Quantenchromodynamik als effektive Theorie von Quarks und zusammengesetzten Gluonen

Dissertation
Zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Mathematik und Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Thomas Fuß
aus Rottweil

2004

Tag der mündlichen Prüfung: 06.05.2004

Dekan: Prof. Dr. H. Müther

1.Berichterstatter: Prof. Dr. H. Stumpf

2.Berichterstatter: Apl. Prof. Dr. R. Alkofer

Zusammenfassung

Thomas Fuß

Quantenchromodynamik als effektive Theorie von Quarks und zusammengesetzten Gluonen

Ziel dieser Arbeit ist es, die Quantenchromodynamik als effektive Theorie aus einem nichtlinearen Spinorfeldmodell abzuleiten. Dabei werden die Gluonen als zusammengesetzte Teilchen postuliert.
Als Ausgangspunkt wird ein Modell eingeführt, das die Quark-Quark Wechselwirkung beschreibt.
Da konventionelle Spinortheorien nicht renormierbar sind, wird das Modell unter Benützung von Hilfsfeldern formuliert. Für diese Hilfsfelder werden drei Feldgleichungen erster Ordnung postuliert. Das auf diese Weise postulierte Modell ist ein relativistisch invariantes, regularisiertes, lokales, kanonisch quantisierbares Spinorfeldmodell, das einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation zugänglich ist.
Die kanonische Quantisierung bezieht sich auf die Hilfsfelder, und es wird eine Quantenfeldtheorie in den Hilfsfeldern formuliert.
Anschließend wird ein Zustandsraum für die Hilfsfeldoperatoren angegeben. Durch die GNS-Konstruktion wird eine zyklische Basis über dem unbekannten Grundzustand konstruiert. Die Dynamik eines Zustandes wird durch die Heisenberggleichung für Operatoren beschrieben. Eine kompakte Formulierung wird durch die Einführung von Funktionalzuständen ermöglicht. Eine isometrische Abbildung zwischen den Hilbertraumzuständen und den Funktionalzuständen gestattet es, die Quantenfeldtheorie in einem Funktionalraum zu formulieren. Das Ergebnis ist die Algebraische Schrödingerdarstellung für Funktionalzustände. Die explizite Darstellung wird mittels Normaltransformation festgelegt. Damit wird eine explizite Zustandsdarstellung der elementaren Hilfsfelder abgeleitet.
Die Schwache Abbildung transformiert die Gleichung für die Zustandsdarstellung der elementaren Hilfsfelder in eine Gleichung für die zusammengesetzten Gluonen und die phänomenologischen Quarks.
Für die Auswertung der Schwachen Abbildung werden die Wellenfunktionen der zusammengesetzten Teilchen, die die Verbindung zwischen den fermionischen Zustandsdarstellungen und den phänomenologischen Quarks und Gluonen vermitteln, benötigt. Diese Funktionen werden als Lösungen der Hard-Core Gleichung, die durch den Diagonalanteil der Algebraischen Schrödingerdarstellung gegeben ist, definiert.
In den letzten beiden Kapiteln wird die Schwache Abbildung ausgewertet und mit den phänomenologischen Gleichungen der QCD in temporaler Eichung verglichen.
Die Motivation für die angewandten Techniken wird in der Arbeit ausführlich diskutiert.
Bei der Ableitung der effektiven Theorie werden Abschätzungen durchgeführt, die einen Niederenergielimes rechtfertigen. Die algebraische Auswertung wurde grundsätzlich exakt durchgeführt.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Ableitung einer effektiven Dynamik zusammengesetzter Teilchen ist ein wesentliches Problem aller mikroskopischen Theorien. Ein Beispiel ist die Quarkstruktur von Mesonen und Baryonen im gegenwärtig allgemein anerkannten Quarkmodell, das in Form der QCD definiert wird und aus dem eine effektive Theorie für die Wechselwirkung von Baryonen und Mesonen abgeleitet werden sollte.
Der erste Schritt zur Ableitung einer effektiven Theorie ist die Berechnung der Bindungszustände, die die zusammengesetzten Teilchen definieren. Bereits hier treten Schwierigkeiten auf.
Um im Fall der QCD Mesonen und Baryonen beschreiben zu können, wäre es nötig, den Niederenergielimes der QCD zu kennen. Dieser konnte bisher aus der QCD nicht abgeleitet werden. Deshalb wurde eine Beschreibung des Niederenergiebereichs der QCD über eine effektive Theorie für Quarks konstruiert. Ausgehend vom konstituenten Quarkmodell [1] wird deren Lagrangedichte ausschließlich durch die Quarkfelder ohne explizite Gluonen formuliert. Das einfachste Modell, das diese Bedingungen erfüllt, ist das Nambu-Jona-Lasinio Modell.
Die Verwendung eines solchen NJL-Modells ist jedoch nicht automatisch gleichbedeutend mit seiner exakten Lösbarkeit, indem z.B. die Bindungszustände von Mesonen direkt berechnet werden. Vielmehr muß dieses Modell mit verschiedenen Näherungen einer Auswertung zugänglich gemacht werden [1], [2].
Bisher wurde z.B. in der Literatur [1], [2] die Beschreibung von Mesonen als Quark-Antiquark Bindungszustände mit Hilfe der Mean-Field Approximation gewonnen. Dies führt zu einer Vernachlässigung der nichtlinearen Effekte der Wechselwirkung. Zudem wird der dafür benötigte Propagator durch einen euklidischen Cut-off regularisiert, wodurch die Lorentzinvarianz der Theorie verloren geht. Weitere kritische Anmerkungen, auch zu anderen Verfahren, werden in [3] angegeben.
Neben diesen mathematischen Gründen gibt es noch einen physikalischen Grund, warum dieses Verfahren nicht fortgesetzt werden sollte.
Die Hadronen, also die Baryonen und Mesonen, werden im Rahmen dieser effektiven Theorie als Farbsingulettzustände konstruiert. Speziell die Mesonen werden als Zwei-Quark Farbsingulettzustände berechnet. Vom Standpunkt der Gruppentheorie erlauben die Zweiquarkzustände ebensogut Farboktettdarstellungen, und es erhebt sich daher die Frage, warum keine Farboktettbindungszustände berechnet werden.
Nach allgemeiner Auffassung (Confinement Hypothese) sind Bindungszustände des Farboktetts keine beobachtbaren Teilchen, da nur Farbsingulettzustände als beobachtbar angesehen werden. Andererseits sind die Gluonen Farboktettzustände und daher per Definition nicht beobachtbar. Aus diesem Grund ist es dann aber naheliegend, die Gluonen mit diesen farbigen Bindungszuständen zu identifizieren. Dies bedeutet, daß auch Gluonen aus einem Quark und Antiquark fusioniert sein müssen. Auch diese Idee wurde schon in der Literatur diskutiert. Allerdings ohne hinreichende analytische Bearbeitung. Chanowitz und Drell [4] und West [5] postulierten, daß die Bindung von Quarks zu Gluonen führt. Terazawa [6] schließlich beschrieb die Gluonen als farbige Quark-Antiquarkpaare.
In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren verwendet, das die oben aufgeführten Schwächen (Mean-Field Approximation, euklidischer Cut-off usw.) vermeidet. Als Grundlage dient ein regularisiertes, relativistisch invariantes, lokales nichtlineares Spinorfeldmodell, das einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation zugänglich ist

[7].
Für die Ableitung effektiver Theorien im Rahmen dieses Modells wird das Verfahren der Schwache Abbildung [3] verwendet. Die Schwache Abbildung ist allgemein anwendbar, um zusammengesetzte Teilchen und deren Wechselwirkung zu beschreiben.
Dieses Verfahren wurde zur Ableitung der elektroschwachen Wechselwirkung und der Gravitation erfolgreich angewandt [3].
In dieser Arbeit wird mit Hilfe der eben genannten Techniken gezeigt, daß die Annahme, die Gluonen als Quark-Antiquarkbindungszustand zu beschreiben, zu einer lokalen SU(3)-Eichtheorie für Gluonen und Quarks führt, sofern geeignete Niederenergienäherungen angewandt werden. Im Gegensatz zu allen anderen bisherigen Verfahren werden hier aber Abschätzungen durchgeführt, die einen Niederenergielimes rechtfertigen. Damit wird gezeigt, daß die QCD nicht fundamental sein muß.
Die Durchführung dieses Programms erfordert umfangreiche Rechnungen. Algebraische Umformungen wurden grundsätzlich exakt und per Hand durchgeführt und mit Hilfe des Computer Algebra Programms "Mathematica" überprüft.
Das Ergebnis der Arbeit sind nicht nur die Feldgleichungen einer SU(3) lokalen Eichtheorie, sondern darüberhinaus zeigt sich, daß diese Feldgleichungen aus einer Lagrangedichte abgeleitet werden können.

Kapitel 2

Das Modell

Als Ausgangspunkt der Arbeit wird ein Modell benötigt, das die Quark-Quark Wechselwirkung beschreibt.

Postulat

Die Feldgleichungen

$$(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - cm_i)_{\alpha\beta}\delta_{AB}\delta_{f_1 f_2}\psi_{B\beta f_2 i}(x) \quad = \quad g\lambda_i V_{\substack{A\;B\;C\;D\\ \alpha\;\beta\;\gamma\;\delta\\ f_1 f_2 f_3 f_4}} \sum_{j,k,l=1}^{3} \psi_{B\beta f_2 j}(x)\bar{\psi}_{C\gamma f_3 k}(x)\psi_{D\delta f_4 l}(x) \tag{2.1}$$

und

$$(-i\hbar\,{}^{T}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - cm_i)_{\alpha\beta}\delta_{AB}\delta_{f_1 f_2}\bar{\psi}_{B\beta f_2 i}(x) \quad = \quad g\lambda_i V_{\substack{A\;B\;C\;D\\ \alpha\;\beta\;\gamma\;\delta\\ f_1 f_2 f_3 f_4}} \sum_{j,k,l=1}^{3} \bar{\psi}_{D\delta f_4 l}(x)\psi_{C\gamma f_3 k}(x)\bar{\psi}_{B\beta f_2 j}(x) \tag{2.2}$$

beschreiben die Quark-Quark Wechselwirkung.

Die Größe ψ ist ein Dirac-Spinor mit dem Spinorindex α, (β, γ, δ), dem Flavorindex A, (B, C, D) und dem Farbindex f. Einzig neu ist der Hilfsfeldindex i, (j, k, l), dessen Bedeutung in Folgendem erläutert wird. Die Größen m_i sind die Massen der Hilfsfelder. Die Größen λ_i werden in Kapitel 2.2.1 und der Vertex V in Kapitel 2.1 beschrieben. Die Formulierung über die Hilfsfelder $\psi_{\alpha A f i}(x)$ mit geeigneten λ_i führt auf eine regularisierte Theorie.
Dieses Modell ist lokal, relativistisch invariant, regularisiert und einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation zugänglich!
In Folgendem wird ein heuristischer Weg dargestellt, wie diese Grundgleichungen aus einem NJL-Modell gewonnen werden können.
Das NJL-Modell, das von Nambu und Jona-Lasinio [8] eingeführt wurde und auf den Ideen Heisenbergs [9] beruht, gilt in den phänomenologischen Theorien als Ersatzmodell für den Ein-Gluonenaustausch zwischen Quarks [2].
Das SU(3)-Flavor NJL-Modell beinhaltet folgende Annahmen [1]:

- Die u-, d- und s-Quarks tragen die zugrundeliegenden Freiheitsgrade.
- Die gluonischen Freiheitsgrade werden in einer lokalen effektiven Wechselwirkung zwischen den Quarks ausgedrückt.
- Die effektive Wechselwirkung wird in Einklang mit den Symmetrien der QCD konstruiert.

Die Lagrangedichte des NJL-Modells lautet:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{NJL}} = \bar{q}\,(i\,\partial\!\!\!/ - m_0)\,q + \mathcal{L}_{\mathrm{int}} \tag{2.3}$$
$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \mathcal{L}^{(4)}_{\mathrm{int}} + \mathcal{L}^{(6)}_{\mathrm{int}} \tag{2.4}$$

$\mathcal{L}^{(4)}_{\mathrm{int}}$ ist eine lokale Vierfermionenwechselwirkung, und $\mathcal{L}^{(6)}_{\mathrm{int}}$ ist ein $U(1)_A$ brechender Term, der einen Sechspunkt-Vertex darstellt. $\mathcal{L}^{(4)}_{\mathrm{int}}$ erfüllt die chirale $U(3)_L \otimes U(3)_R$ Symmetrie sowie die globale $SU(3)$ Farbeichsymmetrie und ist invariant unter der PCT Transformation.
Ein einfaches Modell wird durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\mathrm{NJL}} = \bar{\Phi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Phi + \frac{g}{2}[(\bar{\Phi}\Phi)^2 + (\bar{\Phi}i\gamma_5\Phi)^2]\,, \tag{2.5}$$

beschrieben. Φ ist ein Spinor, der neben dem Spinorindex (α) noch Farb- (f) und Flavorindex (A) trägt ($\Phi_{\alpha A f}$).
Wie sich in expliziten Rechnungen zeigt, muß dieses Modell einem Regularisierungsverfahren unterzogen werden.

2.1 Die Regularisierung des NJL-Modells

Es wird ein Regularisierungsverfahren verwendet, welches Bopp [10] in die klassische Elektrodynamik eingeführt hat. Bopp führte Feldgleichungen höherer Ordnung ein und erhielt eine regularisierte Theorie. Dieses Verfahren wird auf die Feldgleichungen, die aus der Lagrangedichte (2.5) für die Felder Φ und $\bar{\Phi}$ folgen, angewendet, d.h. die aus der NJL-Lagrangedichte abgeleiteten Feldgleichungen werden durch regularisierte Feldgleichungen ersetzt. Für das Spinorfeld ergibt sich:

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - cm)^{\mathrm{reg}}_{\alpha\beta}\delta_{AB}\delta_{f_1 f_2}\Phi_{B\beta f_2}(x) = gV_{\substack{A\;B\;C\;D\\ \alpha\;\beta\;\gamma\;\delta\\ f_1 f_2 f_3 f_4}}\Phi_{B\beta f_2}(x)\bar{\Phi}_{C\gamma f_3}(x)\Phi_{D\delta f_4}(x) \tag{2.6}$$

mit

$$V_{\substack{A\;B\;C\;D\\ \alpha\;\beta\;\gamma\;\delta\\ f_1 f_2 f_3 f_4}} := \sum_{h=1}^{2}\delta_{AB}\delta_{CD}v^h_{\alpha\beta}v^h_{\gamma\delta}\delta_{f_1 f_2}\delta_{f_3 f_4} \tag{2.7}$$
$$v^1_{\alpha\beta} := \delta_{\alpha\beta}\quad , \tag{2.8}$$
$$v^2_{\alpha\beta} := i\gamma^5_{\alpha\beta}\quad , \tag{2.9}$$

und das adjungierte Spinorfeld

$$\bar{\Phi}_{A\alpha f}(x) := \Phi^+_{B\beta c}(x)\gamma^0_{\beta\alpha}\delta_{AB}\delta_{cf} \tag{2.10}$$

erfüllt die folgende Gleichung:

$$(-i\hbar\,{}^T\gamma^\mu\partial_\mu - cm)^{\mathrm{reg}}_{\alpha\beta}\delta_{AB}\delta_{f_1 f_2}\bar{\Phi}_{B\beta f_2}(x) = gV_{\substack{A\;B\;C\;D\\ \alpha\;\beta\;\gamma\;\delta\\ f_1 f_2 f_3 f_4}}\bar{\Phi}_{D\delta f_4}(x)\Phi_{C\gamma f_3}(x)\bar{\Phi}_{B\beta f_2}(x)\,. \tag{2.11}$$

Der Index "reg" bedeutet:

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - cm)^{\mathrm{reg}}_{\alpha\beta} := \Big[(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - cm_1)(i\hbar\gamma^\nu\partial_\nu - cm_2)(i\hbar\gamma^\rho\partial_\rho - cm_3)\Big]_{\alpha\beta} \tag{2.12}$$

mit

$$(m_i)_{\alpha\beta} := m_i\delta_{\alpha\beta}\,,\quad i = 1,2,3. \tag{2.13}$$

2.2 Das Zerlegungstheorem

Im nächsten Schritt muß dieses Modell quantisiert werden. Feldgleichungen höherer Ordnung können nicht kanonisch quantisiert werden! Die von Heisenberg postulierte nichtkanonische Quantisierung [9] ließ jedoch keine interpretierbaren Resultate zu. Durch die Ableitung eines Zerlegungstheorems durch Stumpf [11] und einer Verallgemeinerung des Theorems durch Großer [12] ist dieses Modell einer kanonischen Quantisierung zugänglich geworden. Das Zerlegungstheorem wird dazu benutzt, die Feldgleichungen (2.6) und (2.11), die von höherer Ordnung in den Ableitungen sind, in einen Satz von Feldgleichungen zu zerlegen, die von erster Ordnung in den Ableitungen sind.

2.2.1 Das Zerlegungstheorem

Es gelte folgende Gleichung:

$$\prod_{i=1}^{N}(D-m_i)\Phi = V[\Phi]. \tag{2.14}$$

Φ sei die Lösung dieser Gleichung, und $V[\Phi]$ sei ein beliebiger Wechselwirkungsterm. Werden Hilfsfelder ψ_i durch

$$\psi_i := \lambda_i \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}(D-m_k)\Phi, \quad i=1,\dots N \tag{2.15}$$

definiert, mit

$$\lambda_i := \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}(m_i-m_k)^{-1}, \quad i=1,\dots N, \tag{2.16}$$

dann gilt:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N}\psi_i, \tag{2.17}$$

und die Hilfsfelder sind Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$(D-m_i)\psi_i = \lambda_i V\left[\sum_{j=1}^{N}\psi_j\right], \quad i=1,\dots N, \tag{2.18}$$

ohne Summation über i auf der linken Seite. Umgekehrt gilt: Wenn die Hilfsfelder ψ_i Lösungen der Gleichung (2.18) sind, mit λ_i, wie in Gleichung (2.16) definiert, und der Spinor Φ durch Gleichung (2.17) gegeben ist, dann ist dieses Φ Lösung der Gleichung (2.14) [11], [12], [13] und [3]. Das Zerlegungstheorem kann auch folgendermaßen interpretiert werden: Durch die Gleichung (2.15) wird eine bijektive Abbildung zwischen den Lösungen der Gleichungen (2.14) und (2.18) definiert, und die Umkehrabbildung ist durch Gleichung (2.17) gegeben.
Das Zerlegungstheorem gilt auch für Operatoren D und kann damit auf die Feldgleichungen (2.6) und (2.11) angewandt werden. Damit kann die Quantenfeldtheorie in den Hilfsfeldern ψ_i formuliert werden, und die physikalische Theorie kann durch die Summation über die Hilfsfeldindizes erhalten werden.
Zum Schluß sei noch auf den Zusammenhang dieser Regularisierungsmethode mit der Pauli-Villars Regularisierung [14] und [15] eingegangen. Für die Größen λ_i, die in (2.16) definiert wurden, gelten die Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3}\lambda_i m_i = 0. \tag{2.19}$$

Diese Beziehungen, die auch bei der Pauli-Villars Regularisierung auftreten, zeigen auf, daß die Regularisierung über Feldgleichungen höherer Ordnung, in Zusammenhang mit dem Zerlegungstheorem, eine nichtstörungstheoretische Pauli-Villars Regularisierung darstellt. Hingewiesen sei in diesem Zusammenhang, daß mindestens ein $\lambda < 0$ sein muß, was zu einer indefiniten Metrik führt (siehe (2.30)). Diese indefinite Metrik ist aber kein Hindernis für die Ableitung der Wahrscheinlichkeitsinterpretation, siehe Kapitel 5.

2.2.2 Die regularisierten Gleichungen

Wird das Zerlegungstheorem auf die Feldgleichungen (2.6) und (2.11) angewandt, ergibt sich unter Berücksichtigung von (2.15) für die Hilfsfelder:

$$\psi_{A\alpha fi}(x) \;:=\; \lambda_i \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{3} (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - cm_k)_{\alpha\beta}\delta_{AB}\Phi_{B\beta f}(x), \tag{2.20}$$

$$\overline{\psi}_{A\alpha fi}(x) \;:=\; \lambda_i \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{3} (-i\hbar\ {}^{\mathrm{T}}\gamma^\mu\partial_\mu - cm_k)_{\alpha\beta}\delta_{AB}\overline{\Phi}_{B\beta f}(x) \tag{2.21}$$

mit

$$\lambda_i := \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{3} (cm_i - cm_k)^{-1}. \tag{2.22}$$

Die Umkehrabbildung lautet:

$$\Phi_{A\alpha f}(x) = \sum_{i=1}^{3} \psi_{A\alpha fi}(x), \qquad \overline{\Phi}_{A\alpha f}(x) = \sum_{i=1}^{3} \bar{\psi}_{A\alpha fi}(x), \tag{2.23}$$

und die regularisierten Feldgleichung (2.6) und (2.11) werden durch die äquivalenten Feldgleichungen

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - cm_i)_{\alpha\beta}\delta_{AB}\delta_{f_1f_2}\psi_{B\beta f_2 i}(x) \;=\; g\lambda_i V_{\substack{A\\\alpha\\f_1}\substack{B\\\beta\\f_2}\substack{C\\\gamma\\f_3}\substack{D\\\delta\\f_4}} \sum_{j,k,l=1}^{3} \psi_{B\beta f_2 j}(x)\bar{\psi}_{C\gamma f_3 k}(x)\psi_{D\delta f_4 l}(x) \tag{2.24}$$

und

$$(-i\hbar\ {}^{T}\gamma^\mu\partial_\mu - cm_i)_{\alpha\beta}\delta_{AB}\delta_{f_1f_2}\bar{\psi}_{B\beta f_2 i}(x) \;=\; g\lambda_i V_{\substack{A\\\alpha\\f_1}\substack{B\\\beta\\f_2}\substack{C\\\gamma\\f_3}\substack{D\\\delta\\f_4}} \sum_{j,k,l=1}^{3} \bar{\psi}_{D\delta f_4 l}(x)\psi_{C\gamma f_3 k}(x)\bar{\psi}_{B\beta f_2 j}(x) \tag{2.25}$$

ersetzt, die von erster Ordnung in den Ableitungen sind. Dies sind die eingangs postulierten Feldgleichungen (2.1) und (2.2) für die Quark-Quark Wechselwirkung.

2.3 Lagrange Formalismus

Um einerseits die Erhaltungsgrößen des Modells zu erhalten und um andererseits das Modell kanonisch zu quantisieren, wird die Lagrangedichte sowie die kanonisch konjugierten Größen der Felder benötigt.
Die zu den Feldgleichungen (2.24) und (2.25) gehörige Lagrangedichte lautet [3]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\psi,\bar{\psi}\right] \;=\;& \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{-1}\bar{\psi}_{A\alpha f_1 i}(x)\left(i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - m_ic^2\right)_{\alpha\beta}\delta_{AB}\delta_{f_1f_2}\psi_{B\beta f_2 i}(x)\\ &-\frac{gc}{2}V_{\substack{A\\\alpha\\f_1}\substack{B\\\beta\\f_2}\substack{C\\\gamma\\f_3}\substack{D\\\delta\\f_4}} \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \bar{\psi}_{A\alpha f_1 i}(x)\psi_{B\beta f_2 j}(x)\bar{\psi}_{C\gamma f_3 k}(x)\psi_{D\delta f_4 l}(x)\end{aligned} \tag{2.26}$$

Der kanonisch konjugierte Impuls $\pi_{A\alpha fi}(x) := \pi^0_{A\alpha fi}(x)$ zum Feldoperator $\psi_{A\alpha fi}(x)$ ist durch

$$\begin{aligned}\pi_{A\alpha fi} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\left(\partial_0\psi_{A\alpha fi}(x)\right)} \\ &= \frac{i\hbar c}{\lambda_i}\bar{\psi}_{A\beta fi}(x)\gamma^0_{\beta\alpha} \\ &= \frac{i\hbar c}{\lambda_i}\psi^+_{A\alpha fi}(x) \end{aligned}\tag{2.27}$$

definiert.
Die Hamiltondichte ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x) &= \sum_{i=1}^{3}\pi_{A\alpha fi}(x)\partial_0\psi_{A\alpha fi}(x) - \mathcal{L}(x) \qquad (2.28)\\ &= \sum_{i=1}^{3}\lambda_i^{-1}\bar{\psi}_{A\alpha f_1 i}(x)\left(-i\hbar c\gamma^k\partial_k + m_i c^2\right)_{\alpha\beta}\delta_{AB}\delta_{f_1 f_2}\psi_{B\beta f_2 i}(x) \\ &\quad + \frac{gc}{2}V_{\substack{A\ B\ C\ D\\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\\ f_1 f_2 f_3 f_4}}\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\bar{\psi}_{A\alpha f_1 i}(x)\psi_{B\beta f_2 j}(x)\bar{\psi}_{C\gamma f_3 k}(x)\psi_{D\delta f_4 l}(x).\end{aligned}$$

2.4 Kanonische Spinorfeld Quantisierung

Die kanonischen Antikommutator-Beziehungen lauten:

$$\begin{aligned}\left[\pi_{A\alpha f_1 i}(\mathbf{r},t), \psi_{B\beta f_2 j}(\mathbf{r}',t)\right]_+ &= i\hbar c\delta_{ij}\delta_{AB}\delta_{f_1 f_2}\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ \left[\psi_{A\alpha f_1 i}(\mathbf{r},t), \psi_{B\beta f_2 j}(\mathbf{r}',t)\right]_+ &= 0 \\ \left[\pi_{A\alpha f_1 i}(\mathbf{r},t), \pi_{B\beta f_2 j}(\mathbf{r}',t)\right]_+ &= 0.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Wird der kanonisch konjugierte Impuls durch die Beziehung (2.27) ersetzt, gehen diese Gleichungen über in:

$$\begin{aligned}\left[\psi^+_{A\alpha f_1 i}(\mathbf{r},t), \psi_{B\beta f_2 j}(\mathbf{r}',t)\right]_+ &= \lambda_i\delta_{ij}\delta_{AB}\delta_{f_1 f_2}\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ \left[\psi_{A\alpha f_1 i}(\mathbf{r},t), \psi_{B\beta f_2 j}(\mathbf{r}',t)\right]_+ &= 0 \\ \left[\psi^+_{A\alpha f_1 i}(\mathbf{r},t), \psi^+_{B\beta f_2 j}(\mathbf{r}',t)\right]_+ &= 0.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Durch das verwendete Regularisierungsverfahren wird eine indefinite Metrik eingeführt, da mindestens ein $\lambda_i < 0$ ist (2.19). Für die Antikommutatorbeziehung der Ausgangsfelder ergibt sich:

$$\begin{aligned}\left[\Phi^+_{A\alpha f_1}(\mathbf{r},t), \Phi_{B\beta f_2}(\mathbf{r}',t)\right]_+ &= \sum_{i,j=1}^{3}\left[\psi^+_{A\alpha f_1 i}(\mathbf{r},t), \psi_{B\beta f_2 j}(\mathbf{r}',t)\right]_+ \\ &= \sum_{i,j=1}^{3}\lambda_i\delta_{ij}\delta_{AB}\delta_{f_1 f_2}\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ &= 0 \\ \left[\Phi_{A\alpha f_1}(\mathbf{r},t), \Phi_{B\beta f_2}(\mathbf{r}',t)\right]_+ &= 0 \\ \left[\Phi^+_{A\alpha f_1}(\mathbf{r},t), \Phi^+_{B\beta f_2}(\mathbf{r}',t)\right]_+ &= 0.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Die kanonische Quantisierung der Hilfsfelder führt zu einer nichtkanonischen Quantisierung der Ausgangsfelder. Die Antikommutatorbeziehungen für das adjungierte Feld lauten:

$$\begin{aligned} \left[\bar{\Phi}_{A\alpha f_1}(\mathbf{r},t),\Phi_{B\beta f_2}(\mathbf{r}',t)\right]_+ &= 0 \\ \left[\Phi_{A\alpha f_1}(\mathbf{r},t),\Phi_{B\beta f_2}(\mathbf{r}',t)\right]_+ &= 0 \\ \left[\bar{\Phi}_{A\alpha f_1}(\mathbf{r},t),\bar{\Phi}_{B\beta f_2}(\mathbf{r}',t)\right]_+ &= 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Zusammenfassung:
Es wurden Feldgleichung höherer Ordnung eingeführt (2.6) und (2.11), um ein regularisiertes Modell zu erhalten. Da jedoch die Quantisierung eines Modells höherer Ordnung in den Ableitungen große Probleme mit sich bringt, wurden, durch Anwenden des Zerlegungstheorems, Feldgleichungen erster Ordnung abgeleitet. Für Feldgleichungen erster Ordnung kann der Formalismus der kanonischen Quantisierung durchgeführt werden. Aus der entsprechenden Lagrangedichte wurden die kanonisch konjugierten Variablen bestimmt. Die kanonische Quantisierung der Hilfsfelder führte zu einer **nichtkanonischen Quantisierung der Ausgangsfelder**.

2.5 Einführung von Superspinoren

Werden die beiden Feldgleichungen (2.24) und (2.25) durch ladungskonjugierte Spinoren formuliert, lassen sie sich durch Einführen eines Superspinors zu einer Gleichung zusammenfassen. Zunächst wird der ladungskonjugierte Spinor definiert:

$$\psi^c_{A\alpha fi}(x) \quad := \quad C_{\alpha\beta}\bar{\psi}_{A\beta fi}(x)\ . \tag{2.33}$$

Die mittels des ladungskonjugierten Spinors ψ^c formulierten Feldgleichungen (2.24) und (2.25) nehmen dann folgende Gestalt an:

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - cm_i)_{\alpha\beta}\,\delta_{AB}\delta_{f_1f_2}\psi_{B\beta f_2 i}(x) = g\lambda_i V_{\substack{A\ B\ C\ D\\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\\ f_1 f_2 f_3 f_4}} C^{-1}_{\gamma\epsilon} \sum_{j,k,l=1}^{3} \psi_{B\beta f_2 j}(x)\psi^c_{C\epsilon f_3 k}(x)\psi_{D\delta f_4 l}(x) \tag{2.34}$$

und

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - cm_i)_{\alpha\beta}\delta_{AB}\delta_{f_1f_2}\psi^c_{B\beta f_2 i}(x) = -g\lambda_i V_{\substack{A\ B\ C\ D\\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\\ f_1 f_2 f_3 f_4}} C^{-1}_{\delta\epsilon} \sum_{j,k,l=1}^{3} \psi^c_{B\beta f_2 j}(x)\psi_{C\gamma f_3 k}(x)\psi^c_{D\epsilon f_4 l}(x). \tag{2.35}$$

Diese beiden Gleichungen können nun mit Hilfe des Superspinors

$$\psi_{A\alpha fi\Lambda}(x) \quad := \quad \begin{cases} \psi_{A\alpha fi}(x)\ , & \Lambda = 1 \\ \psi^c_{A\alpha fi}(x)\ , & \Lambda = 2 \end{cases} \tag{2.36}$$

zusammengefaßt werden. Der Superindex $Z := (A, \alpha, f, i, \Lambda)$ faßt die algebraischen Freiheitsgrade zusammen, dabei bedeutet

$$\begin{array}{lcll} A & = & 1,\ldots 6 & \text{(Flavorindex)} \\ \alpha & = & 1{,}2{,}3{,}4 & \text{(Spinorindex)} \\ f & = & 1{,}2{,}3 & \text{(Farbindex)} \\ i & = & 1{,}2{,}3 & \text{(Hilfsfeldindex)} \\ \Lambda & = & 1{,}2 & \text{(Superspinorindex)}\quad . \end{array}$$

Damit schreiben sich die Feldgleichungen (2.34) und (2.35) als:

$$\left(D^\mu_{Z_1Z_2}\partial_\mu - m_{Z_1Z_2}\right)\psi_{Z_2}(x) \quad = \quad \hat{U}_{Z_1Z_2Z_3Z_4}\psi_{Z_2}(x)\psi_{Z_3}(x)\psi_{Z_4}(x), \tag{2.37}$$

wobei folgende Definitionen verwendet wurden:

$$D^{\mu}_{Z_1Z_2} := i\hbar\gamma^{\mu}_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{A_1A_2}\delta_{f_1f_2}\delta_{i_1i_2}\delta_{\Lambda_1\Lambda_2} \tag{2.38}$$

$$m_{Z_1Z_2} := cm_{i_1}\delta_{A_1A_2}\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{f_1f_2}\delta_{i_1i_2}\delta_{\Lambda_1\Lambda_2} \tag{2.39}$$

$$\hat{U}_{Z_1Z_2Z_3Z_4} := \sum_{h=1}^{2} g\lambda_{i_1}B_{i_2i_3i_4}v^h_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{A_1A_2}\delta_{f_1f_2}\delta_{\Lambda_1\Lambda_2}(v^hC)_{\alpha_3\alpha_4}\delta_{A_3A_4}\delta_{f_3f_4}\delta_{\Lambda_3 1}\delta_{\Lambda_4 2} \tag{2.40}$$

$$B_{i_2i_3i_4} = 1 \quad \text{für} \quad i_2, i_3, i_4 = 1,2,3. \tag{2.41}$$

Für die Superspinorhilfsfelder gilt:

$$[\psi_Z(r,t), \psi_{Z'}(r',t)]_+ = A_{ZZ'}\delta(r-r') \tag{2.42}$$

mit

$$A_{ZZ'} := \lambda_i\delta_{ii'}\delta_{AA'}\delta_{ff'}\sigma^1_{\Lambda\Lambda'}(C\gamma^0)_{\alpha\alpha'}. \tag{2.43}$$

Eine noch kompaktere Formulierung ergibt sich durch Einführen des Index $S = (x, Z)$:

$$K_{S_1S_2}\psi_{S_2} = W_{S_1S_2S_3S_4}\psi_{S_2}\psi_{S_3}\psi_{S_4} \tag{2.44}$$

mit den Definitionen:

$$K_{S_1S_2} := (D^{\mu}\partial_{\mu} - m)_{S_1S_2} \tag{2.45}$$

$$D^{\mu}_{S_1S_2} := D^{\mu}_{Z_1Z_2}\delta(x_1 - x_2) \tag{2.46}$$

$$m_{S_1S_2} := m_{Z_1Z_2}\delta(x_1 - x_2) \tag{2.47}$$

$$W_{S_1S_2S_3S_4} := \hat{U}_{Z_1Z_2Z_3Z_4}\delta(x_1-x_2)\delta(x_1-x_3)\delta(x_1-x_4). \tag{2.48}$$

Die Vertauschungsrelation schreibt sich nun:

$$[\psi_S, \psi_{S'}]^{t=t'}_+ = A_{SS'} \tag{2.49}$$

mit

$$A_{SS'} := A_{ZZ'}\delta(r-r'). \tag{2.50}$$

In den folgenden Kapiteln wird die explizite Zeitableitung des Feldoperators ψ benötigt. Dabei ist zu beachten, daß die Zeit t als Parameter betrachtet wird und alle Feldoperatoren zur selben Zeit t =const. betrachtet werden. Daher wird der Index I eingeführt mit $I_k = (\mathbf{r}_k, t, \alpha_k, A_k, i_k, \Lambda_k, f_k)$. Für die Zeitableitung des Feldoperators ergibt sich:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_{I_1} = \hat{K}_{I_1I_2}\psi_{I_2} + \hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}\psi_{I_2}\psi_{I_3}\psi_{I_4} \tag{2.51}$$

mit

$$\hat{K}_{I_1I_2} := i\frac{c}{\hbar}D^0_{Z_1Z_3}\left(D^k_{Z_3Z_2}\partial_k - m_{Z_3Z_2}\right)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \tag{2.52}$$

$$\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} := -i\frac{c}{\hbar}D^0_{Z_1Z_5}\hat{U}_{Z_5Z_2Z_3Z_4}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4). \tag{2.53}$$

2.6 Einführen des Index κ

Der Index κ faßt den Freiheitsgrad des Superspins und der Farbe zusammen.

$$\kappa = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \Lambda = 1, f = 1 \\ 2 & \text{für} \quad \Lambda = 1,\ f = 2 \\ 3 & \text{für} \quad \Lambda = 1,\ f = 3 \\ 4 & \text{für} \quad \Lambda = 2,\ f = 1 \\ 5 & \text{für} \quad \Lambda = 2,\ f = 2 \\ 6 & \text{für} \quad \Lambda = 2,\ f = 3 \end{cases} \tag{2.54}$$

Mit (2.54) lautet der Operator der kinetischen Energie und des Vertex ($I = (\mathbf{r}, t, \alpha, A, i, \kappa)$)

$$\hat{K}_{I_1 I_2} = \left(-i\hbar c \left(\gamma^0 \gamma^k\right)_{\alpha_1 \alpha_2} \partial_k(\mathbf{r}_1) + m_{i_1} c^2 \gamma^0_{\alpha_1 \alpha_2}\right) \delta_{A_1 A_2} \delta_{\kappa_1 \kappa_2} \delta_{i_1 i_2} \delta\left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right) \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned} \hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} = {} & g c \lambda_{i_1} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) B_{i_2 i_3 i_4} \delta_{A_1 A_2} \delta_{A_3 A_4} \delta_{\kappa_1 \kappa_2} L^0_{\kappa_3 \kappa_4} \\ & \left(\gamma^0_{\alpha_1 \alpha_2} C_{\alpha_3 \alpha_4} - (\gamma^0 \gamma^5)_{\alpha_1 \alpha_2} (\gamma^5 C)_{\alpha_3 \alpha_4}\right), \end{aligned} \tag{2.56}$$

dabei bedeutet die Matrix L^0

$$L^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1_3 \\ 1_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.57}$$

Die Hamiltondichte (2.28) lautet in Superspinorschreibweise:

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} \tilde{A}_{I_1 I} \hat{K}_{I I_2} \psi_{I_1} \psi_{I_2} + \frac{1}{4} \tilde{A}_{I_1 I} \hat{W}_{I I_2 I_3 I_4} \psi_{I_1} \psi_{I_2} \psi_{I_3} \psi_{I_4} \tag{2.58}$$

mit

$$\tilde{A}_{II'} := \lambda_i^{-1} \delta_{ii'} \delta_{AA'} L^0_{\kappa\kappa'} (C\gamma^0)_{\alpha\alpha'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{2.59}$$

2.7 Symmetrien

In den letzten Abschnitten wurde die Operatorstruktur der Quantenfeldtheorie untersucht. Daneben muß ein Zustandsbegriff eingeführt werden. Unter der Annahme, daß für die Darstellung der Theorie ein Vektorraum $\mathbb{H}$ existiert, zeigt sich aus den Gleichungen (2.19) und (2.30), daß dieser Vektorraum $\mathbb{H}$ eine indefinite Metrik besitzt. Der Darstellungsraum $\mathbb{H}$ wird als Hilbertraum mit indefiniter Metrik postuliert. Dieser Zustandsraum ist ein Darstellungsraum bestimmter Symmetriegruppen, die in [3] und [16] diskutiert werden. Er gilt für die mikroskopische Theorie. Wie dann, sowohl in der mikroskopischen Theorie, als auch in der effektiven Theorie, eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation abgeleitet werden kann, wird in Kapitel 5 dargelegt.

Kapitel 3

Algebraische Schrödingerdarstellung

Die Algebraische Schrödingerdarstellung ist die Formulierung des Hamiltonformalismus für Quantenfelder jenseits der Störungsrechnung. Trotzdem ist die Störungsrechnung für die Begründung der Verwendung der Algebraische Schrödingerdarstellung unentbehrlich.
Die Störungsrechnung zeigt nämlich, daß die Zeitentwicklung die beteiligten Teilchen im Wechselwirkungsbereich zu virtuellen Teilchen werden läßt, d.h. Teilchen, die ihre Massenschale verlassen.
Dies bedeutet, daß es unmöglich ist (schon in der Störungstheorie), Wechselwirkungen korrekt zu beschreiben, wenn die betreffenden Teilchen auf die Massenschale gezwungen würden. Eine solche Einschränkung erzwingt dann eine Beschreibung im Hamiltonformalismus, weil jede kovariante Formulierung von Teilchen die Massenschale bedingen würde.
Diese Erkenntnisse werden auf den hier vorgestellten nichtstörungstheoretischen Formalismus übertragen. Aus diesem Grund wird die zu entwickelnde Quantenfeldtheorie einzeitig formuliert.
Es zeigt sich, daß dieser einzeitige Formalismus mit der Einführung von Normen, Skalarprodukten, Wahrscheinlichkeitsinterpretation und der im nächsten Kapitel vorgestellten Schwachen Abbildung nicht nur verträglich ist, sondern sogar zwingend notwendig ist.
Es erhebt sich dann die Frage, ob, auf Grund dieser Festlegungen, die Kovarianz vollständig verloren geht.
Dies ist nicht der Fall. Schon in der Störungstheorie besteht die Äquivalenz zwischen zeitabhängigem Hamiltonformalismus und kovarianter Störungstheorie, die aus dem Hamiltonformalismus direkt abgeleitet wird [17].
Ein analoges Ergebnis läßt sich für die Theorie zusammengesetzter Teilchen in der Algebraischen Schrödingerdarstellung ableiten:
Die resultierenden effektiven Theorien sind wiederum kovariant formulierbar, trotz des Hamiltonformalismus, der zu ihrer Ableitung benutzt wurde.

Für eine übersichtlichere Darstellung wird die folgende Abkürzung eingeführt:

$$(\psi_{I_1} \dots \psi_{I_n})_t \quad := \quad \psi_{Z_1}(r_1, t) \dots \psi_{Z_n}(r_n, t) \tag{3.1}$$

3.1 Einleitung

In diesem Kapitel wird die Konstruktion eines Zustandsraums angegeben. Die Zustände sind durch einzeitige Übergangsmatrixelemente charakterisiert, die aus vollständig antisymmetrisierten Produkten von Spinorfeldoperatoren gebildet werden [3]. Für diese Übergangsmatrixelemente wird eine Heisenbergdynamik formuliert. Durch die Einführung eines Funktionalraums und die Abbildung der Hilbertraumzustände auf entsprechende Funktionalzustände wird die Transformation der renormierten Energieeigenwertgleichung in $\mathbb{H}$ auf eine Funktionalgleichung ermöglicht. Die resultierende Funktionalgleichung ist der Ausgangspunkt für die schwache Abbildung im Funktionalraum.

3.2 Zustandsraum der Hilfsfelder

In Kapitel 2 wurde der Hamiltonoperator des Modells abgeleitet. Die Superspinoren ψ_I sind Spinorfelder, welche die Antivertauschungsrelationen erfüllen. Für die Konstruktion eines geeigneten Zustandsraums werden einzeitige antisymmetrische Produkte dieser Spinorfelder in ihrer Wirkung auf einen zyklischen Grundzustand $|\,0\,\rangle \in \mathbb{H}$ betrachtet. Diese bilden die Generatoren einer Basis $\mathbb{B}$ von GNS-Zuständen in $\mathbb{H}$ [3] und [13].

$$\mathbb{B} := \{|\,e_n\,\rangle \equiv \mathcal{A}(\psi_{I_1}...\psi_{I_n})\,|\,0\,\rangle\ , n \in \mathbb{N}\}\,, \tag{3.2}$$

wobei $\mathcal{A}$ die Antisymmetrie in den Indizes $I_1...I_n$ bedeutet:

$$\mathcal{A}(\psi_{I_1}...\psi_{I_n}) \;=\; \sum_{p\in S_n} \frac{1}{n!}\mathrm{sgn}(p)\psi_{I_{p_1}}...\psi_{I_{p_n}}\;. \tag{3.3}$$

Da die Basisvektoren $\{|\,e_n\,\rangle\}$ nicht orthogonal sind, wird der metrische Fundamentaltensor $G_{mn} = \langle\, e_m\,|\,e_n\rangle \neq \delta_{mn}$ eingeführt. Die duale Basis $\mathbb{B}^d := \{|\,e^m\,\rangle\}$, wird durch die Forderungen

$$\langle\, e^m\,|\,e_n\rangle \;=\; \delta^m_n \;\text{ und }\; |\,e^m\,\rangle\langle\, e_m\,| \;=\; 1 \tag{3.4}$$

definiert.
Jeder Zustand kann damit in beiden Basen entwickelt werden:

$$|\,a\,\rangle \;=\; \sum_n \sigma^n(a)\,|\,e_n\,\rangle \;=\; \sum_n \tau_n(a)\,|\,e^n\,\rangle\;. \tag{3.5}$$

Für das Skalarprodukt der Zustände $|\,a\,\rangle\,,|\,b\,\rangle \in \mathbb{H}$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle\, a\,|\,b\,\rangle \;&=\; \sum_n \sigma^n(a)^*\,\tau_n(b) \\ &=\; \sum_{m,n} \tau_m(a)^*\,G^{mn}\,\tau_n(b).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Für die Normierung eines Zustands $|\,a\,\rangle$ muß der metrische Tensor $G^{mn} = (G_{mn})^{-1}$ explizit bestimmt werden, da die Dualfunktionen $\sigma^n(a)$ im allgemeinen unbekannt sind. Die Koeffizientenfunktionen

$$\sigma^n(a) \;=\; \langle\, e^n\,|\,a\rangle \quad\text{bzw.}\quad \tau_n(a) \;=\; \langle\, e_n\,|\,a\rangle \tag{3.7}$$

mit

$$\tau_n(a) \;=\; \langle\, 0\,|\,\mathcal{A}(\psi_{I_1}...\psi_{I_n})\,|\,a\,\rangle \tag{3.8}$$

charakterisieren den Zustand $|\,a\rangle \in \mathbb{H}$. Das bedeutet, daß eine Gleichung für die Berechnung der Übergangsmatrixelemente formuliert werden muß.
Die Heisenberggleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{O} \;=\; [\mathbf{O},\mathcal{H}]_- \tag{3.9}$$

liefert mit $\mathbf{O} = \mathcal{A}(\psi_{I_1}...\psi_{I_n})$ folgende Gleichung:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{A}(\psi_{I_1}...\psi_{I_n}) \;=\; [\mathcal{A}(\psi_{I_1}...\psi_{I_n}),\mathcal{H}]_-\;. \tag{3.10}$$

Für die Energieeigenzustände $|\,a\,\rangle \in \mathbb{H}$ mit Energieeigenwert E_a und der Annahme, daß der Grundzustand $|\,0\,\rangle$ ebenfalls Energieeigenzustand ist, resultieren die renormierten Energieeigenwertgleichungen (Schrödingergleichungen):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\, 0\,|\,\mathcal{A}(\psi_{I_1}...\psi_{I_n})\,|\,a\,\rangle \;=\; (E_a - E_0)\,\langle\, 0\,|\,\mathcal{A}(\psi_{I_1}...\psi_{I_n})\,|\,a\,\rangle\;. \tag{3.11}$$

Mit (3.8) und (3.10) wird daraus die renormierte Dysonsche Energieeigenwertgleichung:

$$E_{a0}\,\tau_n(a) \;=\; \langle\, 0\,|\,[\mathcal{A}(\psi_{I_1}...\psi_{I_n}),\mathcal{H}]_-\,|\,a\,\rangle \;, \tag{3.12}$$

die aber eine weitere Auswertung erfordert, um damit "rechnen" zu können.

3.3 Der Funktionalraum

Um die algebraische Schrödingerdarstellung kompakt zu formulieren, werden Zustandsfunktionale in einem Funktionalraum $\mathbb{K}_F$ eingeführt. Dabei wird jedem Zustand $|\,a\,\rangle \in \mathbb{H}$ ein Funktionalzustand $|\,\mathcal{A}(j;a)\,\rangle \in \mathbb{K}_F$ zugeordnet. Diese Abbildung muß zum einen isometrisch sein, und zum anderen müssen die Quantenzahlen übertragen werden.

Definition 3.1
Die Größen j_I und ∂_I sind die Generatoren einer CAR-Algebra in $\mathbb{K}_F$.
Sie erfüllen

$$[j_I, j_{I'}]_+ \;=\; [\partial_I, \partial_{I'}]_+ \;=\; 0 \;, \tag{3.13}$$
$$[j_I, \partial_{I'}]_+ \;=\; \delta_{ZZ'}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \;. \tag{3.14}$$

Definition 3.2
Es existiert ein zyklischer Grundzustand $|\,0\,\rangle_F \in \mathbb{K}_F$ mit ${}_F\langle\, 0\,|\,0\rangle_F = 1$ und

$${}_F\langle\, 0\,|\,j_Z(\vec{r}) \;=\; \partial_Z(\vec{r})\,|\,0\,\rangle_F \;=\; 0 \;. \tag{3.15}$$

$\mathbb{K}_F$ ist ein fermionischer Fockraum; die Generatoren j_I und ∂_I werden deshalb auch als funktionale Erzeuger und Vernichter bezeichnet, die aber nicht mit gewöhnlichen Erzeugern und Vernichtern von Teilchen verwechselt werden dürfen.
Eine Basis von $\mathbb{K}_F$ wird durch

$$\mathbb{B}_F \;:=\; \left\{ \frac{i^n}{n!} j_{I_1}...j_{I_n}\,|\,0\,\rangle_F \;, n \in \mathbb{N} \right\} \;, \tag{3.16}$$

eingeführt. Damit lassen sich Funktionalzustände $|\,\mathcal{A}(j;a)\,\rangle$ einführen:

$$|\,\mathcal{A}(j;a)\,\rangle \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{I_1...I_n} \tau^{(n)}(I_1...I_n\,|\,a)\, j_{I_1}...j_{I_n}\,|\,0\,\rangle_F \tag{3.17}$$

mit

$$\tau^{(n)}(I_1...I_n\,|\,a) \;:=\; \langle\, 0\,|\,\mathcal{A}(\psi_{I_1}...\psi_{I_n})\,|\,a\,\rangle \;. \tag{3.18}$$

Der funktionale Dualzustand wird aus den kontravarianten Entwicklungsfunktionen $\sigma^{(n)}(a)$ der Zustandsdarstellung $|\,a\,\rangle \in \mathbb{H}$ in (3.5) gebildet:

$$\langle\, \mathcal{D}(\partial;a)\,| \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \sigma^{(n)}(I_1...I_n\,|\,a)^*\; {}_F\langle\, 0\,|\,\partial_{I_n}...\partial_{I_1} \;. \tag{3.19}$$

Damit gilt:

$$\langle\, \mathcal{D}(\partial;a)\,|\,\mathcal{A}(j;b)\rangle \;=\; \langle\, a\,|\,b\,\rangle. \tag{3.20}$$

Somit ist durch (3.17) und (3.19) eine isometrische Abbildung $\mathbb{H} \to \mathbb{K}_F$ definiert, die jedem Zustand $|\,a\,\rangle \in \mathbb{H}$ einen Funktionalzustand $|\,\mathcal{A}(j;a)\,\rangle \in \mathbb{K}_F$ zuordnet. $\mathbb{K}_F$ ist ein Hilfsraum, der keine physikalische Relevanz besitzt.

Rechenregeln im Funktionalraum

Es gelten folgende Rechenregeln [18].

$$\text{i)} \qquad i^{-1}\partial_K \,|\, \mathcal{A}(j;p)\,\rangle \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \tau^{(n+1)}(K, I_1 ... I_n \,|\, a) j_{I_1} ... j_{I_n} \,|\, 0\,\rangle_F \tag{3.21}$$

$$\text{ii)} \qquad i j_K \,|\, \mathcal{A}(j;p)\,\rangle \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{l=1}^{n} (-1)^{(l-1)} \delta_{K I_l} \tau^{(n-1)}(I_1 ... \dot{I}_l ... I_n \,|\, a) j_{I_1} ... j_{I_n} \,|\, 0\,\rangle_F \tag{3.22}$$

$$\text{iii)} \qquad i^{-m}{}_F \langle\, 0\,| \partial_{K_m} ... \partial_{K_1} \,|\, \mathcal{A}(j;p)\,\rangle \;=\; \tau^m(K_1 ... K_m \,|\, a) \tag{3.23}$$

$$\text{mit} \qquad \tau^{(n-1)}(I_1 ... \dot{I}_l ... I_n \,|\, a) \;:=\; \tau^{(n-1)}(I_1 ... I_{l-1}, I_{l+1} ... I_n \,|\, a)\;. \tag{3.24}$$

3.4 Algebraische Schrödingerdarstellung im Funktionalraum

In diesem Kapitel wird der Hamiltonoperator (2.58) in den Funktionalraum abgebildet: $\mathcal{H}(\psi) \in I\!H \to \mathcal{H}(j,\partial) \in I\!K_F$. Ausgangspunkt ist die renormierte Energieeigenwertgleichung (3.11). Die Zeitableitung auf der linken Seite dieser Gleichung kann explizit berechnet werden, wenn die Felddynamik, d.h. Gleichung (2.51), benutzt wird und diese nach antisymmetrisierten Matrixelementen entwickelt wird [3], [13].
Ein alternativer Weg [19] geht von Gleichung (3.12) aus:

$$(E_p - E_0)\,\langle\, 0\,|\, \mathcal{A}(\psi_{I_1} ... \psi_{I_n})\,|\, p\,\rangle \quad = \quad \langle\, 0\,|\, [\mathcal{A}(\psi_{I_1} ... \psi_{I_n}), \mathcal{H}]_- \,|\, p\,\rangle\,. \tag{3.25}$$

Für die rechte Seite der Energieeigenwertgleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\langle\, 0\,|\, [\mathcal{A}(\psi_{I_1} ... \psi_{I_n}), \mathcal{H}(\psi_J)]_- \,|\, p\,\rangle \\
&= \frac{1}{2} \tilde{A}_{J_2 J_3} \hat{K}_{J_3 J_1} \left[\langle\, 0\,|\, \mathcal{A}(\psi_{I_1} ... \psi_{I_n})\, \psi_{J_1} \psi_{J_2} - \psi_{J_1} \psi_{J_2} \mathcal{A}(\psi_{I_1} ... \psi_{I_n})\,|\, p\,\rangle\right] \\
&+ \frac{1}{4} \tilde{A}_{J_1 J_5} \hat{W}_{J_5 J_2 J_3 J_4} \left[\langle\, 0\,|\, \mathcal{A}(\psi_{I_1} ... \psi_{I_n})\, \psi_{J_1} \psi_{J_2} \psi_{J_3} \psi_{J_4} - \psi_{J_1} \psi_{J_2} \psi_{J_3} \psi_{J_4}\, \mathcal{A}(\psi_{I_1} ... \psi_{I_n})\,|\, p\,\rangle\right]\,.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Mit den Gleichungen (3.25) und (3.26) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&(E_p - E_0)\,\langle\, 0\,|\, \mathcal{A}(\psi_{I_1} ... \psi_{I_n})\,|\, p\,\rangle \\
&= \frac{1}{2} \tilde{A}_{J_2 J_3} \hat{K}_{J_3 J_1} \left[\langle\, 0\,|\, \mathcal{A}(\psi_{I_1} ... \psi_{I_n})\, \psi_{J_1} \psi_{J_2} - \psi_{J_1} \psi_{J_2} \mathcal{A}(\psi_{I_1} ... \psi_{I_n})\,|\, p\,\rangle\right] \\
&+ \frac{1}{4} \tilde{A}_{J_1 J_5} \hat{W}_{J_5 J_2 J_3 J_4} \left[\langle\, 0\,|\, \mathcal{A}(\psi_{I_1} ... \psi_{I_n})\, \psi_{J_1} \psi_{J_2} \psi_{J_3} \psi_{J_4} - \psi_{J_1} \psi_{J_2} \psi_{J_3} \psi_{J_4}\, \mathcal{A}(\psi_{I_1} ... \psi_{I_n})\,|\, p\,\rangle\right]\,.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Durch den Kommutator mit $\mathcal{H}$ entstehen auf der rechten Seite von (3.27) Matrixelemente mit rechts- und linksseitigen Produkten von Feldoperatoren ψ_J , die bezüglich des Index J nicht antisymmetrisiert sind:

$$\langle\, 0\,|\, \mathcal{A}(\psi_{I_1} ... \psi_{I_n})\, \psi_{J_1} ... \psi_{J_m} \,|\, p\,\rangle\;, \tag{3.28}$$

$$\langle\, 0\,|\, \psi_{J_1} ... \psi_{J_m}\, \mathcal{A}(\psi_{I_1} ... \psi_{I_n})\,|\, p\,\rangle\;. \tag{3.29}$$

Die Matrixelemente $\langle\, 0\,|\, \mathcal{A}(\psi_{I_1} ... \psi_{I_n})\,|\, p\,\rangle$ auf der linken Seite von (3.25) sind die Koeffizientenfunktionen des Funktionalzustandes

$$|\, \mathcal{A}(j;p)\,\rangle \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \tau^{(n)}(I_1 ... I_n | p)\, j_{I_1} ... j_{I_n} \,|\, 0\,\rangle_F \tag{3.30}$$

Werden folgende Funktionalzustände definiert

$$
\begin{aligned}
|\,\mathcal{A}(j;p)_{J_1\ldots J_m}\,\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \langle\, 0\,|\, \mathcal{A}(\psi_{I_1}\ldots\psi_{I_n})\psi_{J_1}\ldots\psi_{J_m}\,|\, p\,\rangle\, j_{I_1}\ldots j_{I_n}\,|\,0\,\rangle_F && (3.31)\\
|\,{}_{J_1\ldots J_m}\mathcal{A}(j;p)\,\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \langle\, 0\,|\, \psi_{J_1}\ldots\psi_{J_m}\mathcal{A}(\psi_{I_1}\ldots\psi_{I_n})\,|\, p\,\rangle\, j_{I_1}\ldots j_{I_n}\,|\,0\,\rangle_F\,, && (3.32)
\end{aligned}
$$

so ergeben sich durch Projektion mit $1/i^n\ {}_F\langle\, 0\,|\,\partial_{K_n}\ldots\partial_{K_1}$ die Matrixelemente (3.28) und (3.29). Mit diesen Funktionalzuständen ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
E_{p0}\,|\,\mathcal{A}(j;p)\,\rangle &= \frac{1}{2}\tilde{A}_{J_2J_3}\hat{K}_{J_3J_1}\Big[\,|\,\mathcal{A}(j;p)_{J_1J_2}\,\rangle - |\,{}_{J_1J_2}\mathcal{A}(j;p)\,\rangle\,\Big]\\
&\quad+\frac{1}{4}\tilde{A}_{J_1J_5}\hat{W}_{J_5J_2J_3J_4}\Big[\,|\,\mathcal{A}(j;p)_{J_1J_2J_3J_4}\,\rangle - |\,{}_{J_1J_2J_3J_4}\mathcal{A}(j;p)\,\rangle\,\Big]\,. && (3.33)
\end{aligned}
$$

Projektion von (3.33) mit $1/i^n\ {}_F\langle\, 0\,|\,\partial_{K_n}\ldots\partial_{K_1}$ ergibt Gleichung (3.27). Der Zusammenhang zwischen den Funktionalzuständen (3.30), (3.31) und (3.32) lautet [19]:

$$
\begin{aligned}
|\,\mathcal{A}(j;p)_{J_1\ldots J_m}\,\rangle &= \prod_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{i}\partial_{J_k} - \frac{i}{2}A_{J_kJ'_k}j_{J'_k}\right)|\,\mathcal{A}(j;p)\,\rangle && (3.34)\\
|\,{}_{J_1\ldots J_m}\mathcal{A}(j;p)\,\rangle &= \prod_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{i}\partial_{J_k} + \frac{i}{2}A_{J_kJ'_k}j_{J'_k}\right)|\,\mathcal{A}(j;p)\,\rangle\,. && (3.35)
\end{aligned}
$$

Dies führt auf folgende Ersetzungsregel [19]:

$$
\begin{aligned}
\psi_J^R &:= \frac{1}{i}\partial_{J_k} - \frac{i}{2}A_{J_kJ'_k}j_{J'_k}\,, && (3.36)\\
\psi_J^L &:= \frac{1}{i}\partial_{J_k} + \frac{i}{2}A_{J_kJ'_k}j_{J'_k}\,. && (3.37)
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für die Abbildung des Hamiltonoperator in den Funktionalraum folgende Ersetzungsregel [19]:

$$
\begin{aligned}
E_{p0}\,|\,\mathcal{A}(j;p)\,\rangle &= \left[\mathcal{H}\left(\frac{1}{i}\partial - \frac{i}{2}Aj\right) - \mathcal{H}\left(\frac{1}{i}\partial + \frac{i}{2}Aj\right)\right]|\,\mathcal{A}(j;p)\,\rangle && (3.38)\\
&= \left[\mathcal{H}\left(\psi^R\right) - \mathcal{H}\left(\psi^L\right)\right]|\,\mathcal{A}(j;p)\,\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Angewandt auf den Hamiltonoperator (2.58) ergibt dies:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(j,\partial) &= \frac{1}{2}\tilde{A}_{J_2J_3}\hat{K}_{J_3J_1}\left[\psi^R_{J_2}\psi^R_{J_1} - \psi^L_{J_2}\psi^L_{J_1}\right] && (3.39)\\
&\quad+\frac{1}{4}A_{J_1J_5}W_{J_5J_2J_3J_4}\left[\psi^R_{J_4}\psi^R_{J_3}\psi^R_{J_2}\psi^R_{J_1} - \psi^L_{J_4}\psi^L_{J_3}\psi^L_{J_2}\psi^L_{J_1}\right]\\
&= \frac{1}{2}\tilde{A}_{J_2J_3}\hat{K}_{J_3J_1}\left[\prod_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{i}\partial_{J_k} - \frac{i}{2}A_{J_kJ'_k}j_{J'_k}\right) - \prod_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{i}\partial_{J_k} + \frac{i}{2}A_{J_kJ'_k}j_{J'_k}\right)\right]\\
&\quad+\frac{1}{4}\tilde{A}_{J_1J_5}\hat{W}_{J_5J_2J_3J_4}\left[\prod_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{i}\partial_{J_k} - A_{J_kJ'_k}j_{J'_k}\right) - \prod_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{i}\partial_{J_k} + A_{J_kJ'_k}j_{J'_k}\right)\right]\\
&= \hat{K}_{J_1J_2}j_{J_1}\partial_{J_2} + \hat{W}_{J_1J_2J_3J_4}j_{J_1}\left[\partial_{J_4}\partial_{J_3}\partial_{J_2} + \frac{1}{4}A_{J_4J_5}A_{J_3J_6}j_{J_5}j_{J_6}\partial_{J_2}\right].
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis der Abbildung des Hamiltonoperators (2.58) in den Funktionalraum lautet somit:

$$\begin{aligned}&E_{p0}\,|\,\mathcal{A}(j;p)\,\rangle\\ &= \hat{K}_{J_1J_2}j_{J_1}\partial_{J_2}\,|\,\mathcal{A}(j;p)\,\rangle+\hat{W}_{J_1J_2J_3J_4}j_{J_1}\left[\partial_{J_4}\partial_{J_3}\partial_{J_2}+\frac{1}{4}A_{J_4J_5}A_{J_3J_6}j_{J_5}j_{J_6}\partial_{J_2}\right]|\,\mathcal{A}(j;p)\,\rangle\ . \quad (3.40)\end{aligned}$$

Projektion mit $1/i^n\ {}_F\langle\,0\,|\,\partial_{K_n}...\partial_{K_1}$ ergibt das Gleichungssystem (3.27).
Die algebraische Darstellung wird über die Normaltransformation festgelegt [13]. Dies geschieht durch Einführung normalgeordneter Funktionale :

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}(j^t;a)\rangle &:= \exp\left[\frac{1}{2}\int j^t_{Z_1}(\mathbf{r}_1)F^t_{Z_1Z_2}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)j^t_{Z_2}(\mathbf{r}_2)d^3r_1d^3r_2\right]|\mathcal{A}(j^t;a)\rangle\\ &=: \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\varphi^n_t(I_1\dots I_n|a)j^t_{I_1}\dots j^t_{I_n}|0\rangle_F. \quad (3.41)\end{aligned}$$

In dieser Arbeit wird kein Quarkkondensat zugrundegelegt, dadurch kann der Propagator der freien Theorie benutzt werden. Generell muß $F_{I_1I_2}$ selbstkonsistent berechnet werden ([20] und [13]). Der Vergleich mit dem Feynmanpropagator zeigt, daß dieser selbstkonsistente Propagator in den algebraischen Freiheitsgraden unverändert ist. Damit ergibt sich

$$F^t_{Z_1Z_2}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) := \langle 0|\mathcal{A}\left[\psi^f_{Z_1}(\mathbf{r}_1,t)\psi^f_{Z_2}(\mathbf{r}_2,t)\right]|0\rangle. \quad (3.42)$$

$\psi^f_Z(\mathbf{r},t)$ ist eine Lösung der Gleichung (2.37) in der $\hat{U}_{I_1I_2I_3I_4}\equiv 0$.
$F^t_{Z_1Z_2}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ ist der einzeitige symmetrische Grenzübergang* [3] des Feynmanpropagators

$$F_{S_1S_2} = -i\hbar^{-3}\lambda_{i_1}\delta_{i_1i_2}\delta_{A_1A_2}L^0_{\kappa_1\kappa_2}\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{-\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2)}\left(\frac{\not{p}+m_{i_1}c}{p^2-m^2_{i_1}c^2}C\right)_{\alpha_1\alpha_2}. \quad (3.43)$$

Damit lautet der einzeitige Propagator $F^t_{Z_1Z_2}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ [3]:

$$\begin{aligned}F^t_{Z_1Z_2}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\lambda_{i_1}\delta_{i_1i_2}L^0_{\kappa_1\kappa_2}\delta_{A_1A_2} \quad (3.44)\\ &\left\{-m^2_{i_1}c^2\frac{K_1\left(\frac{m_{i_1}c}{\hbar}r\right)}{r}C_{\alpha_1\alpha_2}\right.\\ &\left.+im_{i_1}c(\gamma^kC)_{\alpha_1\alpha_2}r^k\left[\frac{2\hbar K_1\left(\frac{m_{i_1}c}{\hbar}r\right)}{r^3}+m_{i_1}c\frac{K_0\left(\frac{m_{i_1}c}{\hbar}r\right)}{r^2}\right]\right\}\end{aligned}$$

mit $r=|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$ und $r^k=(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)^k$.
Der Vertex wird normalgeordnet, siehe [13], Kapitel 2.6 bzw. Kapitel 3.8, als Resultat ergibt sich:

$$\boxed{\begin{aligned}E_{p0}\,|\,\mathcal{F}(j,p)\rangle &= j_{I_1}\hat{K}_{I_1I_2}\partial_{I_2}\,|\,\mathcal{F}(j,p)\rangle\\ &+\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}j_{I_1}\partial_{I_4}\partial_{I_3}\partial_{I_2}\,|\,\mathcal{F}(j,p)\rangle\\ &-3\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}F^t_{I_4K}j_{I_1}j_K\partial_{I_3}\partial_{I_2}\,|\,\mathcal{F}(j,p)\rangle\\ &+\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}(3F^t_{I_4K_1}F^t_{I_3K_2}+\frac{1}{4}A_{I_4K_1}A_{I_3K_2})j_{I_1}j_{K_1}j_{K_2}\partial_{I_2}\,|\,\mathcal{F}(j,p)\rangle\\ &-\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}(F^t_{I_4K_1}F^t_{I_3K_2}+\frac{1}{4}A_{I_4K_1}A_{I_3K_2})F^t_{I_2K_3}j_{I_1}j_{K_1}j_{K_2}j_{K_3}\,|\,\mathcal{F}(j,p)\rangle \quad (3.45)\end{aligned}}$$

*Es wird der einzeitige symmetrische Grenzübergang vollzogen, um die Antisymmetrie des einzeitigen Propagators zu garantieren.

Kapitel 4

Die Schwache Abbildung

4.1 Definition der Schwachen Abbildung

Ziel der Schwachen Abbildung ist es, zusammengesetzte Teilchen und deren Wechselwirkung zu beschreiben. Mittels der Schwachen Abbildung werden Gleichungen für die Zustandsdarstellungen der zusammengesetzten Quantenfelder aus den mikroskopischen Gleichungen abgeleitet. Dies bedeutet, daß die Funktionalgleichung für die elementaren Zustandsdarstellungen (3.45) auf eine effektive Funktionalgleichung für die Zustandsdarstellung der zusammengesetzten Teilchen abgebildet wird.
Ein Zustand für die Beschreibung einer geradzahligen Anzahl von Fermionen der mikroskopischen Fermionentheorie im Funktionalraum lautet:

$$| \mathcal{F}(j;a)\rangle \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \varphi^{(2n)}(I_1 \dots I_{2n} \mid a) j_{I_1} \dots j_{I_{2n}} \mid 0\rangle_F \, . \tag{4.1}$$

Ein phänomenologischer Bosonenzustand im Funktionalraum lautet:

$$| \mathcal{B}(b;a)\rangle \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \rho^{(n)}(k_1 \dots k_n \mid a) b_{k_1} \dots b_{k_n} \mid 0\rangle_B . \tag{4.2}$$

Der Index k ist ein Sammelindex für die bosonischen Quantenzahlen.

Definition 4.1

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^{(2n)}(I_1 \dots I_{2n} \mid a) &= \sum_{k_1 \dots k_n} C_{k_1}^{\{I_1 I_2} \dots C_{k_n}^{I_{2n-1} I_{2n}\}} \rho^{(n)}(k_1 \dots k_n \mid a) \\ &= C_{k_1}^{\{I_1 I_2} \dots C_{k_n}^{I_{2n-1} I_{2n}\}} \rho^{(n)}(k_1 \dots k_n \mid a) \end{aligned} \tag{4.3}$$

heißt Schwache Abbildung.

Die Schwache Abbildung stellt einen Zusammenhang zwischen den fermionischen Übergangsmatrixelementen $\varphi^{(2n)}(I_1 \dots I_{2n} \mid a)$ der mikroskopischen Theorie und den bosonischen Übergangsmatrixelementen $\rho^{(n)}(k_1 \dots k_n \mid a)$ der phänomenologischen Theorie her. Dabei bilden die eingeführten Größen $C_k^{I_1 I_2}$ eine Basis aus Zweiteilchenzuständen für die Schwache Abbildung. Der Index I beschreibt die fermionischen Freiheitsgrade und der Index k die bosonischen Quantenzahlen.
Die explizite Durchführung der Schwachen Abbildung beinhaltet drei Schritte:

1. Die Übersetzung der Funktionalgleichung der mikroskopischen Theorie (3.45) in eine Funktionalgleichung der zusammengesetzten Quantenfelder (Kapitel 4).
2. Berechnung der zusammengesetzten Quantenfelder $\left(C_k^{I_1 I_2}\text{-Funktionen}\right)$ als Basis für die Schwache Abbildung (Kapitel 6).
3. Vergleich der abgebildeten Funktionalgleichung mit den phänomenologischen Gleichungen (Kapitel 7 und 8).

4.2 Die Hard-Core Gleichung

Für die Schwache Abbildung wird ein vollständiges System von Mehrteilchenzuständen benötigt ($C_k^{I_1 I_2}$-Funktionen). Diese Zustände werden als Lösungen des Diagonalanteils der Funktionalgleichung (3.45) definiert. Der Diagonalanteil der Funktionalgleichung (3.45) lautet:

$$E_{p0} \mid \mathcal{F}(j,p)\rangle \quad = \quad j_{I_1} \hat{K}_{I_1 I_2} \partial_{I_2} \mid \mathcal{F}(j,p)\rangle - 3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F^t_{I_4 K} j_{I_1} j_K \partial_{I_3} \partial_{I_2} \mid \mathcal{F}(j,p)\rangle . \tag{4.4}$$

Die Lösungen des Diagonalanteils heißen Hard-Core Funktionen, sie zeichnen sich durch eine minimale Anzahl von Subteilchen aus, bei gleichen Quantenzahlen. Die explizite Berechnung dieser Hard-Core Funktionen wird in Kapitel 6 behandelt.

4.3 Die Schwache Abbildung im Funktionalraum

Für die Übersetzung des fermionischen Energieoperators in den effektiven bosonischen (phänomenologischen) Energieoperator existieren exakte Theoreme [3]. Die Abbildung muß im Konfigurationsraum durchgeführt werden. Die Bosonenquellen b und die Bosonenvernichter ∂^b werden als unabhängige Größen von den Fermionenquellen j und den Fermionenvernichtern ∂ definiert. Dies hat zur Folge, daß die Kommutatoren $\left[\partial,\partial^b\right]_-$, $[\partial,b]_-$, $\left[\partial^b,j\right]_-$ und $[j,b]_-$ verschwinden. Die explizite Abbildung gestaltet sich jedoch umfangreich! Aus diesem Grund wird die Schwache Abbildung im Funktionalraum durchgeführt.
Eine elegante Technik, die Transformation auf eine effektive Theorie im Funktionalraum durchzuführen, ist die funktionale Kettenregel. Allerdings muß dafür die Unabhängigkeit der Bosonenquellen b und der Bosonenvernichter ∂^b von den Fermionenquellen j und von den Fermionenvernichter ∂ vorübergehend aufgegeben werden. Nach Ausführen der Abbildung wird die Unabhängigkeit der Bosonenquellen b und der Bosonenvernichter ∂^b von den Fermionenquellen j und von den Fermionenvernichter ∂ postuliert.

4.3.1 Definitionen und Postulate

Definition 4.2

Die Bosonenquellen werden durch

$$b_k := \frac{1}{2} C_k^{I_1 I_2} j_{I_1} j_{I_2} \tag{4.5}$$

definiert.

Die Bosonenquellen werden als Produkt zweier Fermionenquellen definiert; die Koeffizienten $C_k^{I_1 I_2}$ sind die Zweiteilchenlösungen der Hard-Core Gleichung.
Diese Definition der Bosonenquellen ermöglicht es, im Funktionalraum mit Hilfe der Kettenregel die Schwache Abbildung durchführen zu können.
Bemerkung:
Diese Definition berücksichtigt nicht, daß Teilchen neben dem Hard-Core Anteil auch durch die Polarisationsterme zu beschreiben sind.

Postulat 4.1

Für die Transformation des Funktionalzustands $\mid \mathcal{F}(j,p)\rangle$ in einen Zustand $\mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle$ gilt die Invarianzrelation:

$$\mid \mathcal{F}(j,p)\rangle = \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle . \tag{4.6}$$

Dies bedeutet, in Analogie zum gewöhnlichen Vektorraum, daß derselbe Zustandsvektor in verschiedenen Basen dargestellt wird ($r = \sum a_i x^i = \sum \bar{a}_j \bar{x}^j$). Diese Relation gilt nur unter Berücksichtigung von Austauschtermen. Werden jedoch die Austauschterme in der mikroskopischen Theorie vernachlässigt, gilt diese Relation auch für Abbildungsverfahren, in denen Austauschterme vernachlässigt werden, wie dies im Fall der Kettenregel gegeben ist. Es ergibt sich aus (3.45) damit folgende Gleichung:

$$E_{p0} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle = \mathcal{H}_F(j,\partial) \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle . \tag{4.7}$$

Der funktionale Energieoperator mit Fermionenquellen und Fermionenvernichtern muß daraufhin in einen funktionalen Energieoperator mit Bosonenquellen und Bosonenvernichtern umgeschrieben werden. Damit schreibt sich (4.7):

$$E_{p0} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle = \mathcal{H}_B(b,\partial^b) \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \, . \tag{4.8}$$

Definition 4.3

Für die neu eingeführten Bosonenquellen und Bosonenvernichter gilt die Vertauschungsrelation

$$[\partial^b_{k'}, b_k] = \delta_{kk'} . \tag{4.9}$$

Um nun die Transformation des funktionalen Energieoperators auf Bosonenquellen und Bosonenvernichter durchführen zu können $\mathcal{H}_F \to \mathcal{H}_B$, ist es einerseits notwendig zu wissen, wie Fermionenquellen zu ersetzen sind und andererseits wie ein Fermionenvernichter auf das Bosonenfunktional wirkt.
Paarweise auftretende Fermionenquellen werden durch die Umkehrabbildung von (4.5) ersetzt:

$$j_{I_1} j_{I_2} = 2R^k_{I_1 I_2} b_k \, . \tag{4.10}$$

Diese Gleichung definiert die Dualfunktionen $R^k_{I_1 I_2}$. Für diese gilt zum einen

$$\sum_{I_1,I_2} R^k_{I_1 I_2} C^{I_1 I_2}_{k'} = \delta_{kk'} \tag{4.11}$$

und zum anderen die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_k R^k_{I_1 I_2} C^{K_1 K_2}_k = \frac{1}{2}(\delta_{I_1 K_1}\delta_{I_2 K_2} - \delta_{I_2 K_1}\delta_{I_1 K_2}) \, . \tag{4.12}$$

Werden jeweils zwei Fermionenquellen durch (4.10) ersetzt, so können vier Fermionenquellen durch

$$j_{I_1} j_{I_2} j_{I_3} j_{I_4} = 4R^{k_1}_{\{I_1 I_2} R^{k_2}_{I_3 I_4\}} b_{k_1} b_{k_2} \tag{4.13}$$

ersetzt werden.
Die Wirkung des Fermionenvernichters ∂^f_I auf das Bosonenfunktional $\mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle$, d.h. $\partial^f_I \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle$ wird im folgenden Unterkapitel beschrieben.

