end{aligned}$$

als Definitionsbereich des Operators $d : \text{Def}(d) \rightarrow L^2([a, b])$, $f \mapsto -if'$.

Als Adjungierte von d ergibt sich $d^* : \text{Def}(d^*) \rightarrow L^2([a, b])$, $f \mapsto -if'$ mit Definitionsbereich

$$\text{Def}(d^*) := W^1([a, b]) := \left\{ f \in L^2([a, b]) \mid f \in \text{Abs}(K), f' \in L^2([a, b]) \right\}.$$

Die Operatoren d und d^* unterscheiden sich also nur im Definitionsbereich, nicht in der Abbildungsvorschrift. Damit erhalten wir

$$\Delta : \text{Def}(\Delta) = \{f \in \text{Def}(d) \mid df \in \text{Def}(d^*)\} \rightarrow L^2([a, b]), f \mapsto -f''.$$

Es ist wohlbekannt, dass $\text{Def}(\Delta)$ einen Genbereich für den Ableitungsoperator d darstellt, vergleiche etwa [26] (23.3.2).

Wir sind jetzt in der Lage, den Zusammenhang zwischen der Asymptotik des Spektrums des Laplace-Operators Δ_μ und dem Entropie-Index des Kompaktums K zu formulieren. In Anlehnung an den vollständig positiven Entropie-Index definieren wir zuvor:

4.19. DEFINITION. Für $\varepsilon > 0$ und den Laplace-Operator Δ_μ mit diskretem Punktspektrum $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ setzen wir

$$\begin{aligned} M_\varepsilon^s &:= \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}}} \leq \varepsilon \right\} = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{\varepsilon^2} \leq \lambda_{n+1} \right\} \\ &= \max \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n < \frac{1}{\varepsilon^2} \right\} \end{aligned}$$

und nennen $\text{sdim}(K) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_\varepsilon^s}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$ **spektrale Dimension** von K bezüglich Δ_μ .

4.20. SATZ. Unter den Voraussetzungen in diesem Abschnitt für einen von einer L^2 -Derivation d stammenden Laplace-Operator $\Delta = \Delta_\mu = d^*d$ für ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf K und eine vollständig positive, unitale und isometrische Abbildung $\varphi : F \rightarrow A = C(K)$ mit $F \in \text{Fin}$ und $\text{kdim}(F) = n$ sei die aus Formel (24) stammende Größe $\tau_{\varphi, \mu} \neq 0$.

Dann gilt $0 \neq \varepsilon_\varphi \geq \tau_{\varphi, \mu} \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n^2+1}}}$ beziehungsweise $\frac{1}{(\varepsilon_\varphi)^2} \leq \frac{1}{(\tau_{\varphi, \mu})^2} \leq \lambda_{n^2+1} \neq 0$.

Ist $F \in \text{kFin}$, so folgt $0 \neq \varepsilon_\varphi \geq \tau_{\varphi, \mu} \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}$ beziehungsweise $\frac{1}{(\varepsilon_\varphi)^2} \leq \frac{1}{(\tau_{\varphi, \mu})^2} \leq \lambda_{n+1} \neq 0$. Für $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A) = (C(K), \text{Def}(d), \|d\cdot\|_\Omega)$ gelten damit $M_\varepsilon^s \leq \text{kFin} N'_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A)$ und

$$\text{kFin}_{\text{vpei}}(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \text{kFin} N'_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_A)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_\varepsilon^s}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \text{sdim}(K).$$

Statten wir K mit der Metrik dist aus Formel (23) aus, so gilt insbesondere $\text{lei}(K) \geq \text{sdim}(K)$.

Analoges gilt jeweils für $\sigma_{\varphi, \mu}$ statt $\tau_{\varphi, \mu}$, wenn $\text{Def}(\Delta_\mu)$ ein Genbereich für d ist.

BEWEIS. Falls E ein Unterraum des Vektorraums V ist, so drücken wir dies durch die Relation $E \leq V$ aus.

Ist $\tau_{\varphi, \mu} \neq 0$, so auch ε_φ aufgrund von Formel (24). Wir erhalten mit Lemma 4.16

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\varepsilon_\varphi)^2} &\stackrel{(i)}{\leq} \frac{1}{(\tau_{\varphi, \mu})^2} = \inf_{\substack{f \in \text{Def}(\Delta_\mu) \\ \|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} \stackrel{(\geq)}{\geq} 1}} \langle \Delta_\mu f, f \rangle \stackrel{(ii)}{\leq} \inf_{\substack{f \in \text{Def}(\Delta_\mu) \cap (\text{Im} \varphi)^\perp \\ \|f\|_{\mathcal{H}} = \|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} \stackrel{(\geq)}{\geq} 1}} \langle \Delta_\mu f, f \rangle \\ &\leq \sup_{\substack{\varphi: F \rightarrow A \\ \text{kdim}(F) = n}} \inf_{\substack{f \in \text{Def}(\Delta_\mu) \cap (\text{Im} \varphi)^\perp \\ \|f\|_{\mathcal{H}} = \|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} \stackrel{(\geq)}{\geq} 1}} \langle \Delta_\mu f, f \rangle \stackrel{(iii)}{\leq} \sup_{\substack{V_{n^2} \leq \mathcal{H} \\ \dim(V_{n^2}) \leq n^2}} \inf_{\substack{f \in \text{Def}(\Delta_\mu) \cap V_{n^2}^\perp \\ \|f\|_{\mathcal{H}} = \|P_{V_{n^2}^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} \stackrel{(\geq)}{\geq} 1}} \langle \Delta_\mu f, f \rangle \\ &= \sup_{\substack{V_{n^2} \leq \mathcal{H} \\ \dim(V_{n^2}) = n^2}} \inf_{\substack{f \in \text{Def}(\Delta_\mu) \cap V_{n^2}^\perp \\ \|f\|_{\mathcal{H}} = \|P_{V_{n^2}^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} \stackrel{(\geq)}{\geq} 1}} \langle \Delta_\mu f, f \rangle \stackrel{(iv)}{=} \lambda_{n^2+1}, \end{aligned}$$

wobei das letzte Supremum über alle n^2 -dimensionalen Unterräume V_{n^2} von \mathcal{H} für den Aufspann der ersten n^2 Eigenvektoren v_1, \dots, v_{n^2} des Laplace-Operators angenommen wird. Es gelten (ii) beziehungsweise (iii), da jeweils rechts das Infimum über eine kleinere beziehungsweise das Supremum über eine größere Menge gebildet wird; (i) gilt

aufgrund von Formel (24), und (iv) ist nach [51] richtig (Rayleigh-Ritz-Prinzip). Damit erhalten wir $\lambda_{n^2+1} \neq 0$.

Ist $F \in \text{kFin}$, also $\dim(F) = \text{kdim}(F)$, so gelten (iii') und (iv') anstelle von (iii) und (iv) in der Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\varepsilon_\varphi)^2} &\leq \dots \leq \sup_{\substack{\varphi: F \rightarrow A \\ \text{kdim}(F)=n}} \inf_{\substack{f \in \text{Def}(\Delta_\mu) \cap (\text{Im}\varphi)^\perp \\ \|f\|_{\mathcal{H}} = \|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} \stackrel{(\geq)}{\geq} 1}} \langle \Delta_\mu f, f \rangle \\ &\stackrel{(iii')}{=} \sup_{\substack{V_n \leq \mathcal{H} \\ \dim(V_n) \leq n}} \inf_{\substack{f \in \text{Def}(\Delta_\mu) \cap V_n^\perp \\ \|f\|_{\mathcal{H}} = \|P_{V_n^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} \stackrel{(\geq)}{\geq} 1}} \langle \Delta_\mu f, f \rangle \stackrel{(iv')}{=} \lambda_{n^2+1}. \end{aligned}$$

Der Rest folgt dann unmittelbar aus den Definitionen von ${}^{\text{kFin}}N'_\varepsilon(C(K), \text{Def}(d), \|\cdot\|_\Omega)$ und M_ε^s , Theorem 4.8 und aus Satz 4.17. \square

Wir wollen noch erwähnen, dass wir an dieser Stelle nur deshalb eine Abschätzung zwischen dem vollständig positiven Entropie-Index und der spektralen Dimension angeben konnten, weil $A = C(K) \subset L^2(K, \mu)$ Bildbereich der betrachteten Abbildungen φ ist, wir also die Richtung der Abbildungen im Vergleich zu Teil 1 dieser Arbeit umgedreht haben.

Um die Beweisidee des Satzes und von Gleichheit (iv) (beziehungsweise (iv')) im Beweis noch deutlicher hervorzuheben, formulieren wir einen zweiten Beweis, für den wir das folgende Lemma benötigen.

4.21. LEMMA. *Seien \mathcal{H} ein Vektorraum mit Skalarprodukt, V ein endlichdimensionaler Unterraum und W ein endlichdimensionaler Unterraum von \mathcal{H} mit $\dim(W) \geq \dim(V) + 1$. Dann gilt $W \cap V^\perp \neq \{\mathbf{0}\}$.*

BEWEIS. Wir betrachten die Quotientenabbildung $\pi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}/V^\perp$. Dann ist $\dim(V) = \dim(\mathcal{H}/V^\perp)$. Angenommen, es wäre $W \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$, dann wäre $\pi|_W: W \rightarrow \mathcal{H}/V^\perp$ eine injektive Abbildung mit $\dim(\mathcal{H}/V^\perp) = \dim(V) < \dim(W)$, ein offensichtlicher Widerspruch. \square

BEWEIS (von Satz 4.20). Sei $F \in \text{Fin}$ mit $\text{kdim}(F) = n$. Ist $\tau_{\varphi, \mu} \neq 0$, so auch ε_φ nach Formel (24). Weiter gibt es im (n^2+1) -dimensionalen Raum $W \subset \mathcal{H}$, der vom Orthonormalsystem von Eigenvektoren v_1, \dots, v_{n^2+1} der ersten n^2+1 Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_{n^2+1}$ von Δ_μ aufgespannt wird, einen Vektor $\mathbf{0} \neq v \in (\text{Im}(\varphi))^\perp \cap W$ der Norm 1 nach Lemma 4.21, denn $\dim(\text{Im}(\varphi)) \leq n^2$ wegen der Isometrie bzw. Injektivität von φ . Ist $v = \sum_{i=1}^{n^2+1} x_i v_i$, so ist

$$\begin{aligned} \langle \Delta_\mu v, v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n^2+1} x_i \Delta_\mu v_i, \sum_{j=1}^{n^2+1} x_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n^2+1} x_i \overline{x_j} \lambda_i \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{\delta_{i,j}} \\ &\leq \left(\max_{1 \leq i,j \leq n^2+1} \lambda_i \right) \sum_{i,j=1}^{n^2+1} x_i \overline{x_j} \langle v_i, v_j \rangle = \lambda_{n^2+1} \langle v, v \rangle = \lambda_{n^2+1} \end{aligned}$$

und daher

$$\frac{1}{(\varepsilon_\varphi)^2} \leq \frac{1}{(\tau_{\varphi,\mu})^2} = \inf_{\substack{f \in \text{Def}(\Delta) \\ \|P_{\varphi^\perp}(f)\|_{\mathcal{H}} \geq 1}} \langle \Delta_\mu f, f \rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle \Delta_\mu v, v \rangle \leq \lambda_{n^2+1}.$$

Damit ist $\lambda_{n^2+1} \neq 0$.

Ist $F \in \text{kFin}$, so genügt es, wegen $\dim(\text{Im}(\varphi)) = n$ die ersten $n + 1$ Eigenwerte von Δ_μ zu betrachten, um Lemma 4.21 auf den von den zugehörigen Eigenvektoren erzeugten Unterraum W anwenden zu können. Es folgt die entsprechende Abschätzung $\frac{1}{(\varepsilon_\varphi)^2} \leq \frac{1}{(\tau_{\varphi,\mu})^2} \leq \lambda_{n+1}$. Der Rest folgt unmittelbar aus den Definitionen von M_ε^s und $\text{kFin}N'_\varepsilon(C(K), \text{Def}(d), \|\text{d}\|_\Omega)$, Theorem 4.8 und aus Satz 4.17. \square

4.22. BEISPIEL. Für den in Beispiel 4.18 auf Seite 110 angegebenen Laplace-Operator lässt sich dessen Spektrum mittels seiner kompakten stetigen Inversen T berechnen. Der Einfachheit halber betrachten wir das Einheitsintervall $K = [a, b] = [0, 1]$. Die Inverse ist dann gegeben durch

$$T : L^2([0, 1]) \rightarrow \text{Def}(\Delta)$$

$$f \mapsto Tf \text{ mit } (Tf)(x) := \int_0^1 G(x, t)f(t)dt$$

für die Greensche Funktion

$$G(x, t) := \begin{cases} t(1-x) & \text{für } t \leq x \\ x(1-t) & \text{für } t > x \end{cases}.$$

Man erhält als Spektrum $\sigma(\Delta) = \{\lambda_n := n^2\pi^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit vollständigem Orthornormalsystem von zugehörigen Eigenvektoren $\{v_n(x) := \sqrt{2} \sin(n\pi x) \mid n \in \mathbb{N}\}$, vgl. [26] (23.5.4(b), S. 668 f. bzw. 22.5.1(b), S. 627 ff.) Damit bekommen wir als Abschätzung für den Entropie-Index

$$\begin{aligned} \text{lei}([0, 1]) &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_\varepsilon^s}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}}} \leq \varepsilon \right\} \right)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \\ &= \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n\pi} \leq \frac{1}{x} \right\} \right)}{\ln(x)} = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\left\lceil \frac{x}{\pi} \right\rceil \right)}{\ln(x)} = 1, \end{aligned}$$

wie zu erwarten war.

Wir setzen dieses Ergebnis noch in Beziehung mit der Formel (22) von Weyl: Vergleichen wir $r(x) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n \leq x\}$ von dort und M_ε^s , so erhalten wir $M_\varepsilon^s \leq r\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \leq M_{\varepsilon+\delta}^s$ für alle $\delta > 0$ und damit

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln r\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \cdot V^n(B_1(0)(\mathbb{R}^n)) \cdot V^n([0, 1]) \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{n}{2}} + o\left(\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{n}{2}}\right) \right]}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \\ &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left[\frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\varepsilon} + o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right]}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 1. \end{aligned}$$

4.23. BEISPIEL. Beispiel 4.22 können wir natürlich auch auf den mehrdimensionalen Fall übertragen. Wie dies zu geschehen hat, zeigen wir exemplarisch am Fall des

Einheitsquadrats $K = [0, 1]^2$, für welches wir nun die dort benötigten Räume und Abbildungen zusammenstellen:

$$\mathcal{H} = L^2(K, \lambda^2|_K),$$

$$\Omega = L^2(K, \lambda^2|_K) \oplus L^2(K, \lambda^2|_K),$$

$$\text{Def}(d) = \{f \in \mathcal{H} \mid f(\cdot, x_2), f(x_1, \cdot) \in \text{Abs}([0, 1]) \text{ für festes } x_1, x_2, f' \in \Omega, \\ f|_{\partial K} = \mathbf{0}\},$$

$$df = -if' = -i \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right),$$

$$\text{Def}(d^*) = \{g = (g_1, g_2) \in \Omega \mid g_j(\cdot, x_2), g_j(x_1, \cdot) \in \text{Abs}([0, 1]) \text{ für jeweils} \\ \text{festes } x_1, x_2 (j = 1, 2), g'_1, g'_2 \in \Omega\},$$

$$d^*g = d^*(g_1, g_2) = -i \sum_{j=1}^2 \frac{\partial g_j}{\partial x_j},$$

$$\text{Def}(\Delta) = \{f \in \text{Def}(d) \mid df \in \text{Def}(d^*)\},$$

$$\Delta(f) = - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}.$$

Als Eigenwerte beziehungsweise Eigenvektoren von Δ ergeben sich dann $\lambda_{m,n} = (m^2 + n^2)\pi^2$ beziehungsweise $v_{m,n} = 2 \sin(m\pi x_1) \sin(n\pi x_2)$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Die spektrale Dimension von K können wir wie in Beispiel 4.22 wie folgt berechnen: Wir ordnen die Eigenwerte $\lambda_{m,n}$ von Δ mit der jeweiligen Vielfachheit der Größe nach und bezeichnen die so entstandene Folge mit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Es gilt

$$M_\varepsilon^s = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} \leq \varepsilon \right\} = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{\varepsilon^2} \leq \lambda_{k+1} \right\} \\ = \max \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} > \varepsilon \right\} = \max \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{\varepsilon^2} > \lambda_k \right\}.$$

Wegen $\sqrt{m^2 + n^2} \leq m + n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist

$$\max \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} > \varepsilon \right\} = \left| \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \frac{1}{\pi \sqrt{m^2 + n^2}} > \varepsilon \right\} \right| \\ \geq \left| \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \frac{1}{\pi(m+n)} > \varepsilon \right\} \right|.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\text{sdim}(K) &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M_\varepsilon^s}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\left| \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \frac{1}{\pi \sqrt{m^2 + n^2}} > \varepsilon \right\} \right| \right)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \\
&\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\left| \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \frac{1}{\pi(m+n)} > \varepsilon \right\} \right| \right)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \stackrel{(*)}{\geq} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sum_{k=2}^{\lfloor \frac{1}{\pi\varepsilon} \rfloor} (k-1) \right)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \\
&= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{1}{\pi\varepsilon} - 1 \rfloor} k \right)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{1}{2} \lfloor \frac{1}{\pi\varepsilon} - 1 \rfloor \lfloor \frac{1}{\pi\varepsilon} \rfloor \right)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \\
&= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{1}{2} \right) + \ln \left(\lfloor \frac{1}{\pi\varepsilon} - 1 \rfloor \right) + \ln \left(\lfloor \frac{1}{\pi\varepsilon} \rfloor \right)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 2,
\end{aligned}$$

wobei sich Ungleichung (*) notfalls durch Induktion ergibt. Durch die Abschätzung $\text{sdim}(K) \leq \text{lei}(K) = 2$ erhalten wir $\text{sdim}(K) = 2$. Übrigens gilt $\text{lei}(K) = 2$ sowohl bezüglich der euklidischen Metrik ρ , vergleiche 2.) in Beispiel 2.9, als auch bezüglich der von d induzierten Metrik dist aus (23), wie man sich leicht mit Hilfe von Satz 2.11 und der koordinatenweise Betrachtung von df für $f \in \text{Def}(d)$ überlegt. Natürlich hätten wir dasselbe Ergebnis ohne Probleme wie in Beispiel 4.22 mit Hilfe der Formel von Weyl berechnen können.

KAPITEL 5

Kommutative kompakte quantenmetrische Räume und direkter Limes

In Satz 3.7 haben wir gesehen, dass wir die lipschitzstetigen Funktionen auf einem kompakten metrischen Raum (K, ρ) als inversen Limes endlichdimensionaler involutiver Banach-Algebren schreiben können; dazu haben wir auf Ebene des Kompaktums selbst den direkten Limes einer aufsteigenden Folge endlicher Teilräume betrachtet, vergleiche Satz 3.1. Nun wollen wir die Richtungen der verbindenden Abbildungen umdrehen, also den inversen Limes auf Ebene kompakter metrischer Räume betrachten und die lipschitzstetigen Funktionen auf (K, ρ) mit Hilfe des direkten Limes darstellen. Dies werden wir in Abschnitt 1 tun. In Abschnitt 2 überlegen wir uns, wie wir das Vorgehen in Abschnitt 1 abändern müssen, um ähnliche Ergebnisse für kompakte separable Hausdorff-Räume (ohne Metrik) zu erhalten.

1. Beschreibung von $Lip(K)$ mit Hilfe des direkten Limes

Seien (K, ρ) ein kompakter metrischer Raum und $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$ eine streng monoton fallende Nullfolge positiver reeller Zahlen. Wir konstruieren für K eine Folge von Partitionen und eine Folge von Punkten in den einzelnen Partitions Mengen. Jede Partitionsmenge soll disjunkte Vereinigung von Partitions Mengen höherer Stufe sein, die Partitionsmenge auf m -ter Stufe soll einen Durchmesser von höchstens $2\varepsilon_m$ besitzen, und die entstehende Folge von Punkt Mengen soll aufsteigend sein. Es bezeichne stets $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge einer Menge M .

Wir setzen $Y_1 := K$.

Zu ε_2 wählen wir eine endliche Überdeckung $U_1^2, \dots, U_{n_2}^2$ von $Y_1 = K$ mit $\text{diam}(U_i^2) \leq 2\varepsilon_2$ für $1 \leq i \leq n_2$. Für $\emptyset \neq J \subset \{1, \dots, n_2\}$ sei $U_J := \bigcap_{j \in J} U_j \setminus \bigcup_{i \in \{1, \dots, n_2\} \setminus J} U_i$. Dann ist $K = \bigcup_{i=1}^{n_2} U_i^2 = \bigcup_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n_2\})} U_J$ disjunkt, aber manche U_J können leer sein.

Wir bezeichnen mit $V_1^2, \dots, V_{k_2}^2$ die nichtleeren Mengen U_J , also ist $\{V_1^2, \dots, V_{k_2}^2\}$ eine Partition von K . Wir wählen schließlich $x_j^2 \in V_j^2$ für $1 \leq j \leq k_2$ beliebig und setzen $x_1^1 := x_1^2$.

Seien $\{V_1^m, \dots, V_{k_m}^m\}$ schon als Partition von K mit $\text{diam}(V_i^m) \leq 2\varepsilon_m$ und $x_i^m \in V_i^m$ konstruiert. Wir wählen zu ε_{m+1} eine endliche Überdeckung $U_1^{m+1,j}, \dots, U_{n_{m+1,j}}^{m+1,j}$ von V_j^m , das heißt $V_j^m = \bigcup_{i=1}^{n_{m+1,j}} U_i^{m+1,j}$, so dass $\text{diam}(U_i^{m+1,j}) \leq 2\varepsilon_{m+1}$ für $1 \leq i \leq n_{m+1,j}$ ist; falls $\text{diam}(V_j^m) \leq 2\varepsilon_{m+1}$ war, so setzen wir $U_1^{m+1,j} := V_j^m$. Zu jedem $\emptyset \neq J \subset \{1, \dots, n_{m+1,j}\}$ setzen wir $U_J := \bigcap_{i \in J} U_i^{m+1,j} \setminus \bigcup_{l \in \{1, \dots, n_{m+1,j}\} \setminus J} U_l^{m+1,j}$, das bedeutet $V_m^j := \bigcup_{i=1}^{n_{m+1,j}} U_i^{m+1,j} = \bigcup_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n_{m+1,j}\})} U_J$. Weiter bezeichnen wir schließlich die nichtleeren Mengen U_j mit $A_1^{m+1,j}, \dots, A_{k_{m+1,j}}^{m+1,j}$. Diese bilden dann eine Partition von

V_j^m . Ist $x_j^m \in A_{l_0}^{m+1,j}$, so setzen wir $x_{l_0}^{m+1,j} := x_j^m$ und für $l \in \{1, \dots, k_{m+1,j}\} \setminus \{l_0\}$ wählen wir $x_l^{m+1,j} \in A_l^{m+1,j}$ beliebig.

Dies wiederholen wir für alle $j \in \{1, \dots, k_m\}$ und setzen $k_{m+1} := \sum_{j=1}^{k_m} k_{m+1,j}$. Die k_{m+1} Mengen $A_l^{m+1,j}$ ($1 \leq j \leq k_m, 1 \leq l \leq k_{m+1,j}$) bezeichnen wir mit $V_1^{m+1}, \dots, V_{k_{m+1}}^{m+1}$. Weiter bezeichnen wir die in V_j^{m+1} gewählten Punkte mit x_j^{m+1} , $1 \leq j \leq k_{m+1}$.

So erhalten wir eine absteigende, immer feiner werdende Folge von Partitionen von K , das heißt, für alle Paare (m_2, j) mit $m_2 \in \mathbb{N}$ und $1 \leq j \leq k_{m_2}$ und für alle $m_1 \leq m_2$ gibt es ein $l \in \{1, \dots, k_{m_1}\}$ mit $V_j^{m_2} \subseteq V_l^{m_1}$, und $\text{diam}(V_i^m) \leq 2\varepsilon_m$ ($1 \leq i \leq k_m$) für $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Die Durchmesser der Partitions Mengen auf jeder Stufe der Verfeinerung gehen also gleichmäßig gegen 0. Wir sehen auch, dass die Vereinigung der aufsteigenden Folge von Punkt mengen $(\{x_i^m \mid 1 \leq i \leq k_m\})_{m \in \mathbb{N}}$ dicht in K liegt.

