

Hyperchaotische Flüsse in beliebig vielen Dimensionen

DISSERTATION

der Fakultät für Chemie und Pharmazie
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

2005

vorgelegt von

Sven Sahle

Ich danke Otto Rössler, von dem ich nicht nur wissenschaftlich viel gelernt habe. Gerold Baier hat mich in die Wissenschaft eingeführt. Die Zusammenarbeit mit ihm bildet auch die Grundlage dieser Arbeit.

Mein Dank gilt Hans Diebner und Ursula Kummer, die mich als Lehrer und Kollegen sehr unterstützt haben.

Durch hilfreiche Diskussionen haben Florian Grond und Axel Hoff zu dieser Arbeit beigetragen.

Ich danke Klaus Wegmann für freundliche Aufnahme im Institut für chemische Pflanzenphysiologie, Peter Weibel und dem ZKM für ein Stipendium und der Klaus-Tschira-Stiftung für produktive und angenehme Arbeitsbedingungen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Dynamische Systeme	11
2.1	Attraktoren	12
2.1.1	Fixpunkte	13
2.1.2	Grenzyklen	14
2.1.3	Chaos	14
2.2	Lyapunovexponenten	15
3	Hyperchaos	19
4	Design hyperchaotischer Flüsse	23
4.1	Abstraktes System	24
4.1.1	Das lineare Subsystem	25
4.1.2	Kettenstruktur des linearen Subsystems .	27
4.1.3	Die Schaltvariable	29
4.1.4	Verhalten des Gesamtsystems	30
4.2	Stückweise lineare Formulierung	38
4.3	Chemische Formulierung	41
4.3.1	Der Lotka-Volterra-Oszillator als Trans- formation des harmonischen Oszillators .	42

Inhaltsverzeichnis

4.3.2	Die Transformation des verallgemeinerten abstrakten Systems	44
4.3.3	Dynamik des chemisch formulierten Systems	45
5	Zerlegung des verallgemeinerten Rösslersystems in Elementarmoden	51
5.1	Durchführung der Elementarmodentransformation	51
5.2	Bedeutung der Elementarmodenzerlegung	55
6	Das Rösslersystem in Zylinderkoordinaten	59
6.1	Transformation in Zylinderkoordinaten	59
6.2	Verallgemeinerung für negative r	64
7	Zusammenfassung und Diskussion	69
A	Verwendete numerische Methoden	73

1 Einleitung

Niedrigdimensionales deterministisches Chaos ist ein Gebiet, das in den vergangenen Jahrzehnten umfassend erforscht wurde. Gegenstand dieser Forschung waren häufig Modellsysteme wie der Lorenzattraktor[1] oder der Rösslerattraktor[2], die jeweils beispielhaft für ganze Klassen von deterministischen nichtlinearen Systemen stehen können, und an denen man die komplexe Dynamik solcher Systeme studieren kann (für eine Einführung in dieses Forschungsgebiet siehe zum Beispiel [3]). In der Natur finden wir aber auch viele Systeme, die zwar nichtlinear sind, komplexe Dynamik zeigen, sich vermutlich deterministisch beschreiben lassen, aber sicher nicht niedrigdimensional sind. Beispiele dafür sind hydrodynamische Systeme (Turbulenz), neuronale Netze oder biochemische Reaktionsnetzwerke.

A priori ist es nicht klar, ob sich diese sehr unterschiedlichen hochdimensionalen Dynamiken auf niedrigdimensionales Chaos zurückführen lassen. Der Versuch, eine Brücke von der gut erforschten Dynamik niedrigdimensionaler Systeme zu hochdimensionaler Dynamik zu schlagen, ist jedoch lohnend, weil auf diese Weise unsere Kenntnisse von niedrigdimensionalen Systemen für die Beschreibung hochdimensionaler Systeme fruchtbar gemacht werden können.

Ein möglicher Ansatz, um einen Weg von niedrig- zu hochdimensionalen Dynamiken zu beschreiben, beruht auf einer ansteigenden Anzahl positiver Lyapunovexponenten. Definitionsgemäß

1 Einleitung

besitzen chaotische Attraktoren mindestens einen positiven Lyapunovexponenten. In dreidimensionalen Systemen (den niedrigdimensionalsten, in denen Chaos möglich ist), kann höchstens ein Exponent positiv sein. Bei vierdimensionalen Systemen sind aber bereits zwei positive Exponenten möglich. Rössler hat ein Beispiel für ein solches System angegeben[4] und dafür die Bezeichnung *Hyperchaos* eingeführt. Er hat weiter postuliert, daß man das Prinzip auf mehr als zwei positive Lyapunovexponenten verallgemeinern kann[5, 6]. Das führt zu einer chaotischen Hierarchie von Systemen mit jeweils steigender Zahl positiver Exponenten[7].

Es gibt verschiedene Ansätze, eine solche chaotische Hierarchie zu verwirklichen. Zunächst die triviale Lösung: Ein System, das durch Verdopplung eines einfach chaotischen Systems entsteht (und das demnach mindestens sechsdimensional ist), hat definitionsgemäß zwei positive Lyapunovexponenten. Auf diese Weise kann eine chaotische Hierarchie erzeugt werden, die bei $3N$ Variablen Hyperchaos N -ter Ordnung zeigt. Ein Erkenntnisgewinn ist von dieser Hierarchie jedoch nicht zu erwarten.

Ein weiterer Ansatz ist die Kopplung zweidimensionaler nichtlinearer Oszillatoren, die jeweils einzeln für sich kein chaotisches Verhalten zeigen können. Rössler hat gezeigt, daß zwei symmetrisch gekoppelte nichtlineare Oszillatoren einfaches Chaos erzeugen können[8]; ein Effekt, der auf einer Turinginstabilität[9] beruht. Durch Kopplung von mehr als zwei Oszillatoren kann auch höherdimensionales Hyperchaos generiert werden[10, 11, 12], wodurch sich wieder eine Hierarchie begründen läßt.

Ein völlig anderer Mechanismus zur Erzeugung hochdimensionalen Chaos' beruht auf zeitverzögerten Differentialgleichungen (*time-delay*-Gleichungen). Das sind Differentialgleichungen, in denen Ausdrücke auftreten, die sich auf den Zustand des Sy-

stems in der Vergangenheit beziehen:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau))$$

Dabei ist τ die Verzögerungszeit. Farmer hat gezeigt, daß es chaotische time-delay-Gleichungen gibt, bei denen mit größerem τ auch die Zahl der positiven Exponenten ansteigt[13]. Als Beispiel hat Farmer die Mackey-Glass-Gleichung[14] gewählt. Auch mit time-delay-Gleichungen läßt sich demnach eine chaotische Hierarchie aufbauen. Man muß allerdings beachten, daß time-delay-Gleichungen einer wesentlich komplizierteren Klasse von Differentialgleichungen angehören als die gewöhnlichen Differentialgleichungen, die ich hier vorwiegend betrachten will. Der Phasenraum von Systemen, die durch time-delay-Gleichungen beschrieben werden, ist (abzählbar) unendlichdimensional.¹

In der vorliegenden Arbeit stelle ich eine Verwirklichung der chaotischen Hierarchie vor, die auf einer Erweiterung des Rössler-systems beruht[15]. Dabei werden die Minimalitätseigenschaften (nur ein nichtlinearer Term, möglichst wenige Variablen) und die grundsätzliche Struktur des Rösslersystems erhalten. Das *erweiterte Rösslersystem* besteht aus einer Schaltvariablen mit nichtlinearer Dynamik und einer linearen Kette. Dieses Prinzip läßt sich in unterschiedlichen Variationen realisieren, unter anderem als chemisches Reaktionsnetzwerk.²

¹Um den Zustand eines solchen Systems am Zeitpunkt t zu beschreiben, muß man den gesamten Verlauf der Trajektorie zwischen $t - \tau$ und t angeben. Wenn man von stetigen Trajektorien ausgeht, benötigt man dafür abzählbar unendlich viele Zahlenwerte.

²Das chemische Reaktionsnetzwerk gleicht in Struktur und Verhalten dem abstrakten System, enthält jedoch mehr als eine Nichtlinearität.

1 Einleitung

Meyer et al. haben gezeigt, daß eine äquivalente Beschreibung des erweiterten Rösslersystems möglich ist, bei der die nichtlineare Variable nicht an eine lineare Kette sondern an mehrere lineare Oszillatoren gekoppelt ist[16].

Schließlich zeige ich noch, daß sich durch Transformation in Polarkoordinaten aus dem Rösslersystem ein besonders einfaches chaotisches System erzeugen läßt. Auch dieses System kann möglicherweise als Prototyp einer Hierarchie chaotischer Attraktoren dienen.

2 Dynamische Systeme

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dynamischen Systemen. Sie beschränkt sich auf die Klasse der deterministischen Systeme, also solche, bei denen die zukünftige Entwicklung des Systems durch den derzeitigen Zustand völlig festgelegt ist. Diese Systeme werden mathematisch durch Differentialgleichungen beschrieben. Im einfachsten Fall haben wir es mit gewöhnlichen Differentialgleichungen zu tun.¹

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \quad (2.1)$$

Diese Gleichung beschreibt genau das, was oben über deterministische Systeme gesagt wurde: Die Änderung des Systems (die linke Seite der Gleichung) ist durch eine Funktion des aktuellen Zustands (rechte Seite der Gleichung) bestimmt. In der Chemie oder Biochemie kann zum Beispiel der zeitliche Verlauf von Reaktionen durch solche Gleichungen beschrieben werden. Der Zustand $x(t)$ beschreibt die Konzentrationen der im System vorhandenen Substanzen zum Zeitpunkt t , $f(x)$ beschreibt, mit welcher Geschwindigkeit die Reaktionen ablaufen. Der Ablauf der Reaktionen verändert dann die Konzentrationen der beteiligten Substanzen.²

¹Im weiteren Verlauf des Textes werde ich für $\frac{dx(t)}{dt}$ die abgekürzte Schreibweise \dot{x} verwenden. Entsprechend steht x im Allgemeinen für $x(t)$.

²Die Beschreibung durch gewöhnliche Differentialgleichungen ist nur unter bestimmten Bedingungen möglich. Zum einen müssen die Konzentrationen

2 Dynamische Systeme

Wenn man eine Differentialgleichung hat, die ein dynamisches System beschreibt, interessiert man sich natürlich für die Lösungen der Gleichung. Eine Lösung beschreibt das Verhalten des Systems für einen bestimmten Ausgangszustand $\mathbf{x}(t = 0)$. Nur bei sehr einfachen Systemen kann man die Lösung $\mathbf{x}(t)$ bei Kenntnis der Differentialgleichung und der Ausgangswerte $\mathbf{x}(t = 0)$ exakt ausrechnen. In allen anderen Fällen muß man auf eine Computersimulation zurückgreifen.

2.1 Attraktoren

Unter den vielen möglichen Lösungen eines Differentialgleichungssystems (für verschiedene Anfangswerte $\mathbf{x}(t = 0)$) findet eine bestimmte Unterklasse besonderes Interesse: die stationären Lösungen. Stationäre Lösungen beschreiben ein Systemverhalten, das sich im zeitlichen Verlauf nicht ändert. Mathematisch werden diese Lösungen durch invariante Mengen beschrieben, also Mengen von Zuständen, die durch die Dynamik des Systems auf sich selbst abgebildet werden. Diese speziellen Lösungen sind aus zwei Gründen von besonderer Bedeutung: Zum einen sind sie in manchen Fällen mathematisch einfacher zu handhaben als der allgemeine Fall, zum anderen können sie als eine Art systematisches Gerüst für das allgemeine Systemverhalten dienen. Oft läßt sich

der beteiligten Substanzen in dem betrachteten räumlichen Gebiet überall gleich sein. In kleinen räumlichen Bereichen (zum Beispiel bei vielen biochemischen Vorgängen in Zellen) kann das bereits durch Diffusion gesichert sein. Zum anderen muß die Zahl der beteiligten Moleküle relativ groß sein, so daß die Konzentration als kontinuierliche Größe angenommen werden kann.

ein nicht stationäres dynamisches Verhalten deuten als ein Übergang von einem stationären Zustand zu einem anderen.

Wenn in dem zu betrachtenden System ein Energieumsatz stattfindet (wie es bei chemischen Reaktionssystemen der Fall ist), kann noch eine weitere Unterscheidung getroffen werden. In solchen (dissipativen) Systemen gibt es stabile und instabile stationäre Zustände.³ Der Unterschied zeigt sich, wenn das System in einem stationären Zustand leicht gestört wird. Wenn der Zustand stabil war, kehrt es in ihn zurück. War er instabil, entfernt es sich immer weiter.⁴ Während mathematisch kein großer Unterschied zwischen diesen beiden Arten von stationären Zuständen besteht, wird man in realen Experimenten meist nur stabile Zustände beobachten. Diese stabilen (genauer asymptotisch stabilen) Zustände werden Attraktoren genannt.

2.1.1 Fixpunkte

Die einfachsten Attraktoren sind Zustände, in denen tatsächlich alle Systemvariablen konstant sind. Man nennt sie Fixpunkte. Bereits Systeme mit nur einer Variablen können dieses Verhalten zeigen. Die Gleichung $\dot{x} = k_1 - k_2x$ könnte zum Beispiel die Konzentration eines Stoffes in einem Durchflußreaktor beschreiben. Der stabile Zustand wäre dann $x(t) = \frac{k_1}{k_2}$. Ein grundlegend anderes stabiles Verhalten ist in eindimensionalen Systemen nicht möglich.

³Das Gegenstück zu dissipativen Systemen sind konservative Systeme. In ihnen bleibt die Energie erhalten.

⁴In Systemen mit mindestens zwei Variablen gibt es auch sogenannte nicht stabile (oder Sattel-) Zustände, die sich teilweise wie stabile, teilweise wie instabile Zustände verhalten.

