

Gebundene Andreev-Zustände
in d -Wellen-Supraleitern:
Einfluß von Grenzflächengeometrie
und Vortices

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften



der Fakultät für Mathematik
und Physik
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen



vorgelegt von
Christian Iniotakis
aus Jülich

2006

Tag der mündlichen Prüfung: 15.05.2006

Dekan: Professor Dr. P. Schmid

1. Berichterstatter: Professor Dr. N. Schopohl

2. Berichterstatter: Professor Dr. R. Kleiner

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Unkonventionelle Supraleitung und gebundene Zustände	4
1.2	Quasiklassische Theorie und Raytracing	6
2	Polygonale Grenzflächen und gebundene Zustände	11
2.1	Keile	11
2.2	Polygonale Grenzflächen	21
2.3	Einfluß von Vortices	25
3	Kreisförmige Grenzflächen und gebundene Zustände	31
3.1	Keile mit abgerundeten Ecken	31
3.2	Löcher	35
3.3	Flußführende Löcher unter Vortexeinfluß	36
4	Parabelförmige Grenzflächen und gebundene Zustände	42
4.1	Fokussierender weak link	42
5	Zusammenfassung	47
	Anhang	50
A.1	Reflexionseigenschaften von Keilen	50
A.2	Konforme Abbildungen und Phasenfaktor	51
A.3	Vortex vor einem Loch: magnetisches Vektorpotential	55
	Literaturverzeichnis	60

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Unkonventionelle Supraleitung und gebundene Zustände

Im Jahr 1986 entdeckten J.G. Bednorz und K.A. Müller Hochtemperatursupraleitung in Kupferoxid-Verbindungen der Zusammensetzung Ba-La-Cu-O und wurden dafür bereits 1987 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet¹. Rund zwanzig Jahre später wird auf dem Gebiet der supraleitenden Kuprate, deren bekannteste Vertreter heute aus den Materialklassen $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ und $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ stammen, immer noch intensiv geforscht. Während die eigentliche Ursache der Supraleitung in den Kupraten weiterhin umstritten ist, herrscht wenigstens über die Symmetrie der zugrundeliegenden Wechselwirkung weitestgehend Einigkeit. Nicht zuletzt aufgrund zahlreicher Experimente geht man heute davon aus, daß es sich bei den Hochtemperatursupraleitern um unkonventionelle $d_{x^2-y^2}$ -Wellen-Supraleiter handelt².

Im Vergleich zu konventionellen s -Wellen-Supraleitern wie etwa Nb, bei denen die Gapfunktion auf der Fermifläche als isotrop angesehen werden kann, ändert sich bei diesen unkonventionellen Supraleitern nicht nur der Betrag, sondern auch das Vorzeichen der Gapfunktion entlang der Fermifläche auf charakteristische Art und Weise.

Die Nullstellen der Gapfunktion lassen sich auf der zylindrischen Fermifläche der Kuprate in Form von Knotenlinien wiederfinden. Diese sogenannten line nodes bewirken, daß sich zahlreiche physikalische Eigenschaften eines d -Wellen-Supraleiters bei tiefen Temperaturen gemäß spezieller Potenzgesetze verhalten³. Prinzipiell ist damit eine Unterscheidung zu knotenlosen s -Wellen-Supraleitern möglich. Mit winkelaufgelöster Photoemissionsspektroskopie sind die Knoten in der Gapfunktion der Hochtemperatur-Supraleiter sogar direkt zu beobachten⁴. Alle diese Verfahren sind jedoch nicht phasensensitiv: Der d -Wellen-spezifische

¹ Siehe [3, 4, 5].

² Für einen Überblick siehe [6].

³ Siehe [6] sowie [7]. Für das Beispiel der magnetischen Eindringtiefe siehe etwa [8, 9, 10].

⁴ Siehe z.B. [11].

Vorzeichenwechsel der Gapfunktion wirkt sich bei ihnen nicht aus und kann somit experimentell auch nicht belegt werden.

Daneben gibt es allerdings eine Reihe von interessanten Phänomenen, die direkt auf der Änderung des Vorzeichens beruhen und in phasensensitiven Experimenten beobachtet werden können. So besteht in einem d -Wellen-Supraleiter etwa die Möglichkeit, durch geschickte Anordnungen eine π -junction zu erhalten und an Schnittpunkten dreier Korngrenzen einen stabilen magnetischen Fluß von einem halben Flußquant zu erzeugen⁵.

Ein weiterer spektakulärer Effekt tritt an geraden Grenzflächen von d -Wellen-Supraleitern auf. Dort kann innerhalb eines Bereichs von der Größenordnung einer Kohärenzlänge das spektrale Gewicht niederenergetischer Quasiteilchen-Anregungen stark erhöht sein⁶. Diese gebundenen Andreev-Zustände in der lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichte entsprechen einem deutlichen, bei Tunnelmessungen beobachtbaren Maximum der Leitfähigkeit⁷, welches auch als zero-bias conductance peak bezeichnet wird. An einer idealen glatten Grenzfläche ist das Auftreten dieses Effekts orientierungsabhängig, und die gebundenen Andreev-Zustände verschwinden, wenn ein Maximum der d -Wellen-Gapamplitude parallel zum Normalenvektor der Grenzfläche gerichtet ist⁸. Weist die Grenzfläche dagegen eine intrinsische Rauigkeit auf, so sind für jede Orientierung gebundene Andreev-Zustände vorhanden.