Schließlich definieren wir

$$Y_m := \{V_i^m \mid 1 \leq i \leq k_m\}, \quad \overline{Y}_m := \{W_i^m := \overline{V_i^m} \mid 1 \leq i \leq k_m\}, \quad X_m := \{x_i^m \mid 1 \leq i \leq k_m\},$$

wobei mit \overline{Z} der Abschluss von $Z \subset K$ bezüglich ρ gemeint ist. Ein beliebiger Punkt $p \in K$ liegt nach Konstruktion in genau einer Partitionsmenge von Y_m , die wir mit $V_{j_p}^m$ bezeichnen wollen; entsprechend sind $W_{j_p}^m$ und $x_{j_p}^m$ zu verstehen.

Es gibt nun zwei verschiedene Möglichkeiten, mit dieser so konstruierten Partition inverse Limites auf Ebene kompakter metrischer Räume zu erhalten.

- (a) Für abgeschlossene Teilmengen $U, V \subset K$ von K führen wir den **Hausdorff-Abstand**

$$\rho_h(U, V) := \max \left(\sup_{x \in U} \inf_{y \in V} \rho(x, y), \sup_{y \in V} \inf_{x \in U} \rho(x, y) \right)$$

ein. Dies ist eine Metrik auf $\{U \mid U \in \mathcal{P}(K), U \text{ abgeschlossen}\}$. Definieren wir noch

$$\psi_{m_2, m_1} : \overline{Y}_{m_2} \rightarrow \overline{Y}_{m_1}, \quad W_{j_2}^{m_2} \mapsto W_{j_1}^{m_1} \text{ falls } V_{j_2}^{m_2} \subset V_{j_1}^{m_1},$$

so bildet $(\overline{Y}_m, \rho_h, \psi)_m$ eine inverse Folge vollständiger metrischer Räume.

Wir definieren auf $\lim_{\leftarrow} \overline{Y}_m$ eine Pseudometrik: Sind $U = (U_m)_{m \in \mathbb{N}}, V = (V_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \lim_{\leftarrow} \overline{Y}_m$, so setzen wir $\tilde{\rho}(U, V) := \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_h(U_m, V_m)$. Diese Funktion $\tilde{\rho}$ ist symmetrisch, erfüllt die Dreiecksungleichung, und es gilt $\tilde{\rho}(U, U) = 0$, aber die Definitheit ist nicht erfüllt. Es kann passieren, dass zwei Folgen $U = (U_m)_{m \in \mathbb{N}}, V = (V_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \lim_{\leftarrow} \overline{Y}_m$ aus Mengen bestehen, die auf jeder Stufe aneinanderstoßen, das heißt, $U_m \cap V_m \neq \emptyset \forall m \in \mathbb{N}$, wie die folgende Abbildung illustriert:

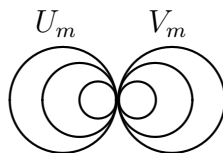


ABBILDUNG 18. Äquivalente Folgen in $\lim_{\leftarrow} \overline{Y}_m$.

Wir führen auf $\lim_{\leftarrow} \overline{Y}_m$ die Äquivalenzrelation \sim ein durch $U \sim V :\Leftrightarrow \tilde{\rho}(U, V) = 0$ für $U, V \in \lim_{\leftarrow} \overline{Y}_m$. Die Restklasse von U bezüglich dieser Äquivalenzrelation bezeichnen wir mit $[U]$. Dann versehen wir $\overline{Y} := \lim_{\leftarrow} \overline{Y}_m / \sim$ mit der von der Pseudometrik $\tilde{\rho}$ induzierten Metrik $\bar{\rho} := \tilde{\rho} / \sim$, das heißt $\bar{\rho}([U], [V]) := \tilde{\rho}(U, V)$. Dass dies wohldefiniert ist und dass wir dadurch einen zu (K, ρ) isometrisch isomorphen kompakten metrischen Raum erhalten, zeigt der nun folgende Satz.

5.1. SATZ. *Es gibt eine bijektive Isometrie zwischen (K, ρ) und $(\overline{Y}, \bar{\rho})$.*

BEWEIS. Wir definieren $\phi : K \rightarrow \overline{Y}$, $x \mapsto [(W_{j_x^m}^m)_{m \in \mathbb{N}}]$. Dann ist $\phi(x) \in \overline{Y}$, denn es gilt $\psi_{m_2, m_1}(W_{j_x^{m_2}}^{m_2}) = W_{j_x^{m_1}}^{m_1}$. Seien $x, y \in K$, $\phi(x) = [(W_{j_x^m}^m)_m]$, $\phi(y) = [(W_{j_y^m}^m)_m]$. Dann ist $\{x\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} W_{j_x^m}^m$, denn $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} W_{j_x^m}^m$, aber wäre $x \neq z \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} W_{j_x^m}^m$, so gäbe es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\text{diam}(W_{j_x^{m_0}}^{m_0}) \leq \frac{1}{2}\rho(x, z)$ für alle $m \geq m_0$, also $z \notin W_{j_x^m}^m$ für alle $m \geq m_0$, ein Widerspruch. Es folgt $\bar{\rho}(\phi(x), \phi(y)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_h(W_{j_x^m}^m, W_{j_y^m}^m) = \rho(x, y)$, und ϕ ist isometrisch.

Ist $[(U_m)_m] \in \overline{Y}$, so ist aufgrund der immer feiner werdend konstruieren Partition die zugehörige Folge darin liegend gewählter Punkte $(x_m)_m$ eine Cauchyfolge im vollständigen metrischen Raum (K, ρ) , also gegen $x \in K$ konvergent. Es folgt $\bar{\rho}(\phi(x), [(U_m)_m]) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_h(W_{j_x^m}^m, \{x\}) + \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_h(\{x\}, \{x_m\}) + \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_h(\{x_m\}, U_m) = 0$, und damit ist ϕ surjektiv. \square

- (b) Analog wie in Satz 3.1 können wir aber auch mit den endlichen Punktfolgen X_m arbeiten und bezüglich diesen den inversen Limes bilden. Wir staten die Mengen X_m für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit der diskreten Topologie aus, das heißt, dass jede Teilmenge von X_m offen ist.

5.2. DEFINITION (vgl. [21], [32]). Sei (K, \mathcal{O}) ein topologischer Raum.

- A) Eine Teilmenge U von K heißt **Zerlegungsmenge**, wenn U gleichzeitig offen und abgeschlossen ist. Eine Menge \mathcal{U} von Umgebungen um einen Punkt $x \in K$ heißt **Umgebungsbasis** von x , falls zu jeder Umgebung V von x ein $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset V$ existiert. Weiter nennen wir einen topologischen Raum **nulldimensional**, wenn jeder Punkt darin eine Umgebungsbasis aus Zerlegungsmengen besitzt.
- B) K heißt **zusammenhängend**, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (I) K ist nicht die Vereinigung von zwei nichtleeren disjunkten offenen Mengen.
- (II) Die einzigen Zerlegungsmengen in K sind \emptyset und K .
- (III) Jede stetige Abbildung $f : K \rightarrow F$ in einen diskreten Raum F ist konstant.

Eine Teilmenge U von K heißt **zusammenhängend**, wenn U als Unterraum von K , also bezüglich der Relativtopologie, zusammenhängend ist. Als **(Zusammenhangs-)Komponente** von $y \in K$ wird

$$Z(y) := \bigcup \{A \subset K \mid A \text{ zusammenhängend, } y \in A\}$$

bezeichnet.

C) Wir nennen K **total unzusammenhängend**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (i) $Z(y) = \{y\}$ für alle $y \in K$.
- (ii) Jede zusammenhängende Menge in K ist höchstens einpunktig.
- (iii) Jede stetige Abbildung $f : F \rightarrow K$ für einen zusammenhängenden Raum F ist konstant.

Die diskreten Räume X_m sind also total unzusammenhängend. Die diskrete Topologie stimmt mit der von der Metrik ρ auf X_m induzierten Topologie $\rho_m := \rho|_{X_m}$ überein. Wir definieren

$$\psi_{m_2, m_1} : X_{m_2} \rightarrow X_{m_1}, p \mapsto x_{j_p}^{m_1}.$$

Die diskrete Topologie auf den Räume X_m lässt die Abbildungen ψ_{m_2, m_1} automatisch stetig werden. Daher bildet $(X_m, \rho_m, \psi)_m$ eine inverse Folge vollständiger metrischer Räume. Nach [21] (vergleiche Seite 111) ist das direkte Produkt $\prod_{m \in \mathbb{N}} X_m$ total unzusammenhängender Räume wieder total unzusammenhängend und damit auch der inverse Limes $\lim_{\leftarrow} X_m \subset \prod_{m \in \mathbb{N}} X_m$.

Wie in Fall (a) besitzt der total unzusammenhängende inverse Limes-Raum $\lim_{\leftarrow} X_m$ eine Pseudometrik $\tilde{\rho}$, definiert durch $\tilde{\rho}(x, y) := \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m(x_m, y_m)$ für $x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und $y = (y_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Diese induziert eine Äquivalenzrelation \sim , gegeben durch $x \sim y \Leftrightarrow \tilde{\rho}(x, y) = 0$. Wir erhalten somit den metrischen Raum $(X, \bar{\rho}) := (\lim_{\leftarrow} X_m / \sim, \tilde{\rho} / \sim)$, der selbst isometrisch zu (K, ρ) und dessen Metrik wohldefiniert ist, wie der folgende Satz in Analogie zu Satz 5.1 zeigt. Die Äquivalenzklasse eines Elementes $x \in \lim_{\leftarrow} X_m$ bezüglich \sim bezeichnen wir wie üblich mit $[x]$. Durch Bilden des Quotientenraums bezüglich dieser Äquivalenzrelation haben wir also aus einem total unzusammenhängenden Raum $\lim_{\leftarrow} X_m$ das möglicherweise zusammenhängende Kompaktum K zurückerhalten. Die Vorstellung, die sich hinter einem derartigen Vorgehen verbirgt, lässt sich im Fall (a) besonders anschaulich beschreiben: Die Partitions Mengen werden zunächst beim Betrachten der diskreten Topologie auf \bar{Y}_m auseinandergebrochen, was auch im inversen Limes so bleibt, und erst durch Hinzunahme der Äquivalenzrelation \sim wieder zusammengefügt.

5.3. SATZ. *Es gibt eine bijektive Isometrie von (K, ρ) auf $(X, \bar{\rho})$.*

BEWEIS. Wir definieren $\phi : K \rightarrow X, p \mapsto [(x_{j_p}^m)_{m \in \mathbb{N}}]$. Dann ist $\phi(x) \in X$ aufgrund der Definition der verbindenden Abbildungen. Außerdem ist ϕ isometrisch, denn für $x, y \in K$ gilt

$$\bar{\rho}(\phi(x), \phi(y)) = \tilde{\rho}((x_{j_x}^m)_m, (x_{j_y}^m)_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m(x_{j_x}^m, x_{j_y}^m) = \rho(x, y),$$

wobei die letzte Gleichheit wegen der Stetigkeit von ρ auf dem Kompaktum K^2 gilt und weil nach Konstruktion der Partitionsmenge $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{j_x}^m = x, \lim_{m \rightarrow \infty} x_{j_y}^m = y$ gilt.

Schließlich ist ϕ surjektiv. Sind $[x] \in X$ für $x = (x_m)_m \in \lim_{\leftarrow} X_m$ und $\varepsilon > 0$, so existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\text{diam}(W_i^m) \leq \varepsilon$ für $m \geq m_0, 1 \leq i \leq k_m$. Sei $m \geq m_0$. Wegen $x_{m+p} \in W_{j_0}^m$ für alle $p \in \mathbb{N}$ und ein $W_{j_0}^m \in \bar{Y}_m$ ist $(x_m)_m$

eine Cauchyfolge in K , also gegen $y \in K$ konvergent bezüglich ρ . Dann ist

$$\bar{\rho}(\phi(y), [x]) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_{j_y^m}^m, x_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_{j_y^m}^m, y) + \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(y, x_m) = 0.$$

Die Stetigkeit von ϕ und der Umkehrabbildung $\phi^{-1} : X \rightarrow K, [(x_m)_m] \mapsto \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$ folgt aus der Isometrie-Eigenschaft für ϕ . \square

5.4. BEMERKUNG. (i) Es kann geschehen, dass zwei in $\lim_{\leftarrow} X_m$ verschiedene Punkte $x = (x_m)_m \neq y = (y_m)_m$ nach Einführen der Metrik $\bar{\rho}$ beziehungsweise der Äquivalenzrelation \sim miteinander identifiziert werden können, $[x]$ und $[y]$ also demselben Punkt in K entsprechen.

(ii) Nach Äquivalenz B) (III) aus Definition 5.2 kann es keine stetige nichtkonstante Abbildung von K beziehungsweise X nach X_m geben, wohl aber von $\lim_{\leftarrow} X_m$ nach X_m ; beispielsweise sind die Projektionsabbildungen $\psi_m : \lim_{\leftarrow} X_m \rightarrow X_m, (x_m)_m \mapsto x_m$ stetig nach Konstruktion.

(iii) Wir haben mit Satz 5.1 beziehungsweise Satz 5.3 einen alternativen Beweis für die wohlbekannte Aussage gegeben, dass jeder kompakte metrische Raum Quotient eines nulldimensionalen Raumes ist, vergleiche etwa [32] (6.6.23, 6.6.21, 5.8.10, 1.1.19).

Als Nächstes betrachten wir auf den kompakten endlichen vollständigen metrischen Räumen (X_m, ρ_m) mit $\rho_m = \rho|_{X_m}$ die C^* -Algebra der beschränkten bzw. stetigen Funktionen $(\ell^\infty(X_m), \|\cdot\|_\infty) = (C(X_m), \|\cdot\|_\infty)$. Diese verbinden wir mit den zu $\psi_{m_2, m_1} : X_{m_2} \rightarrow X_{m_1}$ für $m_1 \leq m_2$ dualen Abbildungen

$$\begin{aligned} \pi_{m_1, m_2} : C(X_{m_1}) &\rightarrow C(X_{m_2}) \\ f_{m_1} &\mapsto \pi_{m_1, m_2}(f_{m_1}) \text{ mit } \pi_{m_1, m_2}(f_{m_1})(x_{m_2}) := f_{m_1}(\psi_{m_2, m_1}(x_{m_2})) \end{aligned}$$

und nennen dieses Vorgehen **konstantes Fortsetzen**. Offensichtlich sind die Abbildungen π_{m_1, m_2} Isometrien, und $(C(X_m), \|\cdot\|_\infty, \pi)_m$ bildet eine direkte Folge von C^* -Algebren, deren direkter Limes isometrisch isomorph zu $C(\lim_{\leftarrow} X_m)$ ist, wie der folgende Satz beweist.

5.5. SATZ. *Zwischen $\lim_{\rightarrow} C(X_m)$ und $C(\lim_{\leftarrow} X_m)$ gibt es eine lineare bijektive Isometrie.*

BEWEIS. Wir weisen die Voraussetzungen von Satz A.4 nach: Mit π_{m_1, m_2} sind auch die Einbettungsabbildungen $\pi_m : C(X_m) \rightarrow \lim_{\rightarrow} C(X_m)$ Isometrien. Weiter ist der Raum $C(\lim_{\leftarrow} X_m)$ ein Banachraum bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, weil $\lim_{\leftarrow} X_m$ als inverser Limes kompakter metrischer Räume kompakt ist, vgl. [21] (Appendix Two, 2.4(2)). Wir definieren

$$\begin{aligned} \phi_m : C(X_m) &\rightarrow C\left(\lim_{\leftarrow} X_m\right), \\ f_m &\mapsto \phi_m(f_m) \text{ mit } \phi_m(f_m)((x_m)_m) := \lim_{p \rightarrow \infty} \pi_{m, m+p}(f_m)(x_{m+p}) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} f_m(\psi_{m+p, m}(x_{m+p})). \end{aligned}$$

[Man beachte: Wie in Bemerkung 5.4 bereits erwähnt, ist es möglich, dass $x \neq y$ in $\lim_{\leftarrow} X_m$, aber $[x] = [y]$ in X gilt. Dennoch ist $\phi_m(f_m)(x) \neq \phi_m(f_m)(y)$ für $f_m \in C(X_m)$ möglich, eben weil $\lim_{\leftarrow} X_m$ total unzusammenhängend ist. Nach der Restklassenbildung und dem Übergang zu X darf dies aber nicht mehr auftreten; darum müssen wir

auch später mit der de Leeuw-Abbildung die lipschitzstetigen Funktionen aussortieren.] Weiter gilt für $f_{m_1} \in C(X_{m_1})$ und $(x_m)_m \in \lim_{\leftarrow} X_m$

$$\begin{aligned} \phi_{m_2} \circ \pi_{m_1, m_2}(f_{m_1})((x_m)_m) &= \lim_{p \rightarrow \infty} (\pi_{m_2, m_2+p} \circ \pi_{m_1, m_2}(f_{m_1}))(x_{m_2+p}) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \pi_{m_1, m_2+p}(f_{m_1})(x_{m_2+p}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \pi_{m_1, m_1+p}(f_{m_1})(x_{m_1+p}) \\ &= \phi_{m_1}(f_{m_1})((x_m)_m). \end{aligned}$$

Außerdem ist ϕ_m wegen $\|\phi_m(f_m)\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\pi_{m, m+p}(f_m)\|_\infty = \|f_m\|_\infty$, also wegen der Isometrie von π_{m_1, m_2} für $m_1 \leq m_2$, isometrisch.

Schließlich liegt $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \phi_m(C(X_m))$ dicht in $C(\lim_{\leftarrow} X_m)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Seien dazu $\varepsilon > 0$ und $f \in C(\lim_{\leftarrow} X_m)$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für $x = (x_m)_m, y = (y_m)_m \in \lim_{\leftarrow} X_m$ mit $\tilde{\rho}(x, y) = \lim_{p \rightarrow \infty} \rho(x_p, y_p) < \delta$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Es gibt dann ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{2} \text{diam}(W_j^m) \leq \varepsilon_m < \frac{\delta}{2}$ für alle $m \geq m_0$ und $1 \leq j \leq k_m$ gilt. Wir wählen m_0 derart. Sei $x = (x_m)_m \in \lim_{\leftarrow} X_m$, also $\psi_{m_2, m_1}(x_{m_2}) = x_{m_1}$. Wir definieren $g \in C(X_{m_0})$ durch $g(y) := f(\psi_{m_0, 1}(y), \psi_{m_0, 2}(y), \dots, \psi_{m_0, m_0-1}(y), y, y, \dots)$ für $y \in X_{m_0}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \phi_{m_0}(g)(x) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \pi_{m_0, m_0+p}(g)(x_{m_0+p}) = \lim_{p \rightarrow \infty} g(\psi_{m_0+p, m_0}(x_{m_0+p})) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} g(x_{m_0}) = g(x_{m_0}) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} |f(x) - \phi_{m_0}(g)(x)| &\leq |f((x_m)_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_{m_0}, x_{m_0}, \dots)| \\ &\quad + |f(x_1, x_2, \dots, x_{m_0}, x_{m_0}, \dots) - \phi_{m_0}(g)(x)| \\ &\stackrel{(*)}{<} \varepsilon + |f(x_1, x_2, \dots, x_{m_0}, x_{m_0}, \dots) - g(x_{m_0})| = \varepsilon + 0 = \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei (*) wegen $\tilde{\rho}(x, (x_1, x_2, \dots, x_{m_0}, x_{m_0}, \dots)) < \delta$ nach Wahl von m_0 und Konstruktion der Partition gilt. Da $x \in \lim_{\leftarrow} X_m$ beliebig war, folgt $\|f - \phi_{m_0}(g)\|_\infty < \varepsilon$, und die Behauptung ergibt sich aus der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ und Satz A.4. \square

In Satz 3.7 haben wir gesehen, dass wir die lipschitzstetigen Funktionen auf einem kompakten metrischen Raum (K, ρ) als inversen Limes einer Folge von endlichdimensionalen involutiven Banach-Algebren schreiben können:

$$\lim_{\leftarrow} (C(X_m), \max(\|\cdot\|_\infty, \|d_m \cdot\|_\infty)) \cong (Lip(K), \max(\|\cdot\|_\infty, Lip(\cdot)))$$

für die de Leeuw-Abbildung d_m . Jetzt gehen wir daran, eine ähnliche Darstellung mit dem direkten Limes zu finden.

$(C(X_m), \|\cdot\|_\infty, \pi)_m$ bildet eine direkte Folge von C^* -Algebren. Um die lipschitzstetigen Funktionen zu erhalten, könnten wir zunächst versuchen, wie in Abschnitt 1 von Kapitel 3 vorzugehen und den direkten Limes von $(C(X_m), \max(\|\cdot\|_\infty, \|d_m \cdot\|_\infty), \pi)_m = (Lip(X_m), \max(\|\cdot\|_\infty, \|d_m \cdot\|_\infty), \pi)_m$ (in irgendeiner Kategorie, beispielsweise zunächst der von involutiven Banachalgebren) zu bilden. Dies scheitert schon daran, dass diese Folge keine direkte Folge von Banach-Algebren bildet, weil konstantes Fortsetzen bezüglich $\|d_m \cdot\|_\infty$ nicht kontraktiv ist. Das heißt, die auf Ebene der $C(X_m)$ -Banach-Bimoduln existierenden verbindenden Abbildungen $\tau_{m_1, m_2} : C(\tilde{X}_{m_1}) \rightarrow C(\tilde{X}_{m_2})$, gegeben durch $\tau_{m_1, m_2}(g_{m_1}) = g_{m_1} \circ (\psi_{m_2, m_1} \times \psi_{m_2, m_1}|_{\tilde{X}_{m_2}})$ für $g_{m_1} \in C(\tilde{X}_{m_1})$, sind keine

Kontraktionen, weswegen die Modul-Norm im Limes divergiert.

Aber auch, wenn diese Abbildungen Kontraktionen wären oder wenn wir die Abbildungen derart anpassen könnten, so dass wir neben der direkten Folge von C^* -Algebren $(D_m, \|\cdot\|_{D_m}, \pi)_m = (C(X_m), \|\cdot\|_\infty, \pi)_m$ eine direkte Folge $(\hat{D}_m = C(X_m), \|\cdot\|_{\hat{D}_m}, \hat{\pi})_m$ erhalten, welches die Lipschitz-Halbnorm beziehungsweise die de Leeuw-Abbildung in irgendeiner Form beinhaltet und so die Lipschitzstetigkeit auf K kodiert, ist die nach der universellen Eigenschaft eindeutig bestimmte Abbildung $k : \lim_{\rightarrow} \hat{D}_m \rightarrow \lim_{\rightarrow} D_m$ in der Regel nicht injektiv. Der Grund hierfür ist der folgende: Vor Satz B.1 in Anhang B gelang es uns, die Injektivität der entsprechenden Abbildung $k = \iota$ beim inversen Limes nachzuweisen, weil wir die Abbildungen $\hat{d} : \hat{D} \rightarrow E$ beziehungsweise $d_m : D_m \rightarrow E_m$ durch die Abbildung $\iota = k$ ausdrücken und damit kontrollieren konnten, wie uns Abbildung 33 lehrt. Dies ist im Fall des direkten Limes nicht mehr möglich, einfach deswegen, weil die verbindenden Abbildungen zwischen den einzelnen Räumen in die entgegengesetzte Richtung laufen. Daher können wir nicht wie im inversen Fall das Betrachten der Norm in E auf die Norm in E_m zurückführen. Wir müssten also die Injektivität von k fordern.

Wir schlagen deswegen einen anderen Weg ein, um die lipschitzstetigen Funktionen zu beschreiben und betrachten

$$\mathcal{R} := \left\{ f = (f_m)_{m \in \mathbb{N}} \mid f \in \prod_{m \in \mathbb{N}} C(X_m), \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } \pi_{m_1, m_2}(f_{m_1}) = f_{m_2} \forall m_2 \geq m_1 \geq m_0 \right\},$$

ausgestattet mit der Halbnorm von $\prod_{m \in \mathbb{N}} C(X_m)$, also $\|(f_m)_m\|_{\mathcal{R}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|_\infty$. Anstatt nun \mathcal{R} modulo des Ideals der Nullfolgen bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{R}}$ zu betrachten und den Abschluss bezüglich der Norm des Quotientenraums zu bilden, was uns nach Satz A.2 unmittelbar auf den direkten Limes führen würde, bilden wir sofort den Abschluss $\overline{\mathcal{R}}$ von \mathcal{R} bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{R}}$. Anschaulich gesprochen beinhaltet $\overline{\mathcal{R}}$ alle Funktionen f , die sich gleichmäßig durch Funktionen approximieren lassen, welche innerhalb der Partitions Mengen $\{V_j^m \mid 1 \leq j \leq k_m\}$ einer Stufe konstant sind; man approximiert f also gleichmäßig durch Treppenfunktionen einer bestimmten Bauart. Sicherlich enthält $\overline{\mathcal{R}}$ die stetigen Funktionen auf K , aber $C(K) \cap \mathcal{R} = \{c \cdot \mathbf{1}_K \mid c \in \mathbb{C}\}$, obwohl \mathcal{R} dicht in $\overline{\mathcal{R}}$ liegt. Wir wollen nun die lipschitzstetigen Funktionen auf K in $\overline{\mathcal{R}}$ aussortieren, indem wir eine zusätzliche Bedingung an die Elemente von $\overline{\mathcal{R}}$ stellen; die de Leeuw-Abbildung spielt dabei wieder die entscheidende Rolle.