2 Dynamische Systeme

2.1.2 Grenzyklen

In zweidimensionalen Systemen ist auch stabiles oszillatorisches Verhalten möglich. Dabei befindet sich das System in einem streng periodisch oszillierenden Zustand. Wenn man das System leicht stört, kehrt es nach kurzer Zeit in diesen Zustand zurück. Ein Beispiel ist folgendes System, das als Lösung eine harmonische Schwingung hat:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - \epsilon x \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right) \\ \dot{y} &= x - \epsilon y \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right)\end{aligned}$$

Damit in einem System stabile Grenzyklen auftreten können, muß das Differentialgleichungssystem mindestens einen nichtlinearen Term enthalten.

In höherdimensionalen Systemen können Überlagerungen von Oszillationen verschiedener Frequenz auftreten. Man spricht dann von quasiperiodischem Verhalten⁵ auf einem Torus.

2.1.3 Chaos

In mindestens dreidimensionalen Systemen kann ein völlig neuer Attraktortyp auftreten, der seltsame Attraktor, der chaotisches Verhalten beschreibt. Ähnlich wie Grenzyklen treten chaotische Attraktoren nur in Differentialgleichungen mit nichtlinearen Termen auf. Ein besonders einfaches chaotisches System, das sich als Prototyp für weitere Untersuchungen eignete, wäre also eines mit genau

⁵quasiperiodisch ist das Verhalten nur dann, wenn das Verhältnis der verschiedenen Frequenzen irrational ist. Man kann aber davon ausgehen, daß das (im mathematischen Sinne) fast immer der Fall ist.

2.2 Lyapunovexponenten

drei Variablen und genau einem nichtlinearen Term. Das bekannteste Beispiel für ein solches System ist das Rösslersystem[2]. Es hat den Vorteil, nicht nur den oben genannten Minimalitätskriterien zu genügen (drei Variablen, eine Nichtlinearität), sondern auch so einfach zu sein, daß man viele allgemeine Eigenschaften chaotischer Systeme in diesem System besonders deutlich demonstrieren kann.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - y \\ \dot{y} &= x - z \\ \dot{z} &= \varepsilon + bz(x - c)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Eine herausragende Eigenschaft aller chaotischen Attraktoren (und eine Möglichkeit, Chaos zu definieren) ist die exponentielle Divergenz im Phasenraum. Obwohl das Volumen, das von einer Menge von Punkten im Phasenraum gebildet wird, im Verlauf des Flusses schrumpft (eine Eigenschaft aller dissipativen Systeme), entfernen sich zwei nahe beieinanderliegende Punkte im Phasenraum exponentiell voneinander.

2.2 Lyapunovexponenten

Da die exponentielle Divergenz von Trajektorien das bestimmende Merkmal von chaotischen Systemen ist, bietet es sich an, ein Maß, das auf dieser Divergenz beruht, zur Kategorisierung und Beschreibung chaotischer Systeme zu verwenden. Üblich sind zu diesem Zweck die *Lyapunovexponenten*. Ein System hat so viele Lyapunovexponenten, wie es Variablen hat.

Für die Definition der Lyapunovexponenten betrachtet man die lokale Dynamik an einem Punkt auf dem Attraktor. In einer klei-

2 Dynamische Systeme

nen Umgebung um diesen Punkt kann man das System durch eine linearisierte Form annähern. Lineare Algebra besagt nun, daß dieser linearisierte Fluß im N -dimensionalen Fall durch Überlagerung von N aufeinander senkrecht stehender Flüsse ausgedrückt werden kann. Jedem dieser Flüsse kann man einen Exponenten zuordnen, der ausdrückt, ob der Fluß in der entsprechenden Richtung expandierend (positiver Exponent) oder kontrahierend (negativer Exponent) ist. Die Lyapunovexponenten sind nun die Mittel dieser lokalen Exponenten über alle Punkte, die auf dem Attraktor liegen. Genauer ausgedrückt sind die Lyapunovexponenten die Mittel der Singulärwerte von $e^{J(x(t))}$ über den Attraktor [18].

Die Lyapunovexponenten können bei nichtlinearen Systemen praktisch nie analytisch berechnet werden. Man muß daher auf numerische Verfahren zurückgreifen. Ein Standardverfahren wird in [19] beschrieben.

Über die Lyapunovexponenten lassen sich einige allgemeine Aussagen treffen:

- In dissipativen Systemen (die wir hier ausschließlich betrachten) ist die Summe aller Exponenten negativ.
- Für stabile Fixpunkte sind alle Exponenten negativ. Bei allen anderen Attraktoren ist ein Exponent exakt Null. Das läßt sich dadurch erklären, daß zwei Punkte, die hintereinander auf dem gleichen Attraktor laufen, im Mittel ihren Abstand nicht verändern können, da ihre Bewegungen ja durch die exakt gleichen Gesetzmäßigkeiten bestimmt werden.
- Ein chaotisches System hat mindestens einen positiven Lyapunovexponenten. Dreidimensionale Systeme können höchstens einen positiven Exponenten besitzen, da ja die

2.2 Lyapunovexponenten

Summe negativ sein muß und ein Exponent den Wert Null hat. Ein System mit zwei Variablen kann entsprechend keinen positiven Exponenten haben und demnach kein chaotisches Verhalten zeigen.⁶

Bei drei Variablen (und demnach drei Exponenten) ergeben sich damit folgende mögliche Kombinationen:

- drei negative Exponenten ($-|-|-$): stabiler Fixpunkt.
- eine Null ($0|-|-$): stabiler Grenzzyklus.
- zwei Nullen ($0|0|-$): quasiperiodisches Verhalten auf einem Torus. Dies ist in drei Dimensionen theoretisch möglich, kommt aber nur als Ausnahme vor.
- ein positiver Exponent ($+|0|-$): Chaos.

⁶Das ist allerdings nicht die einfachste Möglichkeit zu erklären, warum zweidimensionale Systeme sich nicht chaotisch verhalten können. Topologische Erwägungen führen zum gleichen Ergebnis.

3 Hyperchaos

In dynamischen Systemen mit vier oder mehr Variablen kann es entsprechend den im vorherigen Abschnitt geschilderten Regeln mehrere positive Lyapunovexponenten geben. In vier Dimensionen ist zum Beispiel die Kombination $(+|+|0|-)$ möglich. Dabei muß die Summe der beiden positiven Exponenten betragsmäßig kleiner sein als der negative Exponent. Für dieses Phänomen hat Rössler mehrere Beispiele angegeben[4] (sowohl abstrakte als auch solche, die chemische Reaktionsnetzwerke beschreiben) und den Begriff Hyperchaos eingeführt.

Was zeichnet nun Hyperchaos aus? Bei jedem chaotischen Attraktor gibt es benachbarte Trajektorien im Phasenraum, die sich im Mittel exponentiell voneinander entfernen (das ist eine der Möglichkeiten, Chaos zu definieren). Die Expansion im Phasenraum findet in eine bestimmte Richtung statt. Diese Richtung kann zwar an jedem Punkt des Attraktors unterschiedlich sein, sie steht jedoch immer senkrecht zur Trajektorie. Man kann sich ein Band vorstellen, das entlang der Trajektorie verläuft und an jedem Punkt die Richtung der Expansion angibt. Der Nullexponent entspricht der Richtung entlang der Trajektorie. In allen übrigen Richtungen muß daher eine Kontraktion stattfinden. Da der Fluß entlang einer Trajektorie in einer Richtung in die Breite geht, während er in alle anderen Richtungen zusammengedrückt wird, ist eine im wesentlichen bandartige Struktur des Attraktors zu erwarten. Ein Querschnitt durch diese Bandstruktur wird daher einen

3 Hyperchaos

linienartigen Charakter haben. Eine spezielle Eigenschaft chaotischer Attraktoren ist auch, daß diese Linienstruktur unendlich oft gefaltet und daher fraktal ist. Die Fraktalität wird formal durch eine nicht ganzzahlige Dimension ausgedrückt. In diesem Fall ist die Dimension größer als eins, jedoch kleiner als zwei.

Bei zwei positiven Exponenten findet die Expansion im Phasenraum in zwei Richtungen statt, die an jeder Stelle aufeinander senkrecht stehen. Zusammen bilden sie an jedem Punkt des Attraktors einen zweidimensionalen Raum. Bewegt man diesen zweidimensionalen Subraum entlang einer Trajektorie, spannt er eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit auf. Der gesamte Attraktor wird also wenigstens einen dreidimensionalen Raum einnehmen. Ein Querschnitt durch den Attraktor ist demnach eine flächige Struktur. Ähnlich wie beim einfach chaotischen Attraktor, wo der Querschnitt eine gefaltete Linie ist, ist diese flächige Struktur komplex gefaltet. Man kann sich das wie bei einem Handtuch vorstellen, das abwechselnd längs und quer gefaltet wird (man müßte sich allerdings ein Handtuch vorstellen, das unendlich oft gefaltet werden kann).

Dieses Prinzip kann grundsätzlich auf beliebig viele Dimensionen verallgemeinert werden. Man erhält dann chaotische Attraktoren, deren Dimension mit der Anzahl der positiven Lyapunov-exponenten wächst.¹

Rössler hat postuliert, daß es möglich sein müßte, ein allgemeines Schema anzugeben, nach dem man eine ganze Klasse von dy-

¹Ganz eindeutig ist der Zusammenhang zwischen der Zahl der positiven Exponenten und der Dimension des Attraktors nicht. Die Dimension des Attraktors wird außerdem noch von dem Größenverhältnis zwischen den positiven und negativen Exponenten beeinflusst[22]. Ein Attraktor mit N positiven Exponenten hat jedoch sicher eine Dimension $D > N + 1$.

3 Hyperchaos

namischen Systemen konstruieren kann, die bei wachsender Anzahl von Variablen auch eine wachsende Anzahl positiver Lyapunovexponenten besitzen.

4 Design hyperchaotischer Flüsse

Numerisch lassen sich iterative Abbildungen wesentlich leichter handhaben als Differentialgleichungen. Auch in solchen diskreten Abbildungen lassen sich die dynamischen Phänomene vom Fixpunkt bis zum Hyperchaos zeigen. Bereits in eindimensionalen Abbildungen kann man Chaos finden; das bekannteste Beispiel ist sicherlich die logistische Abbildung $x_{i+1} = \alpha x_i(1 - x_i)$. Da wir aber den Bezug zu Differentialgleichungssystemen nicht verlieren wollen, ist es sinnvoll, sich auf invertierbare und dissipative Abbildungen zu beschränken. Zwischen gewöhnlichen Differentialgleichungen und diskreten invertierbaren Abbildungen (mit einer Dimensionalität, die um eins geringer ist als die des Differentialgleichungssystems) gibt es einen engen Zusammenhang. Die Abbildung läßt sich auffassen als Beschreibung, wie die Trajektorien des Differentialgleichungssystem eine bestimmte Ebene im Phasenraum durchstoßen. Das klassische Beispiel für eine diskrete invertierbare Abbildung mit chaotischem Verhalten ist die zweidimensionale Hénon-Abbildung[20].

Baier und Klein[21] ist es gelungen, eine diskrete iterative Abbildung anzugeben, die bei N Variablen $N - 1$ positive Lyapunov-exponenten haben kann:

$$\begin{aligned}x_1(i+1) &= a - x_{N-1}^2(i) - bx_N(i) \\x_n(i+1) &= x_{n-1}(i)\end{aligned}\tag{4.1}$$

4 Design hyperchaotischer Flüsse

mit $n = 2 \dots N$. Es handelt sich um ein System, bei dem eine Variable eine nichtlineare Abbildungsvorschrift hat (mit genau einem nichtlinearen Term). Die übrigen Variablen bilden ein lineares Subsystem, in diesem Fall mit einer einfachen Kettenstruktur. Dieses Konstruktionsprinzip kann nun auf ein Differentialgleichungssystem übertragen werden.

4.1 Abstraktes System

Betrachten wir folgendes N -dimensionales Differentialgleichungssystem[15]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 \\ \dot{x}_i &= x_{i-1} - x_{i+1} \\ \dot{x}_N &= \varepsilon + b x_N (x_{N-1} - d)\end{aligned}\tag{4.2}$$

mit $i = 2 \dots N - 1$. Die Konstanten α , b , d und ε sind positiv. Die ersten $N - 1$ Zeilen bilden ein lineares Subsystem, das man als eine Kette harmonischer Oszillatoren auffassen kann. Um zwischen dem linearen und dem nichtlinearen Teil zu unterscheiden ist auch folgende Schreibweise sinnvoll:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} - x_N \mathbf{e}_{N-1} \\ \dot{x}_N &= \varepsilon + b x_N (x_{N-1} - d)\end{aligned}\tag{4.3}$$

$$\text{Dabei ist } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}, \mathbf{e}_{N-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & & & \\ 1 & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1.1 Das lineare Subsystem

Das lineare Subsystem hat für $\alpha > 0$ nur den trivialen Fixpunkt $x_1 = x_2 = \dots = x_{N-1} = 0$. Um einen Überblick über die möglichen Lösungen dieses Teilsystems zu erhalten betrachten wir zunächst die Eigenwerte von \mathbf{A} . Für $\alpha = 0$ verschwinden die Realteile aller Eigenwerte. Wenn N gerade ist (d. h. das lineare Subsystem hat ungerade Dimension) haben wir $(N - 2)/2$ Paare rein imaginärer konjugiert komplexer Eigenwerte und einen Eigenwert $\lambda = 0$. Bei ungeradem N bilden alle Eigenwerte $(N - 1)/2$ rein imaginäre konjugiert komplexe Paare. Wenn α positiv, jedoch nicht zu groß wird, ändert sich an dieser Aufteilung nichts. Alle Eigenwerte haben aber nun positive Realteile, die mit wachsendem α ansteigen. Bei über $\alpha = 1$ anwachsendem α finden wir einen dominierenden reellen Eigenwert, die übrigen werden dann wieder kleiner, bleiben aber positiv. Abbildung 4.1 zeigt Real- und Imaginärteile der Eigenwerte für $N = 6$ und $N = 7$. Aus den Abbildungen (die für andere Werte N ähnlich aussähen) kann man entnehmen, daß es bei Werten von $\alpha < 0.5$ gerechtfertigt ist, näherungsweise davon auszugehen, daß die Realteile der Eigenwerte linear mit α steigen

