

**Ratscheneffekte  
in  
supraleitenden  
Quanteninterferometern**

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Mathematik und Physik  
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

**ALBERT STERCK**

aus Aachen

2005

Tag der mündlichen Prüfung:

Dekan:

1. Berichterstatter:

2. Berichterstatter:

09. November 2005

Prof. Dr. P. Schmid

Prof. Dr. Dieter Kölle

Prof. Dr. Martin Weitz

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Der Ratscheneffekt</b>	<b>6</b>
2.1	Einführung . . . . .	6
2.2	Rocking und Flashing Ratchet . . . . .	7
<b>3</b>	<b>SQUID Ratsche: Theorie</b>	<b>11</b>
3.1	Kurzer Josephson Kontakt . . . . .	11
3.1.1	RCSJ Modell . . . . .	12
3.1.2	Gekipptes Waschbrettpotential . . . . .	14
3.2	dc SQUID . . . . .	17
3.2.1	Langevin Gleichungen . . . . .	17
3.2.2	Zweidimensionales Potential . . . . .	21
3.2.3	Periodizität und Symmetrie . . . . .	22
3.3	3-Kontakt SQUID . . . . .	24
3.3.1	Langevin Gleichungen . . . . .	25
3.3.2	Kritischer Strom . . . . .	29
3.3.3	Potential . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Numerische Simulationen</b>	<b>44</b>
4.1	dc Kennlinien . . . . .	44
4.1.1	Trajektorien . . . . .	48
4.2	Kritischer Strom . . . . .	51
4.3	Harmonische Anregung . . . . .	54
4.3.1	Trajektorien . . . . .	57
4.3.2	Stroboskop . . . . .	63
4.4	Thermische Fluktuationen . . . . .	64
4.5	Stochastische Anregung . . . . .	66

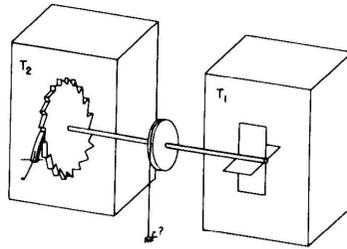
<b>5 Proben und Design</b>	<b>71</b>
5.1 Technologie . . . . .	71
5.2 Design . . . . .	74
5.3 Experimenteller Aufbau . . . . .	78
<b>6 Experimente</b>	<b>80</b>
6.1 dc Eigenschaften . . . . .	80
6.2 Adiabatisch langsamer Antrieb . . . . .	87
6.3 Nichtadiabatischer Antrieb . . . . .	90
6.4 Stochastischer Antrieb . . . . .	97
6.4.1 Adiabatischer Grenzfall . . . . .	97
6.4.2 Nichtadiabatischer Fall . . . . .	101
<b>7 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>103</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>107</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Die Gewinnung nützlicher Arbeit aus zufälligen Fluktuationen wird durch den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik stark eingeschränkt: Danach ist es nicht möglich, Arbeit aus Gleichgewichtsfuktuationen zu extrahieren, was besonders anschaulich von Feynman, Leighton und Sands [1] anhand des berühmten "Ratchet and Pawl" Systems (siehe Abb. 1.1) demonstriert wird (vgl. auch [2]). Ein mikroskopisch kleines Flügelrad befindet sich in einem Gasreservoir. Das Flügelrad ist über eine Welle mit einem Sägezahnrad verbunden, in das eine Sperrvorrichtung greift, die Drehung in nur eine Richtung zuläßt. Das Sägezahnrad befindet sich in einem zweiten Gasreservoir. Befinden sich beide Reservoirs auf gleicher Temperatur, unterliegt der Sperrmechanismus im gleichen Maße Fluktuationen wie das Flügelrad und die Welle dreht sich im zeitlichen Mittel nicht. Systeme, die in der Lage sind aus Nichtgleichgewichtsfuktuationen Arbeit zu verrichten, mit Hilfe von periodischen Strukturen mit gebrochener Reflexionssymmetrie, bezeichnet man als Ratschen [3, 4, 5, 6]. Anfang der 90er Jahre setzte eine verstärkte Aktivität auf dem Gebiet der Ratschen ein, ausgelöst durch Fragestellungen aus der Biologie: Wie kommt es in Abwesenheit einer gerichteten makroskopischen Kraft oder eines Temperaturgradienten zu gerichteter Bewegung? Beispiele für gerichteten Transport in biologischen Systemen sind z.B. die Muskelkontraktion und der intrazelluläre Transport von Chemikalien durch sog. biomolekulare Motoren [7, 8, 9, 10].

Quergestreiftes Muskelgewebe besteht aus ineinandergreifenden Myosin- und Aktinfilamenten, die gegeneinander verschiebbar sind. Die Myosinmoleküle sind räumlich asymmetrisch gebaut, denn sie bestehen aus einem hydrophilen Kopf und einem hydrophoben Schwanz. Der energieliefernde



**Abb. 1.1:** Feynmans "Ratchet and Pawl" [1]. Das Gedankenexperiment illustriert, warum sich aus einem Wärmebad im thermischen Gleichgewicht keine Arbeit gewinnen läßt.

Prozeß im Muskel ist die Hydrolyse von Adenosin-Triphosphat (ATP). Um zu erklären, wie hier bei ungerichtetem Antrieb eine gerichtete Bewegung entstehen kann, ist Anfang der 90er Jahre der Ratscheneffekt vorgeschlagen worden.

Beim intrazellulären Transport in eukariotischen Zellen bewegen sich mit Chemikalien gefüllte Objekte, sog. Vesikel, entlang von stabförmigen Biopolymeren, dem Zytoskelett, mit denen die Zelle angefüllt ist. Diese Biopolymere besitzen bemerkenswerte mechanische Eigenschaften [11], sind periodisch aufgebaut und dienen gleichsam als Schienensystem für Motorproteine, die wiederum die Vesikel transportieren. Auch hier wird der Ratscheneffekt als eine mögliche Ursache für die gerichtete Bewegung der Motorproteine diskutiert [12].

Experimente zur Untersuchung von Transport an biologischen Systemen sind möglich, aber schwierig [13, 14, 15]. Die Schwierigkeit besteht ganz prinzipiell darin Geschwindigkeiten zu messen. In dieser Situation sollen Modellsysteme für biologische Ratschen helfen, diese besser zu verstehen. Makroskopische Ratschen sind dazu ungeeignet, da hier thermische Fluktuationen stets klein sind. Im Folgenden werden einige experimentell realisierte Ratschensysteme angesprochen.

In [16] wird das Verhalten von in Wasser gelösten Polystyrol Kügelchen ( $1\ \mu\text{m}$  Durchmesser) untersucht. Die Lösung befindet sich in einer asymmetrisch geformten Leiterstruktur. Ein an diese Struktur angelegtes und periodisch aus- und eingeschaltetes elektrisches Feld führt zu einer gerichteten Driftbewegung der Kügelchen, obwohl im zeitlichen Mittel keine Kraft wirkt. In [17] wird in einer ähnlichen Situation vermittels eines rotierenden Laserstrahls ein periodisches, optisches Potential erzeugt und Transport von

kolloidalen Teilchen beobachtet.

Geladene, fluoreszenzmarkierte Phospholipide können sich unter dem Einfluß eines oszillierenden elektrischen Feldes in einem periodischen Array aus asymmetrischen Barrieren in eine bevorzugte Richtung bewegen [18].

In einer hydrodynamischen Ratsche (oder Driftratsche) wird ein flüssiges Lösungsmittel, in der sich Moleküle unterschiedlicher Masse befinden, vor und zurück durch eine Röhre gepumpt. Der Querschnitt der Röhre variiert periodisch, aber nicht reflexionssymmetrisch. Große Moleküle werden so in eine Richtung transportiert, wobei die Richtung von der Masse der Moleküle abhängt. Die Autoren von [19] konnten zeigen, daß auf diese Art und Weise eine sehr effiziente Separation von Molekülen unterschiedlicher Größe gelingt.

Auch für Atome lassen sich mit Hilfe zweier Laser asymmetrische optische Potentiale für zwei Zustände unterschiedlicher Energie erzeugen. Übergänge zwischen den beiden Zuständen wirken als Antrieb und führen zu Transport der Atome in eine bevorzugte Richtung [20].

Eine weitere Klasse von Ratschensystemen stellen Quantenpunkt-Ratschen dar [21, 22, 23, 24]. Diese bestehen aus asymmetrisch geformten Halbleiter-Heterostrukturen. Die Bandstruktur hängt von der angelegten Spannung und aufgrund der asymmetrischen Form vom Vorzeichen der Spannung ab. Dies führt zu einem Ratscheneffekt.

In nicht zentrosymmetrischen Materialien können bei Beleuchtung mit kurzwelliger Strahlung (im optischen oder im Röntgenbereich) Photospannungen generiert werden. Dies kann ebenfalls als Ratscheneffekt interpretiert werden, wobei in der Literatur die Bezeichnung photogalvanischer oder auch anomaler photovoltaischer Effekt verwendet wird. Der Effekt basiert auf optisch induzierten Übergängen von Ladungsträgern aus Zentren heraus, die ein asymmetrisch geformtes Potential darstellen [25]. Als Materialien kommen besonders Ferroelektrika wie z.B.  $\text{BaTiO}_3$  oder  $\text{LiNbO}_3$  in Frage [26].

Bei Josephson-Ratschen beobachtet man die Dynamik der Phasendifferenz in Josephson Kontakten. Das bietet den Vorteil, daß der (Phasen-) Geschwindigkeit über die zweite Josephson-Beziehung eine Spannung entspricht, die relativ einfach zu messen ist. Man kann es auch so formulieren, daß in einer Josephson-Ratsche magnetische Flußquanten transportiert werden, deren Bewegung eine Spannung erzeugt. Die Dynamik der Phasendifferenz läßt sich abbilden auf die Dynamik analoger mechanischer Systeme.

Zwei Unterklassen von Josephson Ratschen sind die Josephson- und Abrikosov-Vortex Ratschen. Im ersten Fall bewegen sich Josephson-Flußwirbel in einem langen, ringförmigen Josephson-Kontakt. Ein asym-

metrisches Potential kann durch Variation der Kontaktbreite [27], ein inhomogenes Magnetfeld [28, 29, 30], eine geeignete Formgebung des Kontaktes in Kombination mit einem homogenen Magnetfeld [27, 31] oder die Verwendung von Strominjektoren [32, 33, 34] erreicht werden. Auch in einem Netzwerk aus Josephson Kontakten können sich Flußwirbel bewegen. Durch Variation der kritischen Ströme oder auch der Schleifenflächen läßt sich ein Ratschenpotential für die Flußwirbel erzeugen [35, 36, 37]. In einer Abrikosov-Vortex-Ratsche bewegen sich Abrikosov-Flußwirbel in einem Array aus künstlich erzeugten Pinning-Zentren, deren Anordnung oder Form ein symmetriebrechendes Element enthält [38, 39, 40, 41, 42].

In dieser Arbeit werden Josephson-Ratschen betrachtet, die auf SQUIDs<sup>1</sup> [43] basieren. S. Weiss *et al.* konnten zeigen [44], daß es sich bei dem lange bekannten Gleichrichtungseffekt in dc<sup>2</sup> SQUIDs [45] um einen Ratscheneffekt handelt. Die in unserer Arbeitsgruppe geleisteten Vorarbeiten auf dem Gebiet der SQUID-Ratschen haben ausnahmslos asymmetrische (2 Kontakt) dc SQUIDs [46, 44, 31, 47] zum Gegenstand, d.h. supraleitende Ringe, die von zwei nicht identischen Josephson Kontakten unterbrochen sind.

Einem Vorschlag von Zapata *et al.* [48] folgend, behandelt diese Arbeit sog. Drei-Kontakt SQUIDs, die im Gegensatz zu einem dc SQUID drei Kontakte im SQUID Ring enthalten. Dieser erste Vorschlag für eine SQUID-Ratsche wurde bislang nicht experimentell untersucht, ist robuster gegenüber der Wahl der Parameter, aber auch aufwändiger experimentell zu realisieren. Tatsächlich werden im Verlauf der Arbeit zwei Typen von Drei-Kontakt SQUIDs untersucht, die sich durch das Arrangement der Shuntwiderstände unterscheiden. Die von Zapata *et al.* vorgeschlagene Variante wurde dabei analytisch und numerisch untersucht. Eine Modifikation des Vorschlags wurde auch experimentell untersucht.

In Kapitel 2 werden zunächst die notwendigen theoretischen Grundlagen diskutiert und insbesondere eine grobe Klassifizierung von Ratschensystemen vorgenommen.

Im ersten Teil von Kapitel 3 wird zunächst die dieser Arbeit zugrunde liegende theoretische Beschreibung des (kurzen) Josephson-Kontakts und des asymmetrischen dc SQUIDs vorgestellt. Dieser Teil endet mit der Betrachtung des zweidimensionalen Potentials für die Dynamik der Phasendifferenzen im dc SQUID. Im Anschluß daran werden die beiden Sätze von Bewegungsgleichungen aufgestellt, die die Dynamik der beiden Typen von

---

<sup>1</sup>Superconducting QUantum Interference Device

<sup>2</sup>direct current

---

Drei-Kontakt SQUIDS beschreiben. Es schließt sich ein Teil an, der sich mit der Magnetfeldabhängigkeit des kritischen Stromes beschäftigt. Der letzte Teil dieses Kapitels behandelt das Potential und die Grenzfälle unter denen dessen Dimension reduziert werden kann. Durch Symmetrieüberlegungen werden daraus Bedingungen gewonnen, wann die SQUIDS als Ratsche betrieben werden können und wann das Verhalten von den Anfangsbedingungen abhängt.

In Kapitel 4 werden die Ergebnisse numerischer Simulationsrechnungen besprochen, wobei zunächst die dc Eigenschaften im Vordergrund stehen. Dabei zeigt sich, daß sich beide Arten von Drei-Kontakt SQUID-Ratschen unterschiedlich verhalten können. Um diese Unterschiede zu verstehen, werden simulierte Trajektorien herangezogen und interpretiert. Schließlich werden Ratscheneffekte in verschiedenen Regimes simuliert. Dabei wird sowohl harmonischer als auch stochastischer Antrieb behandelt.

In Kapitel 5 wird das Design der im Rahmen dieser Arbeit experimentell untersuchten Proben erläutert und die Herstellungstechnologie beschrieben. Daran anschließend wird der experimentelle Aufbau, d.h. besonders die erforderliche Mikrowellen-Meßtechnik und die Kryotechnik erläutert.

In Kapitel 6 werden die experimentellen Ergebnisse vorgestellt. Da in die theoretische Beschreibung zahlreiche Parameter eingehen, war eine möglichst vollständige Charakterisierung der SQUIDS unerlässlich. Daher werden zunächst die Ergebnisse der charakterisierenden Messungen vorgestellt. Dann werden die Ergebnisse der Messungen mit periodischem Antrieb gezeigt, wobei zunächst der Fall betrachtet wird, daß die Frequenz des Antriebs klein gegen alle charakteristischen Frequenzen des Systems ist (adiabatische Anregung). Anschließend werden die Ergebnisse der Messungen bei höheren Antriebsfrequenzen beschrieben und diskutiert. Zuletzt werden Messungen bei stochastischem Antrieb vorgestellt.

In Kapitel 7 werden die wesentlichen Ergebnisse zusammengefaßt und es wird ein Ausblick auf mögliche weiterführende Arbeiten zu SQUID Ratschen gegeben.

# Kapitel 2

## Der Ratscheneffekt

Im Folgenden wird eine Klassifizierung von Ratschensystemen vorgenommen, soweit es für die vorliegende Arbeit von Bedeutung ist.

### 2.1 Einführung

Die Untersuchung von gerichteter Bewegung in biologischen Systemen in Abwesenheit eines Temperaturgradienten und eines gerichteten Antriebs hat Anfang der 90er Jahre großes Interesse an sog. "Brownschen Motoren" [49, 50, 51, 52] geweckt. Die in diesem Zusammenhang diskutierten Ratschensysteme haben zwei Eigenschaften gemeinsam:

- Das Potential  $w(x, t)$  der inneren Energie besitzt räumliche Periodizität mit Periode  $L$  und die Reflexionssymmetrie bezüglich jedes Punktes ist gebrochen, d.h.

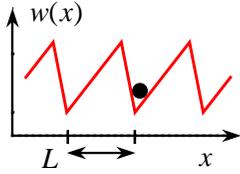
$$w(x + L) = w(x) \tag{2.1}$$

$$w(x - x_0) \neq w(-x - x_0) \forall x_0 \in [0..L]. \tag{2.2}$$

- Der zeitliche Mittelwert der antreibenden Kraft  $F(t)$  verschwindet:

$$\langle F(t) \rangle = 0, \tag{2.3}$$

Das Potential hat also z.B. eine Gestalt wie in Abb. 2.1 gezeigt.



**Abb. 2.1:** Das typische Ratschenpotential ist periodisch und besitzt keine Spiegelsymmetrie.

## 2.2 Rocking und Flashing Ratchet

Um zu einer einfachen Klassifizierung von Ratschen zu gelangen, betrachtet man die Bewegung eines Teilchens in einer Dimension. Das Teilchen habe die Masse  $m$  und Reibungskoeffizient  $\xi$ , bewege sich in einem Potential  $w(x, t)$  und sei einer antreibenden Kraft  $F(t)$  unterworfen. Bei gleichzeitiger Anwesenheit einer Langevin-Kraft  $F_N(t) = \sqrt{2\xi k_B T} f(t)$  aus thermischen Fluktuationen mit der normierten Korrelationsfunktion  $\langle f(t)f(t') \rangle = \delta(t - t')$ , heißt die zugehörige Bewegungsgleichung Langevin-Gleichung und hat die Gestalt:

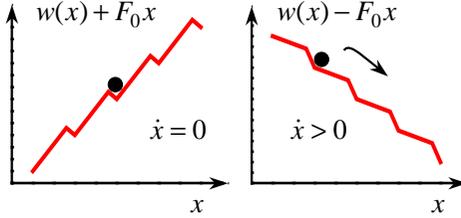
$$F(t) = m\ddot{x} + \xi\dot{x} + \partial_x w(x, t) + F_N(t) \quad (2.4)$$

Dieses System wird zu einem Ratschensystem wenn die Bedingungen (2.1)...(2.3) erfüllt sind. Es ist allerdings auch möglich, einen Ratscheneffekt bei symmetrischem Potential zu erhalten wenn Antrieb oder Fluktuationen asymmetrisch sind [53]. Anhand der Form des Potentials  $w(x, t)$  und der Kraft  $F(t)$  lassen sich zwei Ratschentypen unterscheiden:

Ist das Potential unabhängig von der Zeit, also  $w(x, t) = w(x)$  und die antreibende Kraft periodisch oder stochastisch so spricht man von einer **Rocking Ratchet** (oder Rüttelratsche). Um zu verstehen, wieso in dieser Situation trotz Abwesenheit einer gerichteten Kraft gerichteter Transport im zeitlichen Mittel, d.h.  $\langle \dot{x} \rangle \neq 0$  entstehen kann, konstruiert man die (zeitabhängige) gesamte potentielle Energie  $U(x, t)$  indem man zu  $w(x)$  den Anteil hinzufügt, der durch die antreibende Kraft generiert wird:

$$U(x, t) = w(x) + F(t)x \quad (2.5)$$

Offenbar bewirkt die Kraft  $F(t)$  eine Verkippung des Potentials, was in Abb. 2.2 für zwei entgegengesetzt gleiche Werte für die Kippamplitude dargestellt ist. Ist der Betrag der Verkippung  $F_0$  geeignet gewählt, führt die Abwesenheit von Reflexionssymmetrie des Potentials  $w(x)$  dazu, daß für die eine Kipprichtung die Minima des Potentials bereits verschwunden sind, während sie für die andere Kipprichtung noch bestehen. Bei periodischer Anregung  $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$  wird das Teilchen also während einer halben



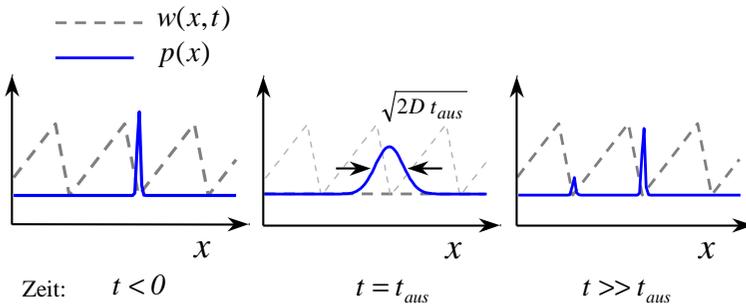
**Abb. 2.2:** Rocking Ratchet: Das Potential  $w(x)$  wird im linken und rechten Bild durch eine Kraft mit gleichem Betrag aber entgegengesetztem Vorzeichen gekippt. Da die Minima in  $w - F_0 x$  verschwinden, in  $w + F_0 x$  aber nicht, kommt es bei periodischer Anregung mit geeigneter Amplitude zu zeitlich gemitteltem Transport nach rechts.

Periode in einer Potentialmulde gestoppt, kann aber in der nächsten halben Periode zumindest zeitweise eine fortschreitende Bewegung ausführen.

Beim zweiten Ratschentyp, der sog. **Flashing Ratchet** [54, 51] hat das Potential  $w(x, t)$  eine explizite Zeitabhängigkeit; in einem häufig betrachteten Spezialfall ist es von der Gestalt:

$$w(x, t) = w_0(x)A(t) \quad (2.6)$$

Hier ist  $w_0(x)$  wieder ein periodisches Potential mit gebrochener Reflexionssymmetrie und  $A(t)$  eine periodische oder stochastische Funktion der Zeit.  $A(t)$  soll Werte zwischen 0 und 1 annehmen; im einfachsten Fall wird das Potential durch  $A(t)$  ein- und ausgeschaltet. Der gerichtete Transport



**Abb. 2.3:** Flashing Ratchet: Das Potential  $w(x, t)$  und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens  $p(x)$  sind zu drei verschiedenen Zeitpunkten dargestellt.

beruht hier auf der Diffusion der Teilchen während das Potential ausgeschaltet ist, d.h. dieser Ratschentyp funktioniert nur in Anwesenheit von Fluktuationen, dann aber auch in Abwesenheit einer antreibenden Kraft  $F(t) = 0$ , denn dem System wird Energie über die zeitliche Variation des Potentials zugeführt. In Abb. 2.3 ist das Potential zu drei verschiedenen Zeitpunkten dargestellt. Bei  $t < 0$  ist das Potential eingeschaltet und das Teilchen ist in einer Potentialmulde lokalisiert. Bei  $t = 0$  wird das Potential ausgeschaltet und das Teilchen kann frei diffundieren. Zum Zeitpunkt  $t = t_{aus}$  besitzt seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit eine Breite  $\sqrt{2Dt_{aus}}$  mit der Diffusionskonstanten  $D$ . Wird das Potential nach hinreichend langer Zeit wieder eingeschaltet, gibt es eine endliche Wahrscheinlichkeit, daß sich das Teilchen eine Potentialmulde weiter bewegt hat. Die Asymmetrie des Potentials führt dazu, daß die Wahrscheinlichkeiten für Transport nach "links" und nach "rechts" nicht gleich sind. Die Vorzugsrichtung einer Flashing Ratchet ist gerade entgegengesetzt zu der einer Rocking Ratchet (bei gleichem Potential).

Überwiegt in Gl. (2.4) der Masseterm, so spricht man von **Inertia Ratchets**. In solchen schwach gedämpften Systemen kann es, auch bei deterministischem Antrieb, Übergänge von regulärer zu chaotischer Dynamik geben [55]. Diese Übergänge können Vorzeichenwechsel des Teilchenstroms als Funktion der Anregungsamplitude auslösen [56, 57].

Bei **zweidimensionalen** Ratschensystemen müssen antreibende Kraft und die Richtung, in der der Transport erfolgt, nicht parallel sein. Ebenso kann Periodizität in einer oder zwei Richtungen vorliegen und die Reflexionssymmetrie kann auch nur in einer Richtung gebrochen sein. So beschreiben Bao et al. [58] eine zweidimensionale Flashing ratchet, deren Potential aus zwei Anteilen besteht: Einer periodischen Funktion in einer Richtung und einer Parabel in der anderen Richtung, deren Krümmung periodisch moduliert wird. Cecchi et al. [59] betrachten eine Rocking Ratchet deren Potential auch parabolisch ist und deren Krümmung moduliert wird, wobei die Modulation von beiden Koordinaten abhängt. Auf diese Weise entsteht ein Potential dessen Äquipotentiallinien an Fischgräten erinnern. Beide Systeme sind quasi eindimensional, da nur Transport in einer Richtung betrachtet wird und daher die Reflexionssymmetrie auch nur bezüglich dieser Richtung gebrochen zu sein braucht (was aber nicht heißt, daß sich die Dynamik auf ein effektiv eindimensionales System reduzieren läßt). Diese Systeme haben daher gewisse Ähnlichkeit mit der später diskutierten SQUID-Ratsche. Das System von Ghosh et al. [60] ist ein Ratschensystem, bei dem die Reflexionssymmetrie in zwei Raumrichtungen gebrochen ist. Die Autoren weisen verschiedene dynamische Zustände in dem System nach und zeigen, daß z.B.

farbiges Rauschen in einem solchen System Ringströme erzeugen kann. In [61] wird ein System behandelt das ebenfalls zweidimensional und in beide Richtungen symmetrisch ist. Damit ähnelt das Modell sehr stark einem symmetrischen dc SQUID. Die Autoren behandeln gerichtete Bewegung als Folge eines asymmetrischen Antriebs.

Die bereits erwähnte hydrodynamische Ratsche besitzt kein Ratschen*potential*, sondern beruht auf den asymmetrischen räumlichen Randbedingungen. Im Allgemeinen erfahren die Teilchen eine Drift in Längsrichtung der Röhre, wobei das Vorzeichen empfindlich von den speziellen Parametern wie Anregungsamplitude, Teilchengröße usw. abhängt. Viele solcher Röhren lassen sich parallel betreiben, weshalb die Driftratsche für Teilchenseparation im industriellen Maßstab sehr interessant ist [62, 19].

Schließlich werden seit einigen Jahren **Quanten**-Ratschen diskutiert [63, 64, 65]. Damit ist gemeint, daß bei sehr tiefen Temperaturen der Tunnelbeitrag zum Transport in periodischen Potentialen wesentlich werden kann [65, 66]. Relevant ist der Tunnelbeitrag vor allem beim Transport in mesoskopischen Systemen, z.B. in den bereits erwähnten dreieckigen "Quantendots" [21, 67]. Eine der zentralen Vorhersagen für Quantenratschen ist eine Stromumkehr beim Übergang vom thermisch aktivierten Regime zum Tunnelregime. Dies ist bereits beobachtet worden [24]. Grundlegende Arbeiten zum makroskopischen Quantentunneln in Josephson-Systemen findet man z.B. in [68, 69, 70]. In Systemen gekoppelter Josephson Kontakte wurde die Überlagerung von makroskopischen Zuständen sowie makroskopisches Quantentunneln beobachtet [71, 72, 73, 74, 75]. Auch Quantentunneln von Josephson Fluxonen ist bereits beobachtet worden [76]. Eine Quantenratsche für Josephson Fluxonen ist bereits realisiert worden [77, 78].

# Kapitel 3

## SQUID Ratsche: Theorie

In diesem Kapitel werden die zur theoretischen Beschreibung des 3-Kontakt SQUIDs notwendigen Grundlagen mitgeteilt, die Bewegungsgleichungen behandelt und das sich daraus ergebende Potential diskutiert.

### 3.1 Kurzer Josephson Kontakt

Der supraleitende Zustand ist gekennzeichnet durch eine attraktive Wechselwirkung zwischen je zwei Elektronen mit entgegengesetztem Impuls und Spin. Der sich so ergebende Grundzustand wird makroskopisch besetzt. Die Gesamtheit aller sogenannten Cooper-Paare wird dann durch eine einzige Wellenfunktion  $\Psi = \sqrt{n}e^{i\Theta}$  (auch Ordnungsparameter genannt) beschrieben. Hierin ist  $n$  die Dichte der Cooper-Paare und  $\Theta$  die Phase der Wellenfunktion. Andere makroskopische Größen (insbesondere der elektrische Strom) können von  $\Psi$  abhängen, was zu makroskopischen Quanteneffekten wie *Flußquantisierung* und *Josephson Effekt* [79, 80] führt. Letzterer tritt auf, wenn zwei supraleitende Elektroden in Kontakt gebracht werden: Ist der Abstand zwischen den Elektroden hinreichend klein, so kommt es zu einem Überlapp der beiden Wellenfunktionen  $\Psi_1, \Psi_2$  und der Gesamtstrom  $I$  über solch einen Josephson Kontakt erhält eine supraleitende Komponente  $I_S$ , die von der Phasendifferenz  $\delta \equiv \Theta_1 - \Theta_2$  abhängt. Im einfachsten Fall gilt (erste Josephson Beziehung):

$$I_S(t) = I_0 \sin \delta(t), \quad (3.1)$$

wobei  $I_0$  von der Struktur und der Form des Kontaktes abhängt und kritischer Strom heißt. Die über den Kontakt abfallende Spannung  $V(t)$  ist

verknüpft mit  $\dot{\delta}$  über die zweite Josephson Beziehung:

$$V(t) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d\delta(t)}{dt} \quad (3.2)$$

Hierin ist  $\Phi_0 \equiv \frac{h}{2e} = 2.07 \times 10^{-15} \text{Vs} = 2.07 \mu\text{V}/\text{GHz}$  das magnetische Flußquant mit dem Planck'schen Wirkungsquant  $h$  und der Cooper-Paarladung  $2e$ . Im folgenden wird es um "kurze" Kontakte gehen, bei denen die Phasendifferenz (oder kurz: Phase) über die gesamte Kontaktfläche nur wenig variiert. Um eine Bedingung zu entwickeln, wann ein Josephson Kontakt als "kurz" anzusehen ist, hat man räumlich ausgedehnte Kontakte zu behandeln. Die Bewegungsgleichung für die Phasendifferenz ist dann keine gewöhnliche Differentialgleichung mehr, sondern eine partielle, weil neben den Ableitungen nach der Zeit auch Ableitungen nach den Ortskoordinaten vorkommen [81]. Dies führt im eindimensionalen Fall auf die sog. Sinus Gordon Gleichung [82, 83, 84]. Es zeigt sich, daß die Phasendifferenz räumlich auf der Skala der Josephson Eindringtiefe

$$\lambda_J = \sqrt{\Phi_0 / (2\pi\mu_0 j_c d')}, \quad (3.3)$$

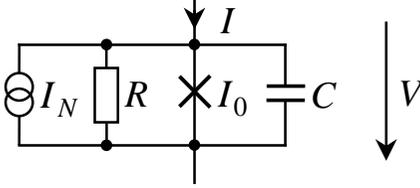
variiert. Hierin bedeutet  $d'$  die effektive magnetische Dicke des Kontaktes

$$d' \equiv d_I + \lambda_1 \coth \frac{d_1}{\lambda_1} + \lambda_2 \coth \frac{d_2}{\lambda_2}, \quad (3.4)$$

wobei  $\lambda_1, \lambda_2$  die London Eindringtiefen und  $d_1, d_2$  die Dicken der beiden supraleitenden Elektroden und  $d_I$  die Dicke der Barriere bedeuten. Im Grenzfall dicker Elektroden (d.h.  $d_1, d_2 \gg \lambda_L$ ) gilt  $d' \approx 2\lambda_L$ . Ein Kontakt ist als klein anzusehen, wenn seine Abmessungen  $\lesssim 4\lambda_J$  sind [81].

### 3.1.1 RCSJ Modell

In den meisten Situationen kann der Strom durch einen Josephson-Kontakt nicht durch den Suprastrom  $I_S$  allein approximiert werden [81]. Als zusätzliche Komponenten sind zu berücksichtigen: Der Tunnelstrom  $I_R$  von Quasiteilchen (normalleitende Elektronen), der Verschiebungsstrom  $I_D$  hervorgerufen durch die Kapazität  $C$  des Kontaktes und einen Rauschstrom  $I_N$ , der das thermische Rauschen des normalleitenden Kanals beschreibt. Im einfachsten Kontaktmodell, dem hier ausschließlich verwendeten **Resistively and Capacitively Shunted Junction** (RCSJ)-Modell, [85, 86] werden die zusätzlichen Ströme durch das in Abb. 3.1 gezeigte Ersatzschaltbild modelliert. Die Kirchhoffsche Regel für die Ströme liefert:



**Abb. 3.1:** Ersatzschaltbild eines Josephson-Kontakts im RCSJ-Modell. Zum eigentlichen Josephson-Element sind eine Kapazität, ein Widerstand und eine Rauschstromquelle parallel geschaltet.

$$I = I_D + I_R + I_S + I_N(t) = CdV/dt + V/R + I_0 \sin \delta + I_N(t). \quad (3.5)$$

Mit Gl. (3.1) und (3.1) wird daraus

$$I = \frac{\Phi_0 C}{2\pi} \ddot{\delta} + \frac{\Phi_0}{2\pi R} \dot{\delta} + I_0 \sin \delta + I_N(t) \quad (3.6)$$

und Einführung des auf den kritischen Strom  $I_0$  normierten Biasstromes  $i \equiv I/I_0$ , sowie des entsprechend normierten Rauschstroms  $i_N \equiv I_N/I_0$  ergibt:

$$i = \frac{1}{\omega_p^2} \ddot{\delta} + \frac{1}{\omega_c} \dot{\delta} + \sin \delta + i_N \quad (3.7)$$

mit der Josephson Plasmafrequenz  $\omega_p \equiv \sqrt{2\pi I_0/\Phi_0 C}$  und der charakteristischen Frequenz  $\omega_c \equiv 2\pi I_0 R/\Phi_0$ . Das Verhältnis

$$\beta_C \equiv \left( \frac{\omega_c}{\omega_p} \right)^2 = \frac{2\pi I_0 R^2 C}{\Phi_0} \quad (3.8)$$

heißt Stewart-McCumber-Parameter [85, 86] und gibt an, ob der "Masse-term"  $\propto \ddot{\delta}$  überwiegt ( $\beta_C > 1$ ) oder der "Reibungsterm"  $\propto \dot{\delta}$ . Einführung der natürlichen Zeit  $\tau \equiv \omega_c t$  ergibt schließlich die dimensionslose Bewegungsgleichung:

$$i = \beta_C \frac{d^2 \delta}{d\tau^2} + \frac{d\delta}{d\tau} + \sin \delta + i_N. \quad (3.9)$$

und den dimensionslosen Ausdruck für die Spannung:

$$v = \frac{V}{I_0 R} = \frac{d\delta}{d\tau}. \quad (3.10)$$

Neben  $\beta_C$  ist für das Verhalten des Kontaktes der Rauschparameter

$$\Gamma \equiv \frac{2\pi k_B T}{I_0 \Phi_0} \equiv \frac{I_{th}}{I_0} \quad (3.11)$$

wichtig, der das Verhältnis der thermischen Energie  $k_B T$  zur Josephson Kopplungsenergie

$$E_J \equiv \frac{I_0 \Phi_0}{2\pi} = \frac{\hbar}{2e} I_0, \quad (3.12)$$

oder das Verhältnis der Rauschstromamplitude  $I_{th}$  zum kritischen Strom  $I_0$  beschreibt. Es ist  $I_{th} = 0.18 \mu\text{A}$  bei  $T = 4.2\text{K}$ . Die spektrale Dichte  $S_I(f)$  des Rauschstroms  $I_N$  beträgt nach Johnson und Nyquist [87, 88]

$$S_I(f) = \frac{4k_B T}{R}. \quad (3.13)$$

In normierten Einheiten ist dann  $S_i(\nu) = 4\Gamma$  mit  $\nu = 2\pi f/\omega_C$ . Durch Angabe von  $\beta_C$  und  $\Gamma$  ist das Verhalten des RCSJ-Kontaktes festgelegt.

### 3.1.2 Gekipptes Waschbrettpotential

Die Dynamik des RCSJ-Kontaktes läßt sich auf die Bewegung eines Teilchens in einem eindimensionalen Potential abbilden: Dazu vergleicht man Gl. (3.6) mit der Bewegungsgleichung Gl. (2.4) mit zeitunabhängigem Potential  $w(x, t) = w(x)$ :

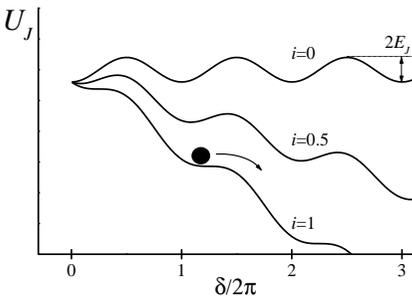
$$F(t) = m\ddot{x} + \xi\dot{x} + \partial_x w(x) + F_N(t) \quad (3.14)$$

Offenbar übernimmt die Phasendifferenz  $\delta$  die Rolle der Ortskoordinate  $x$  des Teilchens und der Biasstrom  $I$  die Rolle der antreibenden Kraft  $F$ . Die Kapazität  $C$  entspricht der Masse  $m$ , der Leitwert  $1/R$  entspricht dem Reibungskoeffizienten  $\xi$  und der (negativen) Potentialkraft  $\partial_x w(x)$  entspricht der Term  $I_0 \sin \delta$ . Das dem Potential  $w(x)$  entsprechende Potential  $w_J(\delta)$  lautet also:

$$w_J(\delta) \equiv E_J(1 - \cos \delta) \quad (3.15)$$

wobei der Vorfaktor  $E_J$  aus Dimensionsgründen hinzugefügt wurde. Dem Potential  $U(x, t)$  aus Gl. (2.5) entspricht schließlich das sog. gekippte Waschbrettpotential

$$U_J(\delta, t) \equiv E_J[1 - \cos \delta - i(t)\delta] \quad (3.16)$$



**Abb. 3.2:** Waschbrettpotential eines Josephson-Kontaktes im RCSJ-Modell für drei verschiedene Biasströme  $i$  (aus [46]).

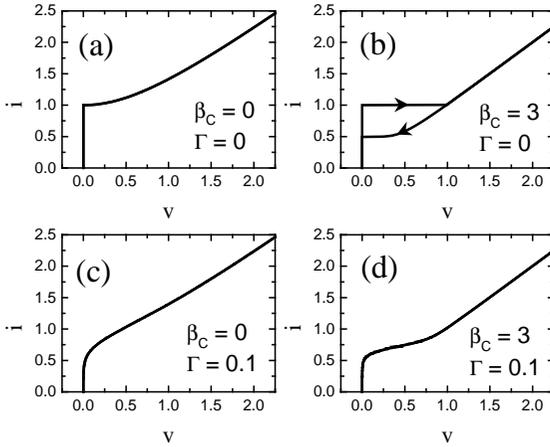
das in Abb. 3.1.2 für drei verschiedene Ströme dargestellt ist. Der Biasstrom  $i$  verkippt das Potential  $w_J$  je nach Vorzeichen nach rechts oder links. Für  $|i| < 1$  sind lokale Minima vorhanden, in denen das Teilchen eine stabile Gleichgewichtslage findet. Die Phase ist dann konstant, bzw. oszilliert aufgrund thermischer Fluktuationen um einen konstanten Mittelwert, was nach der zweiten Josephson Beziehung im zeitlichen Mittel verschwindende Spannung bedeutet: Der Kontakt befindet sich im supraleitenden Zustand (S-Zustand). Erst für  $|i| > 1$  sind die Minima verschwunden und es existieren laufende Lösungen, die zu einer hochfrequenten Wechselspannung (mit dc Anteil) über den Kontakt führen. Außer in speziellen Hochfrequenz-Experimenten beobachtet man nur den dc-Anteil:

$$\langle v \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T v(i(t), t) dt \quad (3.17)$$

Im Fall starker Dämpfung  $\beta_C \ll 1$  und bei vernachlässigbarem Rauschstrom  $\Gamma \ll 1$  ist die Bewegungsgleichung nur von erster Ordnung und läßt sich analytisch integrieren. Man findet für die normierte dc Strom-Spannungskennlinie den Ausdruck [81]

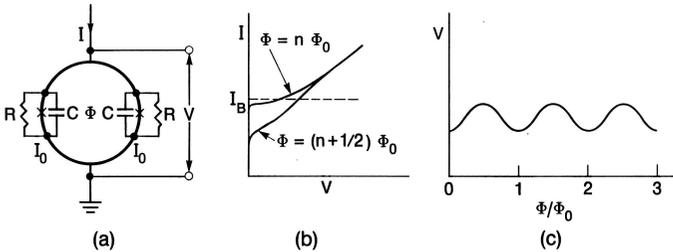
$$\langle v \rangle(i) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < i < 1, \\ \sqrt{i^2 - 1} & \text{für } i > 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

wie in Abb. 3.3 (a) dargestellt. Ein endlicher Rauschstrom  $i_N$  (d.h.  $\Gamma$  nicht  $\ll 1$ ) wirkt wie eine zusätzliche, zeitlich fluktuierende Verkipfung des Potentials. Hat die zusätzliche Verkipfung gerade das richtige Vorzeichen, kann die Phase auch schon für  $|i| < 1$  die dann noch vorhandenen Maxima thermisch aktiviert überwinden und so eine fortschreitende Bewegung ausführen. Das führt zu Fluktuationen des kritischen Stromes und die Kennlinien werden in diesem Fall rauschverrundet (Abb. 3.3 (c)). Ab einem gewissen Wert für  $\beta_C$  (in Abhängigkeit von  $\Gamma$ ) zeigen die Strom-Spannungskennlinien hysteretisches Verhalten [89], d.h. es existieren zwei Lösungen für denselben Strom, aber mit unterschiedlicher Spannung. Welche Lösung realisiert ist, hängt von der Vorgeschichte ab. Fährt man den Strom von Null hoch schaltet der Kontakt bei  $i = 1$  in den resistiven Zustand. Erniedrigt man den Strom von  $i \gg 1$ , so schaltet der Kontakt nicht bei  $i = 1$  in den S-Zustand zurück sondern erst für ein  $i_r < 1$  (vgl. Abb. 3.3 (b)). Im Bereich  $i_r < i < 1$  sind im gekippten Waschbrettpotential zwar Maxima vorhanden, aber das Teilchen kann diese durch Trägheit ( $\beta_C$  !) überwinden. In (d) erkennt man, daß (starke) thermische Fluktuationen die Hysteresis unterdrücken können. Die Bilder (b), (c) und (d) sind durch numerische



**Abb. 3.3:** Strom-Spannungs-Kennlinien eines RCSJ-Kontaktes.

Integration der Bewegungsgleichung (3.9) gewonnen. Das Potential (3.15) ist zwar periodisch in  $\delta$  und erfüllt damit eine der beiden Bedingungen die ein Potential zu einem Ratschenpotential machen, aber es ist eben auch reflexionssymmetrisch, so daß an einem Einzelkontakt kein Ratscheneffekt zu beobachten sein wird. Eine Möglichkeit, ein Ratschenpotential zu konstruieren, besteht darin, einen weiteren Kontakt parallel zu schalten und damit zum dc SQUID überzugehen.