Wir geben zunächst ein neues Modell für $\overline{\mathcal{R}}$ beziehungsweise für den direkten Limes der direkten Folge $(C(X_m), \|\cdot\|_\infty, \pi)_m$ an. Der Abschluss $\overline{\mathcal{R}}$ von \mathcal{R} in $\prod_{m \in \mathbb{N}} C(X_m)$ beziehungsweise die Vervollständigung $\overline{\mathcal{R}}$ von \mathcal{R} besteht aus Cauchyfolgen in \mathcal{R} modulo Nullfolgen: $[(f^n)_{n \in \mathbb{N}}] = [((f_m^n)_{m \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}]$ für $f^n = (f_m^n)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}$, wobei $[\cdot]$ die Restklasse (modulo Nullfolgen) bezeichnet. Für die Folge $(f_m^n)_{m \in \mathbb{N}}$ gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $f_m^n = \pi_{m_0, m}(f_{m_0}^n)$ für alle $m \geq m_0$ gilt. Für $f = (f_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}$ setzen wir $k_f := \min\{m \in \mathbb{N} \mid f_{m+p} = \pi_{m, m+p}(f_m) \forall p \in \mathbb{N}\}$. Dann charakterisiert aber $f_{k_{f^n}}$ schon die ganze Folge $f^n = (f_m^n)_m$, denn der Anfang der Folge, also $(f_1^n, \dots, f_{k_{f^n}-1}^n)$, ist irrelevant. Durch Hinzufügen weiterer Glieder zur Folge $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ können wir erreichen, dass $k_{f^n} \leq n$ ist:

Ist $k_{f^1} > 1$, so setzen wir $g_1 = \dots = g_{k_{f^1}-1} := (\mathbf{0})_{m \in \mathbb{N}}$ und $g_{k_{f^1}} := f^1$.

Ist $k_{f^n} > n$, so setzen wir $g_{k_{f^n-1}+1} = \dots = g_{k_{f^n-1}} := g_{k_{f^n-1}}$ und $g_{k_{f^n}} := f^n$.

So erhalten wir eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die im Wesentlichen die Folge $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ darstellt, nur dass in $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einige Folgenglieder mehrfach hintereinander auftreten können. Für $g_n = (g_{n,1}, g_{n,2}, \dots) = (g_{n,m})_m$ gilt weiterhin $\pi_{n,n+p}(g_{n,n}) = g_{n,n+p}$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Es genügt also, statt der ganzen Folge $(g_{n,m})_m$ nur das Folgenglied $g_{n,n}$ zu betrachten, eben weil der Anfang von $(g_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ irrelevant ist. Ein neues Modell für $\overline{\mathcal{R}}$ ist somit

$$\overline{\mathcal{R}} = \{g = (g_m)_m \mid g_i \in C(X_i), \forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } \|\pi_{m_1, m_2}(g_{m_1}) - g_{m_2}\|_\infty < \varepsilon \\ \forall m_2 \geq m_1 \geq m_0\}$$

beziehungsweise äquivalent dazu

$$\overline{\mathcal{R}} = \left\{ g = (g_m)_m \mid g_i \in C(X_i), (\pi'_m(g_m))_{m \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchyfolge in } \ell^\infty \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m \right) \right\},$$

wobei

$$\pi'_m : \ell^\infty(X_m) \rightarrow \ell^\infty \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k \right),$$

$$f_m \mapsto \pi'_m(f_m) \text{ mit } \pi'_m(f_m)(x) = \pi_{m,k}(f_m)(x) \text{ falls } x \in X_k \supset X_m.$$

Wir können nun noch Folgen in $\overline{\mathcal{R}}$ identifizieren, die sich nur um eine Nullfolge unterscheiden. Die Menge, welche wir so aus $\overline{\mathcal{R}}$ erhalten, bezeichnen wir mit $\overline{\mathcal{R}}_N$. Diese Menge ist ein neues Modell des direkten Limes der Räume $C(X_m)$: Ausgehend von \mathcal{R} sind wir, anstatt zuerst den Quotienten (modulo Nullfolgen) zu bilden und dann den Abschluss, umgekehrt vorgegangen; dies entspricht aber unserem Modell des direkten Limes aus Satz A.2, wie wir nun zeigen.

5.6. LEMMA. *Ein Modell des direkten Limes der direkten Folge $(C(X_m), \|\cdot\|_\infty, \pi)_m$ ist gegeben durch*

$$\overline{\mathcal{R}}_N = \{[g] = [(g_m)_m] \mid g_i \in C(X_i), \forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } \|\pi_{m_1, m_2}(g_{m_1}) - g_{m_2}\|_\infty < \varepsilon \\ \forall m_2 \geq m_1 \geq m_0\},$$

wobei $[\cdot]$ die Restklasse (modulo Nullfolgen) bedeutet, beziehungsweise durch

$$\overline{\mathcal{R}}_N = \left\{ [g] = [(g_m)_m] \mid g_i \in C(X_i), (\pi'_m(g_m))_{m \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchyfolge in } \ell^\infty \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m \right) \right\}.$$

BEWEIS. Wir müssen die Voraussetzungen von Satz A.4 nachweisen.

Wir zeigen zunächst, dass $\overline{\mathcal{R}}$ eine C^* -Algebra ist, dann gilt dies auch für $\overline{\mathcal{R}}_N$ als Quotient von $\overline{\mathcal{R}}$ modulo dem Ideal der Nullfolgen. Seien dazu $\varepsilon > 0$ und $(g^n)_{n \in \mathbb{N}} = ((g_m^n)_m)_n$ eine Cauchyfolge in $\overline{\mathcal{R}}$. Dann ist g^n in der C^* -Algebra $\prod_{m \in \mathbb{N}} C(X_m)$ konvergent gegen $h = (h_m)_m$, das bedeutet $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \|h_m - g_m^n\|_\infty = 0$, das heißt, es existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{m \in \mathbb{N}} \|h_m - g_m^n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geq k_0$. Wir wählen k_0 derart und $n_0 \geq k_0$ beliebig. Dann gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|\pi_{m_1, m_2}(g_{m_1}^{n_0}) - g_{m_2}^{n_0}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ für $m_2 \geq m_1 \geq m_0$. Wählen wir $m_2 \geq m_1 \geq m_0$, so gilt

$$\|\pi_{m_1, m_2}(h_{m_1}) - h_{m_2}\|_\infty \leq \|h_{m_1} - g_{m_1}^{n_0}\|_\infty + \|\pi_{m_1, m_2}(g_{m_1}^{n_0}) - g_{m_2}^{n_0}\|_\infty + \|g_{m_2}^{n_0} - h_{m_2}\|_\infty \\ < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Damit ist $\overline{\mathcal{R}}$ vollständig. Die übrigen Eigenschaften einer C^* -Algebra (mit komponentenweisen Verknüpfungen) vererben sich von $C(X_m)$ auf $\overline{\mathcal{R}}$.

Weiter erfüllen die Einbettungsabbildungen

$$\Phi_m : C(X_m) \rightarrow \overline{\mathcal{R}}_N, \quad g \mapsto [\underbrace{(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})}_{(m-1)\text{-mal}}, g, \pi_{m,m+1}(g), \pi_{m,m+2}(g), \dots]$$

offenbar die Voraussetzungen der Abbildungen ϕ_m aus Satz A.4. Aufgrund der Eigenschaften der Abbildungen π_{m_1, m_2} , $m_1 \leq m_2$, genügt es zu zeigen, dass für

$$\tilde{\Phi}_m : C(X_m) \rightarrow \overline{\mathcal{R}}, \quad g \mapsto (\underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_{(m-1)\text{-mal}}, g, \pi_{m,m+1}(g), \pi_{m,m+2}(g), \dots)$$

die Menge $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{\Phi}_m(C(X_m))$ dicht in $\overline{\mathcal{R}}$ liegt. Seien dazu $\varepsilon > 0$ und $g = (g_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \overline{\mathcal{R}}$. Sei $m_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\|\pi_{m_1, m_2}(g_{m_1}) - g_{m_2}\|_\infty < \varepsilon$ für alle $m_2 \geq m_1 \geq m_0$. Dann gilt $\|\tilde{\Phi}_{m_0}(g_{m_0}) - g\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\pi_{m_0, m_0+p}(g_{m_0}) - g_{m_0+p}\|_\infty < \varepsilon$. Da ε beliebig war, folgt die Behauptung. \square

Wir arbeiten mit diesem Modell von $\overline{\mathcal{R}}$ beziehungsweise $\overline{\mathcal{R}}_N$.

Die lipschitzstetigen Funktionen erhalten wir nun durch die Menge

$$G := \{g = [(g_m)_{m \in \mathbb{N}}] \mid g \in \overline{\mathcal{R}}_N, \exists (f_m)_m \in g = [(g_m)_{m \in \mathbb{N}}] \text{ mit } \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m f_m\|_\infty < \infty\}.$$

Die Elemente von G sind also diejenigen Elemente beziehungsweise Restklassen in $\overline{\mathcal{R}}_N$, welche eine Folge $(f_m)_m$ enthalten, so dass die Folge $(\|d_m f_m\|_\infty)_m$ beschränkt ist. Diese Bedingung charakterisiert gerade die Lipschitzstetigkeit, wie wir sehen werden.

Rückübersetzt in die ursprüngliche Form heißt dies:

$$\mathcal{R} = \left\{ f \in \prod_{m \in \mathbb{N}} \ell^\infty(X_m) \mid f = (f_m)_m, \exists m_0 \text{ mit } \pi_{m_0, m_0+p}(f_{m_0}) = f_{m_0+p} \forall p \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\overline{\mathcal{R}} = \{(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid g_n \in \mathcal{R}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchyfolge in } \mathcal{R}\},$$

$$\overline{\mathcal{R}}_N = \{[(g_n)_{n \in \mathbb{N}}] \mid g_n \in \mathcal{R}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchyfolge in } \mathcal{R}\},$$

$$G = \left\{ g = [(g_n)_n] \in \overline{\mathcal{R}}_N \mid \exists f = (f_n)_n \in g, \limsup_{n \rightarrow \infty} \|d_{k_{f_n}} f_{k_{f_n}}^n\|_\infty < \infty \text{ für } f_n = (f_m^n)_m \in \mathcal{R} \right\}.$$

In der Definition von G ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathcal{R} mit $f_n = (f_m^n)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}$.

Das folgende Theorem beweisen wir allerdings wie erwähnt mit dem neuen, übersichtlicheren Modell. Wir betrachten aber zunächst ein Beispiel.

5.7. BEISPIEL. Sei $K = [0, 1]$. Wir können eine absteigende Folge von Partitionen von K und darin endliche Punktfolgen so wählen, dass $\overline{Y}_0 = K$, $X_0 = \{0\}$ und $X_m = \left\{ \frac{k}{2^{m-1}} \mid 0 \leq k \leq 2^{m-1} \right\}$ ($m \in \mathbb{N}$) gilt; $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$ besteht also aus den abbrechenden Folgen in der dyadischen Darstellung von K und der Zahl 1.

Die Nullfunktion auf K ist lipschitzstetig mit Lipschitz-Halbnorm $Lip(\mathbf{0}_K) = 0$. Dennoch lässt sich $\mathbf{0}_K$ gleichmäßig auf K durch Folgen $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit $f_m \in C(X_m)$ und $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m f_m\|_\infty \neq 0$ approximieren, beispielsweise durch

$$f_m^a(x) := \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} & \text{für } x = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{oder} \quad f_m^b(x) := \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} & \text{für } x = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m f_m^a\|_\infty = 1$, $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m f_m^b\|_\infty = \infty$.
Natürlich gilt $(f_m^a)_{m \in \mathbb{N}}, (f_m^b)_{m \in \mathbb{N}} \in [(\mathbf{0})_{m \in \mathbb{N}}]$.

Für $g \in G$ definieren wir noch $Lip(g) := \inf\{\limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m f_m\|_\infty \mid (f_m)_{m \in \mathbb{N}} \in g\} < \infty$. Dies liefert gerade die Lipschitz-Halbnorm, wie das folgende Theorem zeigt.

5.8. THEOREM. Für einen kompakten metrischen Raum (K, ρ) und den in Satz 5.3 genannten zugeordneten Quotienten $(X, \bar{\rho})$ des inversen Limes einer aufsteigenden Folge $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ endlicher Punktmengen existieren zwischen $(Lip(K), \max(\|\cdot\|_\infty, Lip(\cdot)))$, $(Lip(X), \max(\|\cdot\|_\infty, Lip(\cdot)))$ und $(G, \|\cdot\|_G)$ mit $\|\cdot\|_G := \max(\|\cdot\|_{\bar{\mathcal{R}}_N}, Lip(\cdot))$ bijektive Isometrien, gegeben durch

$$\Phi_1 : G \rightarrow Lip(X), g \mapsto \Phi_1(g) \text{ mit } \Phi_1(g)([x]) := \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x_m)$$

für $[x] = [(x_m)_m]$ und eine beliebige Wahl von $(g_m)_{m \in \mathbb{N}} \in g$ mit $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty < \infty$,

$$\Phi_2 : Lip(K) \rightarrow G, f \mapsto \Phi_2(f) := [(f|_{X_m})_{m \in \mathbb{N}}],$$

$$\Phi_3 : Lip(X) \rightarrow Lip(K), g \mapsto \Phi_3(g) \text{ mit } \Phi_3(g)(p) := g\left(\left[\left(x_{j_p}^m\right)_{m \in \mathbb{N}}\right]\right),$$

$$\Phi_3^{-1} : Lip(K) \rightarrow Lip(X), f \mapsto \Phi_3^{-1}(f) \text{ mit } \Phi_3^{-1}(f)([(x_m)_{m \in \mathbb{N}}]) := \lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m).$$

Also kommutiert das Diagramm in Abbildung 19.

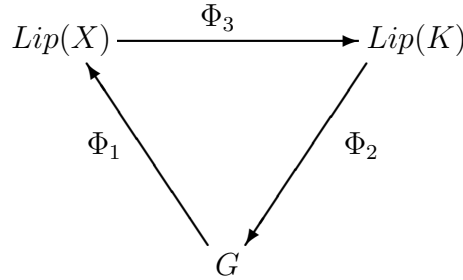


ABBILDUNG 19. Kommutatives Diagramm zum Beschreiben lipschitz-stetiger Funktionen.

BEWEIS.

- (a) Die Abbildungen Φ_3 und Φ_3^{-1} sind isometrisch und zueinander invers. Dies folgt unmittelbar aus Satz 5.3 :

Seien $g \in Lip(X)$, $x = (x_m)_m \in im_{\leftarrow} X_m$, also $[x] \in X$. Dann bildet $(x_m)_m$ eine Cauchyfolge im vollständigen metrischen Raum (K, ρ) , ist also gegen $y \in K$ konvergent. Aus der Stetigkeit von g und der von $\Phi_3(g)$ wegen der Isometrie zwischen (K, ρ) und $(X, \bar{\rho})$ folgt nun

$$\Phi_3^{-1} \circ \Phi_3(g)([x]) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_3(g)(x_m) = \Phi_3(g)(y) = g\left(\left(x_{j_y}^m\right)_m\right) = g([x])$$

wegen $([x]) = \left[\left(x_{j_y}^m\right)_m\right]$.

Seien $f \in Lip(K)$ und $y \in K$. Dann ist

$$\Phi_3 \circ \Phi_3^{-1}(f)(y) = \Phi_3^{-1}(f)\left(\left(x_{j_y}^m\right)_{m \in \mathbb{N}}\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} f\left(x_{j_y}^m\right) = f(y).$$

Weiter ist $\|\Phi_3^{-1}(f)\|_\infty = \sup_{[x]=[(x_m)_m] \in X} |\Phi_3^{-1}(f)([x])| = \sup_{x \in K} |f(x)| = \|f\|_\infty$
und

$$\begin{aligned} Lip(\Phi_3^{-1}(f)) &= \sup_{\substack{[x]=[(x_m)_m] \in X \\ [y]=[(y_m)_m] \in X \\ [x] \neq [y]}} \frac{|\Phi_3^{-1}(f)([x]) - \Phi_3^{-1}(f)([y])|}{\bar{\rho}([x], [y])} \\ &= \sup_{\substack{[x]=[(x_m)_m] \in X \\ [y]=[(y_m)_m] \in X \\ [x] \neq [y]}} \frac{\lim_{m \rightarrow \infty} |f(x_m) - f(y_m)|}{\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_m, y_m)} \\ &= \sup_{\substack{x, y \in K \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x, y)} = Lip(f). \end{aligned}$$

Insbesondere vermittelt Φ_3 eine bijektive lineare Isometrie von $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ nach $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ mit Inversem Φ_3^{-1} .

(b) Für $f_m \in C(X_m)$ definieren wir $h_{f_m} \in \ell^\infty(X_m \times X_m)$ durch

$$h_{f_m}(x, y) := \begin{cases} (d_m f_m)(x, y) & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}.$$

(c) Die Abbildung Φ_1 ist wohldefiniert:

Seien dazu $g \in G$ und $(g_m)_{m \in \mathbb{N}} \in g \in G$ mit $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty < \infty$, außerdem $x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit $[x] \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|\pi_{m_1, m_2}(g_{m_1}) - g_{m_2}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ für $m_2 \geq m_1 \geq m_0$. Weiter gibt es zur Cauchyfolge $(x_m)_m$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\rho(x_{k_1}, x_{k_2}) < \frac{\varepsilon}{2(\limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty + 1)}$ für alle $k_2 \geq k_1 \geq k_0$. Außerdem gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|d_n g_n\|_\infty < \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty + 1$ für alle $n \geq n_0$. Für $k_2 \geq k_1 \geq \max(k_0, m_0, n_0)$ ist dann

$$\begin{aligned} |g_{k_1}(x_{k_1}) - g_{k_2}(x_{k_2})| &\leq |\pi_{k_1, k_2}(g_{k_1})(x_{k_1}) - g_{k_2}(x_{k_1})| + |g_{k_2}(x_{k_1}) - g_{k_2}(x_{k_2})| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left| h_{g_{k_2}}(x_{k_1}, x_{k_2}) \right| \cdot \rho(x_{k_1}, x_{k_2}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left(\limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty + 1 \right) \cdot \rho(x_{k_1}, x_{k_2}) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $(g_m(x_m))_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathbb{C} , das bedeutet, $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x_m)$ existiert.

Seien $(g_m)_m \in g \in G$ mit $M := \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty < \infty$ und $[(x_m)_m] = [(y_m)_m] \in X$. Dann gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|h_{g_m}\|_\infty < M + 1$ für alle $m \geq m_0$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \left| \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x_m) - \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(y_m) \right| &= \lim_{m \rightarrow \infty} |g_m(x_m) - g_m(y_m)| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} |h_{g_m}(x_m, y_m)| \cdot \rho(x_m, y_m) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} (M + 1) \cdot \rho(x_m, y_m) = 0 \end{aligned}$$

Außerdem gilt für $(f_m)_m, (g_m)_m \in g \in G$ und $[(x_m)_m] \in X$

$$\begin{aligned} \left| \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x_m) - \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x_m) \right| &= \left| \lim_{m \rightarrow \infty} (f_m(x_m) - g_m(x_m)) \right| \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - g_m\|_\infty = 0. \end{aligned}$$

(d) G ist vollständig bezüglich $\|\cdot\|_G = \max(\|\cdot\|_{\overline{\mathcal{R}}_N}, Lip(\cdot))$:

Seien $\varepsilon > 0$ und $(g^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in G . Dann konvergiert die Folge $(g^n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_{\overline{\mathcal{R}}_N}$ gegen ein $f = [(f_m)_{m \in \mathbb{N}}] \in \overline{\mathcal{R}}_N$ wegen der Vollständigkeit von $(\overline{\mathcal{R}}_N, \|\cdot\|_{\overline{\mathcal{R}}_N})$, und $(g^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist des Weiteren eine Cauchyfolge bezüglich der Halbnorm $Lip(\cdot)$. Also gibt es eine natürliche Zahl n_0 mit $Lip(g^{n_2} - g^{n_1}) = \inf \{ \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m(g_m^{n_2} - g_m^{n_1})\|_\infty \mid (g_m^{n_i})_{m \in \mathbb{N}} \in g^{n_i}, i \in \{1, 2\} \} < \varepsilon$ für $n_2 \geq n_1 \geq n_0$. Dann folgen für $n \geq n_0$ aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} Lip(g^n) &= \inf \left\{ \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m^n\|_\infty \mid (g_m^n)_{m \in \mathbb{N}} \in g^n \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m^{n_0}\|_\infty \mid (g_m^{n_0})_{m \in \mathbb{N}} \in g^{n_0} \right\} + \varepsilon \\ &= Lip(g^{n_0}) + \varepsilon \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Lip(f) &= \inf \left\{ \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m f_m\|_\infty \mid (f_m)_m \in f \right\} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\inf \left\{ \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m^n\|_\infty \mid (g_m^n)_m \in g^n \right\} \right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\inf \left\{ \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m^{n_0}\|_\infty \mid (g_m^{n_0})_m \in g^{n_0} \right\} + \varepsilon \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} (Lip(g^{n_0}) + \varepsilon) = Lip(g^{n_0}) + \varepsilon < \infty, \end{aligned}$$

also $f \in G$.

(e) Die Abbildungen Φ_1 und $\Phi_2 \circ \Phi_3$ sind bijektiv und zueinander invers. Sind nämlich $f \in Lip(X)$ und $[x] \in X$ für $x = (x_m)_m$, so ist $\Phi_3(f)(y) = f([(x_{j_y}^m)_m])$ für $y \in K$ und

$$\begin{aligned} \Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \Phi_3(f)([x]) &= \Phi_1(\Phi_2 \circ \Phi_3(f))([x]) = \Phi_1([(\Phi_3(f)|_{X_m})_{m \in \mathbb{N}}])([x]) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (\Phi_3(f)|_{X_m})(x_m) = f([x]). \end{aligned}$$

Seien umgekehrt $g \in G$ und $(g_m)_m \in g$ mit $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty < \infty$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty \neq 0$. Dies ist nach Beispiel 5.7 möglich, indem notfalls zu $(g_m)_m$ eine Folge $(a_m)_m \in [(0)_m]$ mit $0 \neq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m a_m\| < \infty$ hinzuaddiert wird. Es gilt $\Phi_2 \circ \Phi_3 \circ \Phi_1(g) = [(\Phi_3 \circ \Phi_1(g)|_{X_m})_m]$. Wir definieren $f_m := \Phi_3 \circ \Phi_1(g)|_{X_m}$. Dann gilt für $x_m \in X_m$

$$\begin{aligned} f_m(x_m) &= \Phi_3 \circ \Phi_1(g)|_{X_m}(x_m) = \Phi_3 \circ \Phi_1(g)(x_m) \\ &= \Phi_1(g) \left(\left[\left(x_{j_{x_m}^1}^1, x_{j_{x_m}^2}^2, \dots, x_{j_{x_m}^{m-1}}^{m-1}, x_m, x_m, \dots \right) \right] \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} g_{m+p}(x_m). \end{aligned}$$

Dann ist $f_m \in C(X_m)$. Wir zeigen, dass $(\pi'_m(f_m))_{m \in \mathbb{N}}$ eine $\ell^\infty(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m)$ -Cauchy-Folge ist. Seien dazu $\varepsilon > 0$ und $z \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$, etwa $z \in X_{m_0}$.

Es existiert ein $m_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $y \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$ gilt: $\rho(y, x_{j_y}^m) < \frac{\varepsilon}{2 \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty}$ für $m \geq m_1$. Seien $k_2 \geq k_1 \geq m_1$.

Falls $m_0 \leq k_1$, ist

$$\begin{aligned} \left| \pi'_{k_1}(f_{k_1})(z) - \pi'_{k_2}(f_{k_2})(z) \right| &= |f_{k_1}(z) - f_{k_2}(z)| \\ &= \left| \lim_{p \rightarrow \infty} g_{k_1+p}(z) - \lim_{p \rightarrow \infty} g_{k_2+p}(z) \right| = 0. \end{aligned}$$

Falls $m_1 \leq k_1 < m_0 \leq k_2$, so ist

$$\begin{aligned} \left| \pi'_{k_1}(f_{k_1})(z) - \pi'_{k_2}(f_{k_2})(z) \right| &= \left| \lim_{p \rightarrow \infty} g_{k_1+p} \left(x_{j_z}^{k_1} \right) - f_{k_2}(z) \right| \\ &\leq \left| \lim_{p \rightarrow \infty} g_{k_1+p} \left(x_{j_z}^{k_1} \right) - \lim_{p \rightarrow \infty} g_{k_1+p}(z) \right| \\ &\quad + \underbrace{\left| \lim_{p \rightarrow \infty} g_{k_1+p}(z) - f_{k_2}(z) \right|}_{=0 \text{ da } k_2 \geq m_0, \text{ also } z \in X_{k_2}} \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty \cdot \rho \left(z, x_{j_z}^{k_1} \right) < \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung wegen $k_1 \geq m_1$ erfüllt ist.