4 Design hyperchaotischer Flüsse

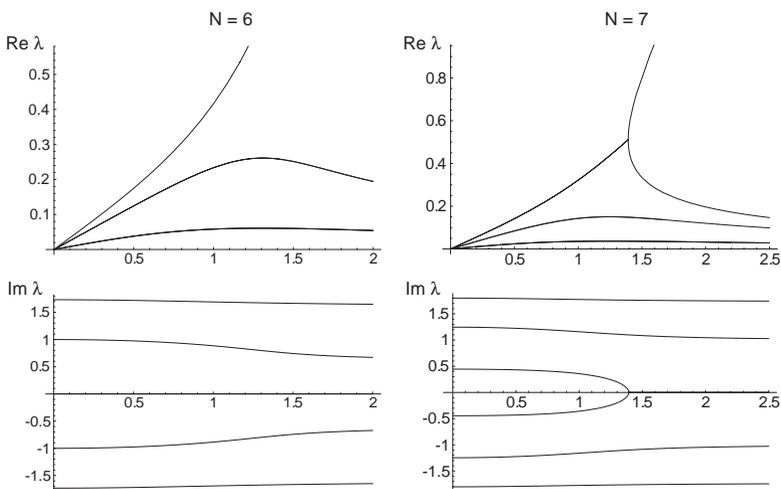


Abbildung 4.1: Eigenwerte des linearen Subsystems $\dot{x} = \mathbf{A}x$ aus Gleichung 4.3 als Funktion des Parameters α . Bei $N = 6$ ist das lineare Subsystem fünfdimensional. Der am schnellsten anwachsende Eigenwert ist rein reell, die anderen vier bilden zwei komplex konjugierte Paare. Für $N = 7$ haben wir drei Paare komplex konjugierter Eigenwerte; wenn jedoch α größer als ~ 1.4 wird, dominiert der expansive Term $+\alpha x_1$ so stark, daß er einen reellen Eigenwert erzwingt.

und die Imaginärteile konstant bleiben.

Das charakteristische Polynom für A enthält λ in allen Potenzen von λ^0 bis λ^{N-1} und läßt keine offensichtliche Vereinfachung zu. Eine algebraische Bestimmung der Eigenwerte ist daher nur für $N \leq 5$ möglich. Wenn wir $\alpha = 0$ setzen, fällt jeder zweite Term im charakteristischen Polynom weg und es ist möglich, die Eigenwerte bis $N = 10$ exakt anzugeben. Hier beschränke ich mich aber darauf, numerisch bestimmte Werte anzugeben (Tabelle 4.1).

Für die Dynamik des linearen Teilsystems bedeutet das, daß wir für ungerade N eine spiralförmige Expansionsbewegung um den Ursprung mit $(N - 1)/2$ unterschiedlichen Frequenzanteilen finden. Für gerade N ergibt sich ebenfalls eine auswärts gerichtete Spiralförmige Bewegung mit $(N - 2)/2$ unterschiedlichen Frequenzen, zusätzlich jedoch noch eine ausgezeichnete Richtung mit linearer Expansion. Interessant ist noch, daß obwohl die Expansion ausschließlich durch einen Term $(+\alpha x_1$ in der ersten Gleichung) hervorgerufen wird, die Realteile aller Eigenwerte relativ gleichmäßig mit α ansteigen. Man kann dies so deuten, daß die Expansion in x_1 -Richtung durch die verschiedenen Drehbewegungen auf alle anderen Richtungen verteilt wird.

4.1.2 Kettenstruktur des linearen Subsystems

Die Struktur des linearen Systems, das durch $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ beschrieben wird, läßt sich als Kette harmonischer Oszillatoren interpretieren. Der harmonische Oszillator mit Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1$ hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x\end{aligned}$$

4 Design hyperchaotischer Flüsse

N	Eigenwerte	N	Eigenwerte
2	1.000a	9	0.0260a ± 1.879i 0.0918a ± 1.532i
3	0.500a ± 1.000i		0.167a ± 1.000i 0.216a ± 0.347i
4	0.250a ± 1.414i 0.500a	10	0.0191a ± 1.902i 0.0691a ± 1.618i
5	0.138a ± 1.618i 0.362a ± 0.618i		0.131a ± 1.176i 0.181a ± 0.618i 0.200a
6	0.833a ± 1.735i 0.250a ± 1.000i 0.333a	11	0.0144a ± 1.919i 0.0531a ± 1.683i 0.104a ± 1.310i
7	0.0538a ± 1.802i 0.175a ± 1.247i 0.272a ± 0.445i		0.150a ± 0.831i 0.178a ± 0.285i
8	0.0366a ± 1.848i 0.125a ± 1.414i 0.213a ± 0.765i 0.250a		

Tabelle 4.1: Eigenwerte des linearen Subsystems von Gleichung 4.3. Für $\alpha < 0.5$ kann man in guter Näherung die Realteile als linear abhängig von α und die Imaginärteile als konstant betrachten.

Im linearen Subsystem enthalten die Differentialgleichungen für jeweils zwei aufeinanderfolgende Variablen x_i und x_{i+1} alle Terme, die auch im harmonischen Oszillator vorkommen. Die Besonderheit ist hier die enge Verschränkung der Variablen. Jede Variable x_i nimmt beide Rollen im harmonischen Oszillator ein. Das bedeutet, daß es sich nicht um eine Kette von Oszillatoren im physikalischen Sinne handelt.¹

Formal kann die Kette auch als Diskretisierung einer Transportgleichung aufgefaßt werden. Die einfachste Transportgleichung lautet (mit s als Ortsvariable)

$$\frac{\partial x(s, t)}{\partial t} = -\frac{\partial x(s, t)}{\partial s}.$$

Wenn man die Ableitung nach s durch Differenzenbildung approximiert, erhält man

$$\dot{x}(s, t) = -\frac{x(s + \frac{\Delta h}{2}, t) - x(s - \frac{\Delta h}{2}, t)}{\Delta h}.$$

Diskretisiert man die Ortsvariable s mit einem Raster der Größe $\frac{1}{2}$, so erhält man $\dot{x}_i(t) = x_{i-1}(t) - x_{i+1}(t)$. Das ist genau die Definition des linearen Subsystems von Gleichung 4.3.

4.1.3 Die Schaltvariable

Die Variable x_N wirkt in Gleichung 4.3 (wie im Rösslersystem) als Schwellwertschalter mit negativer Rückkopplung auf X_{N-1} . Im

¹Wenn der harmonische Oszillator zum Beispiel als klassisches mechanisches System interpretiert wird, entspricht x einer Impuls- und y einer Ortsvariablen. Es ist aber physikalisch nicht sinnvoll, daß ein und dieselbe Variable gleichzeitig als Impuls in einem Oszillator und als Ort in einem anderen auftritt. Ähnliche Hindernisse gibt es bei anderen physikalischen Interpretationen, zum Beispiel bei einer Interpretation als elektromagnetisches System.

4 Design hyperchaotischer Flüsse

Folgenden gehe ich davon aus, daß ε deutlich kleiner als bd ist (konkret wähle ich $\varepsilon = 0.1$, $b = 2$ und $d = 4$). Wenn nun x_{N-1} unter dem Schwellwert d bleibt, überwiegt der dissipative Term $-bdx_N$ gegenüber $+bx_{N-1}x_N$. In diesem Fall bleibt x_N klein und daher hat die Rückkopplung auf x_{N-1} nur geringe Auswirkungen auf das lineare Subsystem.

Wenn x_{N-1} den Schwellwert d überschreitet, wächst x_N exponentiell. Das hat durch die Rückkopplung wiederum zur Folge, daß der Wert von x_{N-1} sinkt. Wenn x_{N-1} wieder unter den Schwellwert gesunken ist, setzt sich in x_N der dissipative Term durch und x_N sinkt auf den niedrigen Wert zurück.

Man könnte nun erwarten, daß durch diese Rückkopplungsschleife x_{N-1} einfach auf den Maximalwert d begrenzt wird. Da aber sowohl das Auslösen des Schaltvorgangs als auch das Zurückkehren in den nicht aktiven Zustand endliche Zeit benötigen, wird der Wert von x_{N-1} typischerweise weit unter den Schwellwert d zurückgeworfen. Je schneller x_{N-1} die Schwelle durchstößt, desto stärker fällt der Ausschlag von x_N aus und umso weiter wird x_{N-1} unter die Schwelle zurückgeworfen.

4.1.4 Verhalten des Gesamtsystems

Die Schaltvariable x_N enthält einen quadratischen Term, die einzige Nichtlinearität im System. Es sind daher höchstens zwei Fixpunkte zu erwarten. Zunächst muß zwischen geradem und ungeradem N unterschieden werden.

Bei ungeradem N finden wir $x_1 = x_3 = \dots = x_N = \frac{d\sqrt{b} + \sqrt{bd^2 - 4a\varepsilon}}{2a\sqrt{b}}$, $x_2 = x_4 = \dots = x_{N-1} = \alpha x_N$. In dem Parameterbereich, den wir hier untersuchen, gilt $bd^2 > 4a\varepsilon$, es existieren also tatsächlich zwei Fixpunkte. Für $0 < a < 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $b = 2$

4.1 Abstraktes System

und $d = 4$ (diese Parameter werden wir im Folgenden beibehalten) gilt in guter Näherung:

$$\text{FP1 : } x_1 = x_3 = \dots = x_N = 0.0125;$$

$$x_2 = \dots = x_{N-1} = 0.0125a$$

$$\text{FP2 : } x_1 = x_3 = \dots = x_N = 4/a;$$

$$x_2 = \dots = x_{N-1} = 4$$

Der erste Fixpunkt hat einen verhältnismäßig kleinen Wert für x_N und x_{N-1} , wir können von einer nur schwachen Kopplung zwischen dem linearen Subsystem und der Schaltvariable in der Umgebung dieses Fixpunktes ausgehen. Die Eigenwerte des linearen Teilsystems verändern sich daher quantitativ nur wenig, durch x_N kommt lediglich ein zusätzlicher stark negativer Eigenwert hinzu. Obwohl die quantitativen Auswirkungen nur gering sind, ergibt sich ein qualitativer Unterschied: Während beim linearen Subsystem alle Eigenwerte für $a > 0$ positiv sind, bleiben sie beim vollständigen System für sehr kleine a negativ. Tatsächlich wird in den numerischen Simulationen für kleine a der Fixpunkt stabil sein.

Bei geradem N ergibt die Lösung der Fixpunktgleichung $x_2 = x_4 = \dots = x_N = \frac{ad}{2} \pm \frac{\sqrt{a}\sqrt{abd^2-4\epsilon}}{2\sqrt{b}}$, $x_1 = x_3 = \dots = x_{N-1} = x_N/a$. Offensichtlich gibt es hier für $a = 0$ keinen Fixpunkt. Die zwei Fixpunkte entstehen erst bei $a = 4\epsilon/bd^2$ in einer Sattel-Knoten-Verzweigung. Für den oben angegebenen Parametersatz findet diese Bifurkation bei $a = 0.0125$ statt und führt zu einem Fixpunkt mit $x_2 = \dots = x_N = 0.025$ und $x_1 = \dots = x_{N-1} = 2$. Dieser spaltet sich in zwei Fixpunkte, die dann für $a > 0.1$ näh-

4 Design hyperchaotischer Flüsse

rungsweise folgende Werte annehmen:

$$\text{FP1 : } \quad x_2 = x_4 = \dots = x_N = 0.0125;$$

$$x_1 = \dots = x_{N-1} = 0.0125/a$$

$$\text{FP2 : } \quad x_1 = x_3 = \dots = x_N = 4a - 0.0125;$$

$$x_2 = \dots = x_{N-1} = 4 - 0.0125/a$$

Bei einer Sattel-Knoten-Verzweigung entstehen immer zwei Fixpunkte mit unterschiedlichem Stabilitätsverhalten. In diesem Fall ist der Fixpunkt mit den größeren Zahlenwerten (Fixpunkt 2) für nicht zu großes a stabil. Das steht im Gegensatz zu dem oben betrachteten Fall mit ungeradem N , wo nur der Fixpunkt mit kleinen Zahlenwerten stabil sein kann. In der numerischen Simulation wird sich zeigen, daß sich das dynamische Verhalten für ungerades N um den Ursprung herum entfaltet, während es sich für gerades N um den Fixpunkt 2 herum abspielt.

Für $N = 3$ ist das System äquivalent zu Rösslers Gleichung für einfaches Chaos[2]. Mit den Parametern $\varepsilon = 0.1$, $b = 2$ und $d = 4$ findet man ausgehend von $a = 0$ mit steigendem a zunächst einen stabilen Fixpunkt, eine Hopfbifurkation² zu einem stabilen Grenzzyklus und dann einen Übergang ins Chaos über eine Reihe von Periodenverdopplungen (Abbildungen 4.2 und 4.3). Jenseits des in der Abbildung dargestellten Bereichs für a wird das System instabil. Das lineare Subsystem bildet hier einen expansiven harmonischen Oszillator. Für $x_2 < d$ beherrscht dieser das Verhalten des Systems, d. h. wir finden eine Oszillation mit exponentiell ansteigender Amplitude um den Fixpunkt $x = 0$ herum. Für $x_2 > d$

²Bei einer Hopfbifurkation wechselt der Realteil eines Paares komplex konjugierter Eigenwerte der Jacobimatrix das Vorzeichen.