**Abb. 3.4:** Das dc SQUID: (a) Ersatzschaltbild für das symmetrische SQUID im RCSJ-Modell, (b)  $I(V)$ -Kennlinie für zwei verschiedene Flüsse, (c)  $V(\Phi)$ -Kennlinie bei  $I_B$  aus (b) (aus [89]).

## 3.2 dc SQUID

Das dc SQUID ist ein supraleitender Ring, der von zwei Josephson Kontakten unterbrochen ist. Im Vergleich zum Einzelkontakt kommt als zusätzlicher makroskopischer Quanteneffekt die Flußquantisierung in einem supraleitenden Ring hinzu: Damit die Cooperpaar-Wellenfunktion eindeutig ist, darf sich ihre Phase auf jedem geschlossenen Weg nur um ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  ändern. Entlang des SQUID-Rings tragen auch die Phasendifferenzen  $\delta_1, \delta_2$  über die Kontakte zur Gesamtphase bei und man erhält die Bedingung

$$2\pi n = \delta_2 - \delta_1 - \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}, \quad (3.19)$$

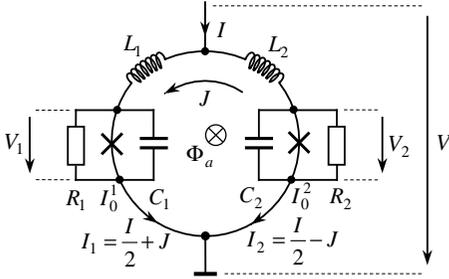
wobei sich der totale Fluß  $\Phi$  aus dem extern angelegten Fluß  $\Phi_a$  und dem vom Ringstrom  $J$  in der Ringinduktivität  $L$  induzierten Fluß zusammensetzt:

$$\Phi = \Phi_a + LJ. \quad (3.20)$$

Beschreibt man die beiden Kontakte durch das RCSJ-Modell erhält man das in Abb. 3.4 (a) gezeigte Ersatzschaltbild. Für verschwindende thermische Fluktuationen ( $T = 0$ ) und verschwindenden externen Fluß  $\Phi_a = 0$  fließt im symmetrischen SQUID kein Ringstrom. Dann sind die Ströme über beide Kontakte gleich und man beobachtet den maximalen kritischen Strom  $I_c^{max} = 2I_0$ . Ein externer magnetischer Fluß  $\Phi_a \neq 0$  induziert einen Ringstrom  $J$ , der periodisch in  $\Phi_a$  mit Periode  $\Phi_0$  ist. Da jetzt über einen der beiden Kontakte der Strom  $I/2 + J$  fließt, sinkt der kritische Strom. Der minimale kritische Strom  $I_c^{min}$  hängt von der Ringinduktivität  $L$  ab und wird erreicht für  $\Phi_a = (n + 1/2)\Phi_0$ , der Maximale für  $\Phi_a = n\Phi_0$ . In Abb. 3.4 (b) sind die beiden I-V-Kennlinien für minimalen und maximalen kritischen Strom eingezeichnet. Hält man den Biasstrom  $I$  konstant und variiert den externen Fluß, ergeben sich die V- $\Phi$ -Kennlinien wie in (c) gezeigt, mit Minima an den Stellen an denen der kritische Strom  $I_c(\Phi)$  maximal wird.

### 3.2.1 Langevin Gleichungen

An dieser Stelle soll die Beschreibung eines dc SQUIDs durch Langevin Gleichungen und ein dazu gehörendes Potential vorgestellt werden. In Abb. 3.5 ist das Ersatzschaltbild für ein asymmetrisches dc SQUID dargestellt, wobei noch jede Form von Asymmetrie möglich ist [90, 31]. Da es hier mehr um das Verständnis geht, wird von allen möglichen Asymmetrien nur die Asymmetrie in den kritischen Strömen betrachtet. Das bedeutet  $C_1 = C_2 = C$ ,



**Abb. 3.5:** Asymmetrisches dc SQUID: Ein supraleitender Ring der Induktivität  $L = L_1 + L_2$ , der von zwei Josephson-Kontakten unterbrochen ist. Parallel über beide Kontakte fließt der halbe Biasstrom  $I/2$  und antiparallel der Ringstrom  $J$ , der den externen Fluß  $\Phi_a$  abschirmt.

$R_1 = R_2 = R$  sowie  $L_1 = L_2 = L/2$ . Die Ströme  $I_1$ ,  $I_2$  in den beiden SQUID-Armen sind verknüpft mit dem Ringstrom  $J$  und dem Biasstrom  $I$ ,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{I}{2} + J & I &= I_1 + I_2 \\ I_2 &= \frac{I}{2} - J & J &= \frac{1}{2} (I_1 - I_2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Die Kirchhoff-Gleichungen für die Ströme  $I_1$ ,  $I_2$  in den beiden SQUID-Armen liefern zwei über den Ringstrom  $J$  gekoppelte Gleichungen:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\Phi_0 C}{2\pi} \ddot{\delta}_1 + \frac{\Phi_0}{2\pi R} \dot{\delta}_1 + I_0^1 \sin \delta_1 + I_N^1(t) = \frac{I(t)}{2} + J \\ I_2 &= \frac{\Phi_0 C}{2\pi} \ddot{\delta}_2 + \frac{\Phi_0}{2\pi R} \dot{\delta}_2 + I_0^2 \sin \delta_2 + I_N^2(t) = \frac{I(t)}{2} - J \end{aligned} \quad (3.22)$$

Um zu einem Gleichungssystem für  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  allein zu gelangen, wird der Ringstrom eliminiert. Den gesuchten Ausdruck für  $J$  erhält man durch Einsetzen des Gesamtflusses Gl. (3.20) in die Fluxoidquantisierung (3.19) und Auflösen nach  $J$ :

$$J = \frac{\Phi_0}{2\pi L} (\delta_2 - \delta_1) - \frac{1}{L} (\Phi_a + n \Phi_0) \quad (3.23)$$

Die Bewegungsgleichungen für  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  lauten also:

$$\frac{\Phi_0 C}{2\pi} \ddot{\delta}_1 + \frac{\Phi_0}{2\pi R} \dot{\delta}_1 + I_0^1 \sin \delta_1 - \frac{\Phi_0}{2\pi L} (\delta_2 - \delta_1 - 2\pi \frac{\Phi_a}{\Phi_0}) + I_N^1(t) = \frac{I}{2} \quad (3.24)$$

$$\frac{\Phi_0 C}{2\pi} \ddot{\delta}_2 + \frac{\Phi_0}{2\pi R} \dot{\delta}_2 + I_0^2 \sin \delta_2 + \frac{\Phi_0}{2\pi L} (\delta_2 - \delta_1 - 2\pi \frac{\Phi_a}{\Phi_0}) + I_N^2(t) = \frac{I}{2}$$

Hier und im Folgenden ist  $n = 0$  gesetzt, denn wie schon gesagt, ist das

Verhalten des SQUIDs periodisch in  $\Phi_a$  mit Periode  $\Phi_0$ . Man erkennt diese Periodizität als Invarianz von (3.24) und (3.19) unter der Transformation

$$(\delta_1, \delta_2, \Phi_a) \rightarrow (\delta_1, \delta_2 + n2\pi, \Phi_a + n\Phi_0). \quad (3.25)$$

Die über den rechten und linken SQUID-Arm abfallenden Spannungen  $V_{rechts}$ ,  $V_{links}$  müssen gleich sein, also läßt sich die Gesamtspannung schreiben als die Hälfte der Summe:

$$V = V_{rechts} = V_{links} \Rightarrow V = \frac{1}{2}(V_{rechts} + V_{links}) \quad (3.26)$$

$V_{rechts}$ ,  $V_{links}$  setzen sich wiederum aus zwei Anteilen zusammen: den Josephson-Spannungen, die über den Kontakten abfallen  $V_k = \frac{\Phi_0}{2\pi} \dot{\delta}_k$  ( $k = 1, 2$  indiziert die Kontakte) abzüglich der in den Induktivitäten induzierten Spannungen  $-L_k \dot{I}_k$ . Die letztgenannten Anteile liefern bei zeitlicher Mittelung keinen Beitrag (sonst besäßen  $I_1$  oder  $I_2$  eine mit der Zeit anwachsende oder abfallende Komponente). Für den Mittelwert der Spannung  $\langle V \rangle$  gilt also

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} \frac{\Phi_0}{2\pi} \langle \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2 \rangle \quad (3.27)$$

Die Gleichungen (3.24) und (3.27) gestatten es, bei Kenntnis von  $I(t)$  und  $\Phi_a(t)$  die über das SQUID abfallende Spannung  $\langle V \rangle$  zu berechnen. Einführung des normierten Biasstroms  $i \equiv I/2I_0$  und des normierten externen Flusses  $\phi_a \equiv \Phi_a/\Phi_0$ , sowie der Asymmetriekoeffizienten  $\alpha_I$  für die kritischen Ströme gemäß

$$\begin{aligned} I_0^1 &= (1 - \alpha_I)I_0 & I_0 &= \frac{1}{2}(I_0^1 + I_0^2) \\ I_0^2 &= (1 + \alpha_I)I_0 & \alpha_I &= \frac{I_0^2 - I_0^1}{I_0^1 + I_0^2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

und Skalierung der Zeit wie beim Einzelkontakt  $\tau \equiv \omega_c t$  bringt:

$$\begin{aligned} \beta_C \ddot{\delta}_1 + \dot{\delta}_1 + (1 - \alpha_I) \sin \delta_1 - \frac{1}{\pi\beta_L} (\delta_2 - \delta_1 - 2\pi\phi_a) + i_N^1 &= i \\ \beta_C \ddot{\delta}_2 + \dot{\delta}_2 + (1 + \alpha_I) \sin \delta_2 + \frac{1}{\pi\beta_L} (\delta_2 - \delta_1 - 2\pi\phi_a) + i_N^2 &= i \\ \langle v \rangle &= \frac{1}{2} \langle \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2 \rangle. \end{aligned} \quad (3.29)$$

In der letzten Gleichung wurde wie beim Einzelkontakt die normierte Spannung  $v = V/V_c$  verwendet mit der charakteristischen Spannung  $V_c = I_0 R$ .

Außerdem taucht der Abschirmparameter

$$\beta_L \equiv \frac{2LI_0}{\Phi_0} \quad (3.30)$$

auf, der das Verhältnis des kritischen Stromes  $I_0$  zum maximal möglichen Ringstrom  $J = \Phi_0/2L$  angibt. Die Asymmetrie in den kritischen Strömen verschiebt die Flußwerte für die der kritische Strom des SQUID maximal wird. Der maximale kritische Strom fließt, wenn jeder Kontakt für sich seinen kritischen Strom trägt. Das führt auf:

$$I_1 = \frac{I}{2} + J = I_0(1 - \alpha_I) \quad I_2 = \frac{I}{2} - J = I_0(1 + \alpha_I) \quad (3.31)$$

und ergibt aufgelöst nach  $I$  und  $J$ :

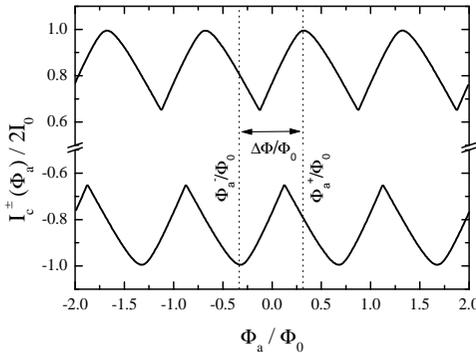
$$I = 2I_0 \quad J = -\alpha_I I_0 \quad (3.32)$$

Wenn in jedem Kontakt der maximale kritische Strom fließt, gilt für die Phasendifferenzen:

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{\pi}{2} \quad (3.33)$$

Einsetzen von (3.32) und (3.33) in den Ausdruck für den Ringstrom (3.23) und auflösen nach  $\Phi_a$  ergibt den gesuchten Flußwert

$$\Phi_a^\pm = \Phi_0 \frac{\beta_L}{2} \alpha_I \quad (3.34)$$



**Abb. 3.6:** Verschiebung der  $I_c^\pm(\Phi_a)$ -Kurven eines dc SQUIDs mit einer Asymmetrie in den kritischen Strömen  $\alpha_I = 0.4$ . Aus  $\beta_L = 1.5$  folgt  $\Delta\Phi/\Phi_0 = 0.6$  (siehe Text).

Eine Asymmetrie in den kritischen Strömen verschiebt also die Maxima der  $I_c^+(\Phi_a)$ -Kurve nach rechts; entsprechend verschiebt sich die  $I_c^-(\Phi_a)$ -Kurve um den gleichen Betrag nach links. Die relative Verschiebung  $\Delta\Phi$  der beiden Maxima gegeneinander ist also:

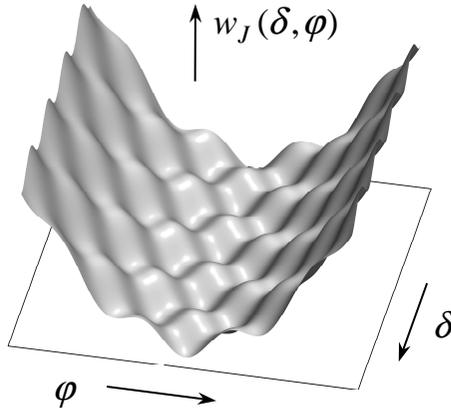
$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0} = \beta_L \alpha_I \quad (3.35)$$

Messung von  $I_c(\Phi_a)$ -Kurven erlaubt bei bekanntem  $\beta_L$  die Bestimmung von  $\alpha_I$ . In Abb. 3.6 ist eine simulierte  $I_c(\Phi_a)$ -Kennlinie für beide Polaritäten des Stromes dargestellt. Es ist  $\alpha_I = 0.4$  und  $\beta_L = 1.5$ . Damit ergibt sich aus Gl. (3.35)  $\Delta\Phi = 0.6\Phi_0$ , was auch in der Abbildung so zu sehen ist.

### 3.2.2 Zweidimensionales Potential

Auch die Bewegungsgleichungen (3.60) lassen sich als Bewegungsgleichungen für ein Teilchen in einem jetzt zweidimensionalen Potential auffassen. Es ist sinnvoll das Koordinatensystem um  $45^\circ$  zu drehen und damit zu den neuen Koordinaten

$$\delta = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) \quad \varphi = \frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1) \quad (3.36)$$



**Abb. 3.7:** Normiertes Potential  $w_J(\delta, \varphi)$  für das dc SQUID. Dargestellt ist der Fall  $\phi_a = 0$  und  $\alpha_I = 0$ .

überzugehen. Die Bewegungsgleichungen lauten in diesen Koordinaten:

$$\beta_C \ddot{\delta} + \dot{\delta} + \sin \delta \cos \varphi + \alpha_I \cos \delta \sin \varphi + i_N^\delta = i \quad (3.37)$$

$$\beta_C \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + \cos \delta \sin \varphi + \alpha_I \sin \delta \cos \varphi + \frac{2}{\pi \beta_L} (\varphi - \pi \phi_a) + i_N^\varphi = 0$$

mit den neuen Rauschströmen:

$$i_N^\delta = \frac{1}{2}(i_N^1 + i_N^2) \quad i_N^\varphi = \frac{1}{2}(i_N^2 - i_N^1) \quad (3.38)$$

Die Spannung ergibt sich zu:

$$\langle v \rangle = \langle \dot{\delta} \rangle \quad (3.39)$$

Durch Integration erhält man das Potential  $w_J(\delta, \varphi)$ :

$$w_J(\delta, \varphi) = 1 - \cos \delta \cos \varphi + \alpha_I \sin \delta \sin \varphi + \frac{1}{\pi \beta_L} (\varphi - \pi \phi_a)^2 \quad (3.40)$$

Die trigonometrischen Terme sind die Beiträge aus der Josephson Kopplungsenergie, der quadratische Term entspricht der magnetischen Energie des SQUID Rings. Das Potential hat die Form eines parabolisch nach oben gebogenen Eierkartons. Die Verbiegung wird durch den quadratischen Term und die Mulden im Eierkarton durch den periodischen Josephson-Kopplungsterm erzeugt. Das Potential ist in Abb. 3.7 für den vollkommen symmetrischen Fall  $\phi_a = 0$ ,  $\alpha_I = 0$  dargestellt. Durch Hinzunahme der antreibenden Kraft erhält man (wie beim Einzelkontakt) das Potential  $U_J(\delta, \varphi)$

$$U_J(\delta, \varphi) = 1 - \cos \delta \cos \varphi + \alpha_I \sin \delta \sin \varphi + \frac{1}{\pi \beta_L} (\varphi - \pi \phi_a)^2 - i\delta \quad (3.41)$$

Der hinzugekommene Term  $-i\delta$  verkippt das Potential  $w_J$  in Richtung  $\delta$ , also entlang des Tals im Potential.

### 3.2.3 Periodizität und Symmetrie

Bei zweidimensionalen Ratschensystemen muß das Potential periodisch sein bezüglich der Koordinate, in der der Transport<sup>1</sup> beobachtet wird und die

---

<sup>1</sup>Der Begriff Transport bezieht sich hier sowohl auf den Transport von Teilchen im zugeordneten mechanischen System als auch auf den Phasentransport im Josephson-System.

Reflexionssymmetrie bezüglich dieser Koordinate muß gebrochen sein. Da nur die zeitlich gemittelte Spannung, die über das SQUID abfällt gemessen wird und nach Gl. (3.39)  $\langle v \rangle = \langle \dot{\delta} \rangle$  gilt, hat man Periodizität und Symmetrie bezüglich der Koordinate  $\delta$  zu untersuchen. Das Potential nach Gl. (3.40) ist offenbar periodisch in  $\delta$ , d.h. die erste Forderung an ein Ratschenpotential ist bereits erfüllt. Die Forderung nach gebrochener Reflexionssymmetrie lautet:

$$w_J(\delta - \delta_0, \varphi) \neq w_J(-\delta - \delta_0, \varphi) \quad \forall \delta_0 \in [0..2\pi]. \quad (3.42)$$

Diese Forderung wird plausibel, wenn man die Bewegungsgleichungen (3.37) für den Spezialfall betrachtet. Ist  $\alpha_I = 0$ , so sind die Gleichungen invariant unter der Transformation:

$$(\delta, \varphi, i) \rightarrow (-\delta, \varphi, -i) \quad (3.43)$$

d.h. es existiert dann zu jeder Lösung  $(\delta(t), \varphi(t))$  zum Biasstrom  $i$  auch die an der  $\varphi$ -Achse gespiegelte Lösung  $(-\delta(t), \varphi(t))$  zum Biasstrom  $-i$ . Daraus folgt für die mittlere Phasengeschwindigkeit des jeweiligen Biasstroms  $\langle \dot{\delta} \rangle(i) = \langle -\dot{\delta} \rangle(-i)$  und deshalb  $\langle v \rangle(i) = -\langle v \rangle(-i)$ . Das System verhält sich also symmetrisch bezüglich Biasstromumkehr. Gleichung (3.42) ist eine notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung für ein zweidimensionales Ratschenpotential. Die andere Bedingung lautet

$$w_J(\delta - \delta_0, \varphi - \varphi_0) \neq w_J(-\delta - \delta_0, -\varphi - \varphi_0) \quad \forall (\delta_0, \varphi_0) \in [0..2\pi, 0..2\pi], \quad (3.44)$$

die ähnlich wie Gl. (3.42) begründet werden kann: Wenn  $\phi_a = 0$  sind die Bewegungsgleichungen invariant unter der Paritätstransformation

$$(\delta, \varphi, i) \rightarrow (-\delta, -\varphi, -i) \quad (3.45)$$

d.h. es findet sich wieder für jede Lösung  $(\delta(t), \varphi(t))$  zum Biasstrom  $i$  die Lösung  $(-\delta(t), -\varphi(t))$  zum Biasstrom  $-i$  und es gilt wieder  $\langle v \rangle(i) = -\langle v \rangle(-i)$ . Allgemeiner sind die Bewegungsgleichungen invariant unter der Transformation

$$\left(\delta - m\frac{\pi}{2}, \varphi - m\frac{\pi}{2}, i\right) \rightarrow \left(-\delta - m\frac{\pi}{2}, -\varphi - m\frac{\pi}{2}, -i\right), \quad m \in \mathbb{N} \quad (3.46)$$

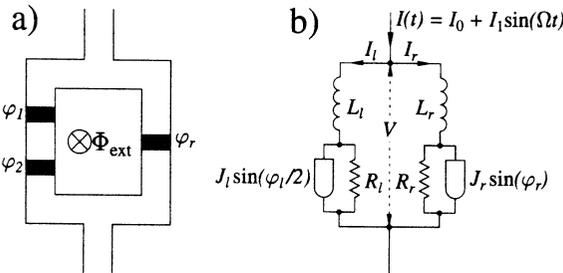
wenn  $\phi_a = \frac{m\pi}{2}$ . Um ein Ratschensystem zu erhalten müssen also die Bedingungen (3.42)+(3.44) erfüllt sein. Die Bedingung (3.42) kann für  $\alpha_I = 0$  nicht erfüllt werden; die kritischen Ströme der beiden Kontakte müssen also unterschiedlich sein. Ebenso läßt sich die zweite Bedingung (3.44) nicht

erfüllen wenn das SQUID von einem externen Fluß  $\Phi_a$  durchsetzt wird, der gerade gleich einem ganzzahligen Vielfachen von  $\frac{\Phi_0}{2}$  ist. Insgesamt muß daher gelten [46]

$$\phi_a \neq \frac{n}{2} \quad \text{und} \quad \alpha_I \neq 0. \quad (3.47)$$

### 3.3 3-Kontakt SQUID

Wie vorhin dargelegt, läßt sich durch geeignete Wahl der Parameter eines dc SQUIDS eine Ratsche konstruieren, d.h. durch geeignete Wahl der kritischen Ströme, der normierten Induktivität und des externen Flusses läßt sich die Reflexionssymmetrie des zugrunde liegenden Potentials brechen. Dieses Potential ist zunächst zweidimensional. Begibt man sich in den Limit kleiner normierter Induktivität, wird das Potential zwar eindimensional aber auch wieder symmetrisch. Eine eindimensionale Ratsche läßt sich so also nicht realisieren. In Abb. 3.8 ist nun der Originalvorschlag aus [48] wiedergegeben. Im linken Arm des SQUIDS befinden sich jetzt zwei Kontakte in Serie. Die durch den zweiten Kontakt zusätzlich hervorgerufene Phasendifferenz führt bei geeigneter Wahl der kritischen Ströme zu einem Potential, das auch im eindimensionalen Grenzfall asymmetrisch bleibt. In [48] sind die drei Kontakte stark gedämpft, d.h. alle drei Kontakte sind mit einem jeweils separaten Shuntwiderstand versehen. Diese Variante wird im Folgenden als "individually shunted junction SQUID", kurz I-SQUID bezeichnet. Tatsächlich realisiert worden ist im Rahmen dieser Arbeit jedoch die in Abb. 3.9 gezeigte Variante mit einem gemeinsamen Shuntwiderstand im linken Arm. Diese Anordnung wird als "commonly shunted junction SQUID", kurz C-SQUID bezeichnet. Im folgenden Abschnitt sollen nun die diese Anordnung beschreibenden Gleichungen aufgestellt und näher untersucht werden.



**Abb. 3.8:** Das 3-Kontakt SQUID: Der Vorschlag von Zapata *et al.* (aus [48]).

### 3.3.1 Langevin Gleichungen

Wir betrachten das in Abb. 3.9 wiedergegebene Ersatzschaltbild. Die Ströme  $I_l$ ,  $I_r$  in den beiden SQUID-Armen sind verknüpft mit dem Ringstrom  $J$  und dem Biasstrom  $I$ ,

$$I_l = \frac{I}{2} + J \quad I = I_l + I_r \quad (3.48a)$$

$$I_r = \frac{I}{2} - J \quad J = \frac{1}{2} (I_l - I_r) \quad (3.48b)$$

Die Kirchhoff-Gleichungen liefern zusammen mit den Josephson Beziehungen für jeden Kontakt eine Bewegungsgleichung. Die Gleichungen für die beiden Kontakte im linken Arm sind über den gemeinsamen Shuntwiderstand  $R_s$  gekoppelt:

$$I_l = \frac{I}{2} + J = \frac{\Phi_0 C_k}{2\pi} \ddot{\delta}_k + \frac{\Phi_0}{2\pi R_s} (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + I_{0k} \sin \delta_k + I_{Ns} \quad (3.49a)$$

mit  $k = (1, 2)$ . Diese beiden Gleichungen wiederum sind gemeinsam mit der Gleichung für den Kontakt rechts über den Ringstrom  $J$  gekoppelt:

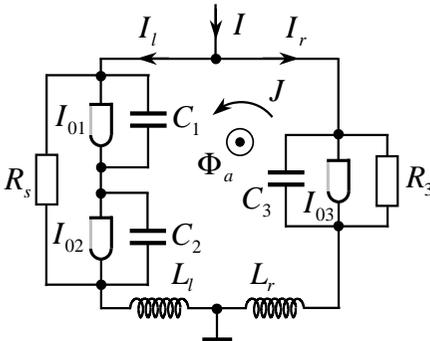
$$I_r = \frac{I}{2} - J = \frac{\Phi_0 C_3}{2\pi} \ddot{\delta}_3 + \frac{\Phi_0}{2\pi R_3} \dot{\delta}_3 + I_{03} \sin \delta_3 + I_{N3}. \quad (3.49b)$$

Um zu einem Gleichungssystem für  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  und  $\delta_3$  allein zu gelangen, wird der Ringstrom eliminiert. Der Ausdruck für die Fluxoidquantisierung lautet jetzt:

$$2\pi n = \delta_3 - (\delta_1 + \delta_2) - \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}. \quad (3.50)$$

Einsetzen des Gesamtflusses  $\Phi = \Phi_a + LJ$  und Auflösen nach  $J$  ergibt

$$J = \frac{\Phi_0}{2\pi L} (\delta_3 - (\delta_1 + \delta_2)) - \frac{1}{L} (\Phi_a + n \Phi_0). \quad (3.51)$$



**Abb. 3.9:** Das Drei-Kontakt SQUID: Im linken Arm befinden sich zwei Kontakte in Serie mit einem gemeinsamen Shuntwiderstand. Im Text wird diese Anordnung C-SQUID genannt.

Hier wird angenommen, daß die beiden Induktivitäten in den beiden Armen des SQUIDs gleich sind, also  $L_l = L_r = L/2$ . Im Folgenden wird  $n = 0$  gesetzt, da das Verhalten periodisch in  $\Phi_a$  mit Periode  $\Phi_0$  ist. Man erkennt diese Periodizität als Invarianz von (3.49) und (3.51) unter der Transformation

$$(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \Phi_a) \rightarrow (\delta_1, \delta_2, \delta_3 + n2\pi, \Phi_a + n\Phi_0). \quad (3.52)$$

Die über den rechten und linken SQUID-Arm abfallenden Spannungen  $V_{rechts}, V_{links}$  müssen gleich sein, also läßt sich die Gesamtspannung schreiben als die Hälfte der Summe:

$$V = V_{rechts} = V_{links} \Rightarrow V = \frac{1}{2}(V_{rechts} + V_{links}) \quad (3.53)$$

$V_{rechts}, V_{links}$  setzen sich wiederum aus zwei Anteilen zusammen: den Josephson-Spannungen die über den Kontakten abfallen  $V_k = \frac{\Phi_0}{2\pi} \dot{\delta}_k$  ( $k = 1, 2, 3$  indiziert die Kontakte) abzüglich der in den Induktivitäten induzierten Spannungen  $-L_l \dot{I}_l$  und  $-L_r \dot{I}_r$ . Die induzierten Spannungen verschwinden bei zeitlicher Mittelung und auch wenn es um Zeitabhängigkeiten geht ist nur der Beitrag der Josephson-Spannungen von Interesse. Daher wird hier die Spannung  $V$  definiert als

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Phi_0}{2\pi} (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3). \quad (3.54)$$

Die Gleichungen (3.49),(3.51) sowie (3.54) gestatten es, bei Kenntnis von  $I(t)$  und  $\Phi_a(t)$  die Spannung  $V(t)$  zu berechnen. Die dazu notwendige Normierung geschieht folgendermaßen: Der maximal mögliche kritische Strom ist dann erreicht, wenn in jedem Arm der kritische Strom des jeweiligen Arms fließt. In einer Serienanordnung ist das stets der kleinste der auftauchenden kritischen Ströme. Im Folgenden wird  $I_{01} < I_{02}$  angenommen und alle Ströme werden normiert auf  $I_0 \equiv (I_{01} + I_{03})/2$ , also auf die Hälfte des maximal möglichen kritischen Stroms. Für die Asymmetrieparameter  $\alpha$  und  $s$  gelten dann folgende Beziehungen:

$$I_{01} = \frac{2}{1+s} I_0 \quad I_0 = \frac{I_{01} + I_{03}}{2} \quad (3.55a)$$

$$I_{02} = \frac{2}{1+s} (1+\alpha) I_0 \quad \alpha = \frac{I_{02} - I_{01}}{I_{01}} \quad (3.55b)$$

$$I_{03} = \frac{2s}{1+s} I_0 \quad s = \frac{I_{03}}{I_{01}} \quad (3.55c)$$

Alternativ läßt sich die Asymmetrie in den kritischen Strömen der Kontakte im linken Arm auch durch

$$q = \frac{I_{01}}{I_{02}} = \frac{1}{1 + \alpha} \quad (3.56)$$

beschreiben und es ist  $q < 1$  wenn  $\alpha > 0$ . Für die Widerstände kommt man mit nur einem Asymmetrieparameter  $\alpha_R$  aus, der über

$$R_s = \frac{R}{1 - \alpha_R} \quad R = 2 \frac{R_s R_3}{R_s + R_3} \quad (3.57a)$$

$$R_3 = \frac{R}{1 + \alpha_R} \quad \alpha_R = \frac{R_s - R_3}{R_s + R_3} \quad (3.57b)$$

definiert ist. Bezüglich der Kapazitäten wird auf die Kapazität  $C$  normiert, die die halbe Gesamtkapazität bedeutet:

$$C_1 = \frac{2(2 + \alpha_C)}{s_C(2 + \alpha_C) + 1 + \alpha_C} C \quad C = \frac{1}{2} \left( C_3 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right) \quad (3.58a)$$

$$C_2 = \frac{2(2 + \alpha_C)(1 + \alpha_C)}{s_C(2 + \alpha_C) + 1 + \alpha_C} C \quad \alpha_C = \frac{C_2 - C_1}{C_1} \quad (3.58b)$$

$$C_3 = \frac{2s_C(2 + \alpha_C)}{s_C(2 + \alpha_C) + 1 + \alpha_C} C \quad s_C = \frac{C_3}{C_1} \quad (3.58c)$$

Man beachte, daß  $\alpha_C$  und  $s_C$  vollkommen analog zu  $\alpha$  und  $s$  definiert sind. Daher haben die Verhältnisse der kritischen Ströme denselben Wert wie die entsprechenden Verhältnisse der Kapazitäten wenn  $\alpha_C = \alpha$  und  $s_C = s$ .

Wie beim Einzelkontakt definieren  $R$  und  $I_0$  die charakteristische (Relaxations-) Frequenz  $\omega_c = 2\pi I_0 R / \Phi_0$  und zusammen mit der Kapazität  $C$  den McCumber-Parameter  $\beta_C \equiv 2\pi I_0 R^2 C / \Phi_0$ . Zusammen mit dem effektiven McCumber-Parameter

$$\beta_{C0} \equiv \frac{2(2 + \alpha_C)}{s_C(2 + \alpha_C) + 1 + \alpha_C} \beta_C \quad (3.59)$$

und Normierung der Zeit  $\tau \equiv \omega_c t$  erhält man:

$$\frac{i}{2} = -j + \beta_{C0} \ddot{\delta}_1 + (1 - \alpha_R)(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + \frac{2}{1 + s} \sin \delta_1 + i_{Ns} \quad (3.60a)$$

$$\frac{i}{2} = -j + (1 + \alpha_C) \beta_{C0} \ddot{\delta}_2 + (1 - \alpha_R)(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + \frac{2(1 + \alpha)}{1 + s} \sin \delta_2 + i_{Ns} \quad (3.60b)$$

$$\frac{i}{2} = +j + s_C \beta_{C0} \ddot{\delta}_3 + (1 + \alpha_R) \dot{\delta}_3 + \frac{2s}{1 + s} \sin \delta_3 + i_{N3}. \quad (3.60c)$$

Hierin ist  $i = I/I_0$ ,  $i_{N_s} = I_{N_s}/I_0$  sowie  $i_{N_3} = I_{N_3}/I_0$ . Der normierte Ringstrom ist gegeben durch

$$j = \frac{J}{I_0} = \frac{1}{\pi\beta_L}(\delta_3 - (\delta_1 + \delta_2) - 2\pi\phi_a) \quad (3.61)$$

und enthält den normierten externen Fluß  $\phi_a \equiv \Phi_a/\Phi_0$ . Außerdem taucht der Abschirmparameter

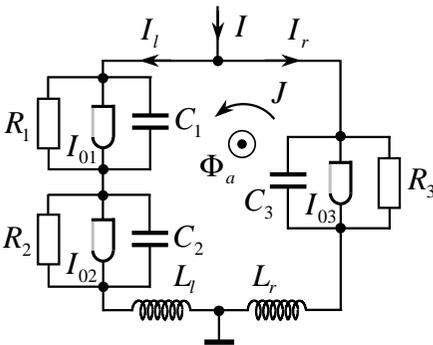
$$\beta_L \equiv \frac{2LI_0}{\Phi_0} \quad (3.62)$$

auf, der das Verhältnis des kritischen Stromes  $I_0$  zum maximal möglichen Ringstrom  $J = \Phi_0/2L$  angibt. Die normierte Spannung ist  $v = V/V_c$  mit der charakteristischen Spannung  $V_c = I_0R$ . Im Experiment beobachtet man nicht die zeitabhängige Spannung aus Gl. (3.54) sondern die zeitlich gemittelte Spannung  $\langle V \rangle$ . Die normierte gemittelte Spannung lautet einfach

$$\langle v \rangle = \frac{1}{2} \langle \dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3 \rangle. \quad (3.63)$$

### Der ursprüngliche Vorschlag

In diesem Abschnitt sollen die Unterschiede zwischen der realisierten Variante des Drei-Kontakt SQUIDs (dem C-SQUID, vgl. Abb. 3.9) und dem Originalvorschlag von Zapata *et al.*, dem in Abb. 3.10 wiedergegebenen I-SQUID, vorgestellt werden. Dabei geht es zunächst nur um die Änderungen, die sich in den Bewegungsgleichungen ergeben. Bei einem I-SQUID besitzen die beiden Kontakte im linken Arm zwei getrennte Shuntwiderstände. Da es drei statt zwei Widerstände gibt bedarf es zusätzlich zu (3.57) eines zweiten Asymmetrieparameters  $\alpha_{RI}$  für die beiden Widerstände im linken Arm, der



**Abb. 3.10:** Der Originalvorschlag von Zapata *et al.* Der gemeinsame Shuntwiderstand  $R_s$  im linken Arm ist jetzt ersetzt durch zwei getrennte, jeweils halb so große Widerstände  $R_1$  und  $R_2$ . Im Text wird diese Anordnung I-SQUID genannt.

wie folgt definiert ist

$$R_1 = R_s \frac{1 + \alpha_{RL}}{2} \quad R_2 = R_s \frac{1 - \alpha_{RL}}{2} \quad \alpha_{RL} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \quad . \quad (3.64)$$

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen verläuft vollkommen analog. Man erhält

$$\frac{\dot{i}}{2} = -j + \beta_{C0} \ddot{\delta}_1 + 2 \frac{1 - \alpha_R}{1 + \alpha_{RL}} \dot{\delta}_1 + \frac{2}{1 + s} \sin \delta_1 + i_{N1} \quad (3.65a)$$

$$\frac{\dot{i}}{2} = -j + (1 + \alpha_C) \beta_{C0} \ddot{\delta}_2 + 2 \frac{1 - \alpha_R}{1 - \alpha_{RL}} \dot{\delta}_2 + \frac{2(1 + \alpha)}{1 + s} \sin \delta_2 + i_{N2} \quad (3.65b)$$

$$\frac{\dot{i}}{2} = +j + s_C \beta_{C0} \ddot{\delta}_3 + (1 + \alpha_R) \dot{\delta}_3 + \frac{2s}{1 + s} \sin \delta_3 + i_{N3}. \quad (3.65c)$$

mit den neuen normierten Rauschströmen  $i_{N1}$  und  $i_{N2}$ . Alle anderen Ausdrücke, insbesondere für den Ringstrom  $j$  und die normierte Spannung  $v$  bleiben gleich. Im Vergleich zu Gl. (3.60) zeigt sich, daß es wie zu erwarten, nur Änderungen in den Reibungstermen und den Rauschströmen gibt. Das bedeutet insbesondere, daß Größen die das statische Verhalten beschreiben, wie z.B. der kritische Strom als Funktion des externen Flusses, für beide Anordnungen dieselben sein müssen. Daher betrachten wir diese Größe als Erstes.

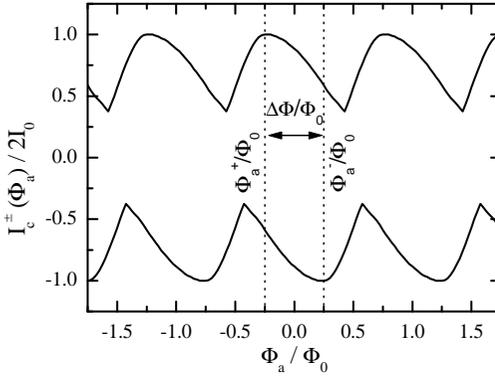
### 3.3.2 Kritischer Strom

Der kritische Strom ist eine sehr wichtige Größe, da er einerseits sehr leicht gemessen werden kann und andererseits im mechanischen Bild der Kraft entspricht, die nötig ist um die Barriere in die eine oder andere Richtung zu überwinden. Asymmetrien in den kritischen Strömen verschieben die Werte des externen Flusses für die der kritische Strom maximal wird. Der maximale kritische Strom ist erreicht, wenn in beiden Armen der maximal mögliche kritische Strom des jeweiligen Armes fließt. Setzt man ohne die Allgemeinheit zu beschränken  $I_{01} \leq I_{02}$  (das heißt  $\alpha \geq 0$ ) so bedeutet das  $I_r = I_{03}$  und  $I_l = I_{01}$ . Der Ringstrom ist dann gegeben durch  $J = (I_{01} - I_{03})/2$  und die drei Phasendifferenzen nehmen die Werte

$$\delta_1 = \delta_3 = \frac{\pi}{2}, \quad \delta_2 = \arcsin\left(\frac{1}{1 + \alpha}\right) < \frac{\pi}{2} \quad (3.66)$$

an. Einsetzen in Gl. (3.61) und auflösen nach  $\phi_a$  ergibt

$$\phi_a^+ = -\frac{1}{4} \left( \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{1 + \alpha} + 2\beta_L \frac{1 - s}{1 + s} \right), \quad (3.67)$$



**Abb. 3.11:**  $I_c(\Phi_a)$ -Kurven eines Drei-Kontakt SQUIDs mit  $\beta_L = 0.1$  und Asymmetrieparametern  $\alpha = 0$  und  $s = 1$ . Eingezeichnet ist die Position des ersten Maximums der  $I_c^+(\Phi_a)$  Kurve  $\Phi_a^+$  und die Position des ersten Minimums der  $I_c^-(\Phi_a)$  Kurve  $\Phi_a^-$  sowie der Abstand zwischen beiden  $\Delta\Phi$ . Weil  $s = 1$  ist, trägt der zweite Term in 3.67 nichts bei und es folgt  $\Phi_a^+ = -1/4\Phi_0$  (siehe Text).

wobei  $\phi_a^+$  die Verschiebung des positiven kritischen Stromes entlang der  $\phi_a$ -Achse bedeutet. Der Ausdruck enthält zwei Beiträge: Wenn  $\alpha \approx 0$  liefert der erste Term eine Verschiebung der  $I_c^+(\Phi_a)$ -Abhängigkeit in der Nähe von  $-\Phi_0/4$ , d.h. nach links. Die  $I_c^-(\Phi_a)$ -Abhängigkeit (negativer Biasstrom) wird entsprechend nach rechts verschoben. Dieser Term verdankt seine Existenz allein der Tatsache, daß im linken Arm zwei Kontakte in Serie geschaltet sind. Der zweite Term hängt von der Asymmetrie der kritischen Ströme zwischen links und rechts ab und wird klein, wenn  $\beta_L$  klein wird. Dieser Term entspricht genau dem für das dc SQUID in Abschnitt 3.2.1 erhaltenen Ausdruck (3.34). Die unterschiedlichen Vorzeichen rühren daher, daß  $s < 1$  einem negativen  $\alpha_I$  entspricht. Für nicht verschwindendes  $\beta_L$  variiert der zweite Term aus (3.67) zwischen  $+2\beta_L$  für  $s \rightarrow 0$  ( $I_{01} \gg I_{03}$ ) und  $-2\beta_L$  für  $s \rightarrow \infty$  ( $I_{03} \gg I_{01}$ ) und verschwindet für  $s = 1$  ( $I_{01} = I_{03}$ ). Die gesamte Verschiebung liegt also für  $\alpha \approx 0$  stets zwischen den Werten  $\phi_a^+ = -(1 + 2\beta_L)/4$  für  $s \rightarrow 0$  und  $\phi_a^+ = -(1 - 2\beta_L)/4$  für  $s \rightarrow \infty$ .  $\phi_a^+ = -1/4$  wird gerade für  $s = 1$  angenommen. Gl. (3.67) wird später benutzt um zumindest grob den Wert von  $\alpha$  zu bestimmen. In Fig. 3.11 ist eine simulierte  $I_c(\Phi_a)$ -Abhängigkeit wiedergegeben, die das oben beschriebene Verhalten illustriert.