4.3.2 Die funktionale Kettenregel

In diesem Unterkapitel wird die funktionale Kettenregel vorgestellt. Sie gestattet es, den Ausdruck $\partial_I \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle$ im Funktionalraum zu berechnen. Es gilt:

$$\partial_I \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b[j],p)\rangle = \frac{\delta}{\delta b_k} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b[j],p)\rangle \, \frac{\delta b_k}{\delta j_I} = \sum_k (\partial_I b_k)\partial^b_k \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b[j],p)\rangle. \tag{4.14}$$

Mit der Beziehung $\partial_I b_k = C_k^{I_1 I_2} j_{I_1}$, die sich durch Ersetzen von b_k durch Gleichung (4.5) ergibt, schreibt sich (4.14) als:

$$\partial_I \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b[j],p)\rangle = \sum_k C_k^{I_1 I_2} j_{I_1} \partial^b_k \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b[j],p)\rangle. \tag{4.15}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\partial_I \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle &\overset{4.14}{=} \sum_k (\partial_I b_k)\partial^b_k \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\
&\overset{4.5}{=} \sum_k \left[\partial_I \left(\frac{1}{2} C_k^{I_1 I_2} j_{I_1} j_{I_2}\right)\right] \partial^b_k \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\
&= \sum \left(\frac{1}{2} C_k^{I_1 I_2} \left(\partial_I j_{I_1}\right) j_{I_2}\right) \partial^b_k \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\
&\overset{3.14}{=} \sum \left(\frac{1}{2} C_k^{I_1 I_2} \left(\delta_{I I_1} - j_{I_1}\partial_I\right) j_{I_2}\right) \partial^b_k \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\
&= \sum_k \left(\frac{1}{2} C_k^{I I_2} j_{I_2} - \frac{1}{2} C_k^{I_1 I_2} j_{I_1} \left(\partial_I j_{I_2}\right)\right) \partial^b_k \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\
&= \sum_k \left(\frac{1}{2} C_k^{I I_2} j_{I_2} - \frac{1}{2} C_k^{I_1 I_2} j_{I_1} \delta_{I I_2}\right) \partial^b_k \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\
&= \sum_k \left(\frac{1}{2} C_k^{I I_2} j_{I_2} - \frac{1}{2} C_k^{I_1 I} j_{I_1}\right) \partial^b_k \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\
&\overset{*}{=} \sum_k \left(\frac{1}{2} C_k^{I I_2} j_{I_2} + \frac{1}{2} C_k^{I I_1} j_{I_1}\right) \partial^b_k \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\
&= \sum_k C_k^{IK} j_K \partial^b_k \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle
\end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\partial_{I_1}\partial_{I_2} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b[j],p)\rangle = \sum C_k^{I_2 I_1} \partial^b_k \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b[j],p)\rangle - \sum_{k_1 k_2} C_{k_1}^{I_2 K_1} C_{k_2}^{I_1 K_2} j_{K_1} j_{K_2} \partial^b_{k_2} \partial^b_{k_1} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b[j],p)\rangle \tag{4.16}$$

wird durch zweimalige Anwendung der Kettenregel gewonnen. Die Berechnung dieser Gleichung wird im Anhang A, Gleichung (A.1) durchgeführt.

Der Ausdruck $\partial_{I_1}\partial_{I_2}\partial_{I_3} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b[j],p)\rangle$ wird in Anhang A, Gleichung (A.2) berechnet. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}
\partial_{I_1}\partial_{I_2}\partial_{I_3} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b[j],p)\rangle &= 3 \sum_{k_1 k_2} C_{k_1}^{I_2 I_1} C_{k_2}^{I_3 K_1} j_{K_1} \partial^b_{k_2} \partial^b_{k_1} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b[j],p)\rangle \\
&\quad + \sum_{k_1 k_2 k_3} C_{k_1}^{I_1 K_1} C_{k_2}^{I_2 K_2} C_{k_3}^{I_3 K_3} j_{K_1} j_{K_2} j_{K_3} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \partial^b_{k_1} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b[j],p)\rangle.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

---

*Die C-Funktionen sind antisymmetrisch: $C^{I_1 I_2} j_{I_1} j_{I_2} = -C^{I_1 I_2} j_{I_2} j_{I_1} = -C^{I_2 I_1} j_{I_1} j_{I_2}$, wobei die letzte Gleichheit durch Umbenennung der Indizes zustande kam.

4.3.3 Durchführung der Abbildung für eine reine Bosonen Theorie

In den beiden vorherigen Unterkapitel wurden alle Formeln abgeleitet, die für die Abbildung des funktionalen Energieoperators (3.45) in eine Bosonentheorie benötigt werden. Zur besseren Übersicht seien sie an dieser Stelle nocheinmal aufgeführt:

$$\partial_{I_1} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle = \sum_k C_k^{I_1 I_2} j_{I_2} \partial_k^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\partial_{I_1}\partial_{I_2} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle &= \sum_k C_k^{I_2 I_1} \partial_k^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\ &\quad - \sum_{k_1 k_2} C_{k_1}^{I_2 K_1} C_{k_2}^{I_1 K_2} j_{K_1} j_{K_2} \partial_{k_2}^b \partial_{k_1}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}\partial_{I_1}\partial_{I_2}\partial_{I_3} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle &= 3\sum_{k_1 k_2} C_{k_1}^{I_2 I_1} C_{k_2}^{I_3 K_1} j_{K_1} \partial_{k_2}^b \partial_{k_1}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\ &\quad + \sum_{k_1 k_2 k_3} C_{k_1}^{I_1 K} C_{k_2}^{I_2 L} C_{k_3}^{I_3 N} j_K j_L j_N \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \partial_{k_3}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$j_{I_1} j_{I_2} = 2R_{I_1 I_2}^k b_k \tag{4.21}$$

$$j_{I_1} j_{I_2} j_{I_3} j_{I_4} = 4R_{\{I_1 I_2}^{k_1} R_{I_3 I_4\}}^{k_2} b_{k_1} b_{k_2}. \tag{4.22}$$

Für den funktionalen Energieoperator (3.45) ergibt sich Termweise:

$$\begin{aligned} j_{I_1}\hat{K}_{I_1 I_2}\partial_{I_2} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle &= j_{I_1}\hat{K}_{I_1 I_2} C_k^{I_2 I} j_I \partial_k^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\ &= \hat{K}_{I_1 I_2} C_k^{I_2 I} j_{I_1} j_I \partial_k^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\ &= \hat{K}_{I_1 I_2} C_k^{I_2 I} 2R_{I_1 I}^{k'} b_{k'} \partial_k^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\ &= 2\hat{K}_{I_1 I_2} C_k^{I_2 I} R_{I_1 I}^{k'} b_{k'} \partial_k^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Der zweite Term lautet:

$$\begin{aligned} &\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} j_{I_1} \partial_{I_4}\partial_{I_3}\partial_{I_2} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\ &= \hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} j_{I_1} \Big\{ 3C_{k_1}^{I_3 I_4} C_{k_2}^{I_2 K_1} j_{K_1} \partial_{k_2}^b \partial_{k_1}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle + C_{k_1}^{I_4 K} C_{k_2}^{I_3 L} C_{k_3}^{I_2 N} j_K j_L j_N \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \partial_{k_3}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \Big\} \\ &= 6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C_{k_1}^{I_3 I_4} C_{k_2}^{I_2 K_1} R_{I_1 K_1}^k b_k \partial_{k_2}^b \partial_{k_1}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\ &\quad + 4\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C_{k_1}^{I_4 K} C_{k_2}^{I_3 L} C_{k_3}^{I_2 N} R_{\{I_1 K}^{k_4} R_{LN\}}^{k_5} b_{k_4} b_{k_5} \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \partial_{k_3}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Der dritte Term ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} &3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F_{I_4 K}^t j_{I_1} j_k \partial_{I_3}\partial_{I_2} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\ &= 3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F_{I_4 K}^t j_{I_1} j_K \Big(C_k^{I_2 I_3} \partial_k^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle - C_{k_1}^{I_2 K_1} C_{k_2}^{I_3 K_2} j_{K_1} j_{K_2} \partial_{k_1}^b \partial_{k_1}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \Big) \\ &= 6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F_{I_4 K}^t C_k^{I_2 I_3} R_{I_1 K}^{k'} b_{k'} \partial_k^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\ &\quad - 12\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F_{I_4 K}^t C_{k_1}^{I_2 K_1} C_{k_2}^{I_3 K_2} R_{\{I_1 K}^{k_3} R_{K_1 K_2\}}^{k_4} b_{k_3} b_{k_4} \partial_{k_2}^b \partial_{k_1}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Der vierte Term hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} &\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} (3F_{I_4 K_1}^t F_{I_3 K_2}^t + \frac{1}{4} A_{I_4 K_1} A_{I_3 K_2}) j_{I_1} j_{K_1} j_{K_2} \partial_{I_2} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\ &= \hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} (3F_{I_4 K_1}^t F_{I_3 K_2}^t + \frac{1}{4} A_{I_4 K_1} A_{I_3 K_2}) j_{I_1} j_{K_1} j_{K_2} C_k^{I_2 K_3} j_{K_3} \partial_k^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\ &= 4\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} (3F_{I_4 K_1}^t F_{I_3 K_2}^t + \frac{1}{4} A_{I_4 K_1} A_{I_3 K_2}) C_k^{I_2 K_3} R_{\{I_1 K_1}^{k_1} R_{K_2 K_3\}}^{k_2} b_{k_1} b_{k_2} \partial_k^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Und schließlich ergibt der fünfte Term:

$$\begin{aligned}&\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}(F^t_{I_4K_1}F^t_{I_3K_2}+\frac{1}{4}A_{I_4K_1}A_{I_3K_2})F^t_{I_2K_3}j_{I_1}j_{K_1}j_{K_2}j_{K_3}\mid\widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle\\ =\;&4(F^t_{I_4K_1}F^t_{I_3K_2}+\frac{1}{4}A_{I_4K_1}A_{I_3K_2})F^t_{I_2K_3}R^{k_1}_{\{I_1K_1}R^{k_2}_{K_2K_3\}}b_{k_1}b_{k_2}\mid\widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Der Energieoperator für eine reine Bosonentheorie lautet damit:

$$\begin{aligned}E_{p0}\mid\widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle =\;& 2\hat{K}_{I_1I_2}C^{I_2I}_{k}R^{k'}_{I_1I}b_{k'}\partial^b_k\mid\widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle\\ &+6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{k_1}C^{I_4K_1}_{k_2}R^{k}_{I_1K_1}b_k\partial^b_{k_2}\partial^b_{k_1}\mid\widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle\\ &+4\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_4N}_{k_1}C^{I_3L}_{k_2}C^{I_2K}_{k_3}R^{k_4}_{\{I_1K}R^{k_5}_{LN\}}b_{k_4}b_{k_5}\partial^b_{k_1}\partial^b_{k_2}\partial^b_{k_3}\mid\widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle\\ &-6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}F_{I_4K}C^{I_2I_3}_{k}R^{k'}_{I_1K}b_{k'}\partial^b_k\mid\widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle\\ &+12\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}F_{I_4K}C^{I_2K_1}_{k_1}C^{I_3K_2}_{k_2}R^{k_3}_{\{I_1K}R^{k_4}_{K_1K_2\}}b_{k_3}b_{k_4}\partial^b_{k_2}\partial^b_{k_1}\mid\widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle\\ &+4\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}(3F_{I_4K_1}F_{I_3K_2}+\frac{1}{4}A_{I_4K_1}A_{I_3K_2})C^{I_2K_3}_{k}R^{k_1}_{\{I_1K_1}R^{k_2}_{K_2K_3\}}b_{k_1}b_{k_2}\partial^b_k\mid\widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle\\ &-4\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}(F_{I_4K_1}F_{I_3K_2}+\frac{1}{4}A_{I_4K_1}A_{I_3K_2})F_{I_2K_3}R^{k_1}_{\{I_1K_1}R^{k_2}_{K_2K_3\}}b_{k_1}b_{k_2}\mid\widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle.\end{aligned}\tag{4.28}$$

Wird dieser mit der funktionalen Kettenregel abgeleitete Energieoperator mit dem Ergebnis der exakten Abbildung in [3] verglichen, so zeigt sich, daß nicht alle Austauschterme reproduziert werden. Darüber hinaus liefert die Kettenregel den Term

$$4\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_4K}_{k_1}C^{I_3L}_{k_2}C^{I_2N}_{k_3}R^{k_4}_{\{I_1K}R^{k_5}_{LN\}}b_{k_4}b_{k_5}\partial^b_{k_1}\partial^b_{k_2}\partial^b_{k_3}\mid\widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle\;,$$

der in der exakten Abbildung nicht existiert. Wie sich aber zeigt, kann dieser Term vernachlässigt werden, siehe Anhang H.
Dies bedeutet, sofern auf die Austauschterme verzichtet werden kann, daß die funktionale Kettenregel alle führenden Terme liefert und damit ein geeignetes Verfahren darstellt, um effektive Theorien abzuleiten.

4.3.4 Schwache Abbildung für Teilchen mit Polarisationswolke

Bisher wurde die Schwache Abbildung mit Hard-Core Wellenfunktionen durchgeführt, dabei wurden die Bosonen durch die Gleichung (4.5) definiert.
Die Hard-Core Wellenfunktionen zeichnen sich durch die minimale Anzahl von Subfermionen aus. Jedoch sind diese Zustände nicht die realen Zustände. Ein Teilchen muß, wenn es vollständig beschrieben werden soll, sowohl durch den Hard-Core Anteil, als auch durch Zustände höherer Fermionenzahl mit gleichen Quantenzahlen beschrieben werden (Polarisationswolke). Dies sieht man daran, daß die Hard-Core Wellenfunktionen Lösungen zum Diagonalanteil des funktionalen Energieoperators bilden, aber keine Lösungen zum funktionalen Energieoperator selbst sind. Die Hard-Core Lösungen sind deshalb allenfalls eine gute Approximation für das reale Teilchen. Ein Funktionalzustand für ein m-Teilchenzustand mit Polarisationswolke lautet:

$$\mid\mathcal{F}(j,p)\rangle^{dr}:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\imath^{2n+m}}{(2n+m)!}C^{I_1\dots I_{2n+m}}_{m,k}j_{I_1}\dots j_{I_{2n+m}}\mid 0\rangle_F.\tag{4.29}$$

Der Index k ist ein Sammelindex für die Quantenzahlen des m-Teilchenzustands. Für Bosonen, deren Hard-Core aus 2j-Teilchen bestehen, gilt

$$b_{2j,k}=\sum_{n=0}^{\infty}C^{I_1\dots I_{2j+2n}}_{2j,k}j_{I_1}\dots j_{I_{2j+2n}}.\tag{4.30}$$

Der erste Term der Summe ist mit der Hard-Core Wellenfunktion zu identifizieren. Insofern bildet die Hard-Core Wellenfunktion eine Approximation für diese Summe und somit für ein Boson. Entsprechendes gilt für das Fermion, das durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$f_{2j+1} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2j,k}^{I_1 \dots I_{2j+1+2n}} j_{I_1} \dots j_{I_{2j+1+2n}}. \tag{4.31}$$

Um die Schwache Abbildung durchführen zu können, werden noch die inversen Beziehungen zu obigen Gleichungen benötigt. Sie sind durch folgende Gleichungen gegeben [13]:

$$j_{I_1} \dots j_{I_{2r}} = \sum_k \sum_{j=0}^{r} R_{I_1 \dots I_{2r}}^{2j,k} b_{2j,k}, \tag{4.32}$$

$$j_{I_1} \dots j_{I_{2r+1}} = \sum_l \sum_{j=1}^{r} R_{I_1 \dots I_{2r}}^{2j,k} f_{2j+1,l}. \tag{4.33}$$

Prinzipiell könnte man versuchen, eine Abbildung für angezogene Teilchen abzuleiten. Dafür existiert jedoch kein ausgearbeiteter Formalismus. Im Prinzip müssen jedoch Abbildungen mit Polarisationstermen äquivalent zu Hard-Core Abbildungen sein, wenn exakt abgebildet wird. Daher können im Prinzip auch Mischungen von Hard-Core Zuständen und Zuständen mit Polarisationswolke für die Abbildung benutzt werden.
Dieses Vorgehen ist erforderlich, um die Wechselwirkung der Gluonen mit den Quarks berechnen zu können, da ansonsten, wenn mit Hard-Core Zuständen abgebildet werden würde, nur die Wechselwirkung der Gluonen mit den Hilfsfeldern abgeleitet werden könnte, vgl. [21].

4.3.5 Schwache Abbildung einer Bosonen - Fermionen Kopplungstheorie

Einführung

Bisher wurde die Schwache Abbildung für eine reine Bosonentheorie durchgeführt. In der Natur erscheinen Bosonen und Fermionen meist gemeinsam und wechselwirken untereinander. Dadurch wird es nötig die Schwache Abbildung auf eine effektive Bosonen- und Fermionen-Dynamik auszudehnen. Da nun der Fermionenvernichter auf das Funktional $\mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle$ nach der Kettenregel sowohl auf das Fermion f(j) als auch auf das Boson b(j) wirkt, wird die Kettenregel verallgemeinert. Zunächst muß aber die Äquivalenz der beiden Funktionale $\mid \mathcal{F}(j,p)\rangle$ und $\mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle$ postuliert werden.

Definitionen und Postulate

Zuerst wird der Funktionalzustand $\mid \mathcal{F}(j,p)\rangle$ in einen Zustand $\mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle$ transformiert.

Postulat 4.2

Für die Transformation des Funktionalzustandes $\mid \mathcal{F}(j,p)\rangle$ in einen Zustand $\mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle$ gilt die Invarianzrelation:

$$\mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle = \mid \mathcal{F}(j,p)\rangle. \tag{4.34}$$

Es gilt somit folgende Gleichung:

$$E_{p0} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle = \mathcal{H}_F \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle. \tag{4.35}$$

Die Bosonen werden durch die Lösungen der Hard-Core Gleichung definiert, und die Fermionen werden durch den Hard-Core Anteil der Dressed-Quark Lösung definiert.

Die Kettenregel einer Bosonen-Fermionen Kopplungstheorie

Die Kettenregel ergibt in diesem Fall sowohl einen Beitrag, der von den Bosonenquellen herrührt, als auch einen Beitrag, der von den Fermionenquellen herrührt. Dies führt zu folgender Gleichung:

$$\partial_I \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle = [(\partial_I b_k)\partial_k^b + (\partial_I f_l)\partial_l^f] \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle. \tag{4.36}$$

Das Ein-Zweikörperproblem

In diesem Unterkapitel soll die Schwache Abbildung auf das Ein-Zweikörperproblem angewandt werden. Zunächst werden die Bosonen als Zweiteilchen - Bindungszustände definiert und die Fermionen als Einteilchenzustände. Danach wird die Kettenregel auf diese Zustände angewandt, um dann den funktionalen Energieoperator (3.45) auf die neuen Quellen und Vernichter umschreiben zu können.

Definition 4.4
Die Bosonen sind Zweiteilchen-Bindungszustände.

$$b_{2,k} = \frac{1}{2} C_{2,k}^{I_1 I_2} j_{I_1} j_{I_2} \tag{4.37}$$

Definition 4.5
Die Fermionen sind Einteilchenzustände.

$$f_{1,l} = C_{1,l}^{I} j_I \tag{4.38}$$

Aus der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned} \partial_I \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle &= [(\partial_I b_k)\partial_k^b + (\partial_I f_l)\partial_l^f] \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\ &= (C_{2,k}^{IK} j_K \partial_k^b + C_{1,l}^{I} \partial_l^f) \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Für den Term $\partial_{I_2}\partial_{I_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle$ ergibt sich nach Anhang A, Gleichung (A.3):

$$\begin{aligned} \partial_{I_2}\partial_{I_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle = \; & C_{2,k}^{I_1 I_2} \partial_k^b \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\ & - C_{2,k_1}^{I_1 K_1} C_{2,k_2}^{I_2 K_2} j_{K_1} j_{K_2} \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\ & - 2 C_{2,k}^{I_1 K} C_{1,l}^{I_2} j_K \partial_l^f \partial_k^b \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\ & + C_{1,l_1}^{I_1} C_{1,l_2}^{I_2} \partial_{l_1}^f \partial_{l_2}^f \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Schließlich ergibt sich nach Anhang A, Gleichung (A.4):

$$\begin{aligned} \partial_{I_4}\partial_{I_3}\partial_{I_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle = \; & 3 C_{2,k_1}^{I_2 I_3} C_{2,k_2}^{I_4 K} j_K \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\ & + 3 C_{2,k}^{I_2 I_3} C_{1,l}^{I_4} \partial_k^b \partial_l^f \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\ & - C_{2,k_1}^{I_2 K_1} C_{2,k_2}^{I_3 K_2} C_{2,k_3}^{I_4 K_3} j_{K_1} j_{K_2} j_{K_3} \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \partial_{k_3}^b \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\ & - 3 C_{2,k_1}^{I_2 K_1} C_{2,k_2}^{I_3 K_2} C_{1,l}^{I_4} j_{K_1} j_{K_2} \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \partial_l^f \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\ & + 3 C_{2,k}^{I_2 K_1} C_{1,l_1}^{I_3} C_{1,l_2}^{I_4} j_{K_1} \partial_{l_1}^f \partial_{l_2}^f \partial_k^b \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\ & + C_{1,l_1}^{I_2} C_{1,l_2}^{I_3} C_{1,l_3}^{I_4} \partial_{l_1}^f \partial_{l_2}^f \partial_{l_3}^f \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Die Formeln für die Ersetzung der j-Quellen ergeben sich zu:

$$j_I = R_I^l f_l \tag{4.42}$$

$$j_{I_1} j_{I_2} = 2R^{k}_{I_1 I_2} b_k{}^{*} \tag{4.43}$$
$$j_{I_1} j_{I_2} j_{I_3} = 2R^{k}_{I_1 I_2} R^{l}_{I_3} b_k f_l \tag{4.44}$$
$$j_{I_1} j_{I_2} j_{I_3} j_{I_4} = 4R^{k_1}_{I_1 I_2} R^{k_2}_{I_3 I_4} b_{k_1} b_{k_2}. \tag{4.45}$$

Für die Abbildung des Energieoperators (3.45) ergibt sich mit (4.39)-(4.45) für die einzelnen Anteile:

$$\begin{aligned}
& j_{I_1} \hat{K}_{I_1 I_2} \partial_{I_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
= \; & \hat{K}_{I_1 I_2} C^{I_2 K}_{2,k_1} j_{I_1} j_K \partial^b_{k_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle + \hat{K}_{I_1 I_2} C^{I_2}_{1,l_1} j_{I_1} \partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
= \; & 2\hat{K}_{I_1 I_2} C^{I_2 K}_{2,k_1} R^{2,k_2}_{I_1 K} b_{k_2} \partial^b_{k_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle + \hat{K}_{I_1 I_2} C^{I_2}_{1,l_1} R^{1,l_2}_{I_1} f_{l_2} \partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle,
\end{aligned} \tag{4.46}$$

für den zweiten Term ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} j_{I_1} \partial_{I_4} \partial_{I_3} \partial_{I_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
= \; & 3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 I_3}_{2,k_1} C^{I_4 K}_{2,k_2} j_{I_1} j_K \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& +3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 I_3}_{2,k} C^{I_4}_{1,l} j_{I_1} \partial^b_k \partial^f_l \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& -\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 K_1}_{2,k_1} C^{I_3 K_2}_{2,k_2} C^{I_4 K_3}_{2,k_3} j_{I_1} j_{K_1} j_{K_2} j_{K_3} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \partial^b_{k_3} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& -3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 K_1}_{2,k_1} C^{I_3 K_2}_{2,k_2} C^{I_4}_{1,l} j_{I_1} j_{K_1} j_{K_2} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \partial^f_l \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& +3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 K_1}_{2,k} C^{I_3}_{1,l_1} C^{I_4}_{1,l_2} j_{I_1} j_{K_1} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& +\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2}_{1,l_1} C^{I_3}_{1,l_2} C^{I_4}_{1,l_3} j_{I_1} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \partial^f_{l_3} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
= \; & 6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 I_3}_{2,k_1} C^{I_4 K}_{2,k_2} R^{2,k_3}_{I_1 K} b_{k_3} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& +3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 I_3}_{2,k} C^{I_4}_{1,l_1} R^{1,l_2}_{I_1} f_{l_2} \partial^b_k \partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& -4\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 K_1}_{2,k_1} C^{I_3 K_2}_{2,k_2} C^{I_4 K_3}_{2,k_3} R^{2,k_4}_{I_1 K_1} R^{2,k_5}_{K_2 K_3} b_{k_4} b_{k_5} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \partial^b_{k_3} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& -6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 K_1}_{2,k_1} C^{I_3 K_2}_{2,k_2} C^{I_4}_{1,l_1} R^{1,l_2}_{I_1} R^{2,k_3}_{K_1 K_2} f_{l_2} b_{k_3} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& +6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 K_1}_{2,k_1} C^{I_3}_{1,l_1} C^{I_4}_{1,l_2} R^{2,k_2}_{I_1 K_1} b_{k_2} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \partial^b_{k_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& +\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2}_{1,l_1} C^{I_3}_{1,l_2} C^{I_4}_{1,l_3} R^{1,l_4}_{I_1} f_{l_4} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \partial^f_{l_3} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Der dritte Term lautet:

$$\begin{aligned}
& 3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F^t_{I_4 K} j_{I_1} j_K \partial_{I_3} \partial_{I_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
= \; & 3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F^t_{I_4 K} C^{I_2 I_3}_{2,k} j_{I_1} j_K \partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& -3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F^t_{I_4 K} C^{I_2 K_1}_{2,k_1} C^{I_3 K_2}_{2,k_2} j_{I_1} j_K j_{K_1} j_{K_2} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& -6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F^t_{I_4 K} C^{I_2 K_1}_{2,k} C^{I_3}_{1,l} j_{I_1} j_K j_{K_1} \partial^f_l \partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& +3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F^t_{I_4 K} C^{I_2}_{1,l_1} C^{I_3}_{1,l_2} j_{I_1} j_K \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle
\end{aligned}$$

---

*Die Ersetzung zweier j-Quellen durch $j_{I_1} j_{I_2} = 2R^k_{I_1 I_2} b_k = R^{l_1}_{I_1} R^{l_2}_{I_2} f_{l_1} f_{l_2}$ ist äquivalent, sofern das Spektrum der Bosonen eine vollständige Basis der Zweiteilchenfunktionen bildet. In dieser Basis sind sowohl Streuzustände als auch Bindungszustände enthalten, die nicht als Gluonen interpretiert werden können, und die Gluonenzustände. Es zeigt sich jedoch, daß die Energie der Streuzustände mehrere Größenordnungen höher als die der Bindungszustände liegt. Insofern können die Streuzustände im Niederenergiebereich vernachlässigt werden. Aus diesem Grund werden zwei j-Quellen stets durch die bosonische b_k-Quelle ersetzt. Dieselbe Argumentation läßt sich auf den Fall von drei j-Quellen bzw. vier j-Quellen übertragen und führt zu den Ersetzungsformeln (4.43)-(4.45)

Im Prinzip müßten nun alle Bindungszustände für die Abbildung berücksichtigt werden. Dadurch erhielte man eine vollständige Beschreibung aller möglichen Wechselwirkungen von Quarks und deren Zweiteilchenbindungszuständen, z.B. die Wechselwirkung der Quarks mit Mesonen, die Wechselwirkung von Diquarkzuständen usw. Die Gluonen bilden aufgrund ihrer Quantenzahlen (Farboktettzustände mit Fermionenzahl f=0) eine Untermannigfaltigkeit der Bindungszustände, und in dieser Arbeit wird die Wechselwirkung dieser Gluonenzustände sowie deren Wechselwirkung mit den Quarks untersucht.

$$
\begin{aligned}
&= 6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}F^t_{I_4K}C^{I_2I_3}_{2,k}R^{2,k_2}_{I_1K}b_{k_2}\partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -12\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}F^t_{I_4K}C^{I_2K_1}_{2,k_1}C^{I_3K_2}_{2,k_2}R^{2,k_3}_{I_1K}R^{2,k_4}_{K_1K_2}b_{k_3}b_{k_4}\partial^b_{k_1}\partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -12\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}F^t_{I_4K}C^{I_2K_1}_{2,k}C^{I_3}_{1,l}R^{1,l_2}_{I_1}R^{2,k_2}_{KK_1}f_{l_2}b_{k_2}\partial^f_l\partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}F^t_{I_4K}C^{I_2}_{1,l_1}C^{I_3}_{1,l_2}R^{2,k_1}_{I_1K}b_{k_1}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle. \qquad (4.48)
\end{aligned}
$$

Der vierte Term berechnet sich zu:

$$
\begin{aligned}
&\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}(3F^t_{I_4K_1}F^t_{I_3K_2}+\frac{1}{4}A_{I_4K_1}A_{I_3K_2})j_{I_1}j_{K_1}j_{K_2}\partial_{I_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&= 4\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}(3F^t_{I_4K_1}F^t_{I_3K_2}+\frac{1}{4}A_{I_4K_1}A_{I_3K_2})C^{I_2K}_{2,k_1}R^{2,k_2}_{I_1K_1}R^{2,k_3}_{K_2K}b_{k_2}b_{k_3}\partial^b_{k_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +2\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}(3F^t_{I_4K_1}F^t_{I_3K_2}+\frac{1}{4}A_{I_4K_1}A_{I_3K_2})C^{I_2}_{1,l_1}R^{1,l_2}_{I_1}R^{2,k}_{K_1K_2}f_{l_2}b_k\partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle. \qquad (4.49)
\end{aligned}
$$

Für den fünften Term ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}(F^t_{I_4K_1}F^t_{I_3K_2}+\frac{1}{4}A_{I_4K_1}A_{I_3K_2})F^t_{I_2K_3}j_{I_1}j_{K_1}j_{K_2}j_{K_3} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&= 4\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}(3F^t_{I_4K_1}F^t_{I_3K_2}+\frac{1}{4}A_{I_4K_1}A_{I_3K_2})F^t_{I_2K_3}R^{2,k_1}_{I_1K_1}R^{2,k_2}_{K_2K_3}b_{k_1}b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle. \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

Der abgebildete funktionale Energieoperator lautet:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&E_{p0} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle = \\
&\quad 2\hat{K}_{I_1I_2}C^{I_2K}_{2,k_1}R^{2,k_2}_{I_1K}b_{k_2}\partial^b_{k_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +\hat{K}_{I_1I_2}C^{I_2}_{1,l_1}R^{1,l_2}_{I_1}f_{l_2}\partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{2,k_1}C^{I_4K}_{2,k_2}R^{2,k_3}_{I_1K}b_{k_3}\partial^b_{k_1}\partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +3\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{2,k}C^{I_4}_{1,l_1}R^{1,l_2}_{I_1}f_{l_2}\partial^b_k\partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -4\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2K_1}_{2,k_1}C^{I_3K_2}_{2,k_2}C^{I_4K_3}_{2,k_3}R^{2,k_4}_{I_1K_1}R^{2,k_5}_{K_2K_3}b_{k_4}b_{k_5}\partial^b_{k_1}\partial^b_{k_2}\partial^b_{k_3} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2K_1}_{2,k_1}C^{I_3K_2}_{2,k_2}C^{I_4}_{1,l_1}R^{1,l_2}_{I_1}R^{2,k_3}_{K_1K_2}f_{l_2}b_{k_3}\partial^b_{k_1}\partial^b_{k_2}\partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2K_1}_{2,k_1}C^{I_3}_{1,l_1}C^{I_4}_{1,l_2}R^{2,k_2}_{I_1K_1}b_{k_2}\partial^b_{k_1}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2}_{1,l_1}C^{I_3}_{1,l_2}C^{I_4}_{1,l_3}R^{1,l_4}_{I_1}f_{l_4}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2}\partial^f_{l_3} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}F^t_{I_4K}C^{I_2I_3}_{2,k}R^{2,k_2}_{I_1K}b_{k_2}\partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +12\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}F^t_{I_4K}C^{I_2K_1}_{2,k_1}C^{I_3K_2}_{2,k_2}R^{2,k_3}_{I_1K}R^{2,k_4}_{K_1K_2}b_{k_3}b_{k_4}\partial^b_{k_1}\partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +12\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}F^t_{I_4K}C^{I_2K_1}_{2,k}C^{I_3}_{1,l}R^{1,l_2}_{I_1}R^{2,k_2}_{KK_1}f_{l_2}b_{k_2}\partial^f_l\partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}F^t_{I_4K}C^{I_1}_{1,l_1}C^{I_2}_{1,l_2}R^{2,k_1}_{I_1K}b_{k_1}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +4\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}(3F^t_{I_4K_1}F^t_{I_3K_2}+\frac{1}{4}A_{I_4K_1}A_{I_3K_2})C^{I_2K}_{2,k_1}R^{2,k_2}_{I_1K_1}R^{2,k_3}_{K_2K}b_{k_2}b_{k_3}\partial^b_{k_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +2\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}(3F^t_{I_4K_1}F^t_{I_3K_2}+\frac{1}{4}A_{I_4K_1}A_{I_3K_2})C^{I_2}_{1,l_1}R^{1,l_2}_{I_1}R^{2,k}_{K_1K_2}f_{l_2}b_k\partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -4\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}(3F^t_{I_4K_1}F^t_{I_3K_2}+\frac{1}{4}A_{I_4K_1}A_{I_3K_2})F^t_{I_2K_3}R^{2,k_1}_{I_1K_1}R^{2,k_2}_{K_2K_3}b_{k_1}b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle. \qquad (4.51)
\end{aligned}
}
$$

Kapitel 5

Physikalische Größen und Wahrscheinlichkeitsinterpretation

In diesem Kapitel wird auf die physikalische Interpretation des in den vorherigen Kapiteln vorgestellten Formalismus eingegangen. Vor allem wird die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der phänomenologischen d.h. beobachtbaren Felder in den Vordergrund gestellt.
Vorneweg sei betont, daß die Hilfsfelder ψ_i reine mathematische Hilfsgrößen darstellen und keiner physikalischen Interpretation zugänglich sind.

Definition 5.1
Die physikalischen Zustände werden durch Summation über die Hilfsfeldindizes definiert [7]:

$$\hat{\varphi}_t^{(n)}(L_1 \dots L_n \mid p) \quad = \quad \sum_{i_1 \dots i_n} \varphi_t^{(n)}(I_1 \dots I_n \mid p)\,, \tag{5.1}$$

mit $L := (x, \alpha, A, \kappa)$.

Diese Zustände genügen der Wahrscheinlichkeitsinterpretation! Bevor dies gezeigt wird, wird die Frage beantwortet, warum die Formulierung mittels Hilfsfelder zwingend ist.
Soll eine dynamische Gleichung für die regularisierten Zustände $\hat{\varphi}$ abgeleitet werden, dann muß die Algebraische Schrödinger Darstellung in den Konfigurationsraum projiziert werden. Dies ergibt [7]:

$$\begin{aligned}
&\triangle E \varphi_n(I_1 \dots I_n) \qquad\qquad (5.2)\\
&= \sum_{l=1}^{n} \hat{K}_{I_l J} \varphi_n(I_1 \dots I_{l-1} J I_{l+1} \dots I_n)\\
&\quad + \frac{1}{n!} \sum_{l=1}^{n} \sum_{\lambda_1 \dots \lambda_n} (-1)^P \, \hat{W}_{I_{\lambda_l} J_2 J_3 J_4} \, \varphi_{n+2}(J_3 J_4 I_{\lambda_1} \dots I_{\lambda_{l-1}} J_2 I_{\lambda_{l+1}} \dots I_{\lambda_n})\\
&\quad + \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_1 \dots \lambda_n} (-1)^P \, \hat{W}_{I_{\lambda_1} J_2 J_3 J_4} \Big\{ \sum_{l=2}^{n} (-1)^l F_{J_4 I_{\lambda_{l-1}}} \, \varphi_n(J_2 J_3 I_{\lambda_2} \dots I_{\lambda_{l-2}} I_{\lambda_l} \dots I_{\lambda_n})\\
&\quad + N_{J_4 J_3 I_{\lambda_2} I_{\lambda_3}} (n-2)(n-1)n \, \varphi_{n-2}(J_2 I_{\lambda_4} \dots I_{\lambda_n})\\
&\quad + N_{J_4 J_3 J_2 I_{\lambda_2} I_{\lambda_3} I_{\lambda_4}} (n-3)(n-2)(n-1)n \, \varphi_{n-4}(I_{\lambda_5} \dots I_{\lambda_n}) \Big\}
\end{aligned}$$

mit

$$N_{J_3 J_4 I_2 I_3} := 3 F_{J_4 I_2} F_{J_3 I_3} + \frac{1}{4} A_{J_4 I_2} A_{J_3 I_3} \tag{5.3}$$

und

$$N_{J_4 J_3 J_2 I_2 I_3 I_4} := N_{J_3 J_4 I_2 I_3} F_{J_2 I_4}. \tag{5.4}$$

Im nächsten Schritt wird über die Hilfsfeldindizes summiert:

$$\begin{aligned}\triangle E\hat{\varphi}_n \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_n \\ z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} &= \sum_{l=1}^{n} iD^0_{z_l z'} D^k_{z' z} \partial_k(\mathbf{r}_l) \hat{\varphi}_n \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_l \ldots \mathbf{r}_n \\ z_1 \ldots z \ldots z_n \end{pmatrix} \\ &\quad - \sum_{l=1}^{n} \sum_{i_1 \ldots i_n} iD^0_{z_l z} m_{i_l} \varphi_n \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_l \ldots \mathbf{r}_n \\ z_1 \ldots z \ldots z_n \\ i_1 \ldots i_l \ldots i_n \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5.5}$$

Der Wechselwirkungsterm verschwindet durch die Summation! Damit ist Gleichung (5.5) als Nebenbedingung zu interpretieren, die eine Verbindung zwischen den Matrixelementen der regularisierten Feldoperatoren und den Matrixelementen der Hilfsfeldoperatoren aufzeigt.
Aus (5.2) läßt sich, unter der Annahme, daß die Hilfsfelder in einem Krein-Raum existieren, folgern, daß das Spektrum der Eigenlösungen reell ist.
Wie sich durch explizite Rechnungen zeigen läßt, ist das Spektrum, d.h. die Eigenenergieen $\triangle E_k := \epsilon_k$, unabhängig von den Hilfsfeldindizes [3], [13], [22] und [23], und damit ist ϵ_k auch Eigenwert des regularisierten Feldes.
Unter diesen Voraussetzungen läßt sich nun zeigen, daß die Zustände der regularisierten Felder orthogonal sind im Sinne des Inneren Produktes eines Hilbert-Raums.
Die Orthogonalität läßt sich auf die zeitabhängigen Eigenzustände

$$\begin{aligned}&\hat{\varphi}_n \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_n, t \\ z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} \\ &:= e^{-i\epsilon_k t} \hat{\varphi}_n \left(\begin{matrix} \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_n \\ z_1 \ldots z_n \end{matrix} \middle| k \right) = \sum_{i_1 \ldots i_n} \varphi_n \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_n, t \\ z_1 \ldots z_n \\ i_1 \ldots i_n \end{pmatrix} := \sum_{i_1 \ldots i_n} e^{-i\epsilon_k t} \varphi_n \left(\begin{matrix} \mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_n \\ z_1 \ldots z_n \\ i_1 \ldots i_n \end{matrix} \middle| k \right)\end{aligned} \tag{5.6}$$

übertragen, und damit läßt sich eine Norm $< \hat{\varphi} \mid \hat{\varphi} >$ definieren.
Wird der Zustand

$$\phi_n(i_1 \ldots i_n, t) = \sum_k c_k e^{-i\epsilon_k t} \varphi_n(i_1 \ldots i_n | k) \tag{5.7}$$

definiert, läßt sich mit $m_i = m + \delta m_i$ unter der Bedingung

$$\lim \delta m_i = 0 \tag{5.8}$$

folgende Gleichung ableiten [7]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\hat{\phi}_n(t)^+ \hat{\phi}_n(t) \right] + \sum_{l=1}^{n} \partial_h(\mathbf{r}_l) \left[\hat{\phi}_n(t)^+ \alpha^h(l) \hat{\phi}_n(t) \right] = 0. \tag{5.9}$$

$\alpha^h(l)$ steht für die Spintensoren.
Aus dieser Gleichung läßt sich nun folgern, daß $\hat{\phi}_n(t)^+ \hat{\phi}_n(t)$ als positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden muß, die die Wahrscheinlichkeitserhaltung erfüllt, sofern die Amplituden $\hat{\phi}$ zugehörige Randbedingungen im Unendlichen erfüllen.
Die definierten Normen und Skalarprodukte für die physikalischen Zustände sind jedoch nur dann sinnvoll, wenn gezeigt werden kann, daß diese Größen endliche Werte annehmen. In einer Theorie, in der Bindungszustände auftreten, ist daher vordringlich die Frage zu beantworten, ob diese Bindungszustände endliche Normen und Skalarprodukte besitzen. Dies ist in der Tat der Fall, wie die konkreten Rechnungen für Zwei- und Dreiteilchenbindungszustände zeigen [24], [25]. Dabei ergibt sich, daß die Definition der physikalischen Zustände (5.1) zugleich eine Definition der Regularisierung ist. Man sieht dies deutlich, wenn die Zustandsdarstellung am Zeitschnitt für eine Dynamik von Bindungszuständen definiert wird.

Um eine Theorie zusammengesetzter Teilchen und deren Wechselwirkung aus der zugrundeliegenden Spinortheorie abzuleiten, muß die Spinortheorie in eine Theorie zusammengesetzter Teilchen abgebildet werden. Um eine Theorie von Zweiteilchenbindungszuständen zu formulieren, wird $\varphi^{(2n)}$ aufgespalten in (4.3):

$$\varphi^{(2n)}(I_1 \ldots I_{2n}|a) = \sum_{k_1 \ldots k_n} C_{k_1}^{[I_1 I_2} \ldots C_{k_n}^{I_{2n-1} I_{2n}]} \rho^{(n)}(k_1 \ldots k_n|a). \tag{5.10}$$

Aufgrund des Formalismus (siehe Kapitel 3) sind diese Zustände am Zeitschnitt definiert. Deshalb bilden die Funktionen $\left\{C_k^{II'}\right\}$ eine vollständige Basis der Zweiteilchenzustände. Die Vollständigkeit garantiert eine getreue Abbildung.
Die Beschreibung einer nichttrivialen Wechselwirkung ist nur am Zeitschnitt möglich, weil sie erlaubt, daß die $C_k^{II'}$-Funktionen nicht auf die Massenschale fixiert werden müssen. Die Entwicklung (5.10) ist im kovarianten Formalismus nicht möglich, weil die Fixierung der Zweiteilchenfunktionen auf die Massenschale Wechselwirkungen verhindert (vgl. Kapitel 3).
Die $C_k^{II'}$-Funktionen sind die Lösungen der zugehörigen Hard-Core Gleichung. Sie sind singulär. Werden die erhaltenen Hard-Core Zustände über die Hilfsfeldindizes summiert, so ergeben sich reguläre physikalische Zustände.
Die Eigenwerte hängen nicht von den Hilfsfeldern ab, weil die Säkulargleichung in physikalischen Größen formuliert werden kann. Dies bedeutet, da die $\rho^{(n)}(k_1 \ldots k_n|a)$-Funktionen unabhängig von dem Hilfsfeldindex i sind und da $\hat{\varphi}^{(2n)}(I_1 \ldots I_{2n}|a)$ regulär ist, daß die $\rho^{(n)}(k_1 \ldots k_n|a)$-Funktionen ebenfalls regulär sein müssen.
Die Abbildung enthält jedoch singuläre Elemente in Form der $C_{k_1}^{I_1 I_2}$-Funktionen. Diese Singularitäten werden jedoch durch Einführen der Duale $R_{k_1}^{I_1 I_2}$ kompensiert. Insofern enthält der Energieoperator (4.28) für die Bosonen bzw. (4.51) keine Singularitäten mehr.
Für die $\rho^{(1)}(k|a)$-Funktionen zeigt sich, daß die Größe $< \rho \mid \rho >$ positiv definit ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} < \hat{\varphi}^{(2)}(I_1 I_2|a) \mid \hat{\varphi}^{(2)}(I_1 I_2|a) > &= \sum_{k_1 k_2} \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \sum_{Z_1 Z_2} \left(C_{k_1}^{I_1 I_2}\right)^\dagger C_{k_2}^{I_1 I_2} \left(\rho^{(1)}(k_1|a)\right)^\dagger \rho^{(1)}(k_2|a) \\ &= \sum_{k_1 k_2} D\,(k_1, k_2) \left(\rho^{(1)}(k_1|a)\right)^\dagger \rho^{(1)}(k_2|a) \\ &= \sum_{k_1 k_2} \delta(k_1 - k_2) \left(\rho^{(1)}(k_1|a)\right)^\dagger \rho^{(1)}(k_2|a) \\ &= \sum_{k_1} \left(\rho^{(1)}(k_1|a)\right)^\dagger \rho^{(1)}(k_1|a) \\ &= < \rho^{(1)}(k_1|a) \mid \rho^{(1)}(k_1|a) > . \end{aligned} \tag{5.11}$$

Für die $\rho^{(2)}(k_1, k_2|a)$-Funktion muß diese Aussage verallgemeinert werden:

$$\begin{aligned} &< \hat{\varphi}^{(2)}(I_1 I_2 I_3 I_4|a) \mid \hat{\varphi}^{(2)}(I_1 I_2 I_3 I_4|a) > \\ &= \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \sum_{Z_1 Z_2 Z_3 Z_4} \left(C_{k_1}^{I_1 I_2} C_{k_2}^{I_3 I_4}\right)^\dagger C_{k_3}^{I_1 I_2} C_{k_4}^{I_3 I_4} \left(\rho^{(2)}(k_1, k_2|a)\right)^\dagger \rho^{(2)}(k_3, k_4|a) \\ &= \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} D\,(k_1, k_2, k_3, k_4) \left(\rho^{(2)}(k_1, k_2|a)\right)^\dagger \rho^{(2)}(k_3, k_4|a). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Die Größe $D\,(k_1, k_2, k_3, k_4)$ bildet den metrischen Tensor. Das Entscheidende ist, daß $< \hat{\varphi}^{(2)} \mid \hat{\varphi}^{(2)} >$ positiv definit ist, und damit muß die $\rho^{(2)}(k_1, k_2|a)$-Funktion und im allgemeinen Fall die $\rho^{(n)}(k_1 \ldots k_n|a)$-Funktion physikalisch interpretierbar sein.
Die Verbindung zur phänomenologischen Theorie wird durch die Interpretation der bosonischen Koeffizientenfunktionen $\rho^{(n)}(k_1 \ldots k_n|a)$ als symmetrische Erwartungswerte der effektiven bosonischen Feldoperatoren

hergestellt. In Kapitel 6.3, in dem die phänomenologischen Größen bestimmt werden, wird hierauf näher eingegangen.
Wie die Abbildungsrechnung zeigt, sind bei der Abbildung aber nicht die physikalischen Funktionen Gegenstand der Abbildung, sondern die singulären Funktionen mit Hilfsfeldern. Deren Singularitäten werden durch die Dualfunktionen $R_{k_1}^{I_1 I_2}$ kompensiert, die als Testfunktionen für die singulären Hilfsfeldfunktionen wirken. Man muß dann unterscheiden, ob die Auswertung der Theorie sich auf die phänomenologischen Gleichungen beschränkt oder ob mittels der physikalischen Funktionen Struktureigenschaften der sogenannten Elementarteilchen untersucht werden soll. In dieser Arbeit wird die Ableitung der phänomenologischen Gleichungen in den Vordergrund gestellt und auf Strukturuntersuchungen verzichtet.

Bemerkung:
Nach (5.8) läßt sich eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation ableiten, sofern die Hilfsfeldmassen $m_i = m + \delta m_i$ mit $\delta m_i \to 0$ gleich sind.
In den praktischen Rechnungen wird die Summation über die Hilfsfelder ausgeführt, wobei anschließend dieser Grenzübergang zu gleichen Massen vollzogen wird. Im Anhang F werden die technischen Details erläutert.

Kapitel 6

Die Wellenfunktionen

Für die Auswertung des effektiven funktionalen Energieoperators (4.51) wird eine Basis aus Einteilchen- und Zweiteilchenzuständen (C-Funktionen) und die entsprechenden Dualzustände (R-Funktionen) benötigt. In diesem Kapitel wird dieses Funktionensystem berechnet. Für die Einteilchenzustände wird der durch die Polarisationswolke veränderte Hard-Core Anteil berechnet. Die Zweiteilchenzustände werden als Lösungen der entsprechenden Hard-Core Gleichung berechnet.

6.1 Die Quark-Wellenfunktion

6.1.1 Die Gleichung für das Quark mit Polarisationswolke

Für $\mid \mathcal{F}(j,p)\rangle$ wird folgender Ansatz gewählt:

$$\mid \mathcal{F}(j,p)\rangle \quad = \quad i\varphi^{(1)}(I_1 \mid f) j_{I_1} \mid 0\rangle_F - \frac{i}{3!}\varphi^{(3)}(I_1 I_2 I_3 \mid f) j_{I_1} j_{I_2} j_{I_3} \mid 0\rangle_F . \tag{6.1}$$

In dieser Entwicklung ist nur das erste Glied des Polarisationsanteils berücksichtigt.
Um in jedem Bezugssystem den einzeitigen Zustand darstellen zu können, wird die kovariante Gleichung gelöst. Nach [13] lautet das kovariante Gleichungssystem:

$$(D^\mu_{S_1S_2}\partial_\mu - m_{S_1S_2})\varphi^{(1)}_{S_2} \quad = \quad W_{S_1S_2S_3S_4}\varphi^{(3)}_{S_2S_3S_4} \tag{6.2}$$

$$(D^\mu_{S_1S_2}\partial_\mu - m_{S_1S_2})\varphi^{(3)}_{K_1K_2S_2} \quad = \quad 3W_{S_1S_2S_3S_4}\left(F_{S_4K_1}F_{S_3K_2} - F_{S_4K_2}F_{S_3K_1}\right)\varphi^{(1)}_{S_2} . \tag{6.3}$$

6.1.2 Die Eigenwertgleichung

Ausgehend vom Gleichungssystem (6.2), (6.3) wird in diesem Kapitel die Eigenwertgleichung für den durch die Polarisationswolke veränderten Hard-Core Anteil abgeleitet. Dieses Gleichungssystem wird gelöst, indem Gleichung (6.3) nach $\varphi^{(3)}_{K_1K_2S_2}$ aufgelöst wird und in Gleichung (6.2) eingesetzt wird. Zunächst wird Gleichung (6.2) umgeformt. Dies geschieht mit Hilfe der Greenschen Funktion $G_{SS'}$, die durch

$$G_{SS_1}K_{S_1K} \quad = \quad \delta_{SK} \tag{6.4}$$

definiert ist. Sie lautet:

$$G_{S_1S_2} \quad = \quad \frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\delta_{i_1i_2}\delta_{A_1A_2}\delta_{\kappa_1\kappa_2}\int dp\, \frac{(\not p + m_{i_1})_{\alpha_1\alpha_2}}{p^2 - m^2_{i_1}} e^{-\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2)} . \tag{6.5}$$

Damit ergibt sich:

$$\varphi^{(1)}_S \quad = \quad G_{SS_1}W_{S_1S_2S_3S_4}\varphi^{(3)}_{S_2S_3S_4} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}
\varphi^{(1)}_Z(x) &= \int G_{ZZ_1}(x-x_1)\ \delta(x_1-x_2)\delta(x_1-x_3)\delta(x_1-x_4) \\
&\quad U_{Z_1Z_2Z_3Z_4}\ \varphi^{(3)}_{Z_2Z_3Z_4}(x_2x_3x_4)\ dx_1dx_2dx_3dx_4 \qquad (6.7)\\
\varphi^{(1)}_Z(x) &= \int G_{ZZ_1}(x-x_1)\ U_{Z_1Z_2Z_3Z_4}\ \varphi^{(3)}_{Z_2Z_3Z_4}(x_1x_1x_1)\ dx_1. \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

Die lokale Wellenfunktion $\varphi^{(3)}_{Z_2Z_3Z_4}(x,x,x)$ wird aus (6.3) abgeleitet.

$$\begin{aligned}
\varphi^{(3)}_{K_1K_2K_3} &= 3G_{K_3S_1}W_{S_1S_2S_3S_4}\left(F_{S_4K_1}F_{S_3K_2}-F_{S_4K_2}F_{S_3K_1}\right)\varphi^{(1)}_{S_2} \qquad (6.9)\\
\varphi^{(3)}_{V_1V_2V_3}(y_1y_2y_3) &= 3\int G_{V_3Z_1}(y_3-x_1)\delta(x_1-x_2)\delta(x_1-x_3)\delta(x_1-x_4)U_{Z_1Z_2Z_3Z_4} \qquad (6.10)\\
&\quad \left(F(x_4-y_1)_{Z_4V_1}F(x_3-y_2)_{Z_3V_2}-F(x_4-y_2)_{Z_4V_2}F(x_3-y_1)_{Z_3V_1}\right)\\
&\quad \varphi^{(1)}_{Z_2}(x_2)\ dx_1dx_2dx_3dx_4\\
\varphi^{(3)}_{V_1V_2V_3}(y_1y_2y_3) &= 3\int G(y_3-x_1)_{V_3Z_1}U_{Z_1Z_2Z_3Z_4}\Big[F(x_1-y_1)_{Z_4V_1}F(x_1-y_2)_{Z_3V_2} \qquad (6.11)\\
&\quad -F_{Z_4V_2}(x_1-y_2)F_{Z_3V_1}(x_1-y_1)\Big]\ \varphi^{(1)}_{Z_2}(x_1)\ dx_1
\end{aligned}$$

mit $x=y_1=y_2=y_3$ und $y=x_1$ sowie Umbenennung der Indizes, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(3)}_{Z_2Z_3Z_4}(x,x,x) &= 3\int G(x-y)_{Z_4V_1}U_{V_1V_2V_3V_4}\Big[F(y-x)_{V_4Z_2}F(y-x)_{V_3Z_3}\\
&\quad -F(y-x)_{V_4Z_3}F(y-x)_{V_3Z_2}\Big]\ \varphi^{(1)}_{V_2}(y)\ dy. \qquad (6.12)
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis wird in (6.8) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\varphi^{(1)}_Z(x) &= 3\int dydx_1\ G_{ZZ_1}(x-x_1)U_{Z_1Z_2Z_3Z_4}G_{Z_4V_1}(x_1-y)U_{V_1V_2V_3V_4} \qquad (6.13)\\
&\Big(F(y-x_1)_{V_4Z_2}F(y-x_1)_{V_3Z_3}-F(y-x_1)_{V_4Z_3}F(y-x_1)_{V_3Z_2}\Big)\varphi^{(1)}_{V_2}(y).
\end{aligned}$$

Der Übergang zu fouriertransformierten Größen, die durch

$$\begin{aligned}
G_{Z_1Z_2}(x_1-x_2) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4}\tilde{G}(p)_{Z_1Z_2}e^{-\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2)}, \qquad (6.14)\\
F_{Z_1Z_2}(x_1-x_2) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4}\tilde{F}(p)_{Z_1Z_2}e^{-\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2)}, \qquad (6.15)\\
\tilde{G}_{Z_1Z_2}(p) &= \frac{\not{p}+m_{i_1}c}{p^2-m_{i_1}^2c^2}\delta_{\kappa_1\kappa_2}\delta_{i_1i_2}\delta_{A_1A_2}, \qquad (6.16)\\
\tilde{F}_{Z_1Z_2}(p) &= -i\hbar\frac{(\not{p}+m_{i_1}c)_{\alpha_1\alpha}}{p^2-m_{i_1}^2c^2}C_{\alpha\alpha_2}L^0_{\kappa_1\kappa_2}\delta_{i_1i_2}\delta_{A_1A_2}, \qquad (6.17)\\
\text{und}\qquad \varphi^{(1)}_Z(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4}\tilde{\varphi}^{(1)}(p)_Ze^{-\frac{i}{\hbar}px} \qquad (6.18)
\end{aligned}$$

definiert sind, ergibt:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(1)}_Z(x) &= \frac{3}{(2\pi\hbar)^{20}}\int \tilde{G}_{ZZ_1}(p_1)U_{Z_1Z_2Z_3Z_4}\tilde{G}_{Z_4V_1}(p_2)U_{V_1V_2V_3V_4} \qquad (6.19)\\
&\quad \Big(\tilde{F}_{V_4Z_2}(q_1)\tilde{F}_{V_3Z_3}(q_2)-\tilde{F}_{V_4Z_3}(q_1)F_{V_3Z_2}(q_2)\Big)\ \tilde{\varphi}^{(1)}_{V_2}(q_3)\\
&\quad e^{-\frac{i}{\hbar}p_1(x-x_1)}e^{-\frac{i}{\hbar}p_2(x_1-y)}e^{-\frac{i}{\hbar}q_1(y-x_1)}e^{-\frac{i}{\hbar}q_2(y-x_1)}e^{-\frac{i}{\hbar}q_3y}\\
&\quad dydx_1dp_1dp_2dq_1dq_2dq_3.
\end{aligned}$$

Die entstandene Gleichung wird durch

$$\varphi_Z^{(1)}(x) \quad \to \quad \int d^4x \varphi_Z^{(1)}(x) e^{\frac{i}{\hbar}kx} = u_Z(k) = \tilde{\varphi}_Z^{(1)}(k) \tag{6.20}$$

fouriertransformiert und ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_Z^{(1)}(k) \quad = \quad & \frac{3}{(2\pi\hbar)^{20}} \int \tilde{G}(p_1)_{ZZ_1} U_{Z_1Z_2Z_3Z_4} \tilde{G}(p_2)_{Z_4V_1} U_{V_1V_2V_3V_4} \\ & \left(\tilde{F}(q_1)_{V_4Z_2} \tilde{F}(q_2)_{V_3Z_3} - \tilde{F}(q_1)_{V_4Z_3} F(q_2)_{V_3Z_2}\right) \tilde{\varphi}_{V_2}^{(1)}(q_3) \\ & e^{-\frac{i}{\hbar}p_1(x-x_1)} e^{-\frac{i}{\hbar}p_2(x_1-y)} e^{-\frac{i}{\hbar}q_1(y-x_1)} e^{-\frac{i}{\hbar}q_2(y-x_1)} e^{-\frac{i}{\hbar}q_3 y} e^{\frac{i}{\hbar}kx} \\ & dy dx_1 dp_1 dp_2 dq_1 dq_2 dq_3 dx. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Die Exponenten der Exponentialfunktionen werden nach gleichen Orten sortiert,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_Z^{(1)}(k) \quad = \quad & \frac{3}{(2\pi\hbar)^{20}} \int \tilde{G}(p_1)_{ZZ_1} U_{Z_1Z_2Z_3Z_4} \tilde{G}(p_2)_{Z_4V_1} U_{V_1V_2V_3V_4} \\ & \left(\tilde{F}(q_1)_{V_4Z_2} \tilde{F}(q_2)_{V_3Z_3} - \tilde{F}(q_1)_{V_4Z_3} F(q_2)_{V_3Z_2}\right) \tilde{\varphi}_{V_2}^{(1)}(q_3) \\ & e^{-\frac{i}{\hbar}x(p_1-k)} e^{-\frac{i}{\hbar}x_1(p_2-p_1-q_1-q_2)} e^{-\frac{i}{\hbar}y(q_3-p_2+q_1+q_2)} du_1 dx_1 dp_1 dp_2 dq_1 dq_2 dq_3 dx\ , \end{aligned} \tag{6.22}$$

und die entstandene Gleichung wird über die Ortskoordinaten x, x_1 und y integriert und danach über die Impulse p_1, p_2 und q_3 integriert:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_Z^{(1)}(k) \quad = \quad & \frac{3}{(2\pi\hbar)^{8}} \int \tilde{G}(p_1)_{ZZ_1} U_{Z_1Z_2Z_3Z_4} \tilde{G}(p_2)_{Z_4V_1} U_{V_1V_2V_3V_4} \\ & \left(\tilde{F}(q_1)_{V_4Z_2} \tilde{F}(q_2)_{V_3Z_3} - \tilde{F}(q_1)_{V_4Z_3} F(q_2)_{V_3Z_2}\right) \tilde{\varphi}_{V_2}^{(1)}(q_3) \\ & \delta(p_1-k)\delta(-p_1+p_2-q_1-q_2)\delta(-p_2+q_1+q_2+q_3) dp_1 dp_2 dq_1 dq_2 dq_3 \\ = \quad & \frac{3}{(2\pi\hbar)^{8}} \int \tilde{G}(k)_{ZZ_1} U_{Z_1Z_2Z_3Z_4} \tilde{G}(p_2)_{Z_4V_1} U_{V_1V_2V_3V_4} \\ & \left(\tilde{F}(q_1)_{V_4Z_2} \tilde{F}(q_2)_{V_3Z_3} - \tilde{F}(q_1)_{V_4Z_3} F(q_2)_{V_3Z_2}\right) \tilde{\varphi}_{V_2}^{(1)}(q_3) \\ & \delta(-k+p_2-q_1-q_2)\delta(-p_2+q_1+q_2+q_3) dp_2 dq_1 dq_2 dq_3 \\ = \quad & \frac{3}{(2\pi\hbar)^{8}} \int \tilde{G}(k)_{ZZ_1} U_{Z_1Z_2Z_3Z_4} \tilde{G}(q_1+q_2+q_3)_{Z_4V_1} U_{V_1V_2V_3V_4} \\ & \left(\tilde{F}(q_1)_{V_4Z_2} \tilde{F}(q_2)_{V_3Z_3} - \tilde{F}_{V_4Z_3}(q_1) F_{V_3Z_2}(q_2)\right) \tilde{\varphi}_{V_2}^{(1)}(q_3) \\ & \delta(-k+q_3) dq_1 dq_2 dq_3 \\ = \quad & \frac{3}{(2\pi\hbar)^{8}} \int \tilde{G}(k)_{ZZ_1} U_{Z_1Z_2Z_3Z_4} \tilde{G}(q_1+q_2+k)_{Z_4V_1} U_{V_1V_2V_3V_4} \\ & \left(\tilde{F}(q_1)_{V_4Z_2} \tilde{F}(q_2)_{V_3Z_3} - \tilde{F}(q_1)_{V_4Z_3} F(q_2)_{V_3Z_2}\right) \tilde{\varphi}_{V_2}^{(1)}(k)\ dq_1 dq_2 \end{aligned} \tag{6.23}$$

und damit

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_Z^{(1)}(k) \quad = \quad & \frac{3}{(2\pi\hbar)^{8}} \int \tilde{G}_{ZZ_1}(k) U_{Z_1Z_2Z_3Z_4} \tilde{G}_{Z_4V_1}(k+q_1+q_2) U_{V_1V_2V_3V_4} \\ & \left(\tilde{F}_{V_4Z_2}(q_1) \tilde{F}_{V_3Z_3}(q_2) - \tilde{F}_{V_4Z_3}(q_1) \tilde{F}_{V_3Z_2}(q_2)\right) \tilde{\varphi}_{V_2}^{(1)}(k)\ dq_1 dq_2. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Diese Gleichung läßt sich vereinfachen :
Der Term $\left(\tilde{F}_{V_4Z_2}(q_1)\tilde{F}_{V_3Z_3}(q_2) - \tilde{F}_{V_4Z_3}(q_1)\tilde{F}_{V_3Z_2}(q_2)\right)$ ist antisymmetrisch in den Indizes Z_2 und Z_3.

$U_{Z_1Z_2Z_3Z_4}$ ist ebenfalls antisymmetrisch in Z_2 und Z_3. Somit können die beiden Propagatorterme zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned} & U_{Z_1\{Z_2Z_3Z_4\}_{asy}}\left(\tilde{F}(q_1)_{V_4Z_2}\tilde{F}(q_2)_{V_3Z_3} - \tilde{F}(q_1)_{V_4Z_3}F(q_2)_{V_3Z_2}\right) \\ = \; & U_{Z_1\{Z_2Z_3Z_4\}_{asy}}\tilde{F}(q_1)_{V_4Z_2}\tilde{F}(q_2)_{V_3Z_3} - U_{Z_1\{Z_2Z_3Z_4\}_{asy}}\tilde{F}(q_1)_{V_4Z_3}F(q_2)_{V_3Z_2} \\ = \; & U_{Z_1\{Z_2Z_3Z_4\}_{asy}}\tilde{F}(q_1)_{V_4Z_2}\tilde{F}(q_2)_{V_3Z_3} + U_{Z_1\{Z_3Z_2Z_4\}_{asy}}\tilde{F}(q_1)_{V_4Z_3}F(q_2)_{V_3Z_2} \\ = \; & 2U_{Z_1\{Z_2Z_3Z_4\}_{asy}}\tilde{F}(q_1)_{V_4Z_2}\tilde{F}(q_2)_{V_3Z_3}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Damit lautet die auszuwertende Gleichung:

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}_Z^{(1)}(k) \\ = \; & \frac{6}{(2\pi\hbar)^8}\int \tilde{G}(k)_{ZZ_1}U_{Z_1Z_2Z_3Z_4}\tilde{G}(k+q_1+q_2)_{Z_4V_1}U_{V_1V_2V_3V_4}\tilde{F}(q_1)_{V_4Z_2}\tilde{F}(q_2)_{V_3Z_3}\tilde{\varphi}_{V_2}^{(1)}(k)dq_1dq_2. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist die Summation über den Hilfsfeldindex j_2 des Index $V_2 = (\beta_2, k_2, B_2, j_2)$ intern auszuführen. Dies führt auf die folgende Gleichung mit der Bezeichnung $\hat{u}$ für den fouriertransformierten und über den Hilfsfeldindex summierten Spinor:

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}_Z^{(1)}(k) \\ = \; & \frac{6}{(2\pi\hbar)^8}\int \tilde{G}(k)_{ZZ_1}U_{Z_1Z_2Z_3Z_4}\tilde{G}(k+q_1+q_2)_{Z_4V_1}U_{V_1V_2V_3V_4}\tilde{F}(q_1)_{V_4Z_2}\tilde{F}(q_2)_{V_3Z_3}\hat{u}_{\beta_2,k_2,B_2}(k)dq_1dq_2. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Damit hängt die Hilfsfeldwellenfunktion $\tilde{\varphi}_Z^{(1)}$ mit Hilfsfeldindex i direkt von der physikalischen Quarkwellenfunktion $\hat{u}$ ab. Deshalb wird zuerst die Quarkwellenfunktion über die Eigenwertgleichung berechnet. Summation über den Hilfsfeldindex i des Index $Z = (\alpha, \kappa, A, i)$ ergibt die gesuchte Eigenwertgleichung. Sie lautet:

$$\begin{aligned} & \hat{u}_{\alpha,\kappa,A}(k) \\ = & \frac{6}{(2\pi\hbar)^8}\iint dq_1dq_2\sum_i \lambda_i\tilde{G}_{ZZ_1}(k)\,\hat{U}_{Z_1Z_2Z_3Z_4}\tilde{G}(k+q_1+q_2)_{Z_4V_1}U_{V_1V_2V_3V_4}\tilde{F}(q_1)_{V_4Z_2}\tilde{F}(q_2)_{V_3Z_3}\hat{u}_{\beta_2,k_2,B_2}(k). \end{aligned} \tag{6.28}$$

6.1.3 Algebra

Werden die Größen (6.5), (2.40) und (3.43) in (6.28) eingesetzt, ergibt sich nach algebraischer Auswertung der γ-Algebra:

$$\begin{aligned} & \hat{u}_{\alpha,\kappa,A}(k) \\ = \; & 48\frac{g^2\hbar^2}{(2\pi\hbar)^8}\sum_{ii_2i_3i_4}\lambda_i\tilde{G}_{\alpha\alpha_1}(k,m_i)\iint dq_1dq_2\frac{\lambda_{i_2}\lambda_{i_3}\lambda_{i_4}}{\left[(k+q_1+q_2)^2 - m_{i_4}^2c^2\right]\left[q_1^2 - m_{i_2}^2c^2\right]\left[q_2^2 - m_{i_3}^2c^2\right]} \\ & \Big\{ \left(m_{i_3}c\,q_1^2 + (m_{i_2}+m_{i_3}-m_{i_4})\,cq_1q_2 + m_{i_3}c\,q_1k + m_{i_2}c\,q_2^2 + m_{i_2}c\,q_2k + 108m_{i_2}m_{i_3}m_{i_4}c^3\right)\mathbb{1} \\ & - \left(36\,q_1q_2 - m_{i_2}m_{i_3}c^2\right)\not{k} \\ & - \left(36q_2^2 + 72\,q_1q_2 + 36q_2k + m_{i_3}m_{i_4}c^2 - m_{i_2}m_{i_3}c^2\right)\not{q}_1 \\ & - \left(36q_1^2 + 72\,q_1q_2 + 36q_1k + m_{i_2}m_{i_4}c^2 - m_{i_2}m_{i_3}c^2\right)\not{q}_2 \Big\}\hat{u}_{\beta,\kappa A}(k). \end{aligned} \tag{6.29}$$

6.1.4 Impulsintegrale

Die Integrale über die Impulse q_1 und q_2 sind divergent. An dieser Stelle zeigt sich nun die regularisierende Wirkung der Summation über die Hilfsfeldindizes, wodurch reguläre Ausdrücke entstehen. Im einzelnen werden die folgenden Schritte ausgeführt:

1. Parametrisierung des Nenners nach Feynman.
2. Regularisierung durch Summation über die Hilfsfelder.
3. Integration über die Impulse.

Feynmanparametrisierung

Es wird die Formel [26]

$$\frac{1}{abc} = 2\int_0^1 du \int_0^u dv \frac{1}{(a+(b-a)u+(c-b)v)^3} \tag{6.30}$$

benutzt, um den Nenner umzuschreiben. Dies führt auf den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\left[(k+q_1+q_2)^2-m_{i_4}^2c^2\right]\left[q_1^2-m_{i_2}^2c^2\right]\left[q_2^2-m_{i_3}^2c^2\right]}\\
&= 2\int_0^1 du\int_0^u dv\,\Big[(k+q_1+q_2)^2-m_{i_4}^2c^2+\left(q_1^2-m_{i_2}^2c^2-(k+q_1+q_2)^2+m_{i_4}^2c^2\right)u\\
&\qquad\qquad + \left(q_2^2-m_{i_3}^2c^2-q_1^2+m_{i_2}^2c^2\right)v\Big]^{-3}\\
&= 2\int_0^1 du\int_0^u dv\,\Big[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2\\
&\qquad\qquad -(u-v)m_{i_2}^2c^2-vm_{i_3}^2c^2-(1-u)m_{i_4}^2c^2\Big]^{-3}.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Regularisierung

Nach Einsetzen von (6.31) in (6.29) wird die Summation über die Hilfsfeldindizes ausgeführt. Das Ergebnis ist in Anhang E.4 angegeben. Es entstehen folgende zu berechnenden Integrale:

$$\begin{aligned}
&\iint dq_1\,dq_2\frac{q_1^2}{N^n},\ \iint dq_1\,dq_2\frac{q_2^2}{N^n},\ \iint dq_1\,dq_2\frac{q_1\,q_2}{N^n},\ \iint dq_1\,dq_2\frac{q_{1\mu}}{N^n},\ \iint dq_1\,dq_2\frac{q_{2\mu}}{N^n},\ \iint dq_1\,dq_2\frac{1}{N^n},\\
&\iint dq_1\,dq_2\frac{q_2^2\,q_{1\mu}}{N^n},\ \iint dq_1\,dq_2\frac{q_1q_2\,q_{1\mu}}{N^n},\ \iint dq_1\,dq_2\frac{q_{1\mu}\,q_{2\nu}}{N^n},\ \iint dq_1\,dq_2\frac{q_1^2\,q_{2\mu}}{N^n},\ \iint dq_1\,dq_2\frac{q_1q_2\,q_{2\mu}}{N^n}.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Dabei ist $6 \le n \le 9$, und N ist durch

$$N = \left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right] \tag{6.33}$$

gegeben.