4.1 Abstraktes System

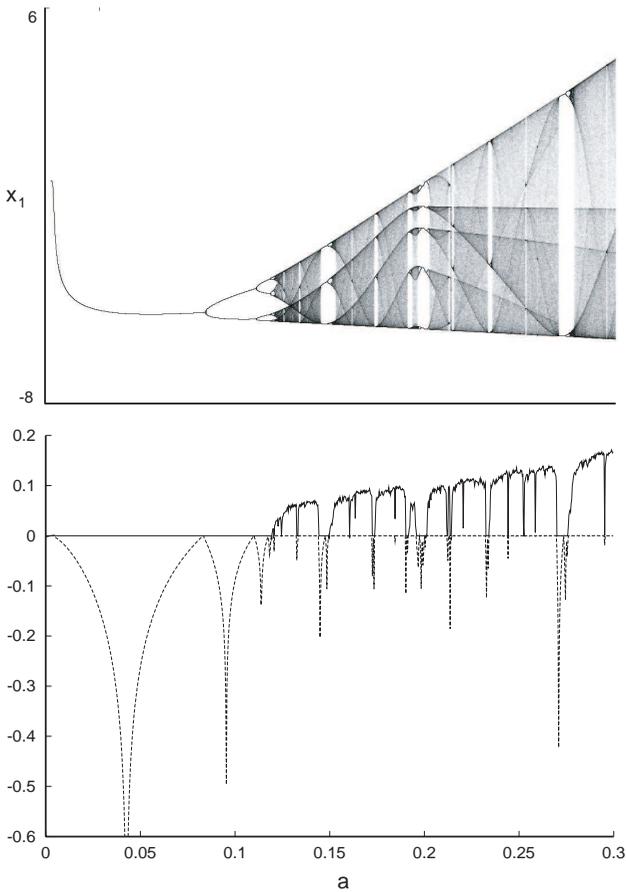


Abbildung 4.2: Bifurkationsdiagramm und Lyapunovexponenten von Gleichung 4.3 mit $N = 3$, $b = 2$, $d = 4$ und $\varepsilon = 0.1$ in Abhängigkeit von a . Für das Bifurkationsdiagramm sind die Werte von x_1 bei Nulldurchgängen von x_2 aufgetragen. Es sind nur die beiden größten Lyapunovexponenten dargestellt, der dritte ist stark negativ.

4 Design hyperchaotischer Flüsse

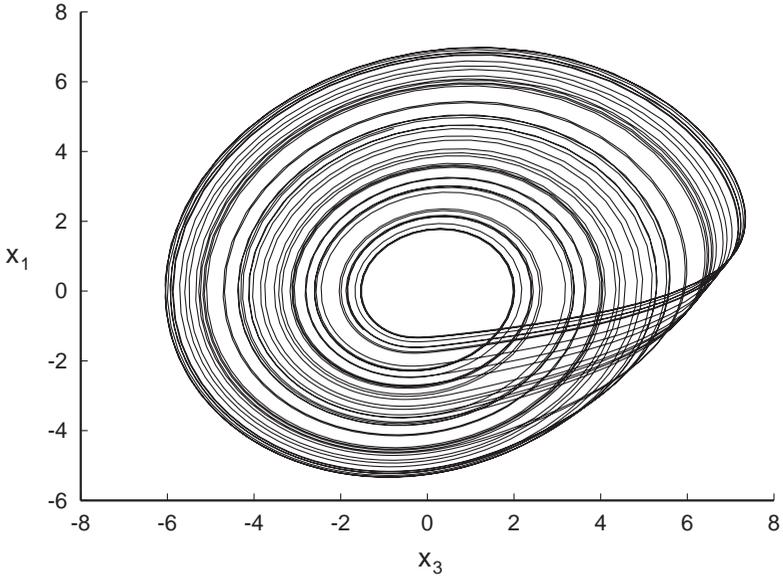


Abbildung 4.3: Phasenraumdarstellung eines chaotischen Attraktors (Gleichung 4.3, $\alpha = 0.17$, andere Parameter wie in Abbildung 4.2)

4.1 Abstraktes System

wird dann ein Schaltvorgang in x_3 ausgelöst, der die Trajektorie wieder näher an den Nullpunkt zurückführt.

Für $N = 4$ muß zunächst berücksichtigt werden, daß für sehr kleine a kein Fixpunkt existiert. Abbildung 4.4 zeigt das Bifurkationsdiagramm und die Lyapunovexponenten. Ab $a = 0.0125$ (mit den übrigen Parametern $\varepsilon = 0.1$, $b = 2$ und $d = 4$) gibt es einen stabilen Fixpunkt, der deutlich vom Nullpunkt verschieden ist. Aus einer Hopfbifurkation bei $a \approx 0.15$ geht dann für steigendes a ein Grenzzyklus hervor, der dann bei $a \approx 0.165$ durch eine sekundäre Hopfbifurkation³ in einen stabilen Torus übergeht. Bei $a \approx 0.25$ verliert der Torus seine Stabilität und das System springt auf einen anderen Grenzzyklus. Dieser Grenzzyklus ist bereits bei $a \approx 0.225$ in einer Sattel-Knoten-Bifurkation entstanden und hat mit dem Torus koexistiert. Ab ca. $a \approx 0.34$ wird ein zweiter Lyapunovexponent positiv, d.h. der Attraktor ist hyperchaotisch. Einen deutlich sichtbaren Unterschied in der Gestalt des Attraktor (z.B. aus Zeitreihen oder Phasenraumdarstellungen) findet man jedoch nicht. Das liegt daran, daß in einem mindestens vierdimensionalen System auch ein einfach chaotischer Attraktor bereits eine fraktale Dimension $D > 3$ haben kann, wenn der größte negative Lyapunovexponent betragsmäßig kleiner als der positive Exponent ist[22]. Beim Übergang zum Hyperchaos muß daher kein Sprung in der Dimensionalität der Attraktors stattfinden. Abbildung 4.5 zeigt eine Phasenraumdarstellung und einen Poincaré-Schnitt im hyperchaotischen Bereich.

Auch für $N = 5$ finden wir einen Weg ins Chaos, der über Pe-

³Bei einer sekundären Hopfbifurkation wechselt der Betrag eines Paares komplex konjugierter Floquetmultiplikatoren von einem Wert < 1 zu einem Wert > 1 .

4 Design hyperchaotischer Flüsse

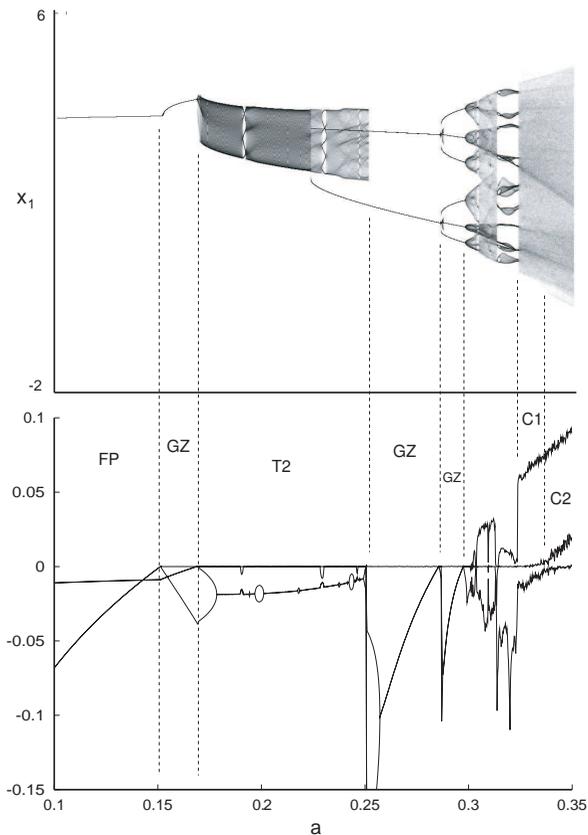


Abbildung 4.4: Bifurkationsdiagramm und Lyapunovexponenten von Gleichung 4.3 mit $N = 4$, $b = 2$, $d = 4$ und $\varepsilon = 0.1$ in Abhängigkeit von a . Für das Bifurkationsdiagramm sind die Werte von x_1 bei Maxima von x_3 aufgetragen. Die Bifurkationsberechnung wurde einmal für steigendes a und einmal für fallendes a durchgeführt, so daß zwischen $a \approx 0.225$ und $a \approx 0.25$ ein Hystereseeffekt zu sehen ist. Die Darstellung der Lyapunovexponenten gibt diesen Effekt nicht wieder, da sie nur für steigendes a berechnet wurde.

4.1 Abstraktes System

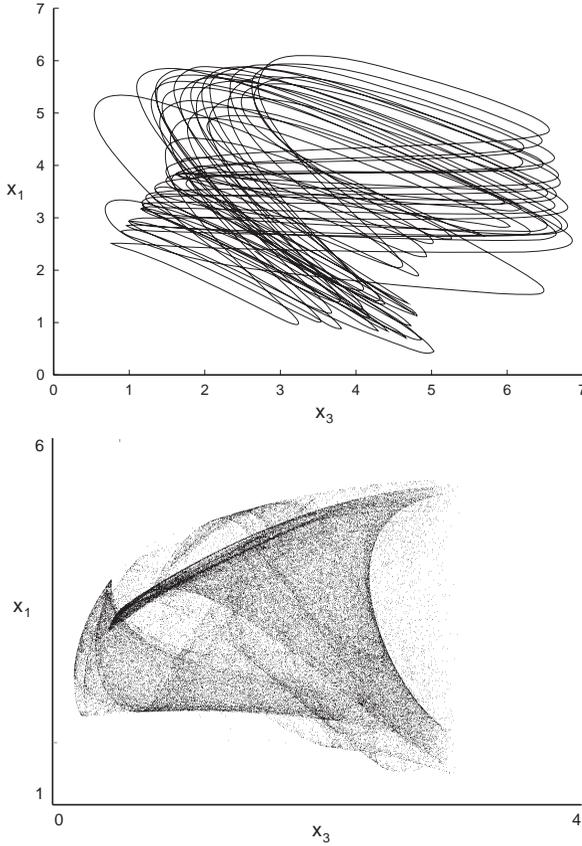


Abbildung 4.5: Projektion des Phasenraums und Poincaré-Schnitt von Gleichung 4.3 für $N = 4$, $b = 2$, $d = 4$, $\varepsilon = 0.1$ und $a = 0.35$. Die Schnittbedingung ist $x_N = 0.05$.

4 Design hyperchaotischer Flüsse

riodenverdopplungen und quasiperiodisches Verhalten führt (Abbildung 4.6). Die Abbildung gibt nur einen möglichen Weg wieder, teilweise gibt es mehrere koexistierende niedrigdimensionale Attraktoren. Schließlich folgt ein chaotischer Bereich, zunächst mit einem positiven Lyapunovexponenten. Bei weiter steigendem α kommen dann ein zweiter und dritter positiver Exponent hinzu. Ein hyperchaotischer Attraktor mit drei positiven Exponenten in einem fünfdimensionalen Phasenraum hat eine fraktale Dimension $4 < D < 5$. Ein Schnitt durch einen solchen Attraktor hat dann eine Dimension $3 < D < 4$ und erscheint in der Projektion auf eine zweidimensionale Ebene als relativ strukturlose Wolke (Abbildung 4.7 links oben). Wenn man die Dimension dieses Gebildes noch einmal um eins reduziert, indem man eine schmale Scheibe ausschneidet (Abbildung 4.7 unten), erkennt man eine kompliziert gefaltete flächige Struktur. Ein dritter Schnitt (Abbildung 4.7 oben rechts) läßt eine Struktur mit fraktaler Dimension $1 < D < 2$ erkennen, die einem ersten Schnitt durch einen einfach chaotischen Attraktor entspricht.

4.2 Stückweise lineare Formulierung

Der grundlegende Bauplan dieses hyperchaotischen Modellsystems (eine Kette harmonischer Oszillatoren und eine nichtlineare Schaltvariable) läßt sich auch mit anderen Gleichungen verwirklichen. Wenn man die letzte Zeile des Differentialgleichungssystems 4.2 bzw. 4.3 durch

$$\dot{x}_N = b(|x_{N-1} - d| + x_{N-1} - d) - x_N \quad (4.4)$$

ersetzt, erhält man eine stückweise lineare Version. Das Verhalten dieser Version ist grundsätzlich ähnlich wie das der nichtlinearen

4.2 Stückweise lineare Formulierung

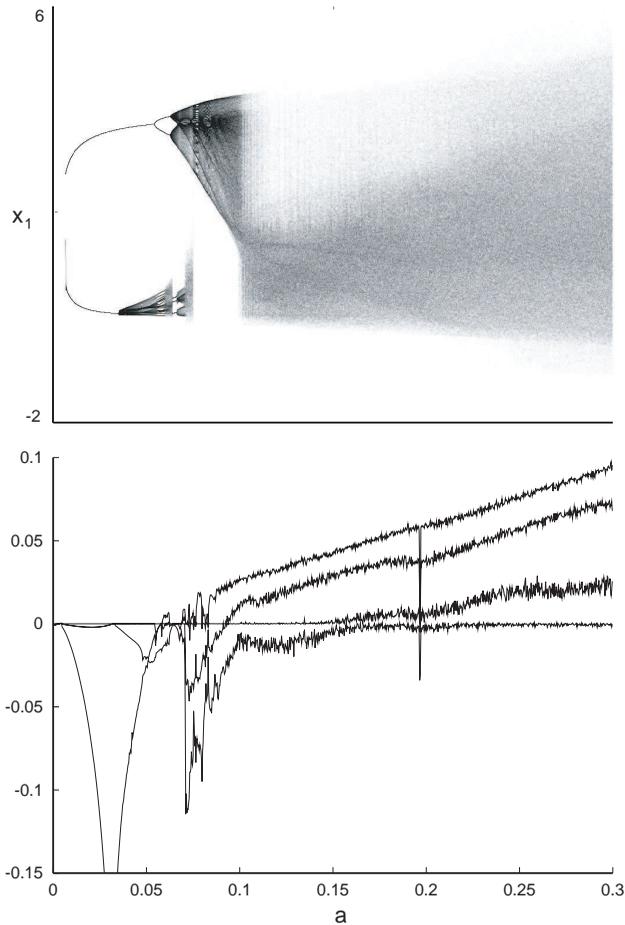


Abbildung 4.6: Bifurkationsdiagramm und Lyapunovexponenten von Gleichung 4.3 mit $N = 5$, $b = 2$, $d = 4$ und $\varepsilon = 0.1$ in Abhängigkeit von a . Für das Bifurkationsdiagramm sind die Werte von x_1 bei Nulldurchgängen von x_4 aufgetragen. Nur die größten vier Lyapunovexponenten sind dargestellt, der fünfte ist stark negativ.