### 3.3.3 Potential

Analog zum zweidimensionalen Potential des (2-Kontakt) dc SQUIDs lässt sich auch für ein 3-Kontakt SQUID ein Potential angeben, das dreidimensional ist. Wie später noch zu sehen sein wird, lässt sich die Dimension der Dynamik durch den Grenzfall  $\beta_L \ll 1$  um eins reduzieren. Durch Betrachtung des Grenzfalls  $\beta_C \ll 1$  gelingt das zwar auch, jedoch sind hier entweder die Voraussetzungen einigermaßen unrealistisch oder das Ergebnis stellt einen Spezialfall dar, der praktisch nie realisiert ist. Daher wenden wir uns zunächst dem erst genannten Grenzfall zu. Zuvor betrachten wir aber kurz das dreidimensionale Potential.

#### Dreidimensionales Potential

Die das C-SQUID beschreibenden Bewegungsgleichungen (3.60) führen zu folgendem Gleichungssystem, das das Potential definiert (wobei der Biasstrom im Moment nicht berücksichtigt wird)

$$-\frac{\partial V}{\partial \delta_1} \doteq -\frac{2}{1+s} \sin \delta_1 + \frac{1}{\pi \beta_L} (\delta_3 - (\delta_1 + \delta_2) - 2\pi \phi_a) \quad (3.68a)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \delta_2} \doteq -\frac{2(1+\alpha)}{1+s} \sin \delta_2 + \frac{1}{\pi \beta_L} (\delta_3 - (\delta_1 + \delta_2) - 2\pi \phi_a) \quad (3.68b)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \delta_3} \doteq -\frac{2s}{1+s} \sin \delta_3 - \frac{1}{\pi \beta_L} (\delta_3 - (\delta_1 + \delta_2) - 2\pi \phi_a). \quad (3.68c)$$

Integration ergibt

$$\begin{aligned} V(\delta_1, \delta_2, \delta_3) &= \frac{2}{1+s} (2 + \alpha + s - \cos \delta_1 - (1 + \alpha) \cos \delta_2 - s \cos \delta_3) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi \beta_L} \left( \delta_3 - (\delta_1 + \delta_2) - 2\pi \phi_a \right)^2. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Die trigonometrischen Terme sind die Beiträge aus der Josephson Koppelungsenergie, der quadratische Term entspricht der magnetischen Energie die im SQUID-Ring gespeichert ist.

#### Limit kleiner normierter Ringinduktivität für das C-SQUID

Da es schwierig ist, ein dreidimensionales Potential zu visualisieren, betrachten wir gleich den Grenzfall  $\beta_L \ll 1$ . Dann wird die Differenz der Phasendifferenzen fixiert durch den Wert des externen Flusses,  $\delta_3 - (\delta_1 + \delta_2) = 2\pi \phi_a$  und eine Koordinate kann eliminiert werden. Das wird im Folgenden die

Koordinate  $\delta_3$  sein. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß die beiden Widerstände gleich sind, also  $R_s = R_3$  oder  $\alpha_R = 0$ . Außerdem wird angenommen, daß die Kapazitäten die gleiche Asymmetrie besitzen wie die kritischen Ströme, also  $\alpha_C = \alpha$  und  $s_C = s$ . Dahinter steht die Annahme, daß sowohl die Kapazität pro Fläche als auch die kritische Stromdichte für alle Kontakte gleich sind. Eingesetzt in die Bewegungsgleichung (3.60) für das C-SQUID erhält man zunächst:

$$\frac{i}{2} = \beta_{C0}\ddot{\delta}_1 + (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + \frac{2}{1+s} \sin \delta_1 + i_{Ns} \quad (3.70a)$$

$$\frac{i}{2} = (1+\alpha)\beta_{C0}\ddot{\delta}_2 + (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + \frac{2(1+\alpha)}{1+s} \sin \delta_2 + i_{Ns} \quad (3.70b)$$

$$\frac{i}{2} = s\beta_{C0}(\ddot{\delta}_1 + \ddot{\delta}_2) + (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + \frac{2s}{1+s} \sin(\delta_1 + \delta_2 + 2\pi\phi_a) + i_{N3}. \quad (3.70c)$$

Es ist sinnvoll das Koordinatensystem um  $45^\circ$  zu drehen und damit zu den neuen Koordinaten

$$\delta_l = \delta_1 + \delta_2 \quad \varphi = \delta_1 - \delta_2 \quad (3.71)$$

überzugehen. Die erste Gleichung von (3.70) wird mit  $(1+\alpha)$  multipliziert und die Summe und die Differenz mit der zweiten Gleichung gebildet. Die Ergebnisse werden wieder durch  $(1+\alpha)$  dividiert. Die so entstandene Differenz ist dann eine Bewegungsgleichung für  $\varphi$ , während die Summe, addiert zur dritten Gleichung, die entsprechende Bewegungsgleichung für  $\delta_l$  liefert

$$\begin{aligned} \frac{3+2\alpha}{1+\alpha} \frac{i}{2} &= (1+s)\beta_{C0}\ddot{\delta}_l + \frac{3+2\alpha}{1+\alpha} \dot{\delta}_l + \frac{2+\alpha}{1+\alpha} i_{Ns} + i_{N3} \quad (3.72a) \\ &+ \frac{2}{1+s} \left( \sin \frac{\delta_l + \varphi}{2} + \sin \frac{\delta_l - \varphi}{2} + s \sin(\delta_l + 2\pi\phi_a) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{i}{2} &= \beta_{C0}\ddot{\varphi} + \frac{\alpha}{1+\alpha} \dot{\delta}_l + \frac{\alpha}{1+\alpha} i_{Ns} \quad (3.72b) \\ &+ \frac{2}{1+s} \left( \sin \frac{\delta_l + \varphi}{2} - \sin \frac{\delta_l - \varphi}{2} \right). \end{aligned}$$

Diese Bewegungsgleichungen vereinfachen sich stark, wenn man  $\alpha = 0$  setzt. Man erhält dann

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}i &= (1+s)\beta_{C0}\ddot{\delta}_l + 3\dot{\delta}_l + 2i_{Ns} + i_{N3} \quad (3.73a) \\ &+ \frac{2}{1+s} \left( \sin \frac{\delta_l + \varphi}{2} + \sin \frac{\delta_l - \varphi}{2} + s \sin(\delta_l + 2\pi\phi_a) \right) \end{aligned}$$

$$0 = \beta_{C0}\ddot{\varphi} + \frac{2}{1+s} \left( \sin \frac{\delta_l + \varphi}{2} - \sin \frac{\delta_l - \varphi}{2} \right). \quad (3.73b)$$

Offensichtlich ist die Dynamik in Richtung  $\delta_l$  qualitativ verschieden zu der Dynamik in Richtung  $\varphi$ . Während die Bewegung in  $\delta_l$ -Richtung stark gedämpft ist (falls  $\beta_{C0} < 1$ ), ist die Bewegung in Richtung  $\varphi$  ungedämpft, da es keinen Reibungsterm gibt (tatsächlich taucht nirgendwo ein Term  $\propto \dot{\varphi}$  auf). Zusätzlich wirkt der Biasstrom  $i$  als antreibende Kraft in Richtung  $\delta_l$ , während die Bewegung in Richtung  $\varphi$  antriebslos erfolgt. Wegen  $\langle \dot{\delta}_1 \rangle + \langle \dot{\delta}_2 \rangle = \langle \dot{\delta}_3 \rangle$  ist die Spannung in diesen Koordinaten durch  $\langle \dot{\delta}_l \rangle$  gegeben. Für kleines  $\alpha$  lassen sich die Terme in Gl. (3.72), die den Antrieb durch den Biasstrom beschreiben nach  $\alpha$  entwickeln und man erhält, daß der Antrieb dann in Richtung  $(\delta_l, \varphi) = (3 - \alpha, \alpha)$  erfolgt.

Das zum Gleichungssystem (3.72) gehörende Potential ist definiert durch

$$\frac{\partial V}{\partial \delta_l} \doteq \frac{2}{1+s} \left( \sin \frac{\delta_l + \varphi}{2} + \sin \frac{\delta_l - \varphi}{2} + s \sin(\delta_l + 2\pi\phi_a) \right) - \frac{3 + 2\alpha}{1 + \alpha} \frac{i}{2} \quad (3.74a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} \doteq \frac{2}{1+s} \left( \sin \frac{\delta_l + \varphi}{2} - \sin \frac{\delta_l - \varphi}{2} \right) - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \frac{i}{2} \quad (3.74b)$$

und Integration liefert

$$V(\delta_l, \varphi) = -\frac{2}{1+s} \left( 2 \cos \frac{\delta_l + \varphi}{2} + 2 \cos \frac{\delta_l - \varphi}{2} + s \cos(\delta_l + 2\pi\phi_a) \right) - \frac{i}{2} \frac{(3 + 2\alpha)\delta_l + \alpha\varphi}{1 + \alpha}. \quad (3.75)$$

In Abb. 3.12 ist das Potential für den Fall  $\phi_a = 1/4$ ,  $i = 0$  und  $s = 1/2$  dargestellt. Wenn  $i = 0$  ist, ist das Potential unabhängig von  $\alpha$ , da  $\alpha$  nur in den Term eingeht, der die Verkipfung des Potentials durch den Biasstrom  $i$  beschreibt. Das Potential ist für  $i = 0$  in beide Richtungen  $4\pi$ -periodisch. Maxima und Minima sind schachbrettartig angeordnet. Wenn  $\phi_a = n/2$  mit einer ganzen Zahl  $n$ , ist das Potential in beide Richtungen symmetrisch. Wenn, wie in der Abbildung,  $\phi_a$  einem anderen Wert annimmt, ist die Symmetrie in Richtung  $\delta_l$  gebrochen. Für die andere Richtung herrscht auch dann noch Symmetrie, denn es ist  $V(\delta_l, \varphi - \varphi_0) = V(\delta_l, -\varphi - \varphi_0)$  für  $\varphi_0 = 2\pi n$  mit  $n$  einer ganzen Zahl. Jedoch ist auch

$$V(\delta_l - \delta_{l0}, \varphi - \varphi_0) \neq V(-\delta_l - \delta_{l0}, -\varphi - \varphi_0) \quad \forall (\delta_{l0}, \varphi_0) \in [0..2\pi, 0..2\pi]. \quad (3.76)$$

Wäre diese Bedingung nicht erfüllt, könnte man die Ersetzung

$$(\delta_l, \varphi, i) \rightarrow (-\delta_l, -\varphi, -i) \quad (3.77)$$

vornehmen und es fände sich für jede Lösung  $(\delta_l(t), \varphi(t))$  zum Biasstrom  $i$  die Lösung  $(-\delta_l(t), -\varphi(t))$  zum Biasstrom  $-i$  und es wäre  $\langle v \rangle(i) = -\langle v \rangle(-i)$ .

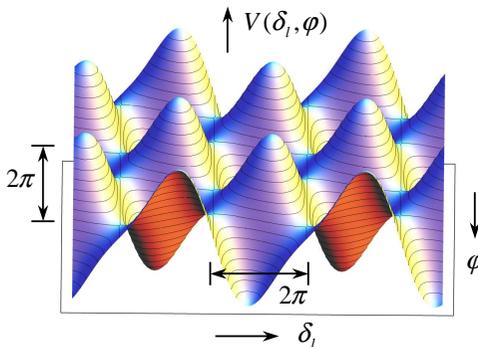
### Limit kleiner normierter Ringinduktivität für das I-SQUID

Bevor wir gleich zu dem Limit kleiner Trägheit kommen, soll noch kurz die Dynamik des Originalvorschlags im selben Limit behandelt werden. Wir betrachten also Gl. (3.65) und ersetzen wieder  $\delta_3$  durch die Annahme  $\beta_L \ll 1$ . Dabei werden auch hier die entsprechenden Vereinfachungen gemacht, also wieder  $\alpha_C = \alpha$  und  $s_C = s$ . Außerdem wird wieder angenommen, daß es keinerlei Asymmetrie in den Widerständen gibt, also  $R_1 = R_2 = R_3/2$  oder  $\alpha_R = \alpha_{RI} = 0$ . Alles zusammengenommen führt auf

$$\frac{i}{2} = \beta_{C0} \ddot{\delta}_1 + 2\dot{\delta}_1 + \frac{2}{1+s} \sin \delta_1 + i_{N1} \quad (3.78a)$$

$$\frac{i}{2} = (1+\alpha)\beta_{C0} \ddot{\delta}_2 + 2\dot{\delta}_2 + \frac{2(1+\alpha)}{1+s} \sin \delta_2 + i_{N2} \quad (3.78b)$$

$$\frac{i}{2} = s\beta_{C0}(\ddot{\delta}_1 + \ddot{\delta}_2) + (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + \frac{2s}{1+s} \sin(\delta_1 + \delta_2 + 2\pi\phi_a) + i_{N3}. \quad (3.78c)$$



**Abb. 3.12:** Normiertes, zweidimensionales Potential  $V(\delta_l, \varphi)$  für  $\phi_a = 1/4$  und  $i = 0$ . Der Asymmetrieparameter ist  $s = 0.5$ .

Folgt man nun der oben beschriebenen Prozedur und führt dabei wieder die Koordinaten  $\delta_l$  und  $\varphi$  ein, erhält man analog zu (3.72)

$$\begin{aligned} \frac{3+2\alpha}{1+\alpha} \frac{i}{2} &= (1+s)\beta_{C0}\ddot{\delta}_l + \frac{3+2\alpha}{1+\alpha}\dot{\delta}_l + \frac{\alpha}{1+\alpha}\dot{\varphi} + i_{N1} + \frac{1}{1+\alpha}i_{N2} + i_{N3} \\ &+ \frac{2}{1+s}\left(\sin\frac{\delta_l+\varphi}{2} + \sin\frac{\delta_l-\varphi}{2} + s\sin(\delta_l+2\pi\phi_a)\right) \quad (3.79a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{i}{2} &= \beta_{C0}\ddot{\varphi} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\dot{\delta}_l + \frac{2+\alpha}{1+\alpha}\dot{\varphi} + i_{N1} + \frac{\alpha}{1+\alpha}i_{N2} \\ &+ \frac{2}{1+s}\left(\sin\frac{\delta_l+\varphi}{2} - \sin\frac{\delta_l-\varphi}{2}\right). \quad (3.79b) \end{aligned}$$

Wieder vereinfachen sich die Gleichungen stark, wenn man  $\alpha = 0$  setzt:

$$\frac{3}{2}i = (1+s)\beta_{C0}\ddot{\delta}_l + 3\dot{\delta}_l + i_{N1} + i_{N2} + i_{N3} \quad (3.80a)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{2}{1+s}\left(\sin\frac{\delta_l+\varphi}{2} + \sin\frac{\delta_l-\varphi}{2} + s\sin(\delta_l+2\pi\phi_a)\right) \\ 0 &= \beta_{C0}\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi} + \frac{2}{1+s}\left(\sin\frac{\delta_l+\varphi}{2} - \sin\frac{\delta_l-\varphi}{2}\right) + i_{N1}. \quad (3.80b) \end{aligned}$$

Beim Vergleich von (3.73) mit (3.80) fällt auf, daß die Gleichungen für  $\delta_l$  identisch sind, d.h. sie gehen durch die Ersetzung  $2i_{N_s} \rightarrow i_{N1} + i_{N2}$  ineinander über. In der Gleichung für  $\varphi$  hingegen erscheint jetzt ein Term  $\propto \varphi$  und der Rauschterm  $i_{N1}$ , die in (3.73) abwesend sind. Offensichtlich gilt das Potential (3.75), wie zu erwarten, für beide Sätze von Bewegungsgleichungen.

### Limit kleiner Trägheit für das C-SQUID

Auch durch den Übergang zum Limit kleiner Trägheit läßt sich die Dimension des Potentials um eins reduzieren. Das soll im Folgenden zunächst für das C-SQUID vorgeführt werden. Die Asymmetrie in den Widerständen wird wieder vernachlässigt, also  $\alpha_R = 0$ . Den Ausgangspunkt bildet wieder Gl. (3.60). Kleine Trägheit bedeutet, daß der Trägheitsparameter  $\beta_{C0} \ll 1$  ist. In diesem Regime werden die Verschiebungsströme  $\propto C_k\ddot{\delta}_k$  vernachlässigt und im Ersatzschaltbild Abb. 3.9 verschwinden die Kapazitäten.

Man erhält zunächst:

$$\frac{i}{2} = -j + (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + \frac{2}{1+s} \sin \delta_1 + i_{Ns} \quad (3.81a)$$

$$\frac{i}{2} = -j + (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + \frac{2(1+\alpha)}{1+s} \sin \delta_2 + i_{Ns} \quad (3.81b)$$

$$\frac{i}{2} = +j + \dot{\delta}_3 + \frac{2s}{1+s} \sin \delta_3 + i_{N3} \quad (3.81c)$$

Die Differenz der ersten beiden Gleichungen liefert eine algebraische Gleichung, welche die Erhaltung des Suprastromes im linken Arm beschreibt

$$\sin \delta_1 = (1 + \alpha) \sin \delta_2. \quad (3.82)$$

Setzt man dies in die zweite Gleichung ein und bildet die Summe mit der Ersten (und teilt dann noch durch zwei), erhält man wieder die erste Gleichung, d.h. eine der ersten beiden Gleichungen ist durch (3.82) überflüssig geworden. Wir behalten die erste Gleichung bei und haben somit zusätzlich zu (3.82) nur noch zwei Differentialgleichungen

$$\frac{i}{2} = -j + (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + \frac{2}{1+s} \sin \delta_1 + i_{Ns} \quad (3.83a)$$

$$\frac{i}{2} = +j + \dot{\delta}_3 + \frac{2s}{1+s} \sin \delta_3 + i_{N3}. \quad (3.83b)$$

Gl. (3.82) kann nun benutzt werden um eine neue Phasendifferenz  $\delta_l \equiv \delta_1 + \delta_2$  durch  $\delta_1$  allein auszudrücken. Dazu ersetzt man zunächst  $\delta_2$  und erhält

$$\sin(\delta_l - \delta_1) = q \sin \delta_1, \quad (3.84)$$

mit dem Verhältnis der beiden kritischen Ströme im linken Arm  $q \equiv I_{01}/I_{02} = 1/(1 + \alpha)$ . Das Additionstheorem für den Sinus angewandt auf die linke Seite erlaubt es dann nach  $\delta_1$  aufzulösen:

$$\delta_1 = \arctan \left( \frac{\sin \delta_l}{\cos \delta_l + q} \right) \quad (3.85)$$

Setzt man jetzt (3.85) und den Ausdruck für den Ringstrom (3.61) in (3.83) ein, erhält man

$$\frac{i}{2} = \dot{\delta}_l + \frac{2}{1+s} \sin \left( \arctan \left( \frac{\sin \delta_l}{\cos \delta_l + q} \right) \right) - \frac{1}{\pi \beta_L} (\delta_3 - \delta_l - 2\pi \phi_a) + i_{Ns} \quad (3.86a)$$

$$\frac{i}{2} = \dot{\delta}_3 + \frac{2s}{1+s} \sin \delta_3 + \frac{1}{\pi \beta_L} (\delta_3 - \delta_l - 2\pi \phi_a) + i_{N3}. \quad (3.86b)$$

Das zu diesem Gleichungssystem gehörende Potential  $V(\delta_l, \delta_3)$  (der Biasstrom wird für den Moment wieder ignoriert) ist definiert durch

$$-\frac{\partial V}{\partial \delta_l} \equiv -\frac{2}{1+s} \sin\left(\arctan\left(\frac{\sin \delta_l}{\cos \delta_l + q}\right)\right) + \frac{1}{\pi\beta_L}(\delta_3 - \delta_l - 2\pi\phi_a) \quad (3.87a)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \delta_3} \equiv -\frac{2s}{1+s} \sin \delta_3 - \frac{1}{\pi\beta_L}(\delta_3 - \delta_l - 2\pi\phi_a). \quad (3.87b)$$

Dabei ist das Integral

$$\int \sin\left(\arctan\left(\frac{\sin \delta_l}{\cos \delta_l + q}\right)\right) d\delta_l \quad (3.88)$$

zu berechnen. Man verwendet

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{mit} \quad x = \frac{\sin \delta_l}{\cos \delta_l + q} \quad (3.89)$$

und hat dann statt (3.88)

$$\int \frac{\sin \delta_l}{\sqrt{1+2q \cos \delta_l + q^2}} d\delta_l \quad (3.90)$$

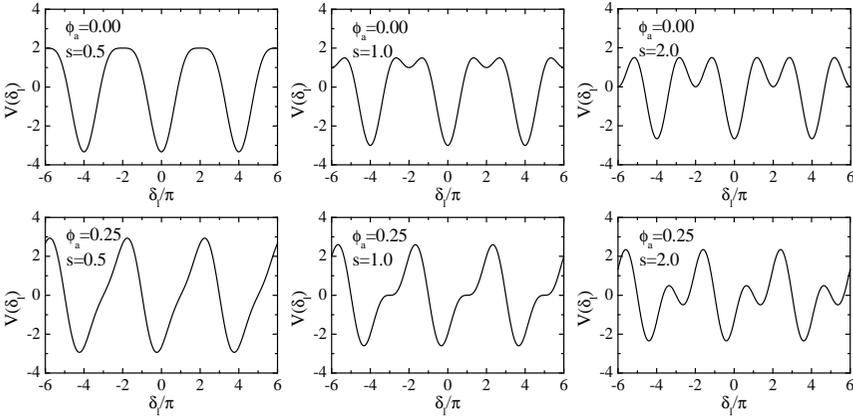
zu berechnen, was mit der Substitution  $\cos \delta_l = z$  leicht gelingt. Man erhält so

$$\int \sin\left(\arctan\left(\frac{\sin \delta_l}{\cos \delta_l + q}\right)\right) d\delta_l = \mp \frac{1}{q} (\sqrt{1+2q \cos \delta_l + q^2} - |q-1|) \quad (3.91)$$

wobei das negative Vorzeichen gilt wenn  $\delta_l \in [(4n-1)\pi, (4n+1)\pi]$  (mit  $n$  eine ganze Zahl) also überall wo  $\cos(\delta_l/2) > 0$  und das positive Vorzeichen überall sonst. Die Integrationskonstante wird so gewählt um die Abschnitte der Stammfunktion stetig aneinander zu setzen. Zusammen mit den übrigen Termen erhält man für das Potential

$$V(\delta_l, \delta_3) = -\frac{2}{1+s} (s \cos \delta_3 \pm \frac{1}{q} (\sqrt{1+2q \cos \delta_l + q^2} - |q-1|)) \quad (3.92) \\ + \frac{1}{2\pi\beta_L} (\delta_3 - \delta_l - 2\pi\phi_a)^2.$$

Die Symmetrie wird durch den externen Fluß und die Verhältnisse  $s = I_{03}/I_{01}$  und  $q = I_{01}/I_{02}$  festgelegt.



**Abb. 3.13:** Auswirkung von  $s$  und  $\phi_a$  auf die Symmetrie und die Periodizität des Potentials  $V(\delta_l)$  aus (3.94)

### Limit kleiner Trägheit und kleiner Ringinduktivität für das C-SQUID

Um eine weitere Dimension zu eliminieren betrachten wir zusätzlich den Grenzfall  $\beta_L \ll 1$ . Dadurch wird die Differenz der Phasendifferenzen  $\delta_3 - \delta_l$  fixiert durch den Wert des externen Flusses, d.h. Integration der Phase auf einem geschlossenen Weg entlang des Rings liefert  $\delta_3 - \delta_l = 2\pi\phi_a$  und  $\delta_3$  kann ersetzt werden:

$$V(\delta_l) = -\frac{2}{1+s} (s \cos(\delta_l + 2\pi\phi_a) \pm \frac{1}{q} (\sqrt{1 + 2q \cos \delta_l + q^2} - |q - 1|)) \quad (3.93)$$

Wenn die beiden Kontakte im linken Arm identische kritische Ströme haben ( $q = 1$ ) reduziert sich der zweite Term in der Klammer auf  $2 \cos(\delta_l/2)$  und der obige Ausdruck geht über in

$$V(\delta_l) = -\frac{2}{1+s} (s \cos(\delta_l + 2\pi\phi_a) + 2 \cos \frac{\delta_l}{2}), \quad (3.94)$$

was mit dem in [48] mitgeteilten Ausdruck übereinstimmt.

### Limit kleiner Trägheit für das I-SQUID

Für das Netzwerk des I-SQUIDs aus Abb. 3.10 liefert der Grenzfall  $\beta_{C0} \ll 1$  zunächst keine Reduktion der Dynamik um eine Dimension, solange keine

zusätzlichen Annahmen gemacht werden. Wir vernachlässigen wieder die Asymmetrien in den Widerständen (also  $\alpha_R = \alpha_{RI} = 0$ ) und erhalten aus (3.65) zunächst

$$\frac{i}{2} = -j + 2\dot{\delta}_1 + \frac{2}{1+s} \sin \delta_1 + i_{N1} \quad (3.95a)$$

$$\frac{i}{2} = -j + 2\dot{\delta}_2 + \frac{2(1+\alpha)}{1+s} \sin \delta_2 + i_{N2} \quad (3.95b)$$

$$\frac{i}{2} = +j + \dot{\delta}_3 + \frac{2s}{1+s} \sin \delta_3 + i_{N3}. \quad (3.95c)$$

Hier liefert die Differenz der ersten beiden Gleichungen

$$0 = -j + 2(\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_2) + \frac{2}{1+s} (\sin \delta_1 - (1+\alpha) \sin \delta_2) + i_{N1} - i_{N2} \quad (3.96)$$

In [48] wird die Annahme gemacht, daß für alle Zeiten  $\delta_1 = \delta_2$  gilt. Wie man an obiger Gleichung erkennen kann, ist dies eine Möglichkeit, die strenggenommen nur für  $i_{N1} = i_{N2} = 0$  (also  $T = 0$ ) und  $\alpha = 0$  offen ist. Macht man diese beiden Vereinfachungen so ist obige Gleichung durch  $\delta_1 = \delta_2$  erfüllt und man hat zusätzlich z.B.  $\delta_l/2 = \delta_1$ . Bildet man die Hälfte der Summe der ersten beiden Gleichungen aus (3.95) und vernachlässigt in der dritten Gleichung die Rauschströme ebenfalls, so erhält man

$$\frac{i}{2} = -j + \dot{\delta}_l + \frac{2}{1+s} \sin \frac{\delta_l}{2} \quad (3.97a)$$

$$\frac{i}{2} = +j + \dot{\delta}_3 + \frac{2s}{1+s} \sin \delta_3, \quad (3.97b)$$

was bereits sehr ähnlich zu (3.83) ist. Die Berechnung des zugehörigen Potentials ergibt

$$V(\delta_l, \delta_3) = -\frac{2}{1+s} (s \cos \delta_3 + 2 \cos \frac{\delta_l}{2}) + \frac{1}{2\pi\beta_L} (\delta_3 - \delta_l - 2\pi\phi_a)^2, \quad (3.98)$$

was mit (3.92) für  $q = 1$  übereinstimmt. Der Übergang zu einem eindimensionalen System verläuft dann analog zu der oben für das andere System geschilderten Vorgehensweise. und liefert das gleiche Ergebnis für das eindimensionale Potential.

### Symmetrieeigenschaften

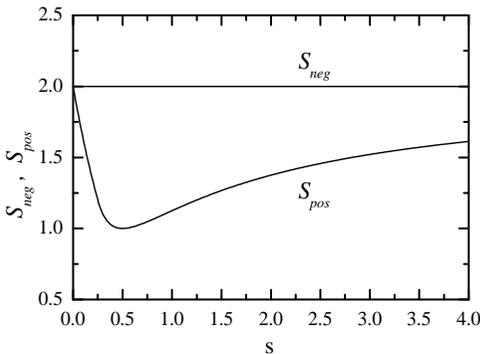
Zunächst sollen die Auswirkungen der Größen  $s$  und  $\phi_a$  auf die Eigenschaften von (3.94), also der Fall  $q = 1$ , diskutiert werden. In Abb. 3.13 ist das

Potential für diesen Fall dargestellt. Die Bedingung für Reflexionssymmetrie lautet  $V(\delta_l) = V(-\delta_l)$  für alle  $\delta_l$ . Das führt eingesetzt (der zweite Term in (3.94) ist sowieso gerade) auf

$$\cos(\delta_l + 2\pi\phi_a) = \cos(-\delta_l + 2\pi\phi_a) = \cos(\delta_l - 2\pi\phi_a), \quad (3.99)$$

wobei im zweiten Schritt wieder ausgenutzt wurde, daß die Kosinusfunktion gerade ist. Gl. (3.99) kann für alle  $\delta_l$  nur erfüllt werden, wenn sich die Argumente nur um ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden, d.h.  $\delta_l + 2\pi\phi_a = \delta_l - 2\pi\phi_a + 2\pi n$  mit  $n$  einer ganzen Zahl. Man erhält also, daß nur für  $\phi_a = n/2$  das Potential symmetrisch ist. In Abb. 3.13 zeigt die obere Reihe gerade diesen symmetrischen Fall  $\phi_a = 0$ , während in der unteren Zeile der Fall  $\phi_a = 1/4$  dargestellt ist. Dieser Wert wurde gewählt, weil er genau in der Mitte zwischen zwei Punkten liegt an denen Symmetrie herrscht und man daher vermuten kann, daß hier die Asymmetrie am stärksten ausgeprägt ist. Dabei ist zunächst unklar, was unter einer starken Asymmetrie zu verstehen ist. Sicherlich sollte die steile Flanke des Potentials möglichst steil abfallen während die flache Flanke möglichst sanft ansteigen sollte. Nun erkennt man jedoch in der unteren Zeile von Abb. 3.13, daß die Steigungen innerhalb einer Flanke variieren und je nach Wert von  $s$  sogar zwei Minima pro Periode auftauchen. Daher bietet sich folgende Forderung an: Bezeichnen  $S_{neg}$  den Betrag des größten Gefälles der (abfallenden) steilen Flanke und  $S_{pos}$  den Betrag der größten Steigung der (ansteigenden) flachen Flanke, so sollte der Quotient  $S_{pos}/S_{neg}$  möglichst klein sein. Um zu verstehen, an welchen Stellen die Steigungen (also die Kräfte) extremal werden, hat man die Nullstellen der zweiten Ableitung des Potentials aufzusuchen. Für  $\phi_a = 1/4$  führt das auf

$$s \cos\left(\delta_l + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cos\frac{\delta_l}{2} \iff 2s \sin\frac{\delta_l}{2} \cos\frac{\delta_l}{2} = \frac{1}{2} \cos\frac{\delta_l}{2}. \quad (3.100)$$



**Abb. 3.14:** Beträge der kleinsten Steigung der steilen Flanke ( $S_{neg}$ ) und der größten Steigung der flachen Flanke ( $S_{pos}$ ) als Funktion von  $s$ .

Die Gleichung rechts kann auf zwei Arten erfüllt werden: Für  $\delta_l = \pm\pi$  verschwindet der  $\cos$ -Term und wenn das nicht der Fall ist, folgt  $\delta_l = 2 \arcsin 1/4s$  und  $\delta_l = 2\pi - 2 \arcsin 1/4s$ . Die letzten beiden Gleichungen gelten natürlich nur wenn  $s > 1/4$ . Durch Einsetzen in die erste Ableitung von  $V$  zeigt sich, daß sich die kleinste (negative) Steigung des Potentials stets an der Stelle  $\delta_l = -\pi$  befindet und dort stets den Wert  $-2$  hat. Die größte Steigung findet man an der Stelle  $\delta_l = 2 \arcsin 1/4s$  wenn  $s > 1/4$  und an der Stelle  $\pi$  wenn  $s < 1/4$ . Die Werte für die extremen Steigungen  $S_{pos}$  und  $S_{min}$  gehen aus der folgenden Zusammenstellung hervor:

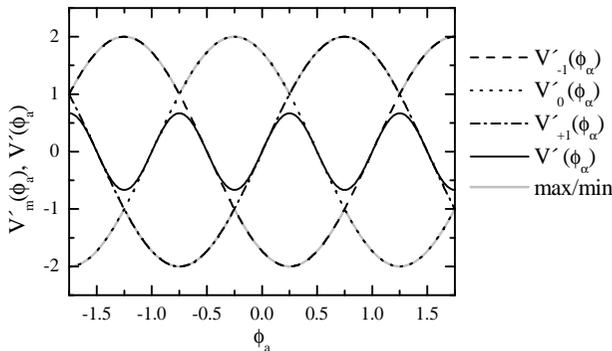
$$S_{pos} = \begin{cases} 2(1-s)/(1+s) & \text{für } s < 1/4 \\ (4s^2 \cos(2 \arcsin(1/4s)) + 1)/(2s(1+s)) & \text{für } s > 1/4 \end{cases}$$

$$S_{neg} = 2 \quad (3.101)$$

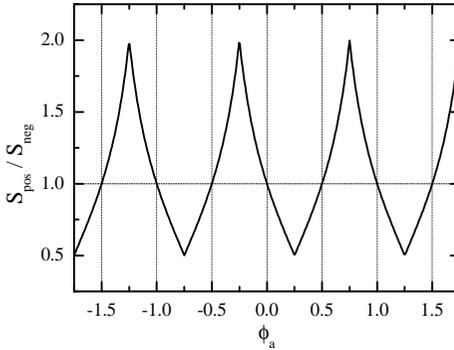
In Abb. 3.14 sind der Verlauf von  $S_{neg}$  und  $S_{pos}$  als Funktion von  $s$  dargestellt. Wie man sieht wird für  $s = 1/2$   $S_{pos}$  minimal und damit das Verhältnis  $S_{pos}/S_{neg}$  ebenso, womit das oben beschriebene Kriterium erfüllt ist.  $s = 1/2$  ist auch deshalb eine gute Wahl, weil es dann nur ein Minimum pro Periode des Potentials gibt.

Nachdem wir uns also davon überzeugt haben, daß für  $\phi_a = 1/4$  die Wahl  $s = 1/2$  die stärkste Asymmetrie erzeugt, soll es jetzt umgekehrt darum gehen,  $s = 1/2$  zu fixieren und die Abhängigkeit von  $\phi_a$  zu untersuchen. Wieder hat man die Nullstellen der zweiten Ableitung des Potentials aufzusuchen. Das führt auf

$$\cos(\delta_l + 2\pi\phi_a) = -\cos\frac{\delta_l}{2} = \cos(\pi - \frac{\delta_l}{2}). \quad (3.102)$$



**Abb. 3.15:**  $\phi_a$ -Abhängigkeit der Kräfte an den Punkten des Potentials (3.94) an denen die Kräfte extremal werden.



**Abb. 3.16:** Verhältnis der Kraft  $S_{pos}$ , die notwendig ist um das Teilchen nach rechts zu transportieren zur Kraft  $S_{min}$ , die nötig ist um das Teilchen nach links zu transportieren, als Funktion des externen Flusses  $\phi_a$ .

Dies ist erfüllt wenn sich die Argumente nur um ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden, wenn also gilt

$$\delta_l + 2\pi\phi_a = \pi - \frac{\delta_l}{2} + 2\pi m \quad \iff \quad \delta_l = -\frac{4\pi}{3}\phi_a + \frac{2\pi}{3}(2m + 1) \quad (3.103)$$

mit  $m$  einer ganzen Zahl, wobei es reicht die Werte  $m = -1, 0, 1$  zu betrachten. Das vierte Extremum befindet sich an der Stelle  $\delta_l = 2\pi - 4\pi\phi_a$ , wie man durch Einsetzen leicht überprüfen kann. Einsetzen dieser vier Punkte in die erste Ableitung des Potentials liefert die extremalen Kräfte und gibt Auskunft darüber, wann ein Minimum oder Maximum vorliegt. Das größte Maximum gibt die Kraft an, die aufgewandt werden muß um das Teilchen nach rechts zu transportieren und das kleinste Minimum gibt die Kraft an, die nötig ist um das Teilchen nach links zu transportieren. Man erhält so

$$V'_m(\phi_a) = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi(\phi_a + 2m + 1)}{3} + \sin \frac{2\pi(-\phi_a + 2(2m + 1))}{3} \right) \quad (3.104a)$$

$$V'(\phi_a) = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{2} \sin 2\pi(1 + \phi_a) + \sin \pi(1 - 2\phi_a) \right), \quad (3.104b)$$

wobei  $V'$  die Kraft an der Stelle  $\delta_l = 2\pi - 4\pi\phi_a$  bedeutet und  $m$  die Werte  $-1, 0, 1$  annimmt. In Abb. 3.15 sind die Ausdrücke aus Gl. (3.104) dargestellt. Man erkennt, daß das Extremum für  $m = -1$  das stärkste Minimum ist im Intervall  $\phi_a = [-1/4, 3/4]$ , das Extremum für  $m = 0$  ist das stärkste Maximum im Intervall  $[-3/4, 1/4]$  und das Extremum für  $m = +1$  ist das

stärkste Maximum im Intervall  $[1/4, 3/4]$ . Die durchgezogene Linie zeigt die Kraft bei  $\delta_l = 2\pi - 4\pi\phi_a$  und man erkennt, daß diese Kraft stets betragsmäßig kleiner ist als die Kräfte an den drei anderen Punkten. Die graue durchgezogene Linie gibt die sich so ergebende maximale und minimale Kraft an, d.h.  $S_{pos}$  und  $-S_{neg}$ , was genau die Kräfte sind, die man aufbringen muß um das Teilchen nach links oder rechts zu transportieren. In Abb. 3.16 schließlich ist das Verhältnis  $S_{pos}/S_{neg}$  als Funktion von  $\phi_a$  dargestellt. Wie erwartet findet man Minima bei  $\phi_a = (n + 1/4)$  und Maxima bei  $\phi_a = (n - 1/4)$ . An den Stellen  $\phi_a = n/2$  ist herrscht Symmetrie, denn es ist  $S_{pos} = S_{neg}$ .

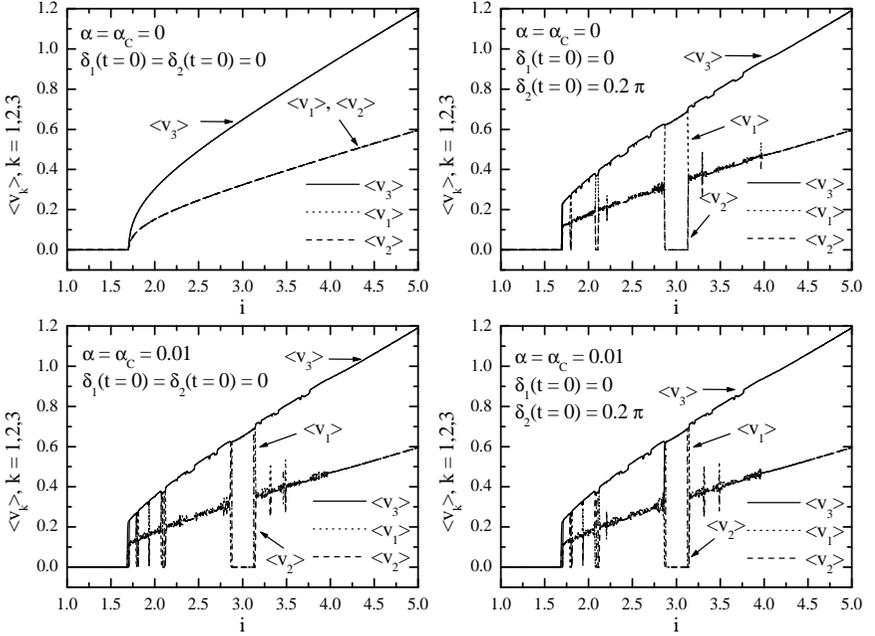
# Kapitel 4

## Numerische Simulationen

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse numerischer Simulationsrechnungen für beide Typen von 3-Kontakt SQUIDs vorgestellt. Das Kapitel beginnt mit den dc-Eigenschaften.