Falls $m_1 \leq k_1 \leq k_2 < m_0$, so ist

$$\begin{aligned} \left| \pi'_{k_1}(f_{k_1})(z) - \pi'_{k_2}(f_{k_2})(z) \right| &= \left| \lim_{p \rightarrow \infty} g_{k_1+p} \left(x_{j_z}^{k_1} \right) - \lim_{p \rightarrow \infty} g_{k_2+p} \left(x_{j_z}^{k_2} \right) \right| \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty \cdot \rho \left(x_{j_z}^{k_1}, x_{j_z}^{k_2} \right) \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty \cdot \left(\rho \left(x_{j_z}^{k_1}, z \right) + \rho \left(z, x_{j_z}^{k_2} \right) \right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $(\pi'_m(f_m))_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, das heißt $[(f_m)_{m \in \mathbb{N}}] \in \overline{\mathcal{R}}_N$. Weiter ist $[(f_m)_m] = [(g_m)_m] \in G$ aufgrund der Definition von f_m , und es gilt sogar $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty = \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m f_m\|_\infty < \infty$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

- (f) Also ist auch Φ_2 bijektiv mit $\Phi_2^{-1} = \Phi_3 \circ \Phi_1$, und es gilt $\Phi_3^{-1} = \Phi_1 \circ \Phi_2$.
(g) Φ_1 und Φ_2 sind isometrisch. Sei $f \in Lip(K)$. Dann gilt

$$\|\Phi_2(f)\|_{\overline{\mathcal{R}}_N} = \|[(f|_{X_m})_{m \in \mathbb{N}}]\|_{\overline{\mathcal{R}}_N} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f|_{X_m}\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Mit (a) folgt $\|\Phi_1(g)\|_\infty = \|g\|_{\overline{\mathcal{R}}_N}$ für alle $g \in G$. Weiter ist

$$\begin{aligned} Lip(\Phi_2(f)) &= \inf \left\{ \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty \mid (g_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \Phi_2(f) \right\} \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m(f|_{X_m})\|_\infty = Lip(f). \end{aligned}$$

Seien umgekehrt $g \in G$ und $(g_m)_{m \in \mathbb{N}} \in g$ mit $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty < \infty$ beliebig. Dann gilt für $[x], [y] \in X$ mit $x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}}, y = (y_m)_{m \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} |\Phi_1(g)([x]) - \Phi_1(g)([y])| &= \lim_{m \rightarrow \infty} |g_m(x_m) - g_m(y_m)| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} |h_{g_m}(x_m, y_m) \cdot \rho(x_m, y_m)| \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_m, y_m) \\ &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \|d_m g_m\|_\infty \cdot \bar{\rho}([x], [y]). \end{aligned}$$

Aufgrund der Beliebigkeit von $(g_m)_m$ folgt

$$\begin{aligned} |\Phi_1(g)([x]) - \Phi_1(g)([y])| &\leq \inf_{m \rightarrow \infty} \{ \limsup \|d_m g_m\|_\infty \mid (g_m)_m \in g \} \cdot \bar{\rho}([x], [y]) \\ &= Lip(g) \cdot \bar{\rho}([x], [y]), \end{aligned}$$

und zusammen mit (a) $Lip(\Phi_2^{-1}(g)) = Lip(\Phi_3 \circ \Phi_1(g)) = Lip(\Phi_1(g)) \leq Lip(g)$. Daraus, aus (a) und aus (f) folgt die Behauptung.

Damit ist alles gezeigt. □

Dies lässt sich alles ohne weiteres auf den nicht-kommutativen Fall übertragen:

Wir betrachten eine unitale C^* -Algebra A mit einer Folge $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ endlichdimensionaler unitaler C^* -Unteralgebren bezüglich der von A induzierten Norm $\|\cdot\|_{A_m} := \|\cdot\|_A|_{A_m}$, welche aufsteigend ist in dem Sinn, dass es isometrische C^* -Algebra-Homomorphismen $\pi_{m_1, m_2} : A_{m_1} \rightarrow A_{m_2}$ gibt, wir also A_{m_1} als C^* -Unteralgebra von A_{m_2} ($m_1 \leq m_2$) auffassen können, so dass $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$ dicht in A liegt und $(A_m, \|\cdot\|_{A_m}, \pi)_m$ eine direkte Folge von C^* -Algebren bildet. Weiter existiere auf A_m eine Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_m}$. In diesem Falle definieren wir:

$$\mathcal{R} := \left\{ a = (a_m)_m \in \prod_{m \in \mathbb{N}} A_m \mid a_m \in A_m, \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } \pi_{m_0, m_0+p}(a_{m_0}) = a_{m_0+p} \forall p \in \mathbb{N} \right\},$$

$$k_a := \min\{m_0 \in \mathbb{N} \mid a_{m_0+p} = \pi_{m_0, m_0+p}(a_{m_0}) \forall p \in \mathbb{N}\} \text{ für } a = (a_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R},$$

$\bar{\mathcal{R}}_N := \bar{\mathcal{R}}$ die von \mathcal{R} in $\prod_{m \in \mathbb{N}} A_m$ erzeugte C^* -(Unter-)Algebra,

$$G := \left\{ a \in \bar{\mathcal{R}}_N \mid \exists \text{ Cauchyfolge } (a^n = (a_m^n)_m)_n \subset \mathcal{R}, a = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n, \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_{k_a^n}^n\|_{\mathcal{A}_{k_a^n}} < \infty \right\},$$

$$\|a\|_{\mathcal{A}} := \inf \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_{k_a^n}^n\|_{\mathcal{A}_{k_a^n}} \mid (a^n = (a_m^n)_m)_n \subset \mathcal{R} \text{ ist Cauchyfolge}, a = \lim_{m \rightarrow \infty} a^n \right\},$$

$$\mathcal{A} := \{a \in A \mid \|a\|_{\mathcal{A}} < +\infty\}.$$

2. Approximation kompakter T_2 -Räume mit inversen Limites von Graphen

Wir haben in den Sätzen 3.1 und 5.3 bereits gezeigt, wie wir jeden kompakten metrischen Hausdorff-Raum als direkten Limes beziehungsweise als Quotient eines inversen Limes von endlichen kompakten metrischen Räumen darstellen können. Wir geben in

diesem Abschnitt eine weitere Möglichkeit an, rein topologische, separable kompakte Hausdorff-Räume ohne Metrik analog durch eine Folge endlicher Graphen mit Hilfe des inversen Limes zu beschreiben. Als Eckenmengen in den endlichen Graphen fungieren dabei analog zum Vorgehen in Abschnitt 1 dieses Kapitels die Mengen \overline{Y}_m , $m \in \mathbb{N}$. Statt der Metrik auf K , die eine Pseudometrik auf $\lim_{\leftarrow} \overline{Y}_m$ und damit eine Äquivalenzrelation \sim auf $\lim_{\leftarrow} \overline{Y}_m$ induzierte, so dass $\lim_{\leftarrow} \overline{Y}_m / \sim$ isometrisch isomorph zum Ausgangskompaktum K wurde, erhalten wir durch die jeweils zugeordnete Kantenmenge eine Äquivalenzrelation, modulo welcher der Raum $\lim_{\leftarrow} \overline{Y}_m$, jetzt als inverser Limes rein topologischer, mit der diskreten Topologie ausgestatteter Räume $\overline{Y}_m = \{W_1^m, \dots, W_{k_m}^m\}$ aufgefasst, homöomorph zum Kompaktum K wird.

Diese Äquivalenzrelation lässt sich ihrerseits mit Hilfe einer Folge von gerichteten Graphen beschreiben, deren Eckenmengen genau die einzelnen Partitions Mengen bilden. Auch zwischen den Kantenmengen, welche wir ihrerseits mit der diskreten Topologie ausstatten, erhalten wir verbindende Abbildungen und dadurch eine inverse Folge von kompakten separablen Hausdorff-Räumen, sozusagen parallel zum Vorgehen auf Ebene der Ecken.

Zunächst müssen wir allerdings angeben, wie wir unser Kompaktum partitionieren.

5.9. DEFINITION. Sei K ein kompakter separabler Hausdorff-Raum. Wir betrachten eine Folge von Partitions Mengen $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit zugehöriger Folge $(\overline{Y}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $Y_1 = \overline{Y}_1 = \{K\}$.
- (ii) $Y_m = \{V_1^m, \dots, V_{k_m}^m\}$ ist eine Partition von K in k_m nichtleere Mengen, denen wir die Menge abgeschlossener Mengen $\overline{Y}_m = \{W_1^m = \overline{V}_1^m, \dots, W_{k_m}^m = \overline{V}_{k_m}^m\}$ zuordnen.
- (iii) Zu jeder natürlichen Zahl m und jedem $j \in \{1, \dots, k_m\}$ gibt es endlich viele Mengen aus Y_{m+1} , die eine Partition von V_j^m bilden; Y_{m+1} ist dann die Vereinigung all dieser Mengen für $1 \leq j \leq k_m$.
- (iv) Zu jeder endlichen offenen Überdeckung $\{U_i \mid i \in I\}$ des Kompaktums K existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $W_j^m = \overline{V}_j^m$ für alle $j \in \{1, \dots, k_m\}$ und alle $m \geq m_0$ vollständig in einem U_{i_j} ($i_j \in I$) liegt.
- (v) Des Weiteren wählen wir in den einzelnen Partitions Mengen V_j^m Punkte x_j^m , $1 \leq j \leq k_m$, $m \in \mathbb{N}$, so dass für $m_1 \leq m_2$ im Falle von $x_{j_1}^{m_1} \in V_{j_2}^{m_2}$ für Indizes $j_1 \in \{1, \dots, k_{m_1}\}$ und $j_2 \in \{1, \dots, k_{m_2}\}$ schon $x_{j_1}^{m_1} = x_{j_2}^{m_2}$ gilt. Weiter setzen wir $X_m := \{x_j^m \mid 1 \leq j \leq k_m\}$.

Wir nennen $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine **feiner werdende Partition** für K , $(\overline{Y}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ die **zugehörige Folge abgeschlossener Partitions Mengen** und $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ die **zugehörige Folge von in den Partitions Mengen gewählter Punkte**. Ist p ein beliebiger Punkt in K , so liegt dieser in genau einer Partitions Menge von Y_m , die wir mit $V_{j_p}^m$ bezeichnen wollen. Genauso sind $W_{j_p}^m$ und $x_{j_p}^m$ zu verstehen.

Bedingung (iv) besagt also, in welchem Sinne die Partition immer feiner werden soll. Wir führen bereits an dieser Stelle die zur feiner werdenden Partition für K gehörigen Graphen ein, obwohl wir uns im Anschluss zunächst ausschließlich mit deren Eckenmengen beschäftigen werden.

5.10. DEFINITION. Sei $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine feiner werdende Partition für den kompakten separablen Hausdorff-Raum K und $(\overline{Y_m})_{m \in \mathbb{N}}$ die zugehörige Folge abgeschlossener Partitions­mengen. Die **zugehörige Folge feiner werdender Graphen** ist gegeben durch $\mathcal{G}_m = (\mathcal{V}_m, \mathcal{E}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit $\mathcal{V}_m := \overline{Y_m}$ und $\mathcal{E}_m := \{ \{ W_{j_1}^m, W_{j_2}^m \} \mid W_{j_1}^m \cap W_{j_2}^m \neq \emptyset \} \subset \mathcal{P}(\overline{Y_m})$. Ein **Graphen­homomorphismus** zwischen zwei ungerichteten Graphen $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ und $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ ist eine Abbildung $\gamma^\mathcal{V} : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$, welche $\{ \gamma^\mathcal{V}(V), \gamma^\mathcal{V}(W) \} \in \mathcal{E}_2$ für alle $\{V, W\} \in \mathcal{E}_1$ erfüllt. Für eine derartige Abbildung $\gamma^\mathcal{V}$ können wir die Abbildung

$$\gamma^\mathcal{E} : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2, \quad \gamma^\mathcal{E}(\{V, W\}) = \{ \gamma^\mathcal{V}(V), \gamma^\mathcal{V}(W) \}$$

definieren. Auch das Paar $\gamma = (\gamma^\mathcal{V}, \gamma^\mathcal{E})$ bezeichnen wir als Graphen­homomorphismus $\gamma : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ zwischen den ungerichteten Graphen \mathcal{G}_1 und \mathcal{G}_2 .

Wir identifizieren für gewöhnlich $\gamma^\mathcal{V}$ und $\gamma = (\gamma^\mathcal{V}, \gamma^\mathcal{E})$.

Die Folge $(\mathcal{G}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ zu K gehörender feiner werdender Graphen besteht demnach aus ungerichteten Graphen mit Schleifen, und die Abbildungen

$$(25) \quad \gamma_{m_2, m_1}^\mathcal{V} := \psi_{m_2, m_1} : \overline{Y_{m_2}} \rightarrow \overline{Y_{m_1}}, \quad W_j^{m_2} \mapsto W_l^{m_1} \text{ mit } V_j^{m_2} \subset V_l^{m_1}$$

sind Graphen­homomorphismen.

5.11. BEMERKUNG. (a) Der Graph besitzt an jeder Ecke genau eine Schleife. Wir veranschaulichen uns dies an einem Beispiel, siehe Abbildung 20.

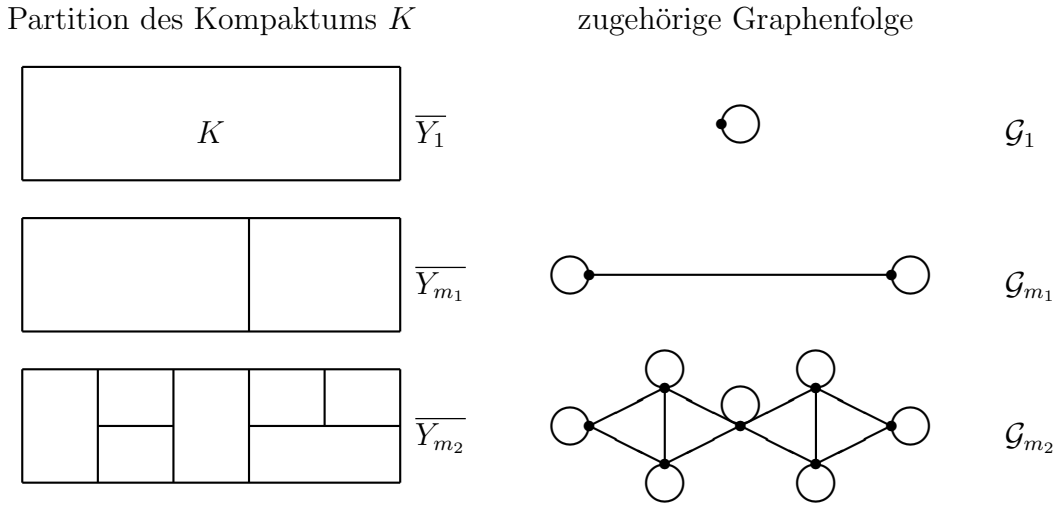


ABBILDUNG 20. Beispiel für eine feiner werdende Partition mit zugehörigen Graphen.

(b) Anstatt die endlichen Partitions­mengen Y_m beziehungsweise die zugehörige Folge abgeschlossener Partitions­mengen $(\overline{Y_m})_{m \in \mathbb{N}}$ zu betrachten, hätten wir auch die zugehörige Folge endlicher Punkt­mengen $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ als Ecken­menge im Graphen nehmen und weiter $\{x_{j_1}^m, x_{j_2}^m\} \in \mathcal{E}_m \Leftrightarrow \overline{V_{j_1}^m} \cap \overline{V_{j_2}^m} \neq \emptyset$ definieren können. Dies würde auch bei den folgenden Überlegungen zu genau denselben Ergebnissen führen, nur anders notiert.

Wir starten nun die Mengen $\overline{Y_m}$ mit der diskreten Topologie aus, was es uns ermöglicht, den inversen Limes $\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m} = \{(U_m)_{m \in \mathbb{N}} \mid U_i \in \overline{Y_i}, \psi_{m+p,m}(U_{m+p}) = U_m \forall m, p \in \mathbb{N}\}$ zu bilden, denn die Folge der Eckenmengen in der Folge feiner werdender Graphen bildet offensichtlich eine inverse Folge $(\overline{Y_m}, \psi)_m$ topologischer Räume, da $\psi_{m+p,m}$ aufgrund der diskreten Topologie automatisch stetig ist. Damit erhalten wir wieder einen als inverser Limes total unzusammenhängender Räume total unzusammenhängenden Raum. Auf diesem führen wir nun eine Äquivalenzrelation durch

$$(U_m)_{m \in \mathbb{N}} \sim (V_m)_{m \in \mathbb{N}} :\Leftrightarrow \{U_m, V_m\} \in \mathcal{E}_m \forall m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow U_m \cap V_m \neq \emptyset \forall m \in \mathbb{N}$$

ein. Zwei Elemente im inversen Limes sind demnach äquivalent, wenn die Ecken auf jeder Stufe durch eine Kante verbunden sind. Dadurch können wir analog zu Satz 5.3 durch Quotientenbildung zum Ausgangskompaktum K zurückkehren. Wie angekündigt wird diese Äquivalenzrelation also durch Betrachten eines Graphen beziehungsweise der Kantenmenge zusätzlich zur Folge $(\overline{Y_m})_{m \in \mathbb{N}}$ kodiert.

5.12. LEMMA. *Die eben definierte Relation \sim ist eine Äquivalenzrelation. Für jede Folge $(U_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}$ ist $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} U_m$ einpunktig.*

BEWEIS. Symmetrie und Reflexivität von \sim sind offensichtlich.

Seien $(U_m)_{m \in \mathbb{N}} \sim (V_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und $(V_m)_{m \in \mathbb{N}} \sim (W_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Wir erinnern an die endliche Durchschnittseigenschaft von Mengen: Man sagt, ein System S von Teilmengen einer Menge M **besitzt die endliche Durchschnittseigenschaft**, wenn der Durchschnitt von jeweils endlich vielen Mengen aus S nichtleer ist. Nach [35] (Satz 157.6) ist eine Menge B eines topologischen Raumes A genau dann kompakt, wenn jedes System B -abgeschlossener Teilmengen von B mit der endlichen Durchschnittseigenschaft einen nichtleeren Durchschnitt besitzt. Nun besitzt $\{U_m \cap V_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft wegen $U_m \cap V_m \supset U_{m+p} \cap V_{m+p}$ für alle $m, p \in \mathbb{N}$, und wegen der Kompaktheit von K folgt aus der eben zitierten Äquivalenz $U := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} (U_m \cap V_m) \neq \emptyset$, und analog $W := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} (V_m \cap W_m) \neq \emptyset$.

Seien $x \in U, y \in W$. Ist U_x eine offene Umgebung von x in K , so können wir diese Menge zu einer offenen Überdeckung \mathcal{U} von K durch endlich viele Mengen ergänzen, die alle x nicht enthalten, weil K ein T_2 -Raum ist (dies ist sogar in T_1 -Räumen möglich). Nach Voraussetzung (iv) von Definition 5.9 gibt es zu dieser offenen Überdeckung \mathcal{U} ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $U_m \cap V_m \subset U_x$ für alle $m \geq m_0$. Insbesondere folgt $U = \{x\}$, denn wir können mit einer offenen Umgebung U_x von x im Hausdorff-Raum K starten, die einen beliebigen anderen Punkt $z \in K$ nicht enthält, also $z \notin U_m \cap V_m \subset U_x \forall m \geq m_0$, also $z \notin \bigcap_{m \in \mathbb{N}} (U_m \cap V_m) = U \forall z \in K \setminus \{x\}$. Analog zeigt man $W = \{y\}$. Dasselbe Argument lässt sich auf $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}, (V_m)_{m \in \mathbb{N}}$ beziehungsweise $(W_m)_{m \in \mathbb{N}}$ statt $(U_m \cap V_m)_{m \in \mathbb{N}}$ anwenden, also ist schon $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} V_m = \{z\}$ für ein $z \in K$, und es gilt insgesamt $x = y = z$, was $(U_m)_{m \in \mathbb{N}} \sim (W_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und damit die Transitivität von \sim zur Folge hat. \square

Durch dieses Lemma sehen wir leicht anschaulich, dass wir jedem $x \in K$ die Äquivalenzklasse der Folge $(W_{j_x^m})_{m \in \mathbb{N}}$ zuordnen können und dies eindeutig ist. Genauer zeigen wir:

5.13. SATZ. *Für einen kompakten separablen Hausdorffraum K sei $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine feiner werdende Partition mit zugehöriger Folge abgeschlossener Partitions Mengen $(\overline{Y_m})_{m \in \mathbb{N}}$. Dann sind K und $\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m} / \sim$ homöomorph.*

BEWEIS. Für $(U_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}$ bezeichnen wir mit $[(U_m)_{m \in \mathbb{N}}]$ die zugehörige Restklasse in $\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}/\sim$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \varphi : K &\rightarrow \lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}/\sim, & x &\mapsto \left[(W_{j_x^m}^m)_{m \in \mathbb{N}} \right] = \left[(\overline{V_{j_x^m}^m})_{m \in \mathbb{N}} \right] \\ \varphi^{-1} : \lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}/\sim &\rightarrow K, & [(U_m)_{m \in \mathbb{N}}] &\mapsto x \text{ mit } \{x\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} U_m. \end{aligned}$$

Nach dem vorangegangenen Lemma ist φ^{-1} wohldefiniert. Weiter ist für $x \in K$ und $[(U_m)_{m \in \mathbb{N}}] \in \lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}/\sim$

- $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} W_{j_x^m}^m$ einpunktig mit $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} W_{j_x^m}^m$, also $\{x\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} W_{j_x^m}^m$ und daher $\varphi^{-1} \circ \varphi(x) = x$.
- $\varphi^{-1}([(U_m)_{m \in \mathbb{N}}]) =: y \in K$ mit $y \in U_m \forall m \in \mathbb{N}$, ebenso $y \in W_{j_y^m}^m \forall m \in \mathbb{N}$, also $\varphi \circ \varphi^{-1}([(U_m)_{m \in \mathbb{N}}]) = [(W_{j_y^m}^m)_{m \in \mathbb{N}}] = [(U_m)_{m \in \mathbb{N}}]$ wegen $y \in U_m \cap W_{j_y^m}^m \forall m \in \mathbb{N}$.

Also sind φ und φ^{-1} bijektiv und zueinander invers.

Wir zeigen die Stetigkeit von φ^{-1} und betrachten dazu die Abbildungen im Diagramm aus Abbildung 21.

$$\begin{array}{ccc} K & \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_0} \\ \xleftarrow{\psi} \\ \searrow \varphi \end{array} & \lim_{\leftarrow} \overline{Y_m} & \xrightarrow{\pi_m} & \overline{Y_m} \\ & & \downarrow \pi & & \\ & & \lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}/\sim & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{mit } \varphi_0 : x \mapsto (W_{j_x^m}^m)_{m \in \mathbb{N}} \\ \psi : (U_m)_{m \in \mathbb{N}} \mapsto x \text{ mit } \{x\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} U_m \\ \pi : (U_m)_{m \in \mathbb{N}} \mapsto [(U_m)_{m \in \mathbb{N}}] \\ \varphi = \pi \circ \varphi_0 \\ \pi_m : (U_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto U_m \end{array}$$

ABBILDUNG 21.

Eine Menge $U \subset \lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}/\sim$ ist offen, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in $\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}$ ist, das heißt, wenn

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U) &= \bigcup_{i \in I} \{ \pi_{m_i}^{-1}(S_i) \mid S_i \in \overline{Y_{m_i}}, S_i \text{ offen in } \overline{Y_{m_i}}, m_i \in \mathbb{N} \} \\ &= \bigcup_{i \in I} \{ \pi_{m_i}^{-1}(S_i) \mid S_i \in \overline{Y_{m_i}}, m_i \in \mathbb{N} \} \end{aligned}$$

für eine Indexmenge I gilt, weil $\overline{Y_m}$ die diskrete Topologie trägt, vergleiche [21] (Appendix Two: 2.3(2)).