4 Design hyperchaotischer Flüsse

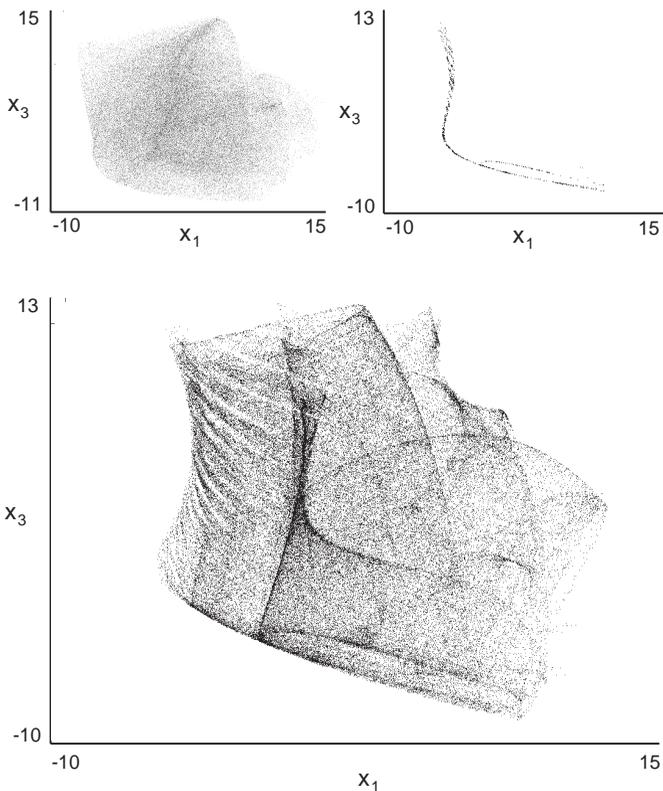


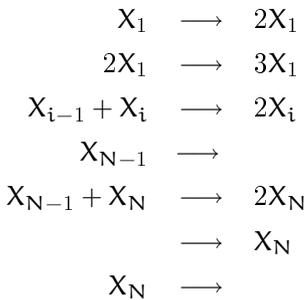
Abbildung 4.7: Schnitte erster, zweiter und dritter Ordnung durch einen Attraktor mit drei positiven Lyapunovexponenten (Gleichung 4.3 mit $N = 5$, $\alpha = 0.33$, andere Parameter wie in Abbildung 4.6). Links oben: Schnitt erster Ordnung bei $x_5 = 1$. Unten: Aus dem Ergebnis des ersten Schnitts wird eine Scheibe $x_2 = 0 \pm 0.05$ herausgeschnitten. Oben rechts: Als dritter Schnitt wird daraus eine Scheibe $x_4 = 1 \pm 0.05$ geschnitten.

4.3 Chemische Formulierung

Formulierung (Gleichung 4.3). Die Gleichung für x_N ist nicht nur stückweise linear, sondern auch stetig. Das bedeutet, daß die Lösung glatt ist, also einmal stetig differenzierbar. Ein Vorteil der stückweise linearen Differentialgleichung besteht darin, daß man sie mit spezialisierten numerischen Algorithmen effizienter simulieren kann. Außerdem kann man grundsätzlich für jeden linearen Teilbereich der Gleichung eine explizite Lösung formulieren, was bei nichtlinearen Gleichungen nur in Ausnahmefällen möglich ist. Mit Hilfe dieser expliziten Lösungen kann dann eine äquivalente diskrete Abbildung konstruiert werden[23].

4.3 Chemische Formulierung des verallgemeinerten Rössler-Systems

Betrachten wir die folgenden chemischen Reaktionen:



mit $i = 2, \dots, N - 1$. Wir haben hier ein offenes System mit einem konstanten Zufluß für X_N und Abflüssen erster Ordnung für X_{N-1} und X_N . Die übrigen Reaktionen sind autokatalytisch. Wenn wir für alle Reaktionen Massenwirkungskinetik annehmen,

4 Design hyperchaotischer Flüsse

können wir die Dynamik dieses Reaktionsnetzwerkes mit folgendem Differentialgleichungssystem beschreiben (dabei ist x_i die Konzentration der Substanz X_i):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2 + a x_1^2 \\ \dot{x}_i &= x_{i-1} x_i - x_i x_{i+1} \\ \dot{x}_{N-1} &= x_{N-2} x_{N-1} - x_{N-1} - b x_{N-1} x_N \\ \dot{x}_N &= \varepsilon + b x_N (x_{N-1} - d)\end{aligned}\tag{4.5}$$

mit $i = 2, \dots, N - 1$.

Dieses Differentialgleichungssystem hat deutliche strukturelle Ähnlichkeiten mit Gleichung 4.3. Die offensichtlichste ist, daß die Gleichung für x_N in beiden Systemen identisch ist. Aber auch die Teilsysteme $x_1 \dots x_{N-1}$ sind miteinander verwandt. So wie wir das lineare Subsystem von Gleichung 4.3 als aus harmonischen Oszillatoren zusammengesetzt betrachten können, so bestehen die Zeilen $x_1 \dots x_{N-1}$ von Gleichung 4.5 aus einer Kette von Lotka-Volterra-Oszillatoren.

4.3.1 Der Lotka-Volterra-Oszillator als Transformation des harmonischen Oszillators

Ebenso wie der harmonische Oszillator ist der Lotka-Volterra-Oszillator ein konservatives dynamisches System. Über diese gemeinsame Eigenschaft hinaus besteht aber noch eine engere Beziehung zwischen den beiden Oszillatoren. Gehen wir vom harmonischen Oszillator (hier mit Kreisfrequenz $\omega = 1$) aus:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x\end{aligned}\tag{4.6}$$

4.3 Chemische Formulierung

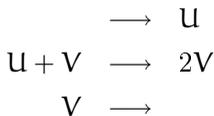
Wenn wir diesen in ein chemisches Modell verwandeln wollen, müssen wir zunächst eine Transformation durchführen, die dafür sorgt, daß die Variablen nur positive Werte annehmen. Die Variablen in einem chemischen Modell stehen für Konzentrationen oder Stoffmengen und können daher nicht negativ sein. Als Transformation bietet sich $u = e^x$, $v = e^y$ an. Damit ist $x = \ln u$, $y = \ln v$, $\dot{x} = \frac{\dot{u}}{u}$, $\dot{y} = \frac{\dot{v}}{v}$ und der Oszillator ist damit:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -u \ln v \\ \dot{v} &= v \ln u\end{aligned}\tag{4.7}$$

Die beiden Logarithmen erscheinen in chemischen Systemen als Fremdkörper. Wir ersetzen sie daher durch ihre Taylorentwicklung um den Fixpunkt des Systems $u = v = 1$. Mit $\ln a = 0 + (a - 1) + \dots$ haben wir dann

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u - uv \\ \dot{v} &= uv - v\end{aligned}\tag{4.8}$$

und das ist genau das Differentialgleichungssystem, daß die Kinetik der Reaktionen



beschreibt. Dabei handelt es sich um den Lotka-Volterra-Oszillator.

4 Design hyperchaotischer Flüsse

4.3.2 Die Transformation des verallgemeinerten abstrakten Systems

Die gleiche Transformation kann man auch auf Gleichung 4.3 anwenden. Dabei setzen wir $y_i = e^{x_i}$ für $i = 1 \dots N - 1$. x_N kann dabei unverändert bleiben, da es ohnehin nur positive Werte annimmt und nur Terme enthält, die man auch als chemische Reaktionskinetik interpretieren kann. Nachdem die auftretenden Logarithmen durch ihre Linearisierung ersetzt wurden, erhält man

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= (1 - a)y_1 - y_1y_2 + ay_1^2 \\ \dot{y}_i &= y_{i-1}y_i - y_iy_{i+1} \\ \dot{y}_{N-1} &= y_{N-2}y_{N-1} - y_{N-1} - y_{N-1}x_N \\ \dot{x}_N &= \varepsilon + bx_N(y_{N-1} - 1 - d)\end{aligned}\tag{4.9}$$

Da wir nach der ziemlich groben Näherung durch Linearisierung der Logarithmen nur noch qualitative Äquivalenz des chemischen Systems zu Gleichung 4.3 erwarten können, erlauben wir uns außer der Umbenennung der Variablen noch einige Anpassungen, die die qualitative Dynamik des Systems unbeeinflusst lassen und dann schließlich zu der oben angegebenen Gestalt (Gleichung 4.5) führen: In der ersten Zeile ersetzen wir $(1 - a) \rightarrow 1$, in der letzten Zeile nehmen wir die Zahl 1 in den Parameter d hinein ($1 + d \rightarrow d$), und schließlich versehen wir in der vorletzten Zeile den Term $-x_{N-1}x_N$ mit einem Faktor b . Damit lassen sich die Terme $\pm bx_{N-1}x_N$ in der letzten bzw. vorletzten Zeile als Kinetik der Reaktion $X_{N-1} + X_N \rightarrow 2X_N$ verstehen.

4.3.3 Dynamik des chemisch formulierten Systems

Ähnlich wie das lineare Subsystem von Gleichung 4.3 bilden die Zeilen für x_1 bis x_{N-1} von Gleichung 4.5 für $a = 0$ einen konservativen Fluß mit oszillierender oder quasiperiodischer Dynamik. Für $a > 0$ führt der autokatalytische Term zweiter Ordnung dazu, daß der Fluß spiralartig expandiert.

Wenn man a von $a = 0$ anwachsen läßt, findet man für $N = 3$, $b = 10$, $d = 2.5$ und $\varepsilon = 0.01$ eine Hopfbifurkation von einem Fixpunkt zu einem Grenzzyklus, dann einen Übergang zum Chaos über eine Reihe von Periodenverdopplungen. Abbildung 4.8 zeigt einen Attraktor aus dem chaotischen Bereich.

Für $N = 4$ finden wir bei sonst gleichen Parametern für steigendes a (ausgehend von $a = 0$): Fixpunkt — Hopfbifurkation zu einem Grenzzyklus — sekundäre Hopfbifurkation zu einem 2-Torus — Grenzzyklus auf einem Torus — Chaos auf einem fraktalisierten Torus — Hyperchaos mit zwei positiven Lyapunovexponenten (Abbildung 4.9).

Im fünfdimensionalen System ($N = 5$) finden wir über einen weiten Parameterbereich Hyperchaos mit drei positiven Exponenten. Die Bifurkationssequenz für von $a = 0$ steigendes a zeigt (Abbildung 4.10): Fixpunkt — Hopfbifurkation zu einem Grenzzyklus — sekundäre Hopfbifurkation zu einem 2-Torus — Grenzzyklen auf dem Torus — Chaos auf dem Torus — Hyperchaos mit zuerst zwei, dann drei positiven Exponenten. Für einige Parameterbereiche gibt es koexistierende Attraktoren. Abbildung 4.11 zeigt den Attraktor im Bereich mit drei positiven Exponenten.

Insgesamt finden wir qualitativ eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen für das abstrakte System (Gleichung 4.3).

4 Design hyperchaotischer Flüsse

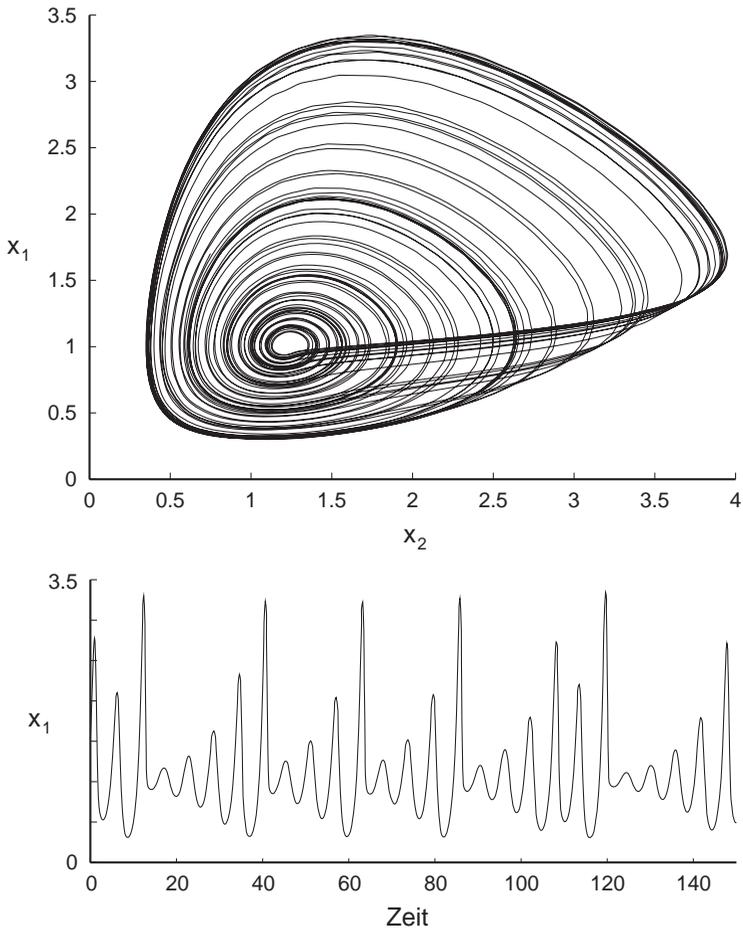


Abbildung 4.8: Phasenraumdarstellung und Zeitreihe des durch Gleichung 4.5 beschriebenen Systems mit drei Variablen im chaotischen Bereich. Die Parameter sind $N = 3$, $a = 0.22$, $b = 10$, $d = 2.5$ und $\varepsilon = 0.01$.