Berechnung der Integrale

Um diese Integrale zu berechnen, werden zunächst entsprechende Integrale mit allgemeinerem Nenner

$$N = \left[\alpha q_1^2+2\beta q_1q_2+\gamma q_2^2+2\delta q_1k+2\epsilon q_2k+\lambda k^2-M\right] \tag{6.34}$$

berechnet, und nach den Rechnungen werden folgende Substitutionen durchgeführt:

$$\alpha = 1-v \tag{6.35}$$
$$\beta = 1-u \tag{6.36}$$
$$\gamma = 1-u+v \tag{6.37}$$
$$\delta = 1-u \tag{6.38}$$
$$\epsilon = 1-u \tag{6.39}$$
$$\lambda = 1-u \tag{6.40}$$
$$M = m^2c^2. \tag{6.41}$$

Die entsprechenden Integrale ergeben sich nun als Ableitungen dreier Integrale:

$$\iint dq_1\,dq_2 \frac{1}{N^n} = \frac{4!}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial M}\right)^{n-5} \iint dq_1 dq_2 \frac{1}{N^5} \tag{6.42}$$
$$\iint dq_1\,dq_2 \frac{q_1^2}{N^n} = -\frac{4!}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial M}\right)^{n-6} \frac{\partial}{\partial \alpha} \iint dq_1 dq_2 \frac{1}{N^5} \tag{6.43}$$
$$\iint dq_1\,dq_2 \frac{q_2^2}{N^n} = -\frac{4!}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial M}\right)^{n-6} \frac{\partial}{\partial \gamma} \iint dq_1 dq_2 \frac{1}{N^5} \tag{6.44}$$
$$\iint dq_1\,dq_2 \frac{q_1 q_2}{N^n} = -\frac{4!}{2(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial M}\right)^{n-6} \frac{\partial}{\partial \beta} \iint dq_1 dq_2 \frac{1}{N^5} \tag{6.45}$$
$$\iint dq_1\,dq_2 \frac{q_1 k}{N^n} = -\frac{4!}{2(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial M}\right)^{n-6} \frac{\partial}{\partial \delta} \iint dq_1 dq_2 \frac{1}{N^5} \tag{6.46}$$
$$\iint dq_1\,dq_2 \frac{q_2 k}{N^n} = -\frac{4!}{2(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial M}\right)^{n-6} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \iint dq_1 dq_2 \frac{1}{N^5} \tag{6.47}$$
$$\iint dq_1\,dq_2 \frac{q_{1\mu}}{N^n} = \frac{4!}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial M}\right)^{n-5} \iint dq_1 dq_2 \frac{q_{1\mu}}{N^5} \tag{6.48}$$
$$\iint dq_1\,dq_2 \frac{q_{2\mu}}{N^n} = \frac{4!}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial M}\right)^{n-5} \iint dq_1 dq_2 \frac{q_{2\mu}}{N^5} \tag{6.49}$$
$$\iint dq_1\,dq_2 \frac{q_1^2 q_{2\mu}}{N^n} = -\frac{4!}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial M}\right)^{n-6} \frac{\partial}{\partial \alpha} \iint dq_1 dq_2 \frac{q_{2\mu}}{N^5} \tag{6.50}$$
$$\iint dq_1\,dq_2 \frac{q_2^2 q_{1\mu}}{N^n} = -\frac{4!}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial M}\right)^{n-6} \frac{\partial}{\partial \gamma} \iint dq_1 dq_2 \frac{q_{1\mu}}{N^5} \tag{6.51}$$
$$\iint dq_1\,dq_2 \frac{q_1 k q_{2\mu}}{N^n} = -\frac{4!}{2(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial M}\right)^{n-6} \frac{\partial}{\partial \delta} \iint dq_1 dq_2 \frac{q_{2\mu}}{N^5} \tag{6.52}$$
$$\iint dq_1\,dq_2 \frac{q_2 k q_{1\mu}}{N^n} = -\frac{4!}{2(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial M}\right)^{n-6} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \iint dq_1 dq_2 \frac{q_{1\mu}}{N^5}. \tag{6.53}$$

Dies bedeutet, dass es ausreicht, die drei Integrale $\iint dq_1 dq_2 \frac{1}{N^5}$, $\iint dq_1 dq_2 \frac{q_{1\mu}}{N^5}$ und $\iint dq_1 dq_2 \frac{q_{2\mu}}{N^5}$ zu berechnen. Die Rechnungen stehen im Anhang E.4. Das Resultat lautet:

$$\iint dq_1 dq_2 \frac{1}{N^5} = -\frac{\pi^4}{4!}\frac{1}{\beta^2-\alpha\gamma}\frac{1}{(\alpha\epsilon^2+\beta^2\lambda+\gamma\delta^2-2\beta\delta\epsilon-\alpha\gamma\lambda)\,k^2-(\beta^2-\alpha\gamma)\,M} \tag{6.54}$$
$$\iint dq_1 dq_2 \frac{q_{1\mu}}{N^5} = \frac{\pi^4}{4!}\frac{\beta\epsilon-\gamma\delta}{(\beta^2-\alpha\gamma)^2}\frac{k_\mu}{(\alpha\epsilon^2+\beta^2\lambda+\gamma\delta^2-2\beta\delta\epsilon-\alpha\gamma\lambda)\,k^2-(\beta^2-\alpha\gamma)\,M} \tag{6.55}$$
$$\iint dq_1 dq_2 \frac{q_{2\mu}}{N^5} = \frac{\pi^4}{4!}\frac{\beta\delta-\alpha\epsilon}{(\beta^2-\alpha\gamma)^2}\frac{k_\mu}{(\alpha\epsilon^2+\beta^2\lambda+\gamma\delta^2-2\beta\delta\epsilon-\alpha\gamma\lambda)\,k^2-(\beta^2-\alpha\gamma)\,M} \tag{6.56}$$

Diese Ergebnisse (6.54)-(6.56) werden in (6.42)-(6.53) eingesetzt und die entsprechenden Ableitungen berechnet. Anschließend werden die Substitutionen (6.35)-(6.41) eingesetzt. Damit sind die einzelnen Integrale (6.32) d.h. die Integrale (6.42)-(6.53) gelöst und können in Gleichung (E.54) eingesetzt werden. Nach anschließender Zusammenfassung der gesamten Terme lautet das Zwischenresultat:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\alpha\kappa A}(k) &= -96\frac{g^2\hbar^2\pi^4}{(2\pi\hbar)^8}\sum_i \lambda_i \tilde{G}_{\alpha\alpha_1}(k,m_i)\int_0^1 du \int_0^u dv \\ &\quad \left\{\left\{\frac{s}{t^2\left(sk^2-t(mc)^2\right)} + \frac{s^2k^2}{2t^2\left(sk^2-t(mc)^2\right)^2} - \frac{2s^2k^2(mc)^2}{t\left(sk^2-t(mc)^2\right)^3}\right.\right. \\ &\quad -\frac{1458s^2k^2(mc)^2}{\left(sk^2-t(mc)^2\right)^3} - \frac{474st(mc)^4}{\left(sk^2-t(mc)^2\right)^3} + \frac{12st^2(mc)^6}{\left(sk^2-t(mc)^2\right)^4}\frac{3888st^3(mc)^6}{\left(sk^2-t(mc)^2\right)^4} \\ &\quad \left.+\frac{24s^3k^2(mc)^4}{\left(sk^2-t(mc)^2\right)^4} + \frac{96s^3tk^2(mc)^6}{\left(sk^2-t(mc)^2\right)^5} + \frac{10368s^2t^3(mc)^8}{\left(sk^2-t(mc)^2\right)^5}\right\} mc\mathbb{1} \\ &\quad + 3\left\{\frac{36s^4k^4}{t^3\left(sk^2-t(mc)^2\right)^3} - \frac{3s^2k^2(mc)^2}{2\left(sk^2-t(mc)^2\right)^3} - \frac{54s^2\left(sk^2+t(mc)^2\right)(mc)^2}{t^2\left(sk^2-t(mc)^2\right)^3}\right. \\ &\quad -\frac{st(mc)^4}{2\left(sk^2-t(mc)^2\right)^3} + \frac{440s^2t(mc)^6}{\left(sk^2-t(mc)^2\right)^4} + \frac{4st^3(mc)^6}{t^2\left(sk^2-t(mc)^2\right)^4} + \frac{864s^4k^2(mc)^6}{\left(sk^2-t(mc)^2\right)^5} \\ &\quad \left.\left.+\frac{2592s^3t(mc)^8}{\left(sk^2-t(mc)^2\right)^5} + \frac{32s^2t^3(mc)^8}{\left(sk^2-t(mc)^2\right)^5} - \frac{12s^2\left(sk^2+t(mc)^2\right)(mc)^4}{\left(sk^2-t(mc)^2\right)^4}\right\} \not{k}\right\}_{\alpha_1\beta} \hat{u}_{\beta\kappa A}(k), \end{aligned} \tag{6.57}$$

wobei die Definitionen

$$\begin{aligned} s &= (u-1)(u-v)v \\ t &= u^2+v^2-u(1+v) \end{aligned} \tag{6.58}$$

eingeführt wurden. Herausziehen der Konstanten mc aus den einzelnen Summanden und mit der Definition

$$\tau^2 = \frac{k^2}{m^2c^2} \tag{6.59}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\alpha\kappa A}(k) = -96\frac{g^2\hbar^2\pi^4}{(2\pi\hbar)^8}\frac{1}{(mc)^2}\sum_i \lambda_i \tilde{G}_{\alpha\alpha_1}(k,m_i)\int_0^1 du \int_0^u dv \\ \left\{\left\{\frac{s}{t^2\left(s\tau^2-t\right)} + \frac{s^2\tau^2}{2t^2\left(s\tau^2-t\right)^2} - \frac{2s^2\tau^2}{t\left(s\tau^2-t\right)^3} - \frac{1458s^2\tau^2}{\left(s\tau^2-t\right)^3} - \frac{474st}{\left(s\tau^2-t\right)^3}\right.\right. \\ \left.+\frac{12st^2}{\left(s\tau^2-t\right)^4} + \frac{3888st^3}{\left(s\tau^2-t\right)^4} + \frac{24s^3\tau^2}{\left(s\tau^2-t\right)^4} + \frac{96s^3t\tau^2}{\left(s\tau^2-t\right)^5} + \frac{10368s^2t^3}{\left(s\tau^2-t\right)^5}\right\} mc\mathbb{1} \\ +3\left\{\frac{36s^4\tau^4}{t^3\left(s\tau^2-t\right)^3} - \frac{3s^2\tau^2}{2\left(s\tau^2-t\right)^3} - \frac{54s^2\left(s\tau^2+t\right)}{t^2\left(s\tau^2-t\right)^3} - \frac{st}{2\left(s\tau^2-t\right)^3} + \frac{440s^2t}{\left(s\tau^2-t\right)^4}\right. \\ \left.\left.+\frac{4st^3}{t^2\left(s\tau^2-t\right)^4} + \frac{864s^4\tau^2}{\left(s\tau^2-t\right)^5} + \frac{2592s^3t}{\left(s\tau^2-t\right)^5} + \frac{32s^2t^3}{\left(s\tau^2-t\right)^5} - \frac{12s^2\left(s\tau^2+t\right)}{\left(s\tau^2-t\right)^4}\right\}\not{k}\right\}_{\alpha_1\beta} \\ \hat{u}_{\beta\kappa A}(k). \end{aligned} \tag{6.60}$$

Damit hat die Eigenwertgleichung folgende Gestalt:

$$\hat{u}_{\alpha\kappa A}(k) = -96\frac{g^2\hbar^2\pi^4}{m^2c^2(2\pi\hbar)^8}\sum_i \lambda_i \tilde{G}_{\alpha\alpha_1}(k,m_i)\left[P_1(\tau)\,\not{k} + P_2(\tau)mc\mathbb{1}\right]_{\alpha_1\beta}\hat{u}_{\beta\kappa A}(k), \tag{6.61}$$

mit

$$P_1(\tau) = 3\iint dudv \left\{ \frac{36s^4\tau^4}{t^3\left(s\tau^2-t\right)^3} - \frac{3s^2\tau^2}{2\left(s\tau^2-t\right)^3} - \frac{54s^2\left(s\tau^2+t\right)}{t^2\left(s\tau^2-t\right)^3} - \frac{st}{2\left(s\tau^2-t\right)^3} \right.$$
$$+\frac{440s^2t}{\left(s\tau^2-t\right)^4} + \frac{4st^3}{t^2\left(s\tau^2-t\right)^4} + \frac{864s^4\tau^2}{\left(s\tau^2-t\right)^5} + \frac{2592s^3t}{\left(s\tau^2-t\right)^5}$$
$$\left. + \frac{32s^2t^3}{\left(s\tau^2-t\right)^5} - \frac{12s^2\left(s\tau^2+t\right)}{\left(s\tau^2-t\right)^4} \right\} \tag{6.62}$$

und

$$P_2(\tau) = \iint dudv \left\{ \frac{s}{t^2\left(s\tau^2-t\right)} + \frac{s^2\tau^2}{2t^2\left(s\tau^2-t\right)^2} - \frac{2s^2\tau^2}{t\left(s\tau^2-t\right)^3} \frac{1458s^2\tau^2}{\left(s\tau^2-t\right)^3} \right.$$
$$-\frac{474st}{\left(s\tau^2-t\right)^3} + \frac{12st^2}{\left(s\tau^2-t\right)^4} + \frac{3888st^3}{\left(s\tau^2-t\right)^4} + \frac{24s^3\tau^2}{\left(s\tau^2-t\right)^4}$$
$$\left. + \frac{96s^3t\tau^2}{\left(s\tau^2-t\right)^5} + \frac{10368s^2t^3}{\left(s\tau^2-t\right)^5} \right\}. \tag{6.63}$$

Prinzipiell ist es nun möglich, die Integration über u und v auszuführen. Der Eigenwert wird im Folgenden nicht berechnet, da dieser nur eine erste Näherung des exakten Eigenwerts der Polarisationswolke der Quarks darstellt. Es wird jedoch dargestellt, wie der Eigenwert prinzipiell berechnet werden kann, und es wird eine Beziehung zwischen P_1 und P_2 abgeleitet, die benötigt wird, um die Selbstkonsistenz der Rechnungen zu zeigen.

6.1.5 Der Masseneigenwert der Quarkwellenfunktion

Berechnung der Determinante

Die Eigenwertgleichung (6.61) lautet:

$$\hat{u}_{\alpha\kappa A}(k) = -96\frac{g^2\hbar^2\pi^4}{m^2c^2(2\pi\hbar)^8}\sum_i \lambda_i \tilde{G}_{\alpha\alpha_1}(k, m_i)\left[P_1(\tau)\,\not{k} + P_2(\tau)mc\mathbb{1}\right]_{\alpha_1\beta}\hat{u}_{\beta\kappa A}(k)$$
$$= n\,\hat{G}\,T\,\hat{u}_{\beta\kappa A}(k). \tag{6.64}$$

Im Ruhsystem gilt $\mathbf{k} = 0$, und damit geht $\not{k}$ über in $\not{k} = k_0\gamma^0 = Mc\gamma^0$, damit lauten die einzelnen Größen mit $\tau = M/m$:

$$\begin{aligned}\hat{G} &= \sum_i \lambda_i \tilde{G}_{\alpha\alpha_1}(k, m_i)\\ &= \left(\frac{k^2+3m^2c^2}{(k^2-m^2c^2)^3}\,\not{k} + \frac{3k^2+m^2c^2}{(k^2-m^2c^2)^3}mc\mathbb{1}\right)\\ &= \left(\frac{M^2c^2+3m^2c^2}{(M^2c^2-m^2c^2)^3}Mc\gamma^0 + \frac{3M^2c^2+m^2c^2}{(M^2c^2-m^2c^2)^3}mc\mathbb{1}\right)\\ &= \frac{1}{(mc)^3}\begin{pmatrix} \frac{1}{(\tau-1)^3} & & & \\ & \frac{1}{(\tau-1)^3} & & \\ & & -\frac{1}{(\tau+1)^3} & \\ & & & -\frac{1}{(\tau+1)^3}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{6.65}$$

$$T = (mc)\begin{pmatrix} P_2(\tau)+\tau P_1(\tau) & & & \\ & P_2(\tau)+\tau P_1(\tau) & & \\ & & P_2(\tau)-\tau P_1(\tau) & \\ & & & P_2(\tau)-\tau P_1(\tau)\end{pmatrix} \tag{6.66}$$

$$n = -96\frac{g^2\hbar^2\pi^4}{m^2c^2(2\pi\hbar)^8}. \tag{6.67}$$

Damit $\hat{u}$ Eigenspinor ist, muß $\hat{u}$ die Gleichung

$$\left(n\hat{G}T - \mathbb{1}\right)\hat{u} = 0 \tag{6.68}$$

erfüllen. Dies hat zur Folge, daß

$$det\left(n\hat{G}T - \mathbb{1}\right) = 0 \tag{6.69}$$

sein muß. Wird die Determinante berechnet, ergibt sich:

$$\begin{aligned} det\left(n\hat{G}T - 1\right) &= \left|\begin{pmatrix} \left(\frac{n}{(mc)^2}\frac{P_2(\tau)+\tau P_1(\tau)}{(\tau-1)^3} - 1\right)\mathbb{1}_2 & \\ & \left(-\frac{n}{(mc)^2}\frac{P_2(\tau)-\tau P_1(\tau)}{(\tau+1)^3} - 1\right)\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}\right| \\ &= \left(\frac{n}{(mc)^2}\frac{P_2(\tau)+\tau P_1(\tau)}{(\tau-1)^3} - 1\right)^2 \left(\frac{n}{(mc)^2}\frac{P_2(\tau)-\tau P_1(\tau)}{(\tau+1)^3} + 1\right)^2. \end{aligned} \tag{6.70}$$

Im letzten Schritt wird die Determinante Null gesetzt. Es ergibt sich der gesuchte Eigenwert $\tau = \sqrt{\frac{k^2}{m^2c^2}}$ und damit der gesuchte Masseneigenwert des Quarkzustandes mit Polarisationswolke in erster Ordnung. Aus

$$\left(\frac{n}{(mc)^2}\frac{P_2(\tau)-\tau P_1(\tau)}{(\tau+1)^3} + 1\right)^2 = 0 \tag{6.71}$$

ergibt sich:

$$P_2(\tau) = \tau P_1(\tau) - \frac{(mc)^2}{n}(\tau+1)^3. \tag{6.72}$$

Aus

$$\left(\frac{n}{(mc)^2}\frac{P_2(\tau)+\tau P_1(\tau)}{(\tau-1)^3} - 1\right)^2 = 0 \tag{6.73}$$

ergibt sich:

$$P_2(\tau) = \frac{(mc)^2}{n}(\tau-1)^3 - \tau P_1(\tau). \tag{6.74}$$

6.1.6 Die Quarkwellenfunktion

Nachdem der Eigenwert abgeleitet wurde, wird nun der Eigenspinor berechnet. Die Eigenwertgleichung lautet:

$$\hat{u}_{\alpha,\kappa A}(k) = -96\frac{g^2\hbar^2\pi^4}{m^2c^2(2\pi\hbar)^8}\sum_i \lambda_i \tilde{G}_{\alpha\alpha_1}(k, m_i)\left[P_1(\tau)\not{k} + P_2(\tau)(mc)\mathbb{1}\right]_{\alpha_1\beta}\hat{u}_{\beta\kappa A}(k). \tag{6.75}$$

Wird die Summation über den Hilfsfeldindex i ausgeführt, entsteht folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} &\hat{u}_{\alpha,\kappa A}(k) \\ &= -96\frac{g^2\hbar^2\pi^4}{m^2c^2(2\pi\hbar)^8}\left(\frac{k^2+3m^2c^2}{(k^2-m^2c^2)^3}\not{k} + \frac{3k^2+m^2c^2}{(k^2-m^2c^2)^3}mc\mathbb{1}\right)\left[P_1(\tau)\not{k} + P_2(\tau)mc\,\mathbb{1}\right]_{\alpha_1\beta}\hat{u}_{\beta\kappa A}(k). \end{aligned} \tag{6.76}$$

Mit $\tau^2 = \frac{k^2}{m^2c^2}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}&\hat{u}_{\alpha,\kappa A}(k) \\ &= -96\frac{g^2\hbar^2\pi^4}{m^4c^4(2\pi\hbar)^8}\left[\frac{(\tau^2+3)P_2(\tau)+(3\tau^2+1)P_1(\tau)}{(\tau^2-1)^3}\frac{\not{k}}{mc}+\frac{(\tau^4+3\tau^2)P_1(\tau)+(3\tau^2+1)P_2(\tau)}{(\tau^2-1)^3}\mathbb{1}\right]\hat{u}_{\beta\kappa A}(k)\end{aligned} \tag{6.77}$$

Umgeformt entsteht:

$$\begin{aligned}\left[\frac{n}{(mc)^2}\frac{(\tau^2+3)P_2(\tau)+(3\tau^2+1)P_1(\tau)}{(\tau^2-1)^3}\frac{\not{k}}{mc}+\left(\frac{n}{(mc)^2}\frac{(\tau^4+3\tau^2)P_1(\tau)+(3\tau^2+1)P_2(\tau)}{(\tau^2-1)^3}-1\right)\mathbb{1}\right]\hat{u}=0 \\ \left[\not{k}-\left(\frac{(mc)^2}{n}\frac{(\tau^2-1)^3}{(\tau^2+3)P_2(\tau)+(3\tau^2+1)P_1(\tau)}-\frac{(\tau^4+3\tau^2)P_1(\tau)+(3\tau^2+1)P_2(\tau)}{(\tau^2+3)P_2(\tau)+(3\tau^2+1)P_1(\tau)}\right)mc\mathbb{1}\right]\hat{u}=0.\end{aligned} \tag{6.78}$$

Damit läßt sich die Eigenwertgleichung folgendermaßen schreiben:

$$[\not{k}-Mc\mathbb{1}]\,\hat{u}_{\alpha,\kappa,A}(k,M)=0. \tag{6.79}$$

Dies bedeutet, dass $\hat{u}$ ein Spinor mit Masse

$$M=\left(\frac{\frac{(mc)^2}{n}(\tau^2-1)^3-(\tau^4+3\tau^2)P_1(\tau)-(3\tau^2+1)P_2(\tau)}{(\tau^2+3)P_2(\tau)+(3\tau^2+1)P_1(\tau)}\right)m \tag{6.80}$$

ist.
Mittels der Bedingung (6.72) bzw. (6.74) wird daraus:

$$M=-\tau m \tag{6.81}$$

bzw.

$$M=\tau m\,. \tag{6.82}$$

Die Lösungen der Gleichung (6.79) sind die bekannten Dirac-Spinoren $\hat{u}_\alpha^{(s)}$. Damit lautet die Quarkwellenfunktion:

$$\hat{C}\left(\begin{array}{c|c}\mathbf{r} & \mathbf{k}\\ \alpha & s\\ \kappa & \kappa'\\ A & A'\end{array}\right)=\tilde{N}_f e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{kr}}\hat{u}_\alpha^{(s)}(\mathbf{k},M)\,\delta^\kappa_{\kappa'}\delta^A_{A'} \tag{6.83}$$

mit

$$\hat{u}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{k_zc}{E+Mc^2}\\\frac{(k_x+ik_y)c}{E+Mc^2}\end{pmatrix}\hat{u}^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{(k_x-ik_y)c}{E+Mc^2}\\\frac{-k_zc}{E+Mc^2}\end{pmatrix}\hat{u}^{(3)}=\begin{pmatrix}\frac{k_zc}{E-Mc^2}\\\frac{(k_x+ik_y)c}{E-Mc^2}\\1\\0\end{pmatrix}\hat{u}^{(4)}=\begin{pmatrix}\frac{(k_x-ik_y)c}{E-Mc^2}\\\frac{-k_zc}{E-Mc^2}\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{6.84}$$

Die Einteilchenwellenfunktion wird auf die Einheit Impuls^{-1} normiert (Anhang D). Die Normierungskonstante lautet damit: $\tilde{N}_f=(mc)^{-1}\sqrt{\frac{|E|+Mc^2}{2|E|}}$.

6.1.7 Die Wellenfunktion für die Hilfsfelder

Die Gleichung (6.27) für die Hilfsfeldwellenfunktion lautet:

$$\tilde{\varphi}^{(1)}_{\alpha\kappa Ai}(k)=-96\frac{g^2\hbar^2\pi^4}{m^2c^2(2\pi\hbar)^8}\lambda_i\tilde{G}_{\alpha\alpha_1}(k,m_i)\left[P_1(\tau)\not{k}+P_2(\tau)mc\mathbb{1}\right]_{\alpha_1\beta}\hat{u}_{\beta\kappa A}(k). \tag{6.85}$$

Kompakter formuliert, mit $n = -96\frac{g^2\hbar^2\pi^4}{m^2c^2(2\pi\hbar)^8}$ lautet sie:

$$\tilde{\varphi}_i^{(1)} = n(mc)\lambda_i \tilde{G}_{\alpha\alpha_1}(k, m_i)\left[\frac{P_1}{(mc)}\not{k} + P_2\mathbb{1}\right]_{\alpha_1\beta}\hat{u}. \tag{6.86}$$

Wird die Greensche Funktion eingesetzt, ergibt sich:

$$\tilde{\varphi}_i^{(1)} = n(mc)\lambda_i \frac{\not{k} + m_i c}{\tau^2(mc)^2 - m_i^2c^2}\left[\frac{P_1}{mc}\not{k} + P_2\mathbb{1}\right]\hat{u}. \tag{6.87}$$

Nach (6.79) gilt:

$$\not{k}\,\hat{u} = \tau\, mc\,\hat{u}, \tag{6.88}$$

und nach (6.76) gilt:

$$\hat{u} = n(mc)\left(\frac{k^2 + 3m^2c^2}{(\tau^2(mc)^2 - m^2c^2)^3}\not{k} + \frac{3k^2 + m^2c^2}{(\tau^2(mc)^2 - m^2c^2)^3}mc\mathbb{1}\right)\left[\frac{P_1(\tau)}{mc}\not{k} + P_2(\tau)\mathbb{1}\right]\hat{u}. \tag{6.89}$$

Einsetzen der Gleichung (6.88) in Gleichung (6.89) führt mit $k^2 = \tau^2m^2c^2$ auf:

$$\begin{aligned}
\hat{u} &= n(mc)\left(\frac{\tau^2(mc)^2 + 3m^2c^2}{(\tau^2(mc)^2 - m^2c^2)^3}\not{k} + \frac{3\tau^2(mc)^2 + m^2c^2}{(\tau^2(mc)^2 - m^2c^2)^3}mc\mathbb{1}\right)\left[\frac{P_1(\tau)}{mc}\tau mc + P_2(\tau)\mathbb{1}\right]\hat{u} \\
&= n(mc)^2\left(\frac{\tau^2(mc)^2 + 3m^2c^2}{(\tau^2(mc)^2 - m^2c^2)^3}\tau\mathbb{1} + \frac{3\tau^2(mc)^2 + m^2c^2}{(\tau^2(mc)^2 - m^2c^2)^3}\mathbb{1}\right)\left[P_1(\tau)\tau\mathbb{1} + P_2(\tau)\mathbb{1}\right]\hat{u} \\
&= \frac{n}{(mc)^2}\left(\frac{\tau^2+3}{(\tau^2-1)^3}\tau + \frac{3\tau^2+1}{(\tau^2-1)^3}\right)\left[P_1(\tau)\tau\mathbb{1} + P_2(\tau)\mathbb{1}\right]\hat{u} \\
&= \frac{n}{(mc)^2}\left(\frac{\tau^3 + 3\tau + 3\tau^2 + 1}{(\tau^2-1)^3}\right)\left[P_1(\tau)\tau\mathbb{1} + P_2(\tau)\mathbb{1}\right]\hat{u} \\
&= \frac{n}{(mc)^2}\left(\frac{1}{(\tau-1)^3}\right)\left[P_1(\tau)\tau\mathbb{1} + P_2(\tau)\mathbb{1}\right]\hat{u} \\
&= \frac{n}{(mc)^2}\frac{1}{(\tau-1)^3}\left[P_1(\tau)\frac{\not{k}}{mc} + P_2(\tau)\mathbb{1}\right]\hat{u}.
\end{aligned} \tag{6.90}$$

Umgeformt lautet diese Gleichung:

$$\frac{(mc)^2}{n}(\tau-1)^3\hat{u} = \left[P_1(\tau)\frac{\not{k}}{mc} + P_2(\tau)\mathbb{1}\right]\hat{u}. \tag{6.91}$$

Eingesetzt in (6.87) führt auf:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_i^{(1)} &= n(mc)\lambda_i \frac{\not{k} + m_i c}{\tau^2(mc)^2 - m_i^2c^2}\frac{(mc)^2}{n}(\tau-1)^3\hat{u} \\
&= (mc)^3(\tau-1)^3\lambda_i\frac{\not{k} + m_i c}{\tau^2(mc)^2 - m_i^2c^2}\hat{u} \\
&= (mc)^3(\tau-1)^3\lambda_i\frac{\tau mc + m_i c}{\tau^2(mc)^2 - m_i^2c^2}\hat{u} \\
&= (mc)^3(\tau-1)^3\lambda_i\frac{1}{\tau mc - m_i c}\hat{u}.
\end{aligned} \tag{6.92}$$

Damit sieht die Quarkhilfsfeldwellenfunktion folgendermaßen aus:

$$C\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{r} & \mathbf{k} \\ i & \\ \alpha & s \\ \kappa & \kappa' \\ A & A' \end{array}\right) = N_f(mc)^2(\tau-1)^3 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{kr}}\lambda_i\frac{1}{\tau mc - m_i c}\hat{u}_\alpha^{(s)}(\mathbf{k}, M)\,\delta_{\kappa'}^{\kappa}\delta_{A'}^{A} \tag{6.93}$$

mit

$$N_f = \sqrt{\frac{|E| + Mc^2}{2|E|}}. \tag{6.94}$$

6.1.8 Der Duale Hilfsfeldspinor

Aus der Beziehung

$$R_I^{k_1} C_{k_2}^I = \delta_{k_1 k_2} \tag{6.95}$$

läßt sich der duale Hilfsfeldspinor konstruieren. Er lautet

$$R\begin{pmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{k} \\ i & \\ \alpha & s \\ \kappa & \kappa' \\ A & A' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} N_f \frac{1}{(\tau-1)^3 (mc)^2} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{kr}} \frac{1}{\lambda_i} (\tau mc - m_i c) \hat{u}_\alpha^{\dagger\,(s)}(\mathbf{k}, M)\, \delta_{\kappa'}^{\kappa} \delta_{A'}^{A}. \tag{6.96}$$

6.2 Die Gluonwellenfunktion

Die Diagonalgleichung lautet:

$$E_{p0} \mid \mathcal{F}(j,p)\rangle^d = j_{I_1} \hat{K}_{I_1 I_2} \partial_{I_2} \mid \mathcal{F}(j,p)\rangle^d - 3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F^{(t)}_{I_4 K} j_{I_1} j_K \partial_{I_3} \partial_{I_2} \mid \mathcal{F}(j,p)\rangle^d. \tag{6.97}$$

Um in jedem Bezugssystem den einzeitigen Zustand darstellen zu können, wird die zugehörige kovariante Gleichung gelöst. Diese lautet:

$$K_{S_1 S_2} \partial_{S_2} \mid \mathcal{F}(j,p)\rangle^d = 3 W_{S_1 S_2 S_3 S_4} F_{S_4 S_5} j_{S_5} \partial_{S_3} \partial_{S_2} \mid \mathcal{F}(j,p)\rangle^d. \tag{6.98}$$

Einsetzen des Funktionals $\mid \mathcal{F}(j,p)\rangle^d$ und Projektion in den 2-Teilchensektor ergibt folgende Integralgleichung:

$$\varphi^{(2)}(S_1 S_2 \mid a) = 3 G_{S_1 S} W_{S S_3 S_4 S_5} F_{S_3 S_2}\, \varphi^{(2)}(S_4 S_5 \mid a). \tag{6.99}$$

Werden die Größen (2.48), (3.43) und (6.5) in (6.99) eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(2)}_{S_1 S_2}(k,a) \\
&= -\frac{3i\hbar g}{(2\pi\hbar)^8} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \int d^4p \int d^4q \int d^4x\; e^{i\left(\frac{p'}{\hbar} - \frac{q}{\hbar}\right)x} \frac{e^{-i\frac{p'}{\hbar}x_1} e^{i\frac{q}{\hbar}x_2}}{(p'^2 - m_i^2 c^2)(q^2 - m_j^2 c^2)} (\not{p}\,' + m_i c)_{\alpha\alpha_1} (\not{q} + m_j c)\, C_{\beta_1 \alpha_2} \\
&\quad \Bigg\{ \delta_{AB} L^5_{\kappa k} L^5_{k_2 k_3} \left(\delta_{\alpha_1 \beta_1} C_{\beta_2 \beta_3} - \gamma^5_{\alpha_1 \beta_1} (\gamma^5 C)_{\beta_2 \beta_3}\right) \hat{\varphi}^{(2)} \begin{pmatrix} x\,x & k \\ \beta_2 \beta_3 & \\ k_2 k_3 & a \\ B_2 B_2 & \end{pmatrix} \\
&\quad - \left(\delta_{\alpha_1 \beta_2} C_{\beta_1 \beta_3} - \gamma^5_{\alpha_1 \beta_2} (\gamma^5 C)_{\beta_1 \beta_3}\right) \hat{\varphi}^{(2)} \begin{pmatrix} x\,x & k \\ \beta_2 \beta_3 & \\ \kappa_1 \kappa_2 & a \\ A_1 A_2 & \end{pmatrix} \\
&\quad + \left(\delta_{\alpha_1 \beta_3} C_{\beta_1 \beta_2} - \gamma^5_{\alpha_1 \beta_3} (\gamma^5 C)_{\beta_1 \beta_2}\right) \hat{\varphi}^{(2)} \begin{pmatrix} x\,x & k \\ \beta_2 \beta_3 & \\ \kappa_1 \kappa_2 & a \\ A_1 A_2 & \end{pmatrix} \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{6.100}$$

Die rechte Seite dieser Integralgleichung ist abhängig von der über die Hilfsfelder summierten Wellenfunktion $\hat{\varphi}$.
Nutzt man die Translationsinvarianz der Felder aus, erhält man als Ansatz für die Zweiteilchenwellenfunktion:

$$\varphi^{(2)}\left(\begin{array}{c|c} x_1x_2 & k \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ i_1i_2 & \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ A_1A_2 & \end{array}\right) = N_\varphi e^{-\frac{i}{\hbar}k\frac{x_1+x_2}{2}}\chi\left(\begin{array}{c|c} x_1-x_2 & k \\ i_1i_2 & \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ \alpha_1\alpha_2 & s \\ A_1A_2 & \end{array}\right) \tag{6.101}$$

und nach Summation bezüglich der Hilfsfelder:

$$\hat{\varphi}^{(2)}\left(\begin{array}{c|c} x_1x_2 & k \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ A_1A_2 & \end{array}\right) = N_\varphi e^{-\frac{i}{\hbar}k\frac{x_1+x_2}{2}}\hat{\chi}\left(\begin{array}{c|c} x_1-x_2 & k \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ A_1A_2 & \end{array}\right). \tag{6.102}$$

Da in (6.100) auf der rechten Seite die lokale Wellenfunktion steht, wird $x = x_1 = x_2$ gesetzt, und es ergibt sich für die lokale Wellenfunktion:

$$\hat{\varphi}^{(2)}\left(\begin{array}{c|c} x\,x & k \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ A_1A_2 & \end{array}\right) = N_\varphi e^{-\frac{i}{\hbar}kx}\hat{\chi}\left(\begin{array}{c|c} 0 & k \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ A_1A_2 & \end{array}\right). \tag{6.103}$$

Die lokale Relativwellenfunktion $\hat{\chi}$ hängt nur noch von den algebraischen Indizes und nicht mehr vom Ort ab. Im Folgenden wird der algebraische Anteil konstruiert. Die Relativwellenfunktion $\hat{\chi}$ soll ein Vektorboson darstellen, dies bedeutet, daß die Spinoperatoren symmetrisch sein müssen. Daraus ergibt sich folgender Ansatz:

$$\hat{\chi}\left(\begin{array}{c|c} 0 & k \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ \alpha_1\alpha_2 & s \\ A_1A_2 & \end{array}\right) = \delta_{A_1A_2}L^a_{\kappa_1\kappa_2}\left(A^a_\mu\left(\gamma^\mu C\right)_{\alpha_1\alpha_2} + \tilde{F}^a_{\mu\nu}\left(\Sigma^{\mu\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\right). \tag{6.104}$$

Die Matrizen L^a, die den Farbfreiheitsgrad und den Superspinfreiheitsgrad beschreiben, werden am Ende der Rechnungen bestimmt. Mit diesem Ansatz ergibt sich aus (6.100):

$$\begin{aligned} &\varphi^{(2)}\left(\begin{array}{c|c} x_1x_2 & k \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ i_1i_2 & \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ A_1A_2 & \end{array}\right) \\ = \; & \frac{12i\hbar g}{(2\pi\hbar)^4}N_\varphi\delta_{A_1A_2}L^a_{\kappa_1\kappa_2}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\int d^4p'\frac{e^{-\frac{i}{\hbar}p'(x_1-x_2)}e^{-\frac{i}{\hbar}kx_2}}{\left(p'^2-m_{i_1}^2c^2\right)\left((p'-k)^2-m_{i_2}^2c^2\right)} \\ & A^a_\mu\left[(\not{p}\,'+m_{i_1}c)\gamma^\mu(\not{p}\,'-\not{k}+m_{i_2}c)C\right]_{\alpha_1\alpha_2}. \end{aligned} \tag{6.105}$$

Die Transformation des Impulses $p' = p + \frac{k}{2}$ ergibt folgende Ausgangsgleichung [22], [23]:

$$\varphi^{(2)}\left(\begin{array}{c|c} x_1x_2 & k \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ i_1i_2 & \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ A_1A_2 & \end{array}\right)$$

$$= \frac{12i\hbar g}{(2\pi\hbar)^4} N_\varphi \delta_{A_1A_2} L^a_{\kappa_1\kappa_2} e^{-\frac{i}{\hbar}k\frac{x_1+x_2}{2}} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \int d^4p \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2)}}{\left((p+\frac{k}{2})^2 - m_{i_1}^2c^2\right)\left((p-\frac{k}{2})^2 - m_{i_2}^2c^2\right)}$$
$$A^a_\mu \left[(\not p + \frac{\not k}{2} + m_{i_1}c)\gamma^\mu(\not p - \frac{\not k}{2} + m_{i_2}c)C \right]_{\alpha_1\alpha_2} . \tag{6.106}$$

Ausreduktion der γ-Algebra ergibt unter Beschränkung auf s-Wellen und masseloser Gluonen ($k^2 = 0$):

$$\varphi^{(2)} \left(\begin{array}{c|c} x_1x_2 & k \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ i_1i_2 & \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ A_1A_2 & \end{array} \right)$$
$$= \frac{12i\hbar g}{(2\pi\hbar)^4} N_\varphi A^a_\mu \delta_{A_1A_2} L^a_{\kappa_1\kappa_2} e^{-\frac{i}{\hbar}k\frac{x_1+x_2}{2}} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \int d^4p \frac{e^{-i\frac{p}{\hbar}(x_1-x_2)}}{\left((p+\frac{k}{2})^2 - m_{i_1}^2c^2\right)\left((p-\frac{k}{2})^2 - m_{i_2}^2c^2\right)}$$
$$\left[\left(\frac{m_{i_1}c - m_{i_2}c}{2} k^\mu - \frac{1}{2}k^\mu \not k \right) C + \left(m_{i_1}m_{i_2}c^2 - p^2\right)(\gamma^\mu C) + i\frac{m_{i_1}c + m_{i_2}c}{2} k_\nu \left(\Sigma^{\mu\nu}C\right) \right]_{\alpha_1\alpha_2} . \tag{6.107}$$

Die Integration über d^4p ergibt nach Anhang E.3:

$$\varphi^{(2)}\left(I_1I_2 \mid k, a\right)$$
$$= -\frac{24\pi^2\hbar g}{(2\pi\hbar)^4} N_\varphi A^a_\mu \delta_{A_1A_2} L^a_{\kappa_1\kappa_2} e^{-\frac{i}{\hbar}k\frac{(x_1+x_2)}{2}} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \int_0^1 dz e^{-\frac{i}{\hbar}(z-\frac{1}{2})k(x_1-x_2)}$$
$$\left\{ \left(\frac{m_{i_1}c - m_{i_2}c}{2} k^\mu - \frac{1}{2}k^\mu \not k \right) K_0[\tilde M_{i_1i_2}(z)\tilde u] C \right.$$
$$+ \left(\left(m_{i_1}m_{i_2}c^2 - \tilde M^2_{i_1i_2}\right) K_0[\tilde M_{i_1i_2}(z)\tilde u] + 2\hbar \tilde M_{i_1i_2}\left(1 - \frac{i}{\hbar}(z-\frac{1}{2})k(x_1-x_2)\right) \frac{K_1[\tilde M_{i_1i_2}(z)\tilde u]}{\tilde u} \right)(\gamma^i C)$$
$$\left. + \frac{i}{2}(m_{i_1}+m_{i_2})ck_\nu K_0[\tilde M_{i_1i_2}(z)\tilde u]\left(\Sigma^{\mu\nu}C\right) \right\}_{\alpha_1\alpha_2} . \tag{6.108}$$

Dabei wurden folgende Definitionen eingeführt:

$$\tilde M_{i_1i_2}(z) := \sqrt{m_{i_1}^2c^2 - \left(m_{i_1}^2 - m_{i_2}^2\right)c^2 z} \tag{6.109}$$
$$\tilde u := \left(-\frac{(x_1-x_2)^2}{\hbar^2} + i\epsilon \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{6.110}$$

Wird der Übergang zu gleichen Zeiten vollzogen, geht $\tilde u$ über in $\tilde u \to \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{\hbar} = \frac{u}{\hbar}$. Mit der Größe $\tilde N = \frac{\tilde M}{\hbar}$ und $\mathbf{u} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ schreibt sich die Wellenfunktion in temporaler Eichung ($A^a_0 = 0$):

$$\varphi^{(2)} \left(\begin{array}{c|c} r_1r_2 & k \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ i_1i_2 & \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ A_1A_2 & \end{array} \right)$$
$$= -\frac{24\pi^2\hbar g}{(2\pi\hbar)^4} N_\varphi A^a_i \delta_{A_1A_2} L^a_{\kappa_1\kappa_2} e^{-\frac{i}{\hbar}Et} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\frac{(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)}{2}} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \int_0^1 dz e^{\frac{i}{\hbar}(z-\frac{1}{2})\mathbf{k}\mathbf{u}}$$
$$\left\{ \left(\frac{m_{i_1}c - m_{i_2}c}{2} k^i - \frac{1}{2}k^i \not k \right) K_0[\tilde N_{i_1i_2}u] C \right.$$
$$+ \left(\left(m_{i_1}m_{i_2}c^2 - \tilde M^2_{i_1i_2}\right) K_0[\tilde N_{i_1i_2}u] + 2\hbar \tilde M_{i_1i_2}\left(1 + \frac{i}{\hbar}(z-\frac{1}{2})\mathbf{k}\mathbf{u}\right) \frac{K_1[\tilde N_{i_1i_2}u]}{u} \right)(\gamma^i C)$$

$$+\frac{i}{2}(m_{i_1}+m_{i_2})ck_\nu K_0[\tilde{N}_{i_1i_2}u]\left(\Sigma^{i\nu}C\right)\Big\}_{\alpha_1\alpha_2}. \tag{6.111}$$

Diese Wellenfunktion wird nach kleinen Massendifferenzen entwickelt, dabei werden die folgenden Größen eingeführt:

$$\Delta_{i_1i_2} = \frac{1}{2}\left(m_{i_1}-m_{i_2}\right)c, \tag{6.112}$$

$$M_{i_1i_2} = \frac{1}{2}\left(m_{i_1}+m_{i_2}\right)c, \tag{6.113}$$

$$N_{i_1i_2} = \frac{M_{i_1i_2}}{\hbar}. \tag{6.114}$$

Damit schreiben sich folgende Größen unter Vernachlässigung der ersten Ordnung in $\Delta_{i_1i_2}$:

$$\tilde{N}_{i_1i_2}(z) = \sqrt{m_{i_1}^2-\left(m_{i_1}^2-m_{i_2}^2\right)z}\,\frac{c}{\hbar} = N_{i_1i_2}, \tag{6.115}$$

$$\tilde{M}_{i_1i_2}^2(z) = \left(m_{i_1}^2-\left(m_{i_1}^2-m_{i_2}^2\right)z\right)c^2 = M_{i_1i_2}^2, \tag{6.116}$$

$$m_{i_1}m_{i_2}c^2 = M_{i_1i_2}^2. \tag{6.117}$$

Werden diese Entwicklungen in die Wellenfunktion (6.111) eingesetzt und die Näherung $k_\mu k_\nu \approx 0$ angewandt, führt dies auf die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}&\varphi^{(2)}\left(I_1I_2\mid k,a\right)\\ &= -\frac{24\pi^2\hbar g}{(2\pi\hbar)^4}N_\varphi A_i^a\delta_{A_1A_2}L^a_{\kappa_1\kappa_2}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\mathbf{k}}{2}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\int_0^1 dze^{\frac{i}{\hbar}(z-\frac{1}{2})\mathbf{ku}}\\ &\left\{2\hbar M_{i_1i_2}\left(1+\frac{i}{\hbar}(z-\frac{1}{2})\mathbf{ku}\right)\frac{K_1[N_{i_1i_2}u]}{u}\left(\gamma^iC\right)+iM_{i_1i_2}k_\nu K_0[N_{i_1i_2}u]\left(\Sigma^{i\nu}C\right)\right\}_{\alpha_1\alpha_2}.\end{aligned} \tag{6.118}$$

Die Integration über die Hilfsvariable z liefert:

$$\begin{aligned}&\varphi^{(2)}\left(I_1I_2\mid k,a\right)\\ &= -\frac{24\pi^2\hbar g}{(2\pi\hbar)^4}N_\varphi A_i^a\delta_{A_1A_2}L^a_{\kappa_1\kappa_2}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\\ &\left\{2\hbar M_{i_1i_2}\cos\left(\frac{\mathbf{ku}}{2\hbar}\right)\frac{K_1[N_{i_1i_2}u]}{u}\left(\gamma^iC\right)_{\alpha_1\alpha_2}+iM_{i_1i_2}k_\nu\frac{2\hbar}{\mathbf{ku}}sin\left(\frac{\mathbf{ku}}{2\hbar}\right)K_0[N_{i_1i_2}u]\left(\Sigma^{i\nu}C\right)\right\}_{\alpha_1\alpha_2}\\ &= -\frac{24\pi^2\hbar g}{(2\pi\hbar)^4}N_\varphi\delta_{A_1A_2}L^a_{\kappa_1\kappa_2}e^{i\frac{\mathbf{k}}{2\hbar}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\left\{2\hbar^2N_{i_1i_2}\cos\left(\frac{\mathbf{ku}}{2\hbar}\right)\frac{K_1[N_{i_1i_2}u]}{u}A_i^a\left(\gamma^iC\right)_{\alpha_1\alpha_2}\right.\\ &\qquad\left.+\hbar^2N_{i_1i_2}\frac{2\hbar}{\mathbf{ku}}sin\left(\frac{\mathbf{ku}}{2\hbar}\right)K_0[N_{i_1i_2}u]\frac{i}{\hbar}A_i^ak_\nu\left(\Sigma^{i\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\right\}.\end{aligned} \tag{6.119}$$

Der Ausdruck $A_i^ak_\nu\left(\Sigma^{i\nu}C\right)$ kann wegen der Antisymmetrie der Matrix $\Sigma^{i\nu}C$ durch $F_{i\nu}^a\Sigma^{i\nu}C_{\;|i>\nu}$ ausgedrückt werden, wobei $F_{i\nu}^a$ durch

$$F_{i\nu}^a = \frac{i}{\hbar}\left(A_i^ak_\nu - k_iA_\nu^a\right) \tag{6.120}$$

definiert ist.

Da die Wellenfunktion Lösung der Hard-Core Gleichung und nicht die Lösung der vollen Dynamik ist, entspricht die Gleichung (6.120) einem Ansatz ohne Selbstwechselwirkung und ist daher mit der entsprechenden Gleichung des Feldstärketensors der Elektrodynamik identisch. Die Schwache Abbildung wird jedoch die Lösung der vollen Dynamik und auch die entsprechende Beziehung für den Feldstärketensor liefern, wie sie im Fall einer nichtabelschen Eichtheorie lauten muß.

Wegen der Beziehung (6.120) gilt im Folgenden immer für den Spintensor $\Sigma^{i\nu}$ der Fall $i > \nu$.
Mit (6.120) schreibt sich die Wellenfunktion zu:

$$\varphi^{(2)}\left(\begin{array}{c|c} r_1 r_2 & k \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ i_1 i_2 & \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ A_1 A_2 & \end{array}\right) = -\frac{24\pi^2\hbar^3 g}{(2\pi\hbar)^4} N_\varphi \delta_{A_1A_2} L^a_{\kappa_1\kappa_2} e^{i\frac{\mathbf{k}}{2\hbar}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}$$

$$\left\{2N_{i_1i_2}\cos\left(\frac{\mathbf{ku}}{2\hbar}\right)\frac{K_1[N_{i_1i_2}u]}{u} A^a_i \left(\gamma^i C\right)_{\alpha_1\alpha_2} + N_{i_1i_2}\frac{2\hbar}{\mathbf{ku}} sin\left(\frac{\mathbf{ku}}{2\hbar}\right) K_0[N_{i_1i_2}u] F^a_{i\nu}\left(\Sigma^{i\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\right\}. \tag{6.121}$$

Berechnung der mittleren Ausdehnung

Die mittlere Ausdehnung $\langle u\rangle_\varphi$ wird abgeschätzt, indem zunächst die physikalische Wellenfunktion mittels Summation über die Hilfsfelder i_1 und i_2 in (6.121) berechnet wird. Dabei werden die beiden Kontraktionsfaktoren $\cos\left(\frac{\mathbf{ku}}{2\hbar}\right)$ und $\frac{2\hbar}{\mathbf{ku}} sin\left(\frac{\mathbf{ku}}{2\hbar}\right)$ vernachlässigt:

$$\hat{\varphi}^{(2)}\left(\begin{array}{c|c} r_1 r_2 & k \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ A_1 A_2 & \end{array}\right) = \sum_{i_1 i_2} \varphi^{(2)}\left(\begin{array}{c|c} r_1 r_2 & k \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ i_1 i_2 & \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ A_1 A_2 & \end{array}\right). \tag{6.122}$$

Mit

$$a = \frac{mc}{\hbar} \tag{6.123}$$

ergibt sich für die physikalische Wellenfunktion der Ausdruck

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}^{(2)} = \tilde{N}\delta_{A_1A_2} L^a_{\kappa_1\kappa_2} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}} & \\ \Big\{ 2(au)\left\{\left[(au)^2-1\right]K_1[au] - 2(au)K_0[au]\right\} A^a_i \left(\gamma^i C\right)_{\alpha_1\alpha_2} & \\ + \frac{1}{a}(au)\left\{(au)\left[(au)^2-1\right]K_0[au] - 2\left[1+(au)^2\right]K_1[au]\right\} F^a_{i\nu}\left(\Sigma^{i\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2} \Big\}. &\end{aligned} \tag{6.124}$$

$\hat{\varphi}$ wird mittels der Funktionen g_1 und g_2 ausgedrückt:

$$\hat{\varphi} = \tilde{N}\delta_{A_1A_2} L^a_{\kappa_1\kappa_2} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}} \left(g_1(au) A^a_i \left(\gamma^i C\right)_{\alpha_1\alpha_2} + g_2(au) F^a_{i\nu}\left(\Sigma^{i\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\right) \tag{6.125}$$

mit

$$g_1(au) = 2(au)\left\{\left[(au)^2-1\right]K_1[au] - 2(au)K_0[au]\right\} \tag{6.126}$$

und

$$g_2(au) = \frac{1}{a}(au)\left\{(au)\left[(au)^2-1\right]K_0[au] - 2\left[1+(au)^2\right]K_1[au]\right\}. \tag{6.127}$$

Es gilt:

$$\langle u\rangle_\varphi = \frac{\langle\hat{\varphi}^{(2)}(\alpha u) \mid u \mid \hat{\varphi}^{(2)}(\alpha u)\rangle}{\langle\hat{\varphi}^{(2)}(\alpha u) \mid \hat{\varphi}^{(2)}(\alpha u)\rangle} \quad . \tag{6.128}$$

Das ergibt mit (6.125):

$$\langle u\rangle_\varphi = \frac{|A^a|^2\int \mathbf{du}\; u\; g_1^*\; g_1 + |F^a|^2\int \mathbf{du}\; u\; g_2^*\; g_2}{|A^a|^2\int \mathbf{du}\; g_1^*\; g_1 + |F^a|^2\int \mathbf{du}\; g_2^*\; g_2} \quad . \tag{6.129}$$

Aufgrund der Spuren $Sp[(\gamma^i C)^* \Sigma^{k\mu} C] = Sp[\gamma^i C(\Sigma^{k\mu} C)^*] = 0$ treten nur diese beiden Terme auf, und schließlich wurden noch die gemeinsamen Faktoren gekürzt. Mit den Abkürzungen

$$G_1 = \int d\mathbf{u}\; g_1^*\, g_1 \tag{6.130}$$

$$\tilde{G}_1 = \int d\mathbf{u}\; u\, g_1^*\, g_1 \tag{6.131}$$

$$G_2 = \int d\mathbf{u}\; g_2^*\, g_2 \tag{6.132}$$

$$\tilde{G}_2 = \int d\mathbf{u}\; u\, g_2^*\, g_2 \tag{6.133}$$

schreibt sich (6.129) zu:

$$\langle u \rangle_\varphi = \frac{\tilde{G}_1 + \frac{|F^a|^2}{|A^a|^2}\tilde{G}_2}{G_1 + \frac{|F^a|^2}{|A^a|^2}G_2} \quad . \tag{6.134}$$

Die Integrale ergeben sich zu:

$$G_1 = \frac{115965}{2^{13}}\frac{\pi^3}{a^3} \tag{6.135}$$

$$G_2 = \frac{14831775}{2^{18}}\frac{\pi^3}{a^5} \tag{6.136}$$

$$\tilde{G}_1 = 640\frac{\pi}{a^4} \tag{6.137}$$

$$\tilde{G}_2 = \frac{34560}{11}\frac{\pi}{a^6} \quad . \tag{6.138}$$

Mit den Definitionen aus [27]

$$|A^a|^2 = \frac{\hbar c^2}{\omega V} \tag{6.139}$$

$$|F^a|^2 = \frac{\hbar\omega}{V} \tag{6.140}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_\varphi &= 4.58\frac{\hbar}{mc}\frac{1 + 4.91\frac{\hbar^2\omega^2}{m^2c^4}}{1 + 4.00\frac{\hbar^2\omega^2}{m^2c^4}} \\ &< 5.6\frac{\hbar}{mc} \quad . \end{aligned} \tag{6.141}$$

Damit wird die Größe $\beta = \frac{ku}{2\hbar}$ abgeschätzt, wobei $k = |\mathbf{k}| \approx 10^6$ GeV und $m \approx 1.22 \cdot 10^{19}$ GeV *:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{ku}{2\hbar} \\ &= 2.8\frac{k}{mc} \\ &= 0.25 \cdot 10^{-12} \quad . \end{aligned} \tag{6.142}$$

*$k = |\mathbf{k}| \approx 10^6$ GeV entspricht den heutigen höchst möglichen Beschleunigerenergien und $m \approx 1.22 \cdot 10^{19}$ GeV entspricht der Planckmasse.

Die beiden Faktoren $\frac{sin\beta}{\beta}$ und $cos\beta$ in Gleichung (6.121) spielen keine Rolle und gehen im limes gegen die Zahl 1. Aus diesem Grund wird auf diese Kontraktionsfaktoren verzichtet, und die Abbildungsfunktionen für die Schwache Abbildung werden durch:

$$\varphi^{(2)}\left(I_1 I_2 \mid k, a\right) = A_i^a C_{i,a}^{I_1 I_2}(k) + F_{i\nu}^a C_{i\nu,a}^{I_1 I_2}(k) \tag{6.143}$$

definiert. Diese Definition stellt den Übergang zur phänomenologischen Theorie her. Die Zweiteilchenwellenfunktion wird nach den phänomenologischen Quantenzahlen aufgespalten, d.h. für jedes phänomenologische Gluon wird eine entsprechende Basisfunktion definiert. Damit werden die phänomenologischen Größen F^a und A^a unabhängig voneinander, bzw. die Abhängigkeit über die Gleichung (6.120) wird aufgehoben. Dadurch kann der Einfluß der Wechselwirkung auf das System ausgedrückt werden.
Der Vergleich mit

$$\varphi^{(2)}\left(\begin{array}{c|c} r_1 r_2 & k \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ i_1 i_2 & \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ A_1 A_2 & \end{array}\right) = -\frac{24\pi^2\hbar^3 g}{(2\pi\hbar)^4} N_\varphi \delta_{A_1A_2} L_{\kappa_1\kappa_2}^a e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}$$

$$\left\{2N_{i_1i_2}\frac{K_1[N_{i_1i_2}u]}{u}A_i^a\left(\gamma^i C\right)_{\alpha_1\alpha_2} + N_{i_1i_2}K_0[N_{i_1i_2}u]F_{i\nu}^a\left(\Sigma^{i\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\right\} \tag{6.144}$$

führt auf

$$C_q^{I_1I_2} \equiv \left\{C_{l,a}^{I_1I_2}(k); C_{l\nu,a}^{I_1I_2}(k)\right\} \tag{6.145}$$

mit

$$C_{l\nu,a}^{I_1I_2}(\mathbf{k}) = N_F \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\delta_{A_1A_2}L_{\kappa_1\kappa_2}^a e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\frac{(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)}{2}} N_{i_1i_2}K_0[N_{i_1i_2}|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)|]\left(\Sigma^{l\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2} \tag{6.146}$$

$$C_{l,a}^{I_1I_2}(\mathbf{k}) = 2N_A \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\delta_{A_1A_2}L_{\kappa_1\kappa_2}^a e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\frac{(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)}{2}} N_{i_1i_2}\frac{K_1[N_{i_1i_2}|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)|]}{|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)|}\left(\gamma^l C\right)_{\alpha_1\alpha_2} \tag{6.147}$$

mit $N_A = \eta_A N$ und $N_F = \eta_F N$, dabei sind $\eta_{F/A}$ reine Zahlen, und N ist nach Anhang D (D.39) bzw. (D.45) durch

$$N = \frac{m^2c^2}{\sqrt{\hbar c}} \tag{6.148}$$

gegeben.
Die Dualfunktionen werden über die Gleichung (4.11) konstruiert. Sie lauten:

$$R_{I_1I_2}^{l,a}(\mathbf{k}) = \frac{1}{N_A}\frac{1}{9\pi 2^9}\delta_{A_1A_2}(\gamma^l C)_{\alpha_1\alpha_2}^\dagger \bar{L}_{\kappa_1\kappa_2}^a \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\frac{(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)}{2}}}{(2\pi\hbar)^3}\frac{N_{i_1i_2}}{\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}}e^{-N_{i_1i_2}|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)|}, \tag{6.149}$$

$$R_{I_1I_2}^{l\nu,a}(\mathbf{k}) = \frac{1}{N_F}\frac{5}{9\pi 2^9}\delta_{A_1A_2}(\Sigma^{l\nu} C)_{\alpha_1\alpha_2}^\dagger \bar{L}_{\kappa_1\kappa_2}^a \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\frac{(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)}{2}}}{(2\pi\hbar)^3}\frac{N_{i_1i_2}^2}{\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}}e^{-N_{i_1i_2}|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)|}. \tag{6.150}$$

Bestimmung der Matrizen $L_{\kappa_1\kappa_2}^a$

Das Transformationsverhalten der Spinoren unter SU(3)-Transformationen lautet:

$$\psi_\kappa^{'} = \begin{pmatrix} e^{\left(i\alpha_k\lambda^k\right)} & 0 \\ 0 & e^{\left(-i\alpha_k\bar{\lambda}^k\right)} \end{pmatrix}_{\kappa\kappa'} \psi_{\kappa'}. \tag{6.151}$$

Daraus erhält man die Generatoren

$$G_k^C = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & -\bar{\lambda}_k \end{pmatrix}; \qquad G^F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.152}$$

G^F wirkt auf den Superspinindex. Es gilt $G^F|p\rangle = f|p\rangle$, und f ist die Fermionenzahl. G_k^C wirkt auf die Farbindizes.
Die Gluonwellenfunktion muß antisymmetrisch sein. Dies hat zur Folge, daß die Matrizen L^a schiefsymmetrisch sind. Aus den 6×6-Matrizen sind die schiefsymmetrischen Matrizen mit verschwindender Teilchenzahl auszuwählen.
Dies führt auf folgende neun Matrizen:

$$\begin{aligned} L^1 &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda^1 \\ -\bar\lambda^1 & 0 \end{pmatrix}, & L^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 \\ -\bar\lambda^2 & 0 \end{pmatrix}, & L^3 &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda^3 \\ -\bar\lambda^3 & 0 \end{pmatrix}, \\ L^4 &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda^4 \\ -\bar\lambda^4 & 0 \end{pmatrix}, & L^5 &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda^5 \\ -\bar\lambda^5 & 0 \end{pmatrix}, & L^6 &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda^6 \\ -\bar\lambda^6 & 0 \end{pmatrix}, \\ L^7 &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda^7 \\ -\bar\lambda^7 & 0 \end{pmatrix}, & L^8 &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda^8 \\ -\bar\lambda^8 & 0 \end{pmatrix}, & L^9 &= \begin{pmatrix} 0 & 1_3 \\ -1_3 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.153}$$

Die Matrizen $L^1 - L^8$ transformieren sich wie ein Oktett $\to$ Gluonen;
L^9 transformiert sich wie ein Singulett. Durch die Definitionen

$$\begin{aligned} \hat{L}^1 &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}(L^1 + iL^2), & \hat{L}^2 &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}(L^1 - iL^2), & \hat{L}^3 &= \tfrac{1}{2}L^3, \\ \hat{L}^4 &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}(L^4 + iL^5), & \hat{L}^5 &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}(L^4 - iL^5), & \hat{L}^6 &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}(L^6 + iL^7), \\ \hat{L}^7 &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}(L^6 - iL^7), & \hat{L}^8 &= \tfrac{1}{2}L^8, & \hat{L}^9 &= \tfrac{1}{6}L^9, \end{aligned} \tag{6.154}$$

wird eine Zuordnung der Quantenzahlen zu den Wellenfunktionen möglich, die in folgender Tabelle dargestellt ist.

	$\hat{L}^1$	$\hat{L}^2$	$\hat{L}^3$	$\hat{L}^4$	$\hat{L}^5$	$\hat{L}^6$	$\hat{L}^7$	$\hat{L}^8$	$\hat{L}^9$
G^F	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$(G_k^C)^2$	3	3	3	3	3	3	3	3	0
G_3^C	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
G_8^C	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0

Tabelle 6.1: Quantenzahlen der $\hat{L}^a$-Matrizen

6.3 Zusammenhang mit den phänomenologischen Größen

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß die $\rho^{(n)}(k_1 \dots k_n|p)$ Funktionen der bosonischen Funktionalzustände (4.2) mit den Matrixelementen der phänomenologischen Größen A_l^a und $F_{l\nu}^a$ zu identifizieren sind. Die Schwache Abbildung lautet:

$$\varphi^{(2n)}(I_1 \dots I_{2n}|p) = C_{k_1}^{\{I_1 I_2} \dots C_{k_n}^{I_{2n-1} I_{2n}\}} \rho^{(n)}(k_1 \dots k_n|p). \tag{6.155}$$

Wird die erster Ordnung betrachtet, so schreibt sich $\varphi^{(2)}$ als

$$\varphi^{(2)}(I_1 I_2|p) = C_q^{I_1 I_2} \rho^{(1)}(q|p). \tag{6.156}$$

Wird dies mit Gleichung (6.143)

$$\varphi^{(2)}(I_1 I_2|p) = F_{l\nu}^a(k) C_{l\nu,a}^{I_1 I_2}(k) + A_l^a(k) C_{l,a}^{I_1 I_2}(k) \tag{6.157}$$

verglichen, dann sind die Koeffizientenfunktionen $F_{l\nu}^a$ und A_l^a mit den $\rho^{(1)}(q|p)$-Funktionen zu identifizieren. Zu dem selben Ergebnis führt der Vergleich der ersten Ordnung der Funktionale $|\,\mathcal{F}(j,p)\rangle$ und $|\,\widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle$:

$$\varphi^{(2)}(I_1 I_2|p) j_{I_1} j_{I_2} |0\rangle_F = \rho^{(1)}(q|p) b_q |0\rangle_B. \tag{6.158}$$

Einsetzen von (6.157) ergibt:

$$\begin{aligned} &\left(F_{l\nu}^a(k) C_{l\nu,a}^{I_1 I_2}(k) + A_l^a(k) C_{l,a}^{I_1 I_2}(k)\right) j_{I_1} j_{I_2} |0\rangle_F \\ &= F_{l\nu}^a(k) C_{l\nu,a}^{I_1 I_2}(k) j_{I_1} j_{I_2} |0\rangle_F + A_l^a(k) C_{l,a}^{I_1 I_2}(k) j_{I_1} j_{I_2} |0\rangle_F. \end{aligned}$$

Mit $b_q = C_q^{I_1 I_2} j_{I_1} j_{I_2}$ ergibt sich

$$F_{l\nu}^a(k) b_{l\nu,a}(k)|0\rangle_B + A_l^a(k) b_{l,a}(k)|0\rangle_B = \rho^{(1)}(l\nu, a|p) b_{l\nu,a}(k)|0\rangle_B + \rho^{(1)}(l, a|p) b_{l,a}(k)|0\rangle_B. \tag{6.159}$$

Die Größen A und F sind Matrixelemente und werden als die phänomenologischen Größen Vektorpotential und Feldstärketensor interpretiert. Dies ist in Analogie zur Quantenmechanik in der z.B. der Ort als $\bar{x} = \int dx \psi^* \hat{x} \psi$ gegeben ist.

Kapitel 7

Auswertung der Schwachen Abbildung

In Kapitel 4 wurde die Schwache Abbildung auf das Ein-Zweikörperproblem angewandt und folgende Funktionalgleichung abgeleitet:

$$E_{p0} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle =$$
$$2\hat{K}_{I_1I_2} C^{I_2K}_{2,k_1} R^{2,k_2}_{I_1K} b_{k_2} \partial^b_{k_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.1}$$
$$+\hat{K}_{I_1I_2} C^{I_2}_{1,l_1} R^{1,l_2}_{I_1} f_{l_2} \partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.2}$$
$$+6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} C^{I_2I_3}_{2,k_1} C^{I_4K}_{2,k_2} R^{2,k_3}_{I_1K} b_{k_3} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.3}$$
$$+3\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} C^{I_2I_3}_{2,k} C^{I_4}_{1,l_1} R^{1,l_2}_{I_1} f_{l_2} \partial^b_{k} \partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.4}$$
$$-4\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} C^{I_2K_1}_{2,k_1} C^{I_3K_2}_{2,k_2} C^{I_4K_3}_{2,k_3} R^{2,k_4}_{I_1K_1} R^{2,k_5}_{K_2K_3} b_{k_4} b_{k_5} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \partial^b_{k_3} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.5}$$
$$-6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} C^{I_2K_1}_{2,k_1} C^{I_3K_2}_{2,k_2} C^{I_4}_{1,l_1} R^{1,l_2}_{I_1} R^{2,k_3}_{K_1K_2} f_{l_2} b_{k_3} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.6}$$
$$+6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} C^{I_2K_1}_{2,k_1} C^{I_3}_{1,l_1} C^{I_4}_{1,l_2} R^{2,k_2}_{I_1K_1} b_{k_2} \partial^b_{k_1} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.7}$$
$$+\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} C^{I_2}_{1,l_1} C^{I_3}_{1,l_2} C^{I_4}_{1,l_3} R^{1,l_4}_{I_1} f_{l_4} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \partial^f_{l_3} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.8}$$
$$-6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} F^t_{I_4K} C^{I_2I_3}_{2,k} R^{2,k_2}_{I_1K} b_{k_2} \partial^b_{k} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.9}$$
$$+12\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} F^t_{I_4K} C^{I_2K_1}_{2,k_1} C^{I_3K_2}_{2,k_2} R^{2,k_3}_{I_1K} R^{2,k_4}_{K_1K_2} b_{k_3} b_{k_4} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.10}$$
$$+12\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} F^t_{I_4K} C^{I_2K_1}_{2,k} C^{I_2}_{1,l} R^{1,l_2}_{I_3} R^{2,k_2}_{KK_1} f_{l_2} b_{k_2} \partial^f_{l} \partial^b_{k} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.11}$$
$$-6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} F^t_{I_4K} C^{I_2}_{1,l_1} C^{I_3}_{1,l_2} R^{2,k_1}_{I_1K} b_{k_1} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.12}$$
$$+4\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} (3F^t_{I_4K_1} F^t_{I_3K_2} + \frac{1}{4} A_{I_4K_1} A_{I_3K_2}) C^{I_2K}_{2,k_1} R^{2,k_2}_{I_1K_1} R^{2,k_3}_{K_2K} b_{k_2} b_{k_3} \partial^b_{k_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.13}$$
$$+2\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} (3F^t_{I_4K_1} F^t_{I_3K_2} + \frac{1}{4} A_{I_4K_1} A_{I_3K_2}) C^{I_2}_{1,l_1} R^{1,l_2}_{I_1} R^{2,k}_{K_1K_2} f_{l_2} b_{k} \partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.14}$$
$$-4\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} (3F^t_{I_4K_1} F^t_{I_3K_2} + \frac{1}{4} A_{I_4K_1} A_{I_3K_2}) F^t_{I_2K_3} R^{2,k_1}_{I_1K_1} R^{2,k_2}_{K_2K_3} b_{k_1} b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle . \tag{7.15}$$

Werden die verschiedenen Terme abgeschätzt, [3] und [28] bzw. Anhang H, bleibt die nachfolgende Funktionalgleichung:

$$E_{p0} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle = \hat{K}_{I_1 I_2} C^{I_2}_{1,l_1} R^{1,l_2}_{I_1} f_{l_2} \partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.16}$$
$$+\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2}_{1,l_1} C^{I_3}_{1,l_2} C^{I_4}_{1,l_3} R^{1,l_4}_{I_1} f_{l_4} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \partial^f_{l_3} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.17}$$
$$+2\hat{K}_{I_1 I_2} C^{I_2 K}_{2,q_1} R^{2,q_2}_{I_1 K} b_{q_2} \partial^b_{q_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.18}$$
$$-6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F^{(t)}_{I_4 K} C^{I_2 I_3}_{2,q'} R^{2,q}_{I_1 K} b_q \partial^b_{q'} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.19}$$
$$+6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 I_3}_{2,q'} C^{I_4 K}_{2,q''} R^{2,q}_{I_1 K} b_q \partial^b_{q'} \partial^b_{q''} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.20}$$
$$+3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 I_3}_{2,k} C^{I_4}_{1,l_1} R^{1,l_2}_{I_1} f_{l_2} \partial^b_k \partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.21}$$
$$-6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F^{(t)}_{I_4 K} C^{I_2}_{1,l_1} C^{I_3}_{1,l_2} R^{2,k_1}_{I_1 K} k_{k_1} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle. \tag{7.22}$$

Diese Terme gliedern sich in drei Kategorien. Die erste Kategorie sind die Terme (7.16) und (7.17), die die Quarkdynamik beschreiben, die zweite beschreibt die Gluonendynamik (7.18), (7.19) und (7.20), und schließlich beschreibt die dritte die Wechselwirkung der Gluonen mit den Quarks (7.21) und (7.22). Damit läßt sich diese Funktionalgleichung auch schreiben als:

$$E_{p0} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle = \mathcal{H} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.23}$$
$$= [\mathcal{H}_{\mathrm{ff}} + \mathcal{H}_{\mathrm{bb}} + \mathcal{H}_{\mathrm{bf}}] \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{7.24}$$

mit

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ff}} = \hat{K}_{I_1 I_2} C^{I_2}_{1,l_1} R^{1,l_2}_{I_1} f_{l_2} \partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle$$
$$+\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2}_{1,l_1} C^{I_3}_{1,l_2} C^{I_4}_{1,l_3} R^{1,l_4}_{I_1} f_{l_4} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \partial^f_{l_3} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle. \tag{7.25}$$

Dies sind die Terme (7.16) und (7.17).

$$\mathcal{H}_{\mathrm{bb}} = 2\hat{K}_{I_1 I_2} C^{I_2 K}_{2,q_1} R^{2,q_2}_{I_1 K} b_{q_2} \partial^b_{q_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle$$
$$-6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F^{(t)}_{I_4 K} C^{I_2 I_3}_{2,q'} R^{2,q}_{I_1 K} b_q \partial^b_{q'} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle$$
$$+6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 I_3}_{2,q'} C^{I_4 K}_{2,q''} R^{2,q}_{I_1 K} b_q \partial^b_{q'} \partial^b_{q''} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle. \tag{7.26}$$

Dies sind die Terme (7.18), (7.19) und (7.20).

$$\mathcal{H}_{\mathrm{bf}} = 3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 I_3}_{2,k} C^{I_4}_{1,l_1} R^{1,l_2}_{I_1} f_{l_2} \partial^b_k \partial^f_{l_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle$$
$$-6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F^{(t)}_{I_4 K} C^{I_2}_{1,l_1} C^{I_3}_{1,l_2} R^{2,k_1}_{I_1 K} k_{k_1} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle. \tag{7.27}$$

Dies sind die Terme (7.21) und (7.22). Diese Terme werden nun in den einzelnen Kapiteln ausgewertet.