### 4.1 dc Kennlinien

Die Bewegungsgleichungen (3.60) für das C-SQUID (später auch die Gleichungen (3.65) für das I-SQUID) werden mit dem Runge-Kutta-Verfahren fünfter Ordnung [91, 92] (mit automatischer Schrittweitensteuerung) numerisch gelöst. Das Programm basiert auf einem von R. Kleiner entwickelten Programm für dc SQUIDs, das im wesentlichen den in [93, 94] beschriebenen Methoden folgt. Weil man an der dc-Spannung interessiert ist, werden die zeitlichen Ableitungen der Phasendifferenzen über mehrere Josephson-Oszillationen gemittelt. Zunächst werden Strom-Spannungs-Kennlinien berechnet, d.h. der Strom  $i$  in (3.60) ist zeitlich konstant. Dabei zeigt sich, daß die Form der Kennlinien von den Anfangsbedingungen abhängt. In Abb. 4.1 sind exemplarisch vier Kennlinien dargestellt, die alle für das durch (3.60) beschriebene C-SQUID gerechnet sind. Die Gesamtspannung  $\langle v_3 \rangle$  ist stets als durchgezogene Kurve dargestellt, während die Spannungen an den beiden Kontakten im linken Arm  $\langle v_1 \rangle$  und  $\langle v_2 \rangle$  gepunktet bzw. gestrichelt gezeichnet sind. Alle vier Kennlinien sind gerechnet für verschwindenden Fluß, also  $\phi_a = 0$ . Da die Kennlinien in diesem Falle punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs sind, reicht es nur positive Biasströme zu betrachten. Für alle vier Kennlinien gilt außerdem  $\Gamma = 0$ , sowie  $\beta_C = \beta_L = 0.1$ . In der oberen Zeile sind die kritischen Ströme der beiden Kontakte im linken Arm exakt

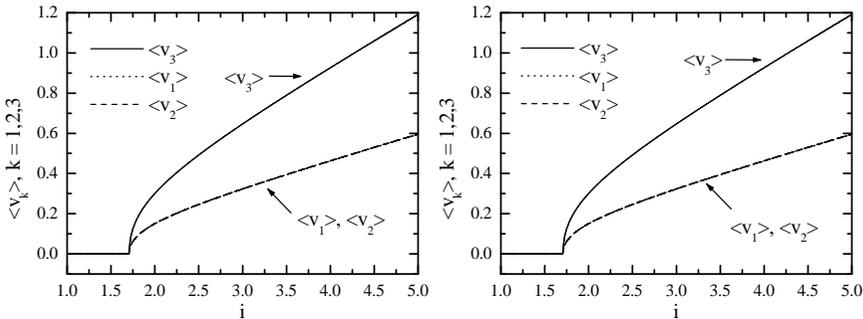


**Abb. 4.1:** Simulierte Strom-Spannungskennlinien für das durch (3.60) beschriebene C-SQUID. Alle Kennlinien sind für verschwindenden externen Fluß und verschwindendes Rauschen gerechnet:  $\phi_a = 0$ ,  $\Gamma = 0$ . Außerdem ist  $\beta_C = \beta_L = 0.2$ . In der oberen Zeile ist  $\alpha = \alpha_C = 0$  und in der unteren Zeile ist  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ . Die Kennlinien links und rechts unterscheiden sich in den Startwerten. Links ist stets  $\delta_1(t=0) = \delta_2(t=0) = 0$ , während rechts auch  $\delta_1(t=0) = 0$  ist, aber  $\delta_2(t=0) = 0.2\pi$  ist.

gleich, also  $\alpha = 0$ . Die Bilder unterscheiden sich jedoch in den Startwerten. Für beide Bilder gilt  $\delta_1(t=0) = \delta_3(t=0) = 0$  und alle Startgeschwindigkeiten verschwinden. Im linken Bild ist auch  $\delta_2(t=0) = 0$  während im rechten Bild  $\delta_2(t=0) = 0.2\pi$  ist. Wie man sieht, unterscheiden sich die Kennlinien in den beiden Diagrammen drastisch: Während die Kennlinie links glatt ist, erkennt man auf der Kennlinie im rechten Bild kleine stufenförmige Strukturen. Außerdem fällt auf, daß die Kennlinie im rechten Bild bei dem kritischen Strom ( $i \approx 1.7$ ) mit einem Sprung in den Spannungszustand übergeht, während es im linken Bild einen stetigen Übergang in den Spannungszustand gibt. Der dritte auffällige Unterschied besteht in dem unterschiedlichen Verhalten der Einzelspannungen  $v_1$  und  $v_2$ . Im linken

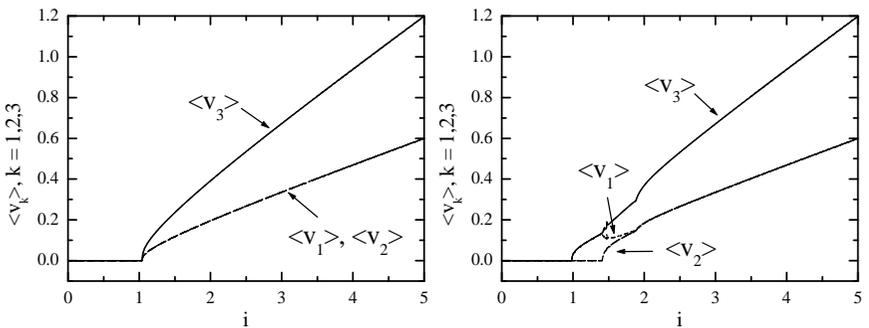
Diagramm haben die beiden Spannungen stets exakt den gleichen Wert. Im rechten Diagramm hingegen erkennt man, daß es Bereiche gibt, an denen beide Spannungen zumindest im zeitlichen Mittel den gleichen Wert haben, während es andere Bereiche gibt (z.B. in der Umgebung von  $i = 3$ ) an denen an einem der beiden Kontakte im Mittel keine Spannung abfällt, während der andere Kontakt die volle Spannung trägt. Selbst wenn die Spannungen an beiden Kontakten im linken Arm gleich sind, gibt es Stellen, an denen der Verlauf der Einzelspannungen stärker verrauscht erscheint und Stellen, an denen das nicht der Fall ist, z.B. in der Umgebung von  $i = 2.4$  und oberhalb von  $i = 4.0$ . Für die Kennlinien in den Diagrammen der unteren Zeile sind die kritischen Ströme der beiden Kontakte im linken Arm leicht verschieden und die Asymmetrie der Kapazitäten ist entsprechend gewählt, d.h. es ist jetzt  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ . Die Anfangsbedingungen sind identisch mit denen aus der oberen Zeile. Man erkennt, daß sich die Kennlinien praktisch nicht unterscheiden, und daß jetzt nur noch eine Situation vergleichbar mit dem Diagramm in der oberen Zeile rechts vorliegt. Es sind weitere Kombinationen von Startbedingungen untersucht worden, vor allem auch solche bei denen die Startgeschwindigkeiten nicht verschwinden. Es stellt sich heraus, daß der Fall im Bild oben links eine Ausnahme darstellt und nur für  $\alpha = 0$  und  $\delta_1(t=0) = \delta_2(t=0) = 0$  erhalten werden kann. Auf den Einfluß thermischer Fluktuationen wird später eingegangen.

Bevor jetzt weiter der Frage nachgegangen wird, wie die Strukturen auf den Kennlinien entstehen, soll das System (3.65), also das I-SQUID, betrach-



**Abb. 4.2:** Simulierte Strom-Spannungskennlinien für das durch (3.65) beschriebene I-SQUID. Beide Kennlinien sind für identische Parameter gerechnet und unterscheiden sich nur in den Anfangsbedingungen. Es ist  $\phi_a = 0$  und  $\Gamma = 0$ , sowie  $\beta_L = \beta_C = 0.1$  und  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ . Die Startwerte sind links  $\delta_1(t=0) = \delta_2(t=0) = 0$  während rechts auch  $\delta_1(t=0) = 0$  ist, aber  $\delta_2(t=0) = 0.2\pi$  ist.

tet werden. In Abb. 4.2 sind zwei Kennlinien für den Fall  $\alpha = \alpha_C = 0.01$  dargestellt, die sich wieder in den Anfangsbedingungen unterscheiden wie in der vorherigen Abbildung. Auch alle anderen Parameter haben die gleichen Werte wie in der vorherigen Abbildung. Offensichtlich ähneln die Kennlinien der Kennlinie in dem Diagramm aus Abb. 4.1 oben links. Was die Abhängigkeit von den Startwerten betrifft, ist die Situation hier umgekehrt in dem Sinne, daß jetzt der glatte Typ von Kennlinie den typischen Fall darstellt. Das wurde explizit überprüft durch Variation der Startwerte, wobei auch hier wieder Kombinationen getestet wurden, bei denen die Startgeschwindigkeiten nicht verschwinden. Weiter fällt auf, daß trotz einer kleinen Asymmetrie in den kritischen Strömen der Kontakte im linken Arm die Spannungen über diesen beiden Kontakten stets gleich sind. Jedoch gibt es auch für dieses System Situationen, in denen die Gestalt der Kennlinie zwar nicht von den Startwerten, jedoch sehr empfindlich von der Asymmetrie der kritischen Ströme im linken Arm abhängt. Das passiert nur für gewisse Intervalle von Werten für den externen Fluß. In Abb. 4.3 sind daher zwei Kennlinien dargestellt, die für  $\phi_a = 0.25$  gerechnet wurden. Die beiden Kennlinien unterscheiden sich nur in der Asymmetrie im linken Arm: Im Diagramm links ist  $\alpha = \alpha_C = 0$ , während im Diagramm rechts  $\alpha = \alpha_C = 0.01$  ist. Die Kennlinien sind jetzt nicht mehr punktsymmetrisch, jedoch ist trotzdem nur die Abhängigkeit für positiven Biasstrom dargestellt. Wie man sieht unterscheiden sich die beiden Bilder beträchtlich, was sehr bemerkenswert ist, da die Asymmetrie in den beiden kritischen Strömen der Kontakte im linken Arm im rechten Diagramm nur 2% beträgt. Offensichtlich gibt es jetzt einen Bereich ober-

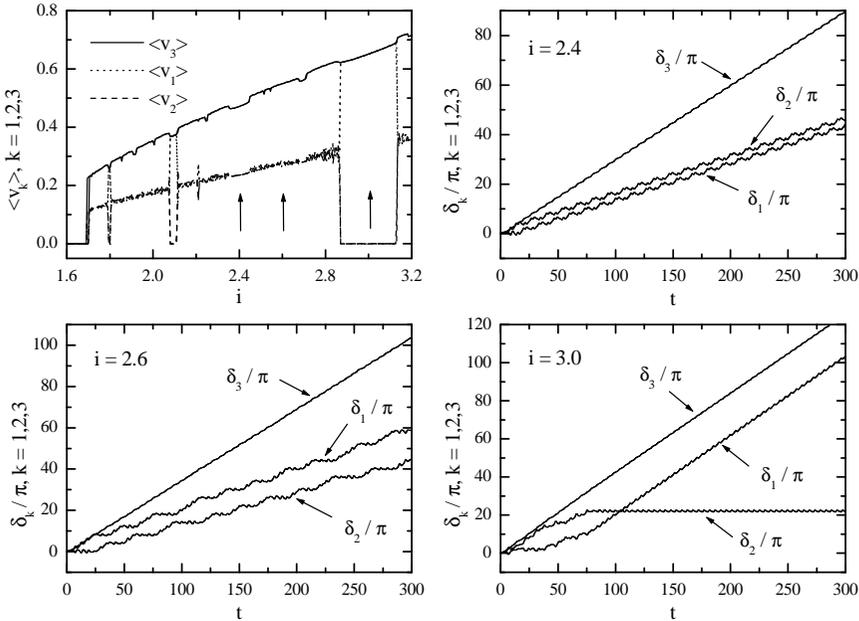


**Abb. 4.3:** Simulierte Strom-Spannungskennlinien für das durch (3.65) beschriebene I-SQUID. Es ist wieder  $\Gamma = 0$ , jedoch jetzt  $\phi_a = 0.25$ . Außerdem ist wieder  $\beta_C = \beta_L = 0.1$  und die Startwerte sind  $\delta_1(t = 0) = 0$  und  $\delta_2(t = 0) = 0.2\pi$ . Im linken Bild ist nun  $\alpha = \alpha_C = 0$ , während rechts  $\alpha = \alpha_C = 0.01$  ist.

halb von  $i = 1$  bis ungefähr  $i = 1.9$  innerhalb dessen die Spannungen an den beiden Kontakten im linken Arm verschiedene Werte annehmen. Die extreme Abhängigkeit von  $\alpha$  wird später bei der Betrachtung des kritischen Stromes in Abhängigkeit vom externen Fluß wieder auftauchen.

### 4.1.1 Trajektorien

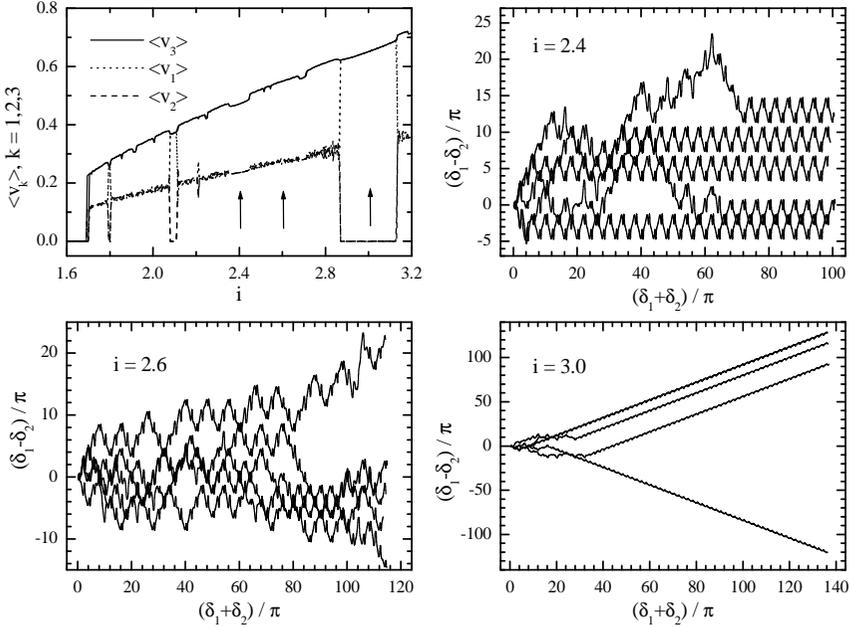
In diesem Abschnitt soll der Frage nachgegangen werden, wie die im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Strukturen auf der Kennlinie entstehen. Dazu werden für ausgewählte Parameter die Zeitabhängigkeiten der Phasendifferenzen berechnet und dabei wieder die Anfangsbedingungen variiert. In Abb. 4.4 ist links oben zunächst noch einmal eine Vergrößerung



**Abb. 4.4:** Simulierte Zeitabhängigkeiten der drei Phasendifferenzen für das C-SQUID nach (3.60). Parameter und Startwerte haben die gleichen Werte wie in Abb. 4.1. Oben links ist noch einmal ein Ausschnitt der dort dargestellten Kennlinie zu sehen. Pfeile markieren drei Werte für den Biasstrom:  $i = 2.4, 2.6$  und  $3.0$  für die in den drei übrigen Diagrammen die Zeitabhängigkeiten dargestellt sind. Die Zeit ist in normierten Einheiten angegeben.

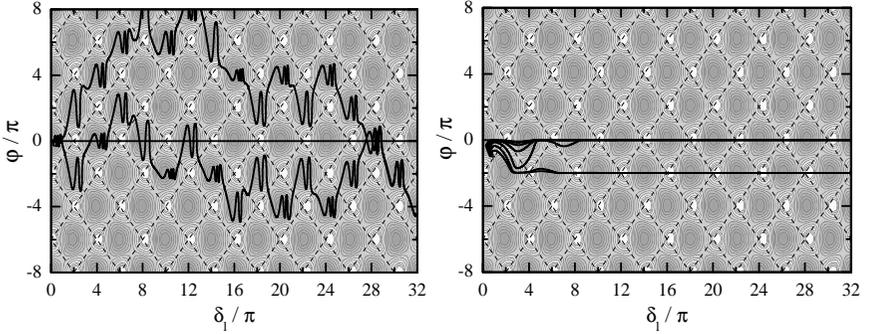
des Diagramms rechts oben aus Abb. 4.1 gezeigt. Die Pfeile weisen auf drei verschiedene Werte für den Biasstrom hin, an denen die Kennlinien unterschiedliches Verhalten zeigen. Für diese drei Werte ist in den übrigen Diagramm der zeitliche Verlauf der drei Phasendifferenzen  $\delta_k, k = 1, 2, 3$  gezeigt. Die Zeit ist dabei in normierten Einheiten angegeben. Als Startwerte wurde  $\delta_1(t = 0) = \delta_3(t = 0) = 0$  und  $\delta_2(t = 0) = 0.2\pi$  gewählt. Man erkennt deutlich das schon im vorangegangenen Abschnitt angesprochene Verhalten: Bei  $i = 2.4$  verlaufen  $\delta_1(t)$  und  $\delta_2(t)$  in einer sehr regelmäßigen Art und Weise, wobei die Differenz zwischen den beiden Phasendifferenzen zwar nicht konstant bleibt, aber periodisch um einen konstanten Wert oszilliert. Bei  $i = 2.6$  gibt es diese Periodizität nicht, weshalb auch im Kennlinienbild der Verlauf der Einzelspannungen in der Umgebung dieses Punktes stark verrauscht erscheint. Bei  $i = 3.0$  schließlich oszilliert  $\delta_2$  nachdem Einschwingvorgänge abgeklungen sind um einen zeitlich konstanten Mittelwert. Deshalb verschwindet die zeitliche Ableitung im Mittel und über den zweiten Kontakt fällt keine Spannung ab. Offensichtlich ist es gerade die Differenz  $\delta_1 - \delta_2$ , die sich in den drei Situationen sehr unterschiedlich verhält. Um diesen Umstand zu illustrieren, sind in Abb. 4.5 schließlich die Trajektorien in den Koordinaten  $\delta_1 + \delta_2$  und  $\delta_1 - \delta_2$  dargestellt. Im Diagramm oben links ist zum Vergleich noch einmal der Ausschnitt der Kennlinie wiedergegeben. In den übrigen Diagrammen sind je fünf Trajektorien gezeigt, mit Startwerten  $\delta_1(t = 0) = 0$  und  $\delta_2(t = 0) = 0.1\pi, 0.2\pi, \dots, 0.5\pi$ ; die Trajektorien werden also von links nach rechts durchlaufen. Für  $i = 2.4$  oszilliert  $\varphi = \delta_1 - \delta_2$  nach einiger Zeit (nachdem Einschwingvorgänge abgeklungen sind) in periodischer Art und Weise um einen festen Wert. Demzufolge ist der Verlauf von  $\langle v_1 \rangle$  und  $\langle v_2 \rangle$  in der Umgebung von  $i = 2.4$  glatt. Bei  $i = 2.6$  hingegen verlaufen die Trajektorien auch nach langer Zeit in einer regellosen Art und Weise. Da die Zeit über die die Phasengeschwindigkeiten während der numerischen Berechnung gemittelt werden stets endlich ist, erscheint der Verlauf der Einzelspannungen in der Umgebung dieses Punktes verrauscht. Bei  $i = 3.0$  schließlich, wächst die Differenz  $\varphi$  mit der Zeit. Wie man an der Kennlinie sehen kann, bewegt sich hier eine der beiden Phasendifferenzen im zeitlichen Mittel gar nicht, während der andere Kontakt die gesamte über das SQUID abfallende Spannung trägt.

Nun wird kurz der wesentliche Unterschied zwischen dem C-SQUID und dem I-SQUID in Bezug auf das dc Verhalten im Nullfeld gegenübergestellt. In Abb. 4.6 sind Trajektorien in den Koordinaten  $\delta_l$  und  $\varphi$  dargestellt. Der Biasstrom hat dabei den Wert  $i = 2$ , die Trajektorien werden also von links nach recht durchlaufen. Die Höhe des Potentials (3.75) für verschwindenden Biasstrom ( $i = 0$ ) ist durch Graustufen dargestellt, wobei sich die Maxima



**Abb. 4.5:** Simulierte Trajektorien für das durch (3.60) beschriebene C-SQUID. Parameter und Startwerte haben die gleichen Werte wie in Abb. 4.1. Oben links ist noch einmal ein Ausschnitt der dort dargestellten Kennlinie zu sehen. Pfeile markieren drei Werte für den Biasstrom:  $i = 2.4, 2.6$  und  $3.0$  für die in den drei übrigen Diagrammen die Trajektorien dargestellt sind.

an den weißen Stellen und die Minima an den dunkelgrauen Stellen befinden. Das Diagramm links gilt für das C-SQUID und rechts für das I-SQUID. Die Parameter für die Simulation sind  $\phi_a = \Gamma = 0$ ,  $\beta_C = \beta_L = 0.1$ ,  $s = 1/2$  und  $\alpha = \alpha_C = 0$ . Die einzelnen Trajektorien unterscheiden sich in den Startwerten. Für alle Trajektorien ist  $\delta_1(t=0) = \delta_3(t=0) = 0$ . Für die drei Trajektorien links ist  $\delta_2(t=0) = 0, 0.1\pi, 0.2\pi$ , wobei diejenige mit  $\delta_2(t=0) = 0$  die horizontal verlaufende ist. Für die fünf Trajektorien im rechten Diagramm gilt  $\delta_2(t=0) = 0.5\pi, 0.6\pi, \dots, 0.9\pi$ . Nur für  $\delta_2(t=0) = 0$ , was ja auch  $\varphi(t=0) = 0$  bedeutet, läuft für das C-SQUID die Trajektorie wirklich horizontal über die Maxima im Potential hinweg. Wenn  $\varphi(t=0) \neq 0$  laufen die Trajektorien über die Sattelpunkte des Potentials von einem Minimum zum nächsten. Dabei kommt es zu starken Oszillationen in Richtung  $\varphi$ . Das I-SQUID hingegen zeigt Trajektorien, die horizontal verlaufen, wobei stets

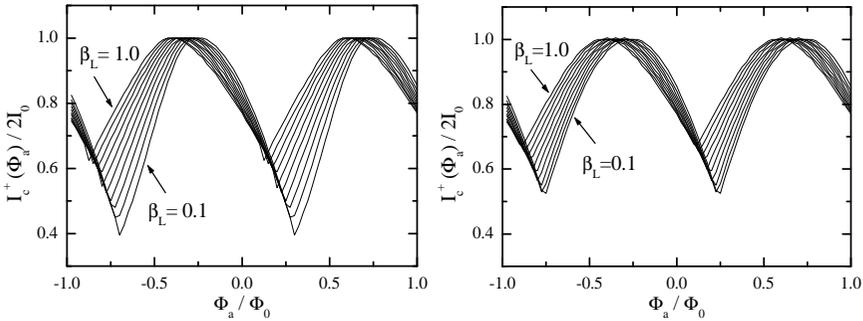


**Abb. 4.6:** Trajektorien im Potential (3.75). Die Trajektorien sind gerechnet für Biasstrom  $i = 2$ , während das Potential für den Fall  $i = 0$  ist. Die Höhe des Potentials ist durch Graustufen dargestellt, wobei sich die Maxima an den weißen Stellen und die Minima an den dunkelgrauen Stellen befinden. Das Diagramm links gilt für das C-SQUID und rechts für das I-SQUID. Die Parameter sind  $\phi_a = \Gamma = 0$ ,  $\beta_C = \beta_L = 0.1$ ,  $s = 1/2$  und  $\alpha = \alpha_C = 0$ . Die Startwerte sind für beide Diagramme  $\delta_1(t = 0) = \delta_3(t = 0) = 0$ , sowie links  $\delta_2(t = 0) = 0, 0.1\pi, 0.2\pi$  und rechts  $\delta_2(t = 0) = 0.5\pi, 0.6\pi, \dots, 0.9\pi$ .

$\varphi = 2\pi n$  ( $n$  ganz) ist. Es wird also nur eine Dimension genutzt. Für kleine aber nicht verschwindende  $\alpha$  kommt es bereits zu kleinen Oszillationen in  $\varphi$ -Richtung (nicht dargestellt). Geht man zu  $\phi_a = 1/4$  über, wird die zweite Dimension auch genutzt, wie in Abschnitt 4.3 zu sehen sein wird.

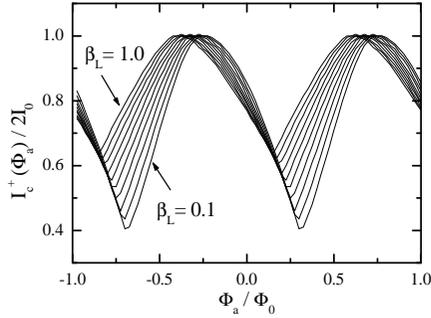
## 4.2 Kritischer Strom

In diesem Abschnitt soll die Abhängigkeit des kritischen Stromes vom externen magnetischen Fluß und vom Verhältnis  $s$  untersucht werden. Zur Ermittlung des kritischen Stromes wird für jeden Wert des externen magnetischen Flusses ein geeignet gewählter Ausschnitt der Strom-Spannungskennlinie gerechnet. Dabei wird der Strom von einem Startwert ausgehend in Schritten von 0.01 erhöht bis der vorgegebene Endwert für den Strom erreicht ist und dann mit derselben Schrittweite wieder heruntergefahren. Aus dem so erhaltenen Satz von Ausschnitten aus dc Kennlinien wird in einem zweiten Schritt der kritische Strom ermittelt indem man eine kleine Spannung vorgibt (Spannungskriterium), deren erstmaliges Überschreiten (von kleinen Strömen kommend) den kritischen Strom definiert. Auf diese Art und Weise kommen die beiden in Abb. 4.7 gezeigten Scharen von



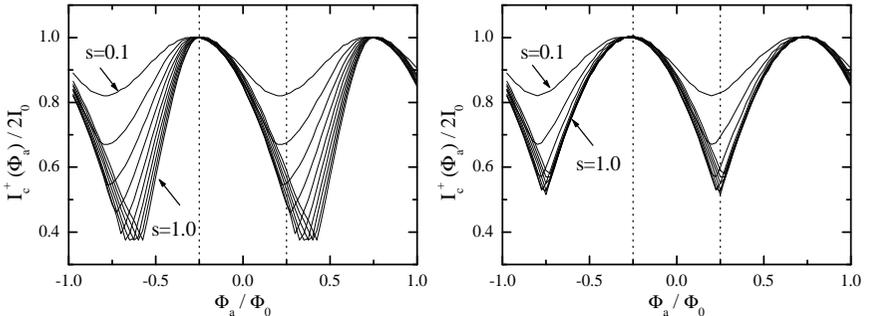
**Abb. 4.7:** Abhängigkeiten des kritischen Stromes vom Wert des externen Flusses. Die Kurven im linken Diagramm sind für das C-SQUID (3.60) und rechts für das I-SQUID (3.65) gerechnet. Die Parameter sind  $\beta_C = 0.1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $s = 1/2$ . Die Widerstandsasymmetrien verschwinden alle. Es sind je zehn verschiedene Kurven für  $\beta_L = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$  dargestellt.

$I_c^+(\Phi_a)$ -Abhängigkeiten zustande. Hier wurde der Abschirmparameter  $\beta_L$  variiert, der die Werte  $\beta_L = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$  annimmt. Die übrigen Parameter sind  $\beta_C = 0.1$ ,  $s = 1/2$ ,  $\alpha = 0$ , die Widerstandsasymmetrien verschwinden und  $\Gamma = 0$ . Die Kurven im Diagramm links sind für das C-SQUID (3.60) und die Kurven im Diagramm rechts für das System I-SQUID (3.65) gerechnet. Wie man sieht, ist die Form der Kurven durchaus ähnlich und z.B. im Intervall  $\phi_a = [-0.275, +0.225]$  liegen die Kurven tatsächlich auch aufeinander, jedoch ist die Modulationstiefe, also die Differenz zwischen dem minimalen und dem maximalen kritischen Strom (für positive Ströme, für negative entsprechend), im linken Diagramm viel größer als im Rechten. Das Verhalten des I-SQUIDS ändert sich, wenn man eine kleine Asymmetrie in den kritischen Strömen der Kontakte im linken Arm zulässt. Dies ist in Abb. 4.8 gezeigt. Es ist jetzt  $\alpha = 0.01$ , während alle übrigen Parameter wie im rechten Diagramm von Abb. 4.7 gewählt sind. Wie man sieht, ist die  $I_c(\Phi_a)$ -Abhängigkeit jetzt identisch mit derjenigen des C-SQUIDS. Die Abhängigkeiten im Diagramm auf der rechten Seite von Abb. 4.7 stellen also einen Spezialfall dar, der praktisch nicht erreicht werden kann, da die kritischen Ströme im linken Arm nie exakt gleich sind. Es ist interessant, besonders die Kurve für den kleinsten Abschirmparameter  $\beta_L = 0.1$  (aus Abb. 4.7 rechts) mit der analytisch ermittelten  $I_c(\Phi_a)$ -Abhängigkeit aus Abb. 3.15 zu vergleichen. Die Abhängigkeiten sind identisch. Besonders modulieren beide gerade bis zur Hälfte des maximal möglichen kritischen Stromes und beide sind spiegelsymmetrisch bezüglich der Linien



**Abb. 4.8:** Abhängigkeiten des kritischen Stromes vom Wert des externen Flusses für das I-SQUID (3.65). Die Parameter sind  $\beta_C = 0.1$ ,  $s = 1/2$  und die Widerstandsasymmetrien verschwinden. Die Asymmetrie in den kritischen Strömen ist jetzt  $\alpha = 0.01$ . Es sind zehn verschiedene Kurven für  $\beta_L = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$  dargestellt.

$\phi_a = (2n + 1)/4$  mit  $n$  einer ganzen Zahl. Die Beziehung (3.67) sagt im Fall  $s = 1/2$  und  $\alpha \approx 0$  Verschiebungen zwischen  $\phi_a^+ = -8/30 \approx -0.27$  für  $\beta_L = 0.1$  und  $\phi_a^+ = -5/12 \approx -0.42$  voraus, was gut mit der numerisch erhaltenen Verschiebung übereinstimmt. In Abb. 4.9 sind wieder zwei Scharen von  $I_c(\Phi_a)$ -Abhängigkeiten gezeigt, wobei jetzt  $\beta_L = 0.1$  fixiert wird und dafür  $s$  im Bereich  $s = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$  variiert wird. Die Kurven im Diagramm links sind wieder für das C-SQUID (3.60) und im Diagramm



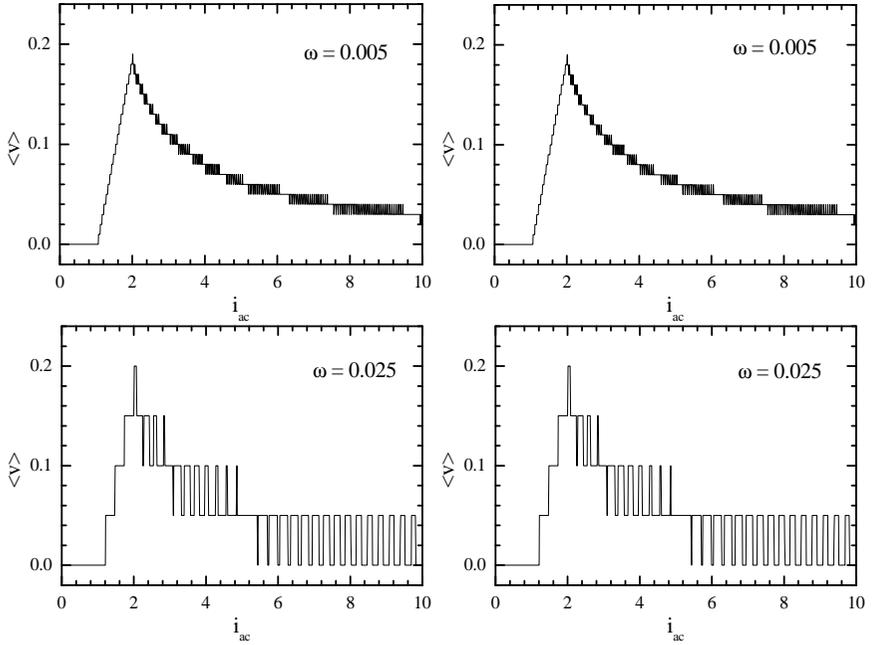
**Abb. 4.9:** Abhängigkeiten des kritischen Stromes vom Wert des externen Flusses. Die Kurven im linken Diagramm sind für das C-SQUID (3.60) und rechts für das I-SQUID (3.65) gerechnet. Die Parameter sind  $\beta_C = \beta_L = 0.1$ ,  $\alpha = 0$ . Die Widerstandsasymmetrien verschwinden alle. Es sind je zehn verschiedene Kurven für  $s = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$  dargestellt.

rechts für das I-SQUID (3.65) gerechnet. Da auch hier wieder  $\alpha = 0$  gesetzt wurde sind die Abhängigkeiten verschieden, was sich auch hier wieder ändert, wenn man ein kleines, nicht verschwindendes  $\alpha$  zuläßt. Das Verhalten des I-SQUIDS ist dann wieder identisch mit demjenigen des C-SQUIDS. Die Beziehung (3.67) ergibt für den vorliegenden Fall ( $\beta_L = 0.1, \alpha = 0$ ) Verschiebungen der Maxima zwischen  $\phi_a^+ = -0.25$  für  $s = 1$  und  $\phi_a^+ = -0.3$  für  $s \approx 0$ .

### 4.3 Harmonische Anregung

Der Biasstrom wird jetzt als harmonische Funktion der Zeit gewählt:  $I(t) = I_{ac} \sin \Omega t$ . In normierten Einheiten gilt:  $i(\tau) = i_{ac} \sin \omega \tau$ , mit der normierten Amplitude  $i_{ac} = I_{ac}/I_0$  und der normierten Frequenz  $\omega = \Omega/\omega_c$ . Die Integrationszeit wird dabei so gewählt, daß die Spannung stets über eine ganze Zahl von Perioden gemittelt wird. In Abb. 4.10 ist die gemittelte Spannung gegen die Amplitude  $i_{ac}$  für die beiden Frequenzen  $\omega = 0.005$  und  $\omega = 0.025$  aufgetragen. Die Kurven in der linken Spalte gelten für das C-SQUID und die in der rechten Spalte für das I-SQUID. Offensichtlich zeigen beide Systeme in diesem Falle identisches Verhalten. Das liegt daran, daß die Asymmetrie in den kritischen Strömen verschwindet ( $\alpha = 0$ ) und ebenso alle Startwerte verschwinden. Die übrigen Parameter sind  $\phi_a = 1/4$ ,  $\Gamma = 0$ , sowie  $\beta_C = \beta_L = 0.1$  und  $s = 1/2$ . Die Abbildung verrät mehrere anschaulich leicht zu verstehende Eigenschaften, die im Folgenden erläutert werden:

- Es gibt eine Schwelle, die die Amplitude überschreiten muß, bevor eine Ratschenspannung beobachtet wird. Darunter reicht die Amplitude (Verkipfung des Potentials) nicht aus, um das Teilchen von einer Potentialmulde in die Nächste zu transportieren.
- Für nicht zu kleine  $\omega$  erscheint die Spannung quantisiert. Dies ist in ein typisches Merkmal von Ratschensystemen, denn es ist eine Folge der Periodizität: Das Teilchen legt pro Periode der antreibenden Kraft stets eine ganze Anzahl von Potentialmulden zurück. Genauer gesagt rollt das Teilchen während einer halben Periode eine ganze Anzahl von Mulden in die eine Richtung und, wenn die Amplitude groß genug ist, in der darauffolgenden halben Periode eine ganze Anzahl von Mulden wieder zurück in die andere Richtung. Im zeitlichen Mittel hat man also abzuzählen, wieviele Mulden das Teilchen vor und zurück läuft und die Differenz zu bilden. Das Ergebnis ist in jedem Fall wieder eine



**Abb. 4.10:** Simulierte Ratschenspannung als Funktion der Amplitude  $i_{ac}$  des antreibenden Wechselstroms. Die Bilder in der linken Spalte sind gerechnet für das C-SQUID und in der rechten Spalte für das I-SQUID. Die Parameter sind  $\phi_a = 1/4$ ,  $\Gamma = 0$ , sowie  $\beta_L = \beta_C = 0.1$  und  $s = 1/2$ . Außerdem ist  $\alpha = \alpha_C = \alpha_R = \alpha_{RI} = 0$  und alle Startwerte verschwinden ebenso.

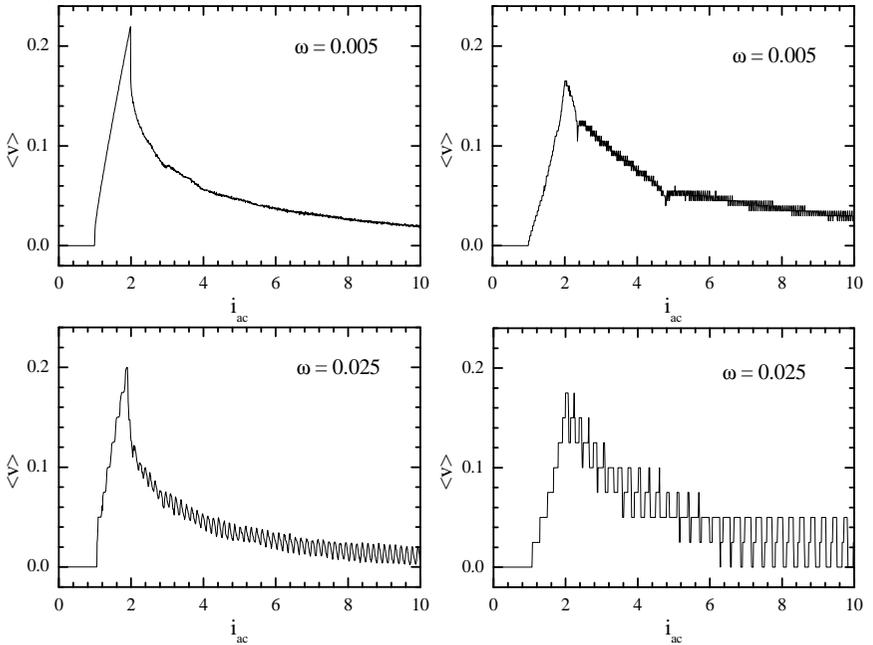
ganze Zahl und damit ist die mittlere Geschwindigkeit, (d.h. Anzahl Potentialmulden pro Periode) quantisiert. Da Phasentransport eine Spannung bedeutet, ist diese ebenfalls quantisiert. Wie man erkennen kann, haben die Stufen in normierten Einheiten die Höhe  $v = 2n\omega$  mit  $n$  einer ganzen Zahl. Dies ist leicht einzusehen: Das Potential Gl. (3.75) ist in der Richtung, in der der Transport gemessen wird,  $4\pi$ -periodisch. Es ist also

$$v = \frac{n4\pi}{T} = \frac{n4\pi}{2\pi} \omega = 2n\omega, \quad (4.1)$$

oder in natürlichen Einheiten  $V = 2n\Phi_0 f$  mit  $f = \Omega/2\pi$ . Das Auftreten von diskreten Spannungsstufen unterscheidet den Ratscheneffekt von einem reinen Gleichrichtungseffekt z.B. in einer Halbleiterdiode, in der keine Periodizität vorliegt.

- Für große  $\omega$  kann das System der Anregung nicht mehr folgen. Im Potentialbild bleibt das Teilchen einfach in einer Potentialmulde liegen. Dies ist in Abb. 4.10 zwar noch nicht zu sehen, dafür um so besser in Abb. 4.20, die später gezeigt wird.
- Für große  $i_{ac}$  verschwindet der Ratscheneffekt ebenfalls. Das Teilchen bewegt sich zwar während der halben Periode mit positivem  $i_{ac}$  viele Potentialmulden in die eine Richtung, aber während der Periode mit negativem  $i$  auch beinahe ebenso viele Perioden in die andere Richtung: Es bewegt sich also im Mittel nur noch wenig. Für sehr große Kippamplituden ist für den größten Teil der Zeit die Verkippung so groß, daß die Minima im Potential schon verschwunden sind und das Teilchen eine fortschreitende Bewegung ausführt. Die Asymmetrie wird dann immer unwichtiger und der Effekt stirbt aus.
- Für kleine  $\omega$  ( $\omega \rightarrow 0$ ) werden die Stufen wegen  $v = 2n\omega$  ebenfalls klein. Es wird gleichzeitig  $\omega$  klein und  $n$  groß, d.h. das Teilchen wird während der (großen) Periode eine große Anzahl  $n$  von Potentialmulden weit transportiert. Ändert man die Anregungsamplitude, ändert sich  $n$  relativ nur wenig und man erhält nur eine geringe relative Änderung der Spannung. Damit wird im Grenzfall  $\omega \rightarrow 0$  die  $\langle v \rangle (i_{ac})$ -Abhängigkeit eine stetige Funktion ohne Sprünge.

In Abb. 4.10 ist nun ein realistischerer Fall dargestellt. Es ist zwar immer noch  $\Gamma = 0$ , d.h. thermische Fluktuationen werden nicht berücksichtigt, jedoch sind jetzt die kritischen Ströme der beiden Kontakte im linken Arm nicht mehr exakt gleich, was sie in der Praxis ja nie sind. Die entsprechenden Asymmetrieparameter sind jetzt  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ ; die Fläche des zweiten Kontaktes ist also 2% größer als die Fläche des ersten Kontaktes. Die Anfangsbedingungen sind jetzt auch wieder  $\delta_1(t = 0) = \delta_3(t = 0) = 0$  und  $\delta_2(t = 0) = 0.2\pi$ . Die Anfangsbedingungen haben allerdings keinen Einfluß mehr auf die Gestalt des Kurvenverlaufs, sobald  $\alpha \neq 0$ . Wie man sieht, ändert sich das Verhalten beider Systeme und beide Systeme verhalten sich jetzt auch sehr unterschiedlich. Für beide Systeme lassen sich Stufen erkennen. Für das C-SQUID lassen sich allerdings nur für die größere der beiden Frequenzen und da auch nur für Werte der Amplitude unterhalb des Maximums Stufen erkennen. Die Stufen haben wieder bei beiden Systemen die gleiche Höhe, sind aber jetzt nur noch halb so hoch wie die entsprechenden Stufen in Abb. 4.10. Die Höhe beträgt also nur noch  $v = n\omega$ , was nur mit der Annahme verträglich ist, daß das Teilchen pro Periode eben nicht mehr um ein ganzzahliges Vielfaches von  $4\pi$  sondern nur noch um ein ganzzahliges von  $2\pi$  transportiert wird. Dies gelingt offensichtlich nicht mehr in einer



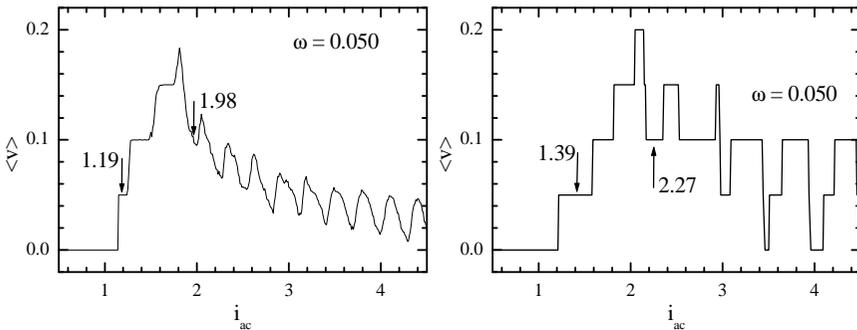
**Abb. 4.11:** Simulierte Ratschenspannung als Funktion der Amplitude  $i_{ac}$  des antreibenden Wechselstroms. Die Diagramme in der linken Spalte gelten C-SQUID und die in der rechten Spalte für das I-SQUID. Die Parameter sind  $\phi_a = 1/4$ ,  $\Gamma = 0$ , sowie  $\beta_L = \beta_C = 0.1$  und  $s = 1/2$ . Außerdem ist  $\alpha_R = \alpha_{Rl} = 0$  und auch  $\delta_1(t=0) = \delta_3(t=0) = 0$ . Im Gegensatz zu Abb. 4.10 ist jetzt aber  $\alpha = \alpha_C = 0.01$  und  $\delta_2(t=0) = 0.2\pi$ .

Dimension.  $\alpha \neq 0$  führt dazu, daß (mindestens) eine weitere Dimension relevant wird. Dies ist auch an Hand der reduzierten Bewegungsgleichungen (3.70) und (3.78) zu verstehen. Für endliches  $\alpha$  wirkt der Biasstrom als antreibende Kraft eben nicht mehr nur in Richtung  $\delta_l$  sondern zumindest für kleine  $\alpha$  in Richtung  $(\delta_l, \varphi) = (3 - \alpha, \alpha)$ .