4.3 Chemische Formulierung

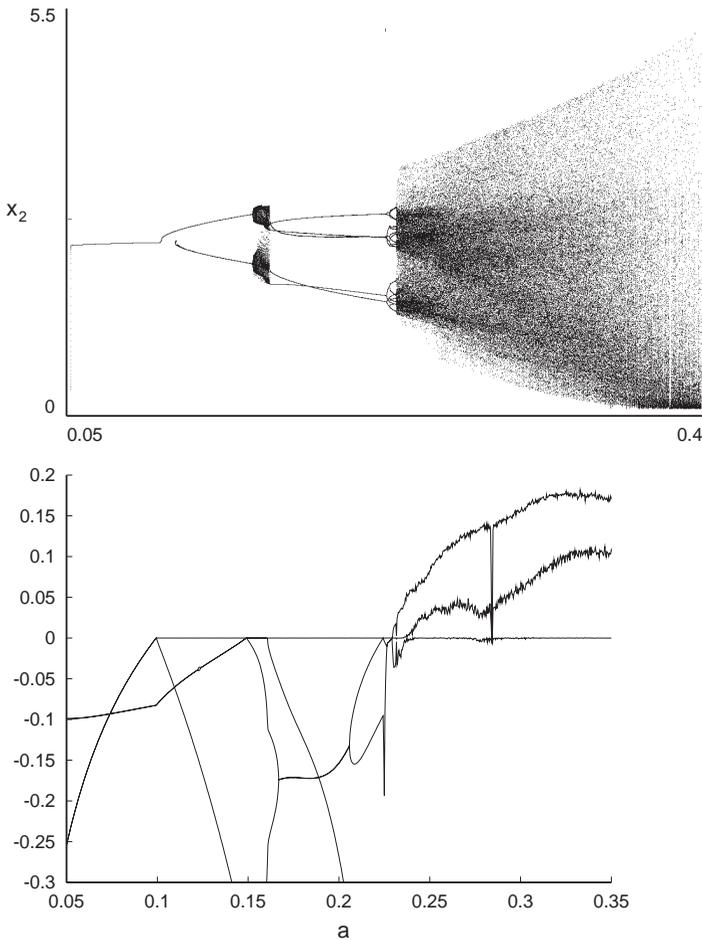


Abbildung 4.9: Bifurkationsdiagramm und Lyapunovexponenten von Gleichung 4.5 mit $N = 4$ in Abhängigkeit von a ; übrige Werte wie in Abbildung 4.8. Für das Bifurkationsdiagramm sind die Werte von x_2 bei Maxima von x_3 aufgetragen.

4 Design hyperchaotischer Flüsse

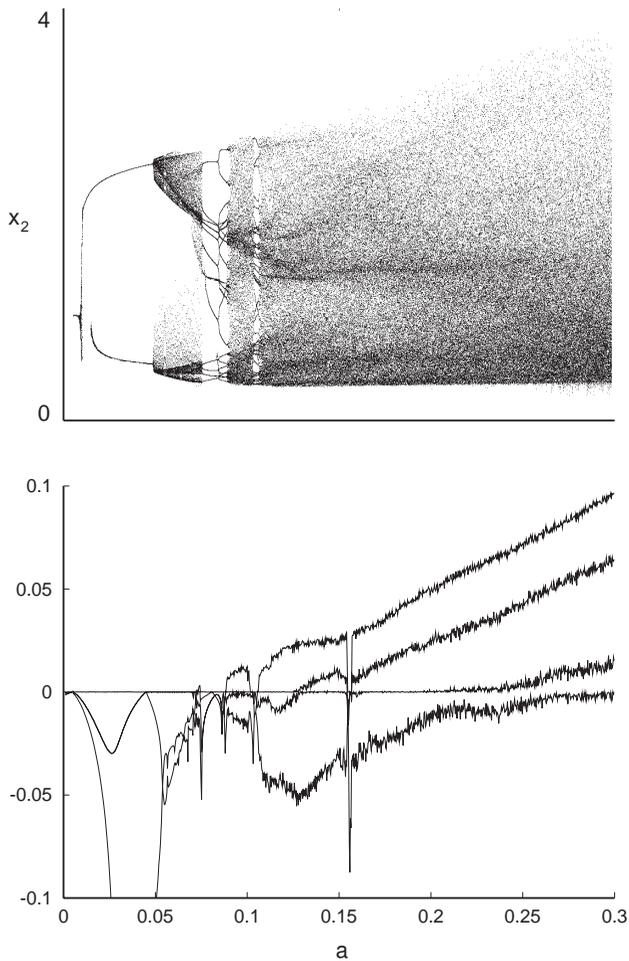


Abbildung 4.10: Bifurkationsdiagramm und Lyapunovexponenten von Gleichung 4.5 mit $N = 5$ in Abhängigkeit von a ; übrige Werte wie in Abbildung 4.8. Für das Bifurkationsdiagramm sind die Werte von x_2 bei Maxima von x_3 aufgetragen.

4.3 Chemische Formulierung

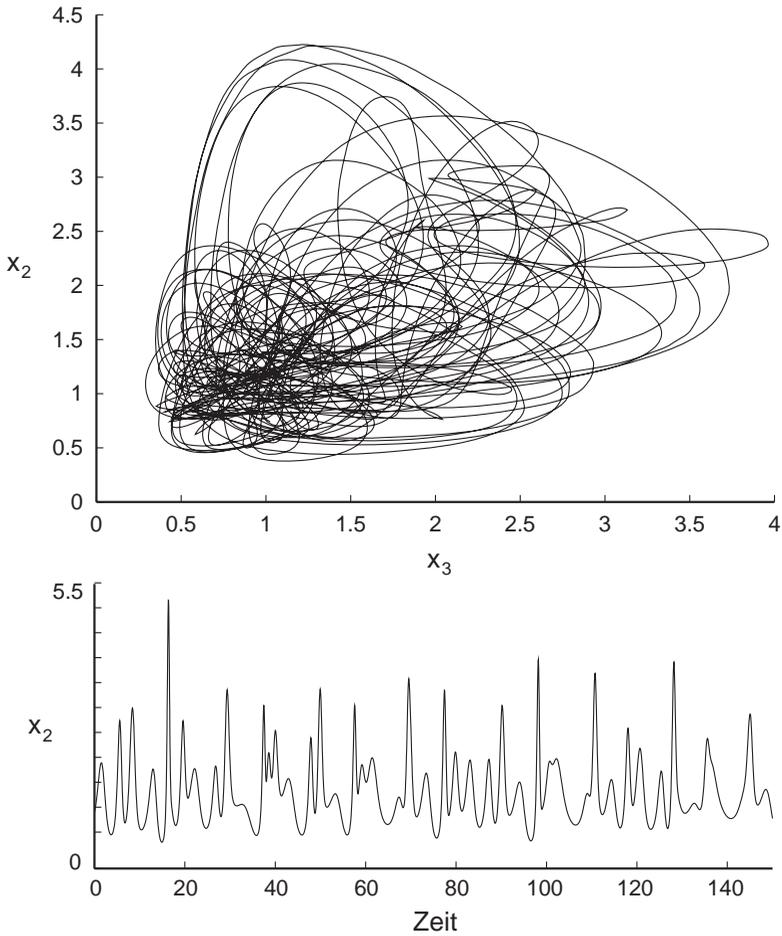


Abbildung 4.11: Phasenraumdarstellung und Zeitreihe des durch Gleichung 4.5 beschriebenen Systems mit fünf Variablen im chaotischen Bereich mit drei positiven Lyapunovexponenten. Die Parameter sind $N = 5$, $\alpha = 0.27$, sonst wie in Abbildung 4.8.

5 Zerlegung des verallgemeinerten Rösslersystems in Elementarmoden

Kehren wir nochmal zum abstrakten System aus Abschnitt 4.1 zurück. Meyer et al.[16] haben gezeigt, daß man die Struktur von 4.3 genauer untersuchen kann, wenn man den linearen Teil so transformiert, daß die Elementarmoden separiert werden.

5.1 Durchführung der Elementarmodentransformation

Ausgangspunkt ist Gleichung 4.3:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - x_N \mathbf{e}_{N-1} \\ \dot{x}_N &= \varepsilon + b x_N (x_{N-1} - d)\end{aligned}\tag{5.1}$$

Mit einer beliebigen linearen Transformation $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{S}\mathbf{y}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{y} - x_N \mathbf{S}^{-1}\mathbf{e}_{N-1} \\ \dot{x}_N &= \varepsilon + b x_N (\mathbf{e}_{N-1}^T \mathbf{S}\mathbf{y} - d)\end{aligned}\tag{5.2}$$

oder mit den Ersetzungen $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$, $\mathbf{c} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{e}_{N-1}$ und $\mathbf{b} = \mathbf{e}_{N-1}^T \mathbf{S}$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{B}\mathbf{y} - x_N \mathbf{c} \\ \dot{x}_N &= \varepsilon + b x_N (\mathbf{b}\mathbf{y} - d)\end{aligned}\tag{5.3}$$

5 Elementarmodenzerlegung

Im folgenden geht es nun darum, \mathbf{S} so zu bestimmen, daß das lineare Subsystem statt aus einer linearen Kette aus voneinander unabhängigen harmonischen Oszillatoren besteht.

Für \mathbf{S} wählen wir zunächst eine Matrix \mathbf{S}_1 , die spaltenweise aus Eigenvektoren von \mathbf{A} besteht. Die Matrix $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} = \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}_1$ ist dann eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von \mathbf{A} in der Diagonale:

$$\mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{N-1} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

In dem Differentialgleichungssystem sind nun die Variablen y_i (mit $i = 1 \dots N-1$) vollständig entkoppelt. Allerdings haben wir es dafür mit komplexen Koeffizienten zu tun. Wir wissen, daß für ungerades N (d.h. das lineare Subsystem hat eine gerade Anzahl von Variablen) alle Eigenwerte als Paare komplex konjugierter Größen vorkommen. Nur für gerades N finden wir genau einen reellen Eigenwert. Ich sortiere nun die Eigenwerte bzw. Eigenvektoren so, daß die zusammengehörenden komplex konjugierten Paare nebeneinander liegen, der reelle Eigenwert soll (wenn vorhanden) an den letzten Platz (λ_{N-1}) gerückt werden. Jeweils zwei benachbarte Gleichungen des linearen Teilsystems bilden nun einen harmonischen Oszillator:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \omega i & 0 \\ 0 & \alpha - \omega i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Die Kreisfrequenz der Oszillation ist ω , der Koeffizient der spiralartigen Expansionsbewegung ist α . Eine Transformation

5.1 Durchführung der Elementarmodentransformation

$(y_1, y_2) = \mathbf{T} \cdot (z_1, z_2)$ mit $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ führt zu folgender Gestalt des Einzeloszillators:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Um diese Transformation auch auf Gleichung 5.3 anzuwenden, setzen wir $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2$, dabei ist \mathbf{S}_1 wie oben aus den Eigenvektoren zusammengesetzt, und \mathbf{S}_2 aus den Bausteinen \mathbf{T} und bei geradem N einer zusätzlichen 1:

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} -i & 1 & & & \\ i & 1 & & & \\ & & -i & 1 & \\ & & i & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

bzw.

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} -i & 1 & & & \\ i & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -i & 1 \\ & & & i & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Für $\mathbf{B} = \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2$ ergibt sich dann die gewünschte Gestalt mit rein reellen Koeffizienten und entkoppelten Elementaroszilla-

5 Elementarmodenzerlegung

toren ($\lambda_{2m-1} = \alpha_m + \omega_m i$ und $\lambda_{2m} = \alpha_m - \omega_m i$):

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\omega_1 & & & & \\ \omega_1 & \alpha_1 & & & & \\ & & \alpha_2 & -\omega_2 & & \\ & & \omega_2 & \alpha_2 & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Wenn wir \mathbf{B} in dieser Gestalt beibehalten wollen, haben wir noch die Freiheit, in jedem der Elementaroszillatoren eine beliebige orthonormale Transformation durchzuführen (damit wird die Phasenlage und die lineare Skalierung der einzelnen Oszillatoren festgelegt). Diese Freiheit können wir ausnutzen, um entweder die Kopplung y an x_N (das entspricht dem Vektor \mathbf{b} in 5.3) oder die Rückkopplung von x_N auf das lineare Subsystem y (Vektor \mathbf{c} in 5.3) beliebig zu wählen. Die jeweils andere Kopplung ist damit festgelegt.

In diesem Fall entscheide ich mich dafür, die Kopplung des linearen Teilsystems an x_N so zu wählen, daß jeweils die zweite Variable aus jedem Elementaroszillator mit Kopplungskoeffizienten 1 auf x_N einwirkt. Dafür definiere ich eine dritte Transformation \mathbf{S}_3 (damit ist $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3$), die eine Rotation und eine lineare Skalierung in jedem zweidimensionalen Elementaroszillator enthält:

$$\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} k_1 \cos \beta_1 & -k_1 \sin \beta_1 & & & & \\ k_1 \sin \beta_1 & k_1 \cos \beta_1 & & & & \\ & & k_1 \cos \beta_1 & -k_1 \sin \beta_1 & & \\ & & k_1 \sin \beta_1 & k_1 \cos \beta_1 & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

5.2 Bedeutung der Elementarmodenzerlegung

(5.10)

$\mathbf{B} = \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3$ bleibt davon unbeeinflusst. Die Werte für k_m und β_m ergeben sich als Lösung der Gleichung $\mathbf{e}_{N-1} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{e}_{N-1} \cdot \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3 = \mathbf{b} = (0, 1, 0, 1, \dots)$. Dabei besagt $\mathbf{b} = (0, 1, 0, 1, \dots)$, daß jede zweite Variable aus dem linearen Subsystem mit Koeffizienten 1 auf x_N wirkt. Die Rückkopplung ergibt sich dann als $\mathbf{c} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e}_{N-1}$. Das Ergebnis der Modentransformation ist daher:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{B} \mathbf{y} - x_N \mathbf{c} \\ \dot{x}_N &= \varepsilon + b x_N \left(\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} y_{2j} - d \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

\mathbf{B} erhalten wir mit Gleichung 5.9 aus den Eigenwerten von \mathbf{A} . Die Werte für \mathbf{c} können mit dem oben skizzierten Verfahren bestimmt werden.