7.1 Die Quarkdynamik

Die kinetische Energie der effektiven Quarkdynamik und die Selbstwechselwirkung der Quarks lautet:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ff}} = \hat{K}_{I_1 I_2} C^{I_2}_{1,l_1} R^{1,l_2}_{I_1} f_{l_2} \partial^f_{l_1} \tag{7.28}$$
$$+\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2}_{1,l_1} C^{I_3}_{1,l_2} C^{I_4}_{1,l_3} R^{1,l_4}_{I_1} f_{l_4} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \partial^f_{l_3}. \tag{7.29}$$

7.1.1 Die Kinetische Energie

Der Anteil der kinetischen Energie

$$\mathcal{H}^{\mathrm{kin}}_{\mathrm{ff}} = \hat{K}_{I_1 I_2} C^{I_2}_{1,l_1} R^{1,l_2}_{I_1} f_{l_2} \partial^f_{l_1} \tag{7.30}$$

wird in diesem Kapitel ausgewertet. Dazu werden die Größen (2.55), (6.93) und (6.96) eingesetzt. Dies ergibt:

$$
\begin{aligned}
&\hat{K}_{I_1 I_2} C^{I_2}_{1,l_2} R^{1,l_1}_{I_1} f_{l_1} \partial^f_{l_2} \\
&= \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \sum_{i_1 i_2} \sum_{\alpha_1\alpha_2} \sum_{\kappa_1\kappa_2} \sum_{A_1 A_2} \sum_{s_1 s_2} \sum_{AB} \sum_{\kappa\kappa'} \\
&\left(-i\hbar c \left(\gamma^0\gamma^k\right)_{\alpha_1\alpha_2} \partial_k(\mathbf{r}_1) + m_{i_1} c^2 \gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}\right) \delta_{A_1 A_2} \delta_{\kappa_1\kappa_2} \delta_{i_1 i_2} \delta\left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right) \\
&N(mc)^2(\tau-1)^3 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2} \lambda_{i_2} \frac{1}{\tau mc - m_{i_2} c} \hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_2}\left(\mathbf{k}_2, M\right) \delta^{\kappa_2}_{\kappa'} \delta^{A_2}_{B} \\
&\frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{(\tau-1)^3 (mc)^2} N e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1} \frac{1}{\lambda_{i_1}} (\tau mc - m_{i_1} c) \hat{u}^{\dagger\,(s_1)}_{\alpha_1}\left(\mathbf{k}_1, M\right) \delta^{\kappa_1}_{\kappa} \delta^{A_1}_{A} \\
&f_{s_1,\kappa,A}\left(\mathbf{k}_1\right) \partial^f_{s_2,\kappa',B}\left(\mathbf{k}_2\right) \\[2ex]
&= \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \sum_{i_1} \sum_{\alpha_1\alpha_2} \sum_{\kappa_1} \sum_{A_1} \sum_{s_1 s_2} \sum_{AB} \sum_{\kappa\kappa'} \left(-i\hbar c \left(\gamma^0\gamma^k\right)_{\alpha_1\alpha_2} \partial_k(\mathbf{r}_1) + m_{i_1} c^2 \gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}\right) \\
&N(mc)^2(\tau-1)^3 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_1} \lambda_{i_1} \frac{1}{\tau mc - m_{i_1} c} \hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_2}\left(\mathbf{k}_2, M\right) \delta^{\kappa_1}_{\kappa'} \delta^{A_1}_{B} \\
&\frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{(\tau-1)^3 (mc)^2} N e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1} \frac{1}{\lambda_{i_1}} (\tau mc - m_{i_1} c) \hat{u}^{\dagger\,(s_1)}_{\alpha_1}\left(\mathbf{k}_1, M\right) \delta^{\kappa_1}_{\kappa} \delta^{A_1}_{A} f_{s_1,\kappa,A}\left(\mathbf{k}_1\right) \partial^f_{s_2,\kappa',B}\left(\mathbf{k}_2\right) \\[2ex]
&= \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \sum_{i_1} \sum_{\alpha_1\alpha_2} \sum_{s_1 s_2} \sum_{AB} \sum_{\kappa\kappa'} \left(-i\hbar c \left(\gamma^0\gamma^k\right)_{\alpha_1\alpha_2} \partial_k(\mathbf{r}_1) + m_{i_1} c^2 \gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}\right) \\
&\frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} N^2 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}_2\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{r}_1)} \hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_2}\left(\mathbf{k}_2, M\right) \hat{u}^{\dagger\,(s_1)}_{\alpha_1}\left(\mathbf{k}_1, M\right) \delta_{\kappa\kappa'} \delta_{AB} f_{s_1,\kappa,A}\left(\mathbf{k}_1\right) \partial^f_{s_2,\kappa',B}\left(\mathbf{k}_2\right) \\[2ex]
&= \int d\mathbf{r}_1 \sum_{\alpha_1\alpha_2} \sum_{s_1 s_2} \left(-i\hbar c \left(\gamma^0\gamma^k\right)_{\alpha_1\alpha_2} \partial_k(\mathbf{r}_1) + mc^2 \gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}\right) \\
&\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} N \int d\mathbf{k}_1 e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1} \hat{u}^{\dagger\,(s_1)}_{\alpha_1}\left(\mathbf{k}_1, M\right) f_{s_1,\kappa,A}\left(\mathbf{k}_1\right) \quad \int d\mathbf{k}_2 N e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_1} \hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_2}\left(\mathbf{k}_2, M\right) \partial^f_{s_2,\kappa,A}\left(\mathbf{k}_2\right) \\[2ex]
&= \int d\mathbf{r} \left(-i\hbar c \left(\gamma^0\gamma^k\right)_{\alpha_1\alpha_2} \partial_k(\mathbf{r}) + mc^2 \gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}\right) f_{\alpha_1,\kappa,A}\left(\mathbf{r}\right) \partial^f_{\alpha_2,\kappa,A}\left(\mathbf{r}\right)
\end{aligned}
\tag{7.31}
$$

mit den Definitionen:

$$
f_{\alpha,\kappa,A}\left(\mathbf{r}\right) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{\frac{|E| + Mc^2}{2|E|}} \int d\mathbf{k}\; e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}} u^{\dagger(s_1)}_{\alpha}\left(\mathbf{k}\right) f_{s_1,\kappa,A}\left(\mathbf{k}\right), \tag{7.32}
$$

$$
\partial^f_{\beta,\kappa,A}\left(\mathbf{r}\right) = \sqrt{\frac{|E| + Mc^2}{2|E|}} \int d\mathbf{k}\; e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}} u^{(s_1)}_{\beta}\left(\mathbf{k}\right) \partial^f_{s_1,\kappa,A}\left(\mathbf{k}\right). \tag{7.33}
$$

7.1.2 Die Selbstwechselwirkung

Die Selbstwechselwirkung der Quarks lautet:

$$
\mathcal{H}^{\mathrm{WW}}_{\mathrm{ff}} = \hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2}_{1,l_1} C^{I_3}_{1,l_2} C^{I_4}_{1,l_3} R^{1,l_4}_{I_1} f_{l_4} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \partial^f_{l_3}. \tag{7.34}
$$

Einsetzen der entsprechenden Größen und Summation bzw. Integration führt auf:

$$\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2}_{1,l_2} C^{I_3}_{1,l_3} C^{I_4}_{1,l_4} R^{1,l_1}_{I_1} f_{l_1} \partial^f_{l_2} \partial^f_{l_3} \partial^f_{l_4}$$

$$= \iiiint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \iiiint d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \sum_{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4} \sum_{A_1 A_2 A_3 A_4} \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} \sum_{B_1 B_2 B_3 B_4} \sum_{\kappa'_1 \kappa'_2 \kappa'_3 \kappa'_4}$$
$$gc\lambda_{i_1} B_{i_2 i_3 i_4} \left(\gamma^0_{\alpha_1 \alpha_2} C_{\alpha_3 \alpha_4} - \left(\gamma^0 \gamma^5\right)_{\alpha_1 \alpha_2} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_3 \alpha_4} \right) \delta_{A_1 A_2} \delta_{A_3 A_4} \delta_{\kappa_1 \kappa_2} L^0_{\kappa_3 \kappa_4}$$
$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)$$
$$N(mc)^2 (\tau - 1)^3 e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2} \lambda_{i_2} \frac{1}{\tau - \frac{m_{i_2}}{m}} \hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_2} (\mathbf{k}_2, M) \, \delta^{\kappa_2}_{\kappa'_2} \delta^{A_2}_{B_2}$$
$$N(mc)^2 (\tau - 1)^3 e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{k}_3 \mathbf{r}_3} \lambda_{i_3} \frac{1}{\tau mc - m_{i_3} c} \hat{u}^{(s_3)}_{\alpha_3} (\mathbf{k}_3, M) \, \delta^{\kappa_3}_{\kappa'_3} \delta^{A_3}_{B_3}$$
$$N(mc)^2 (\tau - 1)^3 e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{k}_4 \mathbf{r}_4} \lambda_{i_4} \frac{1}{\tau mc - m_{i_4} c} \hat{u}^{(s_4)}_{\alpha_4} (\mathbf{k}_4, M) \, \delta^{\kappa_4}_{\kappa'_4} \delta^{A_4}_{B_4}$$
$$\frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{(\tau - 1)^3 (mc)^2} N e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1} \frac{1}{\lambda_{i_1}} (\tau mc - m_{i_1} c) \hat{u}^{\dagger\,(s_1)}_{\alpha_1} (\mathbf{k}_1, M) \, \delta^{\kappa_1}_{\kappa'_1} \delta^{A_1}_{B_1}$$
$$f_{s_1, \kappa'_1, B_1} (\mathbf{k}_1) \, \partial^f_{s_2, \kappa'_2, B_2} (\mathbf{k}_2) \, \partial^f_{s_3, \kappa'_3, B_3} (\mathbf{k}_3) \, \partial^f_{s_4, \kappa'_4, B_4} (\mathbf{k}_4)$$

$$= \int d\mathbf{r}_1 \iiiint d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \sum_{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4} \sum_{A_1 A_3} \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} \sum_{B_1 B_2 B_3 B_4} \sum_{\kappa'_1 \kappa'_2 \kappa'_3 \kappa'_4}$$
$$gc\lambda_{i_1} B_{i_2 i_3 i_4} \left(\gamma^0_{\alpha_1 \alpha_2} C_{\alpha_3 \alpha_4} - \left(\gamma^0 \gamma^5\right)_{\alpha_1 \alpha_2} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_3 \alpha_4} \right) L^0_{\kappa_2 \kappa_3}$$
$$N(mc)^2 (\tau - 1)^3 e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_1} \lambda_{i_2} \frac{1}{\tau mc - m_{i_2} c} \hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_2} (\mathbf{k}_2, M) \, \delta^{\kappa_1}_{\kappa'_2} \delta^{A_1}_{B_2}$$
$$N(mc)^2 (\tau - 1)^3 e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{k}_3 \mathbf{r}_1} \lambda_{i_3} \frac{1}{\tau mc - m_{i_3} c} \hat{u}^{(s_3)}_{\alpha_3} (\mathbf{k}_3, M) \, \delta^{\kappa_3}_{\kappa'_3} \delta^{A_3}_{B_3}$$
$$N(mc)^2 (\tau - 1)^3 e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{k}_4 \mathbf{r}_1} \lambda_{i_4} \frac{1}{\tau mc - m_{i_4} c} \hat{u}^{(s_4)}_{\alpha_4} (\mathbf{k}_4, M) \, \delta^{\kappa_4}_{\kappa'_4} \delta^{A_3}_{B_4}$$
$$\frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{(\tau - 1)^3 (mc)^2} N e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1} \frac{1}{\lambda_{i_1}} (\tau mc - m_{i_1} c) \hat{u}^{\dagger\,(s_1)}_{\alpha_1} (\mathbf{k}_1, M) \, \delta^{\kappa_1}_{\kappa'_1} \delta^{A_1}_{B_1}$$
$$f_{s_1, \kappa'_1, B_1} (\mathbf{k}_1) \, \partial^f_{s_2, \kappa'_2, B_2} (\mathbf{k}_2) \, \partial^f_{s_3, \kappa'_3, B_3} (\mathbf{k}_3) \, \partial^f_{s_4, \kappa'_4, B_4} (\mathbf{k}_4)$$

$$= \int d\mathbf{r}_1 \iiiint d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \sum_{\kappa_3 \kappa_4} \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} \sum_{B_1 B_2 B_3 B_4} \sum_{\kappa'_1 \kappa'_2 \kappa'_3 \kappa'_4}$$
$$gc\lambda_{i_1} B_{i_2 i_3 i_4} \left(\gamma^0_{\alpha_1 \alpha_2} C_{\alpha_3 \alpha_4} - \left(\gamma^0 \gamma^5\right)_{\alpha_1 \alpha_2} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_3 \alpha_4} \right) L^0_{\kappa_2 \kappa_3}$$
$$N(mc)^2 (\tau - 1)^3 e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_1} \lambda_{i_2} \frac{1}{\tau mc - m_{i_2} c} \hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_2} (\mathbf{k}_2, M)$$
$$N(mc)^2 (\tau - 1)^3 e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{k}_3 \mathbf{r}_1} \lambda_{i_3} \frac{1}{\tau mc - m_{i_3} c} \hat{u}^{(s_3)}_{\alpha_3} (\mathbf{k}_3, M) \, \delta^{\kappa_3}_{\kappa'_3}$$
$$N(mc)^2 (\tau - 1)^3 e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{k}_4 \mathbf{r}_1} \lambda_{i_4} \frac{1}{\tau mc - m_{i_4} c} \hat{u}^{(s_4)}_{\alpha_4} (\mathbf{k}_4, M) \, \delta^{\kappa_4}_{\kappa'_4}$$
$$\frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{(\tau - 1)^3 (mc)^2} N e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1} \frac{1}{\lambda_{i_1}} (\tau mc - m_{i_1} c) \hat{u}^{\dagger\,(s_1)}_{\alpha_1} (\mathbf{k}_1, M)$$

$$\delta_{\kappa_1'\kappa_2'}\delta_{B_1B_2}\delta_{B_4B_3}f_{s_1,\kappa_1',B_1}\left(\mathbf{k}_1\right)\partial^f_{s_2,\kappa_2',B_2}\left(\mathbf{k}_2\right)\partial^f_{s_3,\kappa_3',B_3}\left(\mathbf{k}_3\right)\partial^f_{s_4,\kappa_4',B_4}\left(\mathbf{k}_4\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int d\mathbf{r}_1 \sum_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\sum_{s_1s_2s_3s_4}\sum_{B_1B_3}\sum_{\kappa_1'\kappa_3'\kappa_4'} \\
&\frac{1}{3}gc(mc)^2(\tau-1)^3(mc)^2(\tau-1)^3\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}C_{\alpha_3\alpha_4}-\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_3\alpha_4}\right)L^0_{\kappa_3'\kappa_4'} \\
&\sum_{i_2}\lambda_{i_2}\frac{1}{\tau mc-m_{i_2}c}\sum_{i_3}\lambda_{i_3}\frac{1}{\tau mc-m_{i_3}c}\sum_{i_4}\lambda_{i_4}\frac{1}{\tau mc-m_{i_4}c}\sum_{i_1}(\tau mc-m_{i_1}c) \\
&\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}N\int d\mathbf{k}_1\sum_{s_1}e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\hat{u}^{\dagger(s_1)}_{\alpha_1}\left(\mathbf{k}_1,M\right)f_{s_1,\kappa_1',B_1}\left(\mathbf{k}_1\right) \\
&N\int d\mathbf{k}_2\sum_{s_2}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_2}\left(\mathbf{k}_2,M\right)\partial^f_{s_2,\kappa_1',B_1}\left(\mathbf{k}_2\right) \\
&N\int d\mathbf{k}_3\sum_{s_3}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_3)}_{\alpha_3}\left(\mathbf{k}_3,M\right)\partial^f_{s_3,\kappa_3',B_3}\left(\mathbf{k}_3\right) \\
&N\int d\mathbf{k}_4\sum_{s_4}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_4\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_4)}_{\alpha_4}\left(\mathbf{k}_4,M\right)\partial^f_{s_4,\kappa_4',B_3}\left(\mathbf{k}_4\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d\mathbf{r}\sum_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\sum_{AB}\sum_{\kappa_1'\kappa_3'\kappa_4'} \\
&\frac{1}{3}gc(mc)^4(\tau-1)^6\frac{1}{m^8c^8}\frac{1}{(\tau-1)^9}3(\tau-1)\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}C_{\alpha_3\alpha_4}-\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_3\alpha_4}\right)L^0_{\kappa_3'\kappa_4'} \\
&f_{\alpha_1,\kappa_1',A}\left(\mathbf{r}\right)\partial^f_{\alpha_2,\kappa_1',A}\left(\mathbf{r}\right)\partial^f_{\alpha_3,\kappa_3',B}\left(\mathbf{r}\right)\partial^f_{\alpha_4,\kappa_4',B}\left(\mathbf{r}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d\mathbf{r}\frac{gc}{(mc)^4(\tau-1)^4}\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}C_{\alpha_3\alpha_4}-\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_3\alpha_4}\right)L^0_{\kappa_3'\kappa_4'} \\
&f_{\alpha_1,\kappa_1',A}\left(\mathbf{r}\right)\partial^f_{\alpha_2,\kappa_1',A}\left(\mathbf{r}\right)\partial^f_{\alpha_3,\kappa_3',B}\left(\mathbf{r}\right)\partial^f_{\alpha_4,\kappa_4',B}\left(\mathbf{r}\right). \qquad (7.35)
\end{aligned}$$

7.1.3 Zusammenfassung

Werden die Ergebnisse (7.31) und (7.35) in (7.28) und (7.29) eingesetzt, schreibt sich der Anteil der Quarkdynamik als:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathrm{ff}} &= \hat{K}_{I_1I_2}C^{I_2}_{1,l_1}R^{1,l_2}_{I_1}f_{l_2}\partial^f_{l_1}+\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2}_{1,l_1}C^{I_3}_{1,l_2}C^{I_4}_{1,l_3}R^{1,l_4}_{I_1}f_{l_4}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2}\partial^f_{l_3} \\
&= \int d\mathbf{r}\left[-i\hbar c\gamma^k\partial_k+mc^2\right]_{\alpha\beta}f_{\alpha,\kappa,A}\left(\mathbf{r}\right)\partial^f_{\beta,\kappa,A}\left(\mathbf{r}\right) \\
&+\int d\mathbf{r}\frac{gc}{(mc)^4(\tau-1)^2}\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}C_{\alpha_3\alpha_4}-\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_3\alpha_4}\right)L^0_{\kappa_3'\kappa_4'} \\
&f_{\alpha_1,\kappa_1',A}\left(\mathbf{r}\right)\partial^f_{\alpha_2,\kappa_1',A}\left(\mathbf{r}\right)\partial^f_{\alpha_3,\kappa_2'c,B}\left(\mathbf{r}\right)\partial^f_{\alpha_4,\kappa_4',B}\left(\mathbf{r}\right). \qquad (7.36)
\end{aligned}$$

7.2 Die Gluonendynamik

In diesem Kapitel wird der Gluonenanteil ausgewertet. Er lautet :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{bb} &= 2\hat{K}_{I_1I_2}C^{I_2K}_{2,q_1}R^{2,q_2}_{I_1K}b_{q_2}\partial^b_{q_1}\\ &-6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}F_{I_4K}C^{I_2I_3}_{2,q'}R^{2,q}_{I_1K}b_q\partial^b_{q'}\\ &+6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{2,q'}C^{I_4K}_{2,q''}R^{2,q}_{I_1K}b_q\partial^b_{q'}\partial^b_{q''}\\ &= \mathcal{H}^{\text{Kin.}}_{bb}+\mathcal{H}^{\text{Masse}}_{bb}+\mathcal{H}^{\text{Ww.}}_{bb}. \end{aligned} \tag{7.37}$$

7.2.1 Die Kinetische Energie

Der Operator der kinetischen Energie wird in vier Anteile zerlegt, die sich durch die Spinquantenzahlen ergeben.

$$\mathcal{H}^{\text{Kin.}}_{bb} = 2\hat{K}_{I_1I_2}\; C^{I_2K}_{2,k_1}\; R^{2,k_2}_{I_1K}\; b_{k_2}\; \partial^b_{k_1} \tag{7.38}$$

$$= 2\hat{K}_{I_1I_2}\; C^{I_2K}_{l,a}(\mathbf{k})\; R^{l',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\; b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}) \tag{7.39}$$

$$+\, 2\hat{K}_{I_1I_2}\; C^{I_2K}_{l,a}(\mathbf{k})\; R^{l'\nu',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}) \tag{7.40}$$

$$+\, 2\hat{K}_{I_1I_2}\; C^{I_2K}_{l\nu,a}(\mathbf{k})\; R^{l',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\; b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\; \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}) \tag{7.41}$$

$$+\, 2\hat{K}_{I_1I_2}\; C^{I_2K}_{l\nu,a}(\mathbf{k})\; R^{l'\nu',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\; \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}) \tag{7.42}$$

Der Anteil $b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\;\partial^A_{l,a}(\mathbf{k})$

$$\begin{aligned}&2\hat{K}_{I_1I_2}\; C^{I_2K}_{l,a}(\mathbf{k})\; R^{l',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\; b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}) \\ &= 2\iint d\mathbf{k}d\mathbf{k}' \iiint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}' \left(-i\hbar c\left(\gamma^0\gamma^k\right)_{\alpha_1\alpha_2}\partial_k(r_1)+m_{i_1}c^2\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}\right)\delta_{A_1A_2}\delta_{\kappa_1\kappa_2}\delta_{i_1i_2}\delta\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\right)\\ &2N_A\lambda_{i_2}\lambda_j\delta_{A_2B}L^a_{\kappa_2\kappa}e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}')}N_{i_2j}\frac{K_1[N_{i_2j}|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}'|}\left(\gamma^l C\right)_{\alpha_2\alpha}\\ &\left(9\pi 2^9(2\pi\hbar)^3\right)^{-1}\frac{1}{N_A}\frac{N_{i_1j}}{\lambda_{i_1}\lambda_j}\delta_{A_1B}\left(L^{a'}\right)^*_{\kappa_1\kappa}\left(\gamma^{l'}C\right)^\dagger_{\alpha_1\alpha}e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}'(\mathbf{r}_1+\mathbf{r})}e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\; b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\;\partial^A_{l,a}(\mathbf{k}).\end{aligned} \tag{7.43}$$

Summation über die Indizes $A_1, A_2, B, \kappa_1, \kappa_2, \kappa$ und i_2 sowie Integration über r_2 ergibt:

$$\begin{aligned}&2\hat{K}_{I_1I_2}\; C^{I_2K}_{l,a}(\mathbf{k})\; R^{l',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\; b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}) \\ &= \frac{96}{9\pi 2^9(2\pi\hbar)^3}\delta_{aa'}\iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}' \left(-i\hbar c\left(\gamma^0\gamma^k\right)_{\alpha_1\alpha_2}\partial_k(r_1)+m_{i_1}c^2\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}\right)\left(\gamma^l C\right)_{\alpha_2\alpha}\left(\gamma^{l'}C\right)^\dagger_{\alpha_1\alpha}\\ &\iint d\mathbf{k}d\mathbf{k}'\; e^{\frac{i}{2\hbar}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}N^2_{i_1j}\frac{K_1[N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\; b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\;\partial^A_{l,a}(\mathbf{k}).\end{aligned} \tag{7.44}$$

Einführen der Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}'}{2} = \mathbf{r}, \tag{7.45}$$

$$\mathbf{r}_1-\mathbf{r}' = \mathbf{u} \tag{7.46}$$

und Ausführen der restlichen Summationen ergibt:

$$\begin{aligned}&2\hat{K}_{I_1I_2}\; C^{I_2K}_{l,a}(\mathbf{k})\; R^{l',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\; b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{3\pi 2^4(2\pi\hbar)^3}\iint d\mathbf{r}d\mathbf{u}\left(-i\hbar c\mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^k\gamma^l C(\gamma^{l'}C)^*\right]\left(\frac{1}{2}\partial_k(r)+\partial_k(u)\right)+m_{i_1}c^2\mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^l C(\gamma^{l'}C)^*\right]\right)\\ &\iint d\mathbf{k}d\mathbf{k}'\; e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}}N^2_{i_1j}\frac{K_1[N_{i_1j}u]}{u}e^{-N_{i_1j}u}\;\delta_{aa'}\; b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\;\partial^A_{l,a}(\mathbf{k}).\end{aligned} \tag{7.47}$$

Die Einführung fouriertransformierter Quellen

$$b^A_{l',a'}(\mathbf{r}) = (2\pi\hbar)^{-3} \int e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}'\mathbf{r}}\; b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')d\mathbf{k}', \tag{7.48}$$

$$\partial^A_{l,a}(\mathbf{r}) = \int e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}}\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k})d\mathbf{k} \tag{7.49}$$

führt auf:

$$\begin{aligned}
&2\hat{K}_{I_1I_2}\; C^{I_2K}_{l,a}(\mathbf{k})\; R^{l',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\; b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\; \partial^A_{l,a}(\ bfk) \\
&= \frac{1}{3\pi 2^4} \iint d\mathbf{r}d\mathbf{u}\; \left(-i\hbar c\mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^k\gamma^l C(\gamma^{l'}C)^*\right]\left(\frac{1}{2}\partial_k(r) + \partial_k(u)\right) + m_{i_1}c^2\mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^l C(\gamma^{l'}C)^*\right]\right) \\
&\int d\mathbf{r}d\mathbf{u}\; N^2_{i_1j}\frac{K_1[N_{i_1j}u]}{u}e^{-N_{i_1j}u}\;\; \delta_{aa'}\; b^A_{l',a'}(\mathbf{r}')\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{7.50}$$

Die Spuren ergeben:

$$\mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^k\gamma^l C(\gamma^{l'}C)^*\right] = 0\;, \tag{7.51}$$

$$\mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^l C(\gamma^{l'}C)^*\right] = 0\;, \tag{7.52}$$

und damit verschwindet dieser Anteil:

$$2\hat{K}_{I_1I_2}\; C^{I_2K}_{l,a}(\mathbf{k})\; R^{l',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\; b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}) = 0. \tag{7.53}$$

Der Anteil $b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k})$

$$\begin{aligned}
&2\hat{K}_{I_1I_2}\; C^{I_2K}_{l,a}(\mathbf{k})\; R^{l'\nu',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}) \\
&= 2\iiint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}' \iint d\mathbf{k}d\mathbf{k}'\; \left(-i\hbar c\left(\gamma^0\gamma^k\right)_{\alpha_1\alpha_2}\partial_k(r_1) + m_{i_1}c^2\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}\right)\delta_{A_1A_2}\delta_{\kappa_1\kappa_2}\delta_{i_1i_2}\delta\left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right) \\
&2N_A\lambda_{i_2}\lambda_j\delta_{A_2B}L^a_{\kappa_2\kappa}e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}')}N_{i_2j}\frac{K_1[N_{i_2j}|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}'|}\left(\gamma^l C\right)_{\alpha_2\alpha} \\
&5\left(9\pi 2^9(2\pi\hbar)^3\right)^{-1}\frac{1}{N_F}\frac{N^2_{i_1j}}{\lambda_{i_1}\lambda_j}\delta_{A_1B}\left(L^{a'}\right)^*_{\kappa_1\kappa}\left(\Sigma^{l'\nu'}C\right)^\dagger_{\alpha_1\alpha}e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}'(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}).
\end{aligned} \tag{7.54}$$

Summation über die Indizes $A_1, A_2, B, \kappa_1, \kappa_2, \kappa$ und i_2 sowie Integration über r_2 ergibt:

$$\begin{aligned}
&2\hat{K}_{I_1I_2}\; C^{I_2K}_{l,a}(\mathbf{k})\; R^{l'\nu',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}) \\
&= \frac{5}{3\pi 2^4(2\pi\hbar)^3}\frac{N_A}{N_F}\iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}'\; \left(-i\hbar c\left(\gamma^0\gamma^k\right)_{\alpha_1\alpha_2}\partial_k(r_1) + m_{i_1}c^2\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}\right)\left(\gamma^l C\right)_{\alpha_2\alpha}\left(\Sigma^{l'\nu'}C\right)^\dagger_{\alpha_1\alpha} \\
&\iint d\mathbf{k}d\mathbf{k}'\; e^{\frac{i}{2\hbar}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}N^3_{i_1j}\frac{K_1[N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\;\delta_{aa'}\; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}).
\end{aligned} \tag{7.55}$$

Mit Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}'}{2} = \mathbf{r}, \tag{7.56}$$

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}' = \mathbf{u} \tag{7.57}$$

ergibt sich:

$$2\hat{K}_{I_1I_2}\; C^{I_2K}_{l,a}(\mathbf{k})\; R^{l'\nu',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}) \tag{7.58}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{5}{3\pi 2^4 (2\pi\hbar)^3} \frac{N_A}{N_F} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{u} \\
&\left(-i\hbar c \mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^k\gamma^l C(\Sigma^{l'\nu'}C)^*\right] \left(\frac{1}{2}\partial_k(r) + \partial_k(u)\right) + m_{i_1}c^2 \mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^l C(\Sigma^{l'\nu'}C)^*\right]\right) \\
&\iint d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \; e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} N_{i_1 j}^3 \frac{K_1[N_{i_1 j} u]}{u} e^{-N_{i_1 j} u} \; \delta_{aa'} \; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}') \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}).
\end{aligned}
$$

Das Einführen fouriertransformierter Quellen:

$$
b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{r}) = (2\pi\hbar)^{-3} \int d\mathbf{k}' e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}'\mathbf{r}} \; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}'), \tag{7.59}
$$

$$
\partial^A_{l,a}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{k} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}} \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}) \tag{7.60}
$$

führt auf

$$
\begin{aligned}
&2\hat{K}_{I_1 I_2} \; C^{I_2 K}_{l,a}(\mathbf{k}) \; R^{l'\nu,a'}_{I_1 K}(\mathbf{k}') \; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}') \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}) \\
&= \frac{5}{3\pi 2^4} \frac{N_A}{N_F} \delta_{aa'} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{u} \\
&\left(-i\hbar c \; \mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^k\gamma^l C(\Sigma^{l'\nu'}C)^*\right] \left(\frac{1}{2}\partial_k(r) + \partial_k(u)\right) + m_{i_1}c^2 \; \mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^l C(\Sigma^{l'\nu'}C)^*\right]\right) \\
&N_{i_1 j}^3 \frac{K_1[N_{i_1 j} u]}{u} e^{-N_{i_1 j} u} \;\; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{r}) \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{7.61}
$$

Die Spuren ergeben:

$$
\mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^k\gamma^l C(\Sigma^{l'\nu'}C)^*\right] = 0, \tag{7.62}
$$

$$
\mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^l C(\Sigma^{l'\nu'}C)^*\right] = 4i\delta_{\nu'0}\delta_{ll'}. \tag{7.63}
$$

Nach Anhang C, Gleichung (C.12) ergibt

$$
\int d\mathbf{u} \sum_{i_1 j} m_{i_1} N_{i_1 j}^3 \frac{K_1[N_{i_1 j} u]}{u} e^{-N_{i_1 j} u} = 24\pi \frac{m^2 c}{\hbar}. \tag{7.64}
$$

Mit diesen Ergebnissen schreibt sich (7.61) als:

$$
\begin{aligned}
&2\hat{K}_{I_1 I_2} \; C^{I_2 K}_{l,a}(\mathbf{k}) \; R^{l'\nu',a'}_{I_1 K}(\mathbf{k}') \; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}') \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}) \\
&= \frac{5i}{12\pi} \frac{N_A}{N_F} \delta_{aa'} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{u} \; m_{i_1} c^2 N_{i_1 j}^3 \frac{K_1[N_{i_1 j} u]}{u} e^{-N_{i_1 j} u} \delta_{\nu'0}\delta_{ll'} \;\; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{r}) \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{r}) \\
&= 10i \frac{m^2 c^3}{\hbar} \frac{N_A}{N_F} \delta_{aa'}\delta_{\nu'0}\delta_{ll'} \int d\mathbf{r} \;\; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{r}) \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{7.65}
$$

Wird die Summation über die Quantenzahlen l', ν' und a' durchgeführt, lautet das Endergebnis:

$$
2\hat{K}_{I_1 I_2} \; C^{I_2 K}_{l,a}(\mathbf{k}) \; R^{l'\nu',a'}_{I_1 K}(\mathbf{k}') \; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}') \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}) = 10 \; i \; \frac{m^2 c^3}{\hbar} \frac{N_A}{N_F} \int d\mathbf{r} \;\; b^F_{l0,a}(\mathbf{r}) \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{r}). \tag{7.66}
$$

Der Anteil $b^A_{l',a'}(\mathbf{k}') \; \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k})$

$$
2\hat{K}_{I_1 I_2} \; C^{I_2 K}_{l\nu,a}(\mathbf{k}) \; R^{l',a'}_{I_1 K}(\mathbf{k}') \; b^A_{l',a'}(\mathbf{k}') \; \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}) \tag{7.67}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 \iint d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \iint d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{r}' \left(-i\hbar c \left(\gamma^0\gamma^k\right)_{\alpha_1\alpha_2} \partial_k(r_1) + m_{i_1} c^2 \gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}\right) \delta_{A_1A_2}\delta_{\kappa_1\kappa_2}\delta_{i_1i_2}\delta\left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right) \\
&N_F \lambda_{i_2}\lambda_j \delta_{A_2B} L^a_{\kappa_2\kappa} e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}')} N_{i_2j} K_0[N_{i_2j}|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'|] \left(\Sigma^{l\nu} C\right)_{\alpha_2\alpha} \\
&\left(9\pi 2^9 (2\pi\hbar)^3\right)^{-1} \frac{1}{N_A} \frac{N_{i_1j}}{\lambda_{i_1}\lambda_j} \delta_{A_1B} \left(L^{a'}\right)^*_{\kappa_1\kappa} (\gamma^{l'} C)^\dagger_{\alpha_1\alpha} e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}'(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')} e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\, b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\, \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}).
\end{aligned}
$$

Summation über die Indizes $A_1, A_2, B, \kappa_1, \kappa_2, \kappa$ und i_2 sowie Integration über r_2 ergibt:

$$
\begin{aligned}
&2\hat{K}_{I_1I_2}\, C^{I_2K}_{l\nu,a}(\mathbf{k})\, R^{l',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\, b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\, \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}) \qquad (7.68)\\
&= \frac{1}{3\pi 2^5 (2\pi\hbar)^3} \frac{N_F}{N_A} \iint d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}' \left(-i\hbar c \left(\gamma^0\gamma^k\right)_{\alpha_1\alpha_2} \partial_k(r_1) + m_{i_1} c^2 \gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}\right) \left(\Sigma^{l\nu} C\right)_{\alpha_2\alpha} (\gamma^{l'} C)^\dagger_{\alpha_1\alpha} \\
&\iint d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\; e^{\frac{i}{2\hbar}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')(\mathbf{r}_1+\mathbf{r})} N^2_{i_1j} K_0[N_{i_1j}|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'|] e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\, \delta_{aa'}\; b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\, \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}).
\end{aligned}
$$

Mit Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$
\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}'}{2} = \mathbf{r}, \qquad (7.69)
$$

$$
\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}' = \mathbf{u} \qquad (7.70)
$$

wird daraus

$$
\begin{aligned}
&2\hat{K}_{I_1I_2}\, C^{I_2K}_{l\nu,a}(\mathbf{k})\, R^{l',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\, b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\, \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}) \qquad (7.71)\\
&= \frac{1}{3\pi 2^5 (2\pi\hbar)^3} \frac{N_F}{N_A} \iint d\mathbf{r}\, d\mathbf{u} \\
&\left(-i\hbar c \mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^k\Sigma^{l\nu} C(\gamma^{l'} C)^*\right] \left(\frac{1}{2}\partial_k(r) + \partial_k(u)\right) + m_{i_1} c^2 \mathrm{Sp}\left[\gamma^0\Sigma^{l\nu} C(\gamma^{l'} C)^*\right]\right) \\
&\iint d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\; e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} N^2_{i_1j} K_0[N_{i_1j}u] e^{-N_{i_1j}u}\, \delta_{aa'}\; b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\, \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}).
\end{aligned}
$$

Einführen fouriertransformierter Quellen

$$
b^A_{l',a'}(\mathbf{r}) = (2\pi\hbar)^{-3} \int d\mathbf{k}'\; e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}'\mathbf{r}}\; b^A_{l',a'}(\mathbf{k}'), \qquad (7.72)
$$

$$
\partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{k}\; e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}}\; \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}) \qquad (7.73)
$$

ergibt:

$$
\begin{aligned}
&2\hat{K}_{I_1I_2}\, C^{I_2K}_{l\nu,a}(\mathbf{k})\, R^{l',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\, b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\, \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}) \qquad (7.74)\\
&= \frac{1}{3\pi 2^5} \frac{N_F}{N_A} \delta_{aa'} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{u} \\
&\left(-i\hbar c \mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^k\Sigma^{l\nu} C(\gamma^{l'} C)^*\right] \left(\frac{1}{2}\partial_k(r) + \partial_k(u)\right) + m_{i_1} c^2 \mathrm{Sp}\left[\gamma^0\Sigma^{l\nu} C(\gamma^{l'} C)^*\right]\right) \\
&N^2_{i_1j} K_0[N_{i_1j}u] e^{-N_{i_1j}u}\;\; b^A_{l',a'}(\mathbf{r})\, \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{r}).
\end{aligned}
$$

Die Spuren ergeben sich zu:

$$
\mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^k\Sigma^{l\nu} C(\gamma^{l'} C)^*\right] = 0, \qquad (7.75)
$$

$$
\mathrm{Sp}\left[\gamma^0\Sigma^{l\nu} C(\gamma^{l'} C)^*\right] = -4i\delta_{\nu 0}\delta_{ll'}. \qquad (7.76)
$$

Einsetzen dieser Ergebnisse liefert

$$\begin{aligned}&2\hat{K}_{I_1I_2}\,C^{I_2K}_{l\nu,a}(\mathbf{k})\,R^{l',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\,b^{A}_{l',a'}(\mathbf{k}')\,\partial^{F}_{l\nu,a}(\mathbf{k}) \\ &= -\frac{i}{3\pi 2^3}\frac{N_F}{N_A}\delta_{aa'}\delta_{\nu 0}\delta_{ll'}\int d\mathbf{r}d\mathbf{u}\; m_{i_1}c^2N^2_{i_1j}K_0[N_{i_1j}u]e^{-N_{i_1j}u}\;\; b^{A}_{l',a'}(\mathbf{r}')\,\partial^{F}_{l\nu,a}(\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{7.77}$$

Für die Summation über die Hilfsfeldindizes und Integration über die Koordinate $\mathbf{u}$ wird auf den Anhang C, Gleichung (C.13) verwiesen. Mit dem dort gewonnenen Ergebnis:

$$\int d\mathbf{u}\sum_{i_1j}m_{i_1}N^2_{i_1j}K_0[N_{i_1j}u]e^{-N_{i_1j}u} = 4\pi\frac{12\hbar}{5c} \tag{7.78}$$

lautet dieser Anteil:

$$2\hat{K}_{I_1I_2}\,C^{I_2K}_{l\nu,a}(\mathbf{k})\,R^{l',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\,b^{A}_{l',a'}(\mathbf{k}')\,\partial^{F}_{l\nu,a}(\mathbf{k}) = -i\hbar c\frac{2}{5}\frac{N_F}{N_A}\delta_{aa'}\delta_{\nu 0}\delta_{ll'}\int d\mathbf{r}\;\; b^{A}_{l',a'}(\mathbf{r}')\,\partial^{F}_{l\nu,a}(\mathbf{r}). \tag{7.79}$$

Summation über a', l' und ν liefert

$$2\hat{K}_{I_1I_2}\,C^{I_2K}_{l\nu,a}(\mathbf{k})\,R^{l',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\,b^{A}_{l',a'}(\mathbf{k}')\,\partial^{F}_{l\nu,a}(\mathbf{k}) = -i\hbar c\frac{2}{5}\frac{N_F}{N_A}\int d\mathbf{r}\;\; b^{A}_{l,a}(\mathbf{r})\,\partial^{F}_{l0,a}(\mathbf{r}). \tag{7.80}$$

Der Anteil $b^{F}_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\,\partial^{F}_{l\nu,a}(\mathbf{k})$

$$\begin{aligned}&2\hat{K}_{I_1I_2}\,C^{I_2K}_{l\nu,a}(\mathbf{k})\,R^{l'\nu',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\,b^{F}_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\,\partial^{F}_{l\nu,a}(\mathbf{k}) \\ &= 2\iint d\mathbf{k}d\mathbf{k}'\iint d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_2\,d\mathbf{r}'\,\left(-i\hbar c\left(\gamma^0\gamma^k\right)_{\alpha_1\alpha_2}\partial_k(r_1)+m_{i_1}c^2\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}\right)\delta_{A_1A_2}\delta_{\kappa_1\kappa_2}\delta_{i_1i_2}\delta\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\right) \\ &\quad N_F\lambda_{i_2}\lambda_j\delta_{A_2B}L^{a}_{\kappa_2\kappa}e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}')}N_{i_2j}K_0[N_{i_2j}|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}'|]\left(\Sigma^{l\nu}C\right)_{\alpha_2\alpha} \\ &\quad 5\left(9\pi 2^9(2\pi\hbar)^3\right)^{-1}\frac{1}{N_F}\frac{N^2_{i_1j}}{\lambda_{i_1}\lambda_j}\delta_{A_1B}\left(L^{a'}\right)^*_{\kappa_1\kappa}(\Sigma^{l'\nu'}C)^\dagger_{\alpha_1\alpha}e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}'(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\,b^{F}_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\,\partial^{F}_{l\nu,a}(\mathbf{k}).\end{aligned} \tag{7.81}$$

Summation über die Indizes $A_1, A_2, B, \kappa_1, \kappa_2, \kappa$ und i_2 sowie Integration über r_2 ergibt:

$$\begin{aligned}&2\hat{K}_{I_1I_2}\,C^{I_2K}_{l\nu,a}(\mathbf{k})\,R^{l'\nu',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\,b^{F}_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\,\partial^{F}_{l\nu,a}(\mathbf{k}) \\ &= \frac{5}{3\pi 2^5(2\pi\hbar)^3}\delta_{aa'}\iint d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}'\left(-i\hbar c\left(\gamma^0\gamma^k\right)_{\alpha_1\alpha_2}\partial_k(r_1)+m_{i_1}c^2\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}\right)\left(\Sigma^{l\nu}C\right)_{\alpha_2\alpha}(\Sigma^{l'\nu'}C)^\dagger_{\alpha_1\alpha} \\ &\quad\iint d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}'\;e^{\frac{i}{2\hbar}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}N^3_{i_1j}K_0[N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|]e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\;b^{F}_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\,\partial^{F}_{l\nu,a}(\mathbf{k}).\end{aligned} \tag{7.82}$$

Einführen von Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}'}{2} = \mathbf{r}, \tag{7.83}$$

$$\mathbf{r}_1-\mathbf{r}' = \mathbf{u} \tag{7.84}$$

liefert:

$$\begin{aligned}&2\hat{K}_{I_1I_2}\,C^{I_2K}_{l\nu,a}(\mathbf{k})\,R^{l'\nu',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\,b^{F}_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\,\partial^{F}_{l\nu,a}(\mathbf{k}) \\ &= \frac{5}{3\pi 2^5(2\pi\hbar)^3}\delta_{aa'}\iint d\mathbf{r}\,d\mathbf{u} \\ &\quad\left(-i\hbar c\mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^k\Sigma^{l\nu}C(\Sigma^{l'\nu'}C)^*\right]\left(\frac{1}{2}\partial_k(r)+\partial_k(u)\right)+m_{i_1}c^2\mathrm{Sp}\left[\gamma^0\Sigma^{l\nu}C(\Sigma^{l'\nu'}C)^*\right]\right) \\ &\quad\iint d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}'\;e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}}N^3_{i_1j}K_0[N_{i_1j}u]e^{-N_{i_1j}u}\;b^{F}_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\,\partial^{F}_{l\nu,a}(\mathbf{k}).\end{aligned} \tag{7.85}$$

Mit fouriertransformierten Quellen:

$$b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{r}) = (2\pi\hbar)^{-3}\int e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}'\mathbf{r}} b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')d\mathbf{k}', \tag{7.86}$$

$$\partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{r}) = \int e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}} \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k})d\mathbf{k} \tag{7.87}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
&2\hat{K}_{I_1I_2}\, C^{I_2K}_{l\nu,a}(\mathbf{k})\, R^{l'\nu',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\, b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\, \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}) \\
&= \frac{5}{3\pi 2^5}\iint d\mathbf{r}\, d\mathbf{u}\, \left(-i\hbar c \mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^k\Sigma^{l\nu}C(\Sigma^{l'\nu'}C)^*\right]\left(\frac{1}{2}\partial_k(r)+\partial_k(u)\right) + m_{i_1}c^2\mathrm{Sp}\left[\gamma^0\Sigma^{l\nu}C(\Sigma^{l'\nu'}C)^*\right]\right) \\
&\quad N^3_{i_1j}K_0[N_{i_1j}u]e^{-N_{i_1j}u}\,\delta_{aa'}\, b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{r})\,\partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{7.88}$$

Die Spuren ergeben mit $\nu = (0, n)$ $n = 1, 2, 3$ und $\nu' = (0, n')$ $n' = 1, 2, 3$:

$$\mathrm{Sp}\left[\gamma^0\gamma^k\Sigma^{l\nu}C(\Sigma^{l'\nu'}C)^*\right] = 4\left(\delta_{\nu'0}\epsilon_{kl'i}\epsilon_{iln} + \delta_{\nu 0}\epsilon_{kli}\epsilon_{il'n'}\right), \tag{7.89}$$

$$\mathrm{Sp}\left[\gamma^0\Sigma^{l\nu}C(\Sigma^{l'\nu'}C)^*\right] = 0. \tag{7.90}$$

Einsetzen dieser Ergebnisse liefert

$$\begin{aligned}
&2\hat{K}_{I_1I_2}\, C^{I_2K}_{l\nu,a}(\mathbf{k})\, R^{l'\nu',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\, b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\, \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}) \\
&= \frac{5}{3\pi 2^5}\delta_{aa'}\iint d\mathbf{r}d\mathbf{u}\, \left(-4i\hbar c\left(\frac{1}{2}\partial_k(r)+\partial_k(u)\right)\right) N^3_{i_1j}K_0[N_{i_1j}u]e^{-N_{i_1j}u} \\
&\quad \left(\delta_{\nu'0}\epsilon_{kl'i}\epsilon_{iln}\;\; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{r})\,\partial^F_{ln,a}(\mathbf{r}) + \delta_{\nu 0}\epsilon_{kli}\epsilon_{il'n'}\;\; b^F_{l'n',a'}(\mathbf{r})\,\partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{r})\right) \\
&= -\frac{5i\hbar c}{24\pi}\delta_{aa'}\iint d\mathbf{r}d\mathbf{u}\, \left(\frac{1}{2}\partial_k(r)+\partial_k(u)\right) N^3_{i_1j}K_0[N_{i_1j}u]e^{-N_{i_1j}u} \\
&\quad \left(\delta_{\nu'0}\epsilon_{kl'i}\epsilon_{iln}\;\; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{r})\,\partial^F_{ln,a}(\mathbf{r}) + \delta_{\nu 0}\epsilon_{kli}\epsilon_{il'n'}\;\; b^F_{l'n',a'}(\mathbf{r})\,\partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{r})\right).
\end{aligned} \tag{7.91}$$

Mit dem Ergebnis des Anhangs C, Gleichung (C.14):

$$\int d\mathbf{u}\, \left(\frac{1}{2}\partial_k(r)+\partial_k(u)\right) N^3_{i_1j}K_0[N_{i_1j}u]e^{-N_{i_1j}u} = \frac{24}{5}\pi \tag{7.92}$$

ergibt sich für diesen Anteil:

$$\begin{aligned}
&2\hat{K}_{I_1I_2}\, C^{I_2K}_{l\nu,a}(\mathbf{k})\, R^{l'\nu',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\, b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\, \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}) \\
&= -i\hbar c\delta_{aa'}\int d\mathbf{r}\;\; \partial_k(r)\left(\delta_{\nu'0}\epsilon_{kl'i}\epsilon_{iln}\, b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{r})\,\partial^F_{ln,a}(\mathbf{r}) + \delta_{\nu 0}\epsilon_{kli}\epsilon_{il'n'}\, b^F_{l'n',a'}(\mathbf{r})\,\partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{r})\right).
\end{aligned} \tag{7.93}$$

Summation über die Indizes ν' bzw. über ν und über a' liefert:

$$\begin{aligned}
&2\hat{K}_{I_1I_2}\, C^{I_2K}_{l\nu,a}(\mathbf{k})\, R^{l'\nu',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')\, b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\, \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}) \\
&= -i\hbar c\int d\mathbf{r}\; \partial_k(\mathbf{k})\epsilon_{kl'i}\epsilon_{iln}\;\; b^F_{l'0,a}(\mathbf{r})\,\partial^F_{ln,a}(\mathbf{r}) - i\hbar c\int d\mathbf{r}\; \partial_k(\mathbf{r})\epsilon_{kli}\epsilon_{il'n'}\;\; b^F_{l'n',a}(\mathbf{r})\,\partial^F_{l0,a}(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{7.94}$$

Die Kinetische Energie

Werden die Ergebnisse (7.53), (7.66), (7.80) und (7.94) in (7.39)-(7.42) eingesetzt, lautet der Anteil der kinetischen Energie der Gluonen:

$$\mathcal{H}^{\mathrm{Kin.}}_{bb} = 2\hat{K}_{I_1I_2}C^{I_2K}_{2,k_1}R^{2,k_2}_{I_1K}b_{k_2}\partial^b_{k_1} \tag{7.95}$$

$$
\begin{aligned}
&= i \int d\mathbf{r} \;\; 10 \frac{m^2 c^3}{\hbar} \frac{N_A}{N_F} \;\; b^F_{l0,a}(\mathbf{r}) \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{r}) \\
&-i\hbar c \frac{2}{5} \int d\mathbf{r} \;\; b^A_{l,a}(\mathbf{r}) \; \partial^F_{l0,a}(\mathbf{r}) \\
&-i\hbar c \int d\mathbf{r} \; \partial_k(\mathbf{r}) \; \epsilon_{kl'i}\epsilon_{iln} \;\; b^F_{l'0,a}(\mathbf{r}) \; \partial^F_{ln,a}(\mathbf{r}) \\
&-i\hbar c \int d\mathbf{r} \; \partial_k(\mathbf{r}) \; \epsilon_{kli}\epsilon_{il'n'} \;\; b^F_{l'n',a}(\mathbf{r}) \; \partial^F_{l0,a}(\mathbf{r}).
\end{aligned}
$$

7.2.2 Der Massenkorrekturterm

Der Massenkorrekturterm lautet $6\hat{W}_{I_1\{I_2I_3I_4\}}F^{(t)}_{I_4K}C^{I_2I_3}_{2,q'}R^{2,q}_{I_1K}b_q\partial^b_{q'}$. In einem ersten Schritt wird der Term $\hat{W}_{I_1\{I_2I_3I_4\}}C^{I_2I_3}_{2,q'}\partial^b_{q'}$ ausgewertet.

$$
\hat{W}_{I_1\{I_2I_3I_4\}}C^{I_2I_3}_{2,q'}\partial^b_{q'} = \left(\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} - \hat{W}_{I_1I_3I_2I_4} + \hat{W}_{I_1I_4I_2I_3}\right) C^{I_2I_3}_{2,q'}\partial^b_{q'} \tag{7.96}
$$

$$
= \left(2\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} + \hat{W}_{I_1I_4I_2I_3}\right) C^{I_2I_3}_{2,q'}\partial^b_{q'} \tag{7.97}
$$

Zunächst wird der Anteil $\hat{W}_{I_1I_4I_2I_3}C^{I_2I_3}_{2,q'}\partial^b_{q'}$ betrachtet.

$$
\begin{aligned}
&\hat{W}_{I_1I_4I_2I_3}C^{I_2I_3}_{2,q'}\partial^b_{q'} \\
&= \hbar g \lambda_{i_1} B_{i_2i_3i_4} \left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_4} C_{\alpha_2\alpha_3} - \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_4} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_2\alpha_3}\right) \delta_{A_1A_4}\delta_{A_2A_3}\delta_{\kappa_1\kappa_4}L^0_{\kappa_2\kappa_3} \\
&\quad \iint d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_4 \iint d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{r}_3 \; \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4) \\
&\quad N_F \lambda_{i_2}\lambda_{i_3}\delta_{A_2A_3}L^a_{\kappa_2\kappa_3} e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)} N_{i_2i_3} K_0[N_{i_2i_3}|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|] \left(\Sigma^{l\nu}C\right)_{\alpha_2\alpha_3} \\
&\quad + \hbar g \lambda_{i_1} B_{i_2i_3i_4} \left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_4} C_{\alpha_2\alpha_3} - \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_4} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_2\alpha_3}\right) \delta_{A_1A_4}\delta_{A_2A_3}\delta_{\kappa_1\kappa_4}L^0_{\kappa_2\kappa_3} \\
&\quad \iint d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_4 \iint d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{r}_3 \; \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4) \\
&\quad N_A \lambda_{i_2}\lambda_{i_3}\delta_{A_2A_3}L^a_{\kappa_2\kappa_3} e^{\,i\,\frac{}{2\hbar}\mathbf{k}(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)} N_{i_2i_3} \frac{K_1[N_{i_2i_3}|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|]}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|} \left(\gamma^l C\right)_{\alpha_2\alpha_3} \;\; \partial^b_{q'}
\end{aligned} \tag{7.98}
$$

Die Summation über die Indizes α_2 und α_3 liefert die Spuren:

$$
\mathrm{Spur}\left[C\Sigma^{l\nu}C\right] = 0, \tag{7.99}
$$

$$
\mathrm{Spur}\left[\gamma^5 C\Sigma^{l\nu}C\right] = 0, \tag{7.100}
$$

$$
\mathrm{Spur}\left[C\gamma^l C\right] = 0, \tag{7.101}
$$

$$
\mathrm{Spur}\left[\gamma^5 C\gamma^l C\right] = 0. \tag{7.102}
$$

Damit verschwindet dieser Term, und es gilt:

$$
\begin{aligned}
&\hat{W}_{I_1\{I_2I_3I_4\}}C^{I_2I_3}_{2,q'}\partial^b_{q'} \\
&= 2\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{2,q'}\partial^b_{q'} \\
&= 2gc\lambda_{i_1} B_{i_2i_3i_4} \left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2} C_{\alpha_3\alpha_4} - \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_3\alpha_4}\right) \delta_{A_1A_2}\delta_{A_3A_4}\delta_{\kappa_1\kappa_2}L^0_{\kappa_3\kappa_4} \\
&\quad \iint d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_4 \iint d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{r}_3 \; \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4)
\end{aligned}
$$

$$N_F \lambda_{i_2} \lambda_{i_3} \delta_{A_2 A_3} L^a_{\kappa_2 \kappa_3} e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)} N_{i_2 i_3} K_0[N_{i_2 i_3}|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|] \left(\Sigma^{l\nu} C\right)_{\alpha_2 \alpha_3} \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k})$$
$$+2gc\lambda_{i_1} B_{i_2 i_3 i_4} \left(\gamma^0_{\alpha_1 \alpha_2} C_{\alpha_3 \alpha_4} - \left(\gamma^0 \gamma^5\right)_{\alpha_1 \alpha_2} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_3 \alpha_4}\right) \delta_{A_1 A_2} \delta_{A_3 A_4} \delta_{\kappa_1 \kappa_2} L^0_{\kappa_3 \kappa_4}$$
$$\iint d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_4 \iint d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{r}_3\; \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)$$
$$2N_A \lambda_{i_2} \lambda_{i_3} \delta_{A_2 A_3} L^a_{\kappa_2 \kappa_3} e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)} N_{i_2 i_3} \frac{K_1[N_{i_2 i_3}|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \left(\gamma^l C\right)_{\alpha_2 \alpha_3} \partial^A_{l,a}(\mathbf{k})$$

$$= 2N_F gc\lambda_{i_1} \sum_{i_4} \delta_{A_1 A_4} \left(L^a L^0\right)_{\kappa_1 \kappa_4} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)$$
$$e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)} \sum_{i_2 i_3} \lambda_{i_2} \lambda_{i_3} N_{i_2 i_3} K_0[N_{i_2 i_3}|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|]$$
$$\left(\gamma^0_{\alpha_1 \alpha_2} (\Sigma^{l\nu} C)_{\alpha_2 \alpha_3} C_{\alpha_3 \alpha_4} - \left(\gamma^0 \gamma^5\right)_{\alpha_1 \alpha_2} (\Sigma^{l\nu} C)_{\alpha_2 \alpha_3} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_3 \alpha_4}\right) \partial^F_{l\nu,a}(\mathbf{k})$$
$$+4N_A gc\lambda_{i_1} \sum_{i_4} \delta_{A_1 A_4} \left(L^a L^0\right)_{\kappa_1 \kappa_4} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)$$
$$e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)} \sum_{i_2 i_3} \lambda_{i_2} \lambda_{i_3} N_{i_2 i_3} \frac{K_1[N_{i_2 i_3}|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|}$$
$$\left(\gamma^0_{\alpha_1 \alpha_2} (\gamma^l C)_{\alpha_2 \alpha_3} C_{\alpha_3 \alpha_4} - \left(\gamma^0 \gamma^5\right)_{\alpha_1 \alpha_2} (\gamma^l C)_{\alpha_2 \alpha_3} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_3 \alpha_4}\right) \partial^A_{l,a}(\mathbf{k})$$

$$\overset{*}{=} -4N_A gc\lambda_{i_1} \sum_{i_4} \delta_{A_1 A_4} \left(L^a L^0\right)_{\kappa_1 \kappa_4} \int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{r}_3\, d\mathbf{r}_4\; \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)$$
$$e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)} \sum_{i_2 i_3} \lambda_{i_2} \lambda_{i_3} N_{i_2 i_3} \frac{K_1[N_{i_2 i_3}|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|}\; 2\left(\gamma^0 \gamma^l\right)_{\alpha_1 \alpha_4} \partial^A_{l,a}(\mathbf{k})$$

$$= -8N_A gc\lambda_{i_1} \sum_{i_4} \delta_{A_1 A_4} \left(L^a L^0\right)_{\kappa_1 \kappa_4} \left(\gamma^0 \gamma^l\right)_{\alpha_1 \alpha_4} \int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_4\; \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)\; e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}_1}$$
$$\lim_{u \to 0} \sum_{i_2 i_3} \lambda_{i_2} \lambda_{i_3} N_{i_2 i_3} \frac{K_1[N_{i_2 i_3} u]}{u}\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k})$$

---

*Es ist:

$$\begin{aligned}
\gamma^0 \Sigma^{l\nu} CC - \gamma^0 \gamma^5 \Sigma^{l\nu} C \gamma^5 C &= -\gamma^0 \Sigma^{l\nu} + \gamma^0 \gamma^5 \Sigma^{l\nu} \gamma^5 \\
&= -\gamma^0 \Sigma^{l\nu} + \gamma^0 \Sigma^{l\nu} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\stackrel{**}{=} -8N_A gc\,\lambda_{i_1} \sum_{i_4} \delta_{A_1A_4} \left(L^a L^0\right)_{\kappa_1\kappa_4} \left(\gamma^0\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha_4} \int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_4\ \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4)\ e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}_1} \left(-\frac{1}{64}\frac{1}{\hbar^2 m^2c^2}\right)\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{k})$$

$$= \frac{1}{8}\frac{gc}{\hbar^2m^2c^2} N_A\lambda_{i_1} \sum_{i_4} \delta_{A_1A_4} \left(L^a L^0\right)_{\kappa_1\kappa_4} \left(\gamma^0\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha_4} \int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_4\ \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4)\ e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}_1}\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}). \tag{7.103}$$

Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}&\hat W_{I_1\{I_2I_3I_4\}}\ C^{I_2I_3}_{2,q'}\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{k})\\ &= \frac{1}{8}\frac{gc}{\hbar^2m^2c^2} N_A\lambda_{i_1} \sum_{i_4} \delta_{A_1A_4} \left(L^a L^0\right)_{\kappa_1\kappa_4} \left(\gamma^0\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha_4} \int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_4\ \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4) e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}_1}\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}).\end{aligned} \tag{7.104}$$

Für den gesamten Massenkorrekturterm ergibt sich:

$$\begin{aligned}&6\hat W_{I_1\{I_2I_3I_4\}} F^{(t)}_{I_4K} C^{I_2I_3}_{2,q'} R^{2,q}_{I_1K} b_q \partial^b_{q'}\\ &= 6\hat W_{I_1\{I_2I_3I_4\}} F^{(t)}_{I_4K} C^{I_2I_3}_{l,a}(\mathbf{k})\partial^A_{l,a}(\mathbf{k}) \left(R^{l',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')b^A_{l',a'}(\mathbf{k}') + R^{l'\nu',a'}_{I_1K}(\mathbf{k}')b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\right)\end{aligned} \tag{7.105}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{3}{4}\frac{gc}{\hbar^2m^2c^2} N_A\lambda_{i_1} \sum_{i_4} \delta_{A_1A_4} \left(L^a L^0\right)_{\kappa_1\kappa_4} \left(\gamma^0\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha_4} \iint d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}' \int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_4\ \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4) e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}_1}\\
&\quad \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\lambda_{i_4}\delta_{i_4j}\delta_{A_4B}L^0_{\kappa_4\kappa}\left\{-m_{i_4}^2c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}'|\right)\right]}{|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}'|}C_{\alpha_4\alpha}\right.\\
&\quad \left. + i m_{i_4}c(\gamma^k C)_{\alpha_4\alpha}\left(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}'\right)^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}'|\right)\right]}{(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}')^3} + m_{i_4}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}'|\right)\right]}{(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}')^2}\right]\right\}\\
&\quad \left(9\pi 2^9(2\pi\hbar)^3\right)^{-1}\frac{1}{N_A}\frac{N_{i_1j}}{\lambda_{i_1}\lambda_j}\delta_{A_1B}\left(L^{a'}\right)^*_{\kappa_1\kappa}(\gamma^{l'}C)^\dagger_{\alpha_1\alpha}e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}'(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\ b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\partial^A_{l,a}(\mathbf{k})\\
&+ \frac{3}{4}\frac{gc}{\hbar^2m^2c^2} N_A\lambda_{i_1} \sum_{i_4} \delta_{A_1A_4} \left(L^a L^0\right)_{\kappa_1\kappa_4} \left(\gamma^0\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha_4} \iint d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}' \int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_4\ \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4) e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}_1}\\
&\quad \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\lambda_{i_4}\delta_{i_4j}\delta_{A_4B}L^0_{\kappa_4\kappa}\left\{-m_{i_4}^2c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}'|\right)\right]}{|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}'|}C_{\alpha_4\alpha}\right.\\
&\quad \left. + i m_{i_4}c(\gamma^k C)_{\alpha_4\alpha}\left(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}'\right)^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}'|\right)\right]}{(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}')^3} + m_{i_4}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}'|\right)\right]}{(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}')^2}\right]\right\}\\
&\quad \frac{5}{9\pi 2^9(2\pi\hbar)^3}\frac{1}{N_F}\frac{N^2_{i_1j}}{\lambda_{i_1}\lambda_j}\delta_{A_1B}\left(L^{a'}\right)^*_{\kappa_1\kappa}(\Sigma^{l'\nu'}C)^\dagger_{\alpha_1\alpha}e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}'(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\ b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\partial^A_{l,a}(\mathbf{k})\end{aligned}$$

**Es gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0}\sum_{i_2i_3}\lambda_{i_2}\lambda_{i_3}N_{i_2i_3}\frac{K_1[N_{i_2i_3}u]}{u} &= \lim_{u\to 0}\left(-\frac{1}{32\hbar^4}u^2K_0\left[\frac{mc}{\hbar}u\right] + \left(\frac{mc}{64\hbar^5}u^3 - \frac{1}{64mc\hbar^3}u\right)K_1\left[\frac{mc}{\hbar}u\right]\right)\\ &= -\frac{1}{64m^2c^2\hbar^2},\end{aligned}$$

wobei die Reihenentwicklungen (C.4) und (C.5) bzw. die Ergebnisse (C.7)-(C.9) benutzt wurden.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{9}{2}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{9\pi 2^9(2\pi\hbar)^3}\frac{gc}{\hbar^2 m^2 c^2}\mathrm{Sp}\left(L^a L^0 L^0 \left(L^{a'}\right)^\dagger\right) \iint d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}' \int d\mathbf{r}_1\, e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}_1}\, e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}'(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')} \\
&\Bigg\{ -N_{i_1 j} m_j^2 c^2 \frac{K_1\left[\frac{m_j c}{\hbar}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|\right]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\mathrm{Sp}\left(\gamma^0\gamma^l C\gamma^{l'} C)^*\right) \\
&+ i N_{i_1 j} m_j c \mathrm{Sp}\left(\gamma^0\gamma^l\gamma^k C\gamma^{l'} C)^*\right)(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}')^k \left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_j c}{\hbar}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}')^3} + m_j c \frac{K_0\left[\frac{m_j c}{\hbar}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}')^2}\right]\Bigg\} \\
&e^{-N_{i_1 j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\, b^A_{l',a'}(\mathbf{k}')\partial^A_{l,a}(\mathbf{k}) \\
&+ \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{5}{\pi 2^{10}(2\pi\hbar)^3}\frac{gc}{\hbar^2 m^2 c^2}\frac{N_A}{N_F}\,\mathrm{Sp}\left(L^a L^0 L^0 \left(L^{a'}\right)^\dagger\right) \iint d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}' \int d\mathbf{r}_1\, e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}_1}\, e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}'(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')} \\
&\Bigg\{ -N^2_{i_1 j} m_j^2 c^2 \frac{K_1\left[\frac{m_j c}{\hbar}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|)\right]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{Sp}\left(\gamma^0\gamma^l C(\Sigma^{l'\nu'} C)^*\right) \\
&+ i N^2_{i_1 j} m_j c\, \mathrm{Sp}\left(\gamma^0\gamma^l\gamma^k C\Sigma^{l'\nu'} C)^*\right)(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}')^k \left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_j c}{\hbar}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}')^3} + m_j c \frac{K_0\left[\frac{m_j c}{\hbar}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}')^2}\right]\Bigg\} \\
&e^{-N_{i_1 j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\, b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\partial^A_{l,a}(\mathbf{k})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{5}{\pi 2^8(2\pi\hbar)^3}\frac{gc}{\hbar^2 m^2 c^2}\frac{N_A}{N_F}\delta_{aa'} \int d\mathbf{r}_1 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}_1} e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}'(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')} e^{-N_{i_1 j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|} \\
&N^2_{i_1 j}\, m_j^2 c^2\, \frac{K_1\left[\frac{m_j c}{\hbar}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|)\right]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{Sp}\left(\gamma^0\gamma^l C(\Sigma^{l'\nu'} C)^*\right)\, b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\partial^A_{l,a}(\mathbf{k})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{5i}{\pi 2^6(2\pi\hbar)^5}\frac{gc}{\hbar^2 m^2 c^2}\frac{N_A}{N_F}\delta_{aa'}\delta_{\nu 0}\delta_{ll'} \int d\mathbf{r}_1 e^{-N_{i_1 j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|} N^2_{i_1 j} m_j^2 c^2 \frac{K_1\left[\frac{m_j c}{\hbar}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|)\right]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|} \\
&\iint d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\, e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}_1}\, e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}'(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')} b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\, \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}),
\end{aligned}
$$

wobei die Spuren

$$\mathrm{Sp}\left(\gamma^0\gamma^l C(\gamma^{l'} C)^*\right) = 0, \tag{7.106}$$

$$\mathrm{Sp}\left(\gamma^0\gamma^l\gamma^k C(\gamma^{l'} C)^*\right) = 0, \tag{7.107}$$

$$\mathrm{Sp}\left(\gamma^0\gamma^l C(\Sigma^{l'\nu'} C)^*\right) = 4i\delta_{\nu' 0}\delta_{ll'}, \tag{7.108}$$

$$\mathrm{Sp}\left(\gamma^0\gamma^l\gamma^k C(\Sigma^{l'\nu'} C)^*\right) = 0 \tag{7.109}$$

und

$$\mathrm{Sp}\left(L^a L^0 L^0 \left(L^{a'}\right)^\dagger\right) = 4\delta_{aa'} \tag{7.110}$$

eingesetzt wurden.
Die Transformation auf Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}', \tag{7.111}$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}'\right), \tag{7.112}$$

$$\int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}' = \int d\mathbf{u}\, d\mathbf{r} \tag{7.113}$$

liefert

$$\begin{aligned} &6\hat{W}_{I_1\{I_2I_3I_4\}}F^{(t)}_{I_4K}C^{I_2I_3}_{2,q'}R^{2,q}_{I_1K}b_q\partial^b_{q'} \\ &= -\frac{5i}{\pi 2^6(2\pi\hbar)^5}\frac{gc}{\hbar^2 m^2c^2}\frac{N_A}{N_F}\delta_{aa'}\delta_{\nu 0}\delta_{ll'}\int d\mathbf{u}\, d\mathbf{r}\, e^{-N_{i_1j}u}N^2_{i_1j}m_j^2c^2\,\frac{K_1\left[\frac{m_jc}{\hbar}u\right]}{u} \\ &\iint d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\, e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}\mathbf{u}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}'\mathbf{r}}\;\; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}')\;\partial^A_{l,a}(\mathbf{k}). \end{aligned} \tag{7.114}$$

Im Niederenergielimes ist $\mathbf{k}\mathbf{u} \approx 0$. Mit dieser Näherung ergibt sich $e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}\mathbf{u}} \approx 1$.
Die Einführung fouriertransformierter Quellen

$$b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{r}) = (2\pi\hbar)^{-3}\int d\mathbf{k}'\, e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}'\mathbf{r}}b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{k}'), \tag{7.115}$$

$$\partial^A_{l,a}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{k}\, e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\mathbf{r}}\partial^A_{l,a}(\mathbf{k}) \tag{7.116}$$

führt auf

$$\begin{aligned} &6\hat{W}_{I_1\{I_2I_3I_4\}}F^{(t)}_{I_4K}C^{I_2I_3}_{2,q'}R^{2,q}_{I_1K}b_q\partial^b_{q'} \\ &= -\frac{5i}{\pi 2^6(2\pi\hbar)^2}\frac{gc}{\hbar^2 m^2c^2}\frac{N_A}{N_F}\delta_{aa'}\;\delta_{\nu 0}\;\delta_{ll'}\int d\mathbf{r}\, d\mathbf{u}\, e^{-N_{i_1j}u}N^2_{i_1j}m_j^2c^2\,\frac{K_1\left[\frac{m_jc}{\hbar}u\right]}{u}\; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{r})\;\partial^A_{l,a}(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{7.117}$$

Das Ergebnis der Integration lautet nach Anhang C, Gleichung (C.15)

$$\int d\mathbf{u}\, e^{-N_{i_1j}u}N^2_{i_1j}m_j^2c^2\frac{K_1\left[\frac{m_jc}{\hbar}u\right]}{u} = 24\pi m^2c^2 \tag{7.118}$$

und wird in (7.117) eingesetzt. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} &6\hat{W}_{I_1\{I_2I_3I_4\}}F^{(t)}_{I_4K}C^{I_2I_3}_{2,q'}R^{2,q}_{I_1K}b_q\partial^b_{q'} \\ &= -\frac{5i}{\pi 2^6(2\pi\hbar)^2}\frac{gc}{\hbar^2 m^2c^2}\frac{N_A}{N_F}\delta_{aa'}\delta_{\nu 0}\delta_{ll'}\left(24\pi m^2c^2\right)\int d\mathbf{r}\; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{r})\;\partial^A_{l,a}(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{15i}{8(2\pi\hbar)^2}\frac{gc}{\hbar^2}\frac{N_A}{N_F}\delta_{aa'}\delta_{\nu 0}\delta_{ll'}\int d\mathbf{r}\; b^F_{l'\nu',a'}(\mathbf{r})\;\partial^A_{l,a}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{7.119}$$

Summation über die Quantenzahlen ergibt als Endergebnis für den Massenkorrekturterm:

$$6\hat{W}_{I_1\{I_2I_3I_4\}}F^{(t)}_{I_4K}C^{I_2I_3}_{2,q'}R^{2,q}_{I_1K}b_q\partial^b_{q'} = -i\frac{15gc}{32\pi^2\hbar^4}\frac{N_A}{N_F}\int d\mathbf{r}\; b^F_{l0,a}(\mathbf{r})\partial^A_{l,a}(\mathbf{r}). \tag{7.120}$$

7.2.3 Die Gluonenselbstwechselwirkung

Der Selbstwechselwirkungsanteil der Gluonen lautet:

$$6\hat{W}_{I_1\{I_2I_3I_4\}}C^{I_2I_3}_{2,q_1}C^{I_4K}_{2,q_2}R^{2,q_3}_{I_1K}b_{q_3}\partial^b_{q_1}\partial^b_{q_2} \tag{7.121}$$

$$= 6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1)\partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)C^{I_4K}_{m,b}(\mathbf{k}_2)\; R^{n,c}_{I_1K}(\mathbf{k}_3)\; b^A_{n,c}(\mathbf{k}_3)\;\partial^A_{m,b}(\mathbf{k}_2) \tag{7.122}$$

$$+6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1)\partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)C^{I_4K}_{m,b}(\mathbf{k}_2)\; R^{n\nu,c}_{I_1K}(\mathbf{k}_3)\; b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3)\;\partial^A_{m,b}(\mathbf{k}_2) \tag{7.123}$$

$$+6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1)\partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)C^{I_4K}_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2)\; R^{n,c}_{I_1K}(\mathbf{k}_3)\; b^A_{n,c}(\mathbf{k}_3)\;\partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2) \tag{7.124}$$

$$+6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1)\partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)C^{I_2K}_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2)\; R^{n\nu,c}_{I_1K}(\mathbf{k}_3)\; b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3)\;\partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2). \tag{7.125}$$

Der Term $b^A_{n,c}(\mathbf{k}_3)\ \partial^A_{m,b}(\mathbf{k}_2)$

$$
\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1)C^{I_4K}_{m,b}(\mathbf{k}_2)\ R^{n,c}_{I_1K}(\mathbf{k}_3)b^A_{n,c}(\mathbf{k}_3)\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)\ \partial^A_{m,b}(\mathbf{k}_2)\\
&=\frac{3}{4}\frac{gc}{\hbar^2m^2c^2}N_A\lambda_{i_1}\sum_{i_4}\delta_{A_1A_4}\left(L^aL^0\right)_{\kappa_1\kappa_4}\left(\gamma^0\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha_4}\iiint d\mathbf{k}_1\ d\mathbf{k}_2\ d\mathbf{k}_3\ \int d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_4\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4)e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\\
&\quad 2N_A\lambda_{i_4}\lambda_j\delta_{A_4B}L^b_{\kappa_4\kappa}e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_2(\mathbf{r}_4+\mathbf{r}')}N_{i_4j}\frac{K_1[N_{i_4j}|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}'|}\left(\gamma^mC\right)_{\alpha_4\alpha}\\
&\quad\left(9\pi2^9(2\pi\hbar)^3\right)^{-1}\frac{1}{N_A}\frac{N_{i_1j}}{\lambda_{i_1}\lambda_j}\delta_{A_1B}\left(L^c\right)^*_{\kappa_1\kappa}\left(\gamma^nC\right)^\dagger_{\alpha_1\alpha}e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_3(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\\
&\\
&=\frac{gc}{\hbar^2m^2c^2}\frac{1}{\pi2^9(2\pi\hbar)^3}N_A\mathrm{Sp}\left(L^aL^0L^b\left(L^c\right)^\dagger\right)\mathrm{Sp}\left(\gamma^0\gamma^l\gamma^mC\gamma^nC)^*\right)\\
&\quad\int d\mathbf{r}'\int d\mathbf{r}_1\iiint d\mathbf{k}_1\ d\mathbf{k}_2\ d\mathbf{k}_3\ e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\ e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_2(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}\ e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_3(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}\\
&\quad\sum_{i_4}\lambda_{i_4}N_{i_4j}N_{i_1j}e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\frac{K_1[N_{i_4j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\ .
\end{aligned}
\tag{7.126}
$$

Die Spur über die γ-Matrizen ergibt

$$
\mathrm{Sp}\left(\gamma^0\gamma^l\gamma^mC\gamma^nC)^*\right)=0\ . \tag{7.127}
$$

Damit ist dieser Term Null:

$$
6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1)C^{I_4K}_{m,b}(\mathbf{k}_2)\ R^{n,c}_{I_1K}(\mathbf{k}_3)b^A_{n,c}(\mathbf{k}_3)\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)\ \partial^A_{m,b}(\mathbf{k}_2)=0\ . \tag{7.128}
$$

Der Term $b^A_{n,c}(\mathbf{k}_3)\ \partial^F_{m\nu',b}(\mathbf{k}_2)$

$$
\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1)C^{I_4K}_{m\nu,b}(\mathbf{k}_2)\ R^{n,c}_{I_1K}(\mathbf{k}_3)b^A_{n,c}(\mathbf{k}_3)\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)\ \partial^F_{m\nu,b}(\mathbf{k}_2)\\
&=\frac{3}{4}\frac{gc}{\hbar^2m^2c^2}N_A\lambda_{i_1}\sum_{i_4}\delta_{A_1A_4}\left(L^aL^0\right)_{\kappa_1\kappa_4}\left(\gamma^0\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha_4}\iiint d\mathbf{k}_1\ d\mathbf{k}_2\ d\mathbf{k}_3\ \int d\mathbf{r}_1\ d\mathbf{r}_4\ \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4)\ e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\\
&\quad N_F\lambda_{i_4}\lambda_j\delta_{A_4B}L^b_{\kappa_4\kappa}\ e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_2(\mathbf{r}_4+\mathbf{r}')}N_{i_4j}\ K_0[N_{i_4j}|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}'|]\ \left(\Sigma^{m\nu}C\right)_{\alpha_4\alpha}\\
&\quad\left(9\pi2^9(2\pi\hbar)^3\right)^{-1}\frac{1}{N_A}\frac{N_{i_1j}}{\lambda_{i_1}\lambda_j}\delta_{A_1B}\left(L^c\right)^*_{\kappa_1\kappa}\left(\gamma^nC\right)^\dagger_{\alpha_1\alpha}\ e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_3(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}\ e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\\
&\quad b^A_{n,c}(\mathbf{k}_3)\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)\ \partial^F_{m\nu',b}(\mathbf{k}_2)\\
&\\
&=\frac{1}{2^{10}\pi}\frac{gc}{\hbar^2m^2c^2}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}N_F\ \mathrm{Sp}\left(L^aL^0L^b\left(L^c\right)^\dagger\right)\mathrm{Sp}\left(\gamma^0\gamma^l\Sigma^{m\nu}C\left(\gamma^nC\right)^*\right)\\
&\quad\iint d\mathbf{r}'\ d\mathbf{r}_1\ \iiint d\mathbf{k}_1\ d\mathbf{k}_2\ d\mathbf{k}_3\ e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\ e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\frac{(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}{2}}\ e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\frac{(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}{2}}\\
&\quad\sum_{i_4}\lambda_{i_4}N_{i_4j}N_{i_1j}e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}K_0[N_{i_4j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|]\ b^A_{n,c}(\mathbf{k}_3)\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)\ \partial^F_{m\nu,b}(\mathbf{k}_2)\ .
\end{aligned}
\tag{7.129}
$$

Die Spur über die γ-Matrizen ergibt:

$$
\mathrm{Sp}\left(\gamma^0\gamma^l\Sigma^{m\nu}C\left(\gamma^nC\right)^*\right)=0\ . \tag{7.130}
$$

Damit ist dieser Term ebenfalls Null:

$$6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1)C^{I_4K}_{m\nu,b}(\mathbf{k}_2)\ R^{n,c}_{I_1K}(\mathbf{k}_3)b^A_{n,c}(\mathbf{k}_3)\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)\ \partial^F_{m\nu,b}(\mathbf{k}_2)=0\ . \tag{7.131}$$