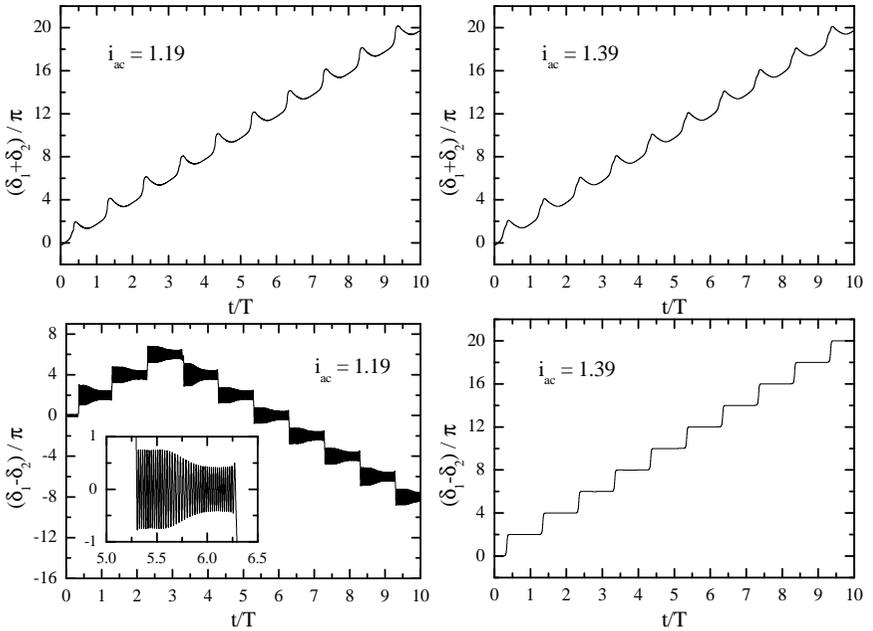
### 4.3.1 Trajektorien

Im Folgenden wird an Hand von Zeitabhängigkeiten und Trajektorien der zweidimensionale Charakter der Dynamik bei periodischem Antrieb vorgestellt. Dabei wird auch die Auswirkung des qualitativen Unterschiedes zwischen den beiden Systemen bezüglich der Dynamik in  $\varphi$ -Richtung deut-

lich. In Abb. 4.12 sind zunächst zwei Diagramme gezeigt für  $\omega = 0.050$  und zwar links für das C-SQUID (3.60) und rechts für das I-SQUID (3.65). Die übrigen Parameter sind wie in Abb. 4.11 gewählt. Die Pfeile weisen auf verschiedene Werte für  $i_{ac}$  hin, für die im Folgenden Zeitabhängigkeiten bzw. Trajektorien gezeigt werden. So ist in der linken Spalte von Abb. 4.13 die Zeitabhängigkeit der Größen  $\delta_1 + \delta_2$  und  $\delta_1 - \delta_2$  für das C-SQUID bei  $i_{ac} = 1.19$  und in der rechten Spalte die entsprechende Abhängigkeit für das I-SQUID bei  $i_{ac} = 1.39$  dargestellt. Die Zeit ist dabei in Einheiten von  $T = 2\pi/\Omega$  angegeben. Beide Systeme befinden sich bei den angegebenen Amplituden bezüglich der  $v(i_{ac})$ -Abhängigkeit auf der ersten beobachteten Spannungsstufe. Es zeigt sich, daß der Verlauf von  $\delta_1 + \delta_2$  bei beiden Systemen sehr ähnlich aussieht. Das ist Ausdruck der Tatsache, daß die Dynamik in Richtung  $\delta_l$  für beide Systeme identisch ist. Man erkennt auch, warum die Stufe gerade die Höhe  $\omega$  hat: Pro Periode des Antriebs nimmt  $\delta_l$  um  $2\pi$  zu. Sehr schön zu sehen ist ebenso, daß die Koordinate  $\delta_l$  nicht monoton wächst, sondern eben auch während eines Teils einer Periode wieder kleiner wird, was natürlich eine Folge des oszillierenden Charakters der antreibenden Kraft ist. In den beiden Diagrammen der unteren Zeile zeigt sich, daß die  $\varphi$ -Abhängigkeit für beide Systeme sehr verschieden ist. Das C-SQUID im linken Bild zeigt während jeder Periode starke Oszillationen in  $\varphi$ -Richtung, die darüber hinaus auf einer sehr kleinen Zeitskala ablaufen. Das ist eine Folge der Tatsache, daß die Dynamik dieses Systems in  $\varphi$ -Richtung stark ungedämpft verläuft, was sich durch die Abwesenheit eines

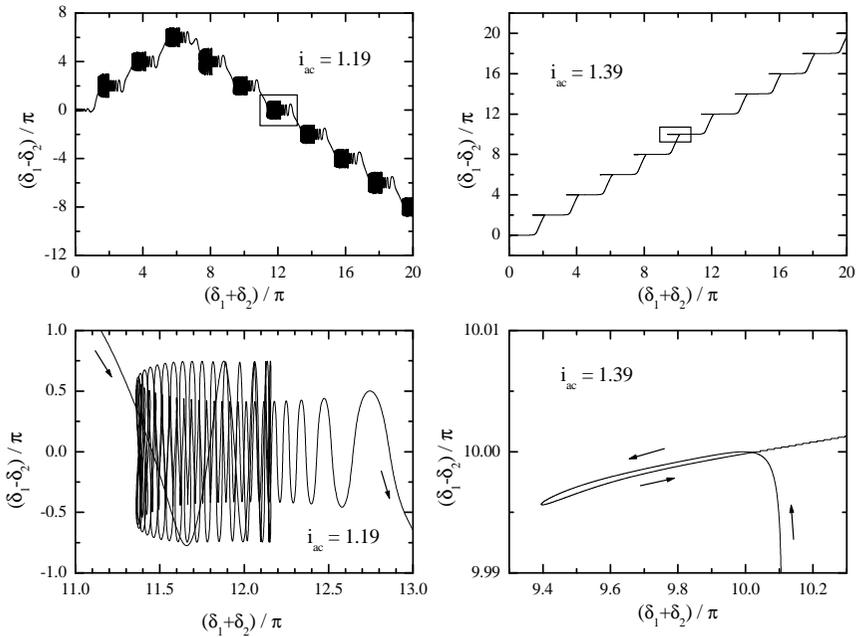


**Abb. 4.12:** Simulierte Ratschenspannung als Funktion der Amplitude  $i_{ac}$  des antreibenden Wechselstroms. Das Diagramm links ist für das C-SQUID und rechts für das I-SQUID gerechnet. Die Parameter sind identisch mit denen aus Abb. 4.11 außer der Frequenz, die jetzt  $\omega = 0.050$  beträgt. Pfeile an den Kurven weisen auf spezielle Werte für  $i_{ac}$  hin, die später noch wichtig sein werden.



**Abb. 4.13:** Zeitabhängigkeiten der beiden Koordinaten  $\delta_l = \delta_1 + \delta_2$  und  $\varphi = \delta_1 - \delta_2$ . Die Diagramme in der linken Spalte beziehen sich auf das C-SQUID und die Diagramme in der rechten Spalte auf das I-SQUID. Die Amplitude beträgt links  $i_{ac} = 1.19$  und rechts  $i_{ac} = 1.39$ .

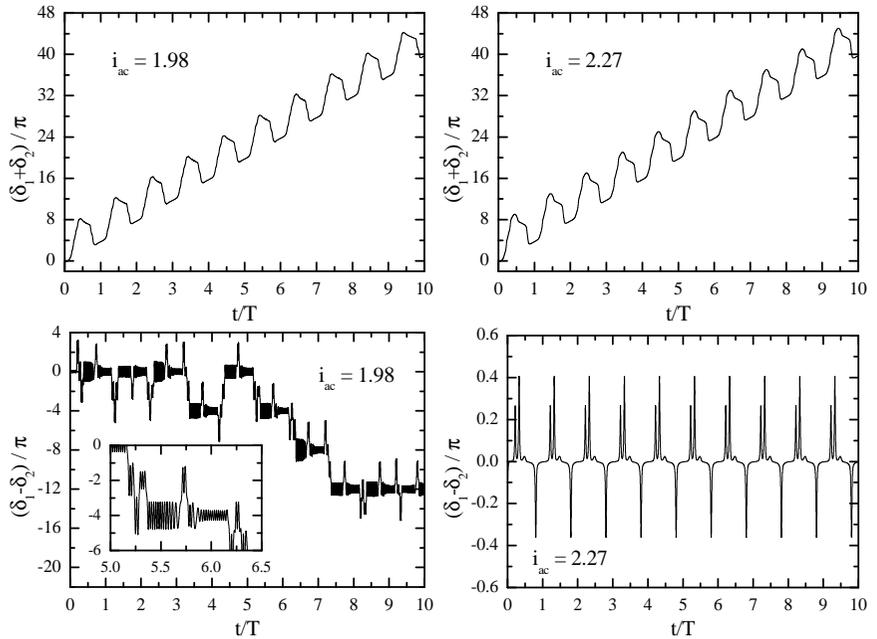
$\varphi$ -Terms in Gl. (3.60) ausdrückt. Unabhängig von den Anfangsbedingungen endet das System stets in einem Zustand in dem die Koordinate  $\varphi$  pro Periode entweder um  $2\pi$  zu- oder abnimmt. Ob eine Zu- oder Abnahme vorliegt hängt allerdings wieder empfindlich von den Anfangsbedingungen ab. Das I-SQUID verhält sich hier noch ganz ähnlich, wenn man von der Abwesenheit der starken Oszillationen in  $\varphi$ -Richtung absieht. Wie im rechten Bild zu sehen, wächst hier  $\varphi$  während jeder Periode ebenfalls um  $2\pi$ . Je nach Anfangsbedingung kann aber auch hier eine Abnahme um  $2\pi$  pro Periode vorliegen. In Abb. 4.14 sind der Vollständigkeit halber noch die Trajektorien in der  $\delta_l$ - $\varphi$ -Ebene dargestellt. Das Potential (Gl. (3.75) für  $i = 0$ ) ist der Übersichtlichkeit wegen nicht dargestellt. Die beiden Diagramme in der unteren Zeile sind Ausschnittvergrößerungen der jeweiligen Diagramme darüber. Zur Orientierung ist in den Diagrammen in der oberen Zeile die ungefähre Lage der Ausschnitte eingezeichnet. Die Diagramme links gelten für das C-



**Abb. 4.14:** Trajektorien der beiden Koordinaten  $\delta_t = \delta_1 + \delta_2$  und  $\varphi = \delta_1 - \delta_2$ . Die Trajektorien in der linken Spalte gelten für das C-SQUID und in der rechten Spalte sind für das I-SQUID. Die Parameter und die Startwerte sind identisch mit denen aus Abb. 4.13. Links beträgt die Amplitude des Antriebs wieder  $i_{ac} = 1.19$  und rechts wieder  $i_{ac} = 1.39$ . Die Diagramme in der unteren Zeile sind Ausschnittvergrößerungen der jeweiligen Diagramme darüber.

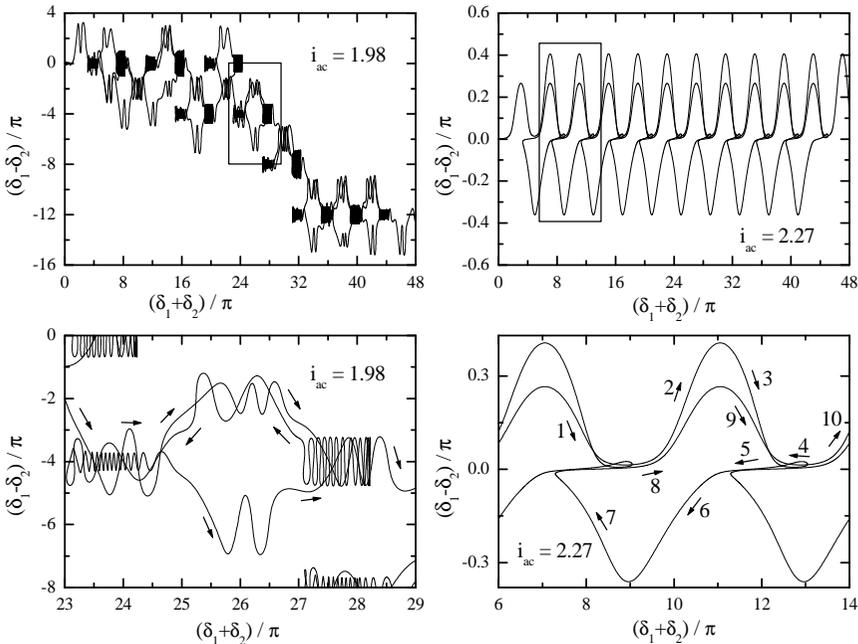
SQUID und rechts für das I-SQUID. Es wird deutlich, daß beide Systeme in  $\delta_t$ -Richtung in der gleichen Zeit die gleiche Strecke zurücklegen und wenn man die Veränderung in  $\varphi$ -Richtung betraglich zählt, stimmt das auch für die zurückgelegte Strecke in dieser Richtung. Wieder sind es gerade die Oszillationen in  $\varphi$ -Richtung, die den Unterschied ausmachen. Im Diagramm links unten sind die Oszillationen in einer der Potentialmulden vergrößert dargestellt. Man erkennt, wie das Teilchen von links oben kommend, in der Mulde zu oszillieren beginnt, dann ein Stück wieder zurück läuft, bevor es schließlich die Mulde nach rechts unten verläßt. Das Diagramm rechts oben (für das I-SQUID) zeigt stattdessen horizontal verlaufende Abschnitte, von denen einer darunter vergrößert dargestellt ist. Dabei wird deutlich, daß es sich hier tatsächlich um sehr schmale Schlaufen handelt, die zuerst von rechts

nach links und danach in umgekehrter Richtung durchlaufen werden. Auch im I-SQUID ist also das zeitweise Rückwärtslaufen zu beobachten. Bisher haben sich beide Systeme noch recht ähnlich verhalten, wenn man von den Oszillationen in  $\varphi$ -Richtung, die nur das C-SQUID zeigt, absieht. Das ändert sich für größere Amplituden. In Abb. 4.15 sind weitere Zeitabhängigkeiten dargestellt und zwar in der linken Spalte für das C-SQUID (3.60) und in der rechten Spalte für das I-SQUID (3.65). Die Amplitude beträgt links  $i_{ac} = 1.98$  und rechts  $i_{ac} = 2.27$ . Damit liegen für beide Systeme die entsprechenden Punkte auf der  $v(i_{ac})$ -Abhängigkeit (Abb. 4.12) jenseits des Maximums. In der oberen Zeile ist wieder die Zeitabhängigkeit der Größe  $\delta_l$  gezeigt und wieder unterscheiden sich die Verläufe für beide Systeme kaum. Ganz anders ist es für die in der zweiten Zeile abgebildete Zeitabhängigkeit von  $\varphi$ . Hier zeigt das C-SQUID die schon vorhin erwähnten starken Oszillationen. Im Gegensatz zu dem entsprechenden, vorhin gezeigten Diagramm



**Abb. 4.15:** Zeitabhängigkeiten der beiden Koordinaten  $\delta_l = \delta_1 + \delta_2$  und  $\varphi = \delta_1 - \delta_2$ . Die Diagramme in der linken Spalte beziehen sich auf das C-SQUID und die Diagramme in der rechten Spalte auf das I-SQUID. Die Amplitude beträgt links  $i_{ac} = 1.98$  und rechts  $i_{ac} = 2.27$ .

liegt jetzt aber keine Synchronisation mit der antreibenden Kraft mehr vor. Aus diesem Grund zeigt die  $v(i_{ac})$ -Abhängigkeit jenseits des Maximums keine ausgeprägten Stufen mehr. Dadurch, daß die Bewegung in  $\varphi$ -Richtung einerseits und in  $\delta_I$ -Richtung andererseits auf sehr verschiedenen Zeitskalen abläuft, kommt es zu chaotischem Verhalten. Die Koordinate  $\varphi$  wechselt für das C-SQUID in unvorhersagbarer Art und Weise die Richtung und das Auftreten so eines Richtungswechsel hängt sehr empfindlich von den Anfangsbedingungen ab. Das I-SQUID dagegen zeigt ein vollkommen reguläres und mit dem Antrieb synchronisiertes Verhalten. Ob, wie hier die Koordinate  $\varphi$  ein oszillierendes oder, wie vorhin ein mit der Zeit anwachsendes Verhalten zeigt, hängt stark von dem Wert der Amplitude  $i_{ac}$  ab. In Abb. 4.16 sind die

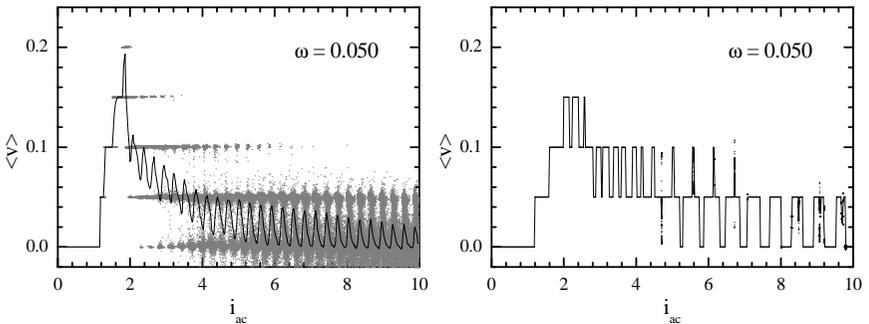


**Abb. 4.16:** Trajektorien in der Ebene der beiden Koordinaten  $\delta_I = \delta_1 + \delta_2$  und  $\varphi = \delta_1 - \delta_2$ . Die Trajektorien in der linken Spalte gelten für das C-SQUID und in der rechten Spalte für das I-SQUID. Die Parameter und die Startwerte sind identisch mit denen aus Abb. 4.13. Links beträgt die Amplitude des Antriebs  $i_{ac} = 1.98$  und rechts  $i_{ac} = 2.27$ . In den beiden Diagrammen der oberen Zeile sind Bereiche markiert, die in der unteren Zeile vergrößert dargestellt sind.

zu den Abhängigkeiten aus Abb. 4.15 gehörenden Trajektorien dargestellt. Links für das C-SQUID und rechts für das I-SQUID. Die Diagramme in der unteren Zeile sind Ausschnittvergrößerungen aus den jeweiligen Diagrammen darüber an den eingezeichneten Stellen. Die Pfeile in den Diagrammen der unteren Zeile geben die Richtung an, in der die Trajektorien durchlaufen werden. Die entsprechenden Diagramme aus Abb. 4.14 hatten gezeigt, daß das Teilchen während einer Periode auch zurück läuft (weil eben die antreibende Kraft oszilliert) aber immer nur um den Bruchteil einer Periode des Potentials. Hier erkennt man, daß jenseits des Maximums auf der  $v(i_{ac})$ -Abhängigkeit das Teilchen während einer Periode des Antriebs auch eine oder mehrere Mulden im Potential wieder zurück laufen kann.

### 4.3.2 Stroboskop

In diesem Abschnitt wird eine Methode vorgestellt, mit deren Hilfe mehr Information über die Synchronisation zwischen Transport und externem Antrieb erhalten werden kann. Dazu wird die Dynamik wie unter einem Strobo-



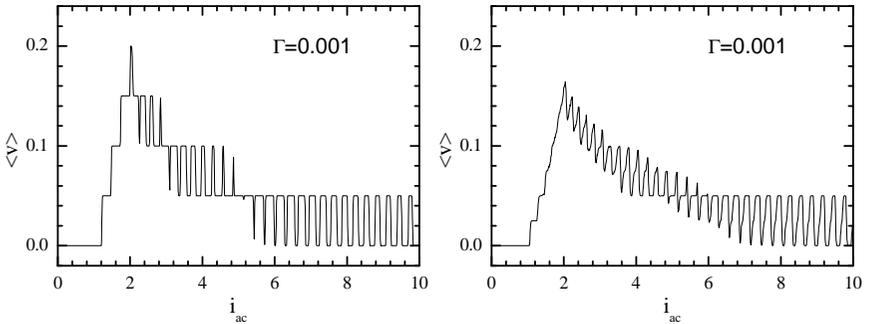
**Abb. 4.17:** Stroboskopische Betrachtung der Ratschenspannung als Funktion der Amplitude  $i_{ac}$  des antreibenden Wechselstroms. Das Diagramm links gilt für das C-SQUID und rechts für das I-SQUID. Die Parameter sind  $\phi_a = 1/4$ ,  $\beta_L = \beta_C = 0.1$  und  $s = 1/2$ . Außerdem ist  $\alpha_R = \alpha_{RI} = 0$  und  $\alpha = \alpha_C = 0.1$ .

skop betrachtet. Während der numerischen Integration wird zunächst eine große Anzahl von Perioden des Antriebs (z.B. 2000) gewartet, um sicherzustellen, daß Einschwingvorgänge abgeklungen sind. Dann wird für eine weitere große Zahl von Perioden  $N = 500$  für jede Periode getrennt die Spannung gemittelt. Dabei sollte die Frequenz nicht zu klein sein, da sonst die Rechenzeiten sehr groß werden. Alle so erhaltenen Werte für die gemit-

telte Spannung werden protokolliert und in einem Diagramm gegen  $i_{ac}$  aufgetragen. Das Ergebnis ist in Abb. 4.17 dargestellt, links für das C-SQUID und rechts für das I-SQUID. Die Parameter sind wie zuvor, nur daß jetzt  $\alpha = \alpha_C = 0.1$  ist. Aus den  $N$  Mittelwerten läßt sich für jede Amplitude der gesamte Mittelwert errechnen, welcher in der Abbildung als durchgezogene Linie dargestellt ist. Die einzelnen Mittelwerte sind links als graue (der besseren Sichtbarkeit wegen) und rechts als schwarze Punkte dargestellt. Das Diagramm auf der rechten Seite zeigt offensichtlich nur wenige Punkte, die außerhalb der Linie liegen, die den Mittelwert angibt. Das bedeutet, daß die über eine Periode gemittelten Spannungen während der überwiegenden Mehrheit aller Perioden den selben Wert haben. Zusammen mit der Tatsache, daß die Spannungen für die Mehrzahl der betrachteten  $i_{ac}$ -Werte quantisierte Spannungen  $v = n\omega$  annehmen, bedeutet dies Synchronisation der Dynamik mit dem Antrieb. Im Diagramm links ist das nicht so; zumindest nicht überall. Für kleine Amplituden, oberhalb von  $i_{ac} = 1.4$ , bis zum Maximum liegen die grauen Punkte wenigstens dort, wo sich die Plateaus befinden auf der Kurve, die den gesamten Mittelwert bedeutet. Hier liegt also auch Synchronisation vor. Jenseits des Maximums jedoch ändert sich das. Es zeigt sich zwar zunächst zwischen  $i_{ac} = 2$  und  $i_{ac} = 4$  eine deutliche Bevorzugung von Spannungen  $v = n\omega$ , jedoch ist  $n$  offensichtlich nicht für alle Perioden gleich. Je nachdem, welche Werte für  $n$  mit welcher Häufigkeit vorkommen, ergibt sich daraus der Verlauf der über  $N$  Perioden gemittelten Spannung. Für  $i_{ac} \gtrsim 4$  ist es vor allem an den Punkten, an denen die durchgezogene Linie Maxima besitzt, so, daß in zunehmendem Maße (je größer  $i_{ac}$  wird) auch Spannungen  $v \neq n\omega$  zu beobachten sind.

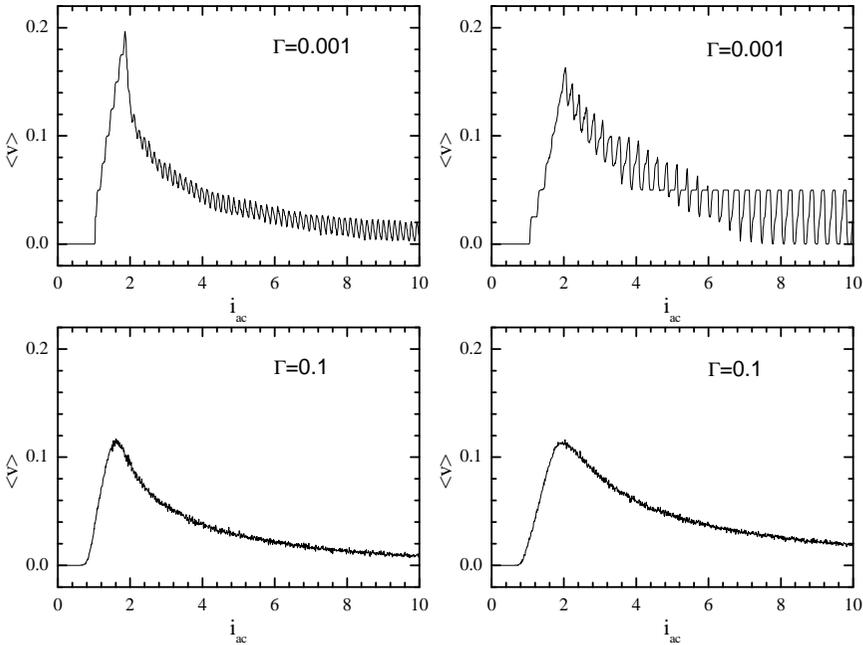
## 4.4 Thermische Fluktuationen

In diesem Abschnitt wird der Einfluß thermischer Fluktuationen auf die Form der Kennlinien bei harmonischem Antrieb eingegangen. In Abb. 4.18 sind zwei  $v(i_{ac})$ -Abhängigkeiten bei endlicher Temperatur dargestellt. Der Rauschparameter hat jetzt einen nicht verschwindenden, aber immer noch sehr kleinen Wert von  $\Gamma = 0.001$ . Die Frequenz des Antriebs beträgt  $\omega = 0.025$ . Um zunächst den Einfluß thermischer Fluktuationen allein zu studieren ist hier auch  $\alpha = \alpha_C = 0$  und alle Startwerte verschwinden ebenso. Die übrigen Parameter sind wie in Abb. 4.10 gewählt. Der einzige Unterschied zu den beiden Diagrammen in der unteren Zeile von Abb. 4.10 besteht also in dem nicht verschwindenden Rauschparameter. Das C-SQUID (links) zeigt ein nur leicht verändertes Verhalten und die Stufen haben immer noch



**Abb. 4.18:** Simulierte Ratschenspannung als Funktion der Amplitude  $i_{ac}$  des antreibenden Wechselstroms mit  $\omega = 0.025$ . Das Diagramme links gilt für das C-SQUID und rechts für das I-SQUID. Die Parameter sind  $\phi_a = 1/4$ ,  $\beta_L = \beta_C = 0.1$  und  $s = 1/2$ . Außerdem ist  $\alpha_R = \alpha_{Rl} = 0$  und  $\alpha = \alpha_C = 0$ .

die Höhe  $2n\omega$ . Das I-SQUID (rechts) zeigt jetzt Stufen der Höhe  $n\omega$ . In Abb. 4.19 ist nun ein realistischerer Fall dargestellt. Die Diagramme in der oberen Zeile unterscheiden sich von denen aus Abb. 4.18 nur dadurch, daß jetzt  $\alpha = \alpha_C = 0.01$  ist. Von den Diagrammen in der unteren Zeile von Abb. 4.11 unterscheiden sie sich wieder nur durch die Anwesenheit thermischer Fluktuationen. Beim Vergleich fällt folgendes auf: Das C-SQUID reagiert auf eine Störung (in Form von  $\alpha \neq 0$  oder nicht verschwindenden Anfangsbedingungen) sehr heftig und ändert sein Verhalten drastisch. Unabhängig ob diese Störung vorliegt oder nicht, reagiert es jedoch auf (kleine) thermische Fluktuationen kaum. Das I-SQUID hingegen reagiert auf Veränderung der Startwerte gar nicht, dafür jedoch auf ein nicht verschwindendes  $\alpha$ . Auf (kleine) thermische Fluktuationen reagiert es etwas stärker als das C-SQUID. In der unteren Zeile ist jetzt  $\Gamma = 0.1$ , d.h. die Fluktuationen sind bereits sehr stark. In diesem Falle wird die Dynamik hauptsächlich von den Fluktuationen bestimmt. Das führt zu einem Verlust an Synchronisation mit dem externen Antrieb, was ein Verschwinden der Stufen zur Folge hat. Die Kennlinien werden glatt und beide Systeme verhalten sich jetzt sehr ähnlich. Zuletzt ist in Abb. 4.20 für das C-SQUID ein Überblick gegeben, bei welchen Amplituden und Frequenzen überhaupt eine Spannung zu erwarten ist. Das Diagramm ist gerechnet für  $\phi_a = 1/4$ ,  $\Gamma = 0.002$  sowie  $\beta_C = 0.2$ ,  $\beta_L = 0.1$ ,  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ . Die Höhe der Spannung ist in Form von Grauwerten dargestellt, wobei dunklere Bereiche einer größeren Spannung entsprechen. Da auch betraglich kleine negative Spannungen entstehen, sind Bereiche verschwindender Spannung nicht weiß

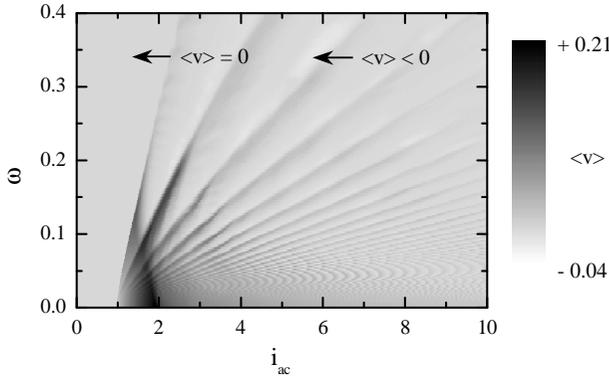


**Abb. 4.19:** Simulierte Ratschenspannung als Funktion der Amplitude  $i_{ac}$  des antreibenden Wechselstroms. Die Diagramme in der linken Spalte beziehen sich auf das C-SQUID und die in der rechten Spalte auf das I-SQUID. Die Parameter sind  $\phi_a = 1/4$ ,  $\beta_L = \beta_C = 0.1$  und  $s = 1/2$ . Außerdem ist  $\alpha_R = \alpha_{RI} = 0$  und  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ .

dargestellt, sondern durch den Grauwert, der das Gebiet  $i_{ac} < 1$  füllt. Für  $w > 1/4$  wird die zu erwartende Spannung schnell klein.

## 4.5 Stochastische Anregung

In diesem Abschnitt wird ein Beispiel für stochastischen Antrieb behandelt. Der antreibende Biasstrom ist dabei nicht nicht mehr periodisch, sondern ein Rauschstrom mit geeigneten statistischen Eigenschaften. Geeignet bedeutet dabei vor Allem, daß der Mittelwert des Stromes verschwinden soll. Als Beispiel dient Rauschen mit gaußförmiger Verteilung der momentanen Werte. Diese Verteilung ist in Abb. 4.21 auf der linken Seite dargestellt. Die Standardabweichung der Verteilung wird als  $I_{noise}$  bezeichnet. In der Abbildung ist willkürlich der Fall  $I_{noise} = I_0$  dargestellt. Der Strom soll ein



**Abb. 4.20:** Ratschenspannung in Abhängigkeit von  $i_{ac}$  und  $\omega$  für das C-SQUID. Dabei ist  $\phi_a = 1/4$   $\Gamma = 0.002$  sowie  $\beta_C = 0.2$ ,  $\beta_L = 0.1$  und  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ . Der Wert für die Spannung ist als Grauwert angegeben. Pfeile weisen auf Stellen, an denen die Spannung verschwindet oder negativ wird.

weißes Spektrum besitzen, allerdings nur bis zu einer kritischen Frequenz  $\omega_0$ . Für größere Frequenzen soll die spektrale Leistungsdichte auf Null zurück gehen. Diese Form von Rauschen kann man sich entstanden denken aus entsprechendem weißem Rauschen, das mit einem Tiefpaß gefiltert wurde. Numerisch läßt sich ein Tiefpaß leicht im Fourierraum realisieren, da ein effizienter Algorithmus zur schnellen Fouriertransformation zur Verfügung steht. Nach der Transformation werden die Fourierkoeffizienten einer Filterfunktion unterworfen und danach zurücktransformiert. Tatsächlich braucht man zwei Filterfunktionen, eine für die Beträge und eine für die Phasen der Fourierkoeffizienten. Um die Filterung realistisch zu gestalten, kann man einen einfachen RC-Tiefpaß als Vorbild nehmen. Die Bewegungsgleichung im Zeit- bzw. Frequenzbereich lauten

$$\dot{x}_a + \omega_0 x_a = \omega_0 x_e \qquad \tilde{x}_a = \frac{1}{1 + i\omega/\omega_0} \tilde{x}_e. \quad (4.2)$$

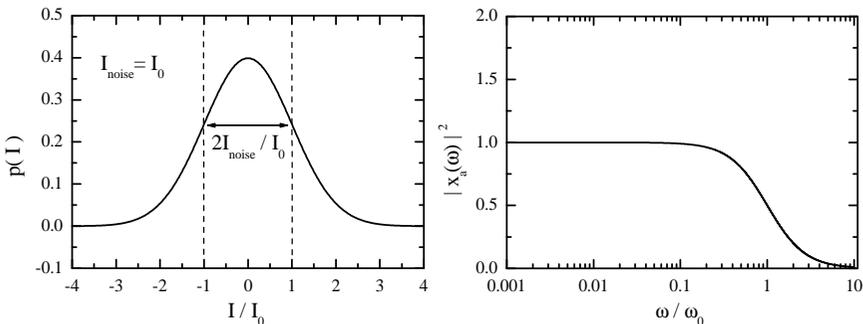
wobei  $x_e$  und  $x_a$  Ein- und Ausgangssignal sowie  $\tilde{x}_e(\omega)$  und  $\tilde{x}_a(\omega)$  deren Fouriertransformierten bedeuten. Die Gleichung links führt sofort auf eine eingliedrige Iterationsvorschrift, mit der sich die Filterung auch im Zeitbereich durchführen ließe, was aber langsamer ist als der Umweg über den Frequenzraum. Die Gleichung rechts gibt an, wie sich Real- und Imaginärteil

der Fourierkoeffizienten transformieren:

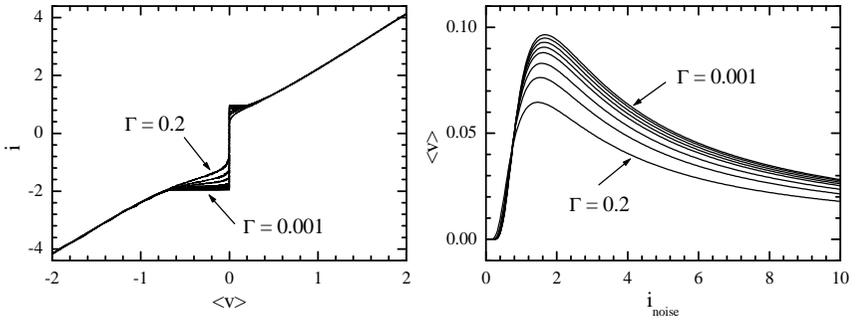
$$\operatorname{Re}(\tilde{x}_a) = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_0)^2} \left( \operatorname{Re}(\tilde{x}_e) + \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{Im}(\tilde{x}_e) \right) \quad (4.3a)$$

$$\operatorname{Im}(\tilde{x}_a) = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_0)^2} \left( \operatorname{Im}(\tilde{x}_e) - \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{Re}(\tilde{x}_e) \right). \quad (4.3b)$$

Besitzt das Eingangssignal ein weißes Leistungsspektrum (die Betragquadrate der Fourierkoeffizienten) mit  $|\tilde{x}_e|^2 = 1$  so gilt für das Leistungsspektrum des Ausgangssignals  $|\tilde{x}_a|^2 = 1/(1 + (\omega/\omega_0)^2)$  und hat die Gestalt wie im Diagramm auf der rechten Seite von Abb. 4.21 dargestellt. Durch die Filterung ändert sich jedoch auch die Verteilung der momentanen Werte  $x_a(t)$ . Das Quadrat der Standardabweichung ist das Produkt aus spektraler Leistungsdichte und Bandbreite. Daher ist die Verteilung des Ausgangssignals zwar nach wie vor gaußförmig, jedoch nimmt die Standardabweichung um so mehr ab, je kleiner die Abschneidefrequenz ist. Dies muß nach der Filterung korrigiert werden, da man die Standardabweichung stets auf den kritischen Strom zu beziehen hat. Die so gewonnenen gefilterten Ströme können dann in der Simulation als Antrieb verwendet werden. Diese (direkte) Methode hat den Vorteil, daß man in der Wahl der Abschneidefrequenz frei ist. Der Nachteil besteht jedoch darin, daß gerade wenn man sehr kleine Abschneidefrequenzen behandeln möchte die Rechenzeiten sehr groß werden. Ist die Abschneidefrequenz  $\omega_0$  viel kleiner als die charakteristische Frequenz  $\omega_c$ , so bietet sich ein einfacherer Weg an. In diesem Fall kann der Rauschstrom wie ein Gleichstrom mit einer vorgegebenen Verteilung der momentanen Werte behandelt werden. Die gesamte Information ist bereits in einer dc-Kennlinie



**Abb. 4.21:** Links: Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(I)$  für die momentanen Werte des Stromes  $I$ . Die Verteilung ist gaußförmig mit Standardabweichung  $I_{noise}$ . Rechts: spektrale Leistungsdichte eines gefilterten Signals. Dabei ist  $\omega_0$  die Abschneidefrequenz.



**Abb. 4.22:** Im Diagramm auf der linken Seite sind Strom-Spannungskennlinien dargestellt, die für das C-SQUID bei  $\phi_a = 1/4$  gerechnet sind. Man erkennt deutlich, den betragslichen Unterschied zwischen positivem und negativem Biasstrom. Die Kennlinien unterscheiden sich im Rauschparameter  $\Gamma$ , der die Werte  $\Gamma = 0.001, 0.002, 0.005, 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2$  annimmt. Die übrigen Parameter sind  $\beta_C = \beta_L = 0.1, = 1/2$  und  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ .

enthalten und die Abhängigkeit der Spannung von der normierten Standardabweichung  $i_{\text{noise}} = I_{\text{noise}}/I_0$  kann aus der dc-Kennlinie errechnet werden. Die dc-Kennlinie ergibt sich durch Mittelung aus einer Zeitspur  $v(t)$

$$v(i) = \frac{1}{T} \int_T v(i(t), t) dt. \quad (4.4)$$

Im Limit  $\omega_0 \ll \omega_c$ , wenn also  $i(t)$  nur Komponenten mit Frequenzen  $\ll \omega_c$  besitzt, wird daraus

$$v(i) = \frac{1}{T} \int_T v(i(t)) dt \quad (4.5)$$

und die Integration über die Zeit kann in eine Integration über die Amplitude verwandelt werden. Die  $v(i_{\text{noise}})$ -Abhängigkeit ergibt sich dann zu

$$v(i_{\text{noise}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(i) p(i, i_{\text{noise}}) di, \quad (4.6)$$

wobei  $p(i, i_{\text{noise}})$  die Amplitudenverteilung bedeutet, die hier als gaußförmig angenommen wird:

$$p(i, i_{\text{noise}}) = \frac{1}{i_{\text{noise}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{i}{i_{\text{noise}}} \right)^2}. \quad (4.7)$$

Für praktische Zwecke wird man die Integration auf einen Bereich beschränken, in dem die Funktion  $p(i, i_{noise})$  merklich von Null verschieden ist. Für eine Gaußverteilung wie in (4.7) gilt

$$\int_{-3i_{noise}}^{+3i_{noise}} p(i, i_{noise}) di \approx 0.997, \quad (4.8)$$

d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 99.7 % liegen die Werte des Rauschstromes im Intervall  $[-3i_{noise}, +3i_{noise}]$ . Dies führt dann anstelle von (4.7) auf

$$v(i_{noise}) = \int_{-3i_{noise}}^{+3i_{noise}} v(i) p(i, i_{noise}) di. \quad (4.9)$$

Dies bedeutet aber immer noch, daß die Strom-Spannungskennlinie in einem großen Strombereich zur Verfügung stehen muß. Möchte man z.B. die  $v(i_{noise})$ -Abhängigkeit bis  $i_{noise} = 10$  berechnen, so muß die Strom-Spannungskennlinie im Bereich  $i \in [-30, +30]$  zur Verfügung stehen. Da sich die Strom-Spannungskennlinie für betragsmäßig große Ströme einer ohmschen Geraden nähert, bietet sich an, die Kennlinie z.B. nur im Intervall  $i \in [-10, +10]$  zu berechnen und den übrigen Bereich durch eine geeignet gewählte Gerade zu extrapolieren. Auf diese Art und Weise sind die in Abb. 4.22 dargestellten Diagramme entstanden. Im Diagramm auf der linken Seite ist zunächst eine Schar von Strom-Spannungskennlinien dargestellt, die für den externen Fluß  $\phi_a = 1/4$  gerechnet sind. Um die Umgebung um die kritischen Ströme besser erkennen zu können, ist nur der Bereich  $i \in [-4, 4]$  gezeigt. Man erkennt deutlich den betragslichen Unterschied zwischen dem positiven und dem negativen kritischen Strom. Die Kurven unterscheiden sich im Rauschparameter  $\Gamma$ , der die Werte  $\Gamma = 0.001, 0.002, 0.005, 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2$  annimmt. Man erkennt deutlich die für größer werdendes  $\Gamma$  immer stärker werdende Verrundung der Kennlinien. Im Diagramm auf der rechten Seite sind nun die nach Gl. (4.9) errechneten  $v(i_{noise})$ -Abhängigkeiten dargestellt. Man erkennt, daß für stärker werdende thermische Fluktuationen, sowie für stärker werdende antreibende Fluktuationen der Effekt klein wird, da dann in beiden Fällen die Asymmetrie keine Rolle mehr spielt und die Fluktuationen das Geschehen dominieren.

# Kapitel 5

## Proben und Design

In diesem Abschnitt soll das Design und Layout der Proben vorgestellt werden. Zunächst wird jedoch die zur Herstellung verwendete Technologie in aller Kürze behandelt.

### 5.1 Technologie

Die Proben wurden von der Firma HYPRES, Inc. <sup>1</sup> hergestellt. Die zum Einsatz kommende Nb/Al-AlO<sub>x</sub>/Nb-Technologie wird im folgenden kurz umrissen. Die Kombination von Niob und Aluminium ist unter anderem deshalb so erfolgreich, weil einerseits Niob unter den klassischen Supraleitern eine hohe Sprungtemperatur besitzt ( $T_c = 9.2\text{K}$ ), andererseits Aluminium eine raue Nb-Oberfläche glättet (Aluminium wirkt benetzend) und ein sehr stabiles und homogenes Oxid bildet [95]. Beides wirkt sich günstig auf die Homogenität der Barriere und damit auf die Parameterstreuung der Tunnelkontakte aus. Ohne auf die Details einzugehen, werden im Folgenden kurz die einzelnen Prozeßschritte besprochen. Die wichtigsten Schritte sind in Abb. 5.1 im Querschnitt dargestellt. Als Substrat dient ein 3-inch Wafer aus thermisch oxidiertem Silizium.