Im allgemeinen hängt \mathbf{c} von α (dem einzigen Parameter des linearen Subsystems) ab. Einen expliziten Ausdruck für \mathbf{c} anzugeben sollte für $N = 4$ und $N = 5$ prinzipiell möglich sein, gelingt mit Mathematica[24] aber nur für $N = 4$. Ich habe daher die Werte numerisch bestimmt. Wie bei den Eigenwerten zeigt sich auch hier, daß einige Komponenten von \mathbf{c} in dem betrachteten Bereich $0 \leq \alpha < 0.5$ als konstant und andere als linear abhängig von α betrachtet werden können (siehe Tabelle 5.1).

5.2 Bedeutung der Elementarmodenzerlegung

Alle linearen Systeme lassen sich in Elementarmoden zerlegen. Die Ableitung, die im vorherigen Abschnitt angegeben wurde, ist völlig

5 Elementarmodenzerlegung

N	c
4	$(-0.265a, 0.500, 0.500)$
5	$(-0.134a, 0.277, -0.135a, 0.723)$
6	$(-0.0720a, 0.167, -0.125a, 0.500, 0.333)$
7	$(-0.0414a, 0.108, -0.0935a, 0.350, -0.0521a, 0.543)$

Tabelle 5.1: Werte für c in Gleichung 5.11. Die Werte sind numerisch bestimmt und können für $0 < a < 0.5$ als in guter Näherung konstant bzw. linear abhängig von a betrachtet werden.

unabhängig von der speziellen Gestalt der Matrix A . Die Tatsache, daß die Transformation *möglich* ist, ist also keine Überraschung. Dennoch stellt sie eine nützliche Betrachtungsweise dar.

Zunächst ist bemerkenswert, daß das System die maximal mögliche Anzahl von Oszillatoren enthält. Wenn das lineare Subsystem $N - 1$ Variablen hat und $N - 1$ gerade ist, dann gibt es $\frac{N-1}{2}$ Oszillatoren und keine Variable, die nicht an einem Oszillator beteiligt ist. Wenn $N - 1$ ungerade ist, gibt es genau eine Variable, die nicht zu einem Oszillator gehört. Anschaulich kann man sich diese Tatsache durch die strukturelle Verwandtschaft der linearen Kette mit dem harmonischen Oszillator erklären.

Das verallgemeinerte Rösslersystem hat auch in einem gewissen Sinne maximale Komplexität: Es treten keine offen ersichtlichen Symmetrien oder Entartungen auf; alle Oszillatoren haben unterschiedliche Frequenzen und sind mit unterschiedlicher Stärke an die Schaltvariable angekoppelt.

Das Ergebnis ist also, daß wir zwei Systeme haben, deren Dynamik völlig äquivalent (sogar identisch) ist, die aber eine deutlich

5.2 Bedeutung der Elementarmodenzerlegung

unterschiedliche Struktur besitzen. Das Ausgangssystem enthält eine Kette aus gleichartigen Variablen, die jeweils nur mit ihren beiden Nachbarn gekoppelt sind. Diese Kette ist lediglich an einem Ende an die Schaltvariable gekoppelt. Das transformierte System hingegen besteht aus mehreren untereinander unabhängigen Oszillatoren, die alle unterschiedliche Parameter haben und jeweils einzeln an die Schaltvariable angekoppelt sind.

Meyer[17] bzw. Meyer et al.[16] haben auch gezeigt, daß die transformierte Darstellung Einsichten in das dynamische Verhalten des Systems erlaubt. So findet man zum Beispiel bei $N = 5$ für manche Parameterbereiche zwei koexistierende einfach chaotische Attraktoren. Es läßt sich zeigen, daß bei jedem dieser beiden Attraktoren jeweils einer der beiden Elementaroszillatoren die Dynamik dominiert.

Während das transformierte System für die Erklärung solcher Multistabilitätsphänomene sehr hilfreich ist, scheint es zum Verständnis des höchstdimensionalen Hyperchaos eher problematisch: Es ist nicht intuitiv, daß durch Hinzufügen *eines* Oszillators zum System (zum Beispiel von $N = 3$ zu $N = 5$) *zwei* zusätzliche positive Lyapunovexponenten entstehen.

Schließlich könnte man auf das transformierte System zurückgreifen, wenn man untersuchen möchte, wie sich das System bei Abweichungen von der Kettenstruktur verhält.

6 Das Rösslersystem in Zylinderkoordinaten

Ein auffallendes Merkmal des Rösslerattraktors (Gleichung 4.3 mit $N = 3$) ist, daß die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich der Fluß um den Ursprung der x_1 - x_2 -Ebene dreht, in guter Näherung konstant, und zwar $\omega \approx 1$ ist. Es liegt daher nahe, zu untersuchen, ob das System in Zylinderkoordinaten eine besonders einfache und gut verständliche Form annimmt.

6.1 Transformation in Zylinderkoordinaten

Ausgehend vom Rösslersystem (identisch mit Gleichung 4.3 für $N = 3$)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - y \\ \dot{y} &= x - z \\ \dot{z} &= \varepsilon + bz(y - d)\end{aligned}\tag{6.1}$$

wollen wir eine Transformation in ein zylindrisches Koordinatensystem durchführen. Mit $x \rightarrow r \cos \varphi$ und $y \rightarrow r \sin \varphi$, z bleibt

6 Das Rösslersystem in Zylinderkoordinaten

unverändert, ergäbe sich :

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{ar}{2} + \frac{ar \cos 2\varphi}{2} - z \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= 1 - \frac{z \cos \varphi}{r} - a \cos \varphi \sin \varphi \\ \dot{z} &= \varepsilon + bz(r \sin \varphi - d)\end{aligned}\tag{6.2}$$

Das ist nicht die erhoffte Vereinfachung. Der nächste Schritt ist daher, den Expansionsterm im linearen Subsystem (x, y) symmetrisch zu formulieren.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - y \\ \dot{y} &= ay + x - z \\ \dot{z} &= \varepsilon + bz(y - d)\end{aligned}\tag{6.3}$$

Simulationen zeigen, daß sich das Verhalten des Systems dadurch nicht qualitativ ändert. Die Koordinatentransformation ergibt nun schon eine deutlich einfachere Differentialgleichung.

$$\begin{aligned}\dot{r} &= ar - z \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= 1 - \frac{z \cos \varphi}{r} \\ \dot{z} &= \varepsilon + bz(r \sin \varphi - d)\end{aligned}\tag{6.4}$$

Eine weitere Vereinfachung ist möglich, wenn wir berücksichtigen, daß der Faltvorgang und der Anstieg der Variable z nicht bei beliebiger Phase des Subsystems (x, y) auftritt. Vielmehr wird er nur ausgelöst, wenn y die Schwelle $y = 4$ überschreitet. Da r bei den hier in Frage kommenden Werten für a relativ langsam anwächst und $y = r \sin \varphi$ ist, ist zu erwarten, daß die Schwelle

6.1 Transformation in Zylinderkoordinaten

überschritten wird, wenn $\sin \varphi$ sich in der Nähe des Maximums $\sin \varphi = 1$ befindet. Das bedeutet, daß z nur dann nicht sehr klein ist, wenn $\sin \varphi \approx 1$ und damit $\cos \varphi \approx 0$ ist. Wir können daher (zumindest wenn wir nur an qualitativen Aussagen interessiert sind) $z \sin \varphi = z$ und $z \cos \varphi = 0$ annehmen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= ar - z \\ \dot{\varphi} &= 1 \\ \dot{z} &= \varepsilon + bz(r \sin \varphi - d)\end{aligned}\tag{6.5}$$

Dieses Differentialgleichungssystem läßt sich auch als nicht autonomes, periodisch getriebenes Differentialgleichungssystem mit zwei Variablen auffassen.

Zum Vergleich sei hier noch die Rücktransformation des vereinfachten Systems angeführt:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - y - \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dot{y} &= ay + x - \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dot{z} &= \varepsilon + bz(y - d)\end{aligned}\tag{6.6}$$

Der Unterschied zum Ausgangssystem (Gleichung 6.1) besteht darin, daß der Faltvorgang nicht längs der y -Achse sondern auf den Ursprung zu stattfindet.

Bei der Simulation des Systems ist zu berücksichtigen, daß φ eine Winkelvariable ist und daher auf den Bereich $0 \leq \varphi < 2\pi$ beschränkt sein sollte. Das erreicht man einfach, indem man $\varphi \rightarrow \varphi - 2\pi$ setzt, wenn φ den Wert 2π überschreitet (entsprechend müßte natürlich der Fall $\varphi < 0$ betrachtet werden, doch kommt er bei dieser Differentialgleichung offensichtlich nicht vor).

6 Das Rösslersystem in Zylinderkoordinaten

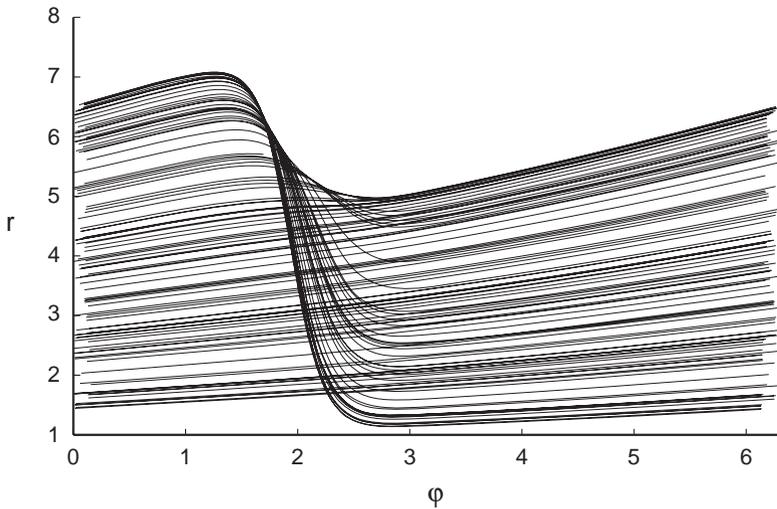


Abbildung 6.1: Chaotischer Attraktor von Gleichung 6.5 mit $a = 0.08$, $b = 2$, $d = 4$ und $\varepsilon = 0.1$.

6.1 Transformation in Zylinderkoordinaten

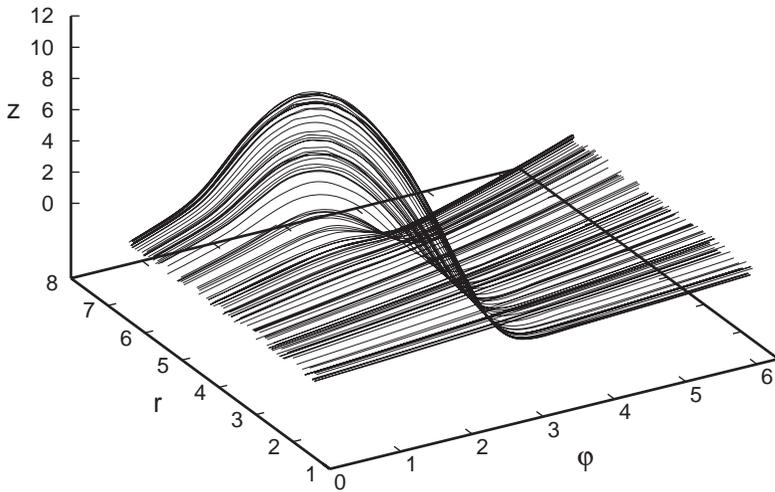


Abbildung 6.2: Dreidimensionale Darstellung des Attraktors aus Abbildung 6.1.

6 Das Rösslersystem in Zylinderkoordinaten

Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen einen chaotischen Attraktor des Systems (vergleiche Abbildung 4.3 für einen entsprechenden Attraktor des nicht transformierten Systems). Der Fluß zeigt eine gleichmäßige exponentielle Divergenz in r -Richtung. Wenn r im Bereich $\varphi \approx \pi/2$ größer als 4 wird, findet ein Faltvorgang statt. Die Bifurkationssequenz für anwachsendes a (ausgehend von $a = 0$) entspricht qualitativ der von Gleichung 4.3 für $N = 3$, beginnt jedoch bereits mit einem Grenzzyklus: Grenzzyklus — Periodenverdopplungen — Chaos mit gelegentlichen periodischen Fenstern. Sie endet allerdings an dem Punkt, wo r so groß wird, daß es nach der Faltung auf einen negativen Wert zurückgeworfen wird (Je größer r vor dem Faltvorgang, desto kleiner danach). Für negatives r aber ist das System nicht mehr stabil, es entschwindet mit $r \rightarrow -\infty$. Gerade an dieser Stelle würde Gleichung 4.3 vom Spiralchaos zum Schraubenchaos übergehen. Es ist verständlich, daß die Analogie zwischen den beiden Systemen hier endet, beruhen doch die Vereinfachungen, die wir oben an den transformierten Gleichungen vorgenommen haben, darauf, daß der Fluß des Rösslerattraktors sich mit annähernd konstanter Winkelgeschwindigkeit um den Ursprung dreht. Diese Eigenschaft verliert aber der Rösslerattraktor beim Übergang zum Schraubenchaos.