Der Term $b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3)\ \partial^A_{m,b}(\mathbf{k}_2)$

$$\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1)C^{I_4K}_{m,b}(\mathbf{k}_2)\ R^{n\nu,c}_{I_1K}(\mathbf{k}_3)b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3)\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)\ \partial^A_{m,b}(\mathbf{k}_2)\\
&=\frac{3}{4}\frac{gc}{\hbar^2m^2c^2}N_A\lambda_{i_1}\sum_{i_4}\delta_{A_1A_4}\left(L^aL^0\right)_{\kappa_1\kappa_4}\left(\gamma^0\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha_4}\iiint d\mathbf{k}_1\ d\mathbf{k}_2\ d\mathbf{k}_3\ \int d\mathbf{r}_1\ d\mathbf{r}_4\ \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4)\ e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\\
&\quad 2N_A\lambda_{i_4}\lambda_j\delta_{A_4B}L^b_{\kappa_4\kappa}e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_2(\mathbf{r}_4+\mathbf{r}')}N_{i_4j}\frac{K_1[N_{i_4j}|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}'|}\left(\gamma^mC\right)_{\alpha_4\alpha}\\
&\quad\frac{5}{9\pi2^9(2\pi\hbar)^3}\frac{1}{N_F}\frac{N^2_{i_1j}}{\lambda_{i_1}\lambda_j}\delta_{A_1B}\left(L^c\right)^*_{\kappa_1\kappa}\left(\Sigma^{n\nu}C\right)^\dagger_{\alpha_1\alpha}\ e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_3(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}\ e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\\
&\quad b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3)\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)\ \partial^A_{m,b}(\mathbf{k}_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{5}{2^9\pi}\frac{gc}{\hbar^2m^2c^2}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\frac{N_A^2}{N_F}\ \mathrm{Sp}\left(L^aL^0L^b\left(L^c\right)^\dagger\right)\ \mathrm{Sp}\left(\gamma^0\gamma^l\gamma^mC\Sigma^{n\nu}C)^*\right)\\
&\quad\iint d\mathbf{r}\ d\mathbf{r}_1\iiint d\mathbf{k}_1\ d\mathbf{k}_2\ d\mathbf{k}_3\ e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\ e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\frac{(\mathbf{r}_1+\mathbf{r})}{2}}\ e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\frac{(\mathbf{r}_1+\mathbf{r})}{2}}\\
&\quad\sum_{i_4}\lambda_{i_4}N_{i_4j}N^2_{i_1j}e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\frac{K_1[N_{i_4j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\ b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3)\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)\ \partial^A_{m,b}(\mathbf{k}_2)\ .
\end{aligned}\tag{7.132}$$

Die Spur ergibt:

$$\mathrm{Sp}\left(\gamma^0\gamma^l\gamma^mC\Sigma^{n\nu''}C)^*\right)=0\ . \tag{7.133}$$

Auch dieser Term verschwindet:

$$6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1)C^{I_4K}_{m,b}(\mathbf{k}_2)\ R^{n\nu,c}_{I_1K}(\mathbf{k}_3)b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3)\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)\ \partial^A_{m,b}(\mathbf{k}_2)=0\ . \tag{7.134}$$

Der Term $b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3)\ \partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2)$

$$\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1)C^{I_4K}_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2)\ R^{n\nu,c}_{I_1K}(\mathbf{k}_3)b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3)\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)\ \partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2)\\
&=\frac{3}{4}\frac{gc}{\hbar^2m^2c^2}N_A\lambda_{i_1}\sum_{i_4}\delta_{A_1A_4}\left(L^aL^0\right)_{\kappa_1\kappa_4}\left(\gamma^0\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha_4}\iiint d\mathbf{k}_1\ d\mathbf{k}_2\ d\mathbf{k}_3\ \int d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_4\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4)e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\\
&\quad N_F\lambda_{i_4}\lambda_j\delta_{A_4B}L^b_{\kappa_4\kappa}\ e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_2(\mathbf{r}_4+\mathbf{r}')}\ N_{i_4j}K_0[N_{i_4j}|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}'|]\ \left(\Sigma^{m\mu}C\right)_{\alpha_4\alpha}\\
&\quad\frac{5}{9\pi2^9(2\pi\hbar)^3}\frac{1}{N_F}\frac{N^2_{i_1j}}{\lambda_{i_1}\lambda_j}\delta_{A_1B}\left(L^c\right)^*_{\kappa_1\kappa}\left(\Sigma^{n\nu}C\right)^\dagger_{\alpha_1\alpha}\ e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_3(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}\ e^{-N_{i_1j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}\\
&\quad b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3)\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)\ \partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{5}{2^{10}\pi}\frac{gc}{\hbar^2m^2c^2}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}N_A\ \mathrm{Sp}\left(L^aL^0L^b\left(L^c\right)^\dagger\right)\mathrm{Sp}\left(\gamma^0\gamma^l\Sigma^{m\mu}C(\Sigma^{n\nu}C)^*\right)\\
&\quad\iint d\mathbf{r}'\ d\mathbf{r}_1\iiint d\mathbf{k}_1\ d\mathbf{k}_2\ d\mathbf{k}_3\ e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\ e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\frac{(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}{2}}\ e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\frac{(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}')}{2}}
\end{aligned}$$

$$\sum_{i_4} \lambda_{i_4} N_{i_4 j} N_{i_1 j}^2 \; e^{-N_{i_1 j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|} \; K_0[N_{i_4 j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|] \; b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3) \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1) \; \partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2) \; . \tag{7.135}$$

Die Spuren ergeben mit $\mu = (0, m')$ $m' = 1,2,3$ und $\nu = (0, n')$ $n' = 1,2,3$:

$$\mathrm{Sp}\left(\gamma^0 \gamma^l \Sigma^{m\mu} C (\Sigma^{n\nu} C)^*\right) = 4\left(\delta_{\mu 0}\epsilon_{lmi}\epsilon_{inn'} + \delta_{\nu 0}\epsilon_{lni}\epsilon_{imm'}\right) \; , \tag{7.136}$$

und nach Anhang B, Gleichung (B.30):

$$\mathrm{Sp}\left(L^a L^0 L^b \left(L^c\right)^\dagger\right) = 4 i f^{abc} \; . \tag{7.137}$$

Einsetzen dieser Ergebnisse liefert:

$$\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1) \; C^{I_4 K}_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2) \; R^{n\nu,c}_{I_1 K}(\mathbf{k}_3) \; b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3) \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1) \; \partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2) \\
&= i \frac{5}{2^6 \pi} \frac{gc}{\hbar^2 m^2 c^2} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} N_A f^{abc} \iint d\mathbf{r}' \; d\mathbf{r}_1 \iiint d\mathbf{k}_1 \; d\mathbf{k}_2 \; d\mathbf{k}_3 \; e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1} \; e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2 \frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}'}{2}} \; e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3 \frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}'}{2}} \\
&\quad \sum_{i_4} \lambda_{i_4} N_{i_4 j} N_{i_1 j}^2 \; e^{-N_{i_1 j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|} \; K_0[N_{i_4 j}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|] \\
&\quad \left(\delta_{\mu 0}\epsilon_{lmi}\epsilon_{inn'} b^F_{nn',c}(\mathbf{k}_3) \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1) \; \partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2) + \delta_{\nu 0}\epsilon_{lni}\epsilon_{imm'} b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3) \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1) \; \partial^F_{mm',b}(\mathbf{k}_2)\right) \; .
\end{aligned}$$

Das Einführen von Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}' \; , \tag{7.138}$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}'\right) \; , \tag{7.139}$$

$$\int d\mathbf{r}_1 \; d\mathbf{r}' = \int d\mathbf{u} \; d\mathbf{r} \tag{7.140}$$

liefert

$$\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1) C^{I_4 K}_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2) \; R^{n\nu,c}_{I_1 K}(\mathbf{k}_3) b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3) \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1) \; \partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2) \\
&= i \frac{5}{2^6 \pi} \frac{gc}{\hbar^2 m^2 c^2} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} N_A f^{abc} \iint d\mathbf{r} \; d\mathbf{u} \iiint d\mathbf{k}_1 \; d\mathbf{k}_2 \; d\mathbf{k}_3 \; e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_1 \mathbf{u}} \; e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} \; e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} \; e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3 \mathbf{r}} \\
&\quad \sum_{i_4} \lambda_{i_4} N_{i_4 j} N_{i_1 j}^2 \; e^{-N_{i_1 j} u} K_0[N_{i_4 j} u] \\
&\quad \left(\delta_{\mu 0}\epsilon_{lmi}\epsilon_{inn'} b^F_{nn',c}(\mathbf{k}_3) \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1) \; \partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2) + \delta_{\nu 0}\epsilon_{lni}\epsilon_{imm'} b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3) \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1) \; \partial^F_{mm',b}(\mathbf{k}_2)\right) \; .
\end{aligned}$$

Mit der Näherung $e^{\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_1 \mathbf{u}} \approx 1$ und fouriertransformierten Quellen

$$b^F_{n\nu,b}(\mathbf{r}) = (2\pi\hbar)^{-3} \int e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3 \mathbf{r}} b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_3 \; , \tag{7.141}$$

$$\partial^A_{l,a}(\mathbf{r}) = \int e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1 \; , \tag{7.142}$$

$$\partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{r}) = \int e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} \partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_2 \tag{7.143}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1) C^{I_4 K}_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2) \; R^{n\nu,c}_{I_1 K}(\mathbf{k}_3) b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3) \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1) \; \partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2) \\
&= i \frac{5}{2^6 \pi} \frac{gc}{\hbar^2 m^2 c^2} N_A f^{abc} \iint d\mathbf{r} \, d\mathbf{u} \sum_{i_4} \lambda_{i_4} N_{i_4 j} N_{i_1 j}^2 \; e^{-N_{i_1 j} u} \; K_0[N_{i_4 j} u] \\
&\quad \left(\delta_{\mu 0}\epsilon_{lmi}\epsilon_{inn'} b^F_{nn',c}(\mathbf{r}) \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{r}) \; \partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{r}) + \delta_{\nu 0}\epsilon_{lni}\epsilon_{imm'} b^F_{n\nu,c}(\mathbf{r}) \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{r}) \; \partial^F_{mm',b}(\mathbf{r})\right) \; .
\end{aligned}$$

Das Ergebnis der Integration aus Anhang C, Gleichung (C.16) lautet:

$$\int d\mathbf{u} \sum_{i_1 i_4 j} \lambda_{i_4} N_{i_4 j} N_{i_1 j}^2 \; e^{-N_{i_1 j} u} K_0[N_{i_4 j} u] = \frac{24\pi}{35 m^2 c^2} \tag{7.144}$$

und wird in (7.144) eingesetzt. Dies ergibt

$$\begin{aligned} &6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4}\; C^{I_2 I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1)\; C^{I_4 K}_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2)\; R^{n\nu,c}_{I_1 K}(\mathbf{k}_3)\; b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3)\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)\; \partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2) \\ &= i \int d\mathbf{r}\; \frac{3}{56} \frac{gc}{\hbar^2 m^4 c^4}\; N_A\; f^{abc}\; \delta_{\mu 0} \epsilon_{lmi} \epsilon_{inn'}\; b^F_{nn',c}(\mathbf{r})\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{r})\; \partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{r}) \\ &\quad + i \int d\mathbf{r}\; \frac{3}{56} \frac{gc}{\hbar^2 m^4 c^4}\; N_A\; f^{abc}\; \delta_{\nu 0} \epsilon_{lni} \epsilon_{imm'}\; b^F_{n\nu,c}(\mathbf{r})\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{r})\; \partial^F_{mm',b}(\mathbf{r})\; . \end{aligned} \tag{7.145}$$

Summation über die Quantenzahlen ergibt

$$\begin{aligned} &6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4}\; C^{I_2 I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1)\; C^{I_4 K}_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2)\; R^{n\nu,c}_{I_1 K}(\mathbf{k}_3)\; b^F_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3)\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)\; \partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2) \\ &= i \int d\mathbf{r}\; \frac{3}{56} N_A \frac{gc}{\hbar^2 m^4 c^4} f^{abc} \epsilon_{lmi} \epsilon_{inn'}\; b^F_{nn',c}(\mathbf{r})\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{r})\; \partial^F_{m0,b}(\mathbf{r}) \\ &\quad + i \int d\mathbf{r}\; \frac{3}{56} N_A \frac{gc}{\hbar^2 m^4 c^4} f^{abc} \epsilon_{lni} \epsilon_{imm'}\; b^F_{n0,c}(\mathbf{r})\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)\; \partial^F_{mm',b}(\mathbf{r})\; . \end{aligned} \tag{7.146}$$

Umbenennen der einzelnen Indizes ergibt mit $f^{abc} = f^{cab} = -f^{cba}$:

$$\begin{aligned} &6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4}\; C^{I_2 I_3}_{l,a}(\mathbf{k}_1)\; C^{I_4 K}_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2)\; R^{n\nu,c}_{I_1 K}(\mathbf{k}_3)\; b^A_{n\nu,c}(\mathbf{k}_3)\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1)\; \partial^F_{m\mu,b}(\mathbf{k}_2) \\ &= i \int d\mathbf{r}\; \frac{3}{56} N_A \frac{gc}{\hbar^2 m^4 c^4} f^{abc} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm}\; b^F_{lm,a}(\mathbf{r})\; \partial^F_{j0,b}(\mathbf{r})\; \partial^A_{k,c}(\mathbf{r}) \\ &\quad - i \int d\mathbf{r}\; \frac{3}{56} N_A \frac{gc}{\hbar^2 m^4 c^4} f^{abc} \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm}\; b^F_{i0,a}(\mathbf{r})\; \partial^F_{lm,b}(\mathbf{r})\; \partial^A_{k,c}(\mathbf{r})\; . \end{aligned} \tag{7.147}$$

Die Gluonenselbstwechselwirkung

Werden die Ergebnisse (7.128), (7.131), (7.134) und (7.147) in (7.122)-(7.125) eingesetzt, lautet der Anteil der Gluonenselbstwechselwirkung (7.121):

$$\begin{aligned} &6\hat{W}_{I_1 \{I_2 I_3 I_4\}} C^{I_2 I_3}_{2,q_1} C^{I_4 K}_{2,q_2} R^{2,q_3}_{I_1 K} b_{q_3} \partial^b_{q_1} \partial^b_{q_2} \\ &= i \int d\mathbf{r}\; \frac{3}{56} N_A \frac{gc}{\hbar^2 m^4 c^4} f^{abc} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm}\; b^F_{lm,a}(\mathbf{r})\; \partial^F_{j0,b}(\mathbf{r})\; \partial^A_{k,c}(\mathbf{r}) \\ &\quad - i \int d\mathbf{r}\; \frac{3}{56} N_A \frac{gc}{\hbar^2 m^4 c^4} f^{abc} \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm}\; b^F_{i0,a}(\mathbf{r})\; \partial^F_{lm,b}(\mathbf{r})\; \partial^A_{k,c}(\mathbf{r})\; . \end{aligned} \tag{7.148}$$

7.2.4 Zusammenfassung

Werden die Ergebnisse des Anteils der kinetischen Energie $\mathcal{H}_{bb}^{\text{Kin.}}$ (7.95), des Anteils des Massenkorrekturterms $\mathcal{H}_{bb}^{\text{Masse}}$ (7.120) und des Anteils der Gluonenselbstwechselwirkung $\mathcal{H}_{bb}^{\text{Ww.}}$ (7.148) in (7.37) eingesetzt, lautet der Gluonenanteil $\mathcal{H}_{bb}$ und damit die Terme (7.18), (7.19) und (7.20) des gesamten effektiven funktionalen Energieoperators:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{bb} = &\, i \left(10 \frac{m^2 c^3}{\hbar} - \frac{15 cg}{32 \pi^2 \hbar^4} \right) \frac{N_A}{N_F} \int d^3 r\; b^F_{i0,a}(\mathbf{r})\; \partial^A_{i,a}(\mathbf{r}) \\ &- i \frac{2}{5} \hbar c\, \frac{N_F}{N_A} \int d^3 r\; b^A_{i,a}(\mathbf{r})\; \partial^F_{i0,a}(\mathbf{r}) \\ &+ i \hbar c \int d^3 r\; b_F^{i0,a}(\mathbf{r})\; \epsilon_{ijk}\; \partial_j(\mathbf{r})\; \epsilon_{klm}\; \partial^F_{lm,a}(\mathbf{r})\; {}_{|l>m} \end{aligned} \tag{7.149}$$

$$
\begin{aligned}
&-i\hbar c \int d^3r \; b^F_{lm,a}(\mathbf{r}) \; \epsilon_{ilm} \; \epsilon_{ijk} \; \partial_j(\mathbf{r}) \; \partial^F_{k0,a}(\mathbf{r}) \;_{|l>m} \\
&+i\hbar c\, G \int d^3r \; f^{abc} \; \epsilon_{ilm} \; b^F_{lm,a}(\mathbf{r}) \; \epsilon_{ijk} \; \partial^F_{j0,b}(\mathbf{r}) \; \partial^A_{k,c}(\mathbf{r}) \;_{|l>m} \\
&-i\hbar c\, G \int d^3r \; f^{abc} \; b^F_{i0,a}(\mathbf{r}) \; \epsilon_{ijk} \; \epsilon_{jlm} \; \partial^F_{lm,b}(\mathbf{r}) \; \partial^A_{k,c}(\mathbf{r}) \;_{|l>m} \;,
\end{aligned}
$$

mit

$$
G = \frac{3}{56} \; N_A \; \frac{g}{m^4 c^4 \hbar^3} \; . \tag{7.150}
$$

7.3 Die Wechselwirkungsterme

Der Wechselwirkungsanteil $\mathcal{H}_{\mathrm{bf}}$ (7.27) lautet:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_{bf} = & \, 3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 I_3}_{2,k} C^{I_4}_{1,l_1} R^{1,l_2}_{I_1} f_{l_2} \partial^b_k \partial^f_{l_1} \\
& -6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} \; F^{(t)}_{I_4 K} \; C^{I_2}_{1,l_1} \; C^{I_3}_{1,l_2} \; R^{2,k_1}_{I_1 K} \; \partial^f_{l_1} \; \partial^f_{l_2} \; .
\end{aligned} \tag{7.151}
$$

7.3.1 Die Ankopplung der Gluonen an die Quarks

Der Term, der die Ankopplung der Gluonen an die Quarks beschreibt, lautet:

$$
\mathcal{H}^1_{bf} = 3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} \; C^{I_2 I_3}_k \; C^{I_4}_{l_1} \; R^{l_2}_{I_1} \; f_{l_2} \; \partial^b_k \; \partial^f_{l_1} \; . \tag{7.152}
$$

Der Term $\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} \; C^{I_2 I_3}_k \; \partial^b_k$ wurde in Kapitel 7.2.2, Gleichung (7.104) berechnet. Er lautet:

$$
\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} \; C^{I_2 I_3}_k \; \partial^b_k \; = \; \frac{N_A g c \lambda_{i_1}}{8\hbar^2 m^2 c^2} \; \delta_{A_1 A_4} \left[L^a L^0\right]_{\kappa_1 \kappa_4} \left[\gamma^0 \gamma^l\right]_{\alpha_1 \alpha_4} \int d\mathbf{k}_1 \; \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) \; e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1} \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1) \tag{7.153}
$$

Dieses Ergebnis wird in (7.152) eingesetzt

$$
\begin{aligned}
& 3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 I_3}_k C^{I_4}_{l_1} R^{l_2}_{I_1} f_{l_2} \partial^b_k \partial^f_{l_1} \\
&= \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_4 \iiint d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \sum^{l,a} \sum_{i_1 i_4} \sum^{AB}_{A_1 A_4} \sum^{\kappa\kappa'}_{\kappa_1 \kappa_4} \sum^{s_1 s_2}_{\alpha_1 \alpha_4} \\
& \frac{3}{8} \frac{gc}{\hbar^2 m^2 c^2} N_A \lambda_{i_1} \delta_{A_1 A_4} \left[L^a L^0\right]_{\kappa_1 \kappa_4} \left[\gamma^0 \gamma^l\right]_{\alpha_1 \alpha_4} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) \; e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1} \\
& N_f \; (mc)^2 \; (\tau - 1)^3 \; e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_4} \; \lambda_{i_4} \; \frac{1}{\tau mc - m_{i_4} c} \; \hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_4}(\mathbf{k}_2, M) \; \delta^{\kappa_4}_{\kappa} \; \delta^{A_4}_{A} \\
& \frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{(\tau - 1)^3 (mc)^2} \; N_f \; e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3 \mathbf{r}_1} \frac{1}{\lambda_{i_1}} (\tau mc - m_{i_1} c) \; \hat{u}^{\dagger\,(s_2)}_{\alpha_1}(\mathbf{k}_3, M) \; \delta^{\kappa_1}_{\kappa'} \; \delta^{A_1}_{B} \\
& f_{s_2,\kappa',B}(\mathbf{k}_3) \; \partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_2) \; \partial^A_{l,a}(\mathbf{k}_1) \; .
\end{aligned} \tag{7.154}
$$

Die Summation über A_1 und A_4 liefert δ_{AB}. Die Integration über $\mathbf{r}_4$ wird anschließend ausgeführt, dies ergibt:

$$
\begin{aligned}
& 3\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} C^{I_2 I_3}_k C^{I_4}_{l_1} R^{l_2}_{I_1} f_{l_2} \partial^b_k \partial^f_{l_1} \\
&= \int d\mathbf{r}_1 \sum^{l,a} \sum_{\kappa_1 \kappa_4} \sum_{\alpha_1 \alpha_4} \frac{1}{8} \frac{gc}{\hbar^2 m^2 c^2} N_A N_f^2 \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \left[L^a L^0\right]_{\kappa_1 \kappa_4} \left[\gamma^0 \gamma^l\right]_{\alpha_1 \alpha_4}
\end{aligned}
$$

$$\left[\sum_{i_4}\lambda_{i_4}\frac{1}{\tau mc-m_{i_4}c}\right]\left[\sum_{i_1}(\tau mc-m_{i_1}c)\right]$$
$$\int d\mathbf{k}_3\sum^{B}\sum^{s_2}\delta_{AB}\sum^{\kappa'}e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\mathbf{r}_1}\hat{u}^{\dagger\,(s_2)}_{\alpha_1}(\mathbf{k}_3,M)\,\delta^{\kappa_1}_{\kappa'}f_{s_2,\kappa',B}(\mathbf{k}_3)$$
$$\int d\mathbf{k}_2\sum^{s_1}\sum^{\kappa}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_4}(\mathbf{k}_2,M)\,\delta^{\kappa_4}_{\kappa}\partial^{f}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_2)$$
$$\int d\mathbf{k}_1 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\partial^{A}_{l,a}(\mathbf{k}_1)\ . \tag{7.155}$$

Summation über B,κ' und κ ergibt:

$$3\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{2,k}C^{I_4}_{1,l_1}R^{1,l_2}_{I_1}f_{l_2}\partial^{b}_{k}\partial^{f}_{l_1}$$
$$=\int d\mathbf{r}_1\sum^{l,a}\sum_{\kappa_1\kappa_4}\sum_{\alpha_1\alpha_4}\frac{1}{8}\frac{gc}{\hbar^2m^2c^2}N_A\left[L^aL^0\right]_{\kappa_1\kappa_4}\left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha_1\alpha_4}$$
$$\left[\sum_{i_4}\lambda_{i_4}\frac{1}{\tau mc-m_{i_4}c}\right]\left[\sum_{i_1}(\tau mc-m_{i_1}c)\right]$$
$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}N_f\int d\mathbf{k}_3\sum^{s_2}e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\mathbf{r}_1}\hat{u}^{\dagger\,(s_2)}_{\alpha_1}(\mathbf{k}_3,M)\,f_{s_2,\kappa_1,A}(\mathbf{k}_3)$$
$$N_f\int d\mathbf{k}_2\sum^{s_1}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_4}(\mathbf{k}_2,M)\,\partial^{f}_{s_1,\kappa_4,A}(\mathbf{k}_2)$$
$$\int d\mathbf{k}_1 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\partial^{A}_{l,a}(\mathbf{k}_1)\ . \tag{7.156}$$

Mit den fouriertransformierten Quellen

$$f_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\sqrt{\frac{|E|+Mc^2}{2|E|}}\int d\mathbf{k}_1 e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}}u^{\dagger(s_1)}_{\alpha,\kappa}(\mathbf{k}_1)\,f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\ , \tag{7.157}$$
$$\partial^{f}_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r})=\sqrt{\frac{|E|+Mc^2}{2|E|}}\int d\mathbf{k}_1 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}}u^{(s_1)}_{\alpha,\kappa}(\mathbf{k}_1)\,\partial^{f}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\ , \tag{7.158}$$
$$\partial^{A}_{l,a}(\mathbf{r})=\int d\mathbf{k}_1 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}}\partial^{A}_{l,a}(\mathbf{k}_1) \tag{7.159}$$

ergibt sich, mit (6.94) $N_f=\sqrt{\frac{|E|+Mc^2}{2|E|}}$:

$$3\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}\ C^{I_2I_3}_{2,k}\ C^{I_4}_{1,l_1}\ R^{1,l_2}_{I_1}f_{l_2}\ \partial^{b}_{k}\ \partial^{f}_{l_1}$$
$$=\int d\mathbf{r}_1\sum^{l,a}\sum_{\kappa_1\kappa_4}\sum_{\alpha_1\alpha_4}\frac{1}{8}\frac{gc}{\hbar^2m^2c^2}\ N_A\ \left[L^aL^0\right]_{\kappa_1\kappa_4}\left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha_1\alpha_4}$$
$$\left[\sum_{i_4}\lambda_{i_4}\frac{1}{\tau mc-m_{i_4}c}\right]\left[\sum_{i_1}(\tau mc-m_{i_1}c)\right]$$
$$f_{\alpha_1,\kappa_1,A}(\mathbf{r}_1)\ \partial^{f}_{\alpha_4,\kappa_4,A}(\mathbf{r}_1)\ \partial^{A}_{l,a}(\mathbf{r}_1)\ . \tag{7.160}$$

Die Summationen ergeben:

$$\left[\sum_{i_4}\lambda_{i_4}\frac{1}{\tau mc-m_{i_4}c}\right]=\frac{1}{m^3c^3(\tau-1)^3}\ , \tag{7.161}$$

$$\left[\sum_{i_1}(\tau mc - m_{i_1}c)\right] = 3(\tau-1)\,mc\,. \tag{7.162}$$

Umbenennung der Variablen liefert:

$$\begin{aligned}
&3\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}\,C_k^{I_2I_3}\,C_{l_1}^{I_4}\,R_{I_1}^{l_2}\,f_{l_2}\,\partial_k^b\,\partial_{l_1}^f\\
&=\int d\mathbf{r}\,\frac{3}{8(\tau-1)^2}\frac{gc}{\hbar^2m^4c^4}\,N_A\left[L^aL^0\right]_{\kappa\kappa'}\left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\alpha'}\,f_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha',\kappa',A}(\mathbf{r})\,\,\partial^A_{l,a}(\mathbf{r})\\
&=-i\hbar c\int d\mathbf{r}\,\frac{3i}{8(\tau-1)^2}\frac{g}{\hbar^3m^4c^4}\,N_A\left[L^aL^0\right]_{\kappa\kappa'}\left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\alpha'}\,f_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r})\,\,\partial^f_{\alpha',\kappa',A}(\mathbf{r})\,\,\partial^A_{l,a}(\mathbf{r})\\
&=-i\hbar c\,K_1\int d\mathbf{r}\,\,\left[L^aL^0\right]_{\kappa\kappa'}\left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\alpha'}\,f_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r})\,\,\partial^f_{\alpha',\kappa',A}(\mathbf{r})\,\,\partial^A_{l,a}(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{7.163}$$

mit

$$K_1 = \frac{3i}{8(\tau-1)^2}\,\frac{g}{\hbar^3m^4c^4}\,N_A\,. \tag{7.164}$$

7.3.2 Die Ankopplung der Quarks an die Gluonen

Die Ankopplung der Quarks an die Gluonen wird durch folgenden Term beschrieben:

$$\mathcal{H}^2_{\mathrm{bf}} = 6\hat{W}_{I_1\{I_2I_3I_4\}}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{1,l_1}C^{I_3}_{1,l_2}R^{2,k_1}_{I_1I_5}\,b_{k_1}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2} \tag{7.165}$$
$$= 6\,\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}\,F^t_{I_4I_5}\,C^{I_2}_{1,l_1}\,C^{I_3}_{1,l_2}\,R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\,\partial^f_{l_1}\,\partial^f_{l_2}\,b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3) \tag{7.166}$$
$$+\,6\,\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}\,F^t_{I_4I_5}\,C^{I_2}_{1,l_1}\,C^{I_3}_{1,l_2}\,R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\,\partial^f_{l_1}\,\partial^f_{l_2}\,b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3) \tag{7.167}$$
$$-\,6\,\hat{W}_{I_1I_3I_2I_4}\,F^t_{I_4I_5}\,C^{I_2}_{1,l_1}\,C^{I_3}_{1,l_2}\,R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\,\partial^f_{l_1}\,\partial^f_{l_2}\,b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3) \tag{7.168}$$
$$-\,6\,\hat{W}_{I_1I_3I_2I_4}F^t_{I_4I_5}\,C^{I_2}_{1,l_1}\,C^{I_3}_{1,l_2}\,R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\,\partial^f_{l_1}\,\partial^f_{l_2}\,b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3) \tag{7.169}$$
$$+\,6\,\hat{W}_{I_1I_4I_2I_3}\,F^t_{I_4I_5}\,C^{I_2}_{1,l_1}\,C^{I_3}_{1,l_2}\,R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\,\partial^f_{l_1}\,\partial^f_{l_2}\,b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3) \tag{7.170}$$
$$+\,6\,\hat{W}_{I_1I_4I_2I_3}\,F^t_{I_4I_5}\,C^{I_2}_{1,l_1}\,C^{I_3}_{1,l_2}\,R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\,\partial^f_{l_1}\,\partial^f_{l_2}\,b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3)\,. \tag{7.171}$$

Der Term $6\,\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}\,F^t_{I_4I_5}\,C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\,C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)\,R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\,\partial^f_{l_1}\,\partial^f_{l_2}\,b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)$

$$\begin{aligned}
&6\,\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}\,F^t_{I_4I_5}\,C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\,C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)\,R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\,\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\,\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)\,b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)\\
&=6gc\lambda_{i_1}B_{i_2i_3i_4}\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}C_{\alpha_3\alpha_4}-\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_3\alpha_4}\right)\delta_{A_1A_2}\delta_{A_3A_4}\delta_{\kappa_1\kappa_2}L^0_{\kappa_3\kappa_4}\\
&\iint d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_5\iiint d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,d\mathbf{k}_3\,\iiint d\mathbf{r}_2\,d\mathbf{r}_3\,d\mathbf{r}_4\,\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4)\\
&\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\lambda_{i_4}\delta_{i_4i_5}\delta_{A_4A_5}L^0_{\kappa_4\kappa_5}\left\{-m^2_{i_4}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|}C_{\alpha_4\alpha_5}\right.\\
&\left.+im_{i_4}c(\gamma^kC)_{\alpha_4\alpha_5}\left(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5\right)^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5)^3}+m_{i_4}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5)^2}\right]\right\}\\
&N_f(mc)^2(\tau-1)^3e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_2}\lambda_{i_2}\frac{1}{\tau mc-m_{i_2}c}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}(\mathbf{k}_1,M)\,\delta^{\kappa_2}_{\kappa}\delta^{A_2}_{A}\\
&N_f(mc)^2(\tau-1)^3e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_3}\lambda_{i_3}\frac{1}{\tau mc-m_{i_3}c}\hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}(\mathbf{k}_2,M)\,\delta^{\kappa_3}_{\kappa'}\delta^{A_3}_{A'}\\
&\left(9\pi2^9(2\pi\hbar)^3\right)^{-1}\frac{1}{N_A}\frac{N_{i_1i_5}}{\lambda_{i_1}\lambda_{i_5}}\delta_{A_1A_5}\,(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_5}\,(\gamma^lC)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_3(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_5)}e^{-N_{i_1i_5}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)\, \partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\, \partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) \\
&= \frac{gc(mc)^4(\tau-1)^6}{3\pi 2^8 (2\pi\hbar)^5} \frac{1}{N_A} \left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2} C_{\alpha_3\alpha_4} - \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_3\alpha_4}\right) L^0_{\kappa_3\kappa_4} L^0_{\kappa_4\kappa_5} (L^a)^*_{\kappa_1\kappa_5} \\
& \iint d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_5 \left[\sum_{i_1 i_5} N_{i_1 i_5} e^{-N_{i_1 i_5}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|} \left\{ -m^2_{i_5} c^2 \frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|)\right]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|} C_{\alpha_4\alpha_5} \right.\right. \\
& \left.\left. + i m_{i_5} c (\gamma^k C)_{\alpha_4\alpha_5} (\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^k \left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^3} + m_{i_5} c \frac{K_0\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^2}\right]\right\} (\gamma^l C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\right] \\
& \left[\sum_{i_2} \lambda_{i_2} \frac{1}{\tau mc - m_{i_2} c}\right] \left[\sum_{i_3} \lambda_{i_3} \frac{1}{\tau mc - m_{i_3} c}\right] \\
& \delta^{\kappa_1}_{\kappa} \delta^{A_1}_{A} \int d\mathbf{k}_1 N_f e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1} \hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}(\mathbf{k}_1, M)\, \partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) \\
& \delta^{\kappa_3}_{\kappa'} \delta^{A_1}_{A'} N_f \int d\mathbf{k}_2 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_1} \hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}(\mathbf{k}_2, M)\, \partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) \\
& \int d\mathbf{k}_3 e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_5)} b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)\ . \qquad (7.172)
\end{aligned}
$$

Die Transformation auf Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_5\ , \qquad (7.173)$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_5)\ , \qquad (7.174)$$

$$\iint d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_5 = \iint d\mathbf{u}\, d\mathbf{r} \qquad (7.175)$$

führt zu

$$
\begin{aligned}
& 6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} F^t_{I_4I_5} C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3) \partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) \partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3) \\
&= \frac{gc(mc)^4(\tau-1)^6}{3\pi 2^8 (2\pi\hbar)^5} \frac{1}{N_A} \left[\frac{1}{(\tau-1)^3 m^3 c^3}\right]^2 \\
& \left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2} C_{\alpha_3\alpha_4} - \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_3\alpha_4}\right) (L^a)^*_{\kappa_1\kappa_3} \\
& \iint d\mathbf{u}\, d\mathbf{r} \left[\sum_{i_1 i_5} N_{i_1 i_5} e^{-N_{i_1 i_5} u} \left\{ -m^2_{i_5} c^2 \frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar} u\right]}{u} C_{\alpha_4\alpha_5} \right.\right. \\
& \left.\left. + i m_{i_5} c (\gamma^k C)_{\alpha_4\alpha_5} u^k \left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar} u\right]}{u^3} + m_{i_5} c \frac{K_0\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar} u\right]}{u^2}\right]\right\} (\gamma^l C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\right] \\
& N_f \int d\mathbf{k}_1 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1(\mathbf{r}-\frac{1}{2}u)} \hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}(\mathbf{k}_1, M)\, \partial^f_{s_1,\kappa_1,A_1}(\mathbf{k}_1) \\
& N_f \int d\mathbf{k}_2 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2(\mathbf{r}+\frac{1}{2}u)} \hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}(\mathbf{k}_2, M)\, \partial^f_{s_2,\kappa_3,A_1}(\mathbf{k}_2) \\
& \int d\mathbf{k}_3 e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\mathbf{r}} b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)\ . \qquad (7.176)
\end{aligned}
$$

Mit Einführen fouriertransformierter Quellen und mit der Näherung $e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2 u} \approx 1$ ergibt sich:

$$6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} F^t_{I_4I_5} C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3) \partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) \partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3) \qquad (7.177)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{gc}{(2\pi\hbar)^2 3\pi 2^8 N_A m^2 c^2} \left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2} C_{\alpha_3\alpha_4} - \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_3\alpha_4}\right) (L^a)^*_{\kappa_1\kappa_3} \\
&\iint d\mathbf{u}\, d\mathbf{r} \left[\sum_{i_1 i_5} N_{i_1 i_5} e^{-N_{i_1 i_5} u} \left\{ -m_{i_5}^2 c^2 \frac{K_1\left[\frac{m_{i_5} c}{\hbar} u\right]}{u} C_{\alpha_4\alpha_5} \right.\right. \\
&\left.\left. + i m_{i_5} c (\gamma^k C)_{\alpha_4\alpha_5} u^k \left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_5} c}{\hbar} u\right]}{u^3} + m_{i_5} c \frac{K_0\left[\frac{m_{i_5} c}{\hbar} u\right]}{u^2}\right]\right\} (\gamma^l C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\right] \\
&\partial^f_{\alpha_2,\kappa_1,A_1}(\mathbf{r})\, \partial^f_{\alpha_3,\kappa_3,A_1}(\mathbf{r})\, b^A_{l,a}(\mathbf{r}) \ .
\end{aligned}
$$

Die Integration über $d\mathbf{u}$ bringt den Anteil u^k zum Verschwinden:

$$
\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F^t_{I_4 I_5} C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) R^{l,a}_{I_1 I_5}(\mathbf{k}_3) \partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) \partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3) \\
&= -\frac{gc}{3\pi 2^8 N_A (2\pi\hbar)^2 m^2 c^2} \left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2} C_{\alpha_3\alpha_4} - \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_3\alpha_4}\right) (L^a)^*_{\kappa_1\kappa_3} \\
&\iint d\mathbf{u}\, d\mathbf{r} \left[\sum_{i_1 i_5} N_{i_1 i_5} e^{-N_{i_1 i_5} u} m_{i_5}^2 c^2 \frac{K_1\left[\frac{m_{i_5} c}{\hbar} u\right]}{u} C_{\alpha_4\alpha_5}\right] (\gamma^l C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5} \partial^f_{\alpha_2,\kappa_1,A_1}(\mathbf{r})\, \partial^f_{\alpha_3,\kappa_3,A_1}(\mathbf{r})\, b^A_{l,a}(\mathbf{r}) \\
&= -\frac{gc}{3\pi 2^8 N_A (2\pi\hbar)^2 m^2 c^2} \left(-\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2} \delta_{\alpha_3\alpha_5} (\gamma^l C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5} + \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2} \gamma^5_{\alpha_3\alpha_5} (\gamma^l C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\right) (L^a)^*_{\kappa_1\kappa_3} \\
&\iint d\mathbf{u}\, d\mathbf{r} \left[\sum_{i_1 i_5} N_{i_1 i_5} e^{-N_{i_1 i_5} u} m_{i_5}^2 c^2 \frac{K_1\left[\frac{m_{i_5} c}{\hbar} u\right]}{u}\right] \partial^f_{\alpha_2,\kappa_1,A_1}(\mathbf{r})\, \partial^f_{\alpha_3,\kappa_3,A_1}(\mathbf{r})\, b^A_{l,a}(\mathbf{r}) \ . \qquad (7.178)
\end{aligned}
$$

Mit dem Ergebnis der Integration aus Anhang C, Gleichung (C.17)

$$
\int d\mathbf{u} \left[\sum_{i_1 i_5} N_{i_1 i_5} e^{-N_{i_1 i_5} u} m_{i_5}^2 c^2 \frac{K_1\left[\frac{m_{i_5} c}{\hbar} u\right]}{u}\right] = 24\pi\hbar m c \qquad (7.179)
$$

ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F^t_{I_4 I_5} C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) R^{l,a}_{I_1 I_5}(\mathbf{k}_3) \partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) \partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3) \qquad (7.180) \\
&= -\frac{g\hbar m c^2}{2^5 N_A (2\pi\hbar)^2 m^2 c^2} \left(\gamma^0 (\gamma^l C)^\dagger + \gamma^0\gamma^5 (\gamma^l C)^\dagger \gamma^5\right)_{\alpha_2\alpha_3} (L^a)^*_{\kappa_1\kappa_3} \int d\mathbf{r}\, \partial^f_{\alpha_2,\kappa_1,A_1}(\mathbf{r})\, \partial^f_{\alpha_3,\kappa_3,A_1}(\mathbf{r})\, b^A_{l,a}(\mathbf{r}) \ .
\end{aligned}
$$

Nun ergibt

$$
\gamma^0 (\gamma^l C)^\dagger + \gamma^0\gamma^5 (\gamma^l C)^\dagger \gamma^5 = 0 \ , \qquad (7.181)
$$

und damit verschwindet dieser Term.

$$
6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F^t_{I_4 I_5} C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) R^{l,a}_{I_1 I_5}(\mathbf{k}_3) \partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) \partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3) = 0 \ . \qquad (7.182)
$$

Der Term $6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F^t_{I_4 I_5} C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) R^{l\nu,a}_{I_1 I_5}(\mathbf{k}_3) \partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) \partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3)$

$$
\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1 I_2 I_3 I_4} F^t_{I_4 I_5} C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) R^{l\nu,a}_{I_1 I_5}(\mathbf{k}_3) \partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) \partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3) \\
&= 6 g c \lambda_{i_1} B_{i_2 i_3 i_4} \left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2} C_{\alpha_3\alpha_4} - \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_3\alpha_4}\right) \delta_{A_1 A_2} \delta_{A_3 A_4} \delta_{\kappa_1\kappa_2} L^0_{\kappa_3\kappa_4} \\
&\iint d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_5 \iiint d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3 \iiint d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{r}_3\, d\mathbf{r}_4\, \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\lambda_{i_4}\delta_{i_4 i_5}\delta_{A_4 A_5}L^0_{\kappa_4\kappa_5}\left\{-m_{i_4}^2 c^2 \frac{K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|}C_{\alpha_4\alpha_5}\right.$$
$$\left.+im_{i_4}c(\gamma^k C)_{\alpha_4\alpha_5}\left(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5\right)^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5)^3}+m_{i_4}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5)^2}\right]\right\}$$
$$N_f(mc)^2(\tau-1)^3 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_2}\lambda_{i_2}\frac{1}{\tau mc-m_{i_2}c}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}\left(\mathbf{k}_1,M\right)\delta^{\kappa_2}_{\kappa}\delta^{A_2}_{A}$$
$$N_f(mc)^2(\tau-1)^3 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_3}\lambda_{i_3}\frac{1}{\tau mc-m_{i_3}c}\hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}\left(\mathbf{k}_2,M\right)\delta^{\kappa_3}_{\kappa'}\delta^{A_3}_{A'}$$
$$5\left(9\pi 2^9(2\pi\hbar)^3\right)^{-1}\frac{1}{N_F}\frac{N^2_{i_1 i_5}}{\lambda_{i_1}\lambda_{i_5}}\delta_{A_1A_5}\left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_5}\left(\Sigma^{l\nu}C\right)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_3(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_5)}e^{-N_{i_1i_5}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}$$
$$\partial^f_{s_1,\kappa,A}\left(\mathbf{k}_1\right)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}\left(\mathbf{k}_2\right)b^F_{l\nu,a}\left(\mathbf{k}_3\right)$$

$$=\frac{5gc}{3\pi 2^8}\frac{1}{(2\pi\hbar)^5}(mc)^4(\tau-1)^6\frac{1}{N_F}\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}C_{\alpha_3\alpha_4}-\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_3\alpha_4}\right)L^0_{\kappa_3\kappa_4}L^0_{\kappa_4\kappa_5}\left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_5}$$
$$\iint d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_5\left[\sum_{i_1 i_5}N^2_{i_1i_5}e^{-N_{i_1i_5}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}\left\{-m_{i_5}^2c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}C_{\alpha_4\alpha_5}\right.\right.$$
$$\left.\left.+im_{i_5}c(\gamma^k C)_{\alpha_4\alpha_5}\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5\right)^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^3}+m_{i_5}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^2}\right]\right\}\right]\left(\Sigma^{l\nu}C\right)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}$$
$$\left[\sum_{i_2}\lambda_{i_2}\frac{1}{\tau mc-m_{i_2}c}\right]\left[\sum_{i_3}\lambda_{i_3}\frac{1}{\tau mc-m_{i_3}c}\right]$$
$$N_f\delta^{\kappa_1}_{\kappa}\delta^{A_1}_{A}\int d\mathbf{k}_1 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}\left(\mathbf{k}_1,M\right)\partial^f_{s_1,\kappa,A}\left(\mathbf{k}_1\right)$$
$$N_f\delta^{\kappa_3}_{\kappa'}\delta^{A_1}_{A'}\int d\mathbf{k}_2 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}\left(\mathbf{k}_2,M\right)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}\left(\mathbf{k}_2\right)$$
$$\int d\mathbf{k}_3 e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_5)}b^F_{l\nu,a}\left(\mathbf{k}_3\right) \tag{7.183}$$

Transformation auf Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$\mathbf{u}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5\ , \tag{7.184}$$
$$\mathbf{r}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_5\right)\ , \tag{7.185}$$
$$\int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_5=\int d\mathbf{u}\, d\mathbf{r} \tag{7.186}$$

und Summationen über i_2 und i_3 liefert

$$6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3)$$
$$=\frac{5gc}{3\pi 2^8}\frac{1}{(2\pi\hbar)^5}(mc)^4(\tau-1)^6\frac{1}{N_F}\left[\frac{1}{(\tau-1)^3m^3c^3}\right]^2\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}C_{\alpha_3\alpha_4}-\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_3\alpha_4}\right)\left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_3}$$
$$\int d\mathbf{u}\, d\mathbf{r}\left[\sum_{i_1i_5}N^2_{i_1i_5}e^{-N_{i_1i_5}u}\left\{-m^2_{i_5}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u}C_{\alpha_4\alpha_5}\right.\right.$$
$$\left.\left.+im_{i_5}c(\gamma^kC)_{\alpha_4\alpha_5}u^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u^3}+m_{i_5}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u^2}\right]\right\}\right]\left(\Sigma^{l\nu}C\right)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}$$

$$
\begin{aligned}
& N_f \int d\mathbf{k}_1 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1(\mathbf{r}-\frac{1}{2}\mathbf{u})} \hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}(\mathbf{k}_1, M)\, \partial^f_{s_1,\kappa_1,A_1}(\mathbf{k}_1) \\
& N_f \int d\mathbf{k}_2 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2(\mathbf{r}+\frac{1}{2}\mathbf{u})} \hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}(\mathbf{k}_2, M)\, \partial^f_{s_2,\kappa_3,A_1}(\mathbf{k}_2) \\
& \int d\mathbf{k}_3 e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\mathbf{r}} b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3) \ . \qquad (7.187)
\end{aligned}
$$

Mit der Näherung $e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{u}} \approx 1$ ergibt sich nach Einführen fouriertransformierter Quellen:

$$
\begin{aligned}
& 6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} F^t_{I_4I_5} C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3) \partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) \partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3) \\
&= \frac{5gc}{3\pi 2^8} \frac{1}{(2\pi\hbar)^2 m^2 c^2} \frac{1}{N_F} \left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2} C_{\alpha_3\alpha_4} - \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_3\alpha_4} \right) (L^a)^*_{\kappa_1\kappa_3} \\
& \int d\mathbf{u}\, d\mathbf{r} \left[\sum_{i_1 i_5} N^2_{i_1 i_5} e^{-N_{i_1 i_5} u} \left\{ -m^2_{i_5} c^2 \frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u} C_{\alpha_4\alpha_5} \right.\right. \\
& \left.\left. + i m_{i_5} c (\gamma^k C)_{\alpha_4\alpha_5} u^k \left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u^3} + m_{i_5} c \frac{K_0\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u^2} \right] \right\} \right] (\Sigma^{l\nu} C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5} \\
& \partial^f_{\alpha_2,\kappa_1,A_1}(\mathbf{r})\, \partial^f_{\alpha_3,\kappa_3,A_1}(\mathbf{r})\, b^F_{l\nu,a}(\mathbf{r}) \ . \qquad (7.188)
\end{aligned}
$$

Die Integration über $d\mathbf{u}$ bringt den Anteil u^k zum Verschwinden:

$$
\begin{aligned}
& 6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} F^t_{I_4I_5} C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3) \partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) \partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3) \\
&= -\frac{5gc}{3\pi 2^8} \frac{1}{(2\pi\hbar)^2 m^2 c^2} \frac{1}{N_F} \left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2} C_{\alpha_3\alpha_4} - \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_3\alpha_4} \right) C_{\alpha_4\alpha_5} (\Sigma^{l\nu} C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5} (L^a)^*_{\kappa_1\kappa_3} \\
& \int d\mathbf{u}\, d\mathbf{r} \left[\sum_{i_1 i_5} N^2_{i_1 i_5} e^{-N_{i_1 i_5} u} m^2_{i_5} c^2 \frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u} \right] \partial^f_{\alpha_2,\kappa_1,A_1}(\mathbf{r})\, \partial^f_{\alpha_3,\kappa_3,A_1}(\mathbf{r})\, b^F_{l\nu,a}(\mathbf{r}) \ . \qquad (7.189)
\end{aligned}
$$

Die Integration über $d\mathbf{u}$ ergibt nach Anhang C, Gleichung (C.18):

$$
\int d\mathbf{u} \sum_{i_1 i_5} N^2_{i_1 i_5} e^{-N_{i_1 i_5} u} m^2_{i_5} c^2 \frac{K_1\left(\frac{m_{i_5} c u}{\hbar}\right)}{u} = 24\pi (mc)^2 \ . \qquad (7.190)
$$

Diese Ergebnis wird eingesetzt und über α_4 summiert, das führt auf

$$
\begin{aligned}
& 6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4} F^t_{I_4I_5} C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3) \partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1) \partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2) b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3) \\
&= -\frac{5gc\,(mc)^2}{2^5} \frac{1}{(2\pi\hbar)^2\; m^2c^2} \frac{1}{N_F} \left(-\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2} \delta_{\alpha_3\alpha_5} (\Sigma^{l\nu} C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5} + \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2} \gamma^5_{\alpha_3\alpha_5} (\Sigma^{l\nu} C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5} \right) (L^a)^*_{\kappa_1\kappa_3} \\
& \int d\mathbf{r}\, \partial^f_{\alpha_2,\kappa_1,A_1}(\mathbf{r})\, \partial^f_{\alpha_3,\kappa_3,A_1}(\mathbf{r})\, b^F_{l\nu,a}(\mathbf{r}) \ . \qquad (7.191)
\end{aligned}
$$

Nun ergibt

$$
\begin{aligned}
& -\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2} \delta_{\alpha_3\alpha_5} (\Sigma^{l\nu} C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5} + \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2} \gamma^5_{\alpha_3\alpha_5} (\Sigma^{l\nu} C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5} \\
&= -\gamma^0_{\alpha_2\alpha_1} (\Sigma^{l\nu} C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_3} + \left(\gamma^5\gamma^0\right)_{\alpha_2\alpha_1} (\Sigma^{l\nu} C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5} \gamma^5_{\alpha_5\alpha_3} \\
&= -\left[\left(\gamma^0 (\Sigma^{l\nu} C)^\dagger\right)_{\alpha_2\alpha_3} + \left(\gamma^0\gamma^5 (\Sigma^{l\nu} C)^\dagger \gamma^5\right)_{\alpha_2\alpha_3} \right] \\
&= -\left[\gamma^0 (\Sigma^{l\nu} C)^\dagger + \gamma^0\gamma^5 (\Sigma^{l\nu} C)^\dagger \gamma^5\right]_{\alpha_2\alpha_3} \\
&= -2\left[\gamma^0 (\Sigma^{l\nu} C)^\dagger\right]_{\alpha_2\alpha_3} \ . \qquad (7.192)
\end{aligned}
$$

Dies eingesetzt ergibt:

$$6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3)$$
$$= \frac{5gc}{16(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{N_F}\left((\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger\right)_{\alpha_2\alpha_3}(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_3}\int d\mathbf{r}\,\partial^f_{\alpha_2,\kappa_1,A_1}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_3,\kappa_3,A_1}(\mathbf{r})\,b^F_{l\nu,a}(\mathbf{r}) \ . \tag{7.193}$$

Der Term $6\hat{W}_{I_1I_3I_2I_4}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}\partial^f_{s_2,\kappa',A'}b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)$

$$\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1I_3I_2I_4}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}\partial^f_{s_2,\kappa',A'}b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)\\
&= 6gc\lambda_{i_1}B_{i_2i_3i_4}\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_3}C_{\alpha_2\alpha_4}-\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_3}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_2\alpha_4}\right)\delta_{A_1A_3}\delta_{A_2A_4}\delta_{\kappa_1\kappa_3}L^0_{\kappa_2\kappa_4}\\
&\quad\iint d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_5\iiint d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,d\mathbf{k}_3\iiint d\mathbf{r}_2\,d\mathbf{r}_3\,d\mathbf{r}_4\,\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4)\\
&\quad\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\lambda_{i_4}\delta_{i_4i_5}\delta_{A_4A_5}L^0_{\kappa_4\kappa_5}\left\{-m^2_{i_4}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|)\right]}{|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|}C_{\alpha_4\alpha_5}\right.\\
&\quad\left.+im_{i_4}c(\gamma^kC)_{\alpha_4\alpha_5}(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5)^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|)\right]}{(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5)^3}+m_{i_4}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|)\right]}{(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5)^2}\right]\right\}\\
&\quad N_f(mc)^2(\tau-1)^3e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_2}\lambda_{i_2}\frac{1}{\tau mc-m_{i_2}c}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}(\mathbf{k}_1,M)\,\delta^{\kappa_2}_{\kappa}\delta^{A_2}_{A}\\
&\quad N_f(mc)^2(\tau-1)^3e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_3}\lambda_{i_3}\frac{1}{\tau mc-m_{i_3}c}\hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}(\mathbf{k}_2,M)\,\delta^{\kappa_3}_{\kappa'}\delta^{A_3}_{A'}\\
&\quad\left(9\pi2^9(2\pi\hbar)^3\right)^{-1}\frac{1}{N_A}\frac{N_{i_1i_5}}{\lambda_{i_1}\lambda_{i_5}}\delta_{A_1A_5}(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_5}(\gamma^lC)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_3(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_5)}e^{-N_{i_1i_5}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}\\
&\quad b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)\,\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\,\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{gc(mc)^4(\tau-1)^6}{3\pi2^8(2\pi\hbar)^5}\frac{1}{N_A}\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_3}C_{\alpha_2\alpha_4}-\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_3\alpha_4}\right)L^0_{\kappa_2\kappa_4}L^0_{\kappa_4\kappa_5}(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_5}\\
&\quad\iint d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_5\left[\sum_{i_1i_5}N_{i_1i_5}e^{-N_{i_1i_5}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}\left\{-m^2_{i_5}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|)\right]}{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5}C_{\alpha_4\alpha_5}\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+im_{i_5}c(\gamma^kC)_{\alpha_4\alpha_5}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^3}+m_{i_5}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^2}\right]\right\}\right](\gamma^lC)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\\
&\quad\left[\sum_{i_2}\lambda_{i_2}\frac{1}{\tau mc-m_{i_2}c}\right]\left[\sum_{i_3}\lambda_{i_3}\frac{1}{\tau mc-m_{i_3}c}\right]\\
&\quad N_f\delta^{\kappa_2}_{\kappa}\delta^{A_4}_{A}\int d\mathbf{k}_1e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}(\mathbf{k}_1,M)\,\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\\
&\quad N_f\delta^{\kappa_1}_{\kappa'}\delta^{A_4}_{A'}\int d\mathbf{k}_2e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}(\mathbf{k}_2,M)\,\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)\\
&\quad\int d\mathbf{k}_3e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_5}{2}}b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3) \ .
\end{aligned}\tag{7.194}$$

Mit Relativ- und Schwerpunktkoordinaten

$$\mathbf{u}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5 \ , \tag{7.195}$$
$$\mathbf{r}=\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_5) \ , \tag{7.196}$$

$$\int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_5 = \int d\mathbf{u}\, d\mathbf{r} \tag{7.197}$$

und Summation über i_2 und i_3, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1I_3I_2I_4}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}\partial^f_{s_2,\kappa',A'}b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)\\
&=\frac{gc(mc)^4(\tau-1)^6}{3\pi 2^8(2\pi\hbar)^5}\frac{1}{N_A}\left[\frac{1}{(\tau-1)^3m^3c^3}\right]^2\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_3}C_{\alpha_2\alpha_4}-\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_3}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_2\alpha_4}\right)(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_2}\\
&\int d\mathbf{u}\, d\mathbf{r}\left[\sum_{i_1i_5}N_{i_1i_5}e^{-N_{i_1i_5}u}\left\{-m^2_{i_5}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u}C_{\alpha_4\alpha_5}\right.\right.\\
&\left.\left.+im_{i_5}c(\gamma^kC)_{\alpha_4\alpha_5}u^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u^3}+m_{i_5}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u^2}\right]\right\}\right](\gamma^lC)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\\
&N_f\int d\mathbf{k}_1e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1(\mathbf{r}-\frac{1}{2}u)}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}(\mathbf{k}_1,M)\,\partial^f_{s_1,\kappa_2,A_4}(\mathbf{k}_1)\\
&N_f\int d\mathbf{k}_2e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2(\mathbf{r}+\frac{1}{2}\mathbf{u})}\hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}(\mathbf{k}_2,M)\,\partial^f_{s_2,\kappa_1,A_4}(\mathbf{k}_2)\\
&\int d\mathbf{k}_3e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\mathbf{r}}b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)\ .
\end{aligned}\tag{7.198}$$

Mit der Näherung $e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{u}}\approx 1$ und fouriertransformierten Quellen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1I_3I_2I_4}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}\partial^f_{s_2,\kappa',A'}b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)\\
&=\frac{gc}{3\pi 2^8(2\pi\hbar)^2m^2c^2}\frac{1}{N_A}\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_3}C_{\alpha_2\alpha_4}-\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_3}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_2\alpha_4}\right)(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_2}\\
&\int d\mathbf{u}\, d\mathbf{r}\left[\sum_{i_1i_5}N_{i_1i_5}e^{-N_{i_1i_5}u}\left\{-m^2_{i_5}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u}C_{\alpha_4\alpha_5}\right.\right.\\
&\left.\left.+im_{i_5}c(\gamma^kC)_{\alpha_4\alpha_5}u^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u^3}+m_{i_5}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u^2}\right]\right\}\right](\gamma^lC)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\\
&\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A_4}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_3,\kappa_1,A_4}(\mathbf{r})\,b^A_{l,a}(\mathbf{r})\ .
\end{aligned}\tag{7.199}$$

Die Integration über $d\mathbf{u}$ bringt den Anteil u^k zum Verschwinden, die anschließende Summation über α_4 führt auf:

$$\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1I_3I_2I_4}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}\partial^f_{s_2,\kappa',A'}b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)\\
&=-\frac{gc}{3\pi 2^8(2\pi\hbar)^2m^2c^2}\frac{1}{N_A}\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_3}C_{\alpha_2\alpha_4}-\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_3}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_2\alpha_4}\right)(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_2}\\
&\int d\mathbf{u}\, d\mathbf{r}\left[\sum_{i_1i_5}N_{i_1i_5}e^{-N_{i_1i_5}u}m^2_{i_5}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u}C_{\alpha_4\alpha_5}\right](\gamma^lC)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A_4}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_3,\kappa_1,A_4}(\mathbf{r})\,b^A_{l,a}(\mathbf{r})\\
&=-\frac{gc}{3\pi 2^8(2\pi\hbar)^2m^2c^2}\frac{1}{N_A}\left(-\gamma^0_{\alpha_1\alpha_3}\delta_{\alpha_2\alpha_5}(\gamma^lC)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}+\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_3}\gamma^5_{\alpha_2\alpha_5}(\gamma^lC)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\right)(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_2}\\
&\int d\mathbf{u}\, d\mathbf{r}\left[\sum_{i_1i_5}N_{i_1i_5}e^{-N_{i_1i_5}u}m^2_{i_5}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u}\right]\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A_4}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_3,\kappa_1,A_4}(\mathbf{r})\,b^A_{l,a}(\mathbf{r})\ .
\end{aligned}\tag{7.200}$$

Das Integral liefert nach Anhang C, Gleichung (C.17)

$$\int d\mathbf{u}\left[\sum_{i_1i_5}N_{i_1i_5}e^{-N_{i_1i_5}u}m^2_{i_5}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u}\right]=24\pi\hbar mc\ , \tag{7.201}$$

und damit ergibt sich:

$$6\hat{W}_{I_1I_3I_2I_4}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}\partial^f_{s_2,\kappa',A'}b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3) \tag{7.202}$$
$$= \frac{g\hbar}{2^5(2\pi\hbar)^2m}\frac{1}{N_A}\left(\gamma^0(\gamma^lC)^\dagger+\gamma^0\gamma^5(\gamma^lC)^\dagger\gamma^5\right)_{\alpha_3\alpha_2}(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_2}\int d\mathbf{r}\,\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A_4}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_3,\kappa_1,A_4}(\mathbf{r})\,b^A_{l,a}(\mathbf{r})\ .$$

Nun ergibt

$$\gamma^0(\gamma^lC)^\dagger+\gamma^0\gamma^5(\gamma^lC)^\dagger\gamma^5=0\ , \tag{7.203}$$

und damit verschwindet dieser Term.

$$6\hat{W}_{I_1I_3I_2I_4}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}\partial^f_{s_2,\kappa',A'}b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)=0\ . \tag{7.204}$$

Der Term $6\hat{W}_{I_1I_3I_2I_4}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3)$

$$\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1I_3I_2I_4}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3)\\
&=6gc\lambda_{i_1}B_{i_2i_3i_4}\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_3}C_{\alpha_2\alpha_4}-\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_3}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_2\alpha_4}\right)\delta_{A_1A_3}\delta_{A_2A_4}\delta_{\kappa_1\kappa_3}L^0_{\kappa_2\kappa_4}\\
&\iint d\mathbf{r}_1\ d\mathbf{r}_5\iiint d\mathbf{k}_1\ d\mathbf{k}_2\ d\mathbf{k}_3\ \iiint d\mathbf{r}_2\ d\mathbf{r}_3\ d\mathbf{r}_4\ \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4)\\
&\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\lambda_{i_4}\delta_{i_4i_5}\delta_{A_4A_5}L^0_{\kappa_4\kappa_5}\left\{-m^2_{i_4}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|}C_{\alpha_4\alpha_5}\right.\\
&\left.+im_{i_4}c(\gamma^kC)_{\alpha_4\alpha_5}\left(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5\right)^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5)^3}+m_{i_4}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5)^2}\right]\right\}\\
&N_f(mc)^2(\tau-1)^3e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_2}\lambda_{i_2}\frac{1}{\tau mc-m_{i_2}c}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}\left(\mathbf{k}_1,M\right)\delta^{\kappa_2}_{\kappa}\delta^{A_2}_{A}\\
&N_f(mc)^2(\tau-1)^3e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_3}\lambda_{i_3}\frac{1}{\tau mc-m_{i_3}c}\hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}\left(\mathbf{k}_2,M\right)\delta^{\kappa_3}_{\kappa'}\delta^{A_3}_{A'}\\
&5\left(9\pi2^9(2\pi\hbar)^3\right)^{-1}\frac{1}{N}\frac{N^2_{i_1i_5}}{\lambda_{i_1}\lambda_{i_5}}\delta_{A_1A_5}\left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_5}\left(\Sigma^{l\nu}C\right)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_3(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_5)}e^{-N_{i_1i_5}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}\\
&\partial^f_{s_1,\kappa,A}\left(\mathbf{k}_1\right)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}\left(\mathbf{k}_2\right)b^F_{l\nu,a}\left(\mathbf{k}_3\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{5gc}{3\pi2^8}\frac{1}{(2\pi\hbar)^5}(mc)^4(\tau-1)^6\frac{1}{N_F}\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_3}C_{\alpha_2\alpha_4}-\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_3}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_2\alpha_4}\right)L^0_{\kappa_2\kappa_4}L^0_{\kappa_4\kappa_5}\left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_5}\\
&\iint d\mathbf{r}_1\ d\mathbf{r}_5\left[\sum_{i_1i_5}N^2_{i_1i_5}e^{-N_{i_1i_5}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}\left\{-m^2_{i_5}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}C_{\alpha_4\alpha_5}\right.\right.\\
&\left.\left.+im_{i_5}c(\gamma^kC)_{\alpha_4\alpha_5}\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5\right)^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^3}+m_{i_5}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^2}\right]\right\}\right]\left(\Sigma^{l\nu}C\right)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\\
&\left[\sum_{i_2}\lambda_{i_2}\frac{1}{\tau mc-m_{i_2}c}\right]\left[\sum_{i_3}\lambda_{i_3}\frac{1}{\tau mc-m_{i_3}c}\right]\\
&N_f\delta^{\kappa_2}_{\kappa}\delta^{A_1}_{A}\int d\mathbf{k}_1\ e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}\left(\mathbf{k}_1,M\right)\partial^f_{s_1,\kappa,A}\left(\mathbf{k}_1\right)
\end{aligned}$$

$$N_f \delta^{\kappa_1}_{\kappa'} \delta^{A_1}_{A'} \int d\mathbf{k}_2 \; e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_1} \hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}(\mathbf{k}_2, M)\, \partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)$$
$$\int d\mathbf{k}_3 e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_5}{2}} b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3) \; . \tag{7.205}$$

Transformation auf Relativ- und Schwerpunktkoordinaten

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_5 \; , \tag{7.206}$$
$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_5) \; , \tag{7.207}$$
$$\int d\mathbf{r}_1 \; d\mathbf{r}_5 = \int d\mathbf{u} \; d\mathbf{r} \tag{7.208}$$

liefert

$$6\hat{W}_{I_1I_3I_2I_4}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3)$$
$$= \frac{5gc}{3\pi 2^8}\frac{1}{(2\pi\hbar)^5 m^2c^2}\frac{1}{N_F}\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_3}C_{\alpha_2\alpha_4} - \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_3}\left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_2\alpha_4}\right)(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_2}$$
$$\int d\mathbf{u}\; d\mathbf{r} \left[\sum_{i_1i_5} N^2_{i_1i_5} e^{-N_{i_1i_5}u}\left\{-m^2_{i_5}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u}C_{\alpha_4\alpha_5}\right.\right.$$
$$\left.\left. +im_{i_5}c(\gamma^kC)_{\alpha_4\alpha_5}u^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u^3} + m_{i_5}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u^2}\right]\right\}\right](\Sigma^{l\nu}C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}$$
$$N_f\int d\mathbf{k}_1 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1(\mathbf{r}-\frac{1}{2}\mathbf{u})}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}(\mathbf{k}_1, M)\,\partial^f_{s_1,\kappa_2,A_1}(\mathbf{k}_1)$$
$$N_f\int d\mathbf{k}_2 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2(\mathbf{r}+\frac{1}{2}\mathbf{u})}\hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}(\mathbf{k}_2, M)\,\partial^f_{s_2,\kappa_1,A_1}(\mathbf{k}_2)$$
$$\int d\mathbf{k}_3 e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\mathbf{r}} b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3) \; . \tag{7.209}$$

Mit der Näherung $e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{u}} \approx 1$ und der Einführung der fouriertransformierten Quellen ergibt sich:

$$6\hat{W}_{I_1I_3I_2I_4}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3)$$
$$= \frac{5gc}{3\pi 2^8}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2 m^2c^2}\frac{1}{N_F}\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2}C_{\alpha_3\alpha_4} - \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_3}\left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_2\alpha_4}\right)(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_2}$$
$$\int d\mathbf{u}\; d\mathbf{r} \left[\sum_{i_1i_5} N^2_{i_1i_5} e^{-N_{i_1i_5}u}\left\{-m^2_{i_5}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u}C_{\alpha_4\alpha_5}\right.\right.$$
$$\left.\left. +im_{i_5}c(\gamma^kC)_{\alpha_4\alpha_5}u^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u^3} + m_{i_5}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u^2}\right]\right\}\right](\Sigma^{l\nu}C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}$$
$$\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A_1}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_3,\kappa_1,A_1}(\mathbf{r})\,b^F_{l\nu,a}(\mathbf{r}) \; . \tag{7.210}$$

Die Integration über $d\mathbf{u}$ bringt den Anteil u^k zum Verschwinden:

$$6\hat{W}_{I_1I_3I_2I_4}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3)$$
$$= -\frac{5gc}{3\pi 2^8}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2 m^2c^2}\frac{1}{N_F}\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_3}C_{\alpha_2\alpha_4} - \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_3}\left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_2\alpha_4}\right)(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_2}$$
$$\int d\mathbf{u}\; d\mathbf{r}\left[\sum_{i_1i_5} N^2_{i_1i_5} e^{-N_{i_1i_5}u} m^2_{i_5}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u}C_{\alpha_4\alpha_5}\right]\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A_1}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_3,\kappa_1,A_1}(\mathbf{r})\,b^F_{l\nu,a}(\mathbf{r})$$

$$= -\frac{5gc}{3\pi 2^8}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2 m^2c^2}\frac{1}{N_F}\left(-\gamma^0_{\alpha_1\alpha_3}\delta_{\alpha_2\alpha_5}(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5} + \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_3}\gamma^5_{\alpha_2\alpha_5}(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\right)(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_2}$$
$$\int d\mathbf{u}\, d\mathbf{r}\left[\sum_{i_1 i_5} N^2_{i_1 i_5} e^{-N_{i_1 i_5}u} m^2_{i_5}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u}\right]\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A_1}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_3,\kappa_1,A_1}(\mathbf{r})\,b^F_{l\nu,a}(\mathbf{r})\ . \quad (7.211)$$

Mit

$$\int d\mathbf{u}\left[\sum_{i_1 i_5} N^2_{i_1 i_5} e^{-N_{i_1 i_5}u} m^2_{i_5}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_5}c}{\hbar}u\right]}{u}\right] = 24\pi m^2c^2 \quad (7.212)$$

nach Anhang C, Gleichung (C.18) ergibt sich

$$6\hat{W}_{I_1I_3I_2I_4}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3) \quad (7.213)$$
$$= \frac{5gc}{2^5}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{N_F}\left(\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger + \gamma^0\gamma^5(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger\gamma^5\right)_{\alpha_3\alpha_2}(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_2}\int d\mathbf{r}\,\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A_1}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_3,\kappa_1,A_1}(\mathbf{r})\,b^F_{l\nu,a}(\mathbf{r})\ .$$

Nun ergibt nach (7.192)

$$\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger + \gamma^0\gamma^5(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger\gamma^5 = 2\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger\ . \quad (7.214)$$

Dies eingesetzt ergibt:

$$6\hat{W}_{I_1I_3I_2I_4}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3)$$
$$= \frac{5gc}{16}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{N_F}\left(\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger\right)_{\alpha_3\alpha_2}(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_2}\int d\mathbf{r}\,\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A_1}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_3,\kappa_1,A_1}(\mathbf{r})\,b^F_{l\nu,a}(\mathbf{r})\ . \quad (7.215)$$

Der Term $6\hat{W}_{I_1I_4I_2I_3}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)$

$$6\hat{W}_{I_1I_4I_2I_3}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)$$
$$= 6gc\lambda_{i_1}B_{i_2i_3i_4}\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_4}C_{\alpha_2\alpha_3} - \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_4}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_2\alpha_3}\right)\delta_{A_1A_4}\delta_{A_2A_3}\delta_{\kappa_1\kappa_4}L^0_{\kappa_2\kappa_3}$$
$$\iint d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_5 \iiint d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3 \iiint d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{r}_3\, d\mathbf{r}_4\ \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4)$$
$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\lambda_{i_4}\delta_{i_4i_5}\delta_{A_4A_5}L^0_{\kappa_4\kappa_5}\left\{-m^2_{i_4}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|)\right]}{|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|}C_{\alpha_4\alpha_5}\right.$$
$$\left.+im_{i_4}c(\gamma^kC)_{\alpha_4\alpha_5}(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5)^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|)\right]}{(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5)^3} + m_{i_4}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|)\right]}{(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5)^2}\right]\right\}$$
$$N_f(mc)^2(\tau-1)^3e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_2}\lambda_{i_2}\frac{1}{\tau mc - m_{i_2}c}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}(\mathbf{k}_1,M)\,\delta^{\kappa_2}_{\kappa}\delta^{A_2}_{A}$$
$$N_f(mc)^2(\tau-1)^3e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_3}\lambda_{i_3}\frac{1}{\tau mc - m_{i_3}c}\hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}(\mathbf{k}_2,M)\,\delta^{\kappa_3}_{\kappa'}\delta^{A_3}_{A'}$$
$$\left(9\pi 2^9(2\pi\hbar)^3\right)^{-1}\frac{1}{N_A}\frac{N_{i_1i_5}}{\lambda_{i_1}\lambda_{i_5}}\delta_{A_1A_5}(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_5}(\gamma^lC)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{k}_3(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_5)}e^{-N_{i_1i_5}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}$$
$$b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)\,\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\,\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{gc(mc)^4(\tau-1)^6}{3\pi 2^7(2\pi\hbar)^5}\frac{1}{N_A}\delta_{\kappa_1\kappa_4}L^0_{\kappa_4\kappa_5}\left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_5}\delta_{A_1A_4}\delta_{A_4A_5}\delta_{A_5A_1}\\
&\iint d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_5\left[\lambda_{i_2}\frac{1}{\tau mc-m_{i_2}c}\right]\left[\lambda_{i_3}\frac{1}{\tau mc-m_{i_3}c}\right]L^0_{\kappa_2\kappa_3}N_{i_1i_4}e^{-N_{i_1i_4}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}\\
&\Bigg\{-m_{i_4}^2c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}\left(C_{\alpha_4\alpha_5}(\gamma^lC)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\gamma^0_{\alpha_1\alpha_4}C_{\alpha_2\alpha_3}-C_{\alpha_4\alpha_5}(\gamma^lC)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}(\gamma^0\gamma^5)_{\alpha_1\alpha_4}\right)\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_2\alpha_3}\\
&+im_{i_4}c\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5\right)^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^3}+m_{i_4}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^2}\right]\\
&\left((\gamma^kC)_{\alpha_4\alpha_5}(\gamma^lC)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\gamma^0_{\alpha_1\alpha_4}C_{\alpha_2\alpha_3}-(\gamma^kC)_{\alpha_4\alpha_5}(\gamma^lC)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_4}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_2\alpha_3}\right)\Bigg\}\\
&N_f\int d\mathbf{k}_1e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}\left(\mathbf{k}_1,M\right)\delta^{\kappa_2}_{\kappa}\delta^{A_3}_{A}\partial^f_{s_1,\kappa,A}\left(\mathbf{k}_1\right)\\
&N_f\int d\mathbf{k}_2e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}\left(\mathbf{k}_2,M\right)\delta^{\kappa_3}_{\kappa'}\delta^{A_3}_{A'}\partial^f_{s_2,\kappa',A'}\left(\mathbf{k}_2\right)\\
&\int d\mathbf{k}_3e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_5}{2}}b^A_{l,a}\left(\mathbf{k}_3\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{gc}{3\pi 2^8(2\pi\hbar)^5m^2c^2}\frac{1}{N_A}Sp\left[L^0\left(L^a\right)^*\right]Sp\left[\mathbb{1}_6\right]L^0_{\kappa_2\kappa_3}\iint d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_5\; N_{i_1i_4}e^{-N_{i_1i_4}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}\\
&\Bigg\{-m_{i_4}^2c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}\left(Sp\left[C(\gamma^lC)^*\gamma^0\right]C_{\alpha_2\alpha_3}-Sp\left[C(\gamma^lC)^*\gamma^0\gamma^5\right]\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_2\alpha_3}\right)\\
&+im_{i_4}c\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5\right)^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^3}+m_{i_4}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^2}\right]\\
&\left(Sp\left[(\gamma^kC)(\gamma^lC)^*\gamma^0\right]C_{\alpha_2\alpha_3}-Sp\left[(\gamma^kC)(\gamma^lC)^*\gamma^0\gamma^5\right]\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_2\alpha_3}\right)\Bigg\}\\
&N_f\int d\mathbf{k}_1e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}\left(\mathbf{k}_1,M\right)\partial^f_{s_1,\kappa_2,A_3}\left(\mathbf{k}_1\right)\\
&\int d\mathbf{k}_2N_fe^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}\left(\mathbf{k}_2,M\right)\partial^f_{s_2,\kappa_3,A_3}\left(\mathbf{k}_2\right)\\
&\int d\mathbf{k}_3e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_5}{2}}b^A_{l,a}\left(\mathbf{k}_3\right)\ .
\end{aligned}
\tag{7.216}
$$

Die Spuren über die γ-Matrizen verschwinden und damit verschwindet auch dieser Term.

$$
6\hat{W}_{I_1I_4I_2I_3}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)b^A_{l,a}(\mathbf{k}_3)=0\ . \tag{7.217}
$$