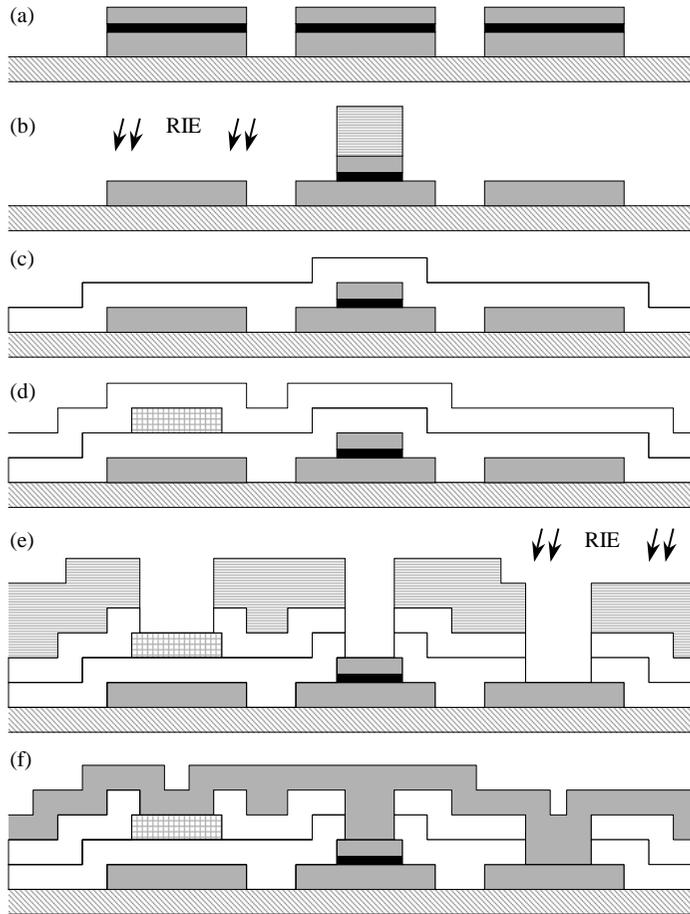
#### Prozeßschritte:

- **Grundplatte: M0, I0:**

Eine 100 nm dicke Lage Niob wird gesputtert, die als Grundplatte

---

<sup>1</sup>HYPRES, Inc. Elmsford (NY), USA. <http://www.hypres.com>



**Abb. 5.1:** Prozessschritte für den Nb/Al-AlO<sub>x</sub>/Nb-Prozess (nicht maßstabgerecht).

dient. Diese Grundplatte wird strukturiert, gemäß der Maskenebene M0. Darauf wird eine 150 nm dicke SiO<sub>2</sub>-Schicht aufgesputtert, die gemäß I0 strukturiert wird. Diese beiden Ebenen sind optional und in Abb. 5.1 nicht dargestellt, da sie im vorliegenden Design nicht verwendet werden.

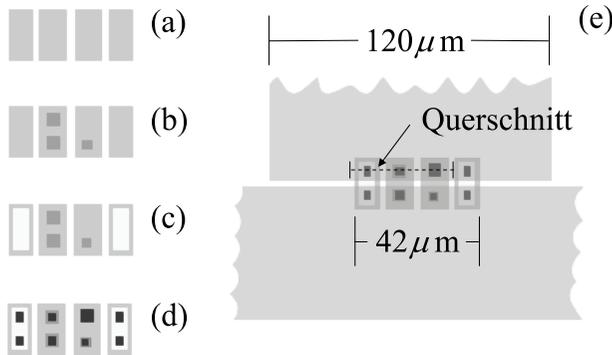


Abb. 5.2: Typisches Layout. Details siehe Text.

• **Josephson Kontakte und Shuntwiderstände: M1, I1A, R2, I1B:**

Im nächsten Schritt wird eine Trilage hergestellt: Auf eine Lage Niob folgt eine wenige nm dicke Lage Aluminium. Das Aluminium wird oberflächlich oxidiert, wobei die Dicke der Oxidschicht die kritische Stromdichte der Kontakte festlegt. Eine weitere Lage Niob komplettiert die Trilage, die insgesamt ca. 200 nm dick ist. Die Maskenebene M1 definiert, an welchen Stellen die Trilage nach der darauffolgenden Strukturierung stehen bleibt. In Abb. 5.1 (a) ist diese Situation dargestellt. Daraufhin wird die obere Elektrode samt Aluminiumoxid durch reaktives Ionenätzen (RIE) entfernt, außer an den Stellen, die durch die Maske I1A als Kontakte definiert sind. Das Ergebnis dieses Vorgangs ist in (b) dargestellt. Nach Entfernen des Photolacks folgt eine ca. 100 nm dicke Isolationsschicht aus  $\text{SiO}_2$ , die zunächst unstrukturiert bleibt (c). Darauf wird die 120 nm dicke Metallschicht aufgebracht aus der die Shuntwiderstände strukturiert werden, wie durch die Maske R2 vorgegeben. Es folgt eine weitere, wieder 100 nm dicke Isolationsschicht aus  $\text{SiO}_2$ . Damit sind die Shuntwiderstände in ein Sandwich aus  $\text{SiO}_2$  eingebettet, wie in (d) abgebildet. Im letzten Schritt (e) werden in beide Isolationsebenen Löcher geätzt, gemäß der Maskenebene I1B. Die Löcher dienen drei verschiedenen Zwecken: Zur Kontaktierung der unteren Nioblage M1 um so eine Via, also eine direkte Verbindung zwischen M1 und M2 zu erhalten (rechts), zur Kontaktierung der Topelektrode, also der oberen Elektrode der Josephson Kontakte (mitte), sowie zur Kontaktierung der Shuntwiderstände (links).

- **Wiring und Kontaktmetallisierung: M2, I2, M3, R3:**

Als Wiring ("Verdrahtung") bezeichnet man die zweite, 300 nm dicke Lage Niob, mit der die Josephson Kontakte von oben, die untere Elektrode, sowie die Shuntwiderstände kontaktiert werden. Dies ist in Abb. 5.1 (f) dargestellt. Die Geometrie dieser Lage wird durch die Maske M2 definiert. Falls erforderlich, steht eine weitere Schaltungsebene nebst Isolationsschicht zur Verfügung: Die mit I2 bezeichnete, ca. 500 nm dicke SiO<sub>2</sub>-Schicht wird gefolgt von einer 600 nm dicken Lage Niob, deren Verlauf durch M3 definiert wird. Da diese beiden Ebenen nicht immer verwendet wurden, sind sie in Abb. 5.1 nicht aufgeführt. Zuletzt steht eine als R3 bezeichnete und mit 1270 nm sehr dicke Metallisierungsebene aus einer Pd/Ti/Au-Legierung zur Verfügung. Sie besitzt einen sehr kleinen spezifischen Widerstand ( $0.1\Omega/\square$ ) und dient als Kontaktpad zum Schutz des darunterliegenden Niobs vor mechanischer Beschädigung und Oxidation. Da Niob aber sehr beständig gegen Oxidation ist und sich auch Aluminiumdrähte gut darauf bonden lassen, findet diese Ebene im vorliegenden Design keine Verwendung und ist deshalb in Abb. 5.1 nicht aufgeführt.

In Abb. 5.2 ist ein typisches Layout in Aufsicht dargestellt. In (a) sind die vier Rechtecke, die die Trilage bilden gezeigt. In (b) sind zusätzlich in etwas dunklerem grau die drei quadratischen Flächen an denen die Josephson Kontakte nach dem Ätzprozeß stehen geblieben sind eingezeichnet. Wie zuvor erklärt, folgt darauf eine Isolationsschicht und darauf die Shuntwiderstände, die in (c) hellgrau dargestellt sind. In (d) sind dann schwarz die Stellen dargestellt, an denen in die Isolationschichten Löcher geätzt werden. In (e) ist schließlich der Verlauf des Wirings in hellem Grau dargestellt. Der obere Teil bildet den Mittelleiter der koplanaren Streifenleitung, während der untere Teil seitlich in die Massefläche übergeht. Die gestrichelte Linie gibt ungefähr den Verlauf des in Abb. 5.1 dargestellten Querschnitts an.

## 5.2 Design

Das Design soll drei Anforderungen erfüllen:

- Der Rauschparameter soll so klein sein, daß die Spannungstufen bei nichtadiabatischer Anregung als Plateaus beobachtbar sind. Wie aus Abb. 4.19 zu entnehmen ist, sollte daher  $\Gamma \lesssim 10^{-3}$  sein. Das bedeutet nach (3.11) für den mittleren kritischen Strom  $I_0 > 180 \mu\text{A}$  bei 4.2 K. Größere Werte für den Rauschparameter sind allerdings auch nicht uninteressant und sollten nach Möglichkeit ebenso realisiert werden.

- Für den Trägheitsparameter soll  $\beta_C < 1$  gelten, um die ohnehin schon komplexe Dynamik des Systems (3.60) nicht noch komplizierter zu machen. Nach (3.8) ist  $\beta_C \propto R^2$  so daß sich  $\beta_C$  über die Dimensionierung der externen Shuntwiderstände einstellen läßt.
- Die normierte Ringinduktivität  $\beta_L$  sollte  $\ll 1$  sein um die Reduktion der Dimension der Dynamik um eins zu rechtfertigen.

Das Produkt  $I_0 R$  definiert die Skala für die Spannung und damit auch die maximale Ratschenspannung. Je größer dieses Produkt ist, um so größer ist also der zu erwartende Effekt. Die Kontaktkapazität  $C$  sollte möglichst klein sein, um kleine Werte für  $\beta_C$  realisieren zu können, ohne allzu kleine Widerstände verwenden zu müssen. Da  $C$  proportional zur Kontaktfläche  $A$  ist, sollten die Kontakte möglichst klein sein, was wiederum hohe kritische Stromdichten erfordert, um den Rauschparameter nicht zu groß werden zu lassen. Der kritische Strom selbst ist allerdings nach oben hin aus zwei Gründen limitiert: Ein großes  $I_0$  erhöht  $\beta_C$ , was wieder zu denselben Schwierigkeiten führt wie eine große Kapazität. Darüber hinaus ist auch  $\beta_L \propto I_0$ . Um  $\beta_L$  klein zu halten, ist eine kleine Ringinduktivität (d.h. ein SQUID mit einem möglichst kleinen Loch) anzustreben. Die Induktivität einer supraleitenden Ringstruktur läßt sich aus numerisch simulierten Stromverteilungen berechnen. Das ist jedoch schwierig, wenn es sich, wie hier, um eine zwei- oder gar dreilagige Struktur handelt. Daher wurde davon abgesehen und stattdessen die Induktivität mit Hilfe der Ketchen-Formel [96, 97] abgeschätzt. Die genaue Kenntnis der Induktivität ist für das Design aber auch nicht notwendig, da anders als beim asymmetrischen dc SQUID die relevante Symmetrie des Potentials nahezu unabhängig von  $\beta_L$  ist, solange  $\beta_L$  klein ist. In Tab. 5.1 sind alle für das Design wichtigen Größen aufgelistet. Hier

$j_c$	1.0 kA/cm <sup>2</sup>
$c_{sp}$	38 fF/ $\mu\text{m}^2$
$c_z$	0.4 fF/ $\mu\text{m}^2$
$R_{\square}$ (Pd/Au)	1.0 $\Omega/\square$
$\epsilon$ (Si)	12.1
$\lambda_L$ (Nb)	86 nm

**Tab. 5.1:** Werte zur Auslegung der SQUIDs und der koplanaren Streifenleitung (bei  $T = 4.2$  K) (siehe [98]).

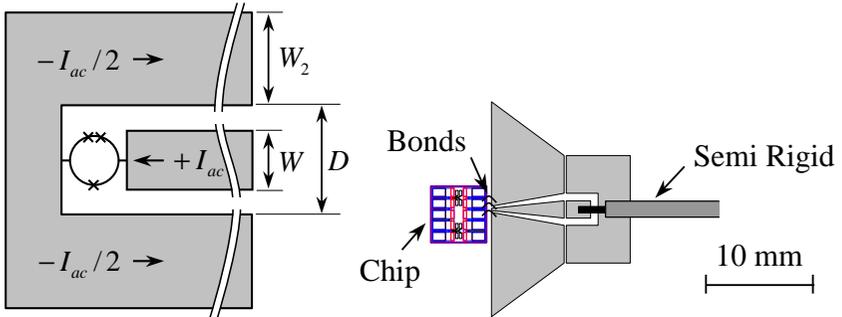
bedeuten  $j_c$  die kritische Stromdichten,  $c_{sp}$  die spezifische Kontaktkapazität,  $c_z$  die spezifische zusätzliche Kapazität durch Überlapp der unteren (M1)

und oberen (M2) Lage Niob (getrennt durch 200 nm SiO<sub>2</sub>),  $R_{\square}$  den Widerstand pro Quadrat des zum Einsatz kommenden Widerstandsmaterials,  $\epsilon$  die Permeabilität von Silizium und  $\lambda_L$  die Londonsche Eindringtiefe von Niob. Die Kontakte werden quadratisch ausgeführt. Das hat den Nachteil, daß die Flächen der Kontakte auf der Maske schlechter mit der Größe der Kontakte nach der Lithographie skalieren, als z.B. bei kreisförmigen Kontakten. In Tab. 5.2 sind in der linken Spalte die sechs kleinstmöglichen Kantenlängen auf der Maske und rechts die entsprechenden Kantenlängen, wie sie nach der Lithographie realisiert sind, wiedergegeben. Das Verhältnis der Flächen der Kontakte im linken und im rechten Arm sollte  $s = 1/2$  sein, also bietet sich die Kombination  $2.6 \mu\text{m}$  und  $3.8 \mu\text{m}$  an. Der Fehler der Kantenlänge ist sehr großzügig mit  $\pm 0.25 \mu\text{m}$  spezifiziert, woraus sich ein Fehler für das Verhältnis der Flächen (bei den gewählten Werten) von  $\pm 0.11$  ergibt. Man erhält also insgesamt einen nominellen Wert für das Verhältnis der Flächen von  $s = 0.47 \pm 0.11$ . Aus der kritischen Stromdichte ergeben sich die nominellen kritischen Ströme zu  $I_{01} = I_{02} = 68 \mu\text{A}$  und  $I_{03} = 144 \mu\text{A}$ . Damit ist  $I_0 = 106 \mu\text{A}$  und somit der Rauschparameter  $\Gamma = 1.7 \times 10^{-3}$ . Die nominellen Kapazitäten ergeben sich zu  $C_1 = C_2 = 0.26 \text{ pF}$  und  $C_3 = 0.55 \text{ pF}$  und die halbe Gesamtkapazität zu  $C = 0.34 \text{ pF}$ . Um  $\beta_C$  klein zu halten und dabei das  $I_0 R$ -Produkt nicht zu klein werden zu lassen, werden die Abmessungen der Widerstände zu  $5 \times 5 \mu\text{m}^2$  gewählt. Die Widerstände haben dann den nominellen Wert  $R = 1.0 \Omega$ , wozu auf beiden Seiten noch Kontaktwiderstände hinzukommen, die mit  $0.12 \Omega$  spezifiziert sind. Insgesamt ergibt sich also ein Wert von  $R = 1.24 \Omega$  und damit ein Mc-Cumber Parameter von  $\beta_C = 0.17$ . Um die Induktivität der Widerstände so klein wie möglich zu halten, befinden sie sich stets über einer supraleitenden Grundplatte. Das Loch in der Mitte der SQUIDS hat eine Größe von  $2 \times 3 \mu\text{m}^2$ . Nach [97] ist für eine quadratische supraleitende Fläche mit einem quadratischen Loch der Kantenlänge  $a$  die Induktivität durch  $L = 1.25 \mu_0 a$  gegeben (ohne Josephson Kontakte und wenn die äußere Kantenlänge  $> 3a$  ist). Für  $a \approx 2 \mu\text{m}$  folgt  $L \approx 0.3 \text{ pH}$  woraus für den Abschirmparameter  $\beta_L = 0.3$  folgt. Da

Maske / $\mu\text{m}$	Wafer $\mu\text{m}$
3.00	2.60
3.25	2.90
3.50	3.20
3.75	3.50
4.00	3.80
4.25	4.10

**Tab. 5.2:** Die sechs kleinstmöglichen Kontaktgrößen.

stets mit einem Satz Masken Serien mit zwei verschiedenen Stromdichten gefertigt werden, stehen auch Proben mit einer nominellen kritischen Stromdichte von  $100 \text{ A/cm}^2$  zur Verfügung. Dadurch reduzieren sich die kritischen Ströme um eine Größenordnung, während Widerstände und Kapazitäten gleich bleiben.  $\beta_C$  und  $\beta_L$  verringern sich also um eine Größenordnung, während der Rauschparameter um eine Größenordnung zunimmt.



**Abb. 5.3:** Die SQUIDs sind in eine koplanare Streifenleitung eingebettet (linkes Bild), bestehend aus einem Mittelleiter der Breite  $W$  und zwei Außenleitern im Abstand  $D$  (nicht maßstäblich). Der Übergang von der Streifenleitung auf das Koaxialkabel geschieht über eine trapezförmige Taperstruktur (rechts).

Jedes SQUID ist in eine koplanare Streifenleitung (CPW) eingebettet. Tatsächlich erlaubt die Nb/Al-AlO<sub>x</sub>/Nb-Technologie (weil zwei oder drei supraleitende Ebenen zur Verfügung stehen) auch platzsparendere Strukturen zur Führung von Mikrowellen, wie z.B. Mikrostreifenleitungen. Trotzdem wurde die CPW gewählt, um die mit diesen Strukturen in unserer Arbeitsgruppe gemachten Erfahrungen zu nutzen [46]. Die CPW besteht aus einem Mittelleiter der Breite  $W$  und zwei (im Idealfall unendlich ausgedehnten) Masseleitungen im Abstand  $D$  (Abb. 5.3). Die Auslegung einer CPW ist ausführlich in [46] beschrieben. Maßgeblich für eine gute Einkopplung der Mikrowelle ist, daß im gesamten Signalweg kein Impedanzsprung auftritt. Da HF-technische Geräte und mikrowellentaugliche Koaxialkabel eine Impedanz von  $50 \Omega$  besitzen, muß die CPW ebenso auf diese Impedanz ausgelegt werden. Die Impedanz wird im wesentlichen durch das Verhältnis  $W/D$  bestimmt und die Dielektrizitätskonstante des Substratmaterials Silizium (Tab. 5.1). Einen Wellenwiderstand von  $50 \Omega$  erreicht man in diesem Fall für  $W/D = 0.53$ . Bei den verwendeten Proben war  $W = 120 \mu\text{m}$  und  $D = 228 \mu\text{m}$ . Die Breite  $W_2$  der beiden Außenleiter beträgt  $770 \mu\text{m}$ .

### 5.3 Experimenteller Aufbau

Alle Messungen wurden in einem Badkryostat aus Metall der Firma CryoVac durchgeführt. Der zylinderförmige He-Tank besitzt ein Fassungsvermögen von 17 l. Als Strahlungsschild befindet sich darum herum (mit etwas Abstand) ein hohlzylinderförmiger Stickstofftank mit 20 l Rauminhalt. Darüber hinaus ist der Kryostat mit einer dreifach Mumetall-Abschirmung zur Reduktion des äußeren Magnetfeldes ausgestattet. Der Kryostat selbst befindet sich in einer geschirmten Kammer mit  $1.3 \times 1.3 \text{ m}^2$  Grundfläche. Die Kammer weist eine Dämpfung für elektrische Felder von mindestens 100 dB bis zu einer Frequenz von 40 GHz auf. Sämtliche Stromquellen und Vorverstärker werden mit Akkus versorgt und befinden sich während der Messung innerhalb der Kammer. Die Steuerung übernimmt ein Rechner außerhalb der Kammer mit zwei Meßkarten (LabPC+, National Instruments) und einer GPIB Karte. Als Mikrowellen-Generator wurde der SMR40 der Firma Rhode & Schwarz angeschafft. Die Wahl fiel auf dieses Gerät, da es bis 40 GHz über ausreichend Leistung verfügt (mindestens +5 dBm) und es im Vergleich zu Produkten von Mitbewerbern über eine überragende Amplitudenauflösung von 0.01 dB verfügt. Für niedrigere Frequenzen dient der Funktionsgenerator 33250A der Firma Agilent, der den Frequenzbereich bis 80 MHz abdeckt. Hiermit lassen sich auch leicht Rauschströme mit gaußförmiger Amplitudenverteilung generieren. Zur Erzeugung von Rauschsignalen wurde auch der Arbitrary-Waveform-Generator AWG2021 von Tektronix verwendet. Für die dc-Charakterisierung wurde als Software das von E. Goldobin entwickelte GoldExI [99] verwendet, das schnell, umfangreich und einfach zu bedienen ist. Leider unterstützt das Programm die GPIB-Schnittstelle nicht, weshalb für die ac-Messungen ein Satz von LabView-Programmen entwickelt wurde, die diese Schnittstelle bedienen und damit die verschiedenen Generatoren steuern können. Die Zuführung der Mikrowelle geschieht über Semi-Rigid Kabel vom Typ RG405 und Steckverbindern der SMA Norm. Kabel und Stecker sind zwar nur bis 18 GHz spezifiziert, jedoch ist die Dämpfung auch oberhalb dieser Frequenz erträglich, nicht zuletzt dank der hohen Leistung der Generatoren. Somit stellen Kabel und Steckverbinder einen guten Kompromiß zwischen Güte und Preis dar. Der Übergang vom Kabel auf den Chip gelingt durch eine Taper-Struktur, wie in [46] beschrieben und in Abb. 5.3 auf der rechten Seite dargestellt. Diese Struktur auch wieder eine CPW. Dabei verjüngt sich die Breite des Mittelleiters um so einen Übergang von der Dicke der Koaxkabel auf die Abmessungen der CPW auf den Chips zu erreichen. Damit es dabei nicht zu einem Impedanzsprung kommt, muß im selben Maße auch der Abstand

---

zwischen den beiden Außenleitern kleiner werden. Die Chips selbst werden auf eine Platine geklebt um so wenig Metall wie möglich in der Umgebung des Chips zu haben. So läßt sich der störende Einfluß des Nyquist Rauschens in Metallen minimieren.

# Kapitel 6

## Experimente

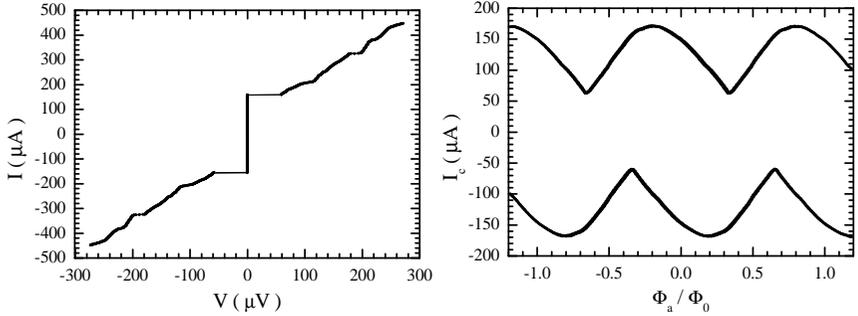
In diesem Kapitel werden die experimentellen Ergebnisse vorgestellt und diskutiert. Hierbei werden zunächst die dc Eigenschaften analysiert. Anschließend werden die Ratscheneffekte besprochen, getrennt nach adiabatischem und nichtadiabatischem Antrieb (beide harmonisch) und stochastischem Antrieb. Sämtliche Messungen wurden bei  $T = 4.2\text{ K}$  durchgeführt.

### 6.1 dc Eigenschaften

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der dc-Messungen vorgestellt. Diese Messungen dienen hauptsächlich dazu, die Werte für die in das Modell eingehenden Parameter zu gewinnen. Obwohl mehrere Proben untersucht wurden, werden hier exemplarisch zwei Proben besprochen: Probe C132S33 mit einer nominellen kritischen Stromdichte von  $j_c = 1\text{ kA/cm}^2$  und Probe C232S33 mit einer kritischen Stromdichte von  $j_c = 100\text{ A/cm}^2$ .

#### **Probe C132S33 ( $j_c = 1\text{ kA/cm}^2$ )**

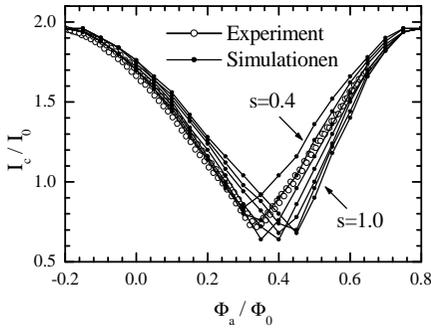
In Abb. 6.1 sind zwei Messungen an der Probe C132S33 dargestellt. Das Diagramm links zeigt eine Strom-Spannungs-Kennlinie bei verschwindendem Magnetfeld. Der kritische Strom im Nullfeld beträgt  $172\text{ }\mu\text{A}$ . Auffällig sind die Vielzahl an Strukturen in Form von horizontal verlaufenden Stufen auf der Kennlinie, die bereits in Kapitel 4 diskutiert worden sind. Auffällig ist auch, daß die Kennlinie bei dem kritischen Strom tatsächlich mit einem Sprung in den Spannungszustand übergeht. Die Kennlinie besteht aus zwei Ästen, die in umgekehrter Stromrichtung durchlaufen wurden. Die Äste



**Abb. 6.1:** Probe C132S33 mit nomineller kritischer Stromdichte  $1 \text{ kA/cm}^2$ . Im Diagramm oben links ist eine typische Strom-Spannungs-Kennlinie im Nullfeld dargestellt. Im Diagramm auf der rechten Seite ist die zugehörige Abhängigkeit des kritischen Stromes vom externen Fluß gezeigt.

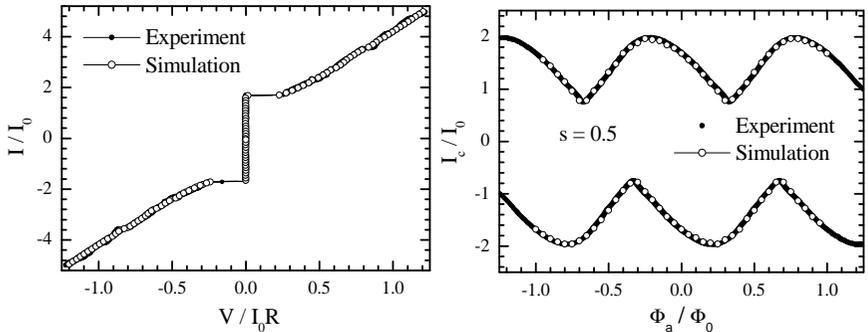
liegen aufeinander, d.h. es zeigt sich keine Hysterese. Aus der Kennlinie läßt sich als wichtigste Größe der Normalwiderstand bestimmen, der sich zu  $R_n = 0.7 \Omega$  ergibt. Da die Asymmetrie in den Widerständen experimentell nicht zugänglich ist, wird die Annahme gemacht, daß die Asymmetrie verschwindet. Die Widerstände links und rechts haben also die Werte  $R_s \approx R_3 = 1.4 \Omega$ . Im Diagramm auf der rechten Seite ist der positive und negative kritische Strom als Funktion des externen Flußes angegeben. Die Skala für den Fluß läßt sich leicht bestimmen, da die Modulationsperiode stets genau  $\Phi_0$  beträgt. Für diese Messungen wird der externe Fluß festgehalten und der Strom erhöht, bis eine Spannung abfällt, die größer ist als eine vorher festgelegte (kleine) Schranke (Spannungskriterium). Der Wert für den Strom wird gespeichert und der Strom wieder reduziert auf einen ebenfalls vorher festgelegten Startwert. Mit dem nächsten Wert für den Fluß beginnt die Prozedur dann von vorne. Der maximale kritische Strom beträgt  $2I_0 = 186 \mu\text{A}$ , woraus sich mit der Temperatur  $T = 4.2 \text{ K}$  ein Rauschparameter von  $\Gamma = 2 \cdot 10^{-3}$  ergibt. Damit ist auch die charakteristische Spannung festgelegt zu  $I_0 R = 130 \mu\text{V}$  und die charakteristische Frequenz beträgt  $f_c = V_c / \Phi_0 = 63 \text{ GHz}$ . Mit den Designwerten für die Kapazitäten der Kontakte  $C_1 = C_2 = 0.54 \text{ pF}$  und  $C_3 = 0.27 \text{ pF}$  ergibt sich die Gesamtkapazität  $C$  zu (vgl. Gleichung (3.58))  $C = 0.27 \text{ pF}$ . Daraus erhält man  $\beta_C = 0.14$ . In Abschnitt 3.3.2 wird gezeigt, daß die  $I_c^+(\Phi_a)$ -Kennlinie (positiver Strom) entlang der Flußachse nach links um

$$\Phi_a^+ / \Phi_0 = -\frac{1}{4} \left( \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{1 + \alpha} + 2\beta_L \frac{1 - s}{1 + s} \right). \quad (6.1)$$



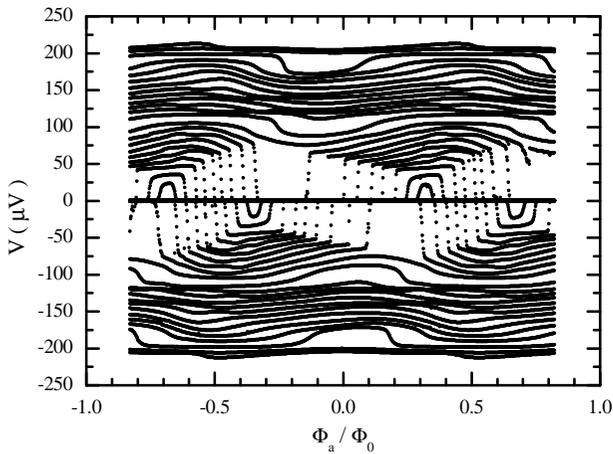
**Abb. 6.2:** Probe C132S33 mit nomineller kritischer Stromdichte  $1 \text{ kA/cm}^2$ . Es ist ein Ausschnitt einer Schar von numerisch ermittelten  $I_c(\Phi_a)$ -Kennlinien dargestellt (schwarze Symbole) zusammen mit der gemessenen  $I_c(\Phi_a)$ -Abhängigkeit (offene Symbole). Die Parameter sind  $\Gamma = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $\beta_C = \beta_L = 0.1$ ,  $\alpha = \alpha_C = 0.05$  sowie  $s = 0.4, 0.5, \dots, 1.0$ .

verschoben ist. Aus den gemessenen  $I_c(\Phi_a)$ -Mustern läßt sich diese Verschiebung bestimmen. Das ist mit einiger Unsicherheit behaftet, da die Maxima recht flach verlaufen. Es ergibt sich hier:  $\Phi_a^+ = -0.22 \Phi_0$ . Da alle drei Größen  $s$ ,  $\alpha$  und  $\beta_L$  unbekannt sind, muß zusätzliche Information gewonnen werden. Auch die Form d.h. insbesondere die Modulationstiefe der  $I_c(\Phi_a)$ -Abhängigkeit hängt von  $s$ ,  $\alpha$  und  $\beta_L$  ab. Diese Form läßt sich numerisch gewinnen. Da diese Rechnungen aber zeitaufwändig sind, ist in zwei Schritten vorgegangen worden. Erst wird ein Parameter fixiert (am besten derjenige, der mit der größten Sicherheit bekannt ist also z.B.  $s = 1/2$ ) und aus obiger Beziehung Kombinationen für  $\alpha$  und  $\beta_L$  gewonnen, die die beobachtete Verschiebung erzeugen. Für diese Kombinationen wurden die entsprechenden Abhängigkeiten simuliert und mit der experimentellen Kurve verglichen. Ein Beispiel ist in Abb. 6.2 dargestellt. Die Kurven mit den schwarzen Symbolen sind numerisch erhaltene  $I_c(\Phi_a)$ -Abhängigkeiten. Die gemessene Abhängigkeit ist hellgrau abgebildet. Die Parameter für die Rechnung sind  $\Gamma = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $\alpha = \alpha_C = 0.05$ ,  $\beta_L = \beta_C = 0.1$ , sowie  $s = 0.4, 0.5, \dots, 1.0$ , wobei gerade die Kombination  $s = 1/2$  und  $\alpha = 0.05$  zu der experimentell beobachteten Verschiebung führt. In Abb. 6.3 ist auf der rechten Seite die gemessene Kurve vollständig dargestellt, zusammen mit der gerechneten Abhängigkeit mit der besten Übereinstimmung insgesamt, also nicht nur in Bezug auf die Verschiebung sondern auch in Bezug auf die Form der Kennlinie. Die Parameter sind wie oben, jedoch  $\alpha = \alpha_C = 0.01$  und  $s = 0.5$ . Diese Parameter stimmen hervorragend mit den Designwerten überein. Be-



**Abb. 6.3:** Probe C132S33 mit nomineller kritischer Stromdichte  $1 \text{ kA/cm}^2$ . Im Diagramm links ist die gemessene  $I(V)$ -Kennlinie aus Abb. 6.1, jedoch in normierten Einheiten dargestellt (schwarze Symbole). Die Kurve mit den offenen Symbolen ist gerechnet mit den Parametern  $\Gamma = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $\Phi_a = 0$ ,  $\beta_C = \beta_L = 0.1$ ,  $s = 1/2$  sowie  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ . Im Diagramm rechts ist die gemessene  $I_c(\Phi_a)$ -Abhängigkeit (schwarz) zusammen mit der simulierten Kurve mit der besten Übereinstimmung (offene Symbole).

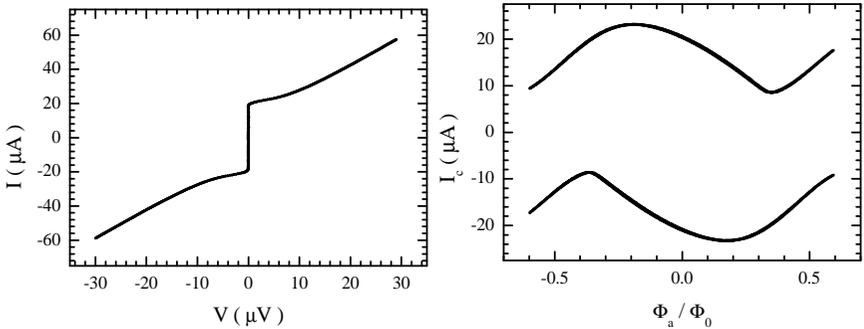
sonders wertvoll ist die Bestimmung von  $\beta_L$ , da die Induktivität ansonsten schlecht zugänglich ist. Setzt man  $\alpha$ ,  $s$  und  $\beta_L$  in den Ausdruck (6.1) ein, so erhält man für die Verschiebung  $\Phi_a^+ = -0.24 \Phi_0$ , was nicht sehr von dem abgelesenen Wert abweicht. In Abb. 6.3 ist links die gemessene (schwarze Symbole) und die simulierte (offene Symbole) Strom-Spannungs-Kennlinie dargestellt. Man erkennt, daß die Strukturen auf der gerechneten Kennlinie insgesamt weniger stark ausgeprägt sind, als auf der gemessenen Kennlinie. Allerdings gibt es eine gute Übereinstimmung, was die Position der Strukturen betrifft. Die stärkste horizontale Stufe bei  $I = 3.6 I_0$  findet sich sowohl in der Messung als auch in der Rechnung und auch die Strukturen in der Umgebung von  $I = 2.4 I_0$  vermag die Rechnung zu reproduzieren. Im Diagramm von Abb. 6.4 ist der Vollständigkeit wegen eine Schar von  $V(\Phi_a)$ -Charakteristiken dargestellt. Dabei wird der Biasstrom konstant gehalten und das Magnetfeld variiert. Die Ströme nehmen dabei Werte zwischen  $I = \pm 175 \mu\text{A}$  in Schritten von  $7 \mu\text{A}$  an. Die einzelnen Kurven springen (für nicht zu große Ströme) in den Spannungszustand, was man ja auch schon an der  $I(V)$ -Kennlinie sehen kann und auch die schon erwähnten Strukturen finden sich auf den  $V(\Phi_a)$ -Abhängigkeiten wieder. Sehr deutlich zu erkennen ist besonders die Asymmetrie. Bei  $\Phi_a/\Phi_0 = 1/4$  fällt für positive Ströme viel früher eine Spannung ab, als für entsprechende negative Ströme.



**Abb. 6.4:** Probe C132S33 mit nomineller kritischer Stromdichte  $1 \text{ kA/cm}^2$ . Dargestellt ist die Abhängigkeit der Spannung vom externen Fluß. Dabei wird der Biasstrom konstant gehalten und der Fluß variiert. Die Ströme wurden im Bereich  $\pm 175 \mu\text{A}$  in Abständen von  $7 \mu\text{A}$  verändert.

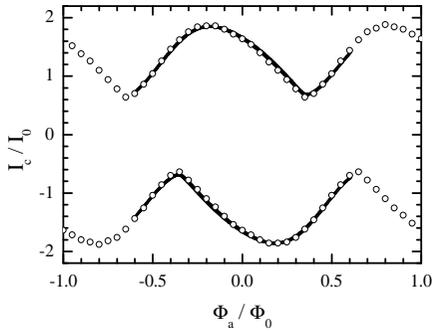
### Probe C232S33 ( $j_c = 100 \text{ A/cm}^2$ )

In Abb. 6.5 sind die Ergebnisse der dc-Charakterisierung für die Probe C232S33 mit geringerer kritischer Stromdichte (nominell  $j_c = 100 \text{ A/cm}^2$ ) dargestellt. Der jetzt um eine Größenordnung reduzierte kritische Strom führt zu einem eine Größenordnung höheren Rauschparameter  $\Gamma$ . Die damit einher gehende Verrundung der dc-Kennlinie ist im Diagramm links deutlich zu erkennen. Auch die zuvor deutlich ausgeprägten Strukturen auf der dc-Kennlinie sind durch die Dominanz thermischer Fluktuationen verschwunden. Auch die rechts daneben abgebildete  $I_c(\Phi_a)$ -Abhängigkeit zeigt jetzt nicht mehr die charakteristischen Spitzen beim Übergang von einem Flußzustand zum nächsten, sondern ebenfalls eine rundere Form. Aus der Abhängigkeit des kritischen Stromes vom externen Fluß im Diagramm rechts liest man das Maximum des kritischen Stromes zu  $23 \mu\text{A}$  ab. Dieser Wert kann allerdings nicht direkt mit  $2I_0$  identifiziert werden, da die Anwesenheit starker Fluktuationen auch für  $I < 2I_0$  zu thermisch aktiviertem Transport führt. Der maximal mögliche kritische Strom ist dann stets kleiner als  $2I_0$ . Um einen korrekten Wert für  $I_0$  zu erhalten, kann man daran denken wieder  $I_c(\Phi_a)$ -Abhängigkeiten zu simulieren und mit der gemessenen Abhängigkeit zu vergleichen. Um geeignete Parameter (d.h. vor



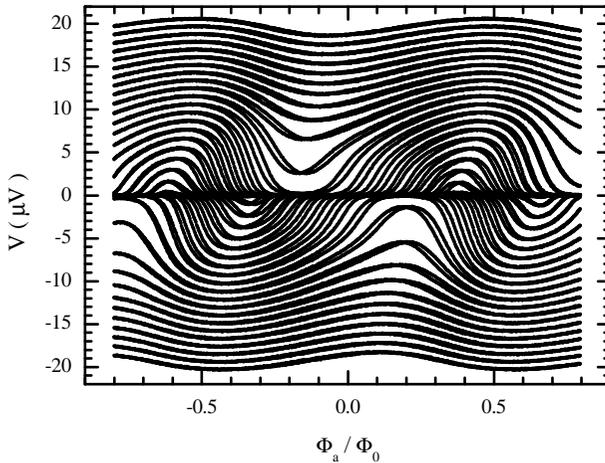
**Abb. 6.5:** Probe C232S33 mit nomineller kritischer Stromdichte  $100 \text{ A/cm}^2$ . Im Diagramm links ist die Strom-Spannungs-Kennlinie im Nullfeld dargestellt. Im Diagramm auf der rechten Seite ist die zugehörige Abhängigkeit des kritischen Stromes vom externen Fluß gezeigt.

allen den Rauschparameter) zu wählen, müßte aber wieder  $I_0$  bekannt sein. Glücklicherweise wird hier der maximale kritische Strom durch thermische Fluktuationen nur um ca. 10% reduziert, so daß sich aus der (im Grunde falschen) Wahl  $2I_0 = 23 \mu\text{A}$  bereits ein brauchbarer Wert für den Rauschparameter ergibt, nämlich  $\Gamma = 1.5 \cdot 10^{-2}$ . Die übrigen Parameter ergeben sich so: Eine verringerte kritische Stromdichte bedeutet, daß die Kontaktbarriere jetzt dicker ist. Dadurch verringert sich im Prinzip auch die spezifische Kapazität. Da jedoch die kritische Stromdichte exponentiell von der Barrierendicke abhängt, die spezifische Kapazität aber nur linear, ist diese Änderung zu vernachlässigen. Damit hat der McCumber-Parameter einen Wert von  $\beta_C = 0.01$ . Da die Geometrie nach wie vor dieselbe ist, bleibt die Induktivität gleich und damit ist  $\beta_L = 0.01$ . In Abb. 6.6 ist nun das Ergebnis von Simulationen dargestellt, bei dem die Asymmetrie  $s$  variiert wurde. Die schwarz durchgezogen gezeichnete Kurve kennzeichnet die Messung und die offenen Symbole die simulierte Abhängigkeit, welche die beste Übereinstimmung mit dem Experiment liefert. Die Parameter sind  $\beta_L = \beta_C = 0.01$ , sowie  $s = 1/2$  und  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ . Man erkennt, daß der maximale kritische Strom den Wert  $1.85 I_0$  hat. Der korrekte Wert lautet also  $2I_0 = 25 \mu\text{A}$ . Die Werte für  $s$ ,  $\alpha$  und  $\beta_L$  in (6.1) eingesetzt, ergeben  $\Phi_a^+ = -0.23 \Phi_0$ . Der aus dem gemessenen  $I_c(\Phi_a)$ -Muster abgelesene Wert liegt bei  $\Phi_a^+ = -0.20 \Phi_0$ . Die Abweichung könnte an den thermischen Fluktuationen liegen, die in die Herleitung von Gl. (6.1) nicht eingehen. Der Normalwiderstand läßt sich aus der  $I(V)$ -Kennlinie (Abb. 6.5) entnehmen und beträgt  $R_n = 0.55 \Omega$ . Damit ergibt sich ein charakteristische Spannung von



**Abb. 6.6:** Probe C232S33 mit nomineller kritischer Stromdichte  $100 \text{ A/cm}^2$ . Die gemessene  $I_c(\Phi_a)$ -Abhängigkeit ist durchgezogen dargestellt. Die Kurve mit den offenen Symbolen ist das Ergebnis einer numerischen Simulation mit den Parametern  $\Gamma = 1.5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\beta_C = \beta_L = 0.01$ ,  $\alpha = \alpha_C = 0.01$  sowie  $s = 0.5$ .