Wir zeigen zunächst die Stetigkeit von ψ mit dem Folgenkriterium. Dazu betrachten wir eine Folge $(U^n)_{n \in \mathbb{N}} = ((U_m^n)_{m \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$ in $\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}$, die gegen $(W_m)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert, das heißt, zu jeder offenen Umgebung U von $(W_m)_{m \in \mathbb{N}}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $U^n \in U$ für alle $n \geq n_0$. Wir können $U := \pi^{-1}(W_m)$ ($m \in \mathbb{N}$) setzen, was nach obiger Darstellung (für alle $m \in \mathbb{N}$) eine offene Menge ist, und daraus folgt, dass $(U^n)_{n \in \mathbb{N}} = ((U_m^n)_{m \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$ koordinatenweise gegen $(W_m)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergieren muss, das bedeutet, es gibt zu $m \in \mathbb{N}$ ein $n_0(m) \in \mathbb{N}$, mit $U_m^n = W_m$ für alle $n \geq n_0(m)$. Seien $x := \psi((W_m)_{m \in \mathbb{N}})$ und U_x eine beliebige offene Umgebung von x . Wir betrachten eine beliebige endliche offene Überdeckung von K , in der U_x das einzige Element ist, welches x enthält. Nach Voraussetzung (iv) aus Definition 5.9 über die Partitionsfolge $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ können wir zu dieser offenen

Überdeckung von K einen Index m_0 so groß wählen, dass W_m ganz in der offenen Umgebung U_x von x für alle $m \geq m_0$ liegt. Daher gilt $\psi(U^n) \subset U_x$ für alle $n \geq n_0(m_0)$, und ψ ist stetig, da die offene Umgebung U_x von x beliebig war. Anschaulich geschieht die Konvergenz koordinatenweise, und Bedingung (iv) aus Definition 5.9 sichert, dass das Urbild nahe genug an x liegt.

Nun gilt $\psi((U_m)_{m \in \mathbb{N}}) = \psi((V_m)_{m \in \mathbb{N}}) \Leftrightarrow (U_m)_{m \in \mathbb{N}} \sim (V_m)_{m \in \mathbb{N}}$ für $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}, (V_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}$ nach Definition von \sim und Lemma 5.12. Außerdem ist das Urbild eines Punktes $x \in K$ unter ψ eine ganze Äquivalenzklasse in $\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}$.

Die Stetigkeit von φ^{-1} ergibt sich nun so: Da ψ stetig ist, ist das Urbild einer in K offenen Menge U offen in $\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}$ und besteht aus der Vereinigung von Äquivalenzklassen bezüglich \sim . Das Bild dieser in $\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}$ offenen Menge unter der Quotientenabbildung ist aber nach Definition offen. Also ist φ^{-1} stetig.

Die Stetigkeit von φ ergibt sich wie folgt: K ist ein kompakter Hausdorff-Raum, und $\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}/\sim$ ist als Quotient des Kompaktums $\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}$ kompakt. Da φ^{-1} stetig ist, ist φ eine offene Abbildung. Weiter ist $\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}/\sim$ hausdorffsch, denn sind $V, W \in \lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}/\sim$, $V \neq W$, so gibt es, weil K hausdorffsch und φ^{-1} bijektiv ist, zwei disjunkte offene Umgebungen $U_{\varphi^{-1}(V)}, U_{\varphi^{-1}(W)}$ von $\varphi^{-1}(U)$ beziehungsweise $\varphi^{-1}(W)$, also sind $\varphi(U_{\varphi^{-1}(V)})$ und $\varphi(U_{\varphi^{-1}(W)})$ disjunkte offene Umgebungen von V und W wegen der Offenheit von φ .

Demnach ist φ eine offene bijektive Abbildung zwischen zwei kompakten Hausdorff-Räumen. Um die Stetigkeit von φ nachzuweisen, zeigen wir, dass das Urbild abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist. Sei $A \subset \lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}/\sim$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt, und die bijektive stetige Abbildung φ^{-1} zwischen kompakten Hausdorff-Räumen bildet A auf ein Kompaktum $\varphi^{-1}(A) \subset K$ ab, also ist $\varphi^{-1}(A)$ abgeschlossen, und die Stetigkeit von φ folgt. \square

Analog zu Satz 5.5 auf Seite 121 zeigt man:

5.14. SATZ. Die C^* -Algebren $\lim_{\rightarrow} \ell^\infty(\overline{Y_m}) = \lim_{\rightarrow} C(\overline{Y_m})$ und $C(\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m})$ sind durch C^* -Algebra-Isomorphismen miteinander verbunden.

BEWEIS. Wenn wir X_m durch $\overline{Y_m}$ ersetzen, so können wir den Beweis von Satz 5.5 von Seite 121 bis auf den Teil übernehmen, in dem die Dichtheit von $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \phi_m(C(\overline{Y_m}))$ in $C(\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m})$ gezeigt wird, denn nun haben wir keine Metrik mehr zur Verfügung. Die entsprechende Anpassung kann wie folgt geschehen.

Seien $\varepsilon > 0$, $f \in C(\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m})$ und $V = (V_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}$ beliebig. Dann existiert eine offene Umgebung U_V von V , so dass für alle $W = (W_m)_{m \in \mathbb{N}} \in U_V$ die Ungleichung $|f(V) - f(W)| < \varepsilon$ gilt. Diese offene Umgebung entspricht nach dem Beweis von Satz 5.13 einer offenen Umgebung von x mit $\{x\} := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} V_m$ in K , welche wir mit U_x bezeichnen, nämlich über die Hintereinanderausführung der offenen Abbildungen π und φ^{-1} dort. Wir wählen $U_1 \subset U_x$ offen mit $x \in U_1 \subset \overline{U_1} \subset U_x$ und ergänzen U_1 zu einer endlichen offenen Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ von K mit $U_1 \cap U_i \neq \emptyset \Rightarrow \overline{U_i} \subset U_x$. Zu dieser offenen Überdeckung \mathcal{U} gibt es nach Bedingung (iv) der Definition 5.9 einen Index m_0 , so dass jedes W_j^m ($1 \leq j \leq k_m$, $m \geq m_0$) in einer der Überdeckungsmengen U_i liegt. Wir wählen $m_0 \in \mathbb{N}$ derart und definieren $g \in C(\overline{Y_{m_0}})$ durch $g(W_{j_0}^{m_0}) := f((W_{j_0}^m)_{m \in \mathbb{N}})$ für jedes $W_{j_0}^{m_0} = \overline{V_{j_0}^{m_0}} \in \overline{Y_{m_0}}$ mit dem $V_{j_0}^{m_0}$ zugeordnetem Punkt $x_{j_0}^{m_0} \in$

$V_{j_0}^{m_0} \cap X_{m_0}$. Dann ist, falls $V_{m_0} = W_{j_0}^{m_0}$ für $j_0 \in \{1, \dots, k_{m_0}\}$ gilt,

$$\phi_{m_0}(g)(V) = \lim_{p \rightarrow \infty} g(\psi_{m_0+p, m_0}(V_{m_0+p})) = f\left(\left(W_{j_0}^m\right)_{m \in \mathbb{N}}\right) = g(V_{m_0})$$

und daher

$$|f(V) - \phi_{m_0}(g)(V)| = \left|f(V) - f\left(\left(W_{j_0}^m\right)_{m \in \mathbb{N}}\right)\right| < \varepsilon$$

nach Wahl von m_0 , denn $x_{j_0}^{m_0} \in V_{j_0}^{m_0} \subset \overline{V_{j_0}^{m_0}} = W_{j_0}^{m_0} = V_{m_0} \subset U_x$ wegen $x \in V_{m_0}$, also $(W_{j_0}^m)_{m \in \mathbb{N}} \in U_V$. Da $V \in \lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}$ beliebig war, folgt die Behauptung. \square

Wir haben bisher schon mehrmals die Dualität zwischen der Ebene von kompakten Räumen und der Ebene von Funktionenräumen auf diesen Punktmengen herausgestellt und benutzt. Nun zeigen wir einen weiteren Punkt: Der Übergang von einem kompakten T_2 -Raum zu einem Quotienten (modulo einer Äquivalenzrelation) entspricht auf Ebene der stetigen Funktionen auf diesem Kompaktum dem Übergang zu einer C^* -Unteralgebra.

5.15. SATZ. *Seien L ein kompakter Hausdorff-Raum, \sim eine Äquivalenzrelation auf L und $B := \{f \in C(L) \mid f(x) = f(y) \text{ für } x \sim y\}$. Dann ist B eine C^* -Unteralgebra von $C(L)$. Ist L/\sim hausdorffsch, so gilt $B \cong C(L/\sim)$.*

BEWEIS. Die erste Behauptung ist klar.

Wir definieren $\Phi : B \rightarrow \mathbb{C}^{L/\sim}$, $\Phi(f)([x]) := f(x)$, wobei wir die Restklasse von x bezüglich \sim mit $[x]$ bezeichnen und die Quotientenabbildung mit π . Dann ist $\Phi(f)$ stetig. Denn sei $([y_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen $[x]$ in L/\sim konvergente Folge, so gibt es zu jeder Umgebung U von $[x]$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $[y_n] \in U$ für alle $n \geq n_0$, das heißt, zu jeder Umgebung \mathcal{U} von $\pi^{-1}([x])$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\pi^{-1}([y_n]) \subset \mathcal{U}$ für $n \geq n_0$ gilt. Für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in L mit $z_n \in \pi^{-1}([y_n])$, die gegen $z \in \pi^{-1}([x])$ konvergiert, gilt wegen der Stetigkeit von f die Gleichung $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(f)([y_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z) = \Phi(f)([x])$. Die Stetigkeit von f vererbt sich also auf $\Phi(f)$. Also ist $\Phi(B) \subset C(L/\sim)$.

Außerdem ist Φ surjektiv, denn ist $g \in C(L/\sim)$, so können wir $\varrho(g)(z) := g([z])$ definieren. Dann erfüllt $\varrho(g)$ die Implikation $x \sim y \Rightarrow \varrho(g)(x) = \varrho(g)(y)$, und ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergent, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} [x_n] = [x]$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(g)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g([x_n]) = g([x]) = \varrho(g)(x)$. Es folgt $\varrho(g) \in B$ und $\Phi(\varrho(g)) = g$. \square

Wir wenden diesen Satz nun auf die bei uns vorliegende Situation an: Nach Satz 5.13 ist $\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}/\sim \cong K$ hausdorffsch, also gilt nach den Sätzen 5.13, 5.14 und 5.15

$$\begin{aligned} B &:= \{f \in C(\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}) \cong \lim_{\leftarrow} C(\overline{Y_m}) \mid f(U) = f(V) \text{ falls } U \sim V\} \cong C(\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}/\sim) \\ &\cong C(K). \end{aligned}$$

Wir definieren noch:

5.16. DEFINITION. *Eine C^* -Algebra A heißt **AF-Algebra** (engl.: „approximately finite dimensional“), wenn sie eine aufsteigende Folge $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ endlichdimensionaler C^* -Unteralgebren enthält, deren Vereinigung $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$ dicht in A liegt.*

Dies ist laut [44] (Bemerkung 6.1.3 und Beispiel 6.2.4) genau dann der Fall, wenn A isomorph zum direkten Limes einer direkten Folge $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ endlichdimensionaler C^* -Algebren ist. Damit haben wir also bewiesen:

5.17. THEOREM. *Jeder kompakte separable Hausdorff-Raum lässt sich als Quotient des inversen Limes einer inversen Folge von endlichen topologischen Hausdorff-Räumen darstellen. Jede kommutative unital C^* -Algebra ist isomorph zu einer C^* -Unteralgebra einer AF-Algebra.*

BEWEIS. Die Behauptung folgt aus den Sätzen 5.13, 5.14, 5.15 und dem Satz von Gelfand-Naimark. \square

Wie in Beispiel 1.14 auf Seite 21 allgemein beziehungsweise in Abschnitt 1 dieses Kapitels führen wir nun eine Bimodul-Struktur ein: Die Rolle, die in Abschnitt 1 die Räume $D_m = \ell^\infty(X_m)$ spielten, kommt nun den Räumen $\ell^\infty(\overline{Y_m})$, also den beschränkten Funktionen auf den Ecken der Graphen, zu, was nach Bemerkung 5.11 (b) keinen wesentlichen Unterschied macht. Die Räume $E_m = \ell^\infty(\tilde{X}_m)$ ersetzen wir durch Funktionen auf der Kantenmenge \mathcal{E}'_m der zu den bisher betrachteten ungerichteten Graphen $\mathcal{G}_m = (\mathcal{V}_m, \mathcal{E}_m)$ gehörenden gerichteten Graphen $\mathcal{G}'_m = (\mathcal{V}_m, \mathcal{E}'_m)$. Anders als in Abschnitt 1, wo es uns nicht möglich war, den direkten Limes der Bimoduln zu bilden, wie wir in der Bemerkung nach dem Beweis von Satz 5.5 auf Seite 122 darlegten, geht dies in dieser Situation aber, weil es jetzt im rein topologischen Fall ohne Metrik keine de Leeuw-Abbildung gibt, welche die Norm des Moduls divergieren lassen kann. Wir erhalten in der Folge eine Derivation $\delta_m : C(\overline{Y_m}) = \ell^\infty(\overline{Y_m}) \rightarrow C(\mathcal{E}'_m) = \ell^\infty(\mathcal{E}'_m)$, die sich auf den direkten Limes dieser Räume überträgt, das heißt, deren direkter Limes existiert.

Statten wir zunächst auch \mathcal{E}_m mit der diskreten Topologie aus, so erhalten wir mit $(\mathcal{E}_m, \gamma^\mathcal{E})_m$ eine inverse Folge von topologischen Räumen, und wir können deren inversen Limes $\varprojlim \mathcal{E}_m$ bilden:

$$\varprojlim \mathcal{E}_m := \{(e_m)_{m \in \mathbb{N}} \mid e_i \in \mathcal{E}_i, \gamma_{m_2, m_1}^\mathcal{E}(e_{m_2}) = e_{m_1} \forall m_1 \leq m_2 \text{ aus } \mathbb{N}\}.$$

Auch hier dualisieren wir wie bei der Eckenmenge und erhalten die direkte Folge von C^* -Algebren $(F_m, \|\cdot\|_{F_m}, \eta)_m$ mit $F_m = \ell^\infty(\mathcal{E}_m) = C(\mathcal{E}_m)$ und $\|\cdot\|_{F_m} = \|\cdot\|_\infty$ durch

$$\begin{aligned} \eta_{m_1, m_2} &: F_{m_1} \rightarrow F_{m_2}, \\ \eta_{m_1, m_2}(\omega_{m_1})(e_{m_2}) &= \omega_{m_1}(\gamma_{m_2, m_1}^\mathcal{E}(e_{m_2})) \\ &= \omega_{m_1}(\{\psi_{m_2, m_1}(U), \psi_{m_2, m_1}(V)\}) \end{aligned}$$

für $\omega_{m_1} \in F_{m_1}$ und $e_{m_2} = \{U, V\} \in \mathcal{E}_{m_2}$. Damit ist η_{m_1, m_2} die zu $\gamma_{m_2, m_1}^\mathcal{E}$ duale Abbildung.

Nun gehen wir wie angekündigt zu gerichteten Graphen über.

5.18. DEFINITION. *Sei K ein kompakter separabler Hausdorff-Raum mit zugehöriger Folge feiner werdender Graphen $\mathcal{G}_m = (\mathcal{V}_m = \overline{Y_m}, \mathcal{E}_m)$. Dann ist die dazu **gehörende Folge feiner werdender gerichteter Graphen** gegeben durch $\mathcal{G}'_m = (\mathcal{V}_m =$*

$\overline{Y}_m, \mathcal{E}'_m, l_m, r_m$), wobei

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'_m &:= \{(U, V) \mid \{U, V\} \in \mathcal{E}_m\} \\ l_m : \mathcal{E}'_m &\rightarrow \mathcal{V}_m = \overline{Y}_m, \quad (U, V) \mapsto U \\ r_m : \mathcal{E}'_m &\rightarrow \mathcal{V}_m = \overline{Y}_m, \quad (U, V) \mapsto V\end{aligned}$$

gilt. Die Abbildungen l_m beziehungsweise r_m heißen **Source-** beziehungsweise **Range-Abbildung** und ordnen einer Kante im gerichteten Graphen **Start-** beziehungsweise **Zielecke** zu.

Ein **Graphenhomomorphismus** zwischen gerichteten Graphen $\mathcal{G}'_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}'_1, l_1, r_1)$ und $\mathcal{G}'_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}'_2, l_2, r_2)$ ist eine Abbildung $\gamma^\mathcal{V} : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$, welche $(\gamma^\mathcal{V}(V), \gamma^\mathcal{V}(W)) \in \mathcal{E}'_2$ für alle $(V, W) \in \mathcal{E}'_1$ erfüllt. Für eine derartige Abbildung $\gamma^\mathcal{V}$ können wir die Abbildung

$$\gamma^{\mathcal{E}'_1} : \mathcal{E}'_1 \rightarrow \mathcal{E}'_2, \quad \gamma^{\mathcal{E}'_1}(V, W) = (\gamma^\mathcal{V}(V), \gamma^\mathcal{V}(W))$$

definieren. Auch das Paar $\gamma' = (\gamma^\mathcal{V}, \gamma^{\mathcal{E}'_1})$ bezeichnen wir als Graphenhomomorphismus $\gamma' : \mathcal{G}'_1 \rightarrow \mathcal{G}'_2$ zwischen den gerichteten Graphen \mathcal{G}'_1 und \mathcal{G}'_2 .

Wir identifizieren für gewöhnlich $\gamma^\mathcal{V}$ und $\gamma' = (\gamma^\mathcal{V}, \gamma^{\mathcal{E}'_1})$.

Offensichtlich gelten für einen kompakten separablen Hausdorff-Raum K mit zugehöriger Folge feiner werdender Partitions Mengen $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und zugehöriger Folge $\mathcal{G}'_m = (\mathcal{V}_m = \overline{Y}_m, \mathcal{E}'_m, l_m, r_m)$ feiner werdender gerichteter Graphen und für die sich aus (25) auf Seite 132 ergebenden Abbildungen $\gamma_{m_2, m_1}^{\mathcal{E}'}$ die Gleichungen $l_{m_1} \circ \gamma_{m_2, m_1}^{\mathcal{E}'_1} = \gamma_{m_1}^{\mathcal{V}} \circ l_{m_2}$ und $r_{m_1} \circ \gamma_{m_2, m_1}^{\mathcal{E}'_1} = \gamma_{m_1}^{\mathcal{V}} \circ r_{m_2}$. Wie oben statuen wir \mathcal{E}'_m mit der diskreten Topologie aus, so dass wir eine inverse Folge $(\mathcal{E}'_m, \gamma^{\mathcal{E}'_1})_m$ topologischer Räume erhalten.

Dual dazu erhalten wir die direkte Folge $(F'_m, \|\cdot\|_{F'_m}, \eta'_m)_m$ von endlichdimensionalen C^* -Algebren für $F'_m = \ell^\infty(\mathcal{E}'_m) = C(\mathcal{E}'_m)$ und $\|\cdot\|_{F'_m} = \|\cdot\|_\infty$ mit den verbindenden Abbildungen

$$\begin{aligned}\eta'_{m_1, m_2} : F'_{m_1} &\rightarrow F'_{m_2}, \\ \eta'_{m_1, m_2}(\omega_{m_1})(U, V) &:= \omega_{m_1}(\gamma_{m_2, m_1}^{\mathcal{E}'_1}(U, V)) = \omega_{m_1}(\psi_{m_2, m_1}(U), \psi_{m_2, m_1}(V))\end{aligned}$$

für $\omega_{m_1} \in F'_{m_1}$ und $(U, V) \in \mathcal{E}'_{m_2}$. Wiederum ist η'_{m_1, m_2} die zu $\gamma_{m_2, m_1}^{\mathcal{E}'_1}$ duale Abbildung.

Auch die Abbildungen l_m und r_m können wir dualisieren. Wir definieren

$$\begin{aligned}\lambda_m : \ell^\infty(\mathcal{V}_m) = \ell^\infty(\overline{Y}_m) &\rightarrow \ell^\infty(\mathcal{E}'_m), \quad \lambda_m(f_m)(U, V) := f_m(l_m(U, V)) = f_m(U), \\ \rho_m : \ell^\infty(\mathcal{V}_m) = \ell^\infty(\overline{Y}_m) &\rightarrow \ell^\infty(\mathcal{E}'_m), \quad \rho_m(f_m)(U, V) := f_m(r_m(U, V)) = f_m(V)\end{aligned}$$

für $f_m \in \ell^\infty(\mathcal{V}_m)$ und $(U, V) \in \mathcal{E}'_m$. Wir erhalten somit das Diagramm aus Abbildung 22 mit den kanonischen Projektionsabbildungen

$$\begin{aligned}\gamma_m^\mathcal{V} : \lim_{\leftarrow} \mathcal{V}_m &\rightarrow \mathcal{V}_m, \quad (U_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto U_m, \\ \gamma_m^{\mathcal{E}'_1} : \lim_{\leftarrow} \mathcal{E}'_m &\rightarrow \mathcal{E}'_m, \quad (U_k, V_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto (U_m, V_m),\end{aligned}$$

und den kanonischen Einbettungsabbildungen

$$\begin{aligned} \pi_m : \ell^\infty(\overline{Y_m}) &\rightarrow \varinjlim \ell^\infty(\overline{Y_m}) \stackrel{(5.14)}{\cong} C(\varprojlim \overline{Y_m}), \\ (\pi_m(f_m))((U_m)_{m \in \mathbb{N}}) &:= \lim_{p \rightarrow \infty} f_m(\psi_{m+p,m}(U_{m+p})) \text{ und} \\ \eta'_m : F'_m = \ell^\infty(\mathcal{E}'_m) &\rightarrow \varinjlim F'_m = \varinjlim \ell^\infty(\mathcal{E}'_m). \end{aligned}$$

Die verbindenden Abbildungen zwischen $\ell^\infty(\overline{Y_{m_1}})$ und $\ell^\infty(\overline{Y_{m_2}})$ sind dabei gegeben durch $\pi_{m_1, m_2} : \ell^\infty(\overline{Y_{m_1}}) \rightarrow \ell^\infty(\overline{Y_{m_2}})$ mit $\pi_{m_1, m_2}(f_{m_1})(V_{m_2}) = f_{m_1}(\psi_{m_2, m_1}(V_{m_2})) = f_{m_1}(\gamma_{m_2, m_1}^\vee(V_{m_2}))$, also durch die zu ψ_{m_2, m_1} dualen beziehungsweise adjungierten Abbildungen.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_{m_1} = \overline{Y_{m_1}} & \begin{array}{c} \xleftarrow{l_{m_1}} \\ \xrightarrow{r_{m_1}} \end{array} & \mathcal{E}'_{m_1} \\ \uparrow \gamma_{m_2, m_1}^\vee & & \uparrow \gamma_{m_2, m_1}^{\mathcal{E}'_m} \\ \mathcal{V}_{m_2} = \overline{Y_{m_2}} & \begin{array}{c} \xleftarrow{l_{m_2}} \\ \xrightarrow{r_{m_2}} \end{array} & \mathcal{E}'_{m_2} \\ \uparrow \gamma_{m_2}^\vee & & \uparrow \gamma_{m_2}^{\mathcal{E}'_m} \\ \varprojlim \mathcal{V}_m & \begin{array}{c} \xleftarrow{l} \\ \xrightarrow{r} \end{array} & \varprojlim \mathcal{E}'_m \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \ell^\infty(\overline{Y_{m_1}}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_{m_1}} \\ \xrightarrow{\rho_{m_1}} \end{array} & \ell^\infty(\mathcal{E}'_{m_1}) = F'_{m_1} \\ \downarrow \pi_{m_1, m_2} & & \downarrow \eta'_{m_1, m_2} \\ \ell^\infty(\overline{Y_{m_2}}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_{m_2}} \\ \xrightarrow{\rho_{m_2}} \end{array} & \ell^\infty(\mathcal{E}'_{m_2}) = F'_{m_2} \\ \downarrow \pi_{m_2} & & \downarrow \eta'_{m_2} \\ \varinjlim \ell^\infty(\overline{Y_{m_1}}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda} \\ \xrightarrow{\rho} \end{array} & \varinjlim \ell^\infty(\mathcal{E}'_m) \end{array}$$

ABBILDUNG 22. Kommutative Diagramme zu den verbindenden Abbildungen zwischen Ecken und Kanten einer Folge feiner werdender gerichteter Graphen links und Abbildungen darauf rechts.