Der Term $6\hat{W}_{I_1I_4I_2I_3}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3)$

$$
\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1I_4I_2I_3}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3)\\
&=6gc\lambda_{i_1}B_{i_2i_3i_4}\left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_4}C_{\alpha_2\alpha_3}-\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_4}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_2\alpha_3}\right)\delta_{A_1A_4}\delta_{A_2A_3}\delta_{\kappa_1\kappa_4}L^0_{\kappa_2\kappa_3}\\
&\iint d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_5\iiint d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3\iiint d\mathbf{r}_2\, d\mathbf{r}_3\, d\mathbf{r}_4\;\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4)\\
&\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\lambda_{i_4}\delta_{i_4i_5}\delta_{A_4A_5}L^0_{\kappa_4\kappa_5}\Bigg\{-m_{i_4}^2c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|}C_{\alpha_4\alpha_5}
\end{aligned}
$$

$$+im_{i_4}c(\gamma^k C)_{\alpha_4\alpha_5}\left(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5\right)^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5)^3}+m_{i_4}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_5)^2}\right]\Bigg\}$$

$$N_f(mc)^2(\tau-1)^3 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_2}\lambda_{i_2}\frac{1}{\tau mc-m_{i_2}c}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}\left(\mathbf{k}_1,M\right)\delta^{\kappa_2}_{\kappa}\delta^{A_2}_{A}$$

$$N_f(mc)^2(\tau-1)^3 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_3}\lambda_{i_3}\frac{1}{\tau mc-m_{i_3}c}\hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}\left(\mathbf{k}_2,M\right)\delta^{\kappa_3}_{\kappa'}\delta^{A_3}_{A'}$$

$$5\left(9\pi 2^9(2\pi\hbar)^3\right)^{-1}\frac{1}{N_F}\frac{N^2_{i_1i_5}}{\lambda_{i_1}\lambda_{i_5}}\delta_{A_1A_5}\left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_5}\left(\Sigma^{l\nu}C\right)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_5}{2}}e^{-N_{i_1i_5}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}$$

$$b^F_{l\nu,a}\left(\mathbf{k}_3\right)\partial^f_{s_1,\kappa,A}\left(\mathbf{k}_1\right)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}\left(\mathbf{k}_2\right)$$

$$=\frac{5gc(mc)^4(\tau-1)^6}{3\pi 2^8(2\pi\hbar)^5}\frac{1}{N_F}\delta_{\kappa_1\kappa_4}L^0_{\kappa_4\kappa_5}\left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_5}\delta_{A_1A_4}\delta_{A_4A_5}\delta_{A_5A_1}$$

$$\iint d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_5\left[\lambda_{i_2}\frac{1}{\tau mc-m_{i_2}c}\right]\left[\lambda_{i_3}\frac{1}{\tau mc-m_{i_3}c}\right]L^0_{\kappa_2\kappa_3}N^2_{i_1i_4}e^{-N_{i_1i_4}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}$$

$$\Bigg\{-m^2_{i_4}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5}\left(C_{\alpha_4\alpha_5}(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\gamma^0_{\alpha_1\alpha_4}C_{\alpha_2\alpha_3}-C_{\alpha_4\alpha_5}(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_4}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_2\alpha_3}$$

$$+im_{i_4}c\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5\right)^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^3}+m_{i_4}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^2}\right]$$

$$\Big((\gamma^kC)_{\alpha_4\alpha_5}(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\gamma^0_{\alpha_1\alpha_4}C_{\alpha_2\alpha_3}-(\gamma^kC)_{\alpha_4\alpha_5}(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger_{\alpha_1\alpha_5}\left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_4}\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_2\alpha_3}\Big)\Bigg\}$$

$$N_f\int d\mathbf{k}_1 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}\left(\mathbf{k}_1,M\right)\delta^{\kappa_2}_{\kappa}\delta^{A_3}_{A}\partial^f_{s_1,\kappa,A}\left(\mathbf{k}_1\right)$$

$$N_f\int d\mathbf{k}_2 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}\left(\mathbf{k}_2,M\right)\delta^{\kappa_3}_{\kappa'}\delta^{A_3}_{A'}\partial^f_{s_2,\kappa',A'}\left(\mathbf{k}_2\right)$$

$$\int d\mathbf{k}_3 e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_5}{2}}b^F_{l\nu,a}\left(\mathbf{k}_3\right)$$

$$=\frac{5gc}{3\pi 2^8(2\pi\hbar)^2m^2c^2}\frac{1}{N_F}Sp\left[L^0\left(L^a\right)^*\right]Sp\left[\mathbb{1}_6\right]L^0_{\kappa_2\kappa_3}\iint d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_5\ N_{i_1i_4}e^{-N_{i_1i_4}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}$$

$$\Bigg\{-m^2_{i_4}c^2\frac{K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|}\Big(Sp\left[C(\Sigma^{l\nu}C)^*\gamma^0\right]C_{\alpha_2\alpha_3}-Sp\left[C(\Sigma^{l\nu}C)^*\gamma^0\gamma^5\right]\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_2\alpha_3}\Big)$$

$$+im_{i_4}c\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5\right)^k\left[\frac{2\hbar K_1\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^3}+m_{i_4}c\frac{K_0\left[\frac{m_{i_4}c}{\hbar}\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5|\right)\right]}{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_5)^2}\right]$$

$$\Big(Sp\left[(\gamma^kC)(\Sigma^{l\nu}C)^*\gamma^0_{\alpha_1\alpha_4}\right]C_{\alpha_2\alpha_3}-Sp\left[(\gamma^kC)(\Sigma^{l\nu}C)^*\gamma^0\gamma^5\right]\left(\gamma^5C\right)_{\alpha_2\alpha_3}\Big)\Bigg\}$$

$$N_f\int d\mathbf{k}_1 e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_1)}_{\alpha_2}\left(\mathbf{k}_1,M\right)\partial^f_{s_1,\kappa_2,A_3}\left(\mathbf{k}_1\right)$$

$$\int d\mathbf{k}_2 N_f e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_2\mathbf{r}_1}\hat{u}^{(s_2)}_{\alpha_3}\left(\mathbf{k}_2,M\right)\partial^f_{s_2,\kappa_3,A_3}\left(\mathbf{k}_2\right)$$

$$\int d\mathbf{k}_3 e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}_3\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_5}{2}}b^F_{l\nu,a}\left(\mathbf{k}_3\right)\ . \tag{7.218}$$

Die Spuren über die γ-Matrizen verschwinden und damit verschwindet auch dieser Term.

$$6\hat{W}_{I_1I_4I_2I_3}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)C^{I_3}_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)R^{l\nu,a}_{I_1I_5}(\mathbf{k}_3)\partial^f_{s_1,\kappa,A}(\mathbf{k}_1)\partial^f_{s_2,\kappa',A'}(\mathbf{k}_2)b^F_{l\nu,a}(\mathbf{k}_3)=0\ . \tag{7.219}$$

7.3.3 Zusammenfassung

Werden die Ergebnisse (7.182), (7.193), (7.204), (7.215), (7.217) und (7.219) in (7.166)-(7.171) eingesetzt, ergibt dies:

$$\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1\{I_2I_3I_4\}}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{1,l_1}C^{I_3}_{1,l_2}R^{2,k_1}_{I_1I_5}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2}b_{k_1}\\
&=\frac{5gc}{16}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{N_F}\left((\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger\right)_{\alpha_2\alpha_3}(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_3}\,\partial^f_{\alpha_2,\kappa_1,A_1}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_3,\kappa_3,A_1}(\mathbf{r})\,b^F_{l\nu,a}(\mathbf{r})\\
&-\frac{5gc}{16}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{N_F}\left((\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger\right)_{\alpha_3\alpha_2}(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_2}\,\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A_1}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_3,\kappa_1,A_1}(\mathbf{r})\,b^F_{l\nu,a}(\mathbf{r})\ .
\end{aligned} \tag{7.220}$$

Diese beiden Terme lassen sich nun weiter zusammenfassen. Dazu werden die Indizes umbenannt:

$$\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1\{I_2I_3I_4\}}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{1,l_1}C^{I_3}_{1,l_2}R^{2,k_1}_{I_1I_5}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2}b_{k_1}\\
&=\frac{5gc}{16}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{N_F}\left(\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger\right)_{\alpha_1\alpha_2}(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_2}\,\partial^f_{\alpha_1,\kappa_1,A}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A}(\mathbf{r})\,b^F_{l\nu,a}(\mathbf{r})\\
&-\frac{5gc}{16}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{N_F}\left(\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger\right)_{\alpha_2\alpha_1}(L^a)^*_{\kappa_2\kappa_1}\,\partial^f_{\alpha_1,\kappa_1,A}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A}(\mathbf{r})\,b^F_{l\nu,a}(\mathbf{r})\ .
\end{aligned} \tag{7.221}$$

Zusammengefaßt ergibt dies:

$$\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1\{I_2I_3I_4\}}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{1,l_1}C^{I_3}_{1,l_2}R^{2,k_1}_{I_1I_5}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2}b_{k_1}\\
&=\frac{5gc}{16}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{N_F}\left\{\left(\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger\right)_{\alpha_1\alpha_2}(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_2}-\left(\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger\right)_{\alpha_2\alpha_1}(L^a)^*_{\kappa_2\kappa_1}\right\}\\
&\partial^f_{\alpha_1,\kappa_1,A}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A}(\mathbf{r})\,b^F_{l\nu,a}(\mathbf{r})\ .
\end{aligned} \tag{7.222}$$

Nun gilt

$$\left[(L^a)^*\right]^T=-\,(L^a)^* \tag{7.223}$$

und damit

$$\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1\{I_2I_3I_4\}}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{1,l_1}C^{I_3}_{1,l_2}R^{2,k_1}_{I_1I_5}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2}b_{k_1}\\
&=\frac{5gc}{16}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{N_F}\left\{\left(\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger\right)_{\alpha_1\alpha_2}+\left(\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger\right)_{\alpha_2\alpha_1}\right\}(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_2}\\
&\partial^f_{\alpha_1,\kappa_1,A}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A}(\mathbf{r})\,b^F_{l\nu,a}(\mathbf{r})\ .
\end{aligned} \tag{7.224}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger\right)_{\alpha_1\alpha_2}+\left(\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger\right)_{\alpha_2\alpha_1}&=\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger+\left[\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger\right]^T\\
&=\gamma^0(\Sigma^{l\nu}C)^\dagger+\gamma^0C\Sigma^{l\nu}\\
&=-\gamma^0C\left((\Sigma^{l\nu})^\dagger-\Sigma^{l\nu}\right)\\
&=2\gamma^0C\ \Sigma^{l0}\ \delta_{\nu0}\\
&=2iC\gamma^l\ \delta_{\nu0}\ .
\end{aligned} \tag{7.225}$$

Eingesetzt führt dies auf:

$$\begin{aligned}
&6\hat{W}_{I_1\{I_2I_3I_4\}}F^t_{I_4I_5}C^{I_2}_{1,l_1}C^{I_3}_{1,l_2}R^{2,k_1}_{I_1I_5}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2}b_{k_1}\\
&=i\frac{5gc}{8}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{N_F}\left(C\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\nu 0}\left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_2}\partial^f_{\alpha_1,\kappa_1,A}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A}(\mathbf{r})\,b^F_{l\nu,a}(\mathbf{r})\\
&=\frac{5igc}{8}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{N_F}\left(C\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_2}\partial^f_{\alpha_1,\kappa_1,A}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A}(\mathbf{r})\,b^F_{l0,a}(\mathbf{r})\\
&=i\hbar c\frac{5g}{8\hbar}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{N_F}\left(C\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_2}\partial^f_{\alpha_1,\kappa_1,A}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A}(\mathbf{r})\,b^F_{l0,a}(\mathbf{r})\\
&=i\hbar c\,K_2\int d\mathbf{r}\,\left(C\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_2}\partial^f_{\alpha_1,\kappa_1,A}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A}(\mathbf{r})\,b^F_{l0,a}(\mathbf{r}) \qquad (7.226)
\end{aligned}$$

mit

$$K_2=\frac{5}{8}\frac{g}{\hbar(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{N_F}\,. \qquad (7.227)$$

Der Wechselwirkungsterm

Mit den Ergebnissen (7.163), (7.164), (7.226) und (7.227) lautet der Wechselwirkungsterm (7.151):

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{bf}&=3\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}C^{I_2I_3}_{2,k}C^{I_4}_{1,l_1}R^{1,l_2}_{I_1}f_{l_2}\partial^b_k\partial^f_{l_1}\\
&\quad-6\hat{W}_{I_1I_2I_3I_4}F^t_{I_4K}C^{I_1}_{1,l_1}C^{I_2}_{1,l_2}R^{2,k_1}_{I_1K}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2}\\
&=-i\hbar c\,K_1\int d\mathbf{r}\left[L^aL^0\right]_{\kappa\kappa'}\left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\alpha'}\;f_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r}_1)\;\partial^f_{\alpha',\kappa',A}(\mathbf{r}_1)\;\partial^A_{l,a}(\mathbf{r}_1)\\
&\quad-i\hbar c\,K_2\int d\mathbf{r}\left(C\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_2}\;\partial^f_{\alpha_1,\kappa_1,A}(\mathbf{r})\;\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A}(\mathbf{r})\;b^F_{l0,a}(\mathbf{r}) \qquad (7.228)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
K_1&=\frac{3i}{8(\tau-1)^2}\;\frac{g}{\hbar^3m^4c^4}\;N_A\,,\\
K_2&=\frac{5}{8}\frac{g}{\hbar(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{N_F}\,. \qquad (7.229)
\end{aligned}$$

7.4 Der effektive funktionale Energieoperator

Werden die Ergebnisse (7.36), (7.149) und (7.228) mit den Konstanten (7.150), (7.164) und (7.227) in (7.23) eingesetzt, lautet der ausgewertete effektive funktionale Energieoperator:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} = & \int d\mathbf{r} \left[-i\hbar c(\gamma^0\gamma^k)\partial_k + \gamma^0 mc^2\right]_{\alpha\beta} f_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r})\, \partial^f_{\beta,\kappa,A}(\mathbf{r}) \\
& + \int d\mathbf{r} \frac{gc}{(mc)^2(\tau-1)^2} \left(\gamma^0_{\alpha_1\alpha_2} C_{\alpha_3\alpha_4} - \left(\gamma^0\gamma^5\right)_{\alpha_1\alpha_2} \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_3\alpha_4}\right) L^0_{cd} \\
& f_{\alpha_1,a,A}(\mathbf{r})\, \partial^f_{\alpha_2,a,A}(\mathbf{r})\, \partial^f_{\alpha_3,c,B}(\mathbf{r})\, \partial^f_{\alpha_4,d,B}(\mathbf{r}) \\
& + i\left(10\frac{m^2c^3}{\hbar} - \frac{15cg}{32\pi^2\hbar^4}\right)\frac{N_A}{N_F}\int d^3r\; b^F_{i0,a}(\mathbf{r})\; \partial^A_{i,a}(\mathbf{r}) \\
& - i\frac{2}{5}\hbar c\frac{N_F}{N_A}\int d^3r\; b^A_{i,a}(\mathbf{r})\; \partial^F_{i0,a}(\mathbf{r}) \\
& + i\hbar c\int d^3r\; b^F_{i0,a}(\mathbf{r})\; \epsilon_{ijk}\; \partial_j(\mathbf{r})\; \epsilon_{klm}\; \partial^F_{lm,a}(\mathbf{r})\; {}_{|l>m} \\
& - i\hbar c\int d^3r\; b^F_{lm,a}(\mathbf{r})\; \epsilon_{ilm}\; \epsilon_{ijk}\; \partial_j(\mathbf{r})\; \partial^F_{k0,a}(\mathbf{r})\; {}_{|l>m} \\
& + i\hbar c\, G\int d^3r\; f^{abc} b^F_{lm,a}(\mathbf{r})\; \epsilon_{ilm}\; \epsilon_{ijk}\; \partial^F_{j0,b}(\mathbf{r})\; \partial^A_{k,c}(\mathbf{r})\; {}_{|l>m} \\
& - i\hbar c\, G\int d^3r\; f^{abc}\; b^F_{i0,a}(\mathbf{r})\; \epsilon_{ijk}\; \epsilon_{jlm}\; \partial^F_{lm,b}(\mathbf{r})\; \partial^A_{k,c}(\mathbf{r})\; {}_{|l>m} \\
& - i\hbar c\, K_1\int d\mathbf{r}\left[L^a L^0\right]_{\kappa\kappa'}\left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\alpha'}\; f_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r}_1)\; \partial^f_{\alpha',\kappa',A}(\mathbf{r}_1)\; \partial^A_{l,a}(\mathbf{r}_1) \\
& - i\hbar c\, K_2\int d\mathbf{r}\left(C\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha_2}(L^a)^*_{\kappa_1\kappa_2}\; \partial^f_{\alpha_1,\kappa_1,A}(\mathbf{r})\; \partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A}(\mathbf{r})\; b^F_{l0,a}(\mathbf{r})
\end{aligned}
\tag{7.230}
$$

mit

$$G = \frac{3}{56} N_A \frac{g}{m^4c^4\hbar^3}\;, \tag{7.231}$$

$$K_1 = \frac{3i}{8(\tau-1)^2}\frac{g}{\hbar^3 m^4 c^4} N_A\;, \tag{7.232}$$

$$K_2 = \frac{5g}{8\hbar}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{N_F}\;. \tag{7.233}$$

Kapitel 8

Die effektive Quark-Gluondynamik

8.1 Die effektive Masse der Gluonen

Der Massenterm für die Gluonen lautet:

$$i\left(10\frac{m^2c^3}{\hbar}-\frac{15cg}{32\pi^2\hbar^4}\right)\frac{N_A}{N_F}\int d^3r\ b^F_{i0,a}(\mathbf{r})\partial^A_{i,a}(\mathbf{r})\ . \tag{8.1}$$

Die Eichtheorie verlangt nach masselosen Eichbosonen, dies bedeutet, daß dieser Massenterm verschwinden muß. Dies kann durch eine geeignete Wahl der Kopplungskonstanten g erzielt werden. Der Wert lautet:

$$\boxed{g=\frac{64}{3}\pi^2m^2c^2\hbar^3\ .} \tag{8.2}$$

Dieser Wert der Kopplungskonstanten g ist identisch mit dem Wert, der aus der Zweiteilchenwellenfunktion abgeleitet wurde (siehe Anhang E, Gleichung (E.10)).

8.2 Einführung phänomenologischer Größen

Es werden folgende Größen eingeführt:

Vektorpotential	$b^A_{k,a}(r,t):=\alpha\ b^A_{k,a}(r,t)$	(8.3)
Chromoelektrische Felder	$b^E_{k,a}(r,t):=\beta\ b^F_{k0,a}(r,t)$	(8.4)
Chromomagnetische Felder	$b^B_{k,a}(r,t):=\gamma\ \epsilon_{klm}b^F_{lm,a}(r,t)\ .$	(8.5)

Die Größen α,β und γ sind Renormierungskonstanten.
Entsprechend ergibt sich für die Duale:

$$\partial_{i,a}^{A}(\mathbf{r},t) := \frac{1}{\alpha}\,\partial_{i,a}^{A}(\mathbf{r},t) \tag{8.6}$$
$$\partial_{i,a}^{E}(\mathbf{r},t) := \frac{1}{\beta}\,\partial_{i0,a}^{F}(\mathbf{r},t) \tag{8.7}$$
$$\partial_{i,a}^{B}(\mathbf{r},t) := \frac{1}{\gamma}\,\epsilon_{ijk}\partial_{jk,a}^{F}(\mathbf{r},t)\ . \tag{8.8}$$

Damit schreibt sich der effektive funktionale Energieoperator:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{eff}} = & -i\hbar c\int d\mathbf{r}\left[(\gamma^0\gamma^k)\partial_k + \frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\alpha\beta} f_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\beta,\kappa,A}(\mathbf{r}) \\
& - i\hbar c\frac{2}{5}\frac{N_F}{N_A}\frac{\beta}{\alpha}\int d^3r b^A_{i,a}(\mathbf{r},t)\partial^E_{i,a}(\mathbf{r},t) \\
& + i\hbar c\frac{\gamma}{\beta}\int d^3r b^E_{i,a}(\mathbf{r},t)\epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})\partial^B_{k,a}(\mathbf{r},t) \\
& - i\hbar c\frac{\beta}{\gamma}\int d^3r b^B_{i,a}(\mathbf{r},t)\epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})\partial^E_{k,a}(\mathbf{r},t) \\
& + i\hbar c\,\frac{\alpha\beta}{\gamma}G\int d^3r f^{abc} b^B_{i,a}(\mathbf{r},t)\epsilon_{ijk}\partial^E_{j,b}(\mathbf{r},t)\partial^A_{k,c}(\mathbf{r},t) \\
& - i\hbar c\,\frac{\alpha\gamma}{\beta}G\int d^3r f^{abc} b^E_{i,a}(\mathbf{r},t)\epsilon_{ijk}\partial^B_{j,b}(\mathbf{r},t)\partial^A_{k,c}(\mathbf{r},t) \\
& - i\hbar c\,\alpha K_1\int d\mathbf{r}\,\left[L^aL^0\right]_{\kappa\kappa'}\left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\alpha'} f_{\alpha_1,\kappa_1,A}(\mathbf{r}_1)\,\partial^f_{\alpha_4,\kappa_4,A}(\mathbf{r}_1)\,\partial^A_{l,a}(\mathbf{r}_1) \\
& - i\hbar c\,\frac{1}{\beta}K_2\int d\mathbf{r}\; b^E_{l,a}(\mathbf{r})\left(C\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_2}\partial^f_{\alpha_1,\kappa_1,A}(\mathbf{r})\,\partial^f_{\alpha_2,\kappa_2,A}(\mathbf{r})\ .
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Die Kopplungskonstanten lauten:

$$g = \frac{64}{3}\pi^2 m^2 c^2\hbar^3\ , \tag{8.10}$$
$$G = \frac{3}{56}\frac{g}{\hbar^3 m^4 c^4}N_A\ , \tag{8.11}$$
$$K_1 = \frac{3i}{8(\tau-1)^2}\frac{g}{\hbar^3 m^4 c^4}N_A\ , \tag{8.12}$$
$$K_2 = \frac{5g}{8\hbar}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{N_F}\ . \tag{8.13}$$

8.3 Ableiten der Feldgleichungen

Es gelten folgende Beziehungen:

$$E_{a0}\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle = \mathcal{H}_{\text{eff}}\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle \tag{8.14}$$
$$\begin{aligned}
E_{a0}\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle = & \, i\hbar\int d^3r\left[b_k(t)\frac{\partial}{\partial t}\partial^b_k(t)\right]\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& + i\hbar\int d^3r\left[f_k(t)\frac{\partial}{\partial t}\partial^f_k(t)\right]\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle\ .
\end{aligned} \tag{8.15}$$

Gleichsetzen liefert:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle = i\hbar\int d^3r\left[b_k(t)\frac{\partial}{\partial t}\partial_k(t)\right]\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle$$

$$+i\hbar\int d^3r\left[f_k(t)\frac{\partial}{\partial t}\partial_k^f(t)\right]\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle\ . \tag{8.16}$$

Ordnen des Energieoperators nach gleichen Quellen b^A, b^E, b^F und f liefert:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_{\text{eff}}\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle\\
&=-i\hbar c\frac{2}{5}\frac{N_F}{N_A}\frac{\beta}{\alpha}\int d^3r b_{i,a}^A(\mathbf{r},t)\partial_{i,a}^E(\mathbf{r},t)\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle\\
&\quad+i\hbar c\int d\mathbf{r}b_{i,a}^E(\mathbf{r},t)\left\{\frac{\gamma}{\beta}\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_{k,a}^B(\mathbf{r},t)\right.\\
&\qquad\qquad-\frac{\alpha\gamma}{\beta}Gf^{abc}\epsilon_{ijk}\partial_{j,b}^B(\mathbf{r},t)\partial_{k,c}^A(\mathbf{r},t)\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1}{\beta}K_2\left(C\gamma^i\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_2}\partial_{\alpha_1,\kappa_1,A}^f(\mathbf{r})\,\partial_{\alpha_2,\kappa_2,A}^f(\mathbf{r})\right\}\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle\\
&\quad-i\hbar c\int d^3r b_{i,a}^B(\mathbf{r},t)\left\{\frac{\beta}{\gamma}\epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})\partial_{k,a}^E(\mathbf{r},t)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{\alpha\beta}{\gamma}Gf^{abc}\epsilon_{ijk}\partial_{j,b}^E(\mathbf{r},t)\partial_{k,c}^A(\mathbf{r},t)\right\}\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle\\
&\quad-i\hbar c\int d\mathbf{r}f_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r})\left\{\left[(\gamma^0\gamma^k)\partial_k+\frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\alpha\beta}\partial_{\beta,\kappa,A}^f(\mathbf{r})\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\alpha K_1\left[L^aL^0\right]_{\kappa\kappa'}\left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\alpha'}\partial_{\alpha',\kappa',A}^f(\mathbf{r})\,\partial_{l,a}^A(\mathbf{r})\right\}\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle\ .
\end{aligned}\tag{8.17}$$

Zur Illustration des Inhalts der Funktionalgleichung (8.16) wird ein Verfahren verwendet, das als Lösung die klassische Theorie liefert. Dieses Verfahren ist nicht notwendig. Im Prinzip könnte man (8.17) mit dem phänomenologischen funktionalen Energieoperator vergleichen.
Substitution von (8.17) in (8.16) ergibt eine Funktionalgleichung, die (hinreichend, aber nicht notwendig) dann erfüllt ist, wenn die Koeffizienten der Quellen b_k und f_l verschwinden. Dies ergibt folgende Gleichungen:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\partial_{i,a}^A(\mathbf{r},t)\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle=-\frac{2}{5}\frac{N_F}{N_A}\frac{\beta}{\alpha}\partial_{i,a}^E(\mathbf{r},t)\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle\ , \tag{8.18}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\partial_{i,a}^E(\mathbf{r},t)\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle=&\left\{\frac{\gamma}{\beta}\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_{k,a}^B(\mathbf{r},t)\right.\\
&-\frac{\alpha\gamma}{\beta}Gf^{abc}\epsilon_{ijk}\partial_{j,b}^B(\mathbf{r},t)\partial_{k,c}^A(\mathbf{r},t)\\
&\left.-\frac{1}{\beta}K_2\left(C\gamma^i\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_2}\partial_{\alpha_1,\kappa_1,A}^f(\mathbf{r})\,\partial_{\alpha_2,\kappa_2,A}^f(\mathbf{r})\right\}\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle
\end{aligned}\tag{8.19}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\partial_{i,a}^B(\mathbf{r},t)\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle=&\left\{-\frac{\beta}{\gamma}\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_{k,a}^E(\mathbf{r},t)\right.\\
&\left.+\frac{\alpha\beta}{\gamma}Gf^{abc}\epsilon_{ijk}\partial_{j,b}^E(\mathbf{r},t)\partial_{k,c}^A(\mathbf{r},t)\right\}\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle\ .
\end{aligned}\tag{8.20}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\partial_{\alpha,\kappa,A}^f(\mathbf{r})\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle=&\left\{-\left[(\gamma^0\gamma^k)\partial_k+\frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\alpha\beta}\partial_{\beta,\kappa,A}^f(\mathbf{r})\right.\\
&\left.-\alpha K_1\left[L^aL^0\right]_{\kappa\kappa'}\left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\alpha'}\partial_{\alpha',\kappa',A}^f(\mathbf{r})\,\partial_{l,a}^A(\mathbf{r})\right\}\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle\ .
\end{aligned}\tag{8.21}$$

Für $\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle$ wird der folgende Ansatz gewählt [3]:

$$\mid\mathcal{G}(b,f;p)\rangle\ =e^{Z_0[b,f;p]}\mid 0\rangle_B\otimes\mid 0\rangle_F \tag{8.22}$$

$$Z_0[b,f;p] := \int \left[\sum_X \sum_{k,a} X_{k,a}(\mathbf{r},t) b^X_{k,a}(\mathbf{r},t) + \sum_{\alpha,\kappa,a} i\psi_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r},t) f_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r},t) \right] d\mathbf{r} \; . \tag{8.23}$$

Dieser Ansatz führt auf den klassischen Limes der Theorie. Es werden Quantenkorrelationen höherer Ordnung vernachlässigt.
Die Lösung des funktionalen Gleichungssystems (8.18)-(8.21) ist damit zurückgeführt auf die Lösung des Systems

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} A^i_a(\mathbf{r},t) = -\frac{2}{5}\frac{N_F}{N_A}\frac{\beta}{\alpha} E^i_a(\mathbf{r},t) \, , \tag{8.24}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} E^i_a(\mathbf{r},t) = {}& \frac{\gamma}{\beta}\epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r}) B^k_a(\mathbf{r},t) - \frac{\alpha\gamma}{\beta} G f^{abc}\epsilon_{ijk} A^j_b(\mathbf{r},t) B^k_c(\mathbf{r},t) \\ & -\frac{1}{\beta} K_2 \left(C\gamma^i\right)_{\alpha_1\alpha_2} \left(L^a\right)^*_{\kappa_1\kappa_2} \psi_{\alpha_1,\kappa_1,A}(\mathbf{r})\, \psi_{\alpha_2,\kappa_2,A}(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{8.25}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} B^i_a(\mathbf{r},t) = -\frac{\beta}{\gamma}\epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r}) E^k_a(\mathbf{r},t) + \frac{\alpha\beta}{\gamma} G f^{abc}\epsilon_{ijk} E^j_b(\mathbf{r},t) A^k_c(\mathbf{r},t) \tag{8.26}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \psi_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r},t) = {}& -\left[(\gamma^0\gamma^k)\partial_k + \frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha',\kappa,A}(\mathbf{r},t) \\ & -\alpha K_1 \left[L^a L^0\right]_{\kappa\kappa'} \left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha',\kappa',A}(\mathbf{r},t)\, A^l_a(\mathbf{r},t) \end{aligned} \tag{8.27}$$

für die klassischen Felder A, E, B und ψ.
Diese Feldgleichungen, die in der ψ, ψ^c-Darstellung geschrieben sind, werden in die $\psi, \bar{\psi}$-Darstellung umgeschrieben. Dazu wird der Index κ nach (2.54) aufgespalten, indem in den Feldgleichungen ψ_κ in Ψ_f übergeht, sofern der Index κ einen der Werte $\kappa = 1,2,3$ annimmt. Der Index f nimmt dann den Wert $f = \kappa$ an. Nimmt κ einen der Werte $\kappa = 4,5,6$ an, so geht ψ_κ in Ψ^c_f über, wobei der Index f nach (2.54) den entsprechenden Wert annimmt. Der Index f steht für den Farbfreiheitsgrad. So ist z.B. der Term

$$L^a_{\kappa\kappa'}\psi_\kappa\psi_{\kappa'} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^a \\ -\bar{\lambda}^a & 0 \end{pmatrix}_{\kappa\kappa'} \psi_\kappa\psi_{\kappa'} = \lambda^a_{ff'}\Psi_f\Psi^c_{f'} - \bar{\lambda}^a_{ff'}\Psi^c_f\Psi_{f'} \; . \tag{8.28}$$

Diese Prozedur wird zunächst für den Wechselwirkungsterm (8.25) durchgeführt:

$$\begin{aligned} & \left(C\gamma^l\right)_{\alpha\alpha'} \left(L^a\right)^*_{\kappa\kappa'} \psi_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r},t)\, \psi_{\alpha',\kappa',A}(\mathbf{r},t) \\ &= \left(C\gamma^l\right)_{\alpha\alpha'} \left[\Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t) \left(\bar{\lambda}^a\right)_{cc'} \Psi^c_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t) + \Psi^c_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t) \left(-\lambda^a\right)_{cc'} \Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\right] \\ &= \Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t) \left(\bar{\lambda}^a\right)_{cc'} \left(C\gamma^l\right)_{\alpha\alpha'} \Psi^c_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t) - \Psi^c_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t) \left(C\gamma^l\right)_{\alpha\alpha'} \left(\lambda^a\right)_{cc'} \Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t) \; . \end{aligned} \tag{8.29}$$

Mit $\Psi^c = C\bar{\Psi}$ wird daraus:

$$\begin{aligned} & \left(C\gamma^l\right)_{\alpha\alpha'} \left(L^a\right)^*_{\kappa\kappa'} \psi_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r},t)\, \psi_{\alpha',\kappa',A}(\mathbf{r},t) \\ &= \Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t) \left(\bar{\lambda}^a\right)_{cc'} \left(C\gamma^l\right)_{\alpha\alpha'} C_{\alpha'\alpha_1} \bar{\Psi}_{\alpha_1,c',A}(\mathbf{r},t) - C_{\alpha\alpha_1}\bar{\Psi}_{\alpha_1,c,A}(\mathbf{r},t) \left(C\gamma^l\right)_{\alpha\alpha'} \left(\lambda^a\right)_{cc'} \Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t) \\ &= \Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t) \left(\bar{\lambda}^a\right)_{cc'} \left(C\gamma^l C\right)_{\alpha\alpha_1} \bar{\Psi}_{\alpha_1,c',A}(\mathbf{r},t) - \bar{\Psi}_{\alpha_1,c,A}(\mathbf{r},t)\, C^T_{\alpha_1\alpha} \left(C\gamma^l\right)_{\alpha\alpha'} \left(\lambda^a\right)_{cc'} \Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t) \\ &= \Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t) \left(\bar{\lambda}^a\right)_{cc'} \left(\gamma^l\right)^T_{\alpha\alpha_1} \bar{\Psi}_{\alpha_1,c',A}(\mathbf{r},t) - \bar{\Psi}_{\alpha_1,c,A}(\mathbf{r},t) \left(\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha'} \left(\lambda^a\right)_{cc'} \Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t) \\ &= \Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t) \left(\lambda^a\right)^\dagger_{c'c} \left(\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha} \bar{\Psi}_{\alpha_1,c',A}(\mathbf{r},t) - \bar{\Psi}_{\alpha_1,c,A}(\mathbf{r},t) \left(\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha'} \left(\lambda^a\right)_{cc'} \Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t) \\ &= \left(\gamma^l\right)_{\alpha'\alpha} \left(\lambda^a\right)_{c'c} \Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\, \bar{\Psi}_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t) - \left(\gamma^l\right)_{\alpha\alpha'} \left(\lambda^a\right)_{cc'} \bar{\Psi}_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\, \Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t) \; . \end{aligned} \tag{8.30}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}&\left(C\gamma^l\right)_{\alpha\alpha'}\left(L^a\right)^*_{\kappa\kappa'}\psi_{\alpha,\kappa,A}\left(\mathbf{r},t\right)\psi_{\alpha',\kappa',A}\left(\mathbf{r},t\right)\\&=\left(\gamma^l\right)_{\alpha'\alpha}\left(\lambda^a\right)_{c'c}\Psi_{\alpha,c,A}\left(\mathbf{r},t\right)\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}\left(\mathbf{r},t\right)-\left(\gamma^l\right)_{\alpha_1\alpha'}\left(\lambda^a\right)_{cc'}\bar{\Psi}_{\alpha_1,c,A}\left(\mathbf{r},t\right)\Psi_{\alpha',c',A}\left(\mathbf{r},t\right)\ .\end{aligned}\tag{8.31}$$

Wird der phänomenologische Strom [3]

$$\begin{aligned}j_a^k(\mathbf{r},t)&=q:\bar{\Psi}_{\alpha,c,A}\left(\mathbf{r},t\right)\left(\gamma^k\right)_{\alpha\alpha'}\left(T^a\right)_{cc'}\Psi_{\alpha',c',A}\left(\mathbf{r},t\right):\\&=\frac{q}{2}\left[\left(\gamma^k\right)_{\alpha\alpha'}\left(T^a\right)_{cc'}\bar{\Psi}_{\alpha,c,A}\left(\mathbf{r},t\right)\Psi_{\alpha',c',A}\left(\mathbf{r},t\right)-\left(\gamma^k\right)_{\alpha'\alpha}\left(T^a\right)_{c'c}\Psi_{\alpha,c,A}\left(\mathbf{r},t\right)\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}\left(\mathbf{r},t\right)\right]\end{aligned}\tag{8.32}$$

eingeführt, wobei T^a die Generatoren der Gruppe $SU(3)$ mit $T^a=\frac{\lambda^a}{2}$ sind und q die phänomenologische Kopplungskonstante ist, so kann der Term (8.31) in den phänomenologischen Strom umgeschrieben werden.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\beta}K_2\left[\left(\gamma^k\right)_{\alpha'\alpha}\left(\lambda^a\right)_{c'c}\Psi_{\alpha,c,A}\left(\mathbf{r},t\right)\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}\left(\mathbf{r},t\right)-\left(\gamma^k\right)_{\alpha_1\alpha'}\left(\lambda^a\right)_{cc'}\bar{\Psi}_{\alpha_1,c,A}\left(\mathbf{r},t\right)\Psi_{\alpha',c',A}\left(\mathbf{r},t\right)\right]\\&=-\frac{2}{\beta}K_2\left[\left(\gamma^k\right)_{\alpha\alpha'}\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{cc'}\bar{\Psi}_{\alpha,c,A}\left(\mathbf{r},t\right)\Psi_{\alpha',c',A}\left(\mathbf{r},t\right)-\left(\gamma^k\right)_{\alpha'\alpha}\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{c'c}\Psi_{\alpha,c,A}\left(\mathbf{r},t\right)\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}\left(\mathbf{r},t\right)\right]\\&=-\frac{4K_2}{2\beta}\left[\left(\gamma^k\right)_{\alpha\alpha'}\left(T^a\right)_{cc'}\bar{\Psi}_{\alpha,c,A}\left(\mathbf{r},t\right)\Psi_{\alpha',c',A}\left(\mathbf{r},t\right)-\left(\gamma^k\right)_{\alpha'\alpha}\left(T^a\right)_{c'c}\Psi_{\alpha,c,A}\left(\mathbf{r},t\right)\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}\left(\mathbf{r},t\right)\right]\\&=-\frac{q}{2}\left[\left(\gamma^k\right)_{\alpha_1\alpha'}\left(T^a\right)_{cc'}\bar{\Psi}_{\alpha_1,c,A}\left(\mathbf{r},t\right)\Psi_{\alpha',c',A}\left(\mathbf{r},t\right)-\left(\gamma^k\right)_{\alpha'\alpha}\left(T^a\right)_{c'c}\Psi_{\alpha,c,A}\left(\mathbf{r},t\right)\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}\left(\mathbf{r},t\right)\right]\\&=-j_a^k(\mathbf{r},t)\end{aligned}\tag{8.33}$$

mit

$$K_2=\frac{\beta}{4}\,q\ .\tag{8.34}$$

Damit schreibt sich die Feldgleichung (8.25) als:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E_a^i(\mathbf{r},t)=\frac{\gamma}{\beta}\epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})B_a^k(\mathbf{r},t)-\frac{\alpha\gamma}{\beta}Gf^{abc}\epsilon_{ijk}A_b^j(\mathbf{r},t)B_c^k(\mathbf{r},t)+j_a^i(\mathbf{r},t)\ .\tag{8.35}$$

Die Feldgleichung (8.27):

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\psi_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r},t)=&-\left[(\gamma^0\gamma^k)\partial_k+\frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\alpha\beta}\psi_{\beta,\kappa,A}\left(\mathbf{r},t\right)\\&-\alpha K_1\left[L^aL^0\right]_{\kappa\kappa'}\left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\alpha'}\psi_{\alpha',\kappa',A}\left(\mathbf{r},t\right)A_a^l\left(\mathbf{r},t\right)\end{aligned}\tag{8.36}$$

ergibt für $\kappa=1,2,3$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\alpha,f,A}(\mathbf{r},t)=&-\left[(\gamma^0\gamma^k)\partial_k+\frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\alpha\beta}\Psi_{\beta,f,A}\left(\mathbf{r},t\right)\\&+\alpha K_1\lambda^a_{ff'}\left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\beta}\Psi_{\beta,f',A}\left(\mathbf{r},t\right)A_{l,a}\left(\mathbf{r},t\right)\\=&-\left[(\gamma^0\gamma^k)\partial_k+\frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\alpha\beta}\Psi_{\beta,f,A}\left(\mathbf{r},t\right)\\&+2\alpha K_1T^a_{ff'}\left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\beta}\Psi_{\beta,f',A}\left(\mathbf{r},t\right)A_{l,a}\left(\mathbf{r},t\right)\ ,\end{aligned}\tag{8.37}$$

und für $\kappa=4,5,6$ ergibt sich:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Psi^c_{\alpha,f,A}(\mathbf{r},t)=-\left[(\gamma^0\gamma^k)\partial_k+\frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\alpha\beta}\Psi^c_{\beta,f,A}\left(\mathbf{r},t\right)$$

$$+\alpha K_1 \left[-\bar{\lambda}^a\right]_{ff'} \left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\alpha'} \Psi^c_{\alpha',f',A}(\mathbf{r},t)\, A_{l,a}(\mathbf{r},t) \tag{8.38}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} C_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t) = -\left[(\gamma^0\gamma^k)\partial_k + \frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\alpha\beta} C_{\beta\gamma}\bar{\Psi}_{\gamma,f,A}(\mathbf{r},t)$$
$$-\alpha K_1 \left[\bar{\lambda}^a\right]_{ff'} \left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\alpha'} C_{\alpha'\beta}\bar{\Psi}_{\beta,f',A}(\mathbf{r},t)\, A_{l,a}(\mathbf{r},t) \tag{8.39}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} C^{-1}_{\epsilon\alpha} C_{\alpha\beta}\bar{\Psi}_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t) = -\left[(C^{-1}\gamma^0\gamma^k C)\partial_k + \frac{imc}{\hbar}(C^{-1}\gamma^0 C)\right]_{\epsilon\gamma} \bar{\Psi}_{\gamma,f,A}(\mathbf{r},t)$$
$$-\alpha K_1 \left[\bar{\lambda}^a\right]_{ff'} \left[C^{-1}\gamma^0\gamma^l C\right]_{\epsilon\beta} \bar{\Psi}_{\beta,f',A}(\mathbf{r},t)\, A_{l,a}(\mathbf{r},t) \tag{8.40}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Psi}_{\epsilon,f,A}(\mathbf{r},t) = -\left[(\gamma^0(\gamma^k)^T)\partial_k + \frac{imc}{\hbar}(-\gamma^0)\right]_{\epsilon\gamma} \bar{\Psi}_{\gamma,f,A}(\mathbf{r},t)$$
$$-\alpha K_1 \left[\bar{\lambda}^a\right]_{ff'} \left[\gamma^0(\gamma^l)^T\right]_{\epsilon\beta} \bar{\Psi}_{\beta,f',A}(\mathbf{r},t)\, A_{l,a}(\mathbf{r},t)$$
$$= -\left[(\gamma^k\gamma^0)^T\partial_k - \frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\epsilon\gamma} \bar{\Psi}_{\gamma,f,A}(\mathbf{r},t)$$
$$-\alpha K_1 \left[\lambda^a\right]^\dagger_{f'f} \left[(\gamma^l\gamma^0)^T\right]_{\epsilon\beta} \bar{\Psi}_{\beta,f',A}(\mathbf{r},t)\, A_{l,a}(\mathbf{r},t)$$
$$= -\left[(\gamma^k\gamma^0)\partial_k - \frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\gamma\epsilon} \bar{\Psi}_{\gamma,f,A}(\mathbf{r},t)$$
$$-\alpha K_1 \left[\lambda^a\right]_{f'f} \left[\gamma^l\gamma^0\right]_{\beta\epsilon} \bar{\Psi}_{\beta,c',A}(\mathbf{r},t)\, A_{l,a}(\mathbf{r},t) \tag{8.41}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Psi}_{\alpha,f,A}(\mathbf{r},t) = -\left[(\gamma^k\gamma^0)\partial_k - \frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\gamma\alpha} \bar{\Psi}_{\gamma,f,A}(\mathbf{r},t)$$
$$-2\alpha K_1 \left(T^a\right)_{f'f} \left[\gamma^l\gamma^0\right]_{\beta\alpha} \bar{\Psi}_{\beta,f',A}(\mathbf{r},t)\, A_{l,a}(\mathbf{r},t)\ . \tag{8.42}$$

Damit lauten die Feldgleichungen:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^i_a(\mathbf{r},t) = -\frac{2}{5}\frac{N_F}{N_A}\frac{\beta}{\alpha}E^i_a(\mathbf{r},t)\,, \tag{8.43}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E^i_a(\mathbf{r},t) = \frac{\gamma}{\beta}\epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})B^k_a(\mathbf{r},t) - \frac{\alpha\gamma}{\beta}Gf^{abc}\epsilon_{ijk}A^j_b(\mathbf{r},t)B^k_c(\mathbf{r},t) + j^i_a(\mathbf{r},t)\ , \tag{8.44}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B^i_a(\mathbf{r},t) = -\frac{\beta}{\gamma}\epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})E^k_a(\mathbf{r},t) + \frac{\alpha\beta}{\gamma}Gf^{abc}\epsilon_{ijk}E^j_b(\mathbf{r},t)A^k_c(\mathbf{r},t)\ , \tag{8.45}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\alpha,f,A}(\mathbf{r},t) = -\left[(\gamma^0\gamma^k)\partial_k + \frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\alpha\beta} \Psi_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t)$$
$$+2\alpha K_1 T^a_{ff'} \left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\alpha'} \Psi_{\alpha',f',A}(\mathbf{r},t)\, A_{l,a}(\mathbf{r},t)\ , \tag{8.46}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Psi}_{\alpha,f,A}(\mathbf{r},t) = -\left[(\gamma^k\gamma^0)\partial_k - \frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\gamma\alpha} \bar{\Psi}_{\gamma,f,A}(\mathbf{r},t)$$
$$-2\alpha K_1 \left[T^a\right]_{f'f} \left[\gamma^l\gamma^0\right]_{\alpha'\alpha} \bar{\Psi}_{\alpha',f',A}(\mathbf{r},t)\, A_{l,a}(\mathbf{r},t)\ , \tag{8.47}$$

$$j^k_a(\mathbf{r},t) = \frac{4K_2}{\beta} : \bar{\Psi}_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\left(\gamma^k\right)_{\alpha\alpha'}\left(T^a\right)_{cc'}\Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t) :\,, \tag{8.48}$$

$$g = \frac{64}{3}\pi^2 m^2 c^2 \hbar^3\ , \tag{8.49}$$

$$G = \frac{3}{56} \frac{g N_A}{\hbar^3 m^4 c^4} , \tag{8.50}$$

$$K_1 = i \frac{3}{8(\tau-1)^2} \frac{g N_A}{m^4 c^4 \hbar^3} , \tag{8.51}$$

$$K_2 = \frac{5}{8} \frac{g}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \frac{1}{N_F} . \tag{8.52}$$

Die Parameter α, β und γ können durch Vergleich mit den phänomenologischen Gleichungen festgelegt werden. Es muß im einzelnen gelten:

$$\frac{2}{5} \frac{N_F}{N_A} \frac{\beta}{\alpha} = 1 , \tag{8.53}$$

$$\frac{\gamma}{\beta} = 1 . \tag{8.54}$$

Damit gehen die Gleichungen (8.43)-(8.48) über in:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_a^i(\mathbf{r}, t) = -E_a^i(\mathbf{r}, t) , \tag{8.55}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_a^i(\mathbf{r}, t) = \epsilon_{ijk} \partial_j(\mathbf{r}) B_a^k(\mathbf{r}, t) - \tilde{G} f^{abc} \epsilon_{ijk} A_b^j(\mathbf{r}, t) B_c^k(\mathbf{r}, t) + j_a^i(\mathbf{r}, t) , \tag{8.56}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_a^i(\mathbf{r}, t) = -\epsilon_{ijk} \partial_j(\mathbf{r}) E_a^k(\mathbf{r}, t) + \tilde{G} f^{abc} \epsilon_{ijk} E_b^j(\mathbf{r}, t) A_c^k(\mathbf{r}, t) , \tag{8.57}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\alpha,f,A}(\mathbf{r}, t) = & - \left[(\gamma^0 \gamma^k) \partial_k + \frac{imc}{\hbar} \gamma^0 \right]_{\alpha\beta} \Psi_{\beta,f,A}(\mathbf{r}, t) \\ & + \tilde{K}_1 T^a_{ff'} \left[\gamma^0 \gamma^l \right]_{\alpha\alpha'} \Psi_{\alpha',f',A}(\mathbf{r}, t) \, A_{l,a}(\mathbf{r}, t) , \end{aligned} \tag{8.58}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Psi}_{\alpha,f,A}(\mathbf{r}, t) = & - \left[(\gamma^k \gamma^0) \partial_k - \frac{imc}{\hbar} \gamma^0 \right]_{\gamma\alpha} \bar{\Psi}_{\gamma,f,A}(\mathbf{r}, t) \\ & - \tilde{K}_1 \left[T^a \right]_{f'f} \left[\gamma^l \gamma^0 \right]_{\alpha'\alpha} \bar{\Psi}_{\alpha',f',A}(\mathbf{r}, t) \, A_{l,a}(\mathbf{r}, t) , \end{aligned} \tag{8.59}$$

$$j_a^k(\mathbf{r}, t) = \tilde{K}_2 : \bar{\Psi}_{\alpha,c,A}(\mathbf{r}, t) \left(\gamma^k \right)_{\alpha\alpha'} (T^a)_{cc'} \Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r}, t) : , \tag{8.60}$$

$$g = \frac{64}{3} \pi^2 m^2 c^2 \hbar^3 , \tag{8.61}$$

$$\tilde{G} = \alpha \, G \; = \; \frac{3}{56} \frac{g \alpha N_A}{\hbar^3 m^4 c^4} , \tag{8.62}$$

$$\tilde{K}_1 = 2\alpha \, K_1 \; = \; i \frac{3}{4(\tau-1)^2} \frac{g \alpha N_A}{m^4 c^4 \hbar^3} , \tag{8.63}$$

$$\tilde{K}_2 = \frac{4 K_2}{\beta} \; = \; \frac{5}{2} \frac{g}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \frac{1}{\beta N_F} . \tag{8.64}$$

8.4 Kopplungskonstante

Durch Vergleich der Feldgleichungen (8.56) bzw. (8.57), (8.58) bzw. (8.59) und (8.60) mit den entsprechenden phänomenologischen Gleichungen, muß für Kopplungskonstanten $\tilde{G}$, $\tilde{K}_1$ und $\tilde{K}_2$ gelten:

$$\tilde{G} \stackrel{!}{=} \frac{q}{\hbar c} , \tag{8.65}$$

$$\tilde{K}_1 \stackrel{!}{=} i\frac{q}{\hbar c} , \tag{8.66}$$

$$\tilde{K}_2 \stackrel{!}{=} q , \tag{8.67}$$

wobei q die phänomenologische Kopplungskonstante ist, d.h. es muß $\tilde{G} = -i\tilde{K}_1$ sein. Dies bedeutet, daß $\tau = \frac{k}{mc}$ den Wert

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{14} + 1 \\ &\approx 4.74 \end{aligned} \tag{8.68}$$

annehmen muß.
Ferner ergibt sich aus (8.65) und (8.67) ($q = \hbar c \tilde{G}$ und $q = \tilde{K}_2$):

$$\begin{aligned} q^2 &= \hbar c \, \tilde{G} \, \tilde{K}_2 \\ &= \hbar c \, \frac{3}{56} \frac{g\alpha N_A}{m^4 c^4 \hbar^3} \frac{5}{2} \frac{g}{\hbar(2\pi\hbar)^2} \frac{1}{\beta \, N_F} \\ &= 5 \frac{64}{21} \pi^2 \frac{\alpha N_A}{\beta N_F} \hbar c , \end{aligned} \tag{8.69}$$

und damit ergibt sich, mit (8.53), für q der Wert:

$$q = \pm 8\pi \sqrt{\frac{2}{21}} \, \sqrt{\hbar c} , \tag{8.70}$$

was mit der Dimension der phänomenologischen Kopplungskonstanten übereinstimmt.

Damit lauten die Feldgleichungen:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_a^i(\mathbf{r},t) = -E_a^i(\mathbf{r},t) \ , \tag{8.71}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E_a^i(\mathbf{r},t) = \epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})B_a^k(\mathbf{r},t) - \frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}A_b^j(\mathbf{r},t)B_c^k(\mathbf{r},t) + j_a^i(\mathbf{r},t) \ , \tag{8.72}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B_a^i(\mathbf{r},t) = -\epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})E_a^k(\mathbf{r},t) + \frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}E_b^j(\mathbf{r},t)A_c^k(\mathbf{r},t) \ , \tag{8.73}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t) = &-\left[(\gamma^0\gamma^k)\partial_k + \frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\alpha\beta}\Psi_{\beta,c,A}(\mathbf{r},t) \\ &+i\frac{q}{\hbar c}T^a_{cc'}\left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\alpha'}\Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\,A_{l,a}(\mathbf{r},t) \ ,\end{aligned} \tag{8.74}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Psi}_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t) = &-\left[(\gamma^k\gamma^0)\partial_k - \frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\gamma\alpha}\bar{\Psi}_{\gamma,c,A}(\mathbf{r},t) \\ &-i\frac{q}{\hbar c}T^a_{c'c}\left[\gamma^l\gamma^0\right]_{\alpha'\alpha}\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\,A_{l,a}(\mathbf{r},t) \ ,\end{aligned} \tag{8.75}$$

$$q = 8\pi\sqrt{\frac{2}{21}}\sqrt{\hbar c}\,. \tag{8.76}$$

8.5 Die Nebenbedingungen

Aus den Feldgleichungen (8.71)-(8.75) lassen sich die phänomenologischen Nebenbedingungen ableiten (Anhang G). Sie lauten:

$$0 = \partial_\mu j_a^\mu(\mathbf{r},t) - \frac{q}{\hbar c}f^{abc}A_b^i j_c^i \ , \tag{8.77}$$

$$B_a^i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_a^k - \frac{1}{2}\frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}A_b^j A_c^k \ , \tag{8.78}$$

$$0 = \partial_i E_a^i - \frac{q}{\hbar c}f^{abc}A_b^i E_c^i + j_a^0 \ . \tag{8.79}$$

8.6 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Feldgleichungen, die abgeleitet wurden, lauten:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}^a(\mathbf{r},t) = -\mathbf{E}^a(\mathbf{r},t) \ , \tag{8.80}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}^a(\mathbf{r},t) = \nabla \times \mathbf{B}^a(\mathbf{r},t) - \frac{q}{\hbar c} f^{abc}\mathbf{A}^b(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}^c(\mathbf{r},t) + \mathbf{j}^a(\mathbf{r},t) \ , \tag{8.81}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}^a(\mathbf{r},t) = -\nabla \times \mathbf{E}^a(\mathbf{r},t) + \frac{q}{\hbar c} f^{abc}\mathbf{E}^b(\mathbf{r},t) \times \mathbf{A}^c(\mathbf{r},t) \ , \tag{8.82}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\alpha,\kappa,A}(\mathbf{r},t) = &- \left[(\gamma^0\gamma^k)\partial_k + \frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\alpha\beta} \Psi_{\beta,f,A}\left(\mathbf{r},t\right) \\ &+ i\frac{q}{\hbar c} T^a_{ff'} \left[\gamma^0\gamma^l\right]_{\alpha\alpha'} \Psi_{\alpha',f',A}\left(\mathbf{r},t\right) A_{l,a}\left(\mathbf{r},t\right) \ ,\end{aligned} \tag{8.83}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Psi}_{\alpha,f,A}(\mathbf{r},t) = &- \left[(\gamma^k\gamma^0)\partial_k - \frac{imc}{\hbar}\gamma^0\right]_{\gamma\alpha} \bar{\Psi}_{\gamma,f,A}\left(\mathbf{r},t\right) \\ &- i\frac{q}{\hbar c} \left[T^a\right]_{f'f} \left[(\gamma^l\gamma^0)\right]_{\alpha'\alpha} \bar{\Psi}_{\alpha',f',A}\left(\mathbf{r},t\right) A_{l,a}\left(\mathbf{r},t\right) \ ,\end{aligned} \tag{8.84}$$

$$j^k_a(\mathbf{r},t) = q : \bar{\Psi}_{\alpha,c,A}\left(\mathbf{r},t\right) \left(\gamma^k\right)_{\alpha\alpha'} \left(T^a\right)_{cc'} \Psi_{\alpha',c',A}\left(\mathbf{r},t\right) : \ , \tag{8.85}$$

$$q = 8\pi\sqrt{\frac{2}{21}}\sqrt{\hbar c} \ , \tag{8.86}$$

und die aus den Feldgleichungen abgeleiteten Nebenbedingungen lauten:

$$0 = \partial_\mu j^{\mu,a} - \frac{q}{\hbar c} f^{abc}\mathbf{A}^b \cdot \mathbf{j}^c \ , \tag{8.87}$$

$$\mathbf{B}^a = \nabla \times \mathbf{A}^a - \frac{1}{2}\frac{q}{\hbar c} f^{abc}\mathbf{A}^b \times \mathbf{A}^c \ , \tag{8.88}$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{E}^a - \frac{q}{\hbar c} f^{abc}\mathbf{A}^b \cdot \mathbf{E}^c + j^{0,a} \ . \tag{8.89}$$

8.7 Interpretation der Ergebnisse und Ausblick

Die Gleichungen (8.80)-(8.84) sind die Feldgleichungen einer SU(3) lokalen Eichfeldtheorie in temporaler Eichung [29], [30], [31], wie sie die QCD darstellt. Insofern konnte die Quantenchromodynamik abgeleitet werden.
Jedoch ist der erhaltene Wert der Kopplungskonstanten viel zu groß. Dies läßt sich auf verschiedene Näherungen, die aus ökonomischen Gründen angewandt werden mußten, zurückführen. So wurde kein Quarkkondensat zugrunde gelegt. Würde der Feynmanpropagator durch den selbstkonsistenten Propagator ersetzt werden, so würde sich der Wert der Kopplungskonstanten verändern. Ähnlich verhält es sich mit der Bestimmung der Dualfunktionen für die Gluonen. Diese wurden konstruiert, um Gleichung (4.11) zu erfüllen. Um aber die "richtigen" Dualfunktionen zu erhalten, ist es notwendig, die Funktionalgleichung für die Dualfunktionen zu lösen. Auch hier ist zu erwarten, daß die Kopplungskonstante ihren Wert verändert.
Mit der Annahme, daß die Gluonen zusammengesetzte Teilchen sind, wurde die Struktur der QCD abgeleitet. Um ein vollständiges Bild zu erhalten, müssen die Dualfunktionen und der Propagator bestimmt werden. Dann ist auch der numerische Wert der Kopplungskonstanten aus der Theorie exakt ableitbar und mit dem Experiment vergleichbar.

Anhang A

Nebenrechnungen zu Kapitel 4

Herleitung der Gleichung (4.16)

$$\begin{aligned}
\partial_{K_1}\partial_{K_2} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle &= \partial_{K_1}(\partial_{K_2} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle) \\
&= \partial_{K_1}(C_k^{K_2 I} j_I \partial_k^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle) \\
&= C_k^{K_2 I}(\delta_{K_1 I} - j_I \partial_{K_1})\partial_{k_1}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\
&= C_k^{K_2 K_1}\partial_{k_1}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle - C_k^{K_2 I} j_I \partial_{k_1}^b(\partial_{K_1} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle) \\
&= C_k^{K_2 K_1}\partial_{k_1}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle - C_k^{K_2 I} j_I \partial_{k_1}^b(C_{k_2}^{K_1 L} j_L \partial_{k_2}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle) \\
&= C_k^{K_2 K_1}\partial_{k_1}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle - C_k^{K_2 I} C_{k_2}^{K_1 L} j_I j_L \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle) \ .
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Herleitung der Gleichung (4.17)

$$\begin{aligned}
\partial_{K_1}\partial_{K_2}\partial_{K_3} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle &= \partial_{K_1}(\partial_{K_2}\partial_{K_3} \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle) \\
&= \partial_{K_1}[(C_k^{K_3 K_2}\partial_k^b - C_{k_1}^{K_3 I} C_{k_2}^{K_2 L} j_I j_L \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b) \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle] \\
&= C_{k_1}^{K_3 K_2} C_{k_2}^{K_1 I} j_I \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\
&\quad - C_{k_1}^{K_3 I} C_{k_2}^{K_2 L}(\delta_{K_1 I} - j_I \partial_{K_1}) j_L \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle) \\
&= C_{k_1}^{K_3 K_2} C_{k_2}^{K_1 I} j_I \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\
&\quad - C_{k_1}^{K_3 K_1} C_{k_2}^{K_2 L} j_L \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\
&\quad + C_{k_1}^{K_3 I} C_{k_2}^{K_2 L} j_I(\delta_{K_1 L} - j_L \partial_{K_1})\partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\
&= C_{k_1}^{K_3 K_2} C_{k_2}^{K_1 I} j_I \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\
&\quad - C_{k_1}^{K_3 K_1} C_{k_2}^{K_2 L} j_L \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\
&\quad + C_{k_1}^{K_3 I} C_{k_2}^{K_2 K_1} j_I \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \\
&\quad - C_{k_1}^{K_3 I} C_{k_2}^{K_2 L} C_{k_3}^{K_1 N} j_I j_L j_N \partial_{k_1}^b \partial_{k_2}^b \partial_{k_3}^b \mid \widetilde{\mathcal{B}}(b,p)\rangle \ .
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Wegen der Antisymmetrie der $(K_1 K_2 K_3)$ lassen sich die ersten drei Terme zusammenfassen, und man erhält Gleichung (4.17).

Herleitung der Gleichung (4.40)

$$\begin{aligned}
&\partial_{I_2}\partial_{I_1} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&= \partial_{I_2}(C_{2,k}^{I_1 K} j_K \partial_k^b + C_{1,l}^{I_1}\partial_l^f) \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&= C_{2,k}^{I_1 K}(\delta_{I_2 K} - j_K \partial_{I_2})\partial_k^b \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+C^{I_1}_{1,l}\partial^f_l\partial_{I_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&= C^{I_1I_2}_{2,k}\partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -C^{I_1K}_{2,k}j_K\partial^b_k\partial_{I_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +C^{I_1}_{1,l}\partial^f_l(C^{I_2K}_{2,k}j_K\partial^b_k + C^{I_2}_{1,l}\partial^f_l) \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&= C^{I_1I_2}_{2,k}\partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -C^{I_1K}_{2,k}j_K\partial^b_k(C^{I_2K}_{2,k}j_K\partial^b_k + C^{I_2}_{1,l}\partial^f_l) \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +C^{I_1}_{1,l}C^{I_2K}_{2,k}j_K\partial^b_k\partial^f_l \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +C^{I_1}_{1,l_1}C^{I_2}_{1,l_2}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&= C^{I_1I_2}_{2,k}\partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -C^{I_1K_1}_{2,k_1}C^{I_2K_2}_{2,k_2}j_{K_1}j_{K_2}\partial^b_{k_1}\partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -C^{I_1K}_{2,k}C^{I_2}_{1,l}j_K\partial^f_l\partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +C^{I_1}_{1,l}C^{I_2K}_{2,k}j_K\partial^b_k\partial^f_l \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +C^{I_1}_{1,l_1}C^{I_2}_{1,l_2}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&= C^{I_1I_2}_{2,k}\partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -C^{I_1K_1}_{2,k_1}C^{I_2K_2}_{2,k_2}j_{K_1}j_{K_2}\partial^b_{k_1}\partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -2C^{I_1K}_{2,k}C^{I_2}_{1,l}j_K\partial^f_l\partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +C^{I_1}_{1,l_1}C^{I_2}_{1,l_2}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle\ .
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

Herleitung der Gleichung (4.41)

$$
\begin{aligned}
&\partial_{I_4}\partial_{I_3}\partial_{I_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&= \partial_{I_4}[C^{I_2I_3}_{2,k}\partial^b_k \\
&\quad -C^{I_2K_1}_{2,k_1}C^{I_3K_2}_{2,k_2}j_{K_1}j_{K_2}\partial^b_{k_1}\partial^b_{k_2} \\
&\quad -2C^{I_2K}_{2,k}C^{I_3}_{1,l}j_K\partial^f_l\partial^b_k \\
&\quad +C^{I_2}_{1,l_1}C^{I_3}_{1,l_2}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2}] \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&= C^{I_2I_3}_{2,k}\partial^b_k(C^{I_4K}_{2,k}j_K\partial^b_k + C^{I_4}_{1,l}\partial^f_l) \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -C^{I_2K_1}_{2,k_1}C^{I_3K_2}_{2,k_2}(\delta_{K_1I_4} - j_{K_1}\partial_{I_4})j_{K_2}\partial^b_{k_1}\partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -2C^{I_2K_1}_{2,k}C^{I_3}_{1,l}(\delta_{K_1I_4} - j_{K_1}\partial_{I_4})\partial^f_l\partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +C^{I_2}_{1,l_1}C^{I_3}_{1,l_2}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2}(C^{I_4K}_{2,k}j_K\partial^b_k + C^{I_4}_{1,l}\partial^f_l) \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&= C^{I_2I_3}_{2,k_1}C^{I_4K}_{2,k_2}j_K\partial^b_{k_1}\partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +C^{I_2I_3}_{2,k}C^{I_4}_{1,l}\partial^b_k\partial^f_l \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -C^{I_2I_4}_{2,k_1}C^{I_3K_2}_{2,k_2}j_{K_2}\partial^b_{k_1}\partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +C^{I_2K_1}_{2,k_1}C^{I_3K_2}_{2,k_2}j_{K_1}(\delta_{I_4K_2} - j_{K_2}\partial_{I_4})\partial^b_{k_1}\partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad -2C^{I_2I_4}_{2,k}C^{I_3}_{1,l}\partial^f_l\partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +2C^{I_2K_1}_{2,k_1}C^{I_3}_{1,l_1}j_{K_1}\partial^f_{l_1}\partial^b_{k_1}(C^{I_4K_2}_{2,k_2}j_{K_2}\partial^b_{k_2} + C^{I_4}_{1,l_2}\partial^f_{l_2}) \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +C^{I_4K}_{2,k}C^{I_2}_{1,l_1}C^{I_3}_{1,l_2}j_K\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2}\partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
&\quad +C^{I_2}_{1,l_1}C^{I_3}_{1,l_2}C^{I_4}_{1,l_3}\partial^f_{l_1}\partial^f_{l_2}\partial^f_{l_3} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1) = {} & C^{I_2 I_3}_{2,k_1} C^{I_4 K}_{2,k_2} j_K \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
(2) \quad & + C^{I_2 I_3}_{2,k} C^{I_4}_{1,l} \partial^b_k \partial^f_l \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
(1) \quad & - C^{I_2 I_4}_{2,k_1} C^{I_3 K_2}_{2,k_2} j_{K_2} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
(1) \quad & + C^{I_2 K_1}_{2,k_1} C^{I_3 I_4}_{2,k_2} j_{K_1} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
(3) \quad & - C^{I_2 K_1}_{2,k_1} C^{I_3 K_2}_{2,k_2} C^{I_4 K_3}_{2,k_3} j_{K_1} j_{K_2} j_{K_3} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \partial^b_{k_3} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
(4) \quad & - C^{I_2 K_1}_{2,k_1} C^{I_3 K_2}_{2,k_2} C^{I_4}_{1,l} j_{K_1} j_{K_2} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \partial^f_l \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
(2) \quad & - 2 C^{I_2 I_4}_{2,k} C^{I_3}_{1,l} \partial^f_l \partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
(4) \quad & + 2 C^{I_2 K_1}_{2,k_1} C^{I_4 K_2}_{2,k_2} C^{I_3}_{1,l} j_{K_1} j_{K_2} \partial^f_l \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
(5) \quad & + 2 C^{I_2 K_1}_{2,k} C^{I_3}_{1,l_1} C^{I_4}_{1,l_2} j_{K_1} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \partial^f_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
(5) \quad & + C^{I_4 K}_{2,k} C^{I_2}_{1,l_1} C^{I_3}_{1,l_2} j_K \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \partial^b_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
(6) \quad & + C^{I_2}_{1,l_1} C^{I_3}_{1,l_2} C^{I_4}_{1,l_3} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \partial^f_{l_3} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \ .
\end{aligned}
$$

Fassen wir nun die Terme gleicher Nummer durch die Antisymmetrie der $(I_2 I_3 I_4)$ zusammen, so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
& \partial_{I_4} \partial_{I_3} \partial_{I_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& = 3 C^{I_2 I_3}_{2,k_1} C^{I_4 K}_{2,k_2} j_K \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& \quad + 3 C^{I_2 I_3}_{2,k} C^{I_4}_{1,l} \partial^b_k \partial^f_l \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& \quad - C^{I_2 K_1}_{2,k_1} C^{I_3 K_2}_{2,k_2} C^{I_4 K_3}_{2,k_3} j_{K_1} j_{K_2} j_{K_3} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \partial^b_{k_3} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& \quad - 3 C^{I_2 K_1}_{2,k_1} C^{I_3 K_2}_{2,k_2} C^{I_4}_{1,l} j_{K_1} j_{K_2} \partial^b_{k_1} \partial^b_{k_2} \partial^f_l \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& \quad + 3 C^{I_2 K_1}_{2,k} C^{I_3}_{1,l_1} C^{I_4}_{1,l_2} j_{K_1} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \partial^f_k \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \\
& \quad + C^{I_2}_{1,l_1} C^{I_3}_{1,l_2} C^{I_4}_{1,l_3} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \partial^f_{l_3} \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \ .
\end{aligned} \tag{A.4}
$$

Anhang B

Pauli-, Dirac- und Gell-Mann-Algebra

B.1 Lie-Algebren

Lie-Algebren sind durch

$$[L_i, L_j]_- = iC_{ijk}L_k \tag{B.1}$$

definiert. Der Kommutator zweier Elemente der Lie-Algebra ist wieder ein Element der Lie-Algebra (Abgeschlossenheit). Die Strukturkonstanten C_{ijk} sind antisymmetrisch in den ersten beiden Indizes und erfüllen

$$C_{ijk}C_{klm} + C_{jlk}C_{kim} + C_{lik}C_{kjm} = 0 \ . \tag{B.2}$$

B.2 Pauli-Algebra

Die Pauli-Matrizen sind definiert durch:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ . \tag{B.3}$$

Sie erfüllen folgende Algebra-Relationen:

$$\left\{\sigma^i, \sigma^j\right\}_+ = 2\delta_{ij} \ , \tag{B.4}$$

$$\left[\sigma^i, \sigma^j\right]_- = 2i\epsilon_{ijk}\sigma^k \ . \tag{B.5}$$

Für das Produkt gilt:

$$\sigma^i\sigma^j = i\epsilon_{ijk}\sigma^k + \delta_{ij} \ . \tag{B.6}$$

B.3 Dirac-Algebra

B.3.1 Definition der Dirac-Algebra

Die Dirac-Matrizen erfüllen die Beziehung

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_+ = 2g^{\mu\nu} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ . \tag{B.7}$$

Die Matrizen lauten:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad C = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} . \tag{B.8}$$

Desweiteren sind die Matrizen $\Sigma^{\mu\nu}$ durch

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_- \tag{B.9}$$

definiert. In Dirac-Darstellung lauten die Matrizen:

$$\begin{gathered} \Sigma^{01} = \begin{pmatrix} 0&0&0&i \\ 0&0&i&0 \\ 0&i&0&0 \\ i&0&0&0 \end{pmatrix} , \quad \Sigma^{02} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \end{pmatrix} , \quad \Sigma^{03} = \begin{pmatrix} 0&0&i&0 \\ 0&0&0&-i \\ i&0&0&0 \\ 0&-i&0&0 \end{pmatrix} , \\ \Sigma^{12} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix} , \quad \Sigma^{13} = \begin{pmatrix} 0&i&0&0 \\ -i&0&0&0 \\ 0&0&0&i \\ 0&0&-i&0 \end{pmatrix} , \quad \Sigma^{23} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} . \end{gathered} \tag{B.10}$$

B.3.2 Eigenschaften der γ-Matrizen

$$\begin{aligned} &1.\ C\gamma^\mu C = (\gamma^\mu)^T , \\ &2.\ C\Sigma^{\mu\nu}C = (\Sigma^{\mu\nu})^T , \\ &3.\ \left(\gamma^k\right)^\dagger = -\gamma^k , \\ &4.\ \left(\gamma^0\right)^\dagger = \gamma^0 , \\ &5.\ \left(\Sigma^{l0}\right)^\dagger = -\Sigma^{l0} , \\ &6.\ \left(\Sigma^{lk}\right)^\dagger = \Sigma^{lk} . \end{aligned} \tag{B.11}$$

B.3.3 Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} &1.\ \left[\gamma^5, \gamma^\mu\right]_+ = 0 , \\ &2.\ \left[\gamma^5, \Sigma^{\mu\nu}\right]_- = 0 , \\ &3.\ \left[\gamma^5, C\right]_- = 0 , \\ &4.\ \left[\gamma^0, C\right]_+ = 0 . \end{aligned} \tag{B.12}$$

B.3.4 Kontraktionstheoreme

Für die Berechnung von Spuren ist es oft hilfreich, Produkte von Gamma-Matrizen zu "kontrahieren". Dafür existieren sogenannte Kontraktionstheoreme:

$$\begin{aligned} &1.\ \gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - \Sigma^{\mu\nu} , \\ &2.\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = g^{\mu\nu}\gamma^\rho - g^{\mu\rho}\gamma^\nu + g^{\nu\rho}\gamma^\mu - i\epsilon^{\mu\nu\rho\epsilon}\gamma_\epsilon\gamma_5 , \end{aligned} \tag{B.13}$$

mit

$$\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = 1 . \tag{B.14}$$

B.3.5 Spurtheoreme

Für die Berechnung von Spuren sind die Spurtheoreme hilfreich:

$$\begin{array}{lrcl}
1. & Sp(AB) & = & Sp(BA)\ , \\
2. & Sp(\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}}) & = & 0\ , \\
3. & Sp(\gamma^5\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}}) & = & 0\ , \\
4. & Sp(\gamma^\mu\gamma^\nu) & = & 4g^{\mu\nu}\ , \\
5. & Sp(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) & = & 0\ , \\
6. & Sp(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) & = & 4(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda})\ , \\
7. & Sp(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) & = & 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\ .
\end{array} \tag{B.15}$$

Mit diesen Theoremen lassen sich die Spuren aus Kapitel 7 berechnen.

B.4 Gell-Mann-Algebra

Die Algebra der Gruppe SU(3) ist durch folgende Relation definiert:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c\ . \tag{B.16}$$

Eine mögliche Darstellung dieser Algebra sind die Gell-Mann Matrizen. Sie lauten:

$$\begin{array}{lll}
\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}\ , & \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0&-i&0\\ i&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}\ , & \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&-1&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}\ , \\
\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&0&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}\ , & \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0&0&-i\\ 0&0&0\\ i&0&0 \end{pmatrix}\ , & \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix}\ , \\
\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&-i\\ 0&i&0 \end{pmatrix}\ , & \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&-2 \end{pmatrix}\ . &
\end{array} \tag{B.17}$$

Die Strukturkonstanten f^{abc} lauten in dieser Darstellung:

$$\begin{array}{l}
f^{123} = 1\ , \qquad f^{458} = f^{678} = \sqrt{3}/2\ , \\
f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{516} = f^{637} = \frac{1}{2}\ .
\end{array} \tag{B.18}$$

Die Antivertauschungsbeziehung lautet:

$$\{\lambda^a, \lambda^b\}_+ = \frac{4}{3}\delta_{ab}\mathbb{1} + 2d^{abc}\lambda^c\ . \tag{B.19}$$

Die Koeffizienten d^{abc} sind die symmetrischen Koeffizienten und lauten:

$$\begin{array}{l}
d^{146} = d^{157} = d^{256} = d^{344} = d^{355} = \frac{1}{2}\ , \\
d^{448} = d^{558} = d^{668} = d^{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\ , \\
d^{247} = d^{366} = d^{377} = -\frac{1}{2}\ , \\
d^{118} = d^{338} = d^{228} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ , \\
d^{888} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ .
\end{array} \tag{B.20}$$

B.5 Pauli-Gell-Mann-Algebra

Berechnung der Spur (7.137)

$$
\begin{aligned}
L^a L^0 L^b (L^c)^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda^a \\ -\bar{\lambda}^a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda^b \\ -\bar{\lambda}^b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda^c \\ -\bar{\lambda}^c & 0 \end{pmatrix}^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} \lambda^a & 0 \\ 0 & -\bar{\lambda}^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda^b \\ -\bar{\lambda}^b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\lambda}^c \\ \lambda^c & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \lambda^a \lambda^b \\ \bar{\lambda}^a \bar{\lambda}^b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\lambda}^c \\ \lambda^c & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda^a \lambda^b \lambda^c & 0 \\ 0 & -\bar{\lambda}^a \bar{\lambda}^b \bar{\lambda}^c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda^a \lambda^b \lambda^c & 0 \\ 0 & -\left(\lambda^a \lambda^b \lambda^c\right)^* \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{B.21}
$$

Damit gilt:

$$
Sp\left(L^a L^0 L^b (L^c)^\dagger\right) = Sp\left(\lambda^a \lambda^b \lambda^c\right) - Sp\left(\lambda^a \lambda^b \lambda^c\right)^* . \tag{B.22}
$$

Berechnung von $Sp\left(\lambda^a \lambda^b \lambda^c\right)$
Aus

$$
[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c \tag{B.23}
$$

folgt

$$
\lambda^a \lambda^b \lambda^c - \lambda^b \lambda^a \lambda^c = 2if^{abc}\lambda^c \lambda^c , \tag{B.24}
$$

damit ergibt sich:

$$
Sp\left(\lambda^a \lambda^b \lambda^c\right) - Sp\left(\lambda^b \lambda^a \lambda^c\right) = 4if^{abc} , \tag{B.25}
$$

wobei $Sp\left(\lambda^c \lambda^c\right) = 2$ benutzt wurde. Aus der Beziehung

$$
\{\lambda^a, \lambda^b\}_+ = \frac{3}{4}\delta_{ab}\mathbb{1} + 2d^{abc}\lambda^c \tag{B.26}
$$

ergibt sich

$$
\lambda^a \lambda^b \lambda^c + \lambda^b \lambda^a \lambda^c = \frac{3}{4}\delta_{ab}\lambda^c + 2d^{abc}\lambda^c \lambda^c . \tag{B.27}
$$

Wird die Spur gebildet, so ergibt sich:

$$
Sp\left(\lambda^a \lambda^b \lambda^c\right) + Sp\left(\lambda^b \lambda^a \lambda^c\right) = 4d^{abc} . \tag{B.28}
$$

Addition der beiden Gleichungen (B.25) und (B.28) ergibt:

$$
Sp\left(\lambda^a \lambda^b \lambda^c\right) = 2if^{abc} + 2d^{abc} . \tag{B.29}
$$

Wird dieses Ergebnis in (B.22) eingesetzt, so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
Sp\left(L^a L^0 L^b (L^c)^\dagger\right) &= Sp\left(\lambda^a \lambda^b \lambda^c\right) - Sp\left(\lambda^a \lambda^b \lambda^c\right)^* \\
&= 2if^{abc} + 2d^{abc} - \left(2if^{abc} + 2d^{abc}\right)^* \\
&= 2if^{abc} + 2d^{abc} + 2i\bar{f}^{abc} - 2\bar{d}^{abc} \\
&= 4if^{abc} .
\end{aligned} \tag{B.30}
$$

Anhang C

Modifizierte Besselfunktionen

Eine einführende Darstellung der modifizierten Besselfunktionen und deren Eigenschaften wird z.B. in [32], [33] oder [34] gegeben.