$13.7 \mu\text{V}$ . Das entspricht einer charakteristischen Frequenz von  $f_c = 6.6 \text{ GHz}$ . In Abb. 6.7 sind  $V(\Phi_a)$ -Abhängigkeiten für die Probe C232S33 dargestellt. Der Strom läuft im Bereich  $\pm 40 \mu\text{A}$  in Schritten von ungefähr  $1.5 \mu\text{A}$ . Im Vergleich zu Abb. 6.1 unten sind die Sprünge in den Spannungszustand ver-



**Abb. 6.7:** Probe C232S33 mit nomineller kritischer Stromdichte  $j_c = 100 \text{ A/cm}^2$ . Dargestellt ist die Abhängigkeit der Spannung vom externen Fluß. Der Biasstrom variiert im Bereich  $\pm 40 \mu\text{A}$  in Abständen von  $1.5 \mu\text{A}$ .

schwunden und die Kurven sehen runder aus. Nach wie vor ist sehr deutlich die Asymmetrie zu erkennen. Die gewonnenen Parameter sind in Tab. 6.1

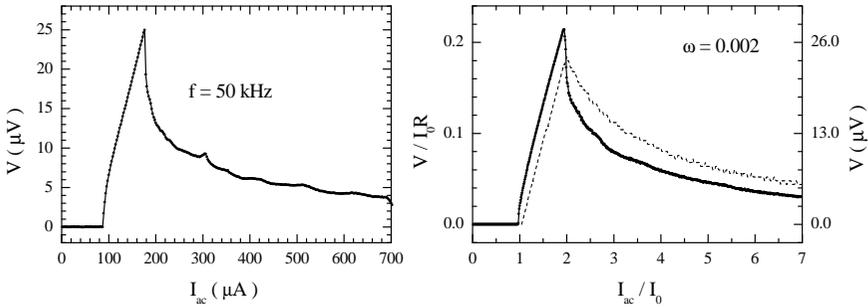
Chip	$I_c/\mu\text{A}$	$R_n/\Omega$	$C/\text{pF}$	$f_c/\text{GHz}$	$\Gamma/10^{-3}$	$\beta_C$	$\beta_L$	$\alpha$
C132S33	186	0.70	0.27	63	2	0.1	0.1	0.01
C232S33	25	0.55	0.27	6.6	15	0.01	0.01	0.01

**Tab. 6.1:** Übersicht über die gewonnenen Parameter.

zusammengefaßt dargestellt.

## 6.2 Adiabatisch langsamer Antrieb

In diesem Abschnitt werden Messungen mit harmonischem, adiabatisch langsamem Antrieb vorgestellt. Es wird also ein sinusförmiger Wechselstrom  $I(t) = I_{ac} \sin(e\pi f t)$  mit einer Frequenz  $f$ , die viel kleiner ist als die charakteristische Frequenz  $f_c$  durch das SQUID geschickt und die dc Spannung  $V$  gemessen. Tatsächlich generiert jeder Vorverstärker auch bei kurzgeschlossenem Eingang eine Offset-Spannung. Diese Spannung muß nachträglich abgezogen werden. Leider ist diese Spannung zeitlich nicht konstant sondern driftet leicht, zumindest auf der Zeitskala von Stunden. Es bieten sich daher zwei Wege an. Hält man den Fluß  $\Phi_a$  wirklich konstant, hat man die Amplitude  $I_{ac}$  so schnell zu variieren, daß der Drift der Offset-Spannung vernachlässigbar ist. Die Spannung  $V$ , die für sehr kleine Amplituden abfällt wird dann als Offset definiert und abgezogen. Man kann aber auch zu jedem Wert der Amplitude den Fluß über mindestens eine Periode der SQUID-Modulation variieren und diese Abhängigkeiten aufzeichnen. In einem zweiten Schritt nutzt man dann die Tatsache, daß die durch den Ratscheneffekt generierte Spannung ihr Vorzeichen wechselt, wenn der Fluß sein Vorzeichen wechselt, d.h. der gerade Anteil im Spannungssignal kann nur die Offsetspannung des Vorverstärkers sein. Dieser Offset wird wieder abgezogen, kann aber jetzt von Amplitude zu Amplitude variieren. In Abb. 6.8 ist im Diagramm links das Ergebnis einer Messung mit adiabatisch langsamem Antrieb für die Probe C132S33 mit großer kritischer Stromdichte ( $j_c = 1 \text{ kA/cm}^2$ ) dargestellt. Die Frequenz des antreibenden Wechselstroms beträgt  $f = 50 \text{ kHz}$ , so daß wegen  $f/f_c \approx 10^{-6}$  der adiabatische Grenzfall sehr gut erreicht ist. Gezeigt ist die Abhängigkeit der Spannung von der Amplitude des Wechselstroms. Während der Messung wurde der externe Fluß variiert. In der Abbildung wurde  $\Phi_a/\Phi_0 = 1/4$  gewählt, was sich ja schon im Theorieteil als der optimale Arbeitspunkt erwiesen hatte. Es zeigt sich



**Abb. 6.8:** Probe C132S33 mit nomineller kritischer Stromdichte  $j_c = 1 \text{ kA/cm}^2$ . Links ist die Messung dargestellt, die bei  $f = 50 \text{ kHz}$  ausgeführt wurde. Während der Messung wird der Fluß variiert. Dargestellt ist die Spannung bei  $\Phi_a/\Phi_0 = 1/4$  als Funktion der Amplitude des antreibenden Wechselstroms  $I_{ac}$ . Rechts ist die zugehörige Simulation dargestellt mit  $\omega = 0.002$ . Für die gestrichelte Kurve ist  $\alpha = \alpha_C = 0$  und alle Startwerte verschwinden. Für die durchgezogene Kurve ist  $\alpha = \alpha_C = 0.01$  und  $\delta_2(t=0) = 0.1 \pi$ . Beiden Kurven gemeinsam sind die Parameter  $\Gamma = 0.002$ ,  $\phi_a = 1/4$ ,  $\beta_L = \beta_C = 0.1$  und  $s = 1/2$ . Sämtliche Widerstandsasymmetrien verschwinden.

tatsächlich das typische Verhalten, wie bereits im Theorieteil erläutert. Für sehr kleine Amplituden fällt keine Spannung ab, danach steigt die Spannung an, erreicht ein Maximum und fällt für noch größere Amplituden langsam wieder ab. Zwei Dinge fallen auf: Im Bereich des Abfalls sind kleine Strukturen zu erkennen, die ihre Entsprechung finden in den Strukturen auf den  $I(V)$ -Kennlinien. Weiter fällt auf, daß der Anstieg nicht linear verläuft, sondern die Kurve sehr steil beginnt und zum Maximum hin wieder flacher wird. Schließlich fällt eine kleine Spitze bei  $I_{ac} \approx 300 \mu\text{A}$  auf. Diese Spitze findet ihre Entsprechung als Stufe auf der dc-Kennlinie bei  $I \approx 3.6 I_0 \approx 325 \mu\text{A}$ , die auch in Abb. 6.3 zu sehen ist. Entsprechungen dieser Art gibt es nur im adiabatischen Grenzfall, da sich nur dann eine Ratschenkennlinie aus der dc-Kennlinie berechnen läßt. Im Diagramm auf der rechten Seite sind die zugehörigen simulierten Abhängigkeiten dargestellt. Die für beide Kurven verwendeten Parameter sind dabei  $\Phi_a/\Phi_0 = 1/4$ ,  $\beta_L = \beta_C = 0.1$  und  $s = 1/2$ . Die normierte Frequenz beträgt dabei  $\omega = 0.002$ . Dies ist sehr viel größer, als die sehr kleine normierte Frequenz in der Messung. Eine so kleine Frequenz läßt sich jedoch numerisch nicht behandeln, da man stets über mindestens eine Periodendauer des Antriebs zu integrieren hat, so daß bei sehr kleinen Frequenzen die benötigte Rechenzeit unerträglich groß wird.

Für die durchgezogen gezeichnete Kurve ist  $\alpha = \alpha_C = 0.01$  und es ist  $\delta_2(t = 0) = 0.1 \pi$ . Die Übereinstimmung mit dem Experiment ist sehr gut. So beträgt die maximale Spannung in der Simulation  $0.21 I_0 R = 27 \mu V$ , was nur etwas mehr ist, als die experimentell erhaltene Wert von  $25 \mu V$ . Für  $I_{ac} > 2 I_0$  lassen sich in der Simulation Strukturen erkennen, die zwar etwas schwächer ausgeprägt sind als in der Messung, aber ihre Form wird sehr gut wiedergegeben. Vor allem aber steigt die simulierte Kurve (ab  $I_{ac} > 1$ ) in ebenso nichtlinearer Weise an, wie die experimentell erhaltene Kurve. Der Unterschied wird noch eindrucksvoller, wenn man die gemessene Kurve mit der gestrichelten (ebenfalls simulierten) Kurve im rechten Diagramm vergleicht. Die gestrichelte Kurve ist erhalten mit denselben Parametern wie die durchgezogene Kurve, jedoch ist jetzt  $\alpha = \alpha_C = 0$  und alle Startpositionen und Startgeschwindigkeiten verschwinden. Im Abschnitt 4.3 wurde erläutert (siehe z.B. Abb. 4.10), daß dann Stufen der Höhe  $2\omega = 0.004$  entstehen, die hier gerade nicht mehr zu erkennen sind. Offensichtlich ist für die gestrichelte Kurve der Anstieg sehr wohl linear und die Kurve fällt auch anders ab als die gemessene Kurve. Besonders der nichtlineare Anstieg ist ein typisches Merkmal von unterdämpften Ratschensystemen [56, 55, 57]. Damit ist klar, daß hier tatsächlich ein Spezialfall eines solchen Systems vorliegt. Zwar folgt die Bewegung in  $\delta_l$ -Richtung (also die Richtung in der der Transport beobachtet wird) einer stark gedämpften Dynamik, jedoch ist diese gekoppelt mit einer stark ungedämpften Dynamik in der dazu senkrechten Richtung  $\varphi$ . Nur wenn man verschwindende Startwerte und vollkommen identische Kontakte im linken Arm vorgibt, läßt sich die Bewegung in die zweite Richtung  $\varphi$  einfrieren, und erhält ein rein stark gedämpftes System.

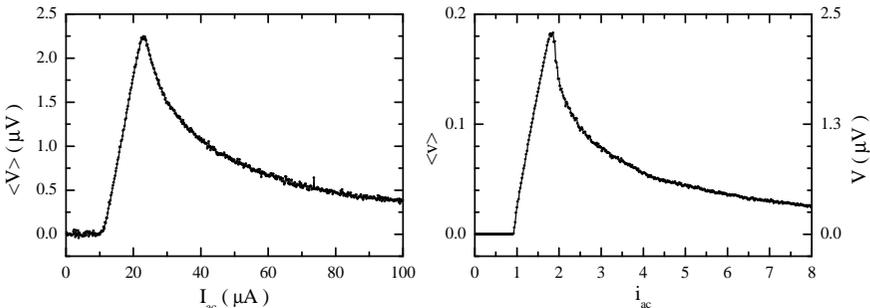
Auf der linken Seite von Abb. 6.9 ist das Ergebnis einer Messung mit adiabatisch langsamem Antrieb für die Probe die Probe C232S33 mit nominell  $j_c = 100 \text{ A/cm}^2$  gezeigt. Wie bereits erwähnt, ist das  $I_0 R$ -Produkt eine Größenordnung kleiner, weshalb auch die beobachtete Spannung jetzt nur noch maximal ca.  $2.2 \mu V$  beträgt. Weiter fällt im Vergleich mit Abb. 6.8 auf, daß die Kurve glatter aussieht und auch das Maximum keine scharfe Spitze mehr aufweist. Dies ist wieder eine Auswirkung der jetzt eine Größenordnung kleineren Potentialbarriere, wodurch thermische Fluktuationen entsprechend an Einfluß gewinnen. Auf der rechten Seite ist das Ergebnis der dazu gehörigen numerischen Simulation gezeigt. Die Parameter sind  $\beta_L = \beta_C = 0.1$ ,  $s = 1/2$ ,  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ ,  $\phi_a = 1/4$  und  $\Gamma = 0.015$ . Nach den Betrachtungen aus Abschnitt 6.1 sollte in der Simulation eigentlich  $\beta_C = \beta_L = 0.01$  verwendet werden. Hier wurde jedoch davon abgesehen, da in diesem Falle die benötigten Rechenzeiten sehr groß werden. Tests haben gezeigt, daß Werte von 0.1 für diese beiden Größen

schon als sehr klein anzusehen sind und eine weitere Verkleinerung kaum noch Änderungen am Verlauf sowohl der dc- als auch der Ratschenkennlinien bewirkt. Die Frequenz des Antriebs beträgt  $\omega = 0.005$ . Auch hier fällt die gute Übereinstimmung der Höhe des Maximums auf: In der Simulation beträgt die Höhe  $v = 0.18$ , was zusammen mit der charakteristischen Spannung  $V_c = 13.7 \mu\text{V}$  eine Spannung von  $V = v \cdot V_c = 2.5 \mu\text{V}$  ergibt, was nur etwas größer als die eben erwähnte Höhe des Peaks im Experiment ist.

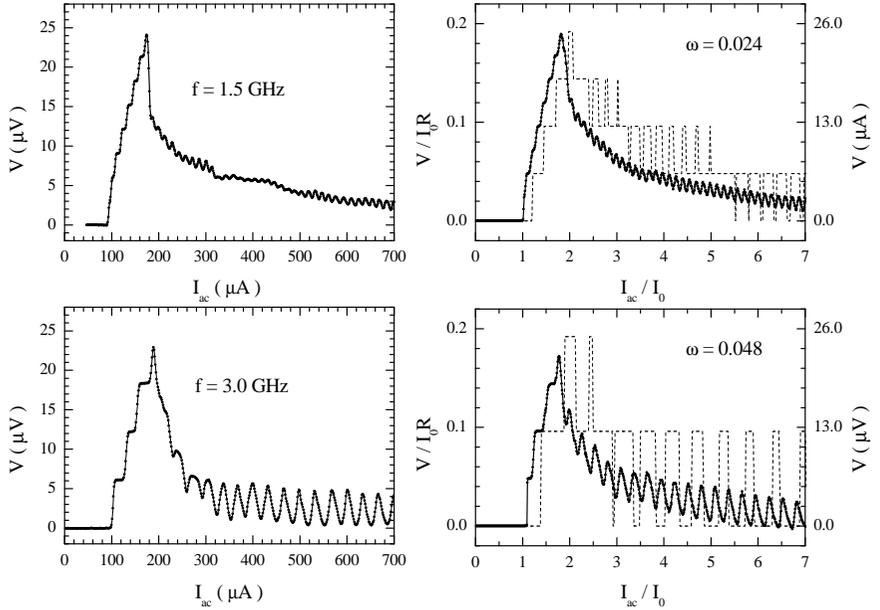
Im adiabatisch langsamem Fall zeigt sich also in beiden Fällen ein ausgeprägter Ratscheneffekt, der zu Spannungen bis ca.  $0.2 I_0 R$  führt. Dabei ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit den numerischen Simulationen.

### 6.3 Nichtadiabatischer Antrieb

In diesem Abschnitt werden Messungen mit harmonischem, nichtadiabatischem Antrieb vorgestellt. Für die Frequenz  $f$  des antreibenden Wechselstroms gilt also nicht mehr  $f \ll f_c$ . In Abb. 6.10 sind auf der linken Seite zwei Messungen gezeigt bei harmonischer, nichtadiabatischer Anregung an Probe C132S33 mit nomineller kritischer Stromdichte  $j_c = 1 \text{ kA/cm}^2$ . Die Frequenz des Antriebs beträgt im oberen Diagramm  $f = 1.5 \text{ GHz}$  und im unteren Diagramm  $f = 3.0 \text{ GHz}$ . Hier wurde während der Messung wieder der externe Fluß variiert und nachträglich die Stelle  $\Phi_a/\Phi_0 = 1/4$  aufge-



**Abb. 6.9:** Probe C232S33 mit nomineller kritischer Stromdichte  $j_c = 100 \text{ A/cm}^2$ . Links: Gemessene Abhängigkeit der Ratschenspannung von der Amplitude des antreibenden Wechselstroms. Die Frequenz des Antriebs beträgt  $f = 50 \text{ kHz}$ . Rechts: Zugehörige Simulation. Die normierte Antriebsfrequenz beträgt  $\omega = 0.005$ . Die übrigen Parameter sind  $\Gamma = 1.5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\phi_a = 1/4$ ,  $\beta_C = \beta_L = 0.1$ ,  $s = 1/2$  und  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ .

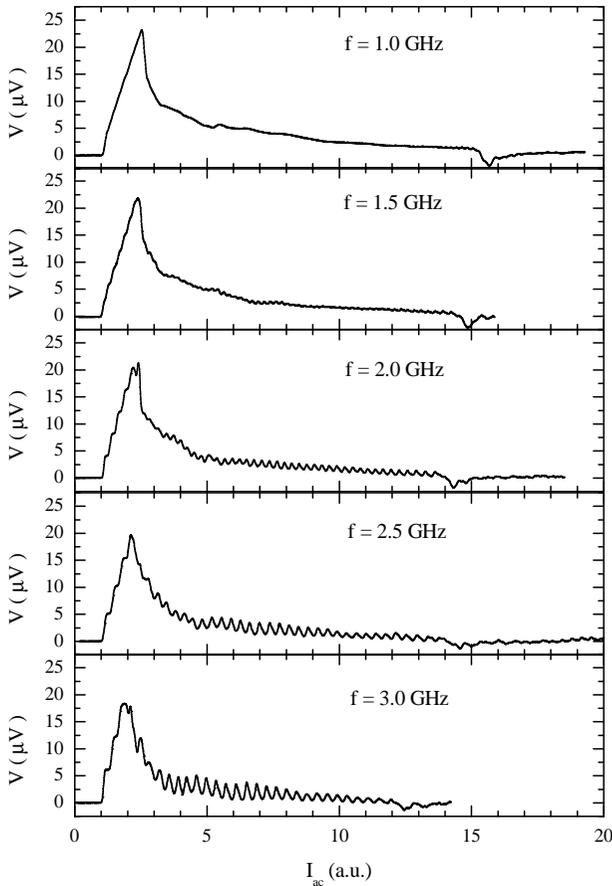


**Abb. 6.10:** Probe C132S33 mit nomineller kritischer Stromdichte  $j_c = 1 \text{ kA/cm}^2$ . Auf der linken Seite sind zwei Messungen gezeigt bei  $f = 1.5 \text{ GHz}$  (oben) und  $f = 3.0 \text{ GHz}$  (unten). Auf der rechten Seite sind die zugehörigen Simulationen dargestellt mit normierten Frequenzen  $\omega = 0.024$  und  $\omega = 0.048$ . Die gemeinsamen Parameter sind  $\Gamma = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $\phi_a = 1/4$ ,  $\beta_L = \beta_C = 0.1$  und  $s = 1/2$ . Für die durchgezogen gezeichneten Kurven gilt  $\alpha = \alpha_C = 0.01$  und es ist  $\delta_2(t = 0) = 0.1\pi$ . Für die gestrichelt gezeichneten Kurven gilt  $\alpha = \alpha_C = 0$  und alle Startwerte verschwinden.

sucht und so die beiden Diagramme auf der linken Seite gewonnen. Für sehr kleine Amplituden fällt wieder keine Spannung ab. Für größer werdende Amplituden sind sehr deutlich Spannungstufen zu erkennen. Ihre Höhe beträgt im oberen Diagramm  $3 \mu\text{V}$  und im unteren  $6 \mu\text{V}$ . Die Stufenhöhe ist proportional zur Frequenz und der Proportionalitätsfaktor ist gerade  $\Phi_0 \approx 2.07 \mu\text{V/GHz}$ . Dies ist eine Folge der Periodizität bzw. der Synchronisation der Dynamik mit dem externen Antrieb. Dies ist die erste experimentelle Bestätigung für die Quantisierung der mittleren Geschwindigkeit in einem Ratschensystem bei monochromatischem Antrieb. Kurze Zeit später ist auch in Josephson-Vortex-Ratschen diese Quantisierung beobachtet worden [33].

Für beide Frequenzen des Antriebs erreicht die Spannung ein ausgeprägtes Maximum. Die Spannung im Maximum beträgt in beiden Fällen ungefähr  $\approx 25 \mu\text{V}$ . Für größere Amplituden oszilliert die Spannung mit der Amplitude. Die Periode dieser Oszillationen nimmt mit wachsender Frequenz des Antriebs zu. Auf der rechten Seite sind die dazu gehörenden Simulationen gezeigt. Die normierte Frequenz beträgt oben  $\omega = 0.024$  und unten  $0.048$ . Die übrigen Parameter sind  $\phi_a = 1/4$ ,  $\Gamma = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $\beta_C = \beta_L = 0.1$  und  $s = 1/2$ . Für die durchgezogen dargestellten Kurven ist  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ . Die Stufen bei kleiner Amplitude haben in normierten Einheiten die Höhe  $\omega$ , was in physikalischen Einheiten der Höhe  $\Phi_0 f \approx 2.07 (\mu\text{V}/\text{GHz})f$  entspricht. Offensichtlich besitzen die Stufen im Experiment genau diese Höhe. Die Höhe des Maximums beträgt  $V = 0.2 I_0 R \approx 25 \mu\text{V}$  und stimmt für beide Frequenzen sehr gut mit dem experimentell erhaltenen Wert überein. Für Amplituden die größer sind als die Amplitude bei der das Maximum liegt, sind Oszillationen zu sehen. Deren Gestalt und Periode stimmt mit den experimentell erhaltenen Oszillationen sehr gut überein. Die gestrichelt gezeichneten Kurven sind für verschwindende Startwerte und verschwindende Asymmetrie, d.h.  $\alpha = \alpha_C = 0$  erhalten. Die Kurven zeigen zwar eine sehr kleine Verrundung, jedoch sind nur Stufen und keine Oszillationen zu erkennen. Gegenüber der durchgezogen gezeichneten Kurve haben die Stufen jetzt die Höhe  $2\omega$ , weil die Dynamik in diesem Fall eindimensional verläuft und damit die Periode  $4\pi$  statt  $2\pi$  beträgt. Umgekehrt ist die Tatsache, daß im Experiment Stufen der Höhe  $\omega$  beobachtet werden ein Beleg, daß das System die zweite Richtung  $\varphi$  wirklich nutzt.

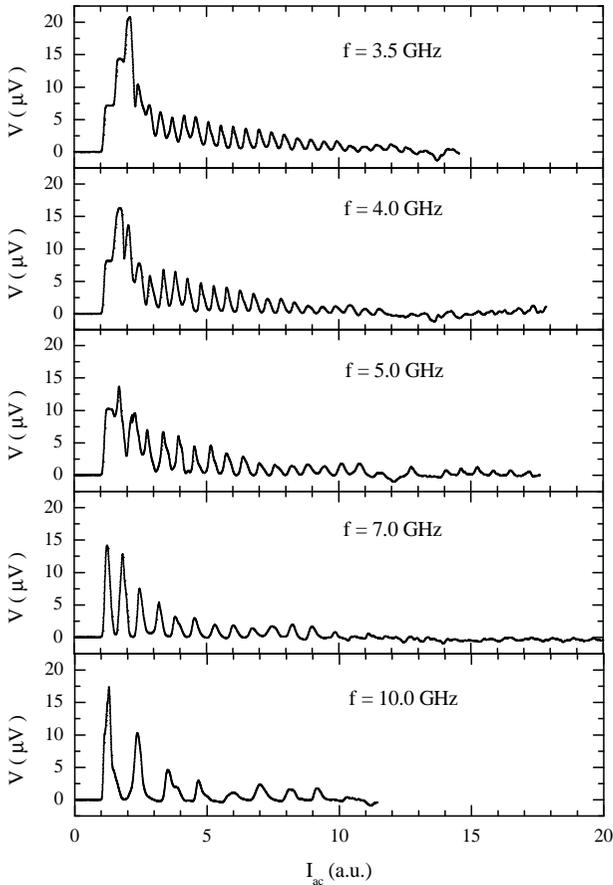
In Abb. 6.11 und 6.12 ist eine Übersicht über einen größeren Frequenzbereich des Antriebs für Probe C132S33 dargestellt. Im Diagramm ganz oben beträgt die Frequenz 1 GHz und wächst in den darauf folgenden Diagrammen. 1 GHz entspricht einer normierten Frequenz von  $\omega = 0.016$  so, daß der adiabatische Grenzfall noch nicht erreicht ist. Trotzdem kann man kaum ausgeprägte Spannungstufen erkennen, da ihre Höhe mit  $2 \mu\text{V}$  recht klein ist. Jenseits des Maximums sind auf der Kurve Strukturen zu erkennen, die wieder den Strukturen auf der dc-Kennlinie entsprechen. Für größere Amplituden gibt es einen kleinen Bereich, innerhalb dessen die Spannung negativ wird. In den Diagrammen darunter sind Meßergebnisse dargestellt für größere Frequenzen des Antriebs. Für nicht zu große Amplituden erscheinen wieder Stufen und für größere Amplituden wieder Oszillationen. Sehr deutlich zu erkennen ist die Proportionalität der Stufenhöhe zur Frequenz. Da die Stärke des Effekts durch das  $I_0 R$ -Produkt gegeben ist, nimmt dabei die Zahl der Stufen ab. In Abb. 6.12 geht die Übersicht weiter. Bei  $f = 5.0 \text{ GHz}$  erscheint nur noch eine Stufe. Oberhalb dieser Frequenz wer-



**Abb. 6.11:** Probe C132S33 mit nomineller kritischer Stromdichte  $j_c = 1 \text{ kA/cm}^2$ . Abhängigkeit der Ratschenspannung von der Amplitude des antreibenden Wechselstroms. Die Frequenz des Wechselstroms reicht von 1.0 GHz bis 3.0 GHz. Der externe Fluß hat den Wert  $\Phi_a/\Phi_0 = 1/4$ .

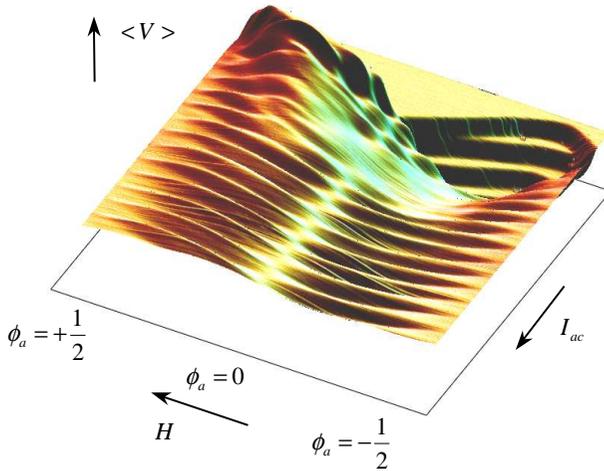
den nur noch Oszillationen beobachtet. Die Periode der Oszillationen nimmt mit wachsender Frequenz des Antriebs zu. Gleichzeitig nimmt die Stärke des Effektes (also z.B. die Höhe des größten Peaks) etwas ab, da das System bei sehr hochfrequentem Antrieb nicht mehr folgen kann.

In Abb. 6.13 ist eine Übersicht über die Flußabhängigkeit dargestellt, wie sie für Probe C132S33 experimentell erhalten wurde. Die Frequenz des



**Abb. 6.12:** Probe C132S33 mit nomineller kritischer Stromdichte  $j_c = 1 \text{ kA/cm}^2$ . Abhängigkeit der Ratchenspannung von der Amplitude des antreibenden Wechselstroms. Der externe Fluß hat den Wert  $\Phi_a/\Phi_0 = 1/4$ . Die Frequenz des Wechselstroms reicht von 3.5 GHz bis 10.0 GHz.

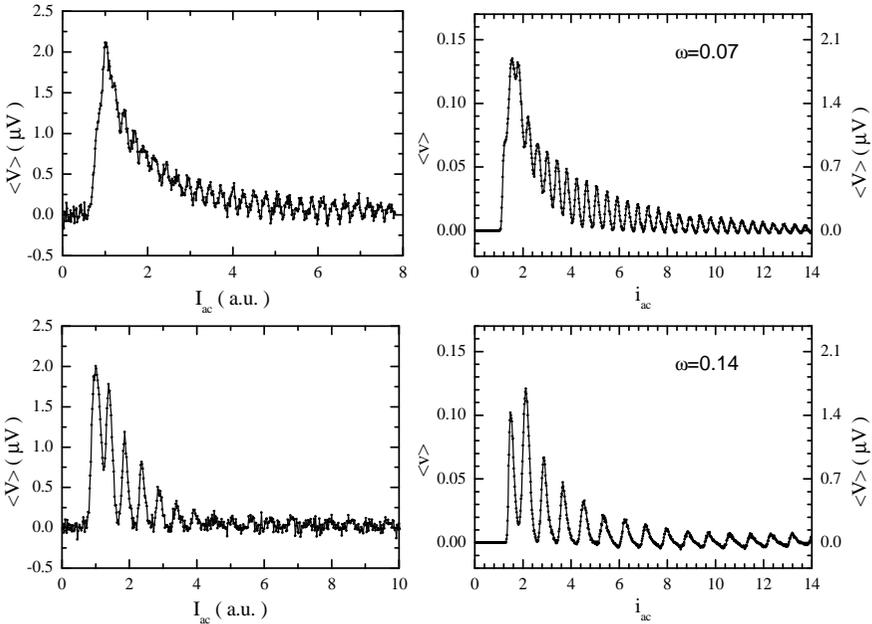
Antriebs beträgt  $f = 3 \text{ GHz}$ . Die Spannung ist nach oben aufgetragen gegen die Amplitude, die von hinten nach vorn läuft und gegen den Fluß, der von rechts nach links läuft. Deutlich sind für kleine Amplituden die Plateaus zu erkennen, die sich auch in  $\Phi_a$ -Richtung erstrecken. Offensichtlich wechselt die Spannung das Vorzeichen, wenn der Fluß das Vorzeichen wechselt. Dies belegt, daß der externe Fluß als symmetriebrechendes Element wirkt und die beobachtete Spannung auch tatsächlich auf der Asymmetrie basiert. Au-



**Abb. 6.13:** An Probe C132S33 Gemessene Fluß- und Amplitudenabhängigkeit der Ratschenspannung. Die Frequenz des Antriebs beträgt  $f = 3$  GHz.

ßerdem kann die Flußabhängigkeit genutzt werden um die Offsetspannung des Vorverstärkers zu bestimmen, die in der Abbildung bereits abgezogen wurde. Die Oszillationen in der Spannung für größere Amplituden  $I_{ac}$  sind jetzt als Rillen parallel zur Flußachse zu erkennen.

In Abb. 6.14 sind in der linken Spalte zwei Messungen mit nichtadiabatischem Antrieb an Probe C232S33 mit nominell  $j_c = 100$  A/cm<sup>2</sup> kritischer Stromdichte dargestellt. Im Diagramm oben beträgt die Frequenz des Antriebs 0.5 GHz und unten 1.0 GHz. Dargestellt ist die Spannung als Funktion der Amplitude des Antriebs. Im Gegensatz zu den vorhin vorgestellten Messungen sind keine Stufen zu erkennen, da die thermischen Fluktuationen jetzt eine Größenordnung stärker sind und die Stufen verschmiert werden. Genauer gesagt haben die thermischen Fluktuationen dieselbe Stärke, da die Temperatur dieselbe ist, jedoch ist die Tiefe des Potentials eine Größenordnung kleiner. Die für größere Amplituden zu beobachtenden Oszillationen sind hingegen stabiler und nach wie vor gut zu erkennen. Wie zuvor nimmt die Periode der Oszillationen mit der Frequenz des Antriebs zu. Die Höhe des höchsten Peaks beträgt in beiden Fällen etwa  $2 \mu\text{V}$ , also ungefähr dieselbe Höhe wie die entsprechende Messung im adiabatischen Limes aus Abb. 6.9. Auf der linken Seite sind die zugehörigen simulierten Abhängigkeiten gegenübergestellt. Wegen  $f_c = 6.6$  GHz erhalten die normierten Frequenzen die Werte  $\omega = 0.07$  und  $\omega = 0.15$ . Außerdem



**Abb. 6.14:** Probe C232S33 mit nomineller kritischer Stromdichte  $j_c = 100 \text{ A/cm}^2$ . Abhängigkeit der Ratschenspannung von der Amplitude des antreibenden Wechselstroms. Links sind zwei Meßergebnisse dargestellt mit Antriebsfrequenzen 0.5 GHz (oben) und 1.0 GHz (unten). Der externe Fluß beträgt  $\phi_a/\Phi_0 = 1/4$ . Auf der rechten Seite sind die dazu gehörigen Simulationen dargestellt mit normierten Frequenzen  $\omega = 0.07$  (oben) und  $\omega = 0.14$  (unten). Die übrigen Parameter sind  $\Gamma = 1.5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\beta_C = \beta_L = 0.1$ ,  $s = 1/2$  und  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ .

ist  $\phi_a = 1/4$ ,  $\Gamma = 1.5 \cdot 10^{-2}$ ,  $s = 1/2$  und  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ . Eigentlich müßte  $\beta_L = \beta_C = 0.01$  lauten. Da in diesem Falle, aber die Rechenzeit sehr groß wird, werden hier die Werte  $\beta_L = \beta_C = 0.1$  verwendet. Beim Vergleich mit dem experimentellen Ergebnis fällt auf, daß die Höhe des größten Peaks im Experiment stets etwas größer ist als in der Rechnung. Von der Form der berechneten Kurven könnte man darauf schließen, daß die normierten Frequenzen größer sein müßten. Das würde aber bedeuten, daß die charakteristische Frequenz kleiner sein müßte. Normalwiderstand und kritischer Strom wurden aber mit großer Sorgfalt bestimmt und liefern im adiabatischen Fall auch ein sehr gutes Ergebnis. Tests haben gezeigt, daß die Berücksichtigung von  $\beta_L = \beta_C = 0.01$  zwar die Höhe der Peaks hinter

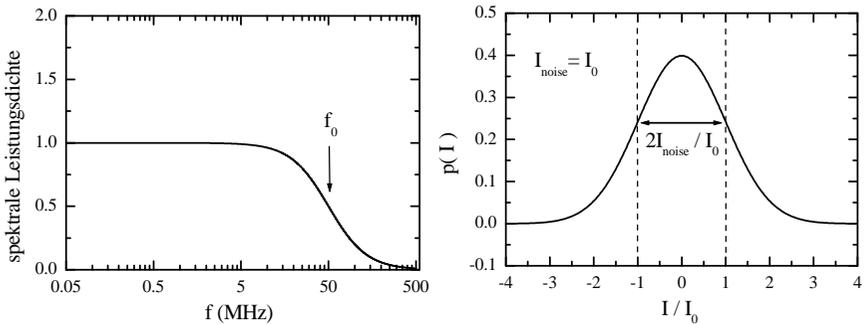
dem höchsten Peak leicht verändert, die Höhe des höchsten Peaks jedoch unbeeinflusst läßt.

## 6.4 Stochastischer Antrieb

Bisher ist stets das Verhalten unter harmonischem, d.h. deterministischem Antrieb betrachtet worden. Diese Art von Antrieb ist in gewisser Weise etwas künstlich, da sie eben deterministisch ist. Denkt man daran, aus in der Natur vorkommenden Antrieben vermittelt einer Ratsche Arbeit zu gewinnen, wird der Antrieb stets stochastischer Art sein. Um dieser Situation etwas näher zu kommen, wird im Folgenden eine Messung mit stochastischem Antrieb gezeigt. Dabei geht es zunächst um den adiabatischen Grenzfall.

### 6.4.1 Adiabatischer Grenzfall

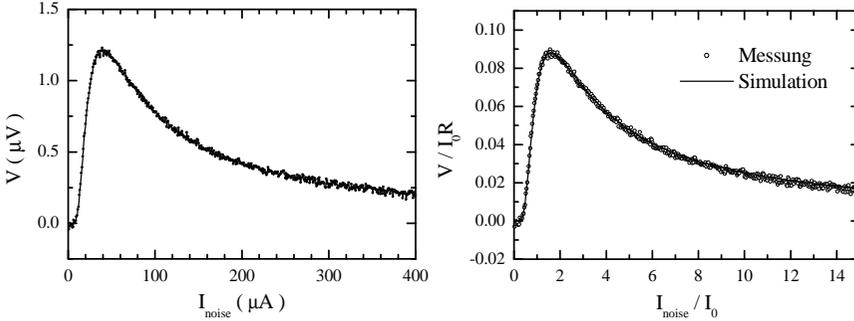
In diesem Grenzfall tauchen im Spektrum des antreibenden Rauschstromes nur Komponenten auf bei Frequenzen, die viel kleiner sind als die charakteristische Frequenz  $\omega_c$ . In Abb. 6.15 ist links die spektrale Leistungsdichte



**Abb. 6.15:** Eigenschaften des antreibenden Rauschstromes. Links ist die spektrale Dichte dargestellt. Rechts die Wahrscheinlichkeitsdichte für die momentanen Werte. Die Verteilung ist gaußförmig mit verschwindendem Mittelwert und Standardabweichung  $I_{noise}$ .

des antreibenden Rauschstromes dargestellt. Den Rauschstrom kann man sich entstanden denken aus weißem Rauschen dessen spektralen Anteile bei hohen Frequenzen mittels eines Tiefpaßfilters entfernt wurden. Das Spektrum ist weiß bis zu einer Abschneidefrequenz  $f_0$ , die im vorliegenden Fall bei 50 MHz liegt. Rechts ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für die momentanen Werte des Rauschstroms  $p(I)$  dargestellt. Die Verteilung ist gaußförmig,

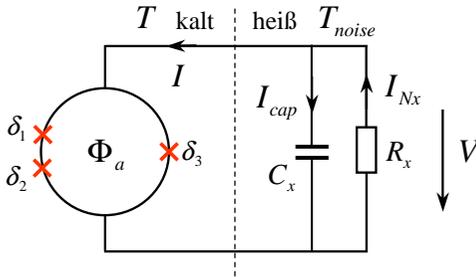
mit Mittelwert Null und Standardabweichung  $I_{noise}$ . In der Abbildung ist willkürlich der Fall  $I_{noise} = I_0$  dargestellt. In Abb. 6.16 ist das an Pro-



**Abb. 6.16:** Probe C232S33 mit nomineller kritischer Stromdichte  $j_c = 100 \text{ A/cm}^2$ . Im Diagramm links ist die gemessene Spannung gegen die Standardabweichung  $I_{noise}$  des antreibenden Rauschstroms aufgetragen. Der externe Fluß beträgt  $\Phi_a/\Phi_0 = 1/4$ . Im Diagramm rechts ist die Messung in normierten Einheiten angegeben (offene Symbole) zusammen mit einer simulierten Abhängigkeit (durchgezogene Linie). Die Parameter sind  $\Gamma = 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $\beta_C = \beta_L = 0.1$ ,  $s = 1/2$  und  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ .

be C232S33 erhaltene Meßergebnis dargestellt. Die Abschneidefrequenz ist klein gegen die charakteristische Frequenz des Systems  $f_c = 6.6 \text{ GHz}$ , so daß der adiabatische Grenzfall sehr gut erreicht ist. Aufgetragen ist links die gemessene Spannung gegen die Standardabweichung  $I_{noise}$ . Dabei beträgt der externe Fluß  $\Phi_a/\Phi_0 = 1/4$ . Es fällt auf, daß schon für sehr kleine Standardabweichungen eine Spannung abfällt. Dies ist eine Folge der Tatsache, daß eine Gaußverteilung keine scharfe Begrenzung besitzt, wie etwa die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Verteilung der momentanen Werte eines harmonischen Signals. Für größere Standardabweichungen steigt die Spannung schnell an und erreicht ein Maximum, das bei etwa  $1.2 \mu\text{V}$  liegt. Für sehr große  $I_{noise}$  geht die Spannung gegen Null. Dann ist die Verteilung des Rauschstromes so breit, daß die Asymmetrie des Potentials keine Rolle mehr spielt. Im Diagramm auf der rechten Seite ist die gemessene Abhängigkeit noch einmal dargestellt (offene Symbole), allerdings in normierten Einheiten. Zusätzlich ist eine simulierte Abhängigkeit eingezeichnet, die in Abb. 4.22 bereits gezeigt wurde. Der Rauschparameter hat den Wert  $\Gamma = 2 \cdot 10^{-2}$  und ist damit etwas größer als der für diese Probe bestimmte Rauschparameter  $\Gamma = 1.5 \cdot 10^{-2}$ . Wie man jedoch in Abb. 4.22 gesehen hat,

ist die Abhängigkeit der  $V(I_{noise})$ -Kurven vom Rauschparameter nicht sehr stark. Der externe Fluß beträgt ebenso wie in der Messung  $\phi_a = 1/4$  und die übrigen Parameter sind  $\beta_C = \beta_L = 0.1$ ,  $s = 1/2$ , sowie  $\alpha = \alpha_C = 0.01$ . Wie man sieht, ergibt sich eine hervorragende Übereinstimmung zwischen experimentellem Befund und der simulierten Kurve. Mit dieser Messung ist, vermutlich erstmals, der experimentelle Nachweis eines Ratscheneffekts bei stochastischem Antrieb gelungen.



**Abb. 6.17:** Gedankenexperiment: Die SQUID-Ratsche befindet sich in einem Wärmebad bei niedriger Temperatur. Die Ratsche wird angetrieben durch den Rauschstrom eines Widerstandes  $R_x$ , der sich auf einer höheren Temperatur befindet. Die Kapazität  $C_x$  bildet zusammen mit dem Widerstand ein Tiefpaßfilter.