Die Abbildungen l_m, r_m sind stetig, da \mathcal{E}'_m die diskrete Topologie trägt, und es gelten $\gamma_{m_2, m_1}^\vee \circ l_{m_2} = l_{m_1} \circ \gamma_{m_2, m_1}^{\mathcal{E}'_m}$ beziehungsweise $\gamma_{m_2, m_1}^\vee \circ r_{m_2} = r_{m_1} \circ \gamma_{m_2, m_1}^{\mathcal{E}'_m}$, also existieren die inversen Limes-Abbildungen

$$\begin{aligned} l : \varprojlim \mathcal{E}'_m &\rightarrow \varprojlim \mathcal{V}_m, & (U_m, V_m)_{m \in \mathbb{N}} &\mapsto (l_m(U_m, V_m))_{m \in \mathbb{N}} \text{ und} \\ r : \varprojlim \mathcal{E}'_m &\rightarrow \varprojlim \mathcal{V}_m, & (U_m, V_m)_{m \in \mathbb{N}} &\mapsto (r_m(U_m, V_m))_{m \in \mathbb{N}}, \end{aligned}$$

vergleiche mit Satz A.12. Wegen der linearen Isometrie der Abbildungen λ_m und ρ_m und $\lambda_{m_2} \circ \pi_{m_1, m_2} = \eta'_{m_1, m_2} \circ \lambda_{m_1}$ beziehungsweise $\rho_{m_2} \circ \pi_{m_1, m_2} = \eta'_{m_1, m_2} \circ \rho_{m_1}$ existieren die direkten Limes-Abbildungen

$$\begin{aligned} \lambda : \varinjlim \ell^\infty(\overline{Y_m}) &\rightarrow \varinjlim \ell^\infty(\mathcal{E}'_m) \text{ und} \\ \rho : \varinjlim \ell^\infty(\overline{Y_m}) &\rightarrow \varinjlim \ell^\infty(\mathcal{E}'_m). \end{aligned}$$

Durch die verbindenden Abbildungen λ_m und ρ_m wird $F'_m = \ell^\infty(\mathcal{E}'_m)$ zu einem $\ell^\infty(\overline{Y_m})$ -Banach-Bimodul, indem wir

$$f_m \cdot \omega_m \cdot g_m := \lambda_m(f_m) \omega_m \rho_m(g_m)$$

für $f_m, g_m \in \ell^\infty(\overline{Y_m})$ und $\omega_m \in F'_m$ definieren. Diese Modulstruktur überträgt sich nach Bemerkung A.5 (d) auf den direkten Limes, so dass $\lim_{\rightarrow} F'_m = \lim_{\rightarrow} \ell^\infty(\mathcal{E}'_m)$ ein $\lim_{\rightarrow} \ell^\infty(\overline{Y_m})$ -Banach-Bimodul wird, nämlich durch die Festlegung

$$f \cdot \omega \cdot g := \lambda(f) \omega \rho(g)$$

für $f, g \in \lim_{\rightarrow} \ell^\infty(\overline{Y_m})$ und $\omega \in \lim_{\rightarrow} F'_m$.

Wir fassen also $\lambda_m(f_m)$ und $\rho_m(f_m)$ beziehungsweise f_m zum einen als Element in $\ell^\infty(\mathcal{E}'_m)$ beziehungsweise in $\ell^\infty(\overline{Y_m})$, zum anderen als Abbildung von $\ell^\infty(\mathcal{E}'_m)$ in sich, nämlich als Links- beziehungsweise Rechts-Multiplikation mit f_m , auf; daher stammt auch die Bezeichnung der Abbildungen mit l beziehungsweise r .

Die Aussage aus Satz 5.14 auf Seite 135 gilt auch, wenn wir $\overline{Y_m}$ durch \mathcal{E}'_m ersetzen. Durch diese Isomorphie erhalten wir auch, dass die kanonischen Einbettungsabbildungen η'_m gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \eta'_m : \ell^\infty(\mathcal{E}'_m) = C(\mathcal{E}'_m) &\rightarrow \varinjlim \ell^\infty(\mathcal{E}'_m) \cong C(\varprojlim \mathcal{E}'_m), \\ \eta'_m(\omega_m)((U_m, V_m)_{m \in \mathbb{N}}) &:= \lim_{p \rightarrow \infty} \omega_m((\psi_{m+p, m}(U_{m+p}), \psi_{m+p, m}(V_{m+p})) \end{aligned}$$

für $\omega_m \in \ell^\infty(\mathcal{E}'_m)$ und $(U_m, V_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \lim_{\leftarrow} \mathcal{E}'_m$.

Wie angekündigt beschreiben wir nun, wie wir eine Derivation erhalten, welche im rein topologischen Fall die de Leeuw-Abbildung ersetzt. Es gilt

$$\begin{aligned} U = (U_m)_m \sim V = (V_m)_m &\Leftrightarrow U_m \cap V_m \neq \emptyset && \forall m \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow (U_m, V_m), (V_m, U_m) \in \mathcal{E}'_m && \forall m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} f \in B &:= \{g \in C(\varprojlim \overline{Y_m}) \cong \varinjlim C(\overline{Y_m}) \mid g(U) = g(V) \text{ falls } U \sim V \text{ in } \varprojlim \overline{Y_m}\} \\ &\Leftrightarrow \lambda(f) = \rho(f) \Leftrightarrow f \in \text{Ker}(\lambda - \rho) \end{aligned}$$

für $f \in C(\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m})$. Also ist $C(\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m} / \sim) \cong B = \text{Ker}(\lambda - \rho)$ isomorph zu einer C^* -Unteralgebra von $C(\lim_{\leftarrow} \overline{Y_m}) \cong \varinjlim C(\overline{Y_m})$.

Wir erhalten so im rein topologischen Fall Derivationen

$$\begin{aligned} \delta_m : C(\overline{Y_m}) &\rightarrow C(\mathcal{E}'_m), && f_m \mapsto (\lambda_m - \rho_m)(f_m), \\ \delta : \varinjlim C(\overline{Y_m}) \cong C(\varprojlim \overline{Y_m}) &\rightarrow C(\varprojlim \mathcal{E}'_m) \cong \varinjlim C(\mathcal{E}'_m), && f \mapsto (\lambda - \rho)(f), \end{aligned}$$

denn für $f_m, g_m \in C(\overline{Y_m})$, $\omega_m \in C(\mathcal{E}'_m)$ und $(U, V) \in \mathcal{E}'_m$ gilt

$$\begin{aligned} (\delta_m(f_m g_m)(\omega_m))(U, V) &= (((\lambda_m - \rho_m)(f_m g_m))(\omega_m))(U, V) \\ &= ((\lambda_m(f_m g_m))(\omega_m))(U, V) - ((\rho_m(f_m g_m))(\omega_m))(U, V) \\ &= f_m(U)g_m(U)\omega_m(U, V) - f_m(U)g_m(V)\omega_m(U, V) \\ &\quad + f_m(U)g_m(V)\omega_m(U, V) - f_m(V)g_m(V)\omega_m(U, V) \\ &= f_m(U)((\lambda_m - \rho_m)(g_m))(\omega_m)(U, V) \\ &\quad - ((\lambda_m - \rho_m)(f_m))(\omega_m)(U, V)g_m(V) \\ &= ((\lambda_m(f_m)\delta_m(g_m) - \delta_m(f_m)\rho_m(g_m)))(\omega_m)(U, V), \end{aligned}$$

also $\delta_m(f_m g_m) = f_m \delta_m(g_m) + \delta_m(f_m) g_m$. Diese Eigenschaft vererbt sich von δ_m auf δ . Außerdem ist δ beschränkt, da dies für λ und ρ gilt.

ANHANG A

Direkter und inverser Limes

In diesem Anhang betrachten wir die für unsere Zwecke wichtigsten Beispiele von Kategorien und stellen Konstruktionsmethoden für sowie die wichtigsten Sätze über direkte und inverse Limes in diesen Kategorien zusammen. Die bedeutendsten beziehungsweise in der Arbeit am häufigsten zitierten Sätze darunter sind die Eindeutigkeitsätze, welche wir jeweils nach der Beschreibung eines Modells, mit dem wir arbeiten wollen, vorstellen.

Zunächst kümmern wir uns um den direkten Limes anhand des Beispiel der Kategorie mit vollständigen metrischen Räumen als Objekten und linearen Kontraktionen, also beschränkten linearen Abbildungen mit Operatornorm höchstens Eins, als verbindenden Abbildungen zwischen den Räumen. Als Index-Kategorie zum Bilden des direkten und inversen Limes von Banachräumen benutzen wir in natürlicher Weise die natürlichen Zahlen, betrachten also nur Folgen von Räumen.

Wann immer Indizes m_1, m_2, m_3, \dots bei Überlegungen mit direkten oder inversen Limes auftreten, gelte stets $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \dots$.

A.1. DEFINITION. Eine Folge $(X_m, \rho_m, \psi)_m = (X_m, \rho_m, \psi_{m_1, m_2})_{m, m_1, m_2 \in \mathbb{N}, m_1 \leq m_2}$ von vollständigen metrischen Räumen $(X_m, \rho_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit Kontraktionen $\psi_{m_1, m_2} : X_{m_1} \rightarrow X_{m_2}$ für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{N}, m_1 \leq m_2$, heißt **direkte Folge** vollständiger metrischer Räume, wenn für alle $m, m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}$

$$(i) \psi_{m, m} = \text{id}_m = \text{id}_{X_m} \quad \text{und} \quad (ii) \psi_{m_2, m_3} \circ \psi_{m_1, m_2} = \psi_{m_1, m_3}$$

erfüllt sind.

Für eine gegebene direkte Folge $(X_m, \rho_m, \psi)_m$ von vollständigen metrischen Räumen heißt ein vollständiger metrischer Raum (X, ρ) zusammen mit einer Folge $(\psi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Kontraktionen $\psi_m : X_m \rightarrow X$ **direkter Limes** von $(X_m, \rho_m, \psi)_m$, in Zeichen $X = \lim_{\rightarrow} X_m = \lim_{\rightarrow} (X_m, \rho_m, \psi)_m$, wenn für alle $m_1 \leq m_2$ das Diagramm aus Abbildung 23

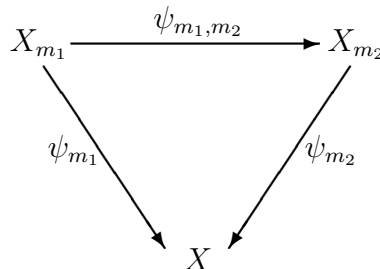


ABBILDUNG 23. Kommutatives Diagramm zum direkten Limes.

kommutiert, und wenn für alle vollständigen metrischen Räume Z und alle Familien

von Kontraktionen $\phi_m : X_m \rightarrow Z$, für die das Diagramm in Abbildung 24

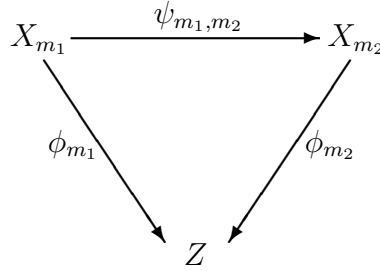


ABBILDUNG 24.

kommutiert, eine eindeutig bestimmte Kontraktion $\phi : X \rightarrow Z$ mit $\phi_m = \phi \circ \psi_m$ existiert. Die Existenz dieser Kontraktion ϕ bezeichnen wir als **universelle Eigenschaft des direkten Limes**.

Wir geben nun ein Modell für den direkten Limes an, mit dem wir in Zukunft arbeiten wollen.

A.2. SATZ. Für eine direkte Folge $(X_m, \rho_m, \psi)_m$ von vollständigen metrischen Räumen existiert der direkte Limes und ist bis auf bijektive Isometrie eindeutig gegeben durch die Vervollständigung $X = \lim_{\rightarrow} X_m = \overline{A/\sim}$ des Quotientenraums A/\sim , wobei

$A := \{x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \mid x_m \in X_m, \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } \psi_{m_1, m_2}(x_{m_1}) = x_{m_2} \text{ für } m_0 \leq m_1 \leq m_2\}$
als Teilmenge von $\prod_{m \in \mathbb{N}} X_m$ mit der Pseudometrik $\tilde{\rho}$ ausgestattet ist, welche definiert ist durch $\tilde{\rho}((x_m)_m, (y_m)_m) := \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m(x_m, y_m)$ für $(x_m)_m, (y_m)_m \in A$, die Äquivalenzrelation \sim auf A durch $x = (x_m)_m \sim y = (y_m)_m \Leftrightarrow \tilde{\rho}((x_m)_m, (y_m)_m) = 0$ gegeben ist und wir $x \in A$ mit der zugehörigen Restklasse in A/\sim identifizieren; die Metrik in A/\sim entspricht daher der auf A , und $\overline{A/\sim}$ ist die Vervollständigung bezüglich dieser Metrik.

Die Einbettungsabbildungen

$$\psi_m : X_m \rightarrow X = \lim_{\rightarrow} X_m, x \mapsto \underbrace{(x_1, \dots, x_{m-1})}_{x_i \in X_i \text{ beliebig}}, x, \psi_{m, m+1}(x), \psi_{m, m+2}(x), \dots$$

machen das Diagramm in Abbildung 23 kommutativ.

A.3. BEMERKUNG. Wir benutzen im Folgenden statt allgemeinen kontraktiven Abbildungen $\psi_{m_1, m_2} : X_{m_1} \rightarrow X_{m_2}$ meist injektive Kontraktionen auf endlichen vollständigen metrischen Räumen X_m , was nichts anderes heißt, als dass wir uns die Räume X_m ineinander eingebettet denken können. Schließlich werden wir nur Isometrien ψ_{m_1, m_2} betrachten, so dass wir X_{m_1} als Teilmenge von X_{m_2} ($m_1 \leq m_2$) mit der dortigen Metrik auffassen können. Damit ist die Äquivalenzrelation aus Satz A.2 die triviale.

Für den Beweis obigen Satzes sei auf die einschlägige Literatur verwiesen, zum Beispiel [44], [10]. Wir benötigen noch ein Hilfsmittel, mit dem wir feststellen können, ob ein gegebener Raum schon bis auf bijektive Isometrie mit dem direkten Limes einer direkten Folge übereinstimmt.

A.4. SATZ. Sei $(X_m, \rho_m, \psi)_m$ eine direkte Folge vollständiger metrischer Räume, so dass $(\psi) = (\psi_{m_1, m_2})_{m_1, m_2 \in \mathbb{N}, m_1 \leq m_2}$ eine Familie von Isometrien ist. Dann sind auch die Einbettungsabbildungen $\psi_m : X_m \rightarrow X = \lim_{\rightarrow} X_m$ Isometrien. Seien weiter K ein vollständiger metrischer Raum mit Metrik ρ_K und $\phi_m : X_m \rightarrow K$ Isometrien für jedes $m \in \mathbb{N}$ derart, dass das Diagramm in Abbildung 25

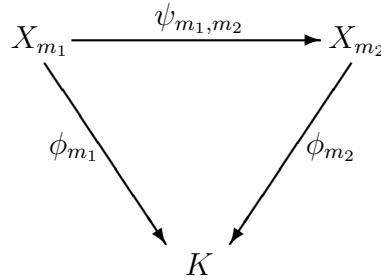


ABBILDUNG 25.

kommutiert und $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \phi_m(X_m)$ dicht in K bezüglich ρ_K liegt. Dann existiert eine bijektive Isometrie $\phi : \lim_{\rightarrow} X_m \rightarrow K$.

Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [31]; man erhält dieses Ergebnis aber durch einfache Rechnungen.

A.5. BEMERKUNG. Das Konzept des direkten Limes haben wir nun am Beispiel der Kategorie vollständiger metrischer Räume vorgestellt, weil wir dieses als Erstes in Satz 3.1 benötigen und hierbei die wichtigsten Punkte deutlich werden. Analog zu Definition A.1 können wir auch den direkten Limes im Sinne anderer Kategorien betrachten, was wir im Folgenden kurz beschreiben.

- (a) Besonders einfach ist der direkte Limes im Sinne von Banachräumen, bei dessen Bildung wir in Satz A.2 nur Metrik durch Norm zu ersetzen haben und lineare Isometrien statt Isometrien zu betrachten brauchen.
- (b) Um den direkten Limes im Sinne der Kategorie rein topologischer Räume zu bilden, nehmen wir als Objekte topologische Räume statt vollständige metrische Räume und stetige Abbildungen als Morphismen statt Kontraktionen zwischen den Räumen. Der direkte Limes ist dann einfach A/\sim , vgl. A.2, da keine Metrik oder Norm existiert, bezüglich der wir den Abschluss bilden müssten. Daher muss auch die Äquivalenzrelation \sim anders definiert werden, nämlich durch $(x_m)_m \sim (y_m)_m : \Leftrightarrow \exists m_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_m = y_m \forall m \geq m_0$. In diesem Sinne ist der direkte Limes topologischer Räume auch einfacher.
- (c) Beim Bilden des direkten Limes von (unitalen) C^* -Algebren X_m statt vollständiger metrischer Räume ersetzen wir die Kontraktionen durch (kontraktive) $*$ -Homomorphismen. Dann ist $\lim_{\rightarrow} X_m = \overline{A/\sim}$, wobei nun die Äquivalenzrelation auf A gegeben ist durch $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \sim (y_m)_{m \in \mathbb{N}} : \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - y_m\| = 0$, also eine Halbnorm induziert, die auf A/\sim eine Norm liefert. Bezüglich dieser wird der Abschluss gebildet, und die Multiplikation und Involution von A/\sim werden auf den Abschluss fortgesetzt.

- (d) In ganz analoger Weise erklären wir den direkten Limes für **Banach-Bimoduln**: Sei $(D_m, \|\cdot\|_{D_m}, \pi)_{m \in \mathbb{N}}$ eine direkte Folge von Banachräumen und des Weiteren $(E_m, \|\cdot\|_{E_m}, \tau)_m$ eine direkte Folge von Banachräumen, die gleichzeitig die Struktur von D_m -Bimoduln aufweisen, so dass $\|f \cdot \omega \cdot g\|_{E_m} \leq \|f\|_{D_m} \|\omega\|_{E_m} \|g\|_{D_m}$ für $f, g \in D_m, \omega \in E_m$ erfüllt ist. Dann ist auch $\lim_{\rightarrow} E_m$ ein $\lim_{\rightarrow} D_m$ -Bimodul. Um dies zu zeigen, benötigen wir das folgende Lemma über den direkten Limes von Abbildungen: Die Links- beziehungsweise Rechtsmultiplikation mit Elementen aus D_m ist dann nämlich auf jeder Stufe eine lineare Kontraktion, für die nach dem Folgenden eine direkte Limes-Abbildung existiert, die ihrerseits die Bimodul-Eigenschaft im direkten Limes vermittelt.

Satz A.4 kann für alle eben angeführten Fälle entsprechend übertragen werden außer in Fall (b), denn dort gibt es keine Entsprechung für die Metrik beziehungsweise die Dichtheitsforderung in obigem Satz.

Bemerkung A.5 (d) nehmen wir zum Anlass, das folgende Lemma in der Kategorie von Banachräumen zu zeigen, was sich aber auf die anderen eben besprochenen Kategorien mühelos übertragen lässt.

A.6. LEMMA. *Seien $(A_m, \|\cdot\|_A, \tau^A)_m$ und $(B_m, \|\cdot\|_B, \tau^B)_m$ direkte Folgen von Banachräumen mit direkten Limites A und B mit zugehörigen Einbettungsabbildungen $\tau_m^A : A_m \rightarrow A$ und $\tau_m^B : B_m \rightarrow B$. Weiter existiere für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine lineare Kontraktion $\psi_m : A_m \rightarrow B_m$ derart, dass $\tau_{m_1, m_2}^B \circ \psi_{m_1} = \psi_{m_2} \circ \tau_{m_1, m_2}^A$ für alle $m_1 \leq m_2$ aus \mathbb{N} gilt. Dann existiert eine eindeutig bestimmte lineare Kontraktion $\psi : A \rightarrow B$, für die $\tau_m^B \circ \psi_m = \psi \circ \tau_m^A$ gilt.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung gilt

$$\tau_{m_2}^B \circ \psi_{m_2} \circ \tau_{m_1, m_2}^A = \tau_{m_2}^B \circ \tau_{m_1, m_2}^B \circ \psi_{m_1} = \tau_{m_1}^B \circ \psi_{m_1}.$$

Nun ist B als direkter Limes ein Banachraum. Des Weiteren sind die Abbildungen $(\tau_m^B \circ \psi_m : A_m \rightarrow B)_{m \in \mathbb{N}}$ lineare Kontraktionen, so dass das Abbildung 24 in Definition A.1 auf Seite 142 entsprechende Diagramm mit $X_m = A_m, Z = B$ und $\phi_m = \tau_m^B \circ \psi_m$ kommutiert. Daher existiert nach der universellen Eigenschaft des direkten Limes für A eine eindeutig bestimmte lineare Kontraktion $\psi : A \rightarrow B$ mit $\tau_m^B \circ \psi_m = \psi \circ \tau_m^A$ für alle $m \in \mathbb{N}$. \square

A.7. DEFINITION. *Unter den Voraussetzungen von Lemma A.6 nennen wir die eindeutig bestimmte lineare Kontraktion ψ den **direkten Limes der Abbildungen** ψ_m .*

Wir können uns fragen, was passiert, wenn wir in allen bisher betrachteten Diagrammen die Richtung der verbindenden Abbildungen umkehren. Dies führt uns ohne Umwege zum Konzept des inversen Limes, welches einfacher zu handhaben ist als das des direkten Limes. Der Vollständigkeit halber wollen wir die bisherigen Sätze in die im inversen Limes entsprechend formulierten übertragen und wieder unser (bis auf bijektive Isometrie eindeutig existierendes) Modell für den inversen Limes angeben. Dies führen wir anhand der Kategorie mit Banachräumen als Objekten und linearen Kontraktionen als Morphismen aus.

A.8. DEFINITION. Eine Folge $(X_m, \|\cdot\|_{X_m}, \psi)_{m \in \mathbb{N}} = (X_m, \|\cdot\|_{X_m}, \psi_{m_2, m_1})_{m, m_1, m_2 \in \mathbb{N}, m_1 \leq m_2}$ von Banachräumen $(X_m, \|\cdot\|_{X_m})_{m \in \mathbb{N}}$ mit linearen Kontraktionen $\psi_{m_2, m_1} : X_{m_2} \rightarrow X_{m_1}$ für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{N}, m_1 \leq m_2$, heißt **inverse Folge** von Banachräumen, wenn für alle $m, m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}$

$$(i) \psi_{m,m} = \text{id}_m = \text{id}_{X_m} \quad \text{und} \quad (ii) \psi_{m_2, m_1} \circ \psi_{m_3, m_2} = \psi_{m_3, m_1}$$

erfüllt sind.

Für eine gegebene inverse Folge $(X_m, \|\cdot\|_{X_m}, \psi)_{m \in \mathbb{N}}$ von Banachräumen heißt ein vollständiger metrischer Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ zusammen mit einer Folge $(\psi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von linearen Kontraktionen $\psi_m : X \rightarrow X_m$ **inverser Limes** von $(X_m, \|\cdot\|_{X_m}, \psi)_{m \in \mathbb{N}}$, in Zeichen $X = \lim_{\leftarrow} X_m = \lim_{\leftarrow} (X_m, \|\cdot\|_{X_m}, \psi)_{m \in \mathbb{N}}$, wenn für alle $m_1 \leq m_2$ das Diagramm in Abbildung 26

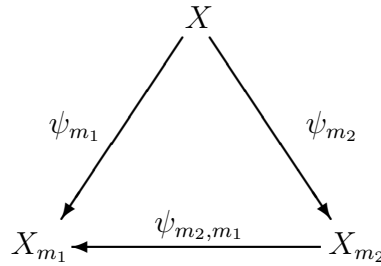


ABBILDUNG 26. Kommutatives Diagramm zum inversen Limes.

kommutiert, und wenn für alle Banachräume Z und alle Familien von linearen Kontraktionen $\phi_m : Z \rightarrow X_m$, für die das Diagramm in Abbildung 27

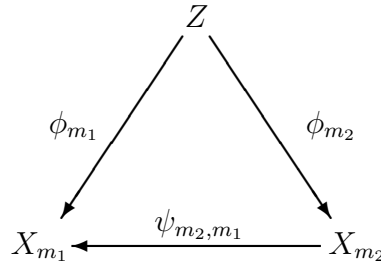


ABBILDUNG 27.

kommutiert, eine eindeutig bestimmte lineare Kontraktion $\phi : Z \rightarrow X$ mit $\phi_m = \psi_m \circ \phi$ existiert. Die Existenz dieser linearen Kontraktion ϕ bezeichnen wir als **universelle Eigenschaft des inversen Limes**.