Wichtige Relationen
Es gelten die folgenden Relationen [33]:

$$K_\nu(x) = K_{-\nu}(x) \ , \tag{C.1}$$

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x) \ , \tag{C.2}$$

$$K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2K'_\nu(x) \ . \tag{C.3}$$

Reihenentwicklungen
Werden die modifizierten Besselfunktionen $K_0[x]$ und $K_1[x]$ in eine Reihe entwickelt so ergibt dies [33]:

$$K_0[x] = -\ln[x] - \gamma + \ln 2 + \ldots \ , \tag{C.4}$$

$$K_1[x] = \frac{1}{x} + \ldots \ , \tag{C.5}$$

$$K_n[x] = 2^{n-1}(n-1)! \, x^{-n} \ . \tag{C.6}$$

Damit läßt sich $lim_{u\to 0} \left[\, u^n K_m[u] \, \right]$ berechnen. Es folgt:

$$lim_{u\to 0} \left[\, uK_0[u] \, \right] = 0 \ , \tag{C.7}$$

$$lim_{u\to 0} \left[\, uK_1[u] \, \right] = 1 \ , \tag{C.8}$$

$$lim_{u\to 0} \left[\, u^2K_1[u] \, \right] = 0 \ . \tag{C.9}$$

Integration über modifizierte Besselfunktionen
An dieser Stelle werden Formeln angegeben, mit denen sich die benötigten Integrale lösen lassen [35]:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^\mu e^{-t} K_\nu(t) dt &= -\frac{\Gamma(\mu+\nu+1)\Gamma(\mu-\nu+1)}{2^\mu \frac{3}{2}_\mu} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+\nu+1)\Gamma(\mu-\nu+1)}{2^\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\mu\right)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\mu+\nu+1)\Gamma(\mu-\nu+1)}{2^\mu \Gamma\left(\frac{3}{2}+\mu\right)} \\
&= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\mu+\nu+1)\Gamma(\mu-\nu+1)}{2^{\mu+1} \Gamma\left(\frac{3}{2}+\mu\right)} \ .
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Substitution mit $t = \alpha x$ ergibt die für die Auswertung der Integrale wichtige Formel :

$$\int_0^\infty x^\mu \, e^{-\alpha x} K_\nu(\alpha x) \, dx = \sqrt{\pi} \, \frac{\Gamma(\mu+\nu+1) \, \Gamma(\mu-\nu+1)}{(2\alpha)^{\mu+1} \, \Gamma\left(\frac{3}{2}+\mu\right)} \, . \tag{C.11}$$

Berechnung der benötigten Integrale
Für das Integral (7.64) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{u} \sum_{i_1 j} m_{i_1} \, M_{i_1 j}^3 \, \frac{K_1[M_{i_1 j} u]}{u} \, e^{-M_{i_1 j} u} &= \sum_{i_1 j} m_{i_1} M_{i_1 j}^3 \int d\mathbf{u} \, \frac{K_1[M_{i_1 j} u]}{u} \, e^{-M_{i_1 j} u} \\
&= 4\pi \sum_{i_1 j} m_{i_1} M_{i_1 j}^3 \int du \, u^2 \frac{K_1[M_{i_1 j} u]}{u} \, e^{-M_{i_1 j} u} \\
&= 4\pi \sum_{i_1 j} m_{i_1} M_{i_1 j}^3 \int du \, u \, K_1[M_{i_1 j} u] \, e^{-M_{i_1 j} u} \\
&\overset{(C.11)}{=} 4\pi \sum_{i_1 j} m_{i_1} M_{i_1 j}^3 \frac{\sqrt{\pi} \, \Gamma(3) \, \Gamma(1) \, \hbar^2}{4 m^2 c^2 \, \Gamma(5/2)} \\
&= \frac{8}{3} \pi \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \sum_{i_1 j} m_{i_1} M_{i_1 j}^3 \\
&= \frac{8}{3} \pi \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \, 9m \, \frac{m^3 c^3}{\hbar^3} \\
&= 24\pi \, \frac{m^2 c}{\hbar} \, .
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Für das Integral (7.78) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{u} \sum_{i_1 j} m_{i_1} M_{i_1 j}^2 \, K_0[M_{i_1 j} u] \, e^{-M_{i_1 j} u} &= 4\pi \int du \, u^2 \sum_{i_1 j} m_{i_1} M_{i_1 j}^2 \, K_0[M_{i_1 j} u] \, e^{-M_{i_1 j} u} \\
&= 4\pi \sum_{i_1 j} m_{i_1} M_{i_1 j}^2 \int du \, u^2 K_0[M_{i_1 j} u] \, e^{-M_{i_1 j} u} \\
&= 4\pi \sum_{i_1 j} m_{i_1} M_{i_1 j}^2 \frac{\sqrt{\pi} \, \Gamma(3) \, \Gamma(3)}{(2 M_{i_1 j})^3 \, \Gamma(7/2)} \\
&= \frac{16}{15} \pi \sum_{i_1 j} \frac{m_{i_1}}{M_{i_1 j}} \\
&= \frac{16}{15} \pi \sum_{i_1 j} \frac{m_{i_1}}{\frac{1}{2}(m_{i_1} + m_j) \frac{c}{\hbar}} \\
&= \frac{32\hbar}{15c} \pi \sum_{i_1 j} \frac{m_{i_1}}{m_{i_1} + m_j}
\end{aligned}$$

Für die Gammafunktion $\Gamma(x)$ gilt [33]:

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= 1 \, , \\
\Gamma(n) &= (n-1)! \, , \\
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \, , \\
\Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \, .
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{32\hbar}{15c}\pi\frac{9}{2} \\
&= \frac{48\pi\hbar}{5c} \; . \qquad \text{(C.13)}
\end{aligned}
$$

Für das Integral (7.92) ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\int d\mathbf{u}\ \left(\frac{1}{2}\partial_k(\mathbf{r}) + \partial_k(\mathbf{u})\right) \sum_{i_1 j} M^3_{i_1 j}\ K_0[M_{i_1 j}u]\ e^{-M_{i_1 j}u} &\overset{*}{=} \frac{1}{2}\partial_k(\mathbf{r}) \sum_{i_1 j} M^3_{i_1 j} \int d\mathbf{u}\ K_0[M_{i_1 j}u]\ e^{-M_{i_1 j}u} \\
&= 2\pi\ \partial_k(\mathbf{r}) \sum_{i_1 j} M^3_{i_1 j} \int du\ u^2 K_0[M_{i_1 j}u]\ e^{-M_{i_1 j}u} \\
&= 2\pi\ \partial_k(\mathbf{r}) \sum_{i_1 j} M^3_{i_1 j} \frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma(3)\ \Gamma(3)}{8M^3_{i_1 j}\ \Gamma(7/2)} \\
&= \frac{24}{5}\pi\ \partial_k(\mathbf{r}) \; . \qquad \text{(C.14)}
\end{aligned}
$$

Für das Integral (7.118) ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\int d\mathbf{u} \sum_{i_1 j} e^{-M_{i_1 j}u} M^2_{i_1 j}\ m_j^2 c^2\ \frac{K_1\left(\frac{m_j c u}{\hbar}\right)}{u} &= \int d\mathbf{u}\ 9\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 m^2 c^2 e^{-\frac{mcu}{\hbar}}\ \frac{K_1\left(\frac{mcu}{\hbar}\right)}{u} \\
&= 9\frac{m^4c^4}{\hbar^2} \int d\mathbf{u}\ e^{-\frac{mcu}{\hbar}}\ \frac{K_1\left(\frac{mcu}{\hbar}\right)}{u} \\
&= 36\pi\frac{m^4c^4}{\hbar^2} \int du\ u e^{-\frac{mcu}{\hbar}} K_1\left(\frac{mcu}{\hbar}\right) \\
&= 36\pi\frac{m^4c^4}{\hbar^2} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(3)\Gamma(1)\hbar^2}{4m^2c^2\Gamma(5/2)} \\
&= 24\pi m^2 c^2 \; . \qquad \text{(C.15)}
\end{aligned}
$$

Für das Integral (7.144) ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&\int d\mathbf{u} \sum_{i_1 j} \sum_{i_4} \lambda_{i_4} M_{i_4 j} M^2_{i_1 j} e^{-M_{i_1 j}u} K_0[M_{i_4 j}u] \\
&= \int d\mathbf{u} \sum_{i_1 j} M^2_{i_1 j} e^{-M_{i_1 j}u} \sum_{i_4} \lambda_{i_4} M_{i_4 j} K_0[M_{i_4 j}u] \\
&= \int d\mathbf{u} \sum_{i_1 j} M^2_{i_1 j} e^{-M_{i_1 j}u} \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial m^2_{i_4}} \left[M_{i_4 j} K_0[M_{i_4 j}u]\right] \\
&= \frac{2\pi}{c^2} \int du\, u^2 \sum_{i_1 j} M^2_{i_1 j} e^{-M_{i_1 j}u} \frac{\partial}{\partial m_{i_4}} \left[\frac{c}{2\hbar} K_0[M_{i_4 j}u] + \frac{cu}{2\hbar} M_{i_4 j}\left(-K_1[M_{i_4 j}u]\right)\right]
\end{aligned}
$$

---

*Das Integral $\int d\mathbf{u}\ \partial_k(\mathbf{u})\ f(u)$ verschwindet. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\int d\mathbf{u}\ \partial_k(\mathbf{u}) f(u) &= \int d\mathbf{u}\ u^k\ f'(u) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} du^1 \int_{-\infty}^{\infty} du^2 \int_{-\infty}^{\infty} du^3\ u^k f'(u) \\
&= 0 \; .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{\hbar c} \int du\, u^2 \sum_{i_1 j} M_{i_1 j}^2 e^{-M_{i_1 j} u} \frac{\partial}{\partial m_{i_4}} \left[K_0[M_{i_4 j} u] - M_{i_4 j} u K_1[M_{i_4 j} u]\right] \\
&= \frac{\pi}{\hbar c} \int du\, u^2 \sum_{i_1 j} M_{i_1 j}^2 e^{-M_{i_1 j} u} \\
&\quad \left[-\frac{cu}{2\hbar} K_1[M_{i_4 j} u] - \frac{cu}{2\hbar} K_1[M_{i_4 j} u] - M_{i_4 j} u \frac{cu}{2\hbar} \left(-\frac{1}{2}\left(K_0[M_{i_4 j} u] + K_2[M_{i_4 j} u]\right)\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{\hbar c} \int du\, u^2 \sum_{i_1 j} M_{i_1 j}^2 e^{-M_{i_1 j} u} \\
&\quad \left[-\frac{cu}{\hbar} K_1[M_{i_4 j} u] + M_{i_4 j} \frac{cu^2}{4\hbar} \left(K_0[M_{i_4 j} u] + \left(K_0[M_{i_4 j} u] + \frac{2}{M_{i_4 j}} K_1[M_{i_4 j} u]\right)\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{\hbar c} \int du\, u^2 \sum_{i_1 j} M_{i_1 j}^2 e^{-M_{i_1 j} u} \left[M_{i_4 j} \frac{cu^2}{2\hbar} K_0[M_{i_4 j} u] - \frac{cu}{2\hbar} K_1[M_{i_4 j} u]\right] \\
&= \frac{\pi}{2\hbar^2} \int du\, u^2 \sum_{i_1 j} M_{i_1 j}^2 e^{-M_{i_1 j} u} \left[M_{i_4 j} u^2 K_0[M_{i_4 j} u] - u K_1[M_{i_4 j} u]\right]_{|m_{i_4} = m} \\
&= \frac{\pi}{2\hbar^2} \int du\, u^2 \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} e^{-\frac{mcu}{\hbar}} \left[\frac{mc}{\hbar} u^2 K_0\left[\frac{mcu}{\hbar}\right] - u K_1\left[\frac{mcu}{\hbar}\right]\right] \\
&= \frac{9\pi m^3 c^3}{2\hbar^5} \int du\, u^4\, e^{-\frac{mcu}{\hbar}} K_0\left[\frac{mcu}{\hbar}\right] - \frac{9\pi m^2 c^2}{2\hbar^4} \int du\, u^3\, e^{-\frac{mcu}{\hbar}} K_1\left[\frac{mcu}{\hbar}\right] \\
&= \frac{9\pi m^3 c^3}{2\hbar^5} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(5)\,\Gamma(5)\,\hbar^5}{2^5\, m^5 c^5\, \Gamma(11/2)} - \frac{9\pi m^2 c^2}{2\hbar^4} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(5)\,\Gamma(3)\,\hbar^4}{2^4 m^4 c^4\, \Gamma(9/2)} \\
&= \frac{24\pi}{35 m^2 c^2}\ .
\end{aligned}
\tag{C.16}
$$

Für die Integrale (7.179) und (7.201) ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\int d\mathbf{u} \left[\sum_{i_1 i_5} M_{i_1 i_5} e^{-M_{i_1 i_5} u} m_{i_5}^2 c^2 \frac{K_1\left(\frac{m_{i_5} cu}{\hbar}\right)}{u}\right] &= 4\pi \int du\, u \sum_{i_1 i_5} M_{i_1 i_5} e^{-M_{i_1 i_5} u} m_{i_5}^2 c^2 K_1\left(\frac{m_{i_5} cu}{\hbar}\right) \\
&= 4\pi \int du\, u\, 9\frac{mc}{\hbar} m^2 c^2 e^{-\frac{mcu}{\hbar}} K_1\left(\frac{mcu}{\hbar}\right) \\
&= 36 \frac{m^3 c^3}{\hbar} \pi \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(3)\,\Gamma(1)\,\hbar^2}{4 m^2 c^2\, \Gamma(5/2)} \\
&= 24\pi\, \hbar\, mc\ .
\end{aligned}
\tag{C.17}
$$

Für die Integrale (7.190) und (7.212) ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\int d\mathbf{u} \sum_{i_1 i_5} M_{i_1 i_5}^2 e^{-M_{i_1 i_5} u} m_{i_5}^2 c^2 \frac{K_1\left(m_{i_5} u\right)}{u} &= 4\pi \int \mathbf{du}\ u \sum_{i_1 i_5} M_{i_1 i_5}^2\ e^{-M_{i_1 i_5} u}\ m_{i_5}^2 c^2 K_1\left(m_{i_5} u\right) \\
&= 4\pi \int \mathbf{du}\ u\ 9\frac{m^4 c^4}{\hbar^2}\ e^{-\frac{mcu}{\hbar}}\ K_1\left(\frac{mcu}{\hbar}\right) \\
&= 36\pi \frac{m^4 c^4}{\hbar^2} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(3)\,\Gamma(1)\,\hbar^2}{4 m^2 c^2\, \Gamma(5/2)} \\
&= 24\pi\ m^2 c^2\ .
\end{aligned}
\tag{C.18}
$$

Anhang D

Einheiten

1. Die Einheit von ψ
Die Lagrangedichte (2.26) hat die Einheit "Energie / Meter^3"$= kgm^{-1}s^{-2}$. Mit $\mathcal{L}_{Masse} = \frac{1}{\lambda}\bar{\psi}mc^2\psi$ ergibt sich für die Einheit von ψ:
$$\left[\frac{1}{\lambda}\bar{\psi}mc^2\psi\right] = \frac{kg}{ms^2} \ . \tag{D.1}$$
Mit $[\lambda] = \frac{s^2}{kg^2m^2}$ ergibt sich:
$$[\bar{\psi}\psi] = \frac{s^2}{kg^2m^5} \ , \tag{D.2}$$
und daraus ergibt sich:
$$[\psi] = \frac{s}{kg\, m^{5/2}} \ . \tag{D.3}$$

2. Die Einheit von g
Aus dem Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte
$$\left[\frac{gc}{2}V_{\substack{A\ B\ C\ D\\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\\ f_1 f_2 f_3 f_4}}\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi\right] = \frac{kg}{ms^2} \tag{D.4}$$
ergibt sich:
$$[g] = \frac{kg^5m^8}{s^5} \ . \tag{D.5}$$

3. Die Einheit des Propagators:
Aus $F^t(r_1, r_2) =< 0|A[\psi^f\psi^f]|0 >$ ergibt sich
$$\left[F^t\right] = [\psi]^2 = \frac{s^2}{kg^2m^5} \ . \tag{D.6}$$

4. Die Einheit von ∂_I:
Aus $E_{p0} \mid \mathcal{F}(j,p)\rangle = \hat{W}j_{I_1}\partial_{I_2}\partial_{I_3}\partial_{I_4} \mid \mathcal{F}(j,p)\rangle$ ergibt sich mit $[j\partial] = \frac{1}{m^3}$ (was aus der Vertauschungsrelation $[j_I, \partial_{I'}]_+ = \delta_{II'}$ folgt) und $\left[\hat{W}\right] = [\lambda gc]\, m^{-9} = \frac{kg^3}{m^2\, s^4}$:
$$\partial_I = \frac{s}{kg\, m^{5/2}} \ . \tag{D.7}$$

5. Die Einheit von j:
Aus der Vertauschungsrelation $[j_I, \partial_{I'}]_+ = \delta_{II'}$ ergibt sich:

$$[j] = \frac{kg}{m^{1/2}s} \; . \tag{D.8}$$

6. Die Einheit von φ_n:

$$[\varphi_n] = \frac{[|a>]}{m^{3n}\,[j]^n} \; . \tag{D.9}$$

Für den 2-Teilchenzustand erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}[\varphi_2] &= \frac{[|a>]}{m^6\,[j]^2} \\ &= [|a>]\,\frac{s^2}{kg^2 m^5} \; . \end{aligned} \tag{D.10}$$

7. Die Einheit von $\partial^A(\mathbf{r})$:
Folgende Beziehung gilt:

$$\partial^A(\mathbf{r}) \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle = A(\mathbf{r}) \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \; . \tag{D.11}$$

Dies bedeutet, daß $\partial^A(\mathbf{r})$ dieselbe Einheit wie das Vektorpotential $A(\mathbf{r})$ besitzt. Das Vektorpotential $A(\mathbf{r})$ ist auf

$$[A] = \sqrt{\frac{\hbar c^2}{\omega V}} \tag{D.12}$$

normiert und besitzt als Einheit $[A] = \frac{kg^{1/2}m^{1/2}}{s}$.
Damit:

$$\left[\partial^A(\mathbf{r})\right] = \frac{kg^{1/2}m^{1/2}}{s} \; . \tag{D.13}$$

8. Die Einheit von $\partial^A(\mathbf{q})$:
Mittels der Fouriertransformation

$$\partial^A(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d\mathbf{r}\; e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{kr}}\partial^A(\mathbf{r}) \tag{D.14}$$

ergibt sich als Einheit von $\partial^A(\mathbf{q})$:

$$\left[\partial^A(\mathbf{q})\right] = \frac{s^2}{kg^{5/2}\,m^{5/2}} \; . \tag{D.15}$$

9. Die Einheit von $\partial^F(\mathbf{r})$:
Folgende Beziehung gilt:

$$\partial^F(\mathbf{r}) \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle = F(\mathbf{r}) \mid \mathcal{G}(b,f;p)\rangle \; . \tag{D.16}$$

Dies bedeutet, daß $\partial^F(\mathbf{r})$ die selbe Einheit wie die Feldstärke $F(\mathbf{r})$ besitzt. Die Feldstärke $F(\mathbf{r})$ ist auf

$$[F] = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{V}} \tag{D.17}$$

normiert und besitzt als Einheit $[F] = \frac{kg^{1/2}}{m^{1/2}s}$.
Damit:

$$\left[\partial^F(\mathbf{r})\right] = \frac{kg^{1/2}}{m^{1/2}s} \; . \tag{D.18}$$

10. Die Einheit von $\partial^F(\mathbf{q})$:
Mittels der Fouriertransformation

$$\partial^F(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{r}\; e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{qr}} \partial^F(\mathbf{r}) \tag{D.19}$$

ergibt sich als Einheit von $\partial^F(\mathbf{q})$:

$$\left[\partial^F(\mathbf{q})\right] = \frac{s^2}{kg^{5/2}\; m^{7/2}} \; . \tag{D.20}$$

11. Die Einheit von $b^A(\mathbf{r})$:
Aus $\left[b^A, \partial^A\right] = \frac{1}{m^3}$ ergibt sich:

$$\left[b^A(\mathbf{r})\right] = \frac{s}{kg^{1/2} m^{7/2}} \; . \tag{D.21}$$

12. Die Einheit von $b^A(\mathbf{q})$:
Mittels der Fouriertransformation

$$b^A(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r}\; e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{qr}} b^A(\mathbf{r}) \tag{D.22}$$

ergibt sich als Einheit von $b^A(\mathbf{q})$:

$$\left[b^A(\mathbf{q})\right] = \frac{s}{kg^{1/2}\; m^{1/2}} \; . \tag{D.23}$$

13. Die Einheit von $b^F(\mathbf{r})$:
Aus $\left[b^F, \partial^F\right] = \frac{1}{m^3}$ ergibt sich:

$$\left[b^F(\mathbf{r})\right] = \frac{s}{kg^{1/2} m^{5/2}} \; . \tag{D.24}$$

14. Die Einheit von $b^F(\mathbf{q})$:
Mittels Fouriertransformation erhalten wir die Einheiten von $b^F(\mathbf{q})$.
Sie lautet:

$$\left[b^F(\mathbf{q})\right] = \frac{s\, m^{1/2}}{kg^{1/2}} \; . \tag{D.25}$$

15. Die Einheit von $\partial^f(\mathbf{r})$:
Es soll folgende Beziehung gelten:

$$\partial_l^f(\mathbf{r}) \mid \mathcal{G}(b, f; p)\rangle = \psi_l(\mathbf{r}) \mid \mathcal{G}(b, f; p)\rangle \; . \tag{D.26}$$

Damit lautet die Einheit für $\partial^f(\mathbf{r})$:

$$\left[\partial_l^f(\mathbf{r})\right] = \frac{1}{m^{3/2}} \; . \tag{D.27}$$

16. Die Einheit von $\partial^f(\mathbf{q})$:
Die Einheit für $\partial^f(\mathbf{q})$ ergibt sich aus der Fouriertransformation:

$$\partial^f(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{r} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{qr}} \partial_l^f(\mathbf{r}) \; . \tag{D.28}$$

Die Einheit ergibt sich damit zu:

$$\left[\partial_l^f(\mathbf{q})\right] = \frac{s^3}{kg^3\; m^{9/2}} \; . \tag{D.29}$$

17. Die Einheit von $f_l(\mathbf{q})$:
Aus der Vertauschungsrelation $\left[\partial_l^f(\mathbf{q}), f_{l'}(\mathbf{q})\right] = \delta_{ll'}\ \delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')$ ergibt sich für die Einheit von $f_l(\mathbf{q})$:

$$[f_l(\mathbf{q})] = m^{3/2}\ . \tag{D.30}$$

18. Die Einheit von $f_l(\mathbf{r})$:
Die Einheit von $f_l(\mathbf{r})$ ergibt sich aus der Fouriertransformation:

$$f_l(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d\mathbf{q}\ e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{qr}} f_l(\mathbf{q})\ , \tag{D.31}$$

damit ergibt sich:

$$[f_l(\mathbf{r})] = \frac{1}{m^{3/2}}\ . \tag{D.32}$$

19. Die Einheit der Quarkwellenfunktion $C_l^I(\mathbf{q})$:
Es gilt die Beziehung (4.38). Sie lautet:

$$f_l(\mathbf{q}) = C_l^I j_I\ . \tag{D.33}$$

Die Einheit für $C_l^I(\mathbf{q})$ ergibt sich nun zu:

$$\left[C_l^I(\mathbf{q})\right] = \frac{[f_l(\mathbf{q})]}{m^3\,[j_I]}\ , \tag{D.34}$$

wobei der Faktor m^3 aus der impliziten Integration über den Ort herrührt. Damit ergibt sich für die Einheit von $C_l^I(\mathbf{q})$:

$$\left[C_l^I(\mathbf{q})\right] = \frac{s}{kg\ m}\ . \tag{D.35}$$

20. Die Einheit der Dualen-Quarkwellenfunktion $R_l^I(\mathbf{q})$:
Die Einheit der Dualfunktion ergibt sich aus der Beziehung $C_l^I(\mathbf{q})\ R_{l'}^I(\mathbf{q}') = \delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\ \delta_{ll'}$. Damit gilt für die Einheit von $R_l^I(\mathbf{q})$

$$\left[R_l^I(\mathbf{q})\right] = \frac{s^2}{kg^2\ m^5}\ . \tag{D.36}$$

21. Die Einheit der Gluonwellenfunktion $C_{l\nu,a}^{I_1 I_2}(\mathbf{q})$:
Aus der Beziehung:

$$b^F(\mathbf{q}) = C_{l\nu,a}^{I_1 I_2}(\mathbf{q}) j_{I_1} j_{I_2} \tag{D.37}$$

ergibt sich für die Einheit von $C_{l\nu,a}^{I_1 I_2}(\mathbf{q})$

$$\left[C_{l\nu,a}^{I_1 I_2}(\mathbf{q})\right] = \frac{1}{m^6}\frac{\left[b^F(\mathbf{q})\right]}{[j_I]^2}\ , \tag{D.38}$$

wobei der Anteil m^6 aus der Integration über die beiden Orte herrührt. Als Einheit ergibt sich schließlich:

$$\left[C_{l\nu,a}^{I_1 I_2}(\mathbf{q})\right] = \frac{s^3}{kg^{5/2}\ m^{9/2}}\ . \tag{D.39}$$

22. Die Einheit der Dualen-Gluonwellenfunktion $R^{I_1 I_2}_{l\nu,a}(\mathbf{q})$:
    Die Einheit der Dualfunktion ergibt sich aus:

$$C^{I_1 I_2}_{k}(\mathbf{q})\; R^{I_1 I_2}_{k'}(\mathbf{q}') = \delta_{kk'}\; \delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \tag{D.40}$$

zu

$$\left[R^{I_1 I_2}_{l\nu,a}(\mathbf{q})\right] = \frac{1}{[q^3]\left[C^{I_1 I_2}_{l\nu,a}(\mathbf{q})\right] m^6} \; , \tag{D.41}$$

dies ergibt:

$$\left[R^{I_1 I_2}_{l\nu,a}(\mathbf{q})\right] = \frac{1}{kg^{1/2}\; m^{9/2}} \; . \tag{D.42}$$

23. Die Einheit der Gluonwellenfunktion $C^{I_1 I_2}_{l,a}(\mathbf{q})$:
    Aus der Beziehung:

$$b^A(\mathbf{q}) = C^{I_1 I_2}_{l,a}(\mathbf{q}) j_{I_1} j_{I_2} \tag{D.43}$$

ergibt sich für die Einheit von $C^{I_1 I_2}_{l,a}(\mathbf{q})$

$$\left[C^{I_1 I_2}_{l,a}(\mathbf{q})\right] = \frac{1}{m^6}\frac{\left[b^A(\mathbf{q})\right]}{\left[j_I\right]^2} \; , \tag{D.44}$$

wobei der Anteil m^6 aus der Integration über die beiden Orte herrührt. Als Einheit ergibt sich schließlich:

$$\left[C^{I_1 I_2}_{l,a}(\mathbf{q})\right] = \frac{s^3}{kg^{5/2}\; m^{11/2}} \; . \tag{D.45}$$

24. Die Einheit der Dualen-Gluonwellenfunktion $R^{I_1 I_2}_{l,a}(\mathbf{q})$:
    Die Einheit der Dualfunktion ergibt sich aus:

$$C^{I_1 I_2}_{k}(\mathbf{q})\; R^{I_1 I_2}_{k'}(\mathbf{q}') = \delta_{kk'}\; \delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \tag{D.46}$$

zu

$$\left[R^{I_1 I_2}_{l,a}(\mathbf{q})\right] = \frac{1}{[q^3]\left[C^{I_1 I_2}_{l,a}(\mathbf{q})\right] m^6} \; , \tag{D.47}$$

dies ergibt:

$$\left[R^{I_1 I_2}_{l,a}(\mathbf{q})\right] = \frac{1}{kg^{1/2}\; m^{7/2}} \; . \tag{D.48}$$

Die Einheiten sind in folgender Tabelle zusammengestellt. Die natürlichen Einheiten* beziehen sich auf die Masse M, d.h. die Einheit der Größe X lautet: [Größe X] $= M^\alpha$
In der Tabelle ist, für die natürlichen Einheiten, nur die Potenz α angegeben.

Größe	SI-Einheit	Nat. Einheit (α)
Ψ	$kg^{-1}\, m^{-5/2}\, s$	1/2
g	$kg^5\, m^8\, s^{-5}$	2
$\hat{K}$	$kg\, m^{-1}\, s^{-2}$	4
$\hat{W}$	$kg^3\, m^{-2}\, s^{-4}$	9
∂_I	$kg^{-1}\, m^{-5/2}\, s$	1/2
F^t	$kg^{-2}\, m^{-5}\, s^2$	1
j	$kg\, m^{-1/2}\, s^{-1}$	5/2
$\partial^A(\mathbf{r})$	$kg^{1/2}\, m^{1/2}\, s^{-1}$	1
$\partial^A(\mathbf{q})$	$kg^{-5/2}\, m^{-5/2}\, s^2$	-2
$\partial^F(\mathbf{r})$	$kg^{1/2}\, m^{-1/2}\, s^{-1}$	2
$\partial^F(\mathbf{q})$	$kg^{-5/2}\, m^{-7/2}\, s^2$	-1
$b^A(\mathbf{r})$	$kg^{-1/2}\, m^{-7/2}\, s$	2
$b^A(\mathbf{q})$	$kg^{-1/2}\, m^{-1/2}\, s$	-1
$b^F(\mathbf{r})$	$kg^{-1/2}\, m^{-5/2}\, s$	1
$b^F(\mathbf{q})$	$kg^{-1/2}\, m^{1/2}\, s$	-2
$\partial_l^f(\mathbf{r})$	$m^{-3/2}$	3/2
$\partial_l^f(\mathbf{q})$	$kg^{-3}\, m^{-9/2}\, s^3$	-3/2
$f_l(\mathbf{q})$	$m^{3/2}$	-3/2
$f_l(\mathbf{r})$	$m^{-3/2}$	3/2
$C_l^I(\mathbf{q})$	$kg^{-1}\, m^{-1}\, s$	-1
$R_l^I(\mathbf{q})$	$kg^{-2}\, m^{-5}\, s^2$	1
$C_{l\nu,a}^{I_1 I_2}(\mathbf{q})$	$kg^{-5/2}\, m^{-9/2}\, s^3$	-1
$R_{l\nu,a}^{I_1 I_2}(\mathbf{q})$	$kg^{-1/2}\, m^{-9/2}$	4
$C_{l,a}^{I_1 I_2}(\mathbf{q})$	$kg^{-5/2}\, m^{-11/2}\, s^3$	0
$R_{l,a}^{I_1 I_2}(\mathbf{q})$	$kg^{-1/2}\, m^{-7/2}$	3

*Für die Umrechnung von SI-Einheiten in natürliche Einheiten werden die SI-Einheiten durch die Größen $\hbar$, c und die Masse M ausgedrückt, d.h. es werden folgende Formeln benutzt:

$$kg = M, \qquad m = \frac{\hbar}{Mc}, \qquad s = \frac{\hbar}{Mc^2}\,.$$

Ist eine Größe X in SI-Einheiten gegeben, $[X] = kg^p\, m^q\, s^r$, so lautet diese Größe in Einheiten von $\hbar$, c und der Masse M

$$[X] = M^p \left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^q \left(\frac{\hbar}{Mc^2}\right)^r = M^{p-q-r}\, \hbar^{q+r}\, c^{-q-2r}\,.$$

Mit $\hbar = c = 1$ ergibt sich daraus $[X] = M^{p-q-r} = M^\alpha$.

Anhang E

Die Wellenfunktionen

E.1 Die lokale Wellenfunktion $\hat{\varphi}^{(2)}_{L_1L_2}$

In diesem Abschnitt wird die lokale Wellenfunktion

$$\hat{\varphi}^{(2)}\begin{pmatrix} x\,x & k \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ A_1A_2 & \end{pmatrix} = N_\varphi e^{-\frac{i}{\hbar}kx}\hat{\chi}\begin{pmatrix} 0 & k \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ A_1A_2 & \end{pmatrix} \tag{E.1}$$

mit

$$\hat{\chi}\begin{pmatrix} 0 & k \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ \alpha_1\alpha_2 & s \\ A_1A_2 & \end{pmatrix} = \delta_{A_1A_2}L^a_{\kappa_1\kappa_2}\left(A^a_\mu\left(\gamma^\mu C\right)_{\alpha_1\alpha_2} + \tilde{F}^a_{\mu\nu}\left(\Sigma^{\mu\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\right) \tag{E.2}$$

aus der abgeleiteten Wellenfunktion für die Hilfsfelder verifiziert.
Dazu wird die Zweiteilchenwellenfunktion (6.144) über die Hilfsfelder i_1 und i_2 summiert und anschließend der Limes $u \to 0$ vollzogen. Im einzelnen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}^{(2)}_{L_1L_2} &:= \sum_{i_1i_2}\varphi^{(2)}_{I_1I_2} \\
&= \sum_{i_1i_2} -\frac{24\pi^2\hbar^3 g}{(2\pi\hbar)^4}N_\varphi\delta_{A_1A_2}L^a_{\kappa_1\kappa_2}e^{i\frac{\mathbf{k}}{2\hbar}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \\
&\quad \left\{2N_{i_1i_2}\cos\left(\frac{\mathbf{ku}}{2\hbar}\right)\frac{K_1[N_{i_1i_2}u]}{u}A_i\left(\gamma^iC\right)_{\alpha_1\alpha_2} + N_{i_1i_2}\frac{2\hbar}{\mathbf{ku}}sin\left(\frac{\mathbf{ku}}{2\hbar}\right)K_0[N_{i_1i_2}u]F_{i\nu}\left(\Sigma^{i\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\right\} \\
&= -\frac{24\pi^2\hbar^3 g}{(2\pi\hbar)^4}N_\varphi\delta_{A_1A_2}L^a_{\kappa_1\kappa_2}e^{i\frac{\mathbf{k}}{2\hbar}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)} \\
&\quad \left\{2A_i\left(\gamma^iC\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left[-\frac{u^2}{32\hbar^4}K_0\left[\frac{mc}{\hbar}u\right] - \frac{u}{64mc\hbar^3}\left(1-\frac{(mc)^2}{\hbar^2}u^2\right)K_1\left[\frac{mc}{\hbar}u\right]\right]\right. \\
&\quad \left.+F_{i\nu}\left(\Sigma^{i\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left[\left(\frac{mcu^4}{64\hbar^5} - \frac{u^2}{64mc\hbar^3}\right)K_0\left[\frac{mc}{\hbar}u\right] - \left(\frac{u}{32m^2c^2\hbar^2} + \frac{u^3}{32\hbar^4}\right)K_1\left[\frac{mc}{\hbar}u\right]\right]\right\}\ .
\end{aligned} \tag{E.3}$$

Nun gilt: *

$$lim_{u\to 0}\left[\, uK_0[u]\,\right] = 0\ , \tag{E.4}$$

$$lim_{u\to 0}\left[\, uK_1[u]\,\right] = 1\ , \tag{E.5}$$

$$lim_{u\to 0}\left[\, u^2K_1[u]\,\right] = 0\ . \tag{E.6}$$

Damit ergibt sich für die lokale Wellenfunktion:

$$\hat{\varphi}^{(2)}\left(\begin{array}{c|c} x\,x & k \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ A_1A_2 & \end{array}\right) = -\frac{24\pi^2\hbar^3 g}{(2\pi\hbar)^4} N_\varphi \delta_{A_1A_2} L^a_{\kappa_1\kappa_2} e^{i\frac{\mathbf{k}}{2\hbar}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)}$$

$$\left\{2A_i\left(\gamma^i C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(-\frac{1}{64\hbar^2m^2c^2}\right) + F_{i\nu}\left(\Sigma^{i\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(-\frac{1}{32\hbar m^3c^3}\right)\right\}$$

$$= \frac{3}{64}\frac{g}{\pi^2m^2c^2\hbar^3} N_\varphi \delta_{A_1A_2} L^a_{\kappa_1\kappa_2} e^{i\frac{\mathbf{k}}{2\hbar}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)} \left\{A_i\left(\gamma^i C\right)_{\alpha_1\alpha_2} + \frac{\hbar}{mc} F_{i\nu}\left(\Sigma^{i\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\right\}. \tag{E.7}$$

Wird diese Ergebnis mit (6.103) und (6.104) verglichen, so zeigt sich die Selbstkonsistenz der Berechnung der Zweiteilchenwellenfunktion. Zu beachten ist, daß die Größe $\tilde{F}_{i\nu}$ nicht die phänomenologische Feldstärke ist. Es gilt: $\tilde{F}_{i\nu} = \frac{\hbar}{mc}F_{i\nu}$.
Eine wichtige Konsequenz aus diesen Rechnungen ergibt sich durch den Term

$$\frac{3}{64}\frac{g}{\pi^2m^2c^2\hbar^3}\ . \tag{E.8}$$

Es muß gelten:

$$\frac{3}{64}\frac{g}{\pi^2m^2c^2\hbar^3} = 1\ . \tag{E.9}$$

Daraus ergibt sich die Kopplungskonstante g:

$$\boxed{g = \frac{64}{3}\pi^2m^2c^2\hbar^3\ .} \tag{E.10}$$

E.2 Die Normierung der Zweiteilchenfunktion

Die Zweiteilchenwellenfunktion (6.144) lautet mit $u = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ und $\mathbf{u} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$:

$$\varphi^{(2)}\left(\begin{array}{c|c} r_1r_2 & k \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ i_1i_2 & \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ A_1A_2 & \end{array}\right) = -\frac{24\pi^2\hbar^3 g}{(2\pi\hbar)^4} N_\varphi \delta_{A_1A_2} L^a_{\kappa_1\kappa_2} e^{i\frac{\mathbf{k}}{2\hbar}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}$$

$$\left\{2N_{i_1i_2}\cos\left(\frac{\mathbf{ku}}{2\hbar}\right)\frac{K_1[N_{i_1i_2}u]}{u} A_i\left(\gamma^i C\right)_{\alpha_1\alpha_2} + N_{i_1i_2}\frac{2\hbar}{\mathbf{ku}} sin\left(\frac{\mathbf{ku}}{2\hbar}\right) K_0[N_{i_1i_2}u] F_{i\nu}\left(\Sigma^{i\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\right\}\ . \tag{E.11}$$

---

*Werden die modifizierten Besselfunktionen $K_0[x]$ und $K_1[x]$ in eine Reihe entwickelt, so ergibt dies [33]:

$$K_0[x] = -\ln[x] - \gamma + \ln 2 + \dots\ ,$$
$$K_1[x] = \frac{1}{x} + \dots\ ,$$
$$K_n[x] = 2^{n-1}(n-1)!\, x^{-n} + \dots \quad n \geq 1\ .$$

Damit läßt sich $lim_{u\to 0}\left[\, u^n K_m[u]\,\right]$ berechnen.

Nun ist nach Definition (5.1)

$$\hat{\varphi}^{(2)}_{L_1L_2} := \sum_{i_1i_2} \varphi^{(2)}_{I_1I_2} \ . \tag{E.12}$$

Wird $\varphi^{(2)}_{I_1I_2}$ aus Gleichung (E.11) eingesetzt, und werden die Summationen ausgeführt, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}^{(2)}_{L_1L_2} = & -\frac{24\pi^2\hbar^3 g}{(2\pi\hbar)^4} N_\varphi \delta_{A_1A_2} L^a_{\kappa_1\kappa_2} e^{i\frac{\mathbf{k}}{2\hbar}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)} \\ & \Big\{ 2A_i \left(\gamma^i C\right)_{\alpha_1\alpha_2} \left[-\frac{u^2}{32\hbar^4} K_0\left[\frac{mc}{\hbar}u\right] - \frac{u}{64mc\hbar^3}\left(1-\frac{(mc)^2}{\hbar^2}u^2\right) K_1\left[\frac{mc}{\hbar}u\right]\right] \\ & + F_{i\nu}\left(\Sigma^{i\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left[\left(\frac{mcu^4}{64\hbar^5} - \frac{u^2}{64mc\hbar^3}\right) K_0\left[\frac{mc}{\hbar}u\right] - \left(\frac{u}{32m^2c^2\hbar^2} + \frac{u^3}{32\hbar^4}\right) K_1\left[\frac{mc}{\hbar}u\right]\right]\Big\} \ . \end{aligned} \tag{E.13}$$

Mit der Abkürzung:

$$a = \frac{mc}{\hbar} \tag{E.14}$$

wird aus (E.13):

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}^{(2)}_{L_1L_2} = & -\frac{24\pi^2\hbar^3 g}{(2\pi\hbar)^4} N_\varphi \delta_{A_1A_2} L^a_{\kappa_1\kappa_2} e^{i\frac{\mathbf{k}}{2\hbar}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)} \\ & \Big\{ 2A_i \left(\gamma^i C\right)_{\alpha_1\alpha_2} \left(-\frac{1}{64\hbar^2 m^2c^2}\right) \left[2(au)^2 K_0[au] + (au)\left(1-(au)^2\right) K_1[au]\right] \\ & + F_{i\nu}\left(\Sigma^{i\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{1}{64m^3c^3\hbar}\right)\left[\left((au)^4-(au)^2\right)K_0[au] - 2\left[(au)^3+(au)\right]K_1[au]\right]\Big\} \ . \end{aligned} \tag{E.15}$$

Mit weiteren Abkürzungen schreibt sich die Wellenfunktion als:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}^{(2)}_{L_1L_2} = & N\delta_{A_1A_2} L^a_{\kappa_1\kappa_2} e^{i\frac{\mathbf{k}}{2\hbar}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)} \\ & \Big\{ A_i\left(\gamma^i C\right)_{\alpha_1\alpha_2} N_1 g_1[au] + F_{i\nu}\left(\Sigma^{i\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2} N_2 g_2[au]\Big\} \end{aligned} \tag{E.16}$$

mit

$$N = -\frac{24\pi^2\hbar^3 g}{(2\pi\hbar)^4} N_\varphi \ , \tag{E.17}$$

$$N_1 = -\frac{1}{32\hbar^2 m^2 c^2} \ , \tag{E.18}$$

$$N_2 = \frac{1}{64m^3c^3\hbar} \ , \tag{E.19}$$

$$g_1 = 2(au)^2 K_0[au] + (au)\left(1-(au)^2\right) K_1[au] \ , \tag{E.20}$$

$$g_2 = \left((au)^4 - (au)^2\right) K_0[au] - 2\left[(au)^3 + (au)\right] K_1[au] \ . \tag{E.21}$$

Für die Norm gilt:

$$\left|\left|\hat{\varphi}^{(2)}\right|\right|^2 := \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \hat{\varphi}^{(2)}_{L_1L_2}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)^\dagger \hat{\varphi}^{(2)}_{L_1L_2}(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2) \ . \tag{E.22}$$

Für die Gleichung (E.16) ergibt sich daraus:

$$\left|\left|\hat{\varphi}^{(2)}\right|\right|^2 = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \, |N|^2 \, e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}} Sp\left[\mathbb{1}_6\right] sp\left[L^a \bar{L}^{a'}\right]$$

$$\left\{|A|^2\, Sp\left[(\gamma^i C)(\gamma^{i'} C)\right] |N_1|^2 \left|g_1\left[au\right]\right|^2 + |F|^2\, Sp\left[(\Sigma^{i\nu} C)(\Sigma^{i'\nu'} C)\right] |N_2|^2 \left|g_2\left[au\right]\right|^2\right\}$$

$$= 24\delta_{aa'}\, |N|^2 \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}}$$

$$\left\{4\delta_{ii'}\, |A|^2 |N_1|^2 \left|g_1\left[au\right]\right|^2 + 4\delta_{ii'}\delta_{\nu\nu'}\, |F|^2 |N_2|^2 \left|g_2\left[au\right]\right|^2\right\} \;. \tag{E.23}$$

Die Transformation dieser Gleichung auf Relativ- und Schwerpunktkoordinaten

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \;, \tag{E.24}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \tag{E.25}$$

liefert:

$$\begin{aligned}\left|\left|\hat{\varphi}^{(2)}\right|\right|^2 &= 96\, |N|^2 \iint d\mathbf{r} d\mathbf{u} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} \left\{|A|^2 |N_1|^2 \left|g_1\left[au\right]\right|^2 + |F|^2 |N_2|^2 \left|g_2\left[au\right]\right|^2\right\} \\ &= 96\, (2\pi\hbar)^3\, |N|^2 \int d\mathbf{u} \left\{|A|^2 |N_1|^2 \left|g_1\left[au\right]\right|^2 + |F|^2 |N_2|^2 \left|g_2\left[au\right]\right|^2\right\} \\ &= 96\, (2\pi\hbar)^3\, |N|^2 |A|^2 |N_1|^2 \int d\mathbf{u} \left|g_1\left[au\right]\right|^2 \\ &\quad +96\, (2\pi\hbar)^3\, |N|^2 |F|^2 |N_2|^2 \int d\mathbf{u} \left|g_2\left[au\right]\right|^2 \;.\end{aligned} \tag{E.26}$$

Das erste Integral ergibt:

$$\begin{aligned}\int d\mathbf{u} \left|g_1[au]\right|^2 &= 4\pi \int du u^2 \left|g_1[au]\right|^2 \\ &= 4\pi \frac{1}{a^3} \int_0^\infty dx x^2 \left|g_1[x]\right|^2 \\ &= \frac{4\pi}{a^3} \int_0^\infty dx \left(4x^6 K_0[x]^2 + 4x^5(1-x^2)K_0[x]K_1[x] + x^4(1-x^2)^2 K_1[x]^2\right) \\ &= \frac{\pi^3}{a^3}\frac{115965}{2^{15}} \approx 3.54\frac{\pi^3}{a^3} \\ &= \frac{\pi^3}{a^3}\alpha_1 \;.\end{aligned} \tag{E.27}$$

Für das zweite Integral ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int d\mathbf{u} \left|g_2[au]\right|^2 &= \frac{\pi^3}{a^3}\frac{14831775}{2^{18}} \approx 56.58\frac{\pi^3}{a^3} \\ &= \frac{\pi^3}{a^3}\alpha_2 \;.\end{aligned} \tag{E.28}$$

Werden diese Ergebnisse eingesetzt, ergibt sich aus Gleichung (E.26):

$$\begin{aligned}\left|\left|\hat{\varphi}^{(2)}\right|\right|^2 &= 96\, (2\pi\hbar)^3\, |N|^2 |A|^2 |N_1|^2 \frac{\pi^3}{a^3}\alpha_1 \\ &\quad +96\, (2\pi\hbar)^3\, |N|^2 |F|^2 |N_2|^2 \frac{\pi^3}{a^3}\alpha_2 \\ &= 96\, (2\pi\hbar)^3\, N^2 N_1^2 \frac{\pi^3}{a^3}\alpha_1 \left(A^2 + \frac{N_2^2}{N_1^2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}F^2\right) \;.\end{aligned} \tag{E.29}$$

Mit

$$F^2 = \frac{\hbar\omega}{V} \tag{E.30}$$

$$A^2 = \frac{\hbar c^2}{\omega V} \tag{E.31}$$

ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
\left|\left|\hat{\varphi}^{(2)}\right|\right|^2 &= N\left(\frac{\hbar c^2}{\omega V} + \frac{N_2^2}{N_1^2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\hbar\omega}{V}\right) \\
&= \tilde{N}\left(1 + \frac{N_2^2}{N_1^2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{p^2}{\hbar^2}\right) \\
&= \tilde{N}\left(1 + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{p^2}{\hbar^2}\right) \\
&= \tilde{N}\left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{p^2}{4m^2c^2}\right) \\
&= \tilde{N}\left(1 + \alpha\frac{p^2}{4m^2c^2}\right) \quad .
\end{aligned} \tag{E.32}$$

E.3 Die Integration über den Impuls

Die Gleichung (6.107) lautet:

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(2)}\left(\begin{array}{c|c} x_1x_2 & k \\ \alpha_1\alpha_2 & \\ i_1i_2 & \\ \kappa_1\kappa_2 & a \\ A_1A_2 & \end{array}\right) \\
&= \frac{12i\hbar g}{(2\pi\hbar)^4} N_\varphi A_\mu \delta_{A_1A_2} L^a_{\kappa_1\kappa_2} e^{-\frac{i}{\hbar}k\frac{x_1+x_2}{2}} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \int d^4p \frac{e^{-i\frac{p}{\hbar}(x_1-x_2)}}{\left((p+\frac{k}{2})^2 - m_{i_1}^2c^2\right)\left((p-\frac{k}{2})^2 - m_{i_2}^2c^2\right)} \\
&\left[\left(\frac{m_{i_1}c - m_{i_2}c}{2}k^\mu - \frac{1}{2}k^\mu \not{k}\right) C + \left(m_{i_1}m_{i_2}c^2 - p^2\right)(\gamma^\mu C) + i\frac{m_{i_1}c + m_{i_2}c}{2}k_\nu\left(\Sigma^{\mu\nu}C\right)\right]_{\alpha_1\alpha_2} .
\end{aligned} \tag{E.33}$$

In diesem Kapitel werden die beiden Integrale

$$\int dp \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2)}}{\left[\left(p+\frac{k}{2}\right)^2 - m_i^2c^2\right]\left[\left(p-\frac{k}{2}\right)^2 - m_j^2c^2\right]} \tag{E.34}$$

und

$$\int dp\, p^2 \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2)}}{\left[\left(p+\frac{k}{2}\right)^2 - m_i^2c^2\right]\left[\left(p-\frac{k}{2}\right)^2 - m_j^2c^2\right]} \tag{E.35}$$

berechnet. Zunächst zu Integral (E.34). Der Nenner wird nach Feynman parametrisiert.

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{du}{\left[a + (b-a)u\right]^2} \tag{E.36}$$

Angewandt auf den Nenner des Integrals (E.34), ergibt dies

$$\begin{aligned}
&\left\{\left[\left(p+\frac{k}{2}\right)^2 - m_i^2c^2\right]\left[\left(p-\frac{k}{2}\right)^2 - m_j^2c^2\right]\right\}^{-1} \\
&= \int_0^1 dz\, \left\{\left[p^2 + pk - m_i^2c^2\right] + \left[-2pk + m_i^2c^2 - m_j^2c^2\right] z\right\}^{-2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 dz \left[p^2 - (2z-1)pk - m_i^2c^2 + \left(m_i^2c^2 - m_j^2c^2\right) z\right]^{-2} \\
&= \int_0^1 dz \left[p^2 - 2(z-1/2)pk - \tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^{-2} \\
&= \int_0^1 dz \left[(p-(z-1/2)k)^2 - \tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^{-2} \; .
\end{aligned}
\tag{E.37}
$$

Damit ergibt sich:

$$
\int dp \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2)}}{\left[\left(p+\frac{k}{2}\right)^2 - m_i^2c^2\right]\left[\left(p-\frac{k}{2}\right)^2 - m_j^2c^2\right]} = \int_0^1 dz \int dp \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2)}}{\left[(p-(z-1/2)k)^2 - \tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2} \; . \tag{E.38}
$$

Mittels der Variablensubstitution

$$
p = q + (z-1/2)k \tag{E.39}
$$

geht (E.38) über in:

$$
\begin{aligned}
\int dp \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2)}}{\left[\left(p+\frac{k}{2}\right)^2 - m_i^2c^2\right]\left[\left(p-\frac{k}{2}\right)^2 - m_j^2c^2\right]} &= \int_0^1 dz \int dq \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(q+(z-1/2)k)(x_1-x_2)}}{\left[q^2 - \tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2} \\
&= \int_0^1 dz e^{-\frac{i}{\hbar}(z-1/2)k(x_1-x_2)} \int dq \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}q(x_1-x_2)}}{\left[q^2 - \tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2} \; .
\end{aligned}
\tag{E.40}
$$

Dies ist ein Standardintegral. Nach ([36] S.278, Formel 9) gilt:

$$
\int dq \frac{e^{-iqx}}{q^2 - a^2} = 2\pi^2 i K_0 \left[a(-x^2 + i\epsilon)^{1/2}\right] \; . \tag{E.41}
$$

Dies führt zu:

$$
\int dq \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}qx}}{\left[q^2 - \tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2} = 2\pi^2 i K_0 \left[M_{ij}(z) \left(-\left(\frac{x}{\hbar}\right)^2 + i\epsilon\right)^{1/2}\right] \; . \tag{E.42}
$$

Eingesetzt in Gleichung (E.40) ergibt dies:

$$
\begin{aligned}
&\int dp \frac{\exp^{-\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2)}}{\left[\left(p+\frac{k}{2}\right)^2 - m_i^2c^2\right]\left[\left(p-\frac{k}{2}\right)^2 - m_j^2c^2\right]} \\
&= 2\pi^2 i \int_0^1 dz \exp^{-\frac{i}{\hbar}(z-1/2)k(x_1-x_2)} K_0 \left[M_{ij}(z) \left(-\left(\frac{x_1-x_2}{\hbar}\right)^2 + i\epsilon\right)^{1/2}\right] \\
&= 2\pi^2 i \int_0^1 dz \exp^{-\frac{i}{\hbar}(z-1/2)k(x_1-x_2)} K_0 \left[\tilde{N}_{ij}(z) \left(-(x_1-x_2)^2 + i\tilde{\epsilon}\right)^{1/2}\right] \; .
\end{aligned}
\tag{E.43}
$$

Das zweite Integral (E.35) wird nach dem gleichen Schema berechnet, zunächst wird die Feynmanparametrisierung durchgeführt und danach die Variablensubstitution:

$$
\int dp \; p^2 \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2)}}{\left[\left(p+\frac{k}{2}\right)^2 - m_i^2c^2\right]\left[\left(p-\frac{k}{2}\right)^2 - m_j^2c^2\right]}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 dz \int dp\, p^2 \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2)}}{\left[(p-(z-1/2)k)^2 - \tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2} \\
&= \int_0^1 dz \int dq\, \left(q^2 + (2z-1)qk\right) \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(q+(z-1/2)k)(x_1-x_2)}}{\left[q^2 - \tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2} \\
&= \int_0^1 dz \exp^{-\frac{i}{\hbar}(z-1/2)k(x_1-x_2)} \int dq\, \left(q^2 + (2z-1)qk\right) \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}q(x_1-x_2)}}{\left[q^2 - \tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2} \,. \qquad \text{(E.44)}
\end{aligned}
$$

Die beiden Anteile:

$$
\int dq\, q_\mu \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}q(x_1-x_2)}}{\left[q^2 - \tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2} \qquad \text{(E.45)}
$$

und

$$
\int dq\, q^2 \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}q(x_1-x_2)}}{\left[q^2 - \tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2} \qquad \text{(E.46)}
$$

können durch Ableiten des Integrals (E.42) nach $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ bzw. durch zweimaliges Ableiten von Integral (E.42) nach $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}$ berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
&\int dq\, q_\mu \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}qx}}{\left[q^2 - \tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2} \\
&= -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \int dq \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}qx}}{\left[q^2 - \tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2} \\
&= -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(2\pi^2 i K_0 \left[M_{ij}(z) \left(-\left(\frac{x}{\hbar}\right)^2 + i\epsilon\right)^{1/2}\right]\right) \\
&= -2\hbar\pi^2 \left(\frac{1}{2}M_{ij}(z) \left(-\left(\frac{x}{\hbar}\right)^2 + i\epsilon\right)^{-1/2} \left(-2\frac{x_\mu}{\hbar^2}\right)(-)K_1 \left[M_{ij}(z) \left(-\left(\frac{x}{\hbar}\right)^2 + i\epsilon\right)^{1/2}\right]\right) \\
&= -2\hbar\pi^2 \tilde{N}_{ij}(z) x_\mu \frac{K_1\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-x^2+\epsilon\right)^{1/2}\right]}{\left(-x^2+i\epsilon\right)^{1/2}} \,. \qquad \text{(E.47)}
\end{aligned}
$$

Zum Schluß bleibt das Integral (E.46), das durch zweimaliges Ableiten von Integral (E.42) nach $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}$ gewonnen wird:

$$
\begin{aligned}
&\int dq\, q^2 \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}qx}}{\left[q^2 - \tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2} \\
&= \int dq g^{\mu\nu} q_\mu q_\nu \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}qx}}{\left[q^2 - \tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2} \\
&= -\frac{\hbar}{i} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \int dq\, q_\mu \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}qx}}{\left[q^2 - \tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(E.47)}{=} -\frac{\hbar}{i} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(-2\hbar\pi^2 \tilde{N}_{ij}(z) x_\mu \frac{K_1\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-x^2+\epsilon\right)^{1/2}\right]}{\left(-x^2+\epsilon\right)^{1/2}}\right)\\
&= -2i\hbar^2\pi^2 g^{\mu\nu}\tilde{N}_{ij}(z)\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(x_\mu \frac{K_1\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-x^2+i\epsilon\right)^{1/2}\right]}{\left(-x^2+\epsilon\right)^{1/2}}\right)\\
&= -2\pi^2\hbar^2 i g^{\mu\nu}\tilde{N}_{ij}(z)\left(g_{\mu\nu}\frac{K_1\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-x^2+\epsilon\right)^{1/2}\right]}{\left(-x^2+\epsilon\right)^{1/2}} + \frac{x_\mu x_\nu}{(-x^2+i\epsilon)}\tilde{N}_{ij}(z)\right.\\
&\left.\left(\frac{1}{2}\left(K_0\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-x^2+i\epsilon\right)^{1/2}\right]+K_2\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-x^2+i\epsilon\right)^{1/2}\right]\right)+\frac{K_1\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-x^2+i\epsilon\right)^{1/2}\right]}{\tilde{N}_{ij}(z)\left(-x^2+i\epsilon\right)^{1/2}}\right)\right). \qquad (E.48)
\end{aligned}
$$

Mit der Relation (C.2)

$$K_2[x] = \frac{2}{x}K_1[x] + K_0[x] \qquad (E.49)$$

ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\int dq\ q^2 \frac{\exp^{-\frac{i}{\hbar}qx}}{\left[q^2-\tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2}\\
&= -2\pi^2\hbar^2 i g^{\mu\nu}\tilde{N}_{ij}(z)\left(g_{\mu\nu}\frac{K_1\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-x^2+\epsilon\right)^{1/2}\right]}{\left(-x^2+\epsilon\right)^{1/2}}\right.\\
&\left.+\frac{x_\mu x_\nu}{(-x^2+i\epsilon)}\tilde{N}_{ij}(z)\left(K_0\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-x^2+\epsilon\right)^{1/2}\right]+2\frac{K_1\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-x^2+\epsilon\right)^{1/2}\right]}{\left(-x^2+\epsilon\right)^{1/2}}\right)\right)\\
&= -2\pi^2\hbar^2 i\tilde{N}_{ij}(z)\left(2\frac{K_1\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-x^2+\epsilon\right)^{1/2}\right]}{\left(-x^2+\epsilon\right)^{1/2}} - \tilde{N}_{ij}(z)K_0\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-x^2+\epsilon\right)^{1/2}\right]\right). \qquad (E.50)
\end{aligned}
$$

Damit kann das Integral (E.35) angegeben werden:

$$
\begin{aligned}
&\int dp\ p^2 \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}p(x_1-x_2)}}{\left[\left(p+\frac{k}{2}\right)^2-m_i^2c^2\right]\left[\left(p-\frac{k}{2}\right)^2-m_j^2c^2\right]}\\
&= \int_0^1 dz \exp^{-\frac{i}{\hbar}(z-1/2)k(x_1-x_2)}\int dq\ \left(q^2+(2z-1)qk\right)\frac{\exp^{-\frac{i}{\hbar}q(x_1-x_2)}}{\left[q^2-\tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2}\\
&= \int_0^1 dz \exp^{-\frac{i}{\hbar}(z-1/2)k(x_1-x_2)}\left[\int dq\ q^2\frac{\exp^{-\frac{i}{\hbar}q(x_1-x_2)}}{\left[q^2-\tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2}+\int dq\ (2z-1)qk\frac{\exp^{-\frac{i}{\hbar}q(x_1-x_2)}}{\left[q^2-\tilde{M}_{ij}^2(z)\right]^2}\right]\\
&= \int_0^1 dz \exp^{-\frac{i}{\hbar}(z-1/2)k(x_1-x_2)}\\
&\left[-2\pi^2\hbar^2 i\tilde{N}_{ij}(z)\left(2\frac{K_1\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-(x_1-x_2)^2+\epsilon\right)^{1/2}\right]}{\left(-(x_1-x_2)^2+\epsilon\right)^{1/2}} - \tilde{N}_{ij}(z)K_0\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-(x_1-x_2)^2+\epsilon\right)^{1/2}\right]\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (2z-1)k(x_1-x_2)\left(-2\hbar\pi^2\tilde{N}_{ij}(z)\frac{K_1\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-(x_1-x_2)^2+\epsilon\right)^{1/2}\right]}{\left(-(x_1-x_2)^2+\epsilon\right)^{1/2}}\right)\Bigg]\\
&= -4\pi^2\hbar^2 i\int_0^1 dz\tilde{N}_{ij}(z)\exp^{-\frac{i}{\hbar}(z-1/2)k(x_1-x_2)}\\
&\left\{\left(1-\frac{i}{\hbar}\left(z-\frac{1}{2}\right)k(x_1-x_2)\right)\frac{K_1\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-(x_1-x_2)^2+\epsilon\right)^{1/2}\right]}{\left(-(x_1-x_2)^2+\epsilon\right)^{1/2}}\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}\tilde{N}_{ij}(z)K_0\left[\tilde{N}_{ij}(z)\left(-(x_1-x_2)^2+\epsilon\right)^{1/2}\right]\right\}\ . \qquad \text{(E.51)}
\end{aligned}
$$

E.4 Die Doppelintegration über die Impulse

Die Gleichung (6.29) lautet:

$$
\begin{aligned}
&\hat{u}_{\alpha,\kappa,A}(k)\\
&= 48\frac{g^2\hbar^2}{(2\pi\hbar)^8}\sum_{ii_2i_3i_4}\lambda_i\tilde{G}_{\alpha\alpha_1}(k,m_i)\iint dq_1dq_2\frac{\lambda_{i_2}\lambda_{i_3}\lambda_{i_4}}{\left[(k+q_1+q_2)^2-m_{i_4}^2c^2\right]\left[q_1^2-m_{i_2}^2c^2\right]\left[q_2^2-m_{i_3}^2c^2\right]}\\
&\left\{\left(m_{i_3}c\,q_1^2+(m_{i_2}+m_{i_3}-m_{i_4})\,cq_1q_2+m_{i_3}c\,q_1k+m_{i_2}c\,q_2^2+m_{i_2}c\,q_2k+108m_{i_2}m_{i_3}m_{i_4}c^3\right)\mathbb{1}\right.\\
&-\left(36\,q_1q_2-m_{i_2}m_{i_3}c^2\right)\not{k}\\
&-\left(36q_2^2+72\,q_1q_2+36q_2k+m_{i_3}m_{i_4}c^2-m_{i_2}m_{i_3}c^2\right)\not{q}_1\\
&\left.-\left(36q_1^2+72\,q_1q_2+36q_1k+m_{i_2}m_{i_4}c^2-m_{i_2}m_{i_3}c^2\right)\not{q}_2\right\}\hat{u}_{\beta,\kappa A}(k)\ . \qquad \text{(E.52)}
\end{aligned}
$$

Mittels der Feynmanparametrisierung (6.31) ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&\hat{u}_{\alpha,\kappa,A}(k)\\
&= 96\frac{g^2\hbar^2}{(2\pi\hbar)^8}\sum_i\lambda_i\tilde{G}_{\alpha\alpha_1}(k,m_i)\iint dq_1dq_2\int_0^1 du\int_0^u dv\sum_{i_2i_3i_4}\lambda_{i_2}\lambda_{i_3}\lambda_{i_4}\\
&\left\{\left(m_{i_3}c\,q_1^2+(m_{i_2}+m_{i_3}-m_{i_4})\,cq_1q_2+m_{i_3}c\,q_1k+m_{i_2}c\,q_2^2+m_{i_2}c\,q_2k+108m_{i_2}m_{i_3}m_{i_4}c^3\right)\mathbb{1}\right.\\
&-\left(36\,q_1q_2-m_{i_2}m_{i_3}c^2\right)\not{k}\\
&-\left(36q_2^2+72\,q_1q_2+36q_2k+m_{i_3}m_{i_4}c^2-m_{i_2}m_{i_3}c^2\right)\not{q}_1\\
&\left.-\left(36q_1^2+72\,q_1q_2+36q_1k+m_{i_2}m_{i_4}c^2-m_{i_2}m_{i_3}c^2\right)\not{q}_2\right\}\\
&\left\{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-(u-v)m_{i_2}^2c^2-vm_{i_3}^2c^2-(1-u)m_{i_4}^2c^2\right]^{-3}\right\}\hat{u}_{\beta,\kappa A}(k)\ . \qquad \text{(E.53)}
\end{aligned}
$$

Hier trennen sich nun die Wege. Entweder wird an dieser Stelle über die Hilfsfeldindizes summiert und danach die dann regularisierten endlichen Integrale berechnet, oder es werden die Doppelintegrale direkt berechnet und danach die Summation über die Hilfsfeldvariablen durchgeführt, um so die divergenten Anteile zu eliminieren. Zunächst wird die Summationen sofort durchgeführt, um Anschluß an Kapitel 6 zu erhalten, und danach als Alternative der zweite Weg eingeschlagen.

E.4.1 Der regularisierte Ausdruck

Die Summation über die Hilfsfelder in (E.53) liefert:

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_{\alpha,\kappa,A}(k) = 96\frac{g^2\hbar^2}{(2\pi\hbar)^8}\sum_i \lambda_i \tilde{G}_{\alpha\alpha_1}(k,m_i)\int_0^1 du \int_0^u dv \iint dq_1 dq_2 \\
\Bigg\{ & \frac{161280 m^7c^7(u-1)^2(u-v)^2v^2q_1^2}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^9} \\
&+\frac{10080 m^5c^5(u-1)(u-v)v\,(3(u-v-1)u+(v+2)v)\,q_1^2}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^8} \\
&+\frac{720 m^3c^3(u-1)(u-v)v\,(2v-3)\,q_1^2}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^7} \\
&-\frac{180 mc(u-1)(u-v)vq_1^2}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^6} \\
&+\frac{161280 m^7c^7(u-1)^2(u-v)^2v^2q_2^2}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^9} \\
&+\frac{10080 m^5c^5(u-1)(u-v)v\,((u-v-1)(u-v)+3(u-1)v)\,q_2^2}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^8} \\
&+\frac{720 m^3c^3(u-1)(u-v)v\,(2u-2v-3)\,q_2^2}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^7} \\
&-\frac{180 mc(u-1)(u-v)vq_2^2}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^6} \\
&-\frac{161280 m^7c^7(u-1)^2(u-v)^2v^2q_1q_2}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^9} \\
&+\frac{10080 m^5c^5(u-1)(u-v)v\,(3(u-1)u+(u-v)v)\,q_1q_2}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^8} \\
&+\frac{720 m^3c^3(u-1)(u-v)v\,(4u-5)\,q_1q_2}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^7} \\
&-\frac{180 mc(u-1)(u-v)vq_1q_2}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^6} \\
&+\frac{161280 m^7c^7(u-1)^2(u-v)^2v^2q_1k}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^9} \\
&+\frac{10080 m^5c^5(u-1)(u-v)v\,(3(u-1)(u-v)+(v-1)v)\,q_1k}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^8} \\
&+\frac{720 m^3c^3(u-1)(u-v)v\,(2v-3)\,q_1k}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^7} \\
&-\frac{180 mc(u-1)(u-v)vq_1k}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^6} \\
&+\frac{161280 m^7c^7(u-1)^2(u-v)^2v^2q_2k}{[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2]^9}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{10080m^5c^5(u-1)(u-v)v\left((u-v-1)(u-v)+3(u-1)v\right)q_2k}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^8}$$

$$+\frac{720m^3c^3(u-1)(u-v)v\,(2u-2v-3)\,q_2k}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^7}$$

$$-\frac{180mc(u-1)(u-v)vq_2k}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^6}$$

$$+\frac{17418240m^9c^9(u-1)^2(u-v)^2v^2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^9}$$

$$+\frac{3265920m^7c^7(u-1)(u-v)v\left((u-1)u-(u-v)v\right)}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^8}$$

$$-\frac{699840m^5c^5(u-1)(u-v)v}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^7}$$

$$-\frac{174960m^3c^3(u-1)(u-v)v}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^6}$$

$$-\frac{5806080m^6c^6(u-1)^2(u-v)^2v^2q_1q_2\,\not{k}}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^9}$$

$$-\frac{362880m^4c^4(u-1)(u-v)v\left((u-1)u-(u-v)v\right)q_1q_2\,\not{k}}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^8}$$

$$+\frac{25920m^2c^2(u-1)(u-v)vq_1q_2\,\not{k}}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^7}$$

$$+\frac{2160(u-1)(u-v)vq_1q_2\,\not{k}}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^6}$$

$$+\frac{161280m^8c^8(u-1)^2(u-v)^2v^2\,\not{k}}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^9}$$

$$+\frac{10080m^6c^6(u-1)(u-v)v\left(3(u-1)u-(u-v)v\right)\not{k}}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^8}$$

$$+\frac{2160m^4c^4(u-1)(u-v)v\,(2u-3)\,\not{k}}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^7}$$

$$-\frac{540m^2c^2(u-1)(u-v)v\,\not{k}}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^6}$$

$$-\frac{5806080m^6c^6(u-1)^2(u-v)^2v^2q_2^2\,\not{q}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^9}$$

$$-\frac{362880m^4c^4(u-1)(u-v)v\left((u-1)u-(u-v)v\right)q_2^2\,\not{q}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^8}$$

$$+\frac{25920m^2c^2(u-1)(u-v)vq_2^2\,\not{q}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^7}$$

$$+\frac{2160(u-1)(u-v)vq_2^2\,\not{q}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^6}$$

$$-\frac{11612160m^6c^6(u-1)^2(u-v)^2v^2q_1q_2\,\not{q}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^9}$$

$$-\frac{725760m^4c^4(u-1)(u-v)v\left((u-1)u-(u-v)v\right)q_1q_2\not{a}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^8}$$
$$+\frac{51840m^2c^2(u-1)(u-v)vq_1q_2\not{a}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^7}$$
$$+\frac{4320(u-1)(u-v)vq_1q_2\not{a}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^6}$$
$$-\frac{5806080m^6c^6(u-1)^2(u-v)^2v^2q_2k\not{a}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^9}$$
$$-\frac{362880m^4c^4(u-1)(u-v)v\left((u-1)u-(u-v)v\right)q_2k\not{a}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^8}$$
$$+\frac{25920m^2c^2(u-1)(u-v)vq_2k\not{a}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^7}$$
$$+\frac{2160(u-1)(u-v)vq_2k\not{a}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^6}$$
$$-\frac{161280m^8c^8(u-1)^2(u-v)^2v^2\not{a}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^9}$$
$$-\frac{10080m^6c^6(u-1)(u-v)v\left(3(u-v-1)(u-v)+(u-1)v\right)\not{a}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^8}$$
$$-\frac{2160m^4c^4(u-1)(u-v)v\left(2v-2u-1\right)\not{a}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^7}$$
$$+\frac{540m^2c^2(u-1)(u-v)v\not{a}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^6}$$
$$-\frac{161280m^8c^8(u-1)^2(u-v)^2v^2\not{a}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^9}$$
$$-\frac{10080m^6c^6(u-1)(u-v)v\left(3(u-1)u-(u-v)v\right)\not{a}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^8}$$
$$-\frac{2160m^4c^4(u-1)(u-v)v\left(2u-3\right)\not{a}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^7}$$
$$+\frac{540m^2c^2(u-1)(u-v)v\not{a}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^6}$$
$$-\frac{5806080m^6c^6(u-1)^2(u-v)^2v^2q_1^2\not{a}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^9}$$
$$-\frac{362880m^4c^4(u-1)(u-v)v\left((u-1)u-(u-v)v\right)q_1^2\not{a}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^8}$$
$$+\frac{25920m^2c^2(u-1)(u-v)vq_1^2\not{a}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^7}$$
$$+\frac{2160(u-1)(u-v)vq_1^2\not{a}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^6}$$
$$-\frac{11612160m^6c^6(u-1)^2(u-v)^2v^2q_1q_2\not{a}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^9}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{725760 m^4 c^4 (u-1)(u-v)v\left((u-1)u-(u-v)v\right) q_1 q_2 \not{q}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^8} \\
&+ \frac{51840 m^2 c^2 (u-1)(u-v)v q_1 q_2 \not{q}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^7} \\
&+ \frac{4320 (u-1)(u-v)v q_1 q_2 \not{q}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^6} \\
&- \frac{5806080 m^6 c^6 (u-1)^2(u-v)^2 v^2 q_1 k \not{q}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^9} \\
&- \frac{362880 m^4 c^4 (u-1)(u-v)v\left((u-1)u-(u-v)v\right) q_1 k \not{q}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^8} \\
&+ \frac{25920 m^2 c^2 (u-1)(u-v)v q_1 k \not{q}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^7} \\
&+ \frac{2160 (u-1)(u-v)v q_1 k \not{q}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^6} \\
&- \frac{161280 m^8 c^8 (u-1)^2(u-v)^2 v^2 \not{q}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^9} \\
&- \frac{10080 m^6 c^6 (u-1)(u-v)v\left(3(u-1)v+(u-1)(u-v)-3(u-v)v\right) \not{q}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^8} \\
&- \frac{2160 m^4 c^4 (u-1)(u-v)v\left(2v+1\right) \not{q}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^7} \\
&+ \frac{540 m^2 c^2 (u-1)(u-v)v \not{q}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^6} \\
&- \frac{161280 m^8 c^8 (u-1)^2(u-v)^2 v^2 \not{q}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^9} \\
&- \frac{10080 m^6 c^6 (u-1)(u-v)v\left(3(u-1)u-(u-v)v\right) \not{q}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^8} \\
&- \frac{2160 m^4 c^4 (u-1)(u-v)v\left(2u-3\right) \not{q}_2}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^7} \\
&\left.+ \frac{540 m^2 c^2 (u-1)(u-v)v \not{q}_1}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^6} \right\}_{\alpha_1\beta} \\
&\hat{u}_{\beta,\kappa A}(k) \; . \qquad \text{(E.54)}
\end{aligned}
$$

An diesem Ergebnis zeigt sich die regularisierende Wirkung der Summation über die Hilfsfelder. Aus den divergenten Integralen, die im Nenner eine zu kleine Potenz aufwiesen, sind Integrale entstanden, in denen der Nenner eine genügend hohe Potenz aufweist. Für die weitere Auswertung müssen die verschiedenen Doppelintegrale gelöst werden, z.B.

$$
\iint dq_1 dq_2 \frac{q_1^2 q_2^\mu}{\left[(1-v)q_1^2+2(1-u)q_1q_2+2(1-u)q_1k+(1-u+v)q_2^2+2(1-u)q_2k+(1-u)k^2-m^2c^2\right]^6} \; .
$$

Es zeigt sich aber, daß alle Integrale durch entsprechende Ableitungen von drei "Grundintegralen" berechnet werden können (Kapitel 6, Gleichungen (6.42)-(6.53)). Diese "Grundintegrale" besitzen einen allgemeineren Nenner.