6.2 Verallgemeinerung für negative r

Die Transformation von kartesischen in Zylinderkoordinaten ist natürlich nur für positive r definiert. Tatsächlich können jedoch beim vereinfachten transformierten Differentialgleichungssystem (Gleichung 6.5) negative Werte für r auftreten, wenn man a zu groß wählt. Da der Faltmechanismus für negative r nicht funktio-

6.2 Verallgemeinerung für negative r

niert wird das System instabil. Das Problem ist, daß durch negative r zwar ein Schaltvorgang in z ausgelöst werden kann (wenn $r \sin \varphi > 4$), die Rückwirkung auf r dann aber das falsche Vorzeichen hat. Dies läßt sich nun umgehen, indem man in der Gleichung für z den Term ϵ durch ϵr ersetzt. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= ar - z \\ \dot{\varphi} &= 1 \\ \dot{z} &= \epsilon r + bz(r \sin \varphi - d) \end{aligned} \tag{6.7}$$

Wenn nun die Schwelle $r \sin \varphi > 4$ überschritten wird, dann erhalten wir einen positiven Ausschlag von z , wenn r positiv ist und einen negativen, wenn r negativ ist. Für kleine a bleiben die Attraktoren mit positivem und negativem r getrennt, d.h. es gibt die gleiche Bifurkationssequenz wie bei Gleichung 6.5 in zwei zueinander symmetrischen Ausführungen. Ab einem bestimmten Wert für a verschmelzen die beiden chaotischen Attraktoren zu einem.

In Abbildung 6.3 sieht man, wie sich in diesem chaotischen Bereich die positiven und negativen Ausschläge von z unregelmäßig abwechseln. Abbildung 6.4 zeigt, daß die positiven und negativen Schaltvorgänge um π phasenverschoben sind.

6 Das Rösslersystem in Zylinderkoordinaten

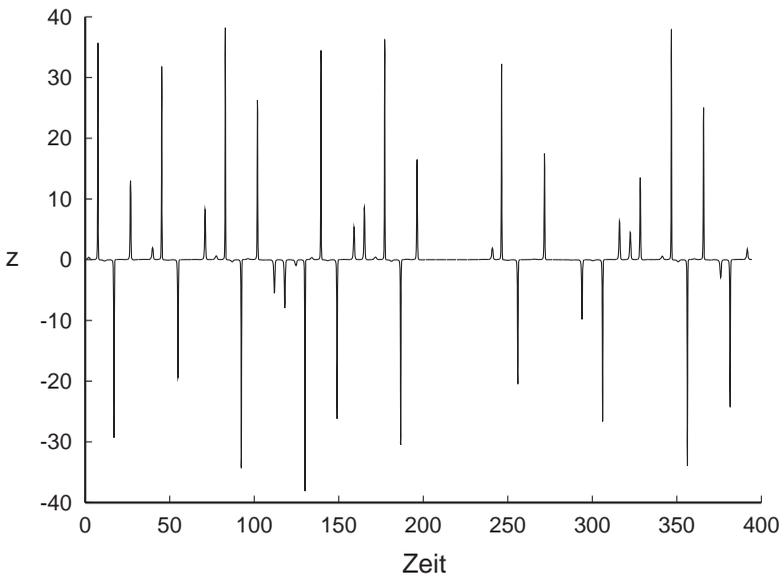


Abbildung 6.3: Zeitreihe eines chaotischen Attraktors von Gleichung 6.7 mit $a = 0.2$, $b = 2$, $d = 4$ und $\varepsilon = 0.1$.

6.2 Verallgemeinerung für negative r

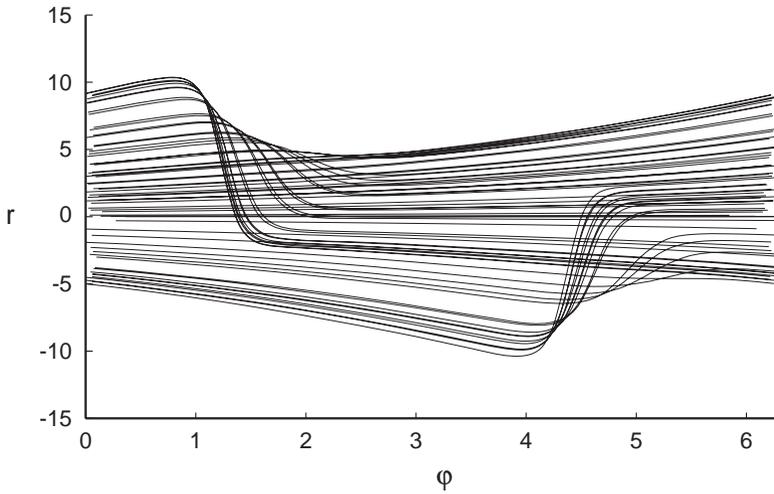


Abbildung 6.4: Phasenraumdarstellung des Attraktors aus Abbildung 6.3.

7 Zusammenfassung und Diskussion

In dieser Arbeit wird eine prototypische Implementierung einer chaotischen Hierarchie in gewöhnlichen Differentialgleichungen vorgestellt, die auf einer Verallgemeinerung des Rösslersystems[2] beruht. Die chaotische Hierarchie kann möglicherweise eine konzeptuelle Verknüpfung zwischen hochdimensionaler Dynamik und der relativ gut verstandenen niedrigdimensionalen nichtlinearen Dynamik herstellen.

Das N -dimensionale Differentialgleichungssystem besteht aus einer einzelnen nichtlinearen Schaltvariable und einem linearen Teilsystem mit $N - 1$ Variablen. Das lineare Teilsystem hat die Gestalt einer Kette, die strukturell dem harmonischen Oszillator ähnelt.

Für $N = 3$, $N = 4$ und $N = 5$ findet man in dem System chaotisches bzw. hyperchaotisches Verhalten mit der maximalen Anzahl positiver Lyapunovexponenten. Für größere N steigt die Zahl der Exponenten weiter an, ist jedoch nicht mehr maximal. Ab welchem N nicht mehr die maximale Anzahl positiver Exponenten zu erzielen ist, ließ sich numerisch nicht exakt feststellen.

Die Kette des linearen Subsystems läßt sich formal auch als Diskretisierung einer partiellen Differentialgleichung, einer Transportgleichung auffassen. Zwar sind die Bedingungen dafür, daß die diskrete Kette eine numerisch sinnvolle Approximation der partiellen Differentialgleichung ist, sicher nicht erfüllt. Dennoch begründet dieser Zusammenhang eine Verwandtschaft zwischen dem vorgestellten System und time-delay-Differentialgleichungen.

7 Zusammenfassung und Diskussion

Eine Zeitverzögerung in einem dynamischen System läßt sich immer auch explizit als Transportgleichung formulieren.

In Abschnitt 5 wird eine Elementarmodentransformation des verallgemeinerten Rösslersystems demonstriert. Ein Ergebnis ist, daß die Elementarmoden immer die maximale Anzahl von Oszillatoren enthalten. Die lineare Kette mit angekoppelter Schaltvariable an einem Ende ist demnach dynamisch äquivalent zu mehreren voneinander unabhängigen harmonischen Oszillatoren, die an eine zentrale Schaltvariable gekoppelt sind.

Im verallgemeinerten Rösslersystem steigt die Anzahl der positiven Lyapunovexponenten mit der Dimensionalität des Systems[16]. Es ist aber nicht davon auszugehen, daß es sich um die optimale Lösung handelt, um eine maximale Anzahl positiver Exponenten bei gegebener Dimensionalität zu erzielen. Eine Variation der Parameter der Elementarmodentransformation könnte benutzt werden, um nach Systemen mit einer größeren Anzahl positiver Exponenten zu suchen.

Die zugrundeliegende Struktur des verallgemeinerten Rösslersystems läßt sich auf unterschiedliche Weisen realisieren. Neben der Formulierung als abstraktes prototypisches System (mit exakt einer Nichtlinearität, Abschnitt 4.1) kann man auch ein stückweise lineares System angeben (Abschnitt 4.2), das die explizite Konstruktion einer äquivalenten diskreten Abbildung erlaubt. Auch die Realisierung als chemisches Reaktionsnetzwerk ist möglich und zeigt vergleichbares Verhalten (Abschnitt 4.3).

In Abschnitt 6 wird noch ein weiteres chaotisches System beschrieben, das auf einer Koordinatentransformation des dreidimensionalen Rösslersystems in Zylinderkoordinaten beruht. Bei diesem System lassen sich im Phasenraumdiagramm die grundlegenden Mechanismen chaotischer Dynamik — Strecken und Fal-

ten — besonders anschaulich zeigen. Es bleibt zu untersuchen, ob sich auch auf diesem Prototypmodell eine chaotische Hierarchie errichten läßt.

A Verwendete numerische Methoden

Alle numerischen Simulationen sowie die Berechnung der Lyapunovexponenten wurden mit vom Verfasser in der Sprache Pascal entwickelten Programmen durchgeführt.

Als Betriebssystem diente Linux (verschiedene Versionen), es wurde der GNU Pascal Compiler (gpc) eingesetzt[25].

Für die numerische Integration wurden Runge-Kutta-Fehlberg Algorithmen verschiedener Ordnung implementiert. Dabei handelt es sich um explizite Einzelschrittverfahren mit automatischer Schrittweitensteuerung.

Die Berechnung der Lyapunovexponenten erfolgte nach dem Wolf-Algorithmus[19], teilweise mit Modifikationen von Grond[18].

Eigenwertberechnungen und die Elementarmodentransformation wurden teilweise mit Mathematica[24] durchgeführt.

Verwendete freie Software

Die vorliegende Arbeit wäre in dieser Form nicht ohne freie Software möglich gewesen. Ich danke den Autoren des Betriebssystems Linux und der dazugehörigen Tools, des Textsatzsystems $\text{T}_{\text{E}}\text{X}/\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}/\text{L}_{\text{Y}}\text{X}$ und des Grafikprogramms Gnuplot.

Meine akademischen Lehrer waren:

Gerold Baier
Michael Behal
Walter Dittrich
Friedrich Gönnerwein
Helmut Fischer
Heidrun Hesse
Dietrich Hoffmann
Claus Kahlert
Michael Klein
Ursula Kummer
Herbert Pfister
Horst Prehn
Otto Rössler
Hanns Ruder
Wolfgang Schweizer
Friedrich Seelig

Literaturverzeichnis

- [1] E. N. Lorenz, *J. Atmosph. Sc.* **20**, 130 (1963)
- [2] O. E. Rössler, «An equation for continuous chaos», *Phys. Letters* **57A**, 397–398 (1976)
- [3] J. Argyris, G. Faust und M. Haase, *Die Erforschung des Chaos*, Braunschweig 1994
- [4] O. E. Rössler, «An equation for hyperchaos», *Phys. Lett.* **A71** 155–157 (1979)
- [5] O. E. Rössler, «The chaotic Hierarchy», *Z. Naturforsch.* **38a** 788–801 (1983)
- [6] O. E. Rössler, «The chaotic Hierarchy»; in *A chaotic Hierarchy*, hrsg. G. Baier und M. Klein (World Scientific, Singapore 1991)
- [7] M. Klein und G. Baier, «Hierarchies of Dynamical Systems»; in *A chaotic Hierarchy*, hrsg. G. Baier und M. Klein (World Scientific, Singapore 1991) 1–23
- [8] O. E. Rössler, «Chemical Turbulence: Chaos in a Simple Reaction Diffusion System», *Z. Naturforsch* **31A** 1168–1172 (1976)

Literaturverzeichnis

- [9] A. M. Turing, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **B 237** (1952)
- [10] G. Baier, S. Sahle, U. Kummer und R. Brock, «Transition to higher Chaos in diffusively coupled chemical Oscillators», *Z. Naturforsch* **49a** 835–837 (1994)
- [11] P. Strasser, O. E. Rössler und G. Baier, «Hyperchaos and Chemical Turbulence in Enzymatic Reaction-Diffusion Systems», *J. Chem. Phys.* **104** 9974 (1996)
- [12] G. Baier und S. Sahle, «Homogenous and Spatio-temporal Chaos in biochemical Reactions with Feedback Inhibition», *J. theor. Biol.* **193** 233–242 (1997)
- [13] J. D. Farmer, «Chaotic Attractors of an infinite-dimensional Dynamical System», *Physica* **4D** 366 (1982)
- [14] M. C. Mackey und L. Glass, *Science* **197** 287 (1977)
- [15] G. Baier und S. Sahle, «Design of Hyperchaotic Flows», *Phys. Rev. E* **51** R2712 (1995)
- [16] Th. Meyer, M. J. Bünner, A. Kittel und J. Parisi, «Hyperchaos in the generalized Rössler system», *Phys. Rev. E* **56** 5069–5082 (1997)
- [17] Th. Meyer, Diplomarbeit Universität Bayreuth (1995)
- [18] F. Grond, H. H. Diebner, S. Sahle, A. Mathias, S. Fischer und O. E. Rössler, «A robust, locally interpretable Algorithm for Lyapunov Exponents», *Chaos, Solitons & Fractals* **16** 841–852 (2003)

- [19] A. Wolf, J. B. Swift, H. Swinney und J. A. Vastano, «Determining Lyapunov Exponents from a time series», *Physika D* **16** 285–317 (1985)
- [20] M. Henon, «A two-dimensional mapping with a strange attractor», *Commun. Math. Phys.* **50** 69–77 (1976)
- [21] G. Baier und M. Klein, *Phys. Letter A* **151** 281 (1990)
- [22] J. L. Kaplan und J. A. Yorke «Chaotic behaviour of multidimensional difference equations» *Lect. Not. Math.* **730**, 204–227 (1979)
- [23] C. Kahlert und O. E. Rössler, «Analytical properties of Poincaré halfmaps in a class of piecewise linear Dynamical Systems», *Z. Naturforsch* **40a** 1011–1025 (1985)
- [24] <http://www.wolfram.com>
- [25] <http://www.gnu-pascal.de>