Um die Bedeutung der Größe  $I_{noise}$  besser zu verstehen, ist es hilfreich das in Abb. 6.17 skizzierte Gedankenexperiment zu betrachten. Die SQUID-Ratsche wird angetrieben durch den Strom  $I$ . Dieser Strom wird erzeugt durch den Rauschstrom  $I_{Nx}$  eines Widerstandes  $R_x$ , der sich auf einer Temperatur  $T_{noise}$  befindet, die größer ist als die Temperatur  $T$ , bei der das SQUID betrieben wird. Das Spektrum des Rauschstroms  $I_{Nx}$  ist weiß, mit der spektralen Rauschleistungsdichte  $S_{noise} = 4k_B T_{noise}/R_x$ . Die eingezeichnete Kapazität  $C_x$  wird zunächst ignoriert. Dann gilt für den Strom  $I$ , der durch das SQUID fließt  $I = I_{Nx}$  und damit besitzen  $I$  und  $I_{Nx}$  dieselben spektralen Eigenschaften. In die Bewegungsgleichungen (3.60) (oder auch (3.65)) gehen die Rauschströme der Shuntwiderstände  $I_{Ni}$  ( $i = 1, 2$  bzw.  $i = 1, 2, 3$  für Gl. (3.65)) additiv zum Biasstrom ein und besitzen ebenfalls ein weißes Spektrum. Weil in diesem Fall sowohl der Biasstrom  $I$ , als auch die Rauschströme der Shuntwiderstände  $I_{Ni}$  ein weißes Spektrum besitzen und außerdem in die Bewegungsgleichung nur die Summen  $I + I_{Ni}$  eingehen, kann man die Summen durch jeweils *einen* neuen Rauschstrom ersetzen. Dieser neue Rauschstrom beschreibt dann nur noch *ein* Wärmebad und sonst keinen Antrieb. Der zweite Hauptsatz verbietet die Gewinnung von Arbeit aus nur einem Wärmebad. Obwohl in dieser Situation zwei Wärmebäder unterschiedlicher Temperatur existieren, kann die SQUID-Ratsche per Kon-

struktion keine Arbeit leisten. Das ändert sich bei Berücksichtigung der Kapazität  $C_x$ . Es ist dann  $I = I_{Nx} - I_{cap}$  und  $I_{cap} = C_x \dot{V}$ , sowie  $V = -R_x I_{Nx}$ . Zusammengenommen führt das auf

$$I = R_x C_x \dot{I}_{Nx} + I_{Nx}. \quad (6.2)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung für ein Tiefpaßfilter (vgl. (4.2)), mit der Abschneidefrequenz (oder Bandbreite)  $f_0 = 1/(R_x C_x)$ . Die SQUID-Ratsche wird in diesem Fall mit einem Rauschstrom  $I$  gespeist, der ein Spektrum besitzt wie in Abb. 6.15 dargestellt. Seine Amplitude (genauer die Standardabweichung der Amplitudenverteilung) beträgt

$$I_{noise} = \sqrt{S_{noise} f_0} = \sqrt{\frac{4k_B T_{noise}}{R_x} f_0}, \quad (6.3)$$

was umgeformt

$$T_{noise} = \frac{I_{noise}^2 R_x}{4k_B f_0} \quad (6.4)$$

ergibt. Analog zum Rauschparameter  $\Gamma$  (für das Bad bei der kleineren Temperatur  $T$ ) ist der Rauschparameter  $\Gamma_{noise}$  für das Bad bei der höheren Temperatur  $T_{noise}$  definiert:

$$\Gamma_{noise} = \frac{2\pi k_B T_{noise}}{I_0 \Phi_0} \quad (6.5)$$

Den Ausdruck (6.4) für  $T_{noise}$  eingesetzt und etwas umgeformt ergibt

$$\Gamma_{noise} = \left( \frac{i_{noise}}{2} \right)^2 \frac{R_x}{R} \frac{\omega_c}{f_0}, \quad (6.6)$$

wobei  $i_{noise} = I_{noise}/I_0$  und  $\omega_c$  die charakteristische Frequenz bedeuten. Außerdem gilt für das Verhältnis der beiden Badtemperaturen

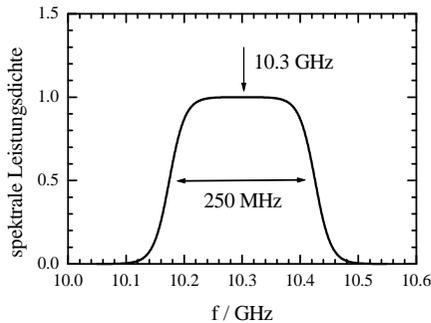
$$\frac{T_{noise}}{T} = \frac{\Gamma_{noise}}{\Gamma} = \left( \frac{i_{noise}}{2} \right)^2 \frac{R_x}{R} \frac{\omega_c}{f_0} / \Gamma \quad (6.7)$$

Im Experiment ist an Stelle des "heißen" Teils aus Abb. 6.17 ein Rauschgenerator mit  $f_0 = 50$  MHz verwendet worden. Der Widerstand  $R_x$  in Abb. 6.17 besitzt dabei keine Entsprechung im Experiment. Um zu einer Abschätzung für  $T_{noise}$  und  $\Gamma_{noise}$  zu gelangen, wird der Einfachheit wegen  $R_x = R \approx 1.1 \Omega$  (vgl. Tab. 6.1) gesetzt. Für  $I_{noise} = I_0$  bzw.  $i_{noise} = 1$  erhält man dann  $T_{noise} = 62 \cdot 10^3$  K und  $\Gamma_{noise} = 209$ , sowie  $T_{noise}/T = 15 \cdot 10^3$ . Das

Verhältnis  $T_{noise}/T = 15 \cdot 10^3$  gibt an, daß im Experiment einer Rauschstromamplitude  $I_{noise} = I_0$  eine äquivalente Temperatur entspricht, die 15000 mal größer ist, als die Temperatur bei der die SQUID-Ratsche arbeitet. Dieser sehr große Wert liegt vor allem an der sehr kleinen Bandbreite  $f_0$ . Wie soeben erläutert, läßt sich die Bandbreite nicht beliebig steigern, da sonst die SQUID-Ratsche von effektiv weißem Rauschen getrieben wird und dann keine Arbeit mehr verrichten kann.

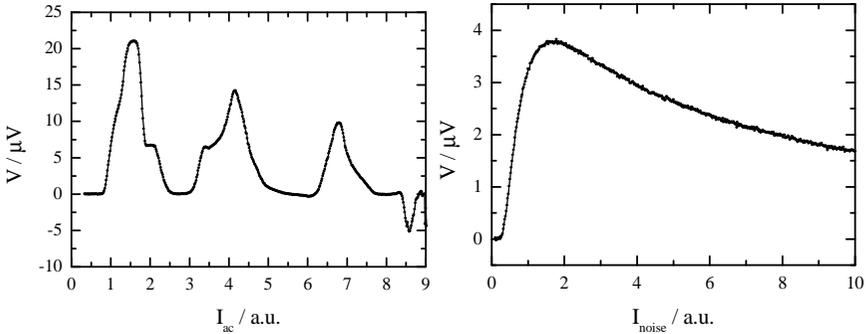
### 6.4.2 Nichtadiabatischer Fall

In diesem Abschnitt wird ein Messergebnis vorgestellt, bei dem der Antrieb stochastisch und nichtadiabatisch ist. Der Rauschstrom hat dabei eine



**Abb. 6.18:** Spektrale Leistungsdichte des antreibenden Stromes.

spektrale Leistungsdichte, wie in Abb. 6.18 dargestellt. Ausgegangen wurde von einem niederfrequenten Rauschsignal wie in Abb. 6.15 dargestellt, nun aber mit einer Abschneidefrequenz von 125 MHz. Dieses Signal wurde als Eingangssignals für einen Mischer verwendet. Das zweite Eingangssignal des Mixers ist monochromatisch mit der Frequenz  $f_{center} = 10.3$  GHz. Im Mischer werden beide Signale multipliziert. Dadurch entstehen aus jeder Komponente des Rauschsignals bei einer Frequenz  $f_x$  zwei neue Komponenten bei den Frequenzen  $f_{center} + f_x$  und  $f_{center} - f_x$ . Am Ausgang des Mixers erscheint dann ein Rauschspektrum von 10.175 GHz bis 10.425 GHz. Leider führt der Einsatz des Mixers zu einer zusätzlichen Dämpfung im internen Signalweg des Generators, weshalb sich die Ausgangsleistung des Generators im Mischerbetrieb um 10 dB reduziert. Dadurch sind die erreichbaren Mikrowellenströme in der Regel zu klein um einen Effekt zu beobachten. Bei einigen wenigen Trägerfrequenzen  $f_{center}$  jedoch, ist die Dämpfung des gesamten Signalwegs gering genug um einen Effekt zu sehen. In Abb. 6.19 ist



**Abb. 6.19:** Probe C132S33 mit nomineller kritischer Stromdichte  $1 \text{ kA/cm}^2$ . Links zum Vergleich eine Messung mit harmonischem Antrieb bei der Frequenz  $f = 10.3 \text{ GHz}$ . Rechts ist die gemessene Spannung gegen die Standardabweichung  $I_{noise}$  des antreibenden Rauschstroms aufgetragen. Der externe Fluß beträgt  $\Phi_a/\Phi_0 = 1/4$ .

zum Vergleich auf der linken Seite eine Messung an Probe C132S33 gezeigt mit monochromatischem Antrieb. Der externe Fluß beträgt  $\Phi_a/\Phi_0 = 1/4$ . Diese Messung ist sehr ähnlich zu der Messung aus Abb. 6.12 bei 10 GHz (ganz unten) da die Antriebsfrequenzen fast gleich sind. Auf der rechten Seite ist das Messergebnis dargestellt, das unter Verwendung der Mischeinheit erhalten wurde. Hier ist die Spannung gegen die Stärke  $I_{noise}$  des Rauschsignals am Eingang des Mixers aufgetragen. Die Spannung steigt an, erreicht eine maximale Spannung von etwa  $4 \mu\text{V}$  und fällt dann wieder ab. Obwohl die Bandbreite des Rauschens im Vergleich zu seiner Mittenfrequenz gering ist, zeigt die Kurve keinerlei Strukturen. Numerisch gewonnene Vorhersagen zu diesem Typ von Antrieb fehlen bislang.

## Kapitel 7

# Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden Ratscheneffekte in supraleitenden Quanteninterferenzdetektoren, sowohl an Hand numerischer Simulationsrechnungen als auch experimentell untersucht. Das Interesse an Ratschen ist durch Fragestellungen aus der Biologie ausgelöst worden. So wird der Ratscheneffekt als Erklärung diskutiert, wie in biologischen Systemen gerichtete Bewegung in Abwesenheit einer gerichteten makroskopischen Kraft entstehen kann. Messungen an biologischen Systemen zur Überprüfung von theoretischen Vorhersagen sind jedoch schwierig. Hier dienen Ratschen auf der Basis supraleitender Bauelemente (Josephson-Ratschen) als Modellsysteme. Josephson-Ratschen sind in diesem Zusammenhang besonders interessant, da hier wesentliche Größen leicht experimentell zugänglich sind. Insbesondere entspricht aufgrund der zweiten Josephson-Beziehung der mittleren Geschwindigkeit eine Gleichspannung, die leichter zu messen ist, als die Geschwindigkeit etwa eines molekularen Motors. Auch die antreibende Kraft läßt sich leichter kontrollieren, da sie dem elektrischen Strom entspricht, mit dem das SQUID gespeist wird. Ein wesentliches Merkmal von Ratschensystemen ist die Quantisierung der mittleren Geschwindigkeit bei monochromatischem, hochfrequentem Antrieb. Diese Quantisierung ist eine Folge der Periodizität und unterscheidet den Ratscheneffekt von einem reinen Gleichrichtungseffekt, wie etwa in einer Halbleiterdiode. Bei Josephson-Ratschen führt diese Quantisierung zu Spannungsstufen, deren Höhe von der Frequenz des antreibenden Wechselstroms und der Periode des Potentials abhängt.

Zapata *et al.* [48] machten 1996 einen Vorschlag für eine SQUID-Ratsche,

die im Gegensatz zu einem dc SQUID (zwei Kontakte) drei Josephson Kontakte beinhaltet. Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit war die experimentelle Realisierung und Verifikation der Funktionsweise dieser Anordnung. Ausgangspunkt der Arbeit von Zapata *et al.* war die Idee, auf diese Art und Weise eine Josephson-Ratsche realisieren zu können, die einer eindimensionalen Dynamik genügt. Im Verlauf der Arbeit zeigte sich, daß dies nur unter gewissen Einschränkungen möglich ist.

Tatsächlich wurden während dieser Arbeit zwei verschiedene Varianten einer Drei-Kontakt SQUID-Ratsche behandelt. Bei der von Zapata *et al.* propagierten Variante, ist jeder Josephson-Kontakt mit einem individuellen Shunt-Widerstand versehen. Diese Anordnung wird innerhalb dieser Arbeit als I-SQUID (kurz für individually shunted junction SQUID) bezeichnet. In [48] wird jedoch nur der Grenzfall betrachtet, in dem sich das I-SQUID eindimensional verhält. Das Verhalten des I-SQUIDs ist im Verlauf dieser Arbeit analytisch und numerisch untersucht worden unter Berücksichtigung der vollständigen, d.h. dreidimensionalen Dynamik. Die zweite Variante der untersuchten Drei-Kontakt SQUIDs besitzt im linken Arm ebenso zwei Josephson-Kontakte, die aber jetzt mit einem gemeinsamen Shunt-Widerstand versehen sind. Diese zweite Variante wird als C-SQUID (kurz für commonly shunted junction SQUID) bezeichnet. C-SQUIDs sind im Verlauf dieser Arbeit nicht nur analytisch und numerisch, sondern auch experimentell untersucht worden.

Um für die beiden Varianten von SQUID-Ratschen zu theoretischen Vorhersagen zu gelangen, wurden zunächst die Gleichungen aufgestellt, die die vollständige Dynamik der beiden Systeme beschreiben. Diese Beschreibung basiert auf dem RCSJ-Modell, in das vereinfachende Annahmen eingehen, die alle gut erfüllt sind. Das RCSJ-Modell liefert in beiden Fällen ein System drei gekoppelter Bewegungsgleichungen für die drei Phasendifferenzen der Josephson Kontakte. Die so gewonnenen Bewegungsgleichungen wurden zunächst analytisch auf ihre Symmetrieeigenschaften hin untersucht. Daraus folgen Bedingungen, wann die beiden Varianten von SQUIDs als Ratsche betrieben werden können, d.h. wann überhaupt ein Ratscheneffekt zu erwarten ist. Ein sich daran anschließender Teil der Arbeit widmet sich der Frage, unter welchen Näherungen sich die Dimension der Dynamik reduzieren läßt. So läßt sich im Grenzfall kleiner Ringinduktivität zumindest eine Dimension eliminieren, wodurch die Verhältnisse deutlich übersichtlicher werden. Dieser Grenzfall läßt sich auch experimentell leicht erreichen. Danach wurde der Frage nachgegangen wie die Parameter gewählt werden müssen um einen optimalen Arbeitspunkt zu garantieren. Damit ist vor allem die Frage nach maximaler Asymmetrie des zugrunde liegenden Potentials gemeint.

In einem sich daran anschließenden Kapitel wurden beide Systeme numerisch untersucht. Wie vorhergesagt, verhält sich ein I-SQUID wie eine stark gedämpfte, eindimensionale Ratsche, allerdings nur in dem Grenzfall, daß die kritischen Ströme der beiden Kontakte im linken Arm exakt identisch sind. Das ist strenggenommen ein in der Praxis nie zu erreichender Grenzfall. Sind die kritischen Ströme auch nur leicht verschieden, wird unweigerlich auch eine zweite Dimension genutzt. Einen Ratscheneffekt gibt es nach wie vor, jedoch kommt es zu einer Halbierung der Höhe der bereits erwähnten Spannungstufen bei nicht-adiabatischem Antrieb. Darüber hinaus ändert sich das Verhalten des I-SQUIDS gegenüber dem eindimensionalen Grenzfall qualitativ nicht, da die Bewegung in die zweite Richtung ebenso stark gedämpft verläuft, wie die Bewegung in die andere Richtung. Dies ändert sich, wenn man zum C-SQUID übergeht. Der eindimensionale Grenzfall läßt sich ebensowenig erreichen, wie im Falle des I-SQUIDS. Genau wie dort führt das zu einer Halbierung der Höhe der erzeugten Spannungstufen. Anders als dort ist jedoch die Bewegung in die zweite Richtung per Konstruktion in jedem Falle stark ungedämpft. Da beide Richtungen miteinander gekoppelt sind und obwohl die zweite Richtung senkrecht steht zu der Richtung in der Transport gemessen wird, hat das weitreichende Konsequenzen für das Verhalten insgesamt. So werden die erwähnten Spannungstufen nur noch in einem kleinen Intervall von Antriebsamplituden beobachtet. Für größere Antriebsamplituden können keine Stufen beobachtet werden. Diese sehr substantielle Änderung des Verhaltens wurde im Rahmen dieser Arbeit numerisch erhalten und experimentell verifiziert. Mit Hilfe einer stroboskopischen Betrachtung konnte numerisch gezeigt werden, daß in diesem Fall zwar immer noch Zustände, die zu Stufen führen bevorzugt werden, jedoch werden bei festgehaltener Amplitude in unregelmäßiger Reihenfolge Zustände eingenommen, die zu Stufen unterschiedlicher Höhe führen. Da über alle diese Zustände gemittelt wird, werden keine Stufen, sondern ein mit der Antriebsamplitude oszillierendes Verhalten beobachtet.

Experimentell realisiert worden sind C-SQUIDS mit zwei um eine Größenordnung verschiedenen kritischen Stromdichten. Im experimentellen Teil konnte gezeigt werden, daß die Bestimmung wesentlicher Parameter durch Messung der dc-Eigenschaften sehr gut gelingt. So gibt speziell die Abhängigkeit des kritischen Stromes vom externen magnetischen Fluß Auskunft über die Asymmetrien in den kritischen Strömen der drei Kontakte, sowie über die normierte Ringinduktivität. Die Messungen mit harmonischem Antrieb im adiabatisch langsamen Grenzfall haben bestätigt, daß die SQUIDS als Ratsche betrieben werden können. Der beobachtete Ratscheneffekt ist sehr deutlich, da die erzeugte Spannung bis zu 20% der charakteri-

stischen Spannung der Josephson Kontakte beträgt. Die wichtigste Signatur ist die Modulation der beobachteten Spannung mit dem externen magnetischen Fluß, da der externe Fluß die Asymmetrie des Potentials bricht bzw. moduliert. Im nicht-adiabatischen Fall wurden die SQUIDs mit einem Wechselstrom bei Frequenzen im Mikrowellenbereich angetrieben. Die Messungen haben für kleine Amplituden Spannungstufen der vorhergesagten Höhe gezeigt. Für größere Amplituden wurden die ebenfalls vorhergesagten Oszillationen beobachtet. Schließlich wurde ein Ratscheneffekt an einer stochastisch angetriebenen Ratsche demonstriert. Der dabei gemessene Effekt stimmt ausgezeichnet mit dem numerisch erhaltenen Resultat überein. Mit dieser Messung ist, vermutlich erstmals, der experimentelle Nachweis eines Ratscheneffekts bei stochastischem Antrieb gelungen.

Für die Zukunft ist die experimentelle Realisierung des I-SQUIDs sehr interessant, um die im Rahmen dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse bezüglich des I-SQUIDs experimentell zu verifizieren. Interessant wäre ebenso, die Dämpfung des Signalwegs zu reduzieren um so Rauschantrieb bei hohen Frequenzen untersuchen zu können. Dabei sind besonders breitbandigere Formen von Rauschen von Interesse, was den Einsatz einer entsprechenden Rauschquelle erfordert. Dazu sind auch Vorhersagen numerischer Art für den Fall von nichtadiabatischem, stochastischem Antrieb von Interesse. Bisher sind die SQUID-Ratschen stets unbelastet betrieben worden, d.h. die generierte dc-Spannung führt zu keinem elektrischen Strom durch einen Verbraucher. Mit Hilfe numerischer Simulationen könnte der Frage nachgegangen werden, welche Änderungen im Verhalten durch die Anwesenheit eines Verbrauchers entsteht. Dabei könnten auch Fragen nach dem optimalen Arbeitspunkt und dem besten Design (C- oder I-SQUID) behandelt werden. Ebenso wäre die Abhängigkeit der Stärke des Ratscheneffekts vom Temperaturunterschied zwischen Verbraucher und SQUID-Ratsche sehr interessant. Betreibt man die SQUIDs bei tieferen Temperaturen, sollte es möglich sein, den Übergang von thermischer Ratsche zur Quantenratsche zu beobachten. Dies ist allerdings mit Schwierigkeiten verbunden, da die dissipierte Leistung realistischen Kühlleistungen sehr nahe kommt.

# Literaturverzeichnis

- [1] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics* volume I chapter 46 (Ratchet and Pawl). Addison-Wesley Reading, MA (1966).
- [2] M. V. Smoluchowski. ‚Experimentell Nachweisbare, der Üblichen Thermodynamic Widersprechende Molekularphänomene‘. *Phys. Z.* **XIII**, 1069 (1912).
- [3] M. O. Magnasco. ‚Forced Thermal Ratchets‘. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1477 (1993).
- [4] C. R. Doering, W. Horsthemke, and J. Riordan. ‚Nonequilibrium Fluctuation-Induced Transport‘. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2984 (1994).
- [5] R. D. Astumian and M. Bier. ‚Fluctuation Driven Ratchets: Molecular Motors‘. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1766 (1994).
- [6] P. Reimann. ‚Brownian motors: Noisy transport far from equilibrium‘. *Physics Reports* **361**, 57 (2002).
- [7] J. Maddox. ‚Making Models of Muscle Contraction‘. *Nature* **365**, 203 (1993).
- [8] J. Maddox. ‚Directed Motion from Random Noise‘. *Nature* **369**, 181 (1994).
- [9] S. Leibler. ‚Moving Forward Noisily‘. *Nature* **370**, 412 (1994).
- [10] G. Oster. ‚Darwin’s Motors‘. *Nature* **417**, 25 (2002).
- [11] E. Frey. ‚Physikalische Fragestellungen aus der Zellbiologie‘. *Phys. Bl.* **2**, 63–68 (2001).

- [12] R. D. Astumian. ‚Making Molecules Into Motors‘. *Scientific American* page 57 July 2001.
- [13] K. Svoboda, Ch. F. Schmidt, B. J. Schnapp, and S. M. Block. ‚Direct Observation of Kinesin Stepping by Optical Trapping Interferometry‘. *Nature* **365**, 721 (1993).
- [14] J. T. Finer, R. M. Simmons, and J. A. Spudich. ‚Single Myosin Molecule Mechanics: Piconewton Forces and Nanometre Steps‘. *Nature* **368**, 113 (1994).
- [15] K. Kitamura, M. Tokunaga, A. H. Iwane, and T. Yanagida. ‚A single myosin head moves along an actin filament with regular steps of 5.3 nanometres‘. *Nature* **397**, 129 (1999).
- [16] J. Rousselet, L. Salome, A. Ajdari, and J. Prost. ‚Directional motion of brownian particles by a periodic asymmetric potential‘. *Nature* **370**, 446 (1994).
- [17] L. P. Faucheux, L. S. Bourdieu, P. D. Kaplan, and A. J. Libchaber. ‚Optical Thermal Ratchet‘. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1504 (1995).
- [18] A. Van Oudenaarden and S. G. Boxer. ‚Brownian Ratchets: Molecular Separations in Lipid Bilayers Supported on Patterned Arrays‘. *Science* **285**, 1046 (1999).
- [19] S. Matthias and F. Müller. ‚Asymmetric Pores in a Silicon Membrane Acting as Massively Parallel Brownian Ratchets‘. *Nature* **424**, 53–57 (2003).
- [20] C. Mennerat-Robilliard, D. Lucas, S. Guibal, J. Tabosa, C. Jurczak, J. Y. Courtois, and G. Grynberg. ‚Ratchet for Cold Rubidium Atoms: The Asymmetric Optical Lattice‘. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 851 (1999).
- [21] H. Linke, W. Sheng, A. Löfgren, Hongqi Xy, P. Omling, and P. E. Lindelof. ‚A Quantum Dot Ratchet: Experiment and Theory‘. *Europhys. Lett.* **44**, 341 (1998).
- [22] H. Linke, T. E. Humphrey, A. Löfgren, A. O. Sushkov, R. Newbury, R. P. Taylor, and P. Omling. ‚Experimental Tunneling Ratchets‘. *Science* **286**, 2314 (1999).
- [23] E. M. Höhberger, A. Lorke, W. Wegscheider, and M. Bichler. ‚Adiabatic Pumping of Two-Dimensional Electrons in a Ratchet-Type Lateral Superlattice‘. *Appl. Phys. Lett.* **78**, 2905 (2001).

- [24] H. Linke. „Special Issue on ”Ratchets and Brownian Motors: Basics, Experiments, and Applications”‘. *Appl. Phys. A* **75**, 167–352 (2002). guest editor.
- [25] V. M. Fridkin. *Photoferroelectrics*. Springer Series in Solid-State Sciences 9. Springer-Verlag (1979).
- [26] A. M. Glass, D. von der Linde, and T. J. Negran. „High-voltage bulk photovoltaic effect and the photorefractive process in  $\text{LiNbO}_3$ ‘. *Appl. Phys. Lett.* **25**, 233 (1974).
- [27] E. Goldobin, A. Sterck, and D. Koelle. „Josephson vortex in a ratchet potential: Theory‘. *Phys. Rev. E* **63** (2001).
- [28] G. Carapella. „Relativistic flux quantum in a field-induced deterministic ratchet‘. *Phys. Rev. B* **63**, 054515 (2001).
- [29] G. Carapella and G. Costabile. „Ratchet Effect: Demonstration of a Relativistic Fluxon Diode‘. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 077002 (2001).
- [30] G. Carapella, G. Costabile, N. Martucciello, M. Cirillo, R. Latempa, A. Polcari, and G. Filatrella. „Experimental Realization of a Relativistic Fluxon Ratchet‘. *Physica C* **382**, 337–341 (2002).
- [31] A. Sterck. *Ratscheneffekt in supraleitenden Quanteninterferenzdetektoren und annularen Josephson-Kontakten*. Diplomarbeit, Universität zu Köln (2001).
- [32] E. Goldobin, A. Sterck, T. Gaber, D. Koelle, and R. Kleiner. „Dynamics of Semifluxons in Nb Long Josephson  $0-\pi$  Junctions‘. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 057005 (2004).
- [33] M. Beck, E. Goldobin, M. Neuhaus, M. Siegel, R. Kleiner, and D. Koelle. „High Efficiency Deterministic Josephson Vortex Ratchet‘. *Phys. Rev. Lett.* (*accepted*) (2005).
- [34] T. Gaber, E. Goldobin, A. Sterck, R. Kleiner, D. Koelle, M. Siegel, and M. Neuhaus. „Non-Ideal Artificial Phase Discontinuity in Long Josephson  $0-\kappa$ -Junctions‘. *Phys. Rev. B* (*accepted*) (2005).
- [35] F. Falo, P. J. Martinez, J. J. Mazo, and S. Cilla. „Ratchet Potential for Fluxons in Josephson -Junction Arrays‘. *Europhys. Lett.* **45**, 700 (1999).

- [36] F. Falo A, P.J. Martínez, J.J. Mazo, T.P. Orlando, K. Segall, and E. Trías. ‚Fluxon ratchet potentials in superconducting circuits‘. *Appl. Phys. A* **75**, 263 (2002).
- [37] D. E. Shalóm and H. Pastoriza. ‚Vortex Motion Rectification in Josephson Junction Arrays with a Ratchet Potential‘. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 177001 (2005).
- [38] J. F. Wambaugh, C. Reichhardt, C. J. Olson, F. Marchesoni, and F. Nori. ‚Superconductor Fluxon Pump Based on a Two-Dimensional Geometric Fluctuation-Induced Rectifier‘. *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5106 (1999).
- [39] C. J. Olson, C. Reichhardt, B. Janko, and F. Nori. ‚Collective Interaction-Driven Ratchet for Transporting Flux Quanta‘. *Phys. Rev. Lett* **87**, 177002 (2001).
- [40] J. E. Villegas, Sergey Savel’ev, Franco Nori, E. M. Gonzalez, J. V. Anguita, R. Arcía, and J. L. Vicent. ‚A Superconducting Reversible Rectifier That Controls the Motion of Magnetic Flux Quanta‘. *Science* **302**, 1188–1193 (2003).
- [41] Hans Hilgenkamp, Victor V. Moshchalkov, and Peter Kes. ‚Enhanced: Flux Quanta on the Move‘. *Science* **302**, 1159–1160 (2003).
- [42] J. VandeVondel, C. C. de Souza Silva, B. Y. Zhu, M. Morelle, and V. V. Moshchalkov. ‚Vortex Rectification Effects in Films with Periodic Asymmetric Pinning‘. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 057003 (2005).
- [43] John Clarke and Alex I. Braginski (editors). *The SQUID Handbook: Volume 1: Fundamentals and Technology of SQUIDs and SQUID Systems*. Wiley-VCH Verlag GmbH, Weinheim (2004).
- [44] S. Weiss, D. Koelle, J. Müller, R. Gross, and K. Barthel. ‚Ratchet effect in dc SQUIDs‘. *Europhys. Lett.* **51**, 499 (2000).
- [45] A. Th. A. M. de Waele and R. De Bruyn Ouboter. ‚Quantum-Interference Phenomena in Point Contacts Between Two Superconductors‘. *Physica* **41**, 225 (1969).
- [46] S. Weiss. *Ratscheneffekt in supraleitenden Quanteninterferenzdetektoren*. Dissertation, Universität zu Köln (2000).
- [47] A. Sterck, S. Weiss, and D. Koelle. ‚SQUID Ratchets: Basics and Experiments‘. *Appl. Phys. A* **75**, 253 (2002).

- [48] I. Zapata, R. Bartussek, F. Sols, and P. Hänggi. ‚Voltage Rectification by a SQUID Ratchet‘. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2292 (1996).
- [49] R. Bartussek and P. Hänggi. ‚Brownsche Motoren‘. *Phys. Bl.* **51**, 506 (1995).
- [50] P. Hänggi and R. Bartussek. ‚Nonlinear Physics of Complex Systems‘. In J. Parisi, S. C. Müller, and W. Zimmermann, editors, *Nonlinear Physics of Complex Systems* volume 476 of *Lecture Notes in Physics* chapter Brownian Rectifiers: How to Convert Brownian Motion Into Directed Transport, page 294. Springer Berlin (1996).
- [51] F. Jülicher, A. Adjari, and J. Prost. ‚Modeling Molecular Motors‘. *Rev. Mod. Phys.* **69**, 1269 (1997).
- [52] M. Bier. ‚Brownian Ratchets in Physics and Biology‘. *Contemporary Physics* **38**, 371 (1997).
- [53] I. Zapata, J. Luczka, F. Sols, and P. Hänggi. ‚Tunneling Center as a Source of Voltage Rectification in Josephson Junctions‘. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 829 (1998).
- [54] C. R. Doering. ‚Randomly Rattled Ratchet‘. *Nuovo Cimento* **D17**, 685 (1995).
- [55] P. Jung, J. G. Kissner, and P. Hänggi. ‚Regular and Chaotic Transport in Asymmetric Periodic Potentials: Inertia Ratchets‘. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3436 (1996).
- [56] J. L. Mateos. ‚Chaotic transport and current reversal in deterministic ratchets‘. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 258 (2000).
- [57] Maria Barbi and Mario Salerno. ‚Phase locking effect and current reversals in deterministic underdamped ratchets‘. *Phys. Rev. E* **62**, 1988 (2000).
- [58] J.-D. Bao and Y.-Z. Zhuo. ‚Langevin Simulation Approach to a Two-Dimensional Coupled Flashing Ratchet‘. *Phys. Lett. A* **239**, 228 (1998).
- [59] G. A. Cecchi and M. O. Magnasco. ‚Negative Resistance and Rectification in Brownian Transport‘. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1968 (1996).

- [60] A. W. Ghosh and S. V. Khare. ‚Rotation in an Asymmetric Multidimensional Periodic Potential due to Colored Noise‘. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5243 (2000).
- [61] S. Cilla, F. Falo, and L. M. Floría. ‚Mirror symmetry breaking through an internal degree of freedom leading to directional motion‘. *Phys. Rev. E* **63**, 031110 (2001).
- [62] C. Kettner, P. Reimann, P. Hänggi, and F. Müller. ‚Drift Ratchet‘. *Phys. Rev. E* **61**, 312 (2000).
- [63] T. Dittrich and P. Hänggi. ‚Tunneln mit Antrieb‘. *Phys. Bl.* **51**, 956 (1995).
- [64] S. Jorda. ‚Quanten Auf der Kippratsche‘. *Phys. Bl.* **53**, 975 (1997).
- [65] P. Reimann, M. Grifoni, and P. Hänggi. ‚Quantum Ratchets‘. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 10 (1997).
- [66] P. Hänggi and P. Reimann. ‚Quantum Ratchets Reroute Electrons‘. *Physics World* page 21 March 1999.
- [67] H. Linke, H. Xu, A. Löfgren, W. Sheng, A. Svensson, P. Omling, P. E. Lindelof, R. Newbury, and R. P. Taylor. ‚Voltage and temperature limits for the operation of a quantum dot ratchet‘. *Physica B* **272**, 61 (1999).
- [68] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov. ‚Decay of the Supercurrent in Tunnel Junctions‘. *Phys. Rev. B* **28**, 6281 (1983).
- [69] V. Ambegaokar, U. Eckern, and G. Schön. ‚Quantum Dynamics of Tunneling Between Superconductors‘. *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1745 (1982).
- [70] A. O. Caldeira and A. J. Leggett. ‚Influence of Dissipation on Quantum Tunneling in Macroscopic Systems‘. *Phys. Rev. Lett.* **46**, 211 (1981).
- [71] R. Rouse, S. Han, and J. E. Lukens. ‚Observation of Resonant Tunneling Between Macroscopically Distinct Quantum Levels‘. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1614 (1995).
- [72] S. Han, R. Rouse, and J. E. Lukens. ‚Observation of Cascaded Two-Photon-Induced Transitions Between Fluxoid States of a SQUID‘. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1300 (2000).

- [73] Jonathan R. Friedman, Vijay Patel, W. Chen, S. K. Tolpygo, and J. E. Lukens. ‚Quantum superposition of distinct macroscopic states‘. *Nature* **406**, 43 (2000).
- [74] Caspar H. van der Wal, A. C. J. ter Haar, F. K. Wilhelm, R. N. Schouten, and C. J. P. M. ‚Quantum Superposition of Macroscopic Persistent-Current States‘. *Science* **290**, 773 (2000).
- [75] A. Wallraff, A. Lukashenko, C. Coqui, A. Kemp, T. Duty, and A. V. Ustinov. ‚Switching current measurements of large area Josephson tunnel junctions‘. *Rev. Scien. Inst.* **74** (2003).
- [76] A. Wallraff, A. Lukashenko, J. Lisenfeld, A. Kemp, M. V. Fistul, Y. Koval, and A. V. Ustinov. ‚Quantum Dynamics of a Single Vortex‘. *Nature* **425**, 155 – 158 (2003).
- [77] M. Grifoni, M.S. Ferreira, J. Peguiron, and J.B. Majer. ‚Quantum Ratchets with Few Bands Below the Barrier‘. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 146801 (2002).
- [78] J.B. Majer, J. Peguiron, M. Grifoni, M. Tussveld, and J. E. Mooij. ‚Quantum Ratchet Effect for Vortices‘. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 056802 (2003).
- [79] B. D. Josephson. ‚Possible new effects in superconductive tunneling‘. *Phys. Lett.* **1**, 251 (1962).
- [80] B. D. Josephson. ‚Supercurrents through barriers‘. *Adv. Phys.* **14**, 419 (1965).
- [81] K. K. Likharev. *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits*. Gordon and Breach, Philadelphia (1986.).
- [82] N. Grønbech-Jensen, P. S. Lomdahl, and M. R. Samuelsen. ‚Phase-locking of long annular Josephson junctions coupled to an external rf magnetic field‘. *Phys. Lett. A* **154**, 14 (1991).
- [83] N. Grønbech-Jensen, P. S. Lomdahl, and M. R. Samuelsen. ‚Bifurcation and chaos in a dc-driven long annular Josephson junction‘. *Phys. Rev. B* **43**, 12799 (1991).
- [84] N. Martucciello and R. Monaco. ‚Annular Josephson tunnel junction in an external magnetic field: The statics‘. *Phys. Rev. B* **53**, 3471 (1996).

- [85] W. C. Stewart. ‚Current-voltage characteristics of Josephson junctions‘. *Appl. Phys. Lett* **12**, 277 (1968).
- [86] D.E. McCumber. ‚Effect of ac impedance of dc voltage-current characteristics of Josephson junctions‘. *J. Appl. Phys.* **39**, 3113 (1968).
- [87] J. B. Johnson. ‚Thermal agitation of electricity in conductors‘. *Phys. Rev.* **32**, 97 (1928).
- [88] H. Nyquist. ‚Thermal agitation of electric charge in conductors‘. *Phys. Rev.* **32**, 110 (1928).
- [89] D. Koelle, R. Kleiner, F. Ludwig, E. Dantsker, and John Clarke. ‚High-transition-temperature superconducting quantum interference devices‘. *Rev. Mod. Phys.* **71**, 631–686 (1999).
- [90] J. Müller. *Asymmetrische Quanteninterferenzdetektoren aus Hochtemperatursupraleitern*. Diplomarbeit, Universität zu Köln (2000).
- [91] G. Engeln-Müllges and F. Reutter. *Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit C-Programmen*. BI Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich (1987).
- [92] W.H. Press. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press (1993).
- [93] C. D. Tesche and J. Clarke. ‚dc SQUID: noise and optimization‘. *J. Low Temp. Phys.* **29**, 301 (1977).
- [94] C. D. Tesche and J. Clarke. ‚dc SQUID: Current noise‘. *J. Low Temp. Phys.* **37**, 397 (1979).
- [95] M. Gurvitch, M. A. Washington, and H. A. Huggins. ‚High quality refractory Josephson tunnel junctions utilizing thin aluminum layers‘. *Appl. Phys. Lett.* **42**, 472 (1983).
- [96] M. B. Ketchen, W. J. Gallagher, A. W. Kleinsasser, S. Murphy, and J. R. Clem. ‚DC SQUID flux focuser‘. In H. D. Hahlbohm and H. Lübbig, editors, *SQUID’85, Superconducting Quantum Interference Devices and their Applications* Berlin (1985). Walter de Gruyter.
- [97] J. M. Jaycox and M. B. Ketchen. ‚Planar coupling scheme for ultra low noise dc SQUIDs‘. *IEEE Trans. Magn.* **17**, 400 (1981).
- [98] HYPRES Inc. Elmsford (NY), USA. <http://www.hypres.com>.

- [99] E. Goldobin. GoldExI. <http://www.geocities.com/goldexi>.

## Danksagung

Zuletzt kommt mir die angenehme Aufgabe zu, mich bei allen Menschen zu bedanken, die mich während meiner Promotion unterstützt und begleitet haben.

Bedanken möchte ich mich zuerst bei Prof. Reinhold Kleiner und Prof. Dieter Kölle, die die Arbeit am Lehrstuhl für Experimentalphysik II ermöglicht und stets unterstützt haben. Mein Dank an Prof. Kölle, der die Arbeit betreut hat, liegt mir besonders am Herzen. Prof. Kölle hat schon während seiner Zeit als Privatdozent in Köln meine Diplomarbeit betreut. Ihm nach Tübingen gefolgt zu sein empfinde ich als Gewinn und danke besonders für die ständige Unterstützung und Motivation.

Dr. Edward Goldobin kenne ich bereits seit den Tagen am FZ-Jülich. Ihm bin ich vor Allem dankbar für die ständige Weiterentwicklung seiner Meßsoftware GoldExI. Dr. Eric Sassier kenne ich ebenfalls seit der Zeit meiner Diplomarbeit in Köln und ist während seiner Zeit in Tübingen mein Zimmernachbar gewesen. Ich möchte ihm danken für die angenehme Atmosphäre und für Hilfe bei einigen Problemen die mit Rauschen zu tun haben. Dr. Michael Mößle möchte ich danken für seine Hilfe bei Problemen meßtechnischer Art und mit den Geräten für das Anfängerpraktikum.

Den anderen Doktoranden während der ersten Zeit, Dr. Rainer Straub, Dr. Tobias Clauß, Dr. Timo Nachtrab, und Virginia Oehmichen danke ich vor Allem für ihre ständige Hilfsbereitschaft und das angenehme Klima am Lehrstuhl. Einige der ehemaligen Diplomanden haben sich entschlossen am Lehrstuhl zu promovieren. Heiko Eitel, Matthias Kemmler, Christoph Back, Michael Wagenknecht, Dietmar Dönitz und Christian Gürlich wünsche ich dafür viel Erfolg und gutes Gelingen. Besonders bei Christoph möchte ich mich für die Kneipenabende und sein offenes Ohr bedanken. Meinem Zimmerkollegen des letzten Jahres, Tobias Gaber möchte ich besonders für die äußerst angenehme Atmosphäre im Büro bedanken. Vermissen werde ich die zahlreichen Diskussionen nicht nur physikalischer Themen, seinen Humor und seine Hilfsbereitschaft. Den ehemaligen Diplomanden Andreas Müller, Andreas Weber, Thorsten Schwarz, Petra Vergien, Katharina Erhardt, Maic Zaiser, Julian Ziegler, Markus Beck und Tobias Lang möchte ich ebenfalls für das angenehme Klima am Lehrstuhl danken.

Bei Hans Wener möchte ich mich bedanken für die kompetente und unkomplizierte Hilfe bei allen technischen Fragen. Den beiden Sekretärinnen

Marie-Luise Fenske und Marie-Annick Paquier sei gedankt für die Hilfe bei allen Dingen, die die Verwaltung betreffen. Den beiden Meistern der mechanischen Werkstatt, Manfred Kleinmann und Karlheinz Freudemann sei gedankt für die schnelle und unbürokratische Fertigung von Werkstücken aller Art. Elmar Bauer und Christoph Ruland danke ich für den Nachschub an flüssigem Helium. Herrn Schreier und den übrigen Mitarbeitern der Elektronikwerkstatt danke ich für die stets unkomplizierte Hilfe bei allen Problemen elektrischer Art.

Schließlich danke ich meinem Bruder Walther für die moralische Unterstützung, die beiden roten Autos, die erholsame Zeit während seiner Besuche in Tübingen und seine Hilfe bei Problemen mit IT und vielen anderen Dingen. Zuletzt bedanke ich mich bei meinen Eltern für ihre nicht nur moralische Unterstützung, ihr Interesse und ihren Langmut.