E.4.2 Berechnung der "Grundintegrale"

In Folgendem werden die drei "Grundintegrale"

$$\iint dq_1 dq_2 \frac{1}{N^5} \ , \tag{E.55}$$

$$\iint dq_1 dq_2 \frac{q_1^\mu}{N^5} \ , \tag{E.56}$$

$$\iint dq_1 dq_2 \frac{q_2^\mu}{N^5} \tag{E.57}$$

berechnet, mit

$$N = \left[\alpha q_1^2 + 2\beta q_1 q_2 + \gamma q_2^2 + 2\delta q_1 k + 2\epsilon q_2 k + \lambda k^2 - M\right] \ . \tag{E.58}$$

Zuerst wird Integral (E.55) berechnet. Dazu wird der Nenner (E.58) umgeschrieben:

$$\begin{aligned} N = {} & \gamma \left(q_2 + \frac{\epsilon}{\gamma} k + \frac{\beta}{\gamma} q_1\right)^2 + \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma} \left(q_1 + \frac{\delta\gamma - \epsilon\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} k\right)^2 \\ & + \left(\frac{\lambda\gamma - \epsilon^2}{\gamma} - \frac{(\delta\gamma - \epsilon\beta)^2}{\gamma(\alpha\gamma - \beta^2)}\right) k^2 - M \ . \end{aligned} \tag{E.59}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint dq_1 dq_2 \frac{1}{N^5} = \iint dq_1 dq_2 & \left[\gamma \left(q_2 + \frac{\epsilon}{\gamma} k + \frac{\beta}{\gamma} q_1\right)^2 + \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma} \left(q_1 + \frac{\delta\gamma - \epsilon\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} k\right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\lambda\gamma - \epsilon^2}{\gamma} - \frac{(\delta\gamma - \epsilon\beta)^2}{\gamma(\alpha\gamma - \beta^2)}\right) k^2 - M\right]^{-5} \ . \end{aligned} \tag{E.60}$$

Mit der Variablensubstitution

$$q = q_2 + \frac{\epsilon}{\gamma} k + \frac{\beta}{\gamma} q_1 \tag{E.61}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \iint dq_1 dq_2 \frac{1}{N^5} \\ & = \iint dq_1 dq \frac{1}{\gamma^5} \left[q^2 + \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma^2} \left(q_1 + \frac{\delta\gamma - \epsilon\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} k\right)^2 + \left(\frac{\lambda\gamma - \epsilon^2}{\gamma^2} - \frac{(\delta\gamma - \epsilon\beta)^2}{\gamma^2(\alpha\gamma - \beta^2)}\right) k^2 - \frac{M}{\gamma}\right]^{-5} \\ & = \frac{1}{\gamma^5} \iint dq_1 dq \left[(-1)\left(-\frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma^2} \left(q_1 + \frac{\delta\gamma - \epsilon\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} k\right)^2 - \left(\frac{\lambda\gamma - \epsilon^2}{\gamma^2} - \frac{(\delta\gamma - \epsilon\beta)^2}{\gamma^2(\alpha\gamma - \beta^2)}\right) k^2 + \frac{M}{\gamma} - q^2\right)\right]^{-5} \\ & = -\frac{1}{\gamma^5} \iint dq_1 dq \left[\left(-\frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma^2} \left(q_1 + \frac{\delta\gamma - \epsilon\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} k\right)^2 - \left(\frac{\lambda\gamma - \epsilon^2}{\gamma^2} - \frac{(\delta\gamma - \epsilon\beta)^2}{\gamma^2(\alpha\gamma - \beta^2)}\right) k^2 + \frac{M}{\gamma}\right) - q^2\right]^{-5} \ . \end{aligned} \tag{E.62}$$

Mit der Formel [26]

$$\int \frac{dp}{\left(\lambda - p_\mu^2\right)^n} = \frac{(n-3)!}{(n-1)!} \frac{i\pi^2}{\lambda^{n-2}} \tag{E.63}$$

ergibt dies

$$\begin{aligned}
&\iint dq_1 dq_2 \frac{1}{N^5} \\
&= -\frac{1}{\gamma^5} \int dq_1 \, i\pi^2 \frac{2!}{4!} \left[-\frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma^2} \left(q_1 + \frac{\delta\gamma - \epsilon\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} k \right)^2 - \left(\frac{\lambda\gamma - \epsilon^2}{\gamma^2} - \frac{(\delta\gamma - \epsilon\beta)^2}{\gamma^2 (\alpha\gamma - \beta^2)} \right) k^2 + \frac{M}{\gamma} \right]^{-3} \\
&= -i\pi^2 \frac{2!}{4!} \frac{1}{\gamma^5} \int dq_1 \left[\frac{M}{\gamma} - \left(\frac{\lambda\gamma - \epsilon^2}{\gamma^2} - \frac{(\delta\gamma - \epsilon\beta)^2}{\gamma^2 (\alpha\gamma - \beta^2)} \right) k^2 - \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma^2} \left(q_1 + \frac{\delta\gamma - \epsilon\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} k \right)^2 \right]^{-3} \\
&= -i\pi^2 \frac{2!}{4!} \frac{1}{\gamma^5} \int dq_1 \left[\left(\frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma^2} \right) \left(\frac{\gamma}{\alpha\gamma - \beta^2} M - \left(\frac{\lambda\gamma - \epsilon^2}{\alpha\gamma - \beta^2} - \frac{(\delta\gamma - \epsilon\beta)^2}{(\alpha\gamma - \beta^2)^2} \right) k^2 \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. - \left(q_1 + \frac{\delta\gamma - \epsilon\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} k \right)^2 \right) \right]^{-3} \\
&= -i\pi^2 \frac{2!}{4!} \frac{1}{\gamma^5} \frac{\gamma^6}{(\alpha\gamma - \beta^2)^3} \int dp \left[\frac{\gamma}{\alpha\gamma - \beta^2} M - \left(\frac{\lambda\gamma - \epsilon^2}{\alpha\gamma - \beta^2} - \frac{(\delta\gamma - \epsilon\beta)^2}{(\alpha\gamma - \beta^2)^2} \right) k^2 - p^2 \right]^{-3} \\
&= -i\pi^2 \frac{2!}{4!} \frac{\gamma}{(\alpha\gamma - \beta^2)^3} \frac{1}{2!} i\pi^2 \left[\frac{\gamma}{\alpha\gamma - \beta^2} M - \left(\frac{\lambda\gamma - \epsilon^2}{\alpha\gamma - \beta^2} - \frac{(\delta\gamma - \epsilon\beta)^2}{(\alpha\gamma - \beta^2)^2} \right) k^2 \right]^{-1} \\
&= -\frac{\pi^4}{4!} \frac{1}{(\alpha\gamma - \beta^2)} \frac{1}{(\alpha\gamma\lambda + 2\beta\delta\epsilon - \beta^2\lambda - \alpha\epsilon^2 - \gamma\delta^2) k^2 - (\alpha\gamma - \beta^2) M} \, .
\end{aligned} \tag{E.64}$$

Als nächstes wird das Integral (E.56) berechnet:

$$\begin{aligned}
\iint dq_1 dq_2 \frac{q_1^\mu}{N^5} = \iint dq_1 dq_2 \; q_1^\mu & \left[\gamma \left(q_2 + \frac{\epsilon}{\gamma} k + \frac{\beta}{\gamma} q_1 \right)^2 + \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma} \left(q_1 + \frac{\delta\gamma - \epsilon\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} k \right)^2 \right. \\
& \left. + \left(\frac{\lambda\gamma - \epsilon^2}{\gamma} - \frac{(\delta\gamma - \epsilon\beta)^2}{\gamma (\alpha\gamma - \beta^2)} \right) k^2 - M \right]^{-5} \, .
\end{aligned} \tag{E.65}$$

Mit der Variablensubstitution

$$q = q_2 + \frac{\epsilon}{\gamma} k + \frac{\beta}{\gamma} q_1 \tag{E.66}$$

geht dies über in

$$\begin{aligned}
&\iint dq_1 dq_2 \frac{q_1^\mu}{N^5} \\
&= \iint dq_1 q_1^\mu dq \frac{1}{\gamma^5} \left[q^2 + \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma^2} \left(q_1 + \frac{\delta\gamma - \epsilon\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} k \right)^2 + \left(\frac{\lambda\gamma - \epsilon^2}{\gamma^2} - \frac{(\delta\gamma - \epsilon\beta)^2}{\gamma^2 (\alpha\gamma - \beta^2)} \right) k^2 - \frac{M}{\gamma} \right]^{-5} \\
&= \frac{1}{\gamma^5} \iint dq_1 q_1^\mu dq \left[- \left(-\frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma^2} \left(q_1 + \frac{\delta\gamma - \epsilon\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} k \right)^2 - \left(\frac{\lambda\gamma - \epsilon^2}{\gamma^2} - \frac{(\delta\gamma - \epsilon\beta)^2}{\gamma^2 (\alpha\gamma - \beta^2)} \right) k^2 + \frac{M}{\gamma} - q^2 \right) \right]^{-5} \\
&= -\frac{1}{\gamma^5} \iint dq_1 q_1^\mu dq \left[\left(-\frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma^2} \left(q_1 + \frac{\delta\gamma - \epsilon\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} k \right)^2 - \left(\frac{\lambda\gamma - \epsilon^2}{\gamma^2} - \frac{(\delta\gamma - \epsilon\beta)^2}{\gamma^2 (\alpha\gamma - \beta^2)} \right) k^2 + \frac{M}{\gamma} \right) - q^2 \right]^{-5} \, .
\end{aligned} \tag{E.67}$$

Die Integration über dq ergibt durch Anwenden der Formel (E.63):

$$\begin{aligned}
&\iint dq_1 dq_2 \frac{q_1^\mu}{N^5} \\
&= -\frac{1}{\gamma^5}\int dq_1\, q_1^\mu i\pi^2 \frac{2!}{4!}\left[-\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\gamma^2}\left(q_1+\frac{\delta\gamma-\epsilon\beta}{\alpha\gamma-\beta^2}k\right)^2-\left(\frac{\lambda\gamma-\epsilon^2}{\gamma^2}-\frac{(\delta\gamma-\epsilon\beta)^2}{\gamma^2(\alpha\gamma-\beta^2)}\right)k^2+\frac{M}{\gamma}\right]^{-3} \\
&= -i\pi^2\frac{2!}{4!}\frac{1}{\gamma^5}\int dq_1\, q_1^\mu\left[\frac{M}{\gamma}-\left(\frac{\lambda\gamma-\epsilon^2}{\gamma^2}-\frac{(\delta\gamma-\epsilon\beta)^2}{\gamma^2(\alpha\gamma-\beta^2)}\right)k^2-\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\gamma^2}\left(q_1+\frac{\delta\gamma-\epsilon\beta}{\alpha\gamma-\beta^2}k\right)^2\right]^{-3} \\
&= -i\pi^2\frac{2!}{4!}\frac{1}{\gamma^5}\int dq_1\, q_1^\mu\left[\left(\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\gamma^2}\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha\gamma-\beta^2}M-\left(\frac{\lambda\gamma-\epsilon^2}{\alpha\gamma-\beta^2}-\frac{(\delta\gamma-\epsilon\beta)^2}{(\alpha\gamma-\beta^2)^2}\right)k^2\right.\right. \\
&\qquad\qquad\left.\left.-\left(q_1+\frac{\delta\gamma-\epsilon\beta}{\alpha\gamma-\beta^2}k\right)^2\right)\right]^{-3} .
\end{aligned} \tag{E.68}$$

Mit der Variablensubstitution

$$p^\mu = q_1^\mu + \frac{\delta\gamma-\epsilon\beta}{\alpha\gamma-\beta^2}k^\mu \tag{E.69}$$

geht dies über in

$$\begin{aligned}
&\iint dq_1 dq_2 \frac{q_1^\mu}{N^5} \\
&= -i\pi^2\frac{2!}{4!}\frac{1}{\gamma^5}\frac{\gamma^6}{(\alpha\gamma-\beta^2)^3}\int dp\left[p^\mu-\frac{\delta\gamma-\epsilon\beta}{\alpha\gamma-\beta^2}k^\mu\right]\left[\frac{\gamma}{\alpha\gamma-\beta^2}M-\left(\frac{\lambda\gamma-\epsilon^2}{\alpha\gamma-\beta^2}-\frac{(\delta\gamma-\epsilon\beta)^2}{(\alpha\gamma-\beta^2)^2}\right)k^2-p^2\right]^{-3} .
\end{aligned} \tag{E.70}$$

Unter Berücksichtigung von

$$\int \frac{dp\, p^\mu}{\left(\lambda-p_\mu^2\right)^n}=0 \tag{E.71}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\iint dq_1 dq_2 \frac{q_1^\mu}{N^5} \\
&= i\pi^2\frac{2!}{4!}\frac{\gamma}{(\alpha\gamma-\beta^2)^3}\frac{\delta\gamma-\epsilon\beta}{\alpha\gamma-\beta^2}k^\mu\int dp\left[\frac{\gamma}{\alpha\gamma-\beta^2}M-\left(\frac{\lambda\gamma-\epsilon^2}{\alpha\gamma-\beta^2}-\frac{(\delta\gamma-\epsilon\beta)^2}{(\alpha\gamma-\beta^2)^2}\right)k^2-p^2\right]^{-3} \\
&= i\pi^2\frac{2!}{4!}\frac{\gamma}{(\alpha\gamma-\beta^2)^3}\frac{\delta\gamma-\epsilon\beta}{\alpha\gamma-\beta^2}k^\mu\frac{1}{2!}i\pi^2\left[\frac{\gamma}{\alpha\gamma-\beta^2}M-\left(\frac{\lambda\gamma-\epsilon^2}{\alpha\gamma-\beta^2}-\frac{(\delta\gamma-\epsilon\beta)^2}{(\alpha\gamma-\beta^2)^2}\right)k^2\right]^{-1} \\
&= \frac{\pi^4}{4!}\frac{\delta\gamma-\epsilon\beta}{(\alpha\gamma-\beta^2)^2}\frac{k^\mu}{(\alpha\gamma\lambda+2\beta\delta\epsilon-\beta^2\lambda-\alpha\epsilon^2-\gamma\delta^2)\,k^2-(\alpha\gamma-\beta^2)\,M} .
\end{aligned} \tag{E.72}$$

Nach dem gleichen Schema oder nach Umbenennung der Konstanten $\alpha \leftrightarrow \gamma$ und $\delta \leftrightarrow \epsilon$ ergibt sich für Integral (E.57):

$$\iint dq_1 dq_2 \frac{q_2^\mu}{N^5} = \frac{\pi^4}{4!}\frac{\alpha\epsilon-\beta\delta}{(\alpha\gamma-\beta^2)^2}\frac{k^\mu}{(\alpha\gamma\lambda+2\beta\delta\epsilon-\beta^2\lambda-\alpha\epsilon^2-\gamma\delta^2)\,k^2-(\alpha\gamma-\beta^2)\,M} . \tag{E.73}$$

E.4.3 Der alternative Weg

Die Integrale mit Potenzen von q_1^μ und q_2^ν ergeben sich durch Ableitung nach den entsprechenden Parametern. Somit müssen auch hier nur drei Integrale wirklich berechnet werden. Da dieser Weg nicht vollständig zu Ende gegangen wird, soll hier nur ein "Beispielintegral" gelöst werden.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_2 i_3 i_4} \iint dq_1 dq_2 \left[\left((k+q_1+q_2)^2 - m_{i_4}^2 c^2\right)\left(q_1^2 - m_{i_2}^2 c^2\right)\left(q_2^2 - m_{i_3}^2 c^2\right)\right]^{-3} \\
&= 2 \sum_{i_2 i_3 i_4} \iint dq_1 dq_2 \int_0^1 du \int_0^u dv \left[(1-v)q_1^2 + 2(1-u)q_1 q_2 + 2(1-u)q_1 k + (1-u+v)q_2^2 + 2(1-u)q_2 k \right. \\
&\qquad \left. +(1-u)k^2 + (v-u)m_{i_2}^2 c^2 - v m_{i_3}^2 c^2 - (1-u) m_{i_4}^2 c^2\right]^{-3} \\
&= 2 \sum_{i_2 i_3 i_4} \int_0^1 du \int_0^u dv \iint dq_1 dq_2 \left[\alpha q_1^2 + 2\beta q_1 q_2 + \gamma q_2^2 + 2\delta q_1 k + 2\epsilon q_2 k + \lambda k^2 + M\right]^{-3}
\end{aligned} \tag{E.74}$$

mit

$$\alpha = 1 - v \,, \tag{E.75}$$
$$\beta = 1 - u \,, \tag{E.76}$$
$$\gamma = 1 - u + v \,, \tag{E.77}$$
$$\delta = 1 - u \,, \tag{E.78}$$
$$\epsilon = 1 - u \,, \tag{E.79}$$
$$\lambda = 1 - u \,, \tag{E.80}$$
$$M = (v-u)m_{i_2}^2 c^2 - v m_{i_3}^2 c^2 - (1-u) m_{i_4}^2 c^2 \,. \tag{E.81}$$

Umformulierung des Nenners, ergibt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_2 i_3 i_4} \iint dq_1 dq_2 \left[\left((k+q_1+q_2)^2 - m_{i_4}^2 c^2\right)\left(q_1^2 - m_{i_2}^2 c^2\right)\left(q_2^2 - m_{i_3}^2 c^2\right)\right]^{-3} \\
&= 2 \int_0^1 du \int_0^u dv \sum_{i_2 i_3 i_4} \iint dq_1 dq_2 \alpha^{-3} \left\{\left[q_1^\mu + \left(\frac{\beta}{\alpha} q_2^\mu + \frac{\delta}{\alpha} k^\mu\right)\right]^2 - R\right\}^{-3}
\end{aligned} \tag{E.82}$$

mit

$$\begin{aligned}
R &= \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}\right) q_2^2 + 2\left(\frac{\beta\delta}{\alpha^2} - \frac{\epsilon}{\alpha}\right) q_2 k + \left(\frac{\delta^2}{\alpha^2} - \frac{\lambda}{\alpha}\right) k^2 - \frac{M}{\alpha} \\
&= \alpha^{-2} \left[\left(\beta^2 - \alpha\gamma\right) q_2^2 + 2\left(\beta\delta - \alpha\epsilon\right) q_2 k + \left(\delta^2 - \alpha\lambda\right) k^2 - \alpha M\right] \,.
\end{aligned} \tag{E.83}$$

Mittels der Variablensubstitution

$$q^\mu = q_1^\mu + \left(\frac{\beta}{\alpha} q_2^\mu + \frac{\delta}{\alpha} k^\mu\right) \tag{E.84}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_2 i_3 i_4} \iint dq_1 dq_2 \left[\left((k+q_1+q_2)^2 - m_{i_4}^2 c^2\right)\left(q_1^2 - m_{i_2}^2 c^2\right)\left(q_2^2 - m_{i_3}^2 c^2\right)\right]^{-3} \\
&= 2 \int_0^1 du \int_0^u dv \sum_{i_2 i_3 i_4} \iint dq_2 dq \alpha^{-3} \left\{q^2 - R\right\}^{-3} \\
&= -2 \int_0^1 du \int_0^u dv \alpha^{-3} \sum_{i_2 i_3 i_4} \iint dq_2 dq \left\{R - q^2\right\}^{-3} \,.
\end{aligned} \tag{E.85}$$

Nach (E.63) gilt:

$$\int \frac{dp}{\left(\lambda - p^2\right)^3} = \frac{i\pi^2}{2\lambda} \ . \tag{E.86}$$

Auf die Gleichung (E.85) angewandt,führt dies zu:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_2 i_3 i_4} \iint dq_1 dq_2 \left[\left((k+q_1+q_2)^2 - m_{i_4}^2 c^2\right)\left(q_1^2 - m_{i_2}^2 c^2\right)\left(q_2^2 - m_{i_3}^2 c^2\right)\right]^{-3} \\
&= -2 \int_0^1 du \int_0^u dv \alpha^{-3} \sum_{i_2 i_3 i_4} \int dq_2 \frac{i\pi^2}{2R} \\
&= - \int_0^1 du \int_0^u dv \alpha^{-3} \sum_{i_2 i_3 i_4} \int dq_2 \frac{i\pi^2}{R} \ .
\end{aligned} \tag{E.87}$$

Einsetzen von R liefert:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_2 i_3 i_4} \iint dq_1 dq_2 \left[\left((k+q_1+q_2)^2 - m_{i_4}^2 c^2\right)\left(q_1^2 - m_{i_2}^2 c^2\right)\left(q_2^2 - m_{i_3}^2 c^2\right)\right]^{-3} \\
&= -i\pi^2 \int_0^1 du \int_0^u dv \alpha^{-3} \sum_{i_2 i_3 i_4} \int dq_2 \left\{\alpha^{-2}\left[\left(\beta^2 - \alpha\gamma\right) q_2^2 + 2\left(\beta\delta - \alpha\epsilon\right) q_2 k + \left(\delta^2 - \alpha\lambda\right) k^2 - \alpha M\right]\right\}^{-1} \\
&= -i\pi^2 \int_0^1 du \int_0^u dv \alpha^{-1} \sum_{i_2 i_3 i_4} \int dq_2 \\
&\left\{\left(\beta^2 - \alpha\gamma\right)\left[\left(q_2 + \frac{\beta\delta - \alpha\epsilon}{\beta^2 - \alpha\gamma} k\right)^2 - \left(\frac{\beta\delta - \alpha\epsilon}{\beta^2 - \alpha\epsilon}\right)^2 k^2 + \frac{\delta^2 - \alpha\lambda}{\beta^2 - \alpha\gamma} k^2 - \frac{\alpha}{\beta^2 - \alpha\gamma} M\right]\right\}^{-1} \ .
\end{aligned} \tag{E.88}$$

Mit der Variablensubstitution

$$p^\mu = q_2^\mu + \frac{\beta\delta - \alpha\epsilon}{\beta^2 - \alpha\gamma} k^\mu \tag{E.89}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_2 i_3 i_4} \iint dq_1 dq_2 \left[\left((k+q_1+q_2)^2 - m_{i_4}^2 c^2\right)\left(q_1^2 - m_{i_2}^2 c^2\right)\left(q_2^2 - m_{i_3}^2 c^2\right)\right]^{-3} \\
&= -i\pi^2 \int_0^1 du \int_0^u dv \frac{1}{\alpha\left(\beta^2 - \alpha\gamma\right)} \sum_{i_2 i_3 i_4} \int dq_2 \\
&\quad \left[p^2 - \frac{\alpha}{\beta^2 - \alpha\gamma}\left[\left(\alpha\epsilon^2 + \gamma\delta^2 + \beta^2\lambda - 2\beta\delta\epsilon - \alpha\gamma\lambda\right) k^2 - \left(\beta^2 - \alpha\gamma\right) M\right]\right]^{-1} \\
&= i\pi^2 \int_0^1 du \int_0^u dv \frac{1}{\alpha\left(\beta^2 - \alpha\gamma\right)} \sum_{i_2 i_3 i_4} \int dq_2 \left[\tilde{R} - p^2\right]^{-1}
\end{aligned} \tag{E.90}$$

mit

$$\tilde{R} = \frac{\alpha}{\beta^2 - \alpha\gamma}\left[\left(\alpha\epsilon^2 + \gamma\delta^2 + \beta^2\lambda - 2\beta\delta\epsilon - \alpha\gamma\lambda\right) k^2 - \left(\beta^2 - \alpha\gamma\right) M\right] \ . \tag{E.91}$$

Nach [26] ist

$$\int dp \frac{dp}{\left(\lambda - p^2\right)} = 2i\pi^2 \left[P^2 - \lambda \ln P + \frac{1}{2}\lambda - \lambda \ln 2 + \frac{1}{2}\lambda \ln \lambda\right] \ , \tag{E.92}$$

wobei P der Maximalimpuls darstellt, und mit $P \to \infty$ divergiert dieses Integral quadratisch. Eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_2 i_3 i_4} \iint dq_1 dq_2 \left[\left((k+q_1+q_2)^2 - m_{i_4}^2 c^2\right)\left(q_1^2 - m_{i_2}^2 c^2\right)\left(q_2^2 - m_{i_3}^2 c^2\right)\right]^{-3} \\
&= i\pi^2 \int_0^1 du \int_0^u dv \frac{1}{\alpha\left(\beta^2 - \alpha\gamma\right)} \sum_{i_2 i_3 i_4} \left\{2i\pi^2 \left[P^2 - \tilde{R}\ln P + \frac{1}{2}\tilde{R} - \tilde{R}\ln 2 + \frac{1}{2}\tilde{R}\ln\tilde{R}\right]\right\} .
\end{aligned} \tag{E.93}$$

Summation über die Hilfsfeldvariablen liefert

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_2 i_3 i_4} \iint dq_1 dq_2 \left[\left((k+q_1+q_2)^2 - m_{i_4}^2 c^2\right)\left(q_1^2 - m_{i_2}^2 c^2\right)\left(q_2^2 - m_{i_3}^2 c^2\right)\right]^{-3} \\
&= -2\pi^4 \int_0^1 du \int_0^u dv \frac{1}{\alpha\left(\beta^2 - \alpha\gamma\right)} \sum_{i_2 i_3 i_4} \left\{\frac{1}{2}\tilde{R}\ln\tilde{R}\right\} \\
&= -\pi^4 \int_0^1 du \int_0^u dv \frac{1}{\alpha\left(\beta^2 - \alpha\gamma\right)} \sum_{i_2 i_3 i_4} \left\{\tilde{R}\ln\tilde{R}\right\} .
\end{aligned} \tag{E.94}$$

Nun kann $\tilde{R}$ eingesetzt werden, sowie $\alpha, \beta, \ldots$ und die Summationen über i_2, i_3 und i_4 ausgeführt werden bzw. zunächst über u und v integriert werden.

Anhang F

Die Summation über die Hilfsfelder

Die Summation über die Hilfsfelder setzt sich aus zwei Schritten zusammen. Um eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation für die effektive Theorie zu erhalten, muß nach der Summation über die Hilfsfelder der Übergang zu gleichen Hilfsfeldmassen vollzogen werden. Dazu wird für die Hilfsfeldmassen

$$m_1 = m + \delta \ , \tag{F.1}$$
$$m_2 = m \ , \tag{F.2}$$
$$m_3 = m - \epsilon \tag{F.3}$$

gesetzt und danach der Limes $\delta \to 0$ und $\epsilon \to 0$ vollzogen. Für den folgenden Ausdruck ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\sum_i f(m_i) &= \lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0}\sum_i f(m_i) \\
&= \lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0}\left[f(m_1)+f(m_2)+f(m_3)\right] \\
&= \lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0}\left[f(m+\delta)+f(m)+f(m-\epsilon)\right] \\
&= 3f(m) \ .
\end{aligned} \tag{F.4}$$

Für einen Ausdruck mit λ_i sieht dies folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
&\sum_i \lambda_i f(m_i) \\
&\quad = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0} \quad \sum_i \lambda_i f(m_i) \\
&\quad = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0} \quad \left(\frac{1}{(m_1-m_2)c}\frac{1}{(m_1-m_3)c}f(m_1)+\frac{1}{(m_2-m_1)c}\frac{1}{(m_2-m_3)c}f(m_2)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{(m_3-m_1)c}\frac{1}{(m_3-m_2)c}f(m_3)\right) \\
&= \tfrac{1}{c^2}\lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0} \left(\frac{1}{\delta}\frac{1}{(\delta+\epsilon)}f(m+\delta)-\frac{1}{\delta}\frac{1}{\epsilon}f(m)+\frac{1}{(\delta+\epsilon)}\frac{1}{\epsilon}f(m-\epsilon)\right) \\
&= \tfrac{1}{c^2}\lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0} \left\{\frac{1}{\delta}\frac{1}{(\delta+\epsilon)}\left[f(m)+f'(m)\delta+\frac{1}{2}f''(m)\delta^2+\frac{1}{6}f^{(3)}(m)\delta^3+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(m)\delta^n+\ldots\right]\right. \\
&\qquad -\frac{1}{\delta}\frac{1}{\epsilon}f(m) \\
&\qquad \left. +\frac{1}{(\delta+\epsilon)}\frac{1}{\epsilon}\left[f(m)-f'(m)\epsilon+\frac{1}{2}f''(m)\epsilon^2-\frac{1}{6}f^{(3)}(m)\epsilon^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}f^{(n)}(m)\epsilon^n+\ldots\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{c^2}\lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0} \;\Bigg\{\left(\frac{1}{\delta}\frac{1}{(\delta+\epsilon)}+\frac{1}{(\delta+\epsilon)}\frac{1}{\epsilon}-\frac{1}{\delta}\frac{1}{\epsilon}\right)f(m)\\
&\qquad +\left(\frac{1}{\delta}\frac{1}{(\delta+\epsilon)}\delta-\frac{1}{(\delta+\epsilon)}\frac{1}{\epsilon}\epsilon\right)f'(m)\\
&\qquad +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta}\frac{1}{(\delta+\epsilon)}\delta^2+\frac{1}{(\delta+\epsilon)}\frac{1}{\epsilon}\epsilon^2\right)f''(m)\\
&\qquad +\frac{1}{6}\left(\frac{\delta^2}{(\delta+\epsilon)}-\frac{\epsilon^2}{(\delta+\epsilon)}\right)f^{(3)}(m)+\ldots\\
&\qquad +\frac{1}{n!}\left(\frac{\delta^{n-1}}{(\delta+\epsilon)}+\frac{(-1)^n\epsilon^{n-1}}{(\delta+\epsilon)}\right)f^{(n)}(m)+\ldots\Bigg\}\\
&= \tfrac{1}{c^2}\lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0} \;\Bigg\{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{(\delta+\epsilon)}+\frac{\epsilon}{(\delta+\epsilon)}\right)f''(m)\\
&\qquad +\frac{1}{6}\frac{\delta^2-\epsilon^2}{(\delta+\epsilon)}f^{(3)}(m)+\ldots\\
&\qquad +\frac{1}{n!}\frac{\delta^{n-1}+(-1)^n\epsilon^{n-1}}{(\delta+\epsilon)}f^{(n)}(m)+\ldots\Bigg\}\\
&= \tfrac{1}{c^2}\lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0} \;\left\{\frac{1}{2}f''(m)+\frac{1}{6}f^{(3)}(m)\,(\delta-\epsilon)+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(m)\frac{\delta^{n-1}+(-1)^n\epsilon^{n-1}}{(\delta+\epsilon)}+\ldots\right\}\\
&= \quad \tfrac{1}{c^2}\;\lim_{\delta\to 0} \qquad \left\{\frac{1}{2}f''(m)+\frac{1}{6}f^{(3)}(m)\delta+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(m)\delta^{n-2}+\ldots\right\}\\
&= \quad \tfrac{1}{2c^2}\;f''(m)\;.
\end{aligned}
\tag{F.5}
$$

Damit gilt die Formel:

$$
\boxed{\sum_i \lambda_i f(m_i) \;=\; \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial m_i^2}\,f(m_i)_{|m_i=m}\;.} \tag{F.6}
$$

Anhang G

Ableitung der Nebenbedingungen

G.1 Ableitung der Stromerhaltung

Der Strom $j^k(\mathbf{r},t)$ ist durch Gleichung (8.85) gegeben. Er lautet:

$$\begin{aligned} j_a^k(\mathbf{r},t) &= q : \bar{\Psi}_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t) \left(\gamma^k\right)_{\alpha\alpha'} (T^a)_{cc'} \Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t) : \\ &= \frac{q}{2}\left[\gamma^k_{\alpha\alpha'} T^a_{cc'} \bar{\Psi}_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\, \Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t) - \gamma^k_{\alpha'\alpha} T^a_{c'c} \Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\, \bar{\Psi}_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\right] . \end{aligned} \tag{G.1}$$

Wird die Größe $\partial_k j_a^k(\mathbf{r},t)$ berechnet, so entsteht folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} \partial_k j_a^k(\mathbf{r},t) &= \partial_k \left[\frac{q}{2}\gamma^k_{\alpha\alpha'} T^a_{cc'} \bar{\Psi}_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\, \Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t) - \frac{q}{2}\gamma^k_{\alpha'\alpha} T^a_{c'c} \Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\, \bar{\Psi}_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\right] \\ &= \frac{q}{2}\gamma^k_{\alpha\alpha'} T^a_{cc'} \left(\partial_k \bar{\Psi}_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\right) \Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t) \\ &\quad + \frac{q}{2}\gamma^k_{\alpha\alpha'} T^a_{cc'} \bar{\Psi}_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t) \left(\partial_k \Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\right) \\ &\quad - \frac{q}{2}\gamma^k_{\alpha'\alpha} T^a_{c'c} \left(\partial_k \Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\right) \bar{\Psi}_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t) \\ &\quad - \frac{q}{2}\gamma^k_{\alpha'\alpha} T^a_{c'c} \Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t) \left(\partial_k \bar{\Psi}_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\right) . \end{aligned} \tag{G.2}$$

Die Berechnung der Ableitungen geschieht durch die Benutzung der Gleichungen (8.83) und (8.84). Multiplikation von links in Gleichung (8.83) mit γ^0 bzw. von rechts mit γ^0 in Gleichung (8.84) führt auf:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\gamma^0_{\alpha\alpha'} \Psi_{\alpha',c,A}(\mathbf{r},t) = -\left[\gamma^k \partial_k + \frac{imc}{\hbar}\right]_{\alpha\beta} \Psi_{\beta,c,A}(\mathbf{r},t) + i\frac{q}{\hbar c} T^a_{cc'} \gamma^l_{\alpha\beta} \Psi_{\beta,c',A}(\mathbf{r},t)\, A_{l,a}(\mathbf{r},t) \tag{G.3}$$

und umgeformt:

$$\gamma^k_{\alpha\beta}\partial_k \Psi_{\beta,c,A}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\gamma^0_{\alpha\alpha'} \Psi_{\alpha',c,A}(\mathbf{r},t) - \frac{imc}{\hbar}\Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t) + i\frac{q}{\hbar c} T^a_{cc'} \gamma^l_{\alpha\beta} \Psi_{\beta,c',A}(\mathbf{r},t)\, A_{l,a}(\mathbf{r},t) , \tag{G.4}$$

sowie

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Psi}_{\beta,c,A}(\mathbf{r},t)\, \gamma^0_{\beta\alpha} = -\left[\gamma^k \partial_k - \frac{imc}{\hbar}\right]_{\beta\alpha} \bar{\Psi}_{\beta,c,A}(\mathbf{r},t) - i\frac{q}{\hbar c} T^a_{c'c} \gamma^l_{\beta\alpha} \bar{\Psi}_{\beta,c',A}(\mathbf{r},t)\, A_{l,a}(\mathbf{r},t) \tag{G.5}$$

und umgeformt:

$$\gamma^k_{\beta\alpha}\partial_k \bar{\Psi}_{\beta,c,A}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\gamma^0_{\beta\alpha} \bar{\Psi}_{\beta,c,A}(\mathbf{r},t) + \frac{imc}{\hbar}\bar{\Psi}_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t) - i\frac{q}{\hbar c} T^a_{c'c} \gamma^l_{\beta\alpha} \bar{\Psi}_{\beta,c',A}(\mathbf{r},t)\, A_{l,a}(\mathbf{r},t) . \tag{G.6}$$

Werden die Indizes umbenannt, so können die beiden Gleichungen (G.4) und (G.6) in (G.2) eingesetzt werden. Es entsteht:

$$\begin{aligned}
\partial_k j_a^k(\mathbf{r},t) = &-\frac{q}{2}T^a_{cc'}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\gamma^0_{\beta\alpha'}\bar{\Psi}_{\beta,c,A}(\mathbf{r},t)\right)\Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\\
&+\frac{q}{2}T^a_{cc'}\frac{imc}{\hbar}\bar{\Psi}_{\alpha',c,A}(\mathbf{r},t)\,\Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\\
&-\frac{q}{2}T^a_{cc'}i\frac{q}{\hbar c}T^b_{fc}\gamma^l_{\beta\alpha'}\bar{\Psi}_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t)\,A_{l,b}(\mathbf{r},t)\,\Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\\
&-\frac{q}{2}T^a_{cc'}\bar{\Psi}_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\gamma^0_{\alpha\alpha'}\Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\right)\\
&-\frac{q}{2}T^a_{cc'}\bar{\Psi}_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\,\frac{imc}{\hbar}\Psi_{\alpha,c',A}(\mathbf{r},t)\\
&+\frac{q}{2}T^a_{cc'}\bar{\Psi}_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\,i\frac{q}{\hbar c}T^b_{c'f}\gamma^l_{\alpha\beta}\Psi_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t)\,A_{l,b}(\mathbf{r},t)\\
&+\frac{q}{2}T^a_{c'c}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\gamma^0_{\alpha'\alpha}\Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\right)\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\\
&+\frac{q}{2}T^a_{c'c}\frac{imc}{\hbar}\Psi_{\alpha',c,A}(\mathbf{r},t)\,\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\\
&-\frac{q}{2}T^a_{c'c}i\frac{q}{\hbar c}T^b_{cf}\gamma^l_{\alpha'\beta}\Psi_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t)\,A_{l,b}(\mathbf{r},t)\,\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\\
&+\frac{q}{2}T^a_{c'c}\Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\gamma^0_{\beta\alpha}\bar{\Psi}_{\beta,c',A}(\mathbf{r},t)\right)\\
&-\frac{q}{2}T^a_{c'c}\Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\,\frac{imc}{\hbar}\bar{\Psi}_{\alpha,c',A}(\mathbf{r},t)\\
&+\frac{q}{2}T^a_{c'c}\Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\,i\frac{q}{\hbar c}T^b_{fc'}\gamma^l_{\beta\alpha}\bar{\Psi}_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t)\,A_{l,b}(\mathbf{r},t)\ .
\end{aligned}\tag{G.7}$$

Die Massenterme heben sich heraus. Zusammengefaßt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\partial_k j_a^k(\mathbf{r},t) = &-\frac{q}{2}\gamma^0_{\beta\alpha'}T^a_{cc'}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Psi}_{\beta,c,A}(\mathbf{r},t)\right)\Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\\
&-i\frac{q}{\hbar c}\frac{q}{2}\gamma^l_{\beta\alpha'}\left(T^bT^a\right)_{fc'}\bar{\Psi}_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t)\,A_{l,b}(\mathbf{r},t)\,\Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\\
&-\frac{q}{2}\gamma^0_{\alpha\alpha'}T^a_{cc'}\bar{\Psi}_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\right)\\
&+i\frac{q}{\hbar c}\frac{q}{2}\gamma^l_{\alpha\beta}\left(T^aT^b\right)_{cf}\bar{\Psi}_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\,\Psi_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t)\,A_{l,b}(\mathbf{r},t)\\
&+\frac{q}{2}\gamma^0_{\alpha'\alpha}T^a_{c'c}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\right)\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\\
&-i\frac{q}{\hbar c}\frac{q}{2}\gamma^l_{\alpha'\beta}\left(T^aT^b\right)_{c'f}\Psi_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t)\,\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\,A_{l,b}(\mathbf{r},t)\\
&+\frac{q}{2}\gamma^0_{\beta\alpha}T^a_{c'c}\Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Psi}_{\beta,c',A}(\mathbf{r},t)\right)\\
&+i\frac{q}{\hbar c}\frac{q}{2}\gamma^l_{\beta\alpha}\left(T^bT^a\right)_{fc}\Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\,\bar{\Psi}_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t)\,A_{l,b}(\mathbf{r},t)\ .
\end{aligned}\tag{G.8}$$

Umbenennen der Indizes ergibt:

$$\begin{aligned}
\partial_k j_a^k(\mathbf{r},t) = &-\frac{q}{2}\gamma^0_{\beta\alpha'}T^a_{cc'}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\Psi}_{\beta,c,A}(\mathbf{r},t)\Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\right)\\
&-i\frac{q}{\hbar c}\frac{q}{2}\gamma^l_{\beta\alpha'}\left[\left(T^bT^a\right)-\left(T^aT^b\right)\right]_{fc'}\bar{\Psi}_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t)\,A_{l,b}(\mathbf{r},t)\,\Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)
\end{aligned}$$

$$+\frac{q}{2}\gamma^0_{\alpha'\alpha}T^a_{c'c}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\right)$$
$$-i\frac{q}{\hbar c}\frac{q}{2}\gamma^l_{\alpha'\beta}\left[\left(T^aT^b\right)-\left(T^bT^a\right)\right]_{c'f}\Psi_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t)\,\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\,A_{l,b}(\mathbf{r},t)\ . \tag{G.9}$$

Es gilt nach (B.16)

$$\lambda^a\lambda^b-\lambda^b\lambda^a=2if^{abc}\lambda^c\ . \tag{G.10}$$

Für die Generatoren T lautet dies:

$$T^aT^b-T^bT^a=if^{abc}T^c\ . \tag{G.11}$$

Mit

$$j^0_a=\frac{q}{2}\left[\gamma^0_{\alpha\alpha'}T^a_{cc'}\bar{\Psi}_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)-\gamma^0_{\alpha'\alpha}T^a_{c'c}\Psi_{\alpha,c,A}(\mathbf{r},t)\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\right] \tag{G.12}$$

und mit (G.11) ergibt sich

$$\begin{aligned}\partial_k j^k_a(\mathbf{r},t)&=-\partial_0 j^0_a+\frac{q}{\hbar c}\frac{q}{2}\gamma^l_{\beta\alpha'}f^{bac}T^c_{fc'}\bar{\Psi}_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t)\,A_{l,b}(\mathbf{r},t)\,\Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\\&\quad+\frac{q}{\hbar c}\frac{q}{2}\gamma^l_{\alpha'\beta}f^{abc}T^c_{c'f}\Psi_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t)\,\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\,A_{l,b}(\mathbf{r},t)\\&=-\partial_0 j^0_a\\&\quad-\frac{q}{\hbar c}f^{abc}A_{l,b}(\mathbf{r},t)\left[\frac{q}{2}\gamma^l_{\beta\alpha'}T^c_{fc'}\bar{\Psi}_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t)\,\Psi_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)-\frac{q}{2}\gamma^l_{\alpha'\beta}T^c_{c'f}\Psi_{\beta,f,A}(\mathbf{r},t)\,\bar{\Psi}_{\alpha',c',A}(\mathbf{r},t)\right]\\&=-\partial_0 j^0_a(\mathbf{r},t)-\frac{q}{\hbar c}f^{abc}A_{l,b}(\mathbf{r},t)\,j^l_c(\mathbf{r},t)\ .\end{aligned} \tag{G.13}$$

Insgesamt ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^\mu(\mathbf{r},t)&=-\frac{q}{\hbar c}f^{abc}A_{l,b}(\mathbf{r},t)\,j^l_c(\mathbf{r},t)\\&=\frac{q}{\hbar c}f^{abc}A^l_b(\mathbf{r},t)\,j^l_c(\mathbf{r},t)\ .\end{aligned} \tag{G.14}$$

G.2 Ableitung der Nebenbedingung (8.88)

Die Nebenbedingung (8.88) lautet:

$$\mathbf{B}_a=\nabla\times\mathbf{A}_a-\frac{1}{2}\frac{q}{\hbar c}f^{abc}\mathbf{A}_b\times\mathbf{A}_c\ . \tag{G.15}$$

Wird die Feldgleichung (8.82)

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B^i_a(\mathbf{r},t)=-\epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})E^k_a(\mathbf{r},t)+\frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}E^j_b(\mathbf{r},t)A^k_c(\mathbf{r},t) \tag{G.16}$$

betrachtet und die Feldgleichung (8.80)

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^i_a(\mathbf{r},t)=-E^i_a(\mathbf{r},t) \tag{G.17}$$

eingesetzt, so lautet das Resultat:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B^i_a(\mathbf{r},t)&=-\epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^k_a(\mathbf{r},t)\right)+\frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^j_b(\mathbf{r},t)\right)A^k_c(\mathbf{r},t)\\&=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})A^k_a(\mathbf{r},t)\right)-\frac{1}{2}\frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^j_b\right)A^k_c\\&\quad-\frac{1}{2}\frac{q}{\hbar c}f^{acb}\epsilon_{ikj}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^j_b\right)A^k_c\ .\end{aligned} \tag{G.18}$$

Umgeformt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}B_a^i(\mathbf{r},t) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})A_a^k(\mathbf{r},t)\Big) - \frac{1}{2}\frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial t}A_b^j\right)A_c^k - \frac{1}{2}\frac{q}{\hbar c}f^{acb}\epsilon_{ikj}A_c^k\left(\frac{\partial}{\partial t}A_b^j\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})A_a^k(\mathbf{r},t)\Big) - \frac{1}{2}\frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial t}A_b^j\right)A_c^k - \frac{1}{2}\frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}A_b^j\left(\frac{\partial}{\partial t}A_c^k\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})A_a^k(\mathbf{r},t)\Big) - \frac{1}{2}\frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial t}\left(A_b^jA_c^k\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})A_a^k(\mathbf{r},t) - \frac{1}{2}\frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}A_b^jA_c^k\right) . \qquad \text{(G.19)}
\end{aligned}$$

Daraus wird mit der Integrationskonstanten $c = 0$:

$$B_a^i = \epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})A_a^k(\mathbf{r},t) - \frac{1}{2}\frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}A_b^jA_c^k . \qquad \text{(G.20)}$$

G.3 Das Gauß-Gesetz

Die Gleichung (8.81) lautet:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E_a^i(\mathbf{r},t) = \epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{r})B_a^k(\mathbf{r},t) - \frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}A_b^j(\mathbf{r},t)B_c^k(\mathbf{r},t) + j_a^i(\mathbf{r},t) . \qquad \text{(G.21)}$$

Wird die Divergenz gebildet, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\partial_i(\mathbf{r})E_a^i(\mathbf{r},t) &= \epsilon_{ijk}\partial_i(\mathbf{r})\partial_j(\mathbf{r})B_a^k(\mathbf{r},t) - \frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}\partial_i(\mathbf{r})\left(A_b^j(\mathbf{r},t)B_c^k(\mathbf{r},t)\right) + \partial_i(\mathbf{r})j_a^i \\
&= -\frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}\left(\partial_i(\mathbf{r})A_b^j(\mathbf{r},t)\right)B_c^k(\mathbf{r},t) - \frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}A_b^j(\mathbf{r},t)\left(\partial_i(\mathbf{r})B_c^k(\mathbf{r},t)\right) + \partial_i(\mathbf{r})j_a^i \\
&= -\frac{q}{\hbar c}f^{abc}\left(\epsilon_{kij}\partial_i(\mathbf{r})A_b^j(\mathbf{r},t)\right)B_c^k(\mathbf{r},t) + \frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{jik}A_b^j(\mathbf{r},t)\left(\partial_i(\mathbf{r})B_c^k(\mathbf{r},t)\right) + \partial_i(\mathbf{r})j_a^i \\
&= -\frac{q}{\hbar c}f^{abc}\left(B_b^k + \frac{1}{2}\frac{q}{\hbar c}f^{bxy}\epsilon_{klm}A_x^lA_y^m\right)B_c^k(\mathbf{r},t) \\
&\quad + \frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}A_b^i(\mathbf{r},t)\left(\partial_j(\mathbf{r})B_c^k(\mathbf{r},t)\right) + \partial_i(\mathbf{r})j_a^i \\
&= -\frac{q}{\hbar c}f^{abc}\left(B_b^k(\mathbf{r},t)B_c^k(\mathbf{r},t) + \frac{1}{2}\frac{q}{\hbar c}f^{bxy}\epsilon_{klm}A_x^lA_y^mB_c^k(\mathbf{r},t)\right) \\
&\quad + \frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}A_b^i(\mathbf{r},t)\left(\partial_j(\mathbf{r})B_c^k(\mathbf{r},t)\right) + \partial_i(\mathbf{r})j_a^i \\
&= -\frac{1}{2}\frac{q^2}{\hbar^2c^2}\left(f^{abc}f^{bxy}\right)\epsilon_{klm}A_x^lA_y^mB_c^k(\mathbf{r},t) \\
&\quad + \frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}A_b^i(\mathbf{r},t)\left(\partial_j(\mathbf{r})B_c^k(\mathbf{r},t)\right) + \partial_i(\mathbf{r})j_a^i \\
&= +\frac{1}{2}\frac{q^2}{\hbar^2c^2}\left(f^{axb}f^{bcy} - f^{bxc}f^{aby}\right)\epsilon_{klm}A_x^lA_y^mB_c^k(\mathbf{r},t) \\
&\quad + \frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}A_b^i(\mathbf{r},t)\left(\partial_j(\mathbf{r})B_c^k(\mathbf{r},t)\right) + \partial_i(\mathbf{r})j_a^i \\
&= \frac{1}{2}\frac{q^2}{\hbar^2c^2}f^{axb}f^{bcy}\epsilon_{klm}A_x^lA_y^mB_c^k(\mathbf{r},t) - \frac{1}{2}\frac{q^2}{\hbar^2c^2}f^{bxc}f^{aby}\epsilon_{klm}A_x^lA_y^mB_c^k(\mathbf{r},t) \\
&\quad + \frac{q}{\hbar c}f^{abc}\epsilon_{ijk}A_b^i(\mathbf{r},t)\left(\partial_j(\mathbf{r})B_c^k(\mathbf{r},t)\right) + \partial_i(\mathbf{r})j_a^i \\
&= \frac{1}{2}\frac{q^2}{\hbar^2c^2}f^{axb}A_x^lf^{bcy}\epsilon_{lmk}A_y^mB_c^k(\mathbf{r},t) + \frac{1}{2}\frac{q^2}{\hbar^2c^2}f^{ayc}A_y^mf^{bxc}\epsilon_{mkl}A_x^lB_c^k(\mathbf{r},t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{q}{\hbar c} f^{abc} \epsilon_{ijk} A_b^i(\mathbf{r},t) \left(\partial_j(\mathbf{r}) B_c^k(\mathbf{r},t)\right) + \partial_i(\mathbf{r}) j_a^i \\
=& -\frac{1}{2}\frac{q^2}{\hbar^2 c^2} f^{axb} A_x^l f^{byc} \epsilon_{lmk} A_y^m B_c^k(\mathbf{r},t) - \frac{1}{2}\frac{q^2}{\hbar^2 c^2} f^{ayb} A_y^m f^{bxc} \epsilon_{mkl} A_x^l B_c^k(\mathbf{r},t) \\
&+\frac{q}{\hbar c} f^{abc} \epsilon_{ijk} A_b^i(\mathbf{r},t) \left(\partial_j(\mathbf{r}) B_c^k(\mathbf{r},t)\right) + \partial_i(\mathbf{r}) j_a^i \\
=& -\frac{1}{2}\frac{q^2}{\hbar^2 c^2} f^{abc} A_b^i f^{cde} \epsilon_{ijk} A_d^j B_e^k(\mathbf{r},t) - \frac{1}{2}\frac{q^2}{\hbar^2 c^2} f^{abc} A_b^i f^{cde} \epsilon_{ijk} A_d^j B_e^k(\mathbf{r},t) \\
&+\frac{q}{\hbar c} f^{abc} \epsilon_{ijk} A_b^i(\mathbf{r},t) \left(\partial_j(\mathbf{r}) B_c^k(\mathbf{r},t)\right) + \partial_i(\mathbf{r}) j_a^i \\
=& -\frac{q^2}{\hbar^2 c^2} f^{abc} A_b^i f^{cde} \epsilon_{ijk} A_d^j B_e^k(\mathbf{r},t) + \frac{q}{\hbar c} f^{abc} \epsilon_{ijk} A_b^i(\mathbf{r},t) \left(\partial_j(\mathbf{r}) B_c^k(\mathbf{r},t)\right) + \partial_i(\mathbf{r}) j_a^i \\
=& \frac{q}{\hbar c} f^{abc} A_b^i(\mathbf{r},t) \left(\epsilon_{ijk} \partial_j(\mathbf{r}) B_c^k(\mathbf{r},t) - \frac{q}{\hbar c} f^{cde} \epsilon_{ijk} A_d^j B_e^k(\mathbf{r},t) + j_c^i\right) \\
&-\frac{q}{\hbar c} f^{abc} A_b^i(\mathbf{r},t) j_c^i + \partial_i(\mathbf{r}) j_a^i \\
=& \frac{q}{\hbar c} f^{abc} A_b^i(\mathbf{r},t) \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} E_c^i(\mathbf{r},t)\right) - \partial_0(\mathbf{r}) j_a^0 \; .
\end{aligned}
\tag{G.22}
$$

Dies ergibt *

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\partial_i(\mathbf{r}) E_a^i(\mathbf{r},t) - \frac{q}{\hbar c} f^{abc} A_b^i(\mathbf{r},t) E_c^i(\mathbf{r},t) + j_a^0\right) = 0 \tag{G.23}
$$

und damit

$$
\partial_i(\mathbf{r}) E_a^i(\mathbf{r},t) - \frac{q}{\hbar c} f^{abc} A_b^i(\mathbf{r},t) E_c^i(\mathbf{r},t) + j_a^0 = 0 \; . \tag{G.24}
$$

---

*Es gilt:

$$
\begin{aligned}
f^{abc} \frac{\partial}{\partial t}\left(A_b^i(\mathbf{r},t)\, E_c^i(\mathbf{r},t)\right) &= f^{abc} \left(\frac{\partial}{\partial t} A_b^i(\mathbf{r},t)\right) E_c^i(\mathbf{r},t) + f^{abc}\, A_b^i(\mathbf{r},t) \frac{\partial}{\partial t} E_c^i(\mathbf{r},t) \\
&= -f^{abc}\, E_b^i(\mathbf{r},t)\, E_c^i(\mathbf{r},t) + f^{abc}\, A_b^i(\mathbf{r},t) \frac{\partial}{\partial t} E_c^i(\mathbf{r},t) \\
&= f^{abc}\, A_b^i(\mathbf{r},t) \frac{\partial}{\partial t} E_c^i(\mathbf{r},t) \; .
\end{aligned}
$$

Anhang H

Abschätzung der Terme der Schwachen Abbildung

Die verschiedenen Anteile des abgebildeten Hamiltonoperators können abgeschätzt werden, indem die Massenpotenz der einzelnen Anteile bestimmt wird. Unter der Annahme, daß m sehr groß wird, können die Terme mit negativen Massenpotenzen vernachlässigt werden, da die Masse m der einzige Parameter in den Integralen ist.
Weitere Voraussetzung ist, daß alle auftretenden Integrale existieren.
Die Bestimmung der Massenpotenz geschieht durch Bestimmung der Einheiten des auszuwertenden Terms. Wird der Term:

$$6\hat{W}_{I_1\{I_2I_3I_4\}}F^{(t)}_{I_4K}C^{I_2I_3}_{2,q'}R^{2,q}_{I_1K}b^F_{l\nu,a}(\mathbf{q})\partial^A_{i,b}(\mathbf{q}') = \alpha \int d\mathbf{r}\ b^F_{l0,a}(\mathbf{r})\ \partial^A_{l,a}(\mathbf{r}) \tag{H.1}$$

betrachtet, so kann die Einheit von α aus den Einheiten von b^F und ∂^A bestimmt werden, da der gesamte Term die Einheit der Energie trägt.
Nach der Tabelle in Anhang D gilt für die Einheiten von b^F und ∂^A:

$$\left[b^F(\mathbf{r})\right] = 1\ , \tag{H.2}$$
$$\left[\partial^A(\mathbf{r})\right] = 1\ , \tag{H.3}$$

und für die Energie und $\int d\mathbf{r}$ gilt:

$$[Energie] = 1\ , \tag{H.4}$$
$$\left[\int d\mathbf{r}\right] = -3\ . \tag{H.5}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}[\alpha] &= [Energie] - \left[\int d\mathbf{r}\right] - \left[b^F(\mathbf{r})\right] - \left[\partial^A(\mathbf{r})\right] \\ &= 2\ . \end{aligned} \tag{H.6}$$

Dies entspricht einer Massenabhängigkeit von m^2. Wird dieses Ergebnis mit (7.120) verglichen, so ergibt sich für α der Wert $-i\frac{10m^2c^3}{\hbar}$, der eine Massenabhängigkeit von m^2 bedeutet.

In der Tabelle (H.2) sind für alle Terme die Massenabhängigkeit, d.h. $[\alpha]$ aufgelistet. Terme mit $[\alpha] < 0$ werden vernachlässigt. Die Terme mit Massenpotenzen $[\alpha] \geq 0$, die in Kapitel 7 nicht ausgewertet wurden, lauten:

$$\hat{W}(3F^tF^t + \frac{1}{4}AA)C^AR^AR^Fb^Ab^F\partial^A \ (7.13)\ , \tag{H.7}$$

$$\hat{W}(3F^tF^t + \frac{1}{4}AA)C^AR^FR^Fb^Fb^F\partial^A \ (7.13)\ , \tag{H.8}$$

$$\hat{W}(3F^tF^t + \frac{1}{4}AA)C^FR^FR^Fb^Fb^F\partial^F \ (7.13)\ , \tag{H.9}$$

$$\hat{W}F^tC^AC^AR^AR^Ab^Fb^F\partial^A\partial^A \ (7.10)\ , \tag{H.10}$$

$$\hat{W}(3F^tF^t + \frac{1}{4}AA)C^fR^fR^Ffb^F\partial^f \ (7.14)\ , \tag{H.11}$$

$$\hat{W}(3F^tF^t + \frac{1}{4}AA)F^tR^AR^Ab^Ab^A \ (7.15)\ , \tag{H.12}$$

$$\hat{W}(3F^tF^t + \frac{1}{4}AA)F^tR^AR^Fb^Ab^F \ (7.15)\ , \tag{H.13}$$

$$\hat{W}(3F^tF^t + \frac{1}{4}AA)F^tR^FR^Fb^Fb^F \ (7.15)\ . \tag{H.14}$$

Werden die Spuren der einzelnen Terme betrachtet, so verschwinden die Terme (H.7), (H.9), (H.10), (H.12) und (H.14). Somit bleiben nur die drei Quantisierungsterme

$$\hat{W}(3F^tF^t + \frac{1}{4}AA)C^AR^FR^Fb^Fb^F\partial^A\ , \tag{H.15}$$

$$\hat{W}(3F^tF^t + \frac{1}{4}AA)C^fR^fR^Ffb^F\partial^f\ , \tag{H.16}$$

$$\hat{W}(3F^tF^t + \frac{1}{4}AA)F^tR^AR^Fb^Ab^F \tag{H.17}$$

übrig.
Werden also alle Terme mit negativer Massenpotenz vernachlässigt und für die übrigen Terme die Spuren über die γ-Matrizen betrachtet, so bleiben schließlich nur die in Kapitel 7 ausgewerteten Terme sowie die drei Quantisierungsterme (H.15)-(H.17) übrig.
In der Tabelle (H.2) sind alle Terme aufgelistet, die Erklärung der Abkürzungen in der Spalte "Bemerkung" sind in folgender Tabelle aufgelistet:

J	explizit ausgewertet
N	explizit abgeschätzt und vernachlässigt aufgrund negativer Massenpotenz
Sp	Spur verschwindet
K	Term verschwindet aufgrund der skalaren und pseudoskalaren Kopplung
Q	Quantisierungsterm*

Tabelle H.1: Erlärungen zur Spalte "Bemerkung" der Tabelle (H.2)

*In [13] wird der Quantisierungsterm (H.15) behandelt.

Tabelle H.2: Die einzelnen Terme des effektiven Hamiltonoperators H_{eff} und deren Abschätzung

Term	Formelnummer	Physikalische Interpretation	$[\alpha]$	Bemerkung
$\hat{K}_{I_1 I_2} C^{I_2}_{1,l_1} R^{1,l_2}_{I_1} f_{l_2} \partial^f_{l_1}$	(7.2)	Kinet. Energie der Quarks	1	J
$\hat{W} CCCR f_{l_4} \partial^f_{l_1} \partial^f_{l_2} \partial^f_{l_3}$	(7.8)	Selbstwechselwirkung der Quarks*	-2	J
$\hat{K} C^A R^A b^A \partial^A$	(7.1)	Kinet. Energie der Gluonen	1	Sp
$\hat{K} C^F R^A b^A \partial^F$	(7.1)	Kinet. Energie der Gluonen	0	J
$\hat{K} C^A R^F b^F \partial^A$	(7.1)	Kinet. Energie der Gluonen	2	J
$\hat{K} C^F R^F b^F \partial^F$	(7.1)	Kinet. Energie der Gluonen	0	J
$\hat{W} F^{(t)} C^A R^A b^A \partial^A$	(7.9)	Massenkorrekturterm	1	Sp
$\hat{W} F^{(t)} C^F R^A b^A \partial^F$	(7.9)	Massenkorrekturterm	0	K
$\hat{W} F^{(t)} C^A R^F b^F \partial^A$	(7.9)	Massenkorrekturterm	2	J
$\hat{W} F^{(t)} C^F R^F b^F \partial^F$	(7.9)	Massenkorrekturterm	0	K
$\hat{W} C^A C^A R^A b^A \partial^A \partial^A$	(7.3)	Selbstwechselwirkung der Gluonen	0	Sp
$\hat{W} C^A C^A R^A b^A \partial^A \partial^F$	(7.3)	Selbstwechselwirkung der Gluonen	-1	Sp
$\hat{W} C^A C^A R^A b^A \partial^F \partial^F$	(7.3)	Selbstwechselwirkung der Gluonen	-2	K
$\hat{W} C^A C^A R^A b^F \partial^A \partial^A$	(7.3)	Selbstwechselwirkung der Gluonen	1	Sp
$\hat{W} C^A C^A R^A b^F \partial^A \partial^F$	(7.3)	Selbstwechselwirkung der Gluonen	0	J
$\hat{W} C^A C^A R^A b^F \partial^F \partial^F$	(7.3)	Selbstwechselwirkung der Gluonen	-1	K
$\hat{W}(3F^t F^t + \frac{1}{4}AA) C^A R^A R^A b^A b^A \partial^A$	(7.13)	Quantisierungsterm	-1	Sp
$\hat{W}(3F^t F^t + \frac{1}{4}AA) C^A R^A R^F b^A b^F \partial^A$	(7.13)	Quantisierungsterm	0	Sp
$\hat{W}(3F^t F^t + \frac{1}{4}AA) C^A R^F R^F b^F b^F \partial^A$	(7.13)	Quantisierungsterm	1	Q
$\hat{W}(3F^t F^t + \frac{1}{4}AA) C^F R^A R^A b^A b^A \partial^F$	(7.13)	Quantisierungsterm	-2	N
$\hat{W}(3F^t F^t + \frac{1}{4}AA) C^F R^A R^F b^A b^F \partial^F$	(7.13)	Quantisierungsterm	-1	N
$\hat{W}(3F^t F^t + \frac{1}{4}AA) C^F R^F R^F b^F b^F \partial^F$	(7.13)	Quantisierungsterm	0	Sp

*Für die Subfermionen ist die Selbstwechselwirkung wichtig, für die Quarks wird sie unterdrückt, weil die Quarks eine kinetische Energie erster Ordnung haben, im Gegensatz zu den Subfermionen, deren kinetische Energie von dritter Ordnung ist.

Term	Formelnummer	Physikalische Interpretation	$[\alpha]$	Bemerkung
$\hat{W} F^t C^A C^A R^A R^A b^A b^A \partial^A \partial^A$	(7.10)	Polarisationsterm	-2	Sp
$\hat{W} F^t C^A C^F R^A R^A b^A b^A \partial^A \partial^F$	(7.10)	Polarisationsterm	-3	N
$\hat{W} F^t C^F C^F R^A R^A b^A b^A \partial^F \partial^F$	(7.10)	Polarisationsterm	-4	Sp
$\hat{W} F^t C^A C^A R^A R^F b^A b^F \partial^A \partial^A$	(7.10)	Polarisationsterm	-1	N
$\hat{W} F^t C^A C^F R^A R^F b^A b^F \partial^A \partial^F$	(7.10)	Polarisationsterm	-2	Sp
$\hat{W} F^t C^F C^F R^A R^F b^A b^F \partial^F \partial^F$	(7.10)	Polarisationsterm	-3	N
$\hat{W} F^t C^A C^A R^F R^F b^F b^F \partial^A \partial^A$	(7.10)	Polarisationsterm	0	Sp
$\hat{W} F^t C^A C^F R^F R^F b^F b^F \partial^A \partial^F$	(7.10)	Polarisationsterm	-1	N
$\hat{W} F^t C^F C^F R^F R^F b^F b^F \partial^F \partial^F$	(7.10)	Polarisationsterm	-2	Sp
$\hat{W} C^A C^A C^A R^A R^A b^A b^A \partial^A \partial^A \partial^A$	(7.5)	Polarisationsterm	-3	Sp
$\hat{W} C^A C^A C^F R^A R^A b^A b^A \partial^A \partial^A \partial^F$	(7.5)	Polarisationsterm	-4	Sp
$\hat{W} C^A C^F C^F R^A R^A b^A b^A \partial^A \partial^F \partial^F$	(7.5)	Polarisationsterm	-5	N
$\hat{W} C^F C^F C^F R^A R^A b^A b^A \partial^F \partial^F \partial^F$	(7.5)	Polarisationsterm	-6	Sp
$\hat{W} C^A C^A C^A R^A R^F b^A b^F \partial^A \partial^A \partial^A$	(7.5)	Polarisationsterm	-2	Sp
$\hat{W} C^A C^A C^F R^A R^F b^A b^F \partial^A \partial^A \partial^F$	(7.5)	Polarisationsterm	-3	N
$\hat{W} C^A C^F C^F R^A R^F b^A b^F \partial^A \partial^F \partial^F$	(7.5)	Polarisationsterm	-4	Sp
$\hat{W} C^F C^F C^F R^A R^F b^A b^F \partial^F \partial^F \partial^F$	(7.5)	Polarisationsterm	-5	N
$\hat{W} C^A C^A C^A R^F R^F b^F b^F \partial^A \partial^A \partial^A$	(7.5)	Polarisationsterm	-1	N
$\hat{W} C^A C^A C^F R^F R^F b^F b^F \partial^A \partial^A \partial^F$	(7.5)	Polarisationsterm	-2	Sp
$\hat{W} C^A C^F C^F R^F R^F b^F b^F \partial^A \partial^F \partial^F$	(7.5)	Polarisationsterm	-3	N
$\hat{W} C^F C^F C^F R^F R^F b^F b^F \partial^F \partial^F \partial^F$	(7.5)	Polarisationsterm	-4	Sp
$\hat{W} C^A C^f R^f f \partial^A \partial^f$	(7.4)	Ankopplung der Gluonen an die Quarks	0	J
$\hat{W} C^F C^f R^f f \partial^F \partial^f$	(7.4)	Ankopplung der Gluonen an die Quarks	-1	K
$\hat{W} F^t C^f C^f R^A b^A \partial^f \partial^f$	(7.12)	Ankopplung der Quarks an die Gluonen	-1	K, Sp
$\hat{W} F^t C^f C^f R^F b^F \partial^f \partial^f$	(7.12)	Ankopplung der Quarks an die Gluonen	0	J

Term	Formelnummer	Physikalische Interpretation	$[\alpha]$	Bemerkung
$\hat{W} R^A C^A C^f C^f b^A \partial^A \partial^f \partial^f$	(7.7)	Kopplungsterm höherer Ordnung	-2	N
$\hat{W} R^A C^F C^f C^f b^A \partial^F \partial^f \partial^f$	(7.7)	Kopplungsterm höherer Ordnung	-3	N
$\hat{W} R^F C^A C^f C^f b^F \partial^A \partial^f \partial^f$	(7.7)	Kopplungsterm höherer Ordnung	-1	N
$\hat{W} R^F C^F C^f C^f b^F \partial^F \partial^f \partial^f$	(7.7)	Kopplungsterm höherer Ordnung	-2	N
$\hat{W}(3F^tF^t + \frac{1}{4}AA) C^f R^f R^A f b^A \partial^f$	(7.14)	Quantisierungsterm	-1	N
$\hat{W}(3F^tF^t + \frac{1}{4}AA) C^f R^f R^F f b^F \partial^f$	(7.14)	Quantisierungsterm	0	Q
$\hat{W} F^t C^A C^f R^A R^f f b^A \partial^f \partial^A$	(7.11)	Polarisationsterm	-2	N
$\hat{W} F^t C^F C^f R^A R^f f b^A \partial^f \partial^F$	(7.11)	Polarisationsterm	-3	N
$\hat{W} F^t C^A C^f R^F R^f f b^F \partial^f \partial^A$	(7.11)	Polarisationsterm	-1	N
$\hat{W} F^t C^F C^f R^F R^f f b^F \partial^f \partial^F$	(7.11)	Polarisationsterm	-2	N
$\hat{W} C^A C^A C^f R^A R^f f b^A \partial^A \partial^A \partial^f$	(7.6)	Polarisationsterm	-3	N
$\hat{W} C^A C^F C^f R^A R^f f b^A \partial^A \partial^F \partial^f$	(7.6)	Polarisationsterm	-4	N
$\hat{W} C^F C^F C^f R^A R^f f b^A \partial^F \partial^F \partial^f$	(7.6)	Polarisationsterm	-5	N
$\hat{W} C^A C^A C^f R^F R^f f b^F \partial^A \partial^A \partial^f$	(7.6)	Polarisationsterm	-2	N
$\hat{W} C^A C^F C^f R^F R^f f b^F \partial^A \partial^F \partial^f$	(7.6)	Polarisationsterm	-3	N
$\hat{W} C^F C^F C^f R^F R^f f b^F \partial^F \partial^F \partial^f$	(7.6)	Polarisationsterm	-4	N
$\hat{W}(3F^tF^t + \frac{1}{4}AA) F^t R^A R^A b^A b^A$	(7.15)	Quantisierungsterm	0	Sp
$\hat{W}(3F^tF^t + \frac{1}{4}AA) F^t R^A R^F b^A b^F$	(7.15)	Quantisierungsterm	1	Q
$\hat{W}(3F^tF^t + \frac{1}{4}AA) F^t R^F R^F b^F b^F$	(7.15)	Quantisierungsterm	2	Sp

Literaturverzeichnis

[1] T. Hatsuda und T. Kunihiro, *Physics Reports* **247**, 221 (1994)

[2] U. Vogl und W. Weise, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **27**, 195 (1991)

[3] T. Borne, G. Lochak, und H. Stumpf, *Nonperturbative Quantum Field Theory and the Structure of Matter* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2001)

[4] M.S. Chanowitz und S.D. Drell, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 807 (1973) und *Phys. Rev.* **D9**, 2078 (1974)

[5] G.B. West, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 329 (1974)

[6] H. Terazawa, K. Akama und Y. Chikashige, *Prog. Th. Phys.* **56**, 1935 (1976)

[7] H. Stumpf, *Z.Naturforsch.* **55a**, 415-432 (2000)

[8] Y. Nambu und G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961); **124**, 264 (1961)

[9] W. Heisenberg, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 269 (1957)

[10] F. Bopp, *Ann. Phys. (Germ.)* **38**, 345 (1940)

[11] H. Stumpf, *Z. Naturforsch.* **37a**, 1295 (1982)

[12] D. Großer, *Z. Naturforsch.* **38a**, 1293 (1983)

[13] H. Stumpf und T. Borne, *Composite particle dynamics in quantum field theory* (Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1994)

[14] W. Pauli und F. Villars, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 434 (1949)

[15] N.N. Bogoliubov und D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Interscience Publ. 1959

[16] G. Grimm, *Elektro-schwache Standardtheorie als effektive Dynamik von Bindungszuständen im Rahmen einer nichtlinearen Spinortheorie*, Dissertation, Universität Tübingen, 1994

[17] Schweber, Bethe und de Hoffmann, *Mesons and Fields Vol.I* (Row, Peterson and Comp. 1955)

[18] T. Borne, *Geometrische Gravitationstheorie als effektive Theorie von Spinorfeldern*, Dissertation, Universität Tübingen, 1996

[19] W. Pfister, *Der einzeitige Formalismus in der Funktionalen Quantenfeldtheorie*, Diplomarbeit, Universität Tübingen, 1987

[20] J. Grebe, *Effektive Hamiltonoperatoren des BCS-Modells*, Diplomarbeit, Universität Tübingen, 1997

[21] W. Pfister, *Yang-Mills-Dynamik als effektive Theorie von vektoriellen Spinor-Isospinor-Bindungszuständen in einem Preonfeldmodell*, Dissertation, Universität Tübingen, 1990

[22] W. Pfister, M. Rosa, und H. Stumpf, *Nuovo Cimento* **102A**, 1449 (1989)

[23] J. Sand, *Zur Pauli-Villars Regularisierung in der Preonentheorie*, Diplomarbeit, Universität Tübingen, 1991

[24] H. Stumpf, *Z. Naturforsch.* **57a**, 723-736 (2002)

[25] H. Stumpf, *Z. Naturforsch.* **58a**, 1 (2003)

[26] W. Macke, *Quanten und Relativität* (Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1963)

[27] Mandel und Shaw, *Quantenfeldtheorie* (Aula Verlag 1992)

[28] H. Stumpf, *Z. Naturforsch.* **40a**, 14, 183, 294 (1985)

[29] H. Stumpf und W. Pfister, *Z. Naturforsch.* **52a**, 220 (1997)

[30] D. Ebert, *Eichtheorien* (Akademie-Verlag 1989)

[31] K. Huang, *Quarks Leptons and Gauge Fields* (World Scientific, Singapore 1992)

[32] I.N. Sneddon, *Spezielle Funktionen der mathematischen Physik und Chemie* (B.I.-Hochschultaschenbücher; 54)

[33] G.B. Arfken und H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Harcourt/Academic Press 2001)

[34] M. Abramowitz, *Handbook of Mathematical Funktions* (U.S. Government Printing Office, 1972)

[35] Y.L. Luke, *Integrals of Bessel functions* (McGraw-Hill, 1962)

[36] I.M. Gelfand, *Verallgemeinerte Funktionen I* (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken die zum Gelingen dieser Dissertation beigetragen haben.

An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. H. Stumpf für das interessante Dissertationsthema und für die intensive, engagierte und nette Betreuung bedanken. Seine zahlreichen Ratschläge und Ideen waren für die Arbeit ein großer Gewinn.

Ferner gilt mein Dank Joachim Schaarschmidt, als letztem verbliebenen der Arbeitsgruppe und dem ehemaligen Mitglied der Arbeitsgruppe Bertfried Fauser.

Ganz besonders möchte ich mich aber bei meiner Mutter bedanken, die mir das Studium und die Promotion ermöglicht hat.

Einen großen Dank gilt meiner Freundin Birgit Oettinger.

Ebenso bedanke ich mich bei meinen Freunden Heiko Elster, Markus King und Andreas King.