A.9. SATZ. Für eine inverse Folge $(X_m, \|\cdot\|_{X_m}, \psi)_{m \in \mathbb{N}}$ von Banachräumen existiert der inverse Limes und ist bis auf bijektive Isometrie eindeutig durch

$$(26) \quad X = \lim_{\leftarrow} X_m := \left\{ (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \prod_{m \in \mathbb{N}} X_m \mid \psi_{m_2, m_1}(x_{m_2}) = x_{m_1} \forall m_1 \leq m_2 \text{ aus } \mathbb{N} \right\}$$

zusammen mit der Norm $\|(x_m)_{m \in \mathbb{N}}\|_X = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|x_m\|_{X_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m\|_{X_m}$ gegeben. Die Projektionsabbildungen $\psi_m : X = \lim_{\leftarrow} X_m \rightarrow X_m, (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \mapsto x_m$ machen das Diagramm in Abbildung 26 kommutativ. Sind Z und $\phi_m : Z \rightarrow X_m$ wie in Definition

A.8 beschrieben, so ist die eindeutig bestimmte lineare Kontraktion von Z nach X gegeben durch die Abbildung $\phi : Z \rightarrow X$, $z \mapsto (\phi_m(z))_{m \in \mathbb{N}}$.

BEWEIS. Der Beweis ergibt sich durch Standard-Rechnungen. Wir zeigen nur die scheinbar überraschende Behauptung, dass — im Gegensatz zum direkten Limes — der Raum X nicht noch vervollständigt werden muss, sondern schon vollständig ist. Sei $(x^n)_n = ((x_m^n)_{m \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X . Dann ist $(x_m^n)_n$ wegen

$$\begin{aligned} \|x_m^{n_1} - x_m^{n_2}\|_{X_m} &\leq \|\psi_{m+p,m}(x_{m+p}^{n_1}) - \psi_{m+p,m}(x_{m+p}^{n_2})\|_{X_m} \\ &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} \|\psi_{m+p,m}(x_{m+p}^{n_1}) - \psi_{m+p,m}(x_{m+p}^{n_2})\|_{X_m} \\ &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} \|x_{m+p}^{n_1} - x_{m+p}^{n_2}\|_{X_{m+p}} = \|x^{n_1} - x^{n_2}\|_X \end{aligned}$$

eine Cauchy-Folge in X_m und damit konvergent gegen ein $x_m^0 \in X_m$. Wir setzen $x := (x_m^0)_m$. Dann gilt

$$\psi_m(x) = x_m^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_m(x^n),$$

und wir erhalten

$$\psi_{m_2, m_1} \circ \psi_{m_2}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{m_2, m_1} \circ \psi_{m_2}(x^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{m_1}(x^n) = \psi_{m_1}(x),$$

weil die Abbildungen ψ_{m_2, m_1} , ψ_{m_1} , und ψ_{m_2} kontraktiv und damit stetig sind. Damit ist $x \in X$, und $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = x$ ist leicht zu sehen. \square

A.10. BEMERKUNG. Das Konzept des inversen Limes kann nun analog zu Bemerkung A.5 auf rein topologische Räume, aber auch auf vollständige metrische Räume, unitalen C^* -Algebren und Banach-Bimoduln übertragen werden. Bei Letzteren erhalten wir die Bimodul-Struktur auf ganz natürliche Weise:

Ist $(D_m, \|\cdot\|_{D_m}, \pi)_m$ eine inverse Folge von unitalen C^* -Algebren oder schlicht Banachräumen und $(E_m, \|\cdot\|_{E_m}, \tau)_m$ eine inverse Folge von D_m -Banach-Bimoduln, dann wird $\lim_{\leftarrow} E_m$ durch die Festlegung

$$f\omega g := (\pi_m(f)\tau_m(\omega)\pi_m(g))_{m \in \mathbb{N}} \quad \forall f, g \in \varprojlim D_m, \omega \in \varprojlim E_m$$

zu einem $\lim_{\leftarrow} D_m$ -Banach-Bimodul.

In Satz A.9 sichert die Bedingung $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \prod_{m \in \mathbb{N}} X_m$ in der Festlegung (26) die Endlichkeit der Norm $\|(x_m)_{m \in \mathbb{N}}\|_X = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|x_m\|_{X_m}$. Beim entsprechend Satz A.9 umformulierten Satz für den inversen Limes vollständiger metrischer Räume $(X_m, \rho_m)_m$ ist zu beachten, dass eine solche Bedingung nicht von vorne herein existiert. Definieren wir als Limes-Metrik $\rho_X((x_m)_m, (y_m)_m) := \sup_{m \in \mathbb{N}} \rho_m(x_m, y_m)$, so kann ρ auch den Wert $+\infty$ annehmen, das heißt, der Limes-Raum kann in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfallen. Dies stellt aber in dieser Arbeit kein Problem dar, weil wir als Folge $(X_m, \rho)_m$ stets eine aufsteigende Folge endlicher Punktfolgen in einem kompakten metrischen Raum (K, ρ) mit der auf X_m eingeschränkten Metrik $\rho_m = \rho|_{X_m}$ betrachten, die Limes-Metrik also stets durch die Metrik ρ beschränkt bleibt.

Wir übertragen nun Satz A.4 auf den inversen Limes und zeigen ihn auch in der Version für Banachräume, was aber ohne weiteres auf die anderen Strukturen abgeändert werden kann.

A.11. SATZ. Sei $(D_m, \|\cdot\|_{D_m}, \pi)_m$ eine inverse Folge von Banachräumen mit $D = \lim_{\leftarrow} D_m$. Ein Banachraum Z zusammen mit linearen Kontraktionen $\phi_m : Z \rightarrow D_m$ ist **isometrisch isomorph** zu D , das heißt, es gibt eine lineare bijektive Isometrie zwischen D und Z , wenn das Diagramm aus Abbildung 28 kommutiert, wenn für alle

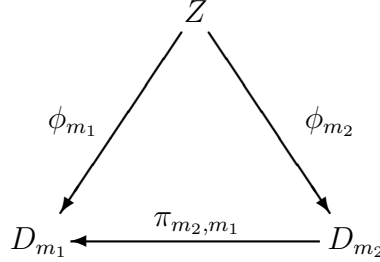


ABBILDUNG 28.

$g \in Z$ die Gleichung $\|g\|_Z = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\phi_m(g)\|_{D_m}$ erfüllt ist und wenn das Bild $\phi(Z)$ der nach der universellen Eigenschaft des inversen Limes eindeutig bestimmten linearen Kontraktion $\phi : Z \rightarrow D$ mit $\pi_m \circ \phi = \phi_m$ dicht in D liegt.

BEWEIS. Für $g \in Z$ ist $\phi(g) = (\phi_m(g))_{m \in \mathbb{N}} \in D$ nach Satz A.9. Aufgrund von $\|\phi(g)\|_D = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\phi_m(g)\|_{D_m} = \|g\|_Z$ ist ϕ eine Isometrie. Diese Abbildung bildet den abgeschlossenen Raum Z in einen abgeschlossenen Teilraum von D ab. Die Surjektivität von ϕ folgt nun aus der Dichtheit von $\phi(Z)$ in D und der Stetigkeit der Isometrie ϕ . \square

Auch für Abbildungen lässt sich ein inverser Limes definieren.

A.12. SATZ. Seien $(D_m, \|\cdot\|_{D_m}, \pi)_m$ und $(E_m, \|\cdot\|_{E_m}, \tau)_m$ inverse Folgen von Banachräumen mit inversen Limites $(D, \|\cdot\|_D)$ beziehungsweise $(E, \|\cdot\|_E)$. Weiter existiere zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine lineare Kontraktion $d_m : D_m \rightarrow E_m$ derart, dass das Diagramm in Abbildung 29

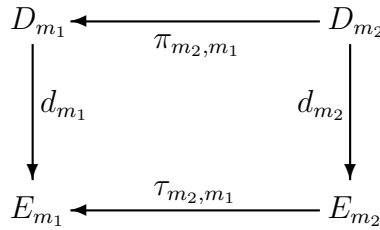


ABBILDUNG 29.

für alle $m_1 \leq m_2$ kommutiert. Dann existiert eine eindeutig bestimmte lineare Kontraktion $d : D \rightarrow E$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ das Diagramm in Abbildung 30 kommutiert. Diese ist dann gegeben durch $d((f_m)_{m \in \mathbb{N}}) = (d_m(f_m))_{m \in \mathbb{N}}$.

Sind zusätzlich $(D_m, \|\cdot\|_{D_m}, \pi)_m$ eine inverse Folge von C^* -Algebren beziehungsweise $(E_m, \|\cdot\|_{E_m}, \tau)_m$ eine inverse Folge von D_m -Banach-Bimoduln, und ist d_m für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine **Derivation**, das heißt, d_m erfüllt die Produktregel

$$d_m(f_m g_m) = d_m(f_m) g_m + f_m d_m(g_m) \quad \text{für } f_m, g_m \in D_m,$$

so ist auch d eine Derivation.

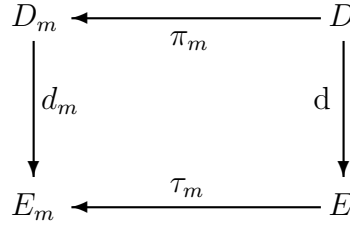


ABBILDUNG 30.

A.13. DEFINITION. Die im vorangegangenen Satz erwähnte eindeutig bestimmte Abbildung $d : D \rightarrow E$ nennen wir den **inversen Limes der Abbildungen** $d_m : D_m \rightarrow E_m$.

BEWEIS (von Satz A.12). Sei $f = (f_m)_{m \in \mathbb{N}} \in D$. Aufgrund der universellen Eigenschaft des inversen Limes der inversen Folge $(E_m, \|\cdot\|_{E_m}, \tau)_m$ existiert eine eindeutig bestimmte lineare Kontraktion $\tilde{d} : D \rightarrow E$ mit $\tau_m \circ \tilde{d} = d_m \circ \pi_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$, weil das Diagramm in Abbildung 31

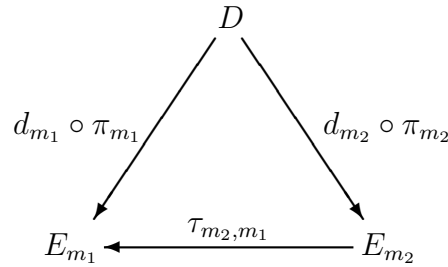


ABBILDUNG 31.

aufgrund von

$$\tau_{m_2, m_1} \circ (d_{m_2} \circ \pi_{m_2}) = (\tau_{m_2, m_1} \circ d_{m_2}) \circ \pi_{m_2} = d_{m_1} \circ (\pi_{m_2, m_1} \circ \pi_{m_2}) = d_{m_1} \circ \pi_{m_1}$$

kommutiert. Außerdem ist d eine Kontraktion, weil d_m es ist und wegen $\|f\|_D = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|_{D_m}$, $\|d f\|_E = \lim_{m \rightarrow \infty} \|d_m f_m\|_{E_m}$. Legt man nun d fest durch obige Vorschrift, so gilt offenbar $\tau_m \circ d(f) = d_m \circ \pi_m(f)$, und wegen der Eindeutigkeit der Abbildung \tilde{d} aus der universellen Eigenschaft des inversen Limes gilt schon $d = \tilde{d}$. Erfüllen die Abbildungen d_m die Produktregel, so vererbt sich diese auf die Abbildung d aufgrund ihres Aussehens. \square

ANHANG B

Definitionsbereich des inversen Limes abgeschlossener Derivationen

In diesem Anhang beschäftigen wir uns allgemein mit der Frage, wie sich Morphismen $d_m : D_m \rightarrow E_m$ auf jeder Stufe zweier inverser Folgen $(D_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und $(E_m)_{m \in \mathbb{N}}$ beim Bilden des inversen Limes verhalten, diskutieren dies zunächst anhand von Folgen von Banachräumen und erweitern es anschließend auf C^* -Algebren beziehungsweise Banach-Bimoduln darüber.

Wir betrachten zwei inverse Folgen von Banachräumen $(D_m, \|\cdot\|_{D_m}, \pi)_m$ beziehungsweise $(E_m, \|\cdot\|_{E_m}, \tau)_m$ mit inversen Limites D beziehungsweise E und eine Folge linearer Abbildungen $d_m : D_m \rightarrow E_m$, so dass das Diagramm in Abbildung 32

$$\begin{array}{ccc}
 D_{m_1} & \xleftarrow{\pi_{m_2, m_1}} & D_{m_2} \\
 \downarrow d_{m_1} & & \downarrow d_{m_2} \\
 E_{m_1} & \xleftarrow{\tau_{m_2, m_1}} & E_{m_2}
 \end{array}$$

ABBILDUNG 32.

für alle $m_1 \leq m_2$ kommutiert. Sind in diesem Falle alle Abbildungen d_m lineare Kontraktionen, so wissen wir aus Satz A.12, wie sich die Eigenschaft der d_m auf den inversen Limes vererbt. Sind die Abbildungen d_m nicht kontraktiv, so ist es zunächst nicht möglich, deren inversen Limes zu bilden. Wir behelfen uns nun aber damit, dass wir den Raum D_m mit der Norm $\max(\|\cdot\|_{D_m}, \|d_m \cdot\|_{E_m})$, welche zur Graphennorm der Abbildung d_m äquivalent ist, ausstatten. Wir bezeichnen diesen neuen Raum mit $(\hat{D}_m, \|\cdot\|_{\hat{D}_m})$. Als Mengen sind D_m und \hat{D}_m also identisch, die Abbildung $\iota_m : \hat{D}_m \rightarrow D_m, f \rightarrow f$ ist aber kontraktiv. Analog bezeichnen wir die $\pi_{m_2, m_1} : D_{m_2} \rightarrow D_{m_1}$ entsprechende Abbildung mit $\hat{\pi}_{m_2, m_1}$ und die d_m entsprechende Abbildung von \hat{D}_m nach E_m mit \hat{d}_m ; diese sind demnach beide Kontraktionen, und wir können den inversen Limes $\hat{D} := \lim_{\leftarrow} \hat{D}_m$ der inversen Folge $(\hat{D}_m, \|\cdot\|_{\hat{D}_m}, \hat{\pi})_m$ bilden. Es gelten $\iota_{m_1} \circ \hat{\pi}_{m_2, m_1} = \pi_{m_2, m_1} \circ \iota_{m_2}$ und $\hat{d}_m = d_m \circ \iota_m$ und offensichtlich $\hat{d}_{m_1} \circ \hat{\pi}_{m_2, m_1} = \tau_{m_2, m_1} \circ \hat{d}_{m_2}$. Zur Folge $(\hat{d}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ existiert aufgrund der Kontraktivität der einzelnen Folgenglieder also die inverse Limes-Abbildung $\hat{d} : \hat{D} \rightarrow E$.

Wir wollen nun \hat{d} auf D zurückziehen. Dazu stellen wir fest, dass aufgrund von Satz A.12 auf Seite 147 — auf die inversen Folgen von Banachräumen $(D_m, \|\cdot\|_{D_m}, \pi)_m$ und

$(\hat{D}_m, \|\cdot\|_{\hat{D}_m}, \hat{\pi})_m$ mit verbindenden Kontraktionen $\iota_m : \hat{D}_m \rightarrow D_m$ angewendet — eine eindeutig bestimmte lineare Kontraktion $k : \hat{D} \rightarrow D$ existiert, welche das folgende Diagramm in Abbildung 33 kommutieren lässt.

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{D}_{m_1} & \xleftarrow{\hat{\pi}_{m_2, m_1}} & \hat{D}_{m_2} & \xleftarrow{\hat{\pi}_{m_2}} & \hat{D} = \text{Def}(\hat{d}) = \lim_{\leftarrow} \hat{D}_m \\
\hat{d}_{m_1} \downarrow & & \downarrow \hat{d}_{m_2} & & \downarrow k = \iota \\
D_{m_1} & \xleftarrow{\pi_{m_2, m_1}} & D_{m_2} & \xleftarrow{\pi_{m_2}} & D \supset \text{Def}(d) \\
d_{m_1} \downarrow & & \downarrow d_{m_2} & & \downarrow d \downarrow \hat{d} \\
E_{m_1} & \xleftarrow{\tau_{m_2, m_1}} & E_{m_2} & \xleftarrow{\tau_{m_2}} & E = \lim_{\leftarrow} E_m
\end{array}$$

ABBILDUNG 33.

Die Abbildung $\iota : \hat{D} \rightarrow D, \hat{f} = (\hat{f}_m)_{m \in \mathbb{N}} \mapsto f = (\iota_m(\hat{f}_m))_{m \in \mathbb{N}}$ stimmt nach Satz A.12 schon mit k überein. Man sieht leicht, dass sich die Norm im inversen Limes der Räume \hat{D}_m zusammensetzt wie die Norm in \hat{D}_m selbst: Für $f \in \hat{D}$ gilt $\|f\|_{\hat{D}} = \max(\|\iota(f)\|_D, \|\hat{d}(f)\|_E)$.

Die Abbildung ι ist außerdem injektiv. Die Abbildungen ι_m sind nämlich allesamt bijektiv. Außerdem können wir \hat{D} als Teilmenge von D auffassen, denn $\hat{D} = \lim_{\leftarrow} \hat{D}_m$ enthält alle Folgen $(f_m)_m$ mit $f_m \in D_m$, so dass sowohl $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|_{D_m} < \infty$ als auch $\lim_{m \rightarrow \infty} \|d_m(f_m)\|_{E_m} < \infty$ sind; die Folgen in D müssen aber nur die erste Ungleichung erfüllen. Da ι wie gezeigt die Folgenglieder komponentenweise abbildet, ist diese Abbildung automatisch injektiv.

Diese Injektivität erlaubt es uns nun, die Abbildung \hat{d} von \hat{D} auf D zurückzuziehen und eine Abbildung d zu definieren, wie im Diagramm in Abbildung 33 bereits angedeutet wurde: Wir setzen $\text{Def}(d) := \iota(\hat{D}) \subset D$ und definieren

$$(27) \quad d : \text{Def}(d) \rightarrow E, \iota(\hat{f}) \mapsto d(\iota(\hat{f})) := \hat{d}(\hat{f}) \quad \forall \hat{f} \in \hat{D}.$$

Wir zeigen nun noch die Abgeschlossenheit von d .

B.1. SATZ. *Die Abbildung $d : \text{Def}(d) \rightarrow E$ ist abgeschlossen. Sind für alle $m \in \mathbb{N}$ zusätzlich D_m (und damit auch \hat{D}_m) eine C^* -Algebra, E_m ein D_m -Banach-Bimodul und $d_m : D_m \rightarrow E_m$ eine Derivation, so ist auch \hat{d} eine Derivation.*

BEWEIS. Sei $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\text{Def}(d)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n = f$ bezüglich $\|\cdot\|_D$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} d f^n = g$ bezüglich $\|\cdot\|_E$. Zu zeigen ist $f \in \text{Def}(d)$ und $d f = g$.

Weil ι injektiv ist, gibt es zu $f^n \in \text{Def}(d)$ genau ein $\hat{f}^n \in \hat{D}$ mit $\iota(\hat{f}^n) = f^n$. Es ist

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}^n - \hat{f}^m\|_{\hat{D}} &= \max\left(\|\iota(\hat{f}^n - \hat{f}^m)\|_D, \|\hat{d}(\hat{f}^n - \hat{f}^m)\|_E\right) \\
&= \max(\|f^n - f^m\|_D, \|d f^n - d f^m\|_E),
\end{aligned}$$

und daher bildet $(\hat{f}^n)_n$ eine $\|\cdot\|_{\hat{D}}$ -Cauchyfolge, weil $(f^n)_n$ bezüglich $\|\cdot\|_D$ und $(d f^n)_n$ bezüglich $\|\cdot\|_E$ konvergieren. Da \hat{D} ein Banachraum ist, konvergiert $(\hat{f}^n)_n$ gegen ein $\hat{f} \in$

\hat{D} bezüglich $\|\cdot\|_{\hat{D}}$. Dann gilt $\iota(\hat{f}) = \iota(\lim_{n \rightarrow \infty}(\hat{f}^n)) = \lim_{n \rightarrow \infty}(\iota(\hat{f}^n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n = f$ wegen der Stetigkeit der Kontraktion ι , also $f \in \text{Def}(d)$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \|df - g\|_E &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|df - df^n\|_E \leq \max\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f^n\|_D, \lim_{n \rightarrow \infty} \|d(f - f^n)\|_E\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max\left(\|\iota(\hat{f} - \hat{f}^n)\|_D, \|\hat{d}(\hat{f} - \hat{f}^n)\|_E\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f} - \hat{f}^n\|_{\hat{D}} = 0, \end{aligned}$$

also $df = g$, und d ist abgeschlossen.

Gelten obige zusätzliche Voraussetzungen, so erfüllt \hat{d} nach Satz A.12 die Produktregel, also auch d wegen

$$d(\iota(f)\iota(g)) = d(\iota(fg)) = \hat{d}(fg) = f\hat{d}(g) + \hat{d}(f)g = \iota(f)d(\iota(g)) + d(\iota(f))\iota(g)$$

für $f, g \in \hat{D}$, also $\iota(f), \iota(g) \in \text{Def}(d)$. □

B.2. BEMERKUNG. Liegt \hat{D}_m dicht in D_m für alle $m \in \mathbb{N}$, so bedeutet dies nicht zwangsläufig, dass $\lim_{\leftarrow} \hat{D}_m$ dicht in $\lim_{\leftarrow} D_m$ liegen muss. Insgesamt ist es möglich, dass der Definitionsbereich des inversen Limes \hat{d} der Abbildungen \hat{d}_m zu $\{\mathbf{0}\}$ zusammenschrumpft. Allerdings überträgt sich die Abgeschlossenheit der Abbildungen \hat{d}_m wie gezeigt auf \hat{d} . Beim direkten Limes ist die Situation genau umgekehrt: Der direkte Limes \hat{d} von abgeschlossenen Abbildungen \hat{d}_m , die in entsprechender Weise zwischen zwei direkten Folgen von Banachräumen verlaufen, braucht nicht abgeschlossen zu sein, doch der Definitionsbereich der Abbildung \hat{d} , was dem direkten Limes der \hat{d}_m entspricht, liegt dicht in $\lim_{\rightarrow} D_m$, falls die \hat{D}_m dicht in D_m gelegen haben. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \pi_m(D_m)$ mit den Einbettungsabbildungen π_m in den direkten Limes nach Konstruktion dicht in $\lim_{\rightarrow} D_m$ liegt, und weil \hat{D}_m dicht in D_m liegt, ist auch $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \pi_m(\hat{D}_m)$ dicht in $\lim_{\rightarrow} D_m$.

Den Definitionsbereich $\text{Def}(d)$ von d können wir auch durch

$$(28) \quad \text{Def}(d) = \left\{ f \in D \mid (d_m \circ \pi_m(f))_{m \in \mathbb{N}} \in E = \lim_{\leftarrow} E_m \right\}$$

beschreiben, denn $\text{Def}(d)$ enthält genau diejenigen Folgenglieder $f = (f_m)_m \in D$, welche in der zur Graphennorm von d äquivalenten Norm $\max(\|\cdot\|_D, \|d \cdot\|_E)$ beschränkt sind. Das ist aber genau die Menge auf der rechten Seite der Gleichung (28), denn d bildet komponentenweise ab $(d(f)) = d((f_m)_m) = (d_m f_m)_m = (d_m \circ \pi_m(f))_m$, und $df \in E$ bedeutet $\|df\|_E = \lim_{m \rightarrow \infty} \|d_m f_m\|_{E_m} < \infty$.

Literaturverzeichnis

- [1] Charles A. Akemann, Gert Kjærgård Pedersen: *Facial Structure in Operator Algebra Theory*. Proc. London Math. Soc. (3) **64**, 418-448 (1992).
- [2] Sergio Albeverio, Raphael Høegh-Krohn: *Ergodic actions by compact groups on C^* -algebras*. Math. Z. **174**, 1-17 (1980).
- [3] Erik M. Alfsen: *Compact convex sets and boundary integrals*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [4] Erik M. Alfsen, Frederic W. Shultz: *State Spaces of Operator Algebras. Basic Theory, Orientations and C^* -products*. Birkhäuser Verlag, Boston, 2001.
- [5] Michael Barnsley: *Fraktale. Theorie und Praxis der Deterministischen Geometrie*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1995.
- [6] Heinz Bauer: *Maß- und Integrationstheorie*. Walter de Gruyter, Berlin, 1990.
- [7] M. Bachir Bekka, Nicolas Louvet: *Some Properties of C^* -Algebras Associated to Discrete Linear Groups*. Erschienen in: Joachim Cuntz, Siegfried Echterhoff (Eds.): *C^* -Algebras. Proceedings of the SFB-Workshop on C^* -Algebras, Münster, Germany, March 8-12, 1999*. Seite 1-22. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [8] Robert C. Busby, Harvey A. Smith: *Representations of twisted group algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. **149**, 503-537 (1970).
- [9] Ali H. Chamseddine, Alain Connes: *The spectral action principle*. Commun. Math. Phys. **186**, No. 3, 731-750 (1997).
- [10] Johann Cigler, Viktor Losert, Peter Michor: *Banach modules and functors on categories of banach spaces*. 10. Auflage, Marcel Dekker Inc., New York, 1979.
- [11] Alain Connes: *Non commutative differential geometry*. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **62**, 41-144 (1985).
- [12] Alain Connes: *Compact metric spaces, Fredholm modules, and hyperfiniteness*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **9**, 207-220 (1989).
- [13] Alain Connes: *Noncommutative Geometry*. Academic Press Inc., San Diego, 1994.
- [14] Alain Connes: *Noncommutative geometry and reality*. J. Math. Phys. **36** (11), 6194-6231 (1995).
- [15] Alain Connes: *Gravity Coupled with Matter and the Foundation of Non-commutative Geometry*. Commun. Math. Phys. **182**, No. 1, 155-176 (1996).
- [16] Kenneth R. Davidson: *C^* -Algebras by Example*. Amer. Math. Soc., Fields Institute Monographs, Vol. 6, Providence, 1996.
- [17] Karl de Leeuw: *Banach spaces of Lipschitz functions*. Studia Math. **21**, 55-66 (1961).
- [18] Jacques Dixmier: *C^* -Algebras*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1977.
- [19] Jacques Dixmier: *Von Neumann Algebras*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1981.
- [20] Jacques Dixmier: *General Topology*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [21] James Dugundji: *Topology*. 1. Auflage, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1966.
- [22] Gerald Edgar: *Measure, Topology and Fractal Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [23] Gerald Edgar: *Integral, Probability and Fractal Measure*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [24] Edward G. Effros, Zhong-Jin Ruan: *Representations of Operator Bimodules and their Applications*. J. Oper. Theory **19**, 137-157 (1988).
- [25] James Michael Gardner Fell: *The structure of algebras of operator fields*. Acta Math. **106**, 233-280 (1961).
- [26] Helmut Fischer, Helmut Kaul: *Mathematik für Physiker. Band 2: Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1998.
- [27] Philip Green: *The local structure of twisted covariance algebras*. Acta. Math. **140**, 191-250 (1998).

- [28] Misha Gromov: *Hyperbolic manifolds, groups and actions*. In *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference*, 183-213, Princeton Univ. Press, Princeton, 1981.
- [29] Misha Gromov with Appendices by Mikhail Katz, Pierre Pansu, Stephen Semmes: *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Birkhäuser Verlag, Boston, 1999.
- [30] Harald Grosse, Ctirad Klimčík, Peter Prešnajder: *On finite 4D quantum field theory in non-commutative geometry*. Commun. Math. Phys. **180**, No. 2, 429-438 (1996).
- [31] Jürgen Hengge: *Zur Konstruktion eines Differenzialkalküls auf kompakten Mengen*. Diplomarbeit. Mathematisches Institut der Universität Tübingen, 2001.
- [32] Horst Herrlich: *Topologie I: Topologische Räume*. Heldermann Verlag, Berlin 1966.
- [33] Harro Heuser: *Funktionalanalysis*. 5. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart 1986.
- [34] Harro Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. 10. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart 1993.
- [35] Harro Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. 5., durchgesehene Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart 1990.
- [36] Raphael Høegh-Krohn, Tor Skjelbred: *Classification of C^* -algebras admitting ergodic actions of the two-dimensional torus*. J. reine ang. Math. **328**, 1-8 (1981).
- [37] Leonid Vitalievich Kantorovič, Gleb Pavlovič Akilov: *Functional Analysis*. Second Edition, Pergamon Press Ltd., Oxford, 1982.
- [38] Jun Kigami, Michel L. Lapidus: *Weyl's Problem for the Spectral Distribution of Laplacians on P.C.F. Self-Similar Fractals*. Commun. Math. Phys. **158**, 93-125 (1993).
- [39] Andrej Nikolajevitsch Kolmogorov, Vladimir M. Tihomirov: *ε -Entropy and ε -Capacity of sets in functional Spaces*. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **17**, 277-364 (1961).
- [40] Jouni Luukkainen, Jussi Väisälä: *Elements of Lipschitz Topology*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A, Math. **3**, 85-122 (1977).
- [41] Benoît B. Mandelbrot: *Die fraktale Geometrie der Natur*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1987.
- [42] R. Daniel Mauldin, Mariusz Urbański: *The doubling property of conformal measures of infinite iterated function systems*. J. Number Theory **102**, 23-40 (2003).
- [43] Edward J. McShane: *Extension of Range of Functions*. Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 837-842 (1934).
- [44] Gerard J. Murphy: *C^* -Algebras and Operator Theory*. 1. Auflage, Academic Press Inc., San Diego, 1990.
- [45] Narutaka Ozawa, Marc A. Rieffel: *Hyperbolic group C^* -algebras and free-product C^* -algebras as compact quantum metric spaces*. arXiv:math. OA/0302310.
- [46] Judith A. Packer, Iain Raeburn: *Twisted crossed products of C^* -algebras*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **106**, 293-311 (1989).
- [47] Judith A. Packer, Iain Raeburn: *On the structure of twisted group C^* -algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. **334**, No. 2, 685-718 (1992).
- [48] Branka Pavlović: *Defining metric spaces via operators from unital C^* -algebras*. Pacific J. Math. **186**, No. 2, 285-313 (1998).
- [49] Gert Kjærgård Pedersen: *C^* -Algebras and their Automorphism Groups*. Academic Press Inc., London, 1979.
- [50] Gert Kjærgård Pedersen: *Analysis Now*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [51] Pat Quillen: *Variational Methods for Eigenvalue Approximation*. Erschienen unter http://www.ms.uky.edu/~quillen/var_eigs.pdf
- [52] Svetlozar T. Rachev: *Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models*. John Wiley and Sons, New York, 1991.
- [53] Svetlozar T. Rachev, Ludger Rüschendorf: *Mass Transport Problem. Volume I, Theory*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [54] Iain Raeburn, Aidan Sims, Dana P. Williams: *Twisted Actions and Obstructions in Group Cohomology*. Erschienen in: Joachim Cuntz, Siegfried Echterhoff (Eds.): *C^* -Algebras. Proceedings of the SFB-Workshop on C^* -Algebras, Münster, Germany, March 8-12, 1999*. Seite 161-181. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [55] Marc A. Rieffel: *Metrics on States from Actions of Compact Groups*. arXiv:math. OA/9807084, Doc. Math., J. DMV **3**, 215-229 (1998).
- [56] Marc A. Rieffel: *Metrics on State Spaces*. arXiv:math. OA/9906151, Doc. Math., J. DMV **4**, 559-600 (1999).

- [57] Marc A. Rieffel: *Group C^* -algebras as compact quantum metric spaces*. arXiv:math. OA/0205195, Doc. Math., J. DMV **7**, 605-651 (2002).
- [58] Marc A. Rieffel: *Gromov-Hausdorff distance for quantum metric spaces*. arXiv:math. OA/0011063, zur Veröffentlichung in Mem. Amer. Math. Soc.
- [59] Marc A. Rieffel: *Matrix algebras converge to the sphere for quantum Gromov-Hausdorff distance*. arXiv:math. OA/0108005, zur Veröffentlichung in Mem. Amer. Math. Soc.
- [60] Shôichirô Sakai: *C^* -Algebras and W^* -Algebras*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [61] Jürgen Schweizer: *Von Markov-Halbgruppen zu L^2 -Derivationen und wieder zurück*. Manuskript, Tübingen, 2002.
- [62] William Forrest Stinespring: *Positive functions on C^* -algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 211-216 (1955).
- [63] Erling Størmer: *Positive linear maps of operator algebras*. Acta Math. **110**, 233-278 (1963).
- [64] Masamichi Takesaki: *Theory of Operator Algebras I*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [65] Johann von Neumann: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Unveränderter Nachdruck der ersten Auflage von 1932*. Springer-Verlag, Berlin, 1968.
- [66] Nik Weaver: *Lipschitz Algebras and Derivations of von Neumann Algebras*. J. Func. Anal. **139**, 261-300 (1996).
- [67] Nik Weaver: *Lipschitz Algebras*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1999.
- [68] Dirk Werner: *Funktionalanalysis*. 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [69] Hermann Weyl: *Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte*. Gött. Nach. (math.-phys. Klasse, Sitzung vom 25. Februar 1911), 110-117 (1911).
- [70] Hermann Weyl: *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen*. Math. Ann. **71**, 441-479 (1912).
- [71] Karol Życzkowski, Wojciech Słomczyński: *The Monge metric on the sphere and geometry of quantum states*. J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 6689-6722 (2001).

Index

- abelsch, 92
- Abschluss
 - einer Lip-Halbnorm: \bar{L} , 34
- adjungierte Abbildung, *siehe* duale Abbildung
- Äquivalenz
 - von Kategorien, 32
 - von metrischen Räumen, 43
- atomar
 - einwickelnde von Neumann-Algebra, 33
 - Maßraum: (X, μ) , 28
 - W^* -Algebra, 31
- Banach-Bimodul, 144
- Beschränktheit
 - totale, 4
- Bild
 - wesentliches, 28
- Bochner-integrierbar, 17
- Borel-messbar, 17
 - strikt, 17
- C^* -Algebren
 - AF-Algebra, 136
 - CCR-, 92
 - getwistete Gruppen- C^* -Algebren:
 - ra: $C^*(G, \mathfrak{c})$, 15
 - Gruppen- C^* -Algebra: $C^*(G)$, 14
 - Klasse der endlichdimensionalen: Fin, 97
 - Klasse der endlichdimensionalen kommutativen: kFin, 97
 - Klasse der Matrix-Algebren: Mat, 97
 - Klasse von C^* -Algebren: \mathfrak{K} , 97
 - liminale, 92
 - postliminale, 92
 - residual endlichdimensionale, 78
 - RFD-Algebra, 78
 - vom Typ I_0 , 92
 - vom Typ I, 92
- C^* -dynamisches System: (A, G, α) , 73
- Darstellung
 - kovariante, 18
 - linksreguläre, 15
 - nicht-degenerierte, 14
 - treue, 20
 - universelle: (π_u, \mathcal{H}_u) , 14
- de Leeuw-Abbildung: d , 21
- Derivation, 147
 - de Leeuw-Abbildung: d , 21
 - L^2 -Derivation: d , 107
- Dimension
 - bei kompakten quantenmetrischen Räumen, 4
 - bei Lipschitz-Algebren, 4
 - spektrale Dimension eines Kompaktums K :
 - $\text{sdim}(K)$, 111
- direkte Folge, 141
- direkter Limes, 60, 141
 - von Abbildungen, 144
- Drehalgebra
 - \mathcal{A}_θ , 10
 - irrationale: \mathcal{A}_θ , 10
 - rationale: \mathcal{A}_θ , 10, 45, 88
- duale Abbildung, 32, 33, 55, 60, 64, 86, 93, 121, 137–139
- Durchmesser, 5
- dynamisches System
 - C^* -dynamisches System: (A, G, α) , 73
 - getwistetes: $(A, G, \alpha, \mathfrak{c})$, 17
 - W^* -dynamisches System: (\mathcal{M}, G, α) , 25
- effektiv, 10
- Einheitskreislinie: S^1 , 10
- endliche Durchschnittseigenschaft von Mengen, 133
- Entropie-Index
 - (unterer): $\text{lei}(K)$, 39
 - dritter multiplikativer: mei^3 , 55
 - erster multiplikativer: mei^1 , 44
 - vollständig positiver: $\mathfrak{R}\text{vpei}$, 98
 - zweiter multiplikativer: mei^2 , 44
- ε -fein, 38
- ε -Feinheit, 38
- ε -separiert, 38
- ε -Separiertheit, 38
- ergodisch, 10
- essenzielle Vereinigung, 30

- feiner werdende Partition, 131
 - zugehörige Folge abgeschlossener Partitions-
mengen, 131
 - zugehörige Folge feiner werdender (ungerich-
teter) Graphen: $\mathcal{G}_m = (\mathcal{V}_m, \mathcal{E}_m)_{m \in \mathbb{N}}$, 132
 - zugehörige Folge feiner werdender gerichte-
ter Graphen: $(\mathcal{G}'_m)_m = (\mathcal{V}_m, \mathcal{E}'_m, l_m, r_m)_m$,
137
 - zugehörige Folge von in den Partitionsmen-
gen gewählter Punkte, 131
- Feinheit: ε_φ , 98
- Formel von Weyl, 107
- Funktionalkalkül
 - C^1 -, 78, 79
- Funktor
 - kontravariant, 32
 - kovariant, 32
- Güte: $\varepsilon_{\psi, \varphi}$, 104
- Gen, 109
- Genbereich, 109
- getwistet
 - verschränktes Produkt: $A \times_{\alpha, \mathfrak{c}} G$, 18
 - dynamisches System: $(A, G, \alpha, \mathfrak{c})$, 17
 - Gruppen- C^* -Algebra: $C^*(G, \mathfrak{c})$, 15
 - kovariantes System: $(H, A, \beta, \mathcal{J})$, 18
 - Kovarianz-Algebra: $C^*(H, A, \mathcal{J})$, 18
- Graphenhomomorphismus
 - zwischen (ungerichteten) Graphen, 132
 - zwischen gerichteten Graphen, 138
- Hausdorff-Abstand, 118
- Hausdorff-Besicovitch-Dimension, 38
- Hausdorff-Maß
 - äußeres s -dimensionales: H^s , 38
- Hutchinson-Metrik, 5
- integrierte Form, 18
- inverse Folge, 145
 - von kompakten quantenmetrischen Räumen,
60
 - von Lipschitz-Algebren, 60
- inverser Limes, 145
 - von Abbildungen, 148
 - von kompakten quantenmetrischen Räumen,
60
 - von Lipschitz-Algebren, 60
- isometrisch isomorph, 147
- Isomorphismus
 - in den Kategorien LIP und KQR, 47
- Kästchen, 40
- Kästchen-Zähl-Index: $\text{kzi}(K)$, 40
- Kategorien
 - BALG, 61
 - KQR, 47
- KW*D, 31
- KW*D_a, 31
- LIP, 47
- VM, 32
- W*D, 31
- Äquivalenz, 32
 - duale, 32
 - entgegengesetzte, 32
- kdim, 44
- kompakter quantenmetrischer Raum
 - $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, 4
 - Dimension, 4
- Komponente, 119
- konstantes Fortsetzen, 121
- konvex, 83–86
- konvexe Hülle: $\text{co}(\cdot)$, 83, 86
- Konvolution, 14
- kovariant
 - Darstellung, 18
- 2-Kozykel: \mathfrak{c} , 14
- Längenfunktion, 12
 - Wort-Längenfunktion, 15
- L^2 -Derivation: d , 107
- Linkstranslation, 12, 16
- Lip-Halbnorm: $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$, 4
- Lipschitz-Algebra
 - $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, 3
 - Dimension, 4
- Lipschitz-Halbnorm: $\text{Lip}(\cdot)$, 6
- Maß
 - atomar, 28
 - Haar-Maß: μ_G , 14
 - linksinvariant, 14
- Maßraum
 - atomarer: (X, μ) , 28
 - endlich zerlegbarer: (X, μ) , 29
- Maschenweite: μ_π , 49
- $M_\varepsilon(K)$, 38
- $M_\varepsilon^1(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, 44
- $M_\varepsilon^2(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, 44
- $M_\varepsilon^3(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, 55
- M_ε^s , 111
- $M_\varepsilon^\mu(K)$, 49
- messbare Pseudometrik, 27
- Metrik
 - Hutchinson, 5
 - konvexe, 86
 - mittelpunktsausgegliche, 86
 - mittelpunktskonvexe, 86
 - Monge-Kantorovič: $\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}$, 5
- metrische Äquivalenz, 43
- modulare Funktion: Δ , 14
- Monge-Kantorovič-Metrik: $\rho_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}$, 5

- Multiplikativer Entropie-Index
 - dritter: mei^3 , 55
 - erster: mei^1 , 44
 - zweiter: mei^2 , 44
- $N_\varepsilon(K)$, 38
- ${}^{\mathfrak{R}}N'_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, 98
- ${}^{\mathfrak{R}}\tilde{N}_\varepsilon(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, 104
- Netzhaut, 106
- nicht-degenerierte Darstellung, 14
- nulldimensionaler Raum, 119
- Ordnungs-Eins-Raum, 4
- positiv, 98
 - n-positiv, 98
 - vollständig positiv, 98
- Potenzmenge: \mathcal{P} , 117, 118, 132
- Prädual: \mathcal{M}_* , 20
- Range-Abbildung, 138
- Raum
 - kompakter metrischer: (K, ρ) , 5
 - kompakter quantenmetrischer: $(A, \mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, 4
 - nulldimensionaler, 119
- residual endlichdimensional, 78
- Retina, 106
- RFD-Algebra, 78
- Satz
 - von Gelfand-Naimark, 33, 55, 79, 137
 - von Krein-Šmulian, 21, 24
 - von Riesz, 106
 - von Stinespring, 99
 - von Tietze, 90
- Seite (im Zustandsraum): V , 83, 87
 - aufspaltend, 83, 87
 - zugehöriges schwach*-abgeschlossenes Ideal: V° , 83, 87
- selbstadjungierte Elemente: A_{sa} , 4
- Separiertheit
 - ε -Separiertheit, 38
 - bei Punktmengen $U \subset K$: ε_U , 38
 - dritte: ε_π^3 , 55
 - erste: ε_π^1 , 44
 - zweite: ε_π^2 , 44
- Source-Abbildung, 138
- spektrale Dimension für ein Kompaktum K : $\text{sdim}(K)$, 111
- Spektrales Tripel: $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, 22
- Spektrum
 - primitives: \check{A} , 91
 - von C^* -Algebren: \hat{A} , 33
 - von Elementen a in C^* -Algebren: $\sigma(a)$, 78
- Startecke, 138
- stetige Spur, 91
- strikt
 - strikt Borel-messbar, 17
 - strikte Konvergenz, 18
- Topologie
 - Jacobson-, 91
 - ultraschwache, 20
- 2-Torus: \mathbf{T}^2 , 10
- total unzusammenhängend, 120
- treu, 20
- Umgebungsbasis, 119
- universelle Darstellung: (π_u, \mathcal{H}_u) , 14
- universelle Eigenschaft
 - beim direkten Limes, 142
 - beim inversen Limes, 60, 145
- unterhalbstetig, 4
- Verdoppelungs-Eigenschaft, 101
- Verdoppelungs-Konstante, 101
- vollständig positiv, 98
 - vollständig positiver Entropie-Index: ${}^{\mathfrak{R}}\text{vpei}$, 98
- W^* -Algebra
 - \mathcal{M} , 20
 - atomare, 31
- W^* - \mathcal{M} -Bimodul: \mathcal{N} , 19
- W^* -Derivation
 - $(\mathcal{M}, E \subset \mathcal{N}, (\delta, \text{Def}(\delta)))$, 20
 - kommutative, 20
- W^* -dynamisches System: (\mathcal{M}, G, α) , 25
- wesentliches Bild, 28
- Wirkung
 - effektiv, 10
 - ergodisch, 10
- Zerlegungsmenge, 119
- Zielecke, 138
- zusammenhängend, 119
- Zusammenhangskomponente, 119
- Zustände
 - reine: $S^e(A)$, 44
- Zustandsraum: $S(A)$, 5

Danksagung

Die letzten beiden Jahre des Schaffens am „Projekt Doktorarbeit“ hätte ich ohne die Unterstützung durch die verschiedensten Menschen in meinem Umfeld auf die vielfältigste Weise nicht meistern können. Ohne sie wäre meine nun vorliegende Arbeit nie zustande gekommen; deshalb ist sie auch ein Stück weit ihre Arbeit.

Vor allem Jürgen Schweizer will ich meinen tiefen Dank aussprechen. Du, Jürgen, hast erst den Anstoß gegeben, dass ich mich überhaupt auf dieses Unterfangen eingelassen habe; ohne dich hätte mir wohl der Mut dazu gefehlt. Du warst für mich stets ansprechbar und offen für fachliche (aber auch nicht-fachliche) Probleme, und seien sie noch so unscheinbar gewesen. Dass du mir bei den verschiedensten Problemstellungen Ideen für einen Ansatz geliefert und du dich bei größeren Problemen nicht gescheut hast, dich „reinzudenken“, und du dir überhaupt viel Zeit für mich genommen hast, rechne ich dir hoch an. Ich habe mich in deiner Obhut nie unbehütet oder unversorgt, geschweige denn vernachlässigt gefühlt. Deine bestechende Kompetenz und dein enormes Fachwissen, aber nicht weniger deine Fähigkeit, Vorstellungen für Dinge zu entwickeln, diese anschaulich zu erklären und auf den Punkt zu bringen, waren für mich eine unentbehrliche Quelle der Motivation, haben mir bisweilen meine Grenzen aufgezeigt, waren aber auch gleichzeitig Herausforderung und Ansporn für mich. Danke für all das.

Auch bei meinem Doktorvater Manfred Wolff möchte ich mich herzlich bedanken. Sie, Herr Wolff, haben mir erst durch das Vermitteln einer Anstellung in Ihrem Arbeitsbereich die Voraussetzungen geschaffen, dass ich mich finanziell recht unbekümmert meiner Arbeit widmen konnte. Obwohl Sie viel Stress, bedingt durch Ihren eigenen Aufgabenkreis, hatten, waren Sie immer an meinen Fortschritten interessiert, und wenn diese einmal länger ausblieben, haben Sie immer eine Möglichkeit gesehen und mir geholfen weiterzukommen. Auch Ihre Kommentare und Vorschläge über die Struktur meiner Arbeit, darüber, was sinnvoll ist, wann, wo und wie zu bringen, wegzulassen oder weiterzumachen, waren mir sehr wichtig und hilfreich, aber nicht weniger die fruchtbaren Diskussionen fachlicher Natur, aus denen so manche neue Idee erwuchs. Vielen Dank dafür.

Insgesamt will ich mich bei den Leuten in dem Arbeitsbereich, in dem ich tätig bin, für die äußerst angenehme Atmosphäre, die ich auch schon über weite Strecken meines Studiums genießen durfte, bedanken. Nennen will ich an dieser Stelle meinen Mitstreiter Ralf Hoffmann. Du, Ralf, hast mir unter anderem durch kritische Kommentare zu meinen Vorträgen so manchen Anstoßpunkt für Verbesserungen geliefert. Sei herzlich bedankt.

Schließlich gebührt mein ganz besonderer Dank meiner Mutter und meinem Bruder Stefan, aber auch all meinen Freunden, im Besonderen Frank Schosser. Durch eure Geduld, euer Zuhören, euer Einfühlungsvermögen und eure aufbauenden Worte habt ihr mir über so manche Krise hinweggeholfen und mich ein Stück weit den Blick für das Wesentliche bewahren lassen. Vergelt's Gott!

LEBENS LAUF UND WISSENSCHAFTLICHER WERDEGANG

Persönliche Angaben

Jürgen Hengge
Gangloffweg 4
88299 Leutkirch im Allgäu

geboren am 14. Dezember 1974 in Leutkirch im Allgäu

Schule und Studium

August 1981 - Juli 1985	Besuch der Grundschule Oberer Graben in Leutkirch
August 1985 - Juni 1994	Besuch des Gymnasiums Leutkirch
14. Juni 1994	Abitur
Juli 1994 - September 1995	Ableistung des Zivildienstes
seit dem Wintersemester 1995/96	eingeschrieben an der Universität Tübingen für den Studiengang Mathematik-/Physik-Lehramt
03. April 1997	Zwischenprüfung im Fach Mathematik
20. Oktober 1997	Zwischenprüfung im Fach Physik
26. April 2001	1. Staatsexamen im Fach Physik
seit dem Wintersemester 2001/02	eingeschrieben an der Universität Tübingen für den Studiengang Mathematik-Diplom mit Nebenfach Physik
26. Oktober 2001	1. Staatsexamen im Fach Mathematik
28. Februar 2002	Diplom-Prüfung im Fach Mathematik
April 2002	Beginn der Promotion im Fach Mathematik

Berufliche Tätigkeiten

April 2002	Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Tübingen
seit Mai 2002	Wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut der Universität Tübingen

Zu meinen akademischen Lehrern gehörten

V. Batyrev, U. Felgner, H. Fischer, H. Heyer, H. Kaul, W. Kaup, W. Knapp, F. Loose, C. Lubich, R. Nagel, H. Salzmann, G. Scheja, P. Schmid, M. Voit, M. Wolff und H. Yserentant in Mathematik sowie
M. Baumann, H. Clement, F. Gönnenwein, P. Grabmayr, W.-D. Hartmann, R. Hübener, R. Kleiner, O. Lutz, H. Pfister, A. Rieckers, A. Schwenk und G. J. Wagner in Physik.