Während es zahlreiche theoretische Arbeiten über den Einfluß von intrinsischer Grenzflächenrauigkeit und Störstellenstreuung auf die gebundenen Andreev-Zustände gibt⁹, sind realistischere Grenzflächen mit Facetten endlicher Ausdehnung bislang nur sehr spärlich untersucht worden¹⁰. Dabei zeigen hochauflösende Tunnelexperimente an den Kupraten, wie sehr die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte von der konkreten Grenzflächengeometrie abhängt¹¹.

Bei der Existenz gebundener Andreev-Zustände an Grenzflächen von d -Wellen-Supraleitern handelt es sich um einen fundamentalen geometrischen Effekt. Umso erstaunlicher ist, daß bislang – nach Kenntnisstand des Verfassers – kein Versuch unternommen wurde, dem naheliegenden Einfluß auch nur einfachster nichtgerader Grenzflächengeometrien theoretisch nachzugehen¹².

In der vorliegenden Arbeit werden erstmals systematisch d -Wellen-Supraleiter mit nichttrivialen Grenzflächengeometrien untersucht, welche aus eckigen, runden und parabelförmigen Teilstücken zusammengesetzt sind. Dabei wird aufgezeigt, wie sehr das lokale Quasiteilchen-Spektrum und damit auch die Existenz gebundener Andreev-Zustände vom klassischen optischen Reflexionsverhalten der jeweiligen Grenzflächengeometrie abhängt.

⁵ Siehe [6]. Vergleiche auch [12] sowie [13, 14, 15, 16, 17].

⁶ Siehe [18] sowie [19].

⁷ Vergleiche auch [20]. Für eine Übersicht siehe [21],[22] sowie [23]. Einige exemplarische Messungen sind zudem in [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34] zu finden. Sieher ferner auch [35] sowie [36, 37, 38, 39].

⁸ Siehe auch [30].

⁹ Siehe etwa [40, 41, 42, 43, 44, 45].

¹⁰ Vergleiche [46] und [47].

¹¹ Siehe etwa [32] und [33].

¹² Für einen in einer Dimension beschränkten d -Wellen-Supraleiter zwischen zwei geradlinigen Grenzflächen siehe jedoch [19, 48, 49]. Die Arbeiten [50] und [51] beziehen sich aus einem gänzlich anderen Kontext auf dreieckige bzw. keilförmige Grenzflächengeometrien.

Ein äußeres Magnetfeld führt ebenso wie ein im Supraleiter gepinnter Abrikosov-Vortex zu einer Aufspaltung des spektralen Gewichts gebundener Andreev-Zustände an einer geraden Grenzfläche¹³. In dieser Dissertation wird dem Einfluß eines einzelnen Abrikosov-Vortex auf gebundene Andreev-Zustände auch für keilförmige und lochartige Grenzflächengeometrien, welche magnetischen Fluß führen, nachgegangen.

1.2 Quasiklassische Theorie und Raytracing

Zur Berechnung physikalischer Größen in einem inhomogenen Supraleiter bietet sich die quasiklassische Theorie an. Ihre grundlegenden Gleichungen wurden 1968 von Eilenberger publiziert¹⁴, weshalb sie auch als Eilenberger-Gleichungen bezeichnet werden. Die Lösung der Eilenberger-Gleichungen, der Eilenberger-Propagator \hat{g} , beinhaltet die physikalischen Größen des Supraleiters im thermodynamischen Gleichgewicht¹⁵, unter anderem also auch die gesuchten lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichten.

Die Eilenberger-Gleichungen sind nichtlineare partielle Differentialgleichungen, und ihre Lösung ist im allgemeinen nicht leicht zu erhalten. Mithilfe der sogenannten Riccati-Transformation lassen sich die Eilenberger-Gleichungen jedoch in eine für die numerische Berechnung sehr viel nützlichere Form bringen¹⁶. In dieser Darstellung kann der Eilenberger-Propagator \hat{g} am Ort \mathbf{r} folgendermaßen geschrieben werden:

$$\hat{g}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, \varepsilon_n) = \frac{-\pi i}{1+ab} \begin{pmatrix} 1-ab & 2ia \\ -2ib & -1+ab \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Hierbei vermittelt $\hat{\mathbf{k}}$ eine Parametrisierung der Fermifläche des Supraleiters, und ε_n bezeichnet die temperaturabhängigen, fermionischen Matsubara-Frequenzen

$$\varepsilon_n = (2n+1)\pi k_B T \quad (1.2)$$

Die Größen a und b auf der rechten Seite von Gl. (1.1) hängen implizit von \mathbf{r} , $\hat{\mathbf{k}}$ und ε_n ab. Um sie berechnen zu können, wird zunächst eine gerade Linie, die sogenannte Trajektorie, definiert, welche im Ortsraum durch den vorgegebenen Punkt \mathbf{r} verläuft. Ihre Richtung ist dabei durch die zu $\hat{\mathbf{k}}$ gehörende Fermigeschwindigkeit festgelegt. Somit ergibt sich als Parametrisierung der Trajektorie

$$\mathbf{r}_t(x) = \mathbf{r} + x\hat{\mathbf{v}}_F(\hat{\mathbf{k}}) \quad (1.3)$$

Die gesuchten a und b sind dann als Lösung eines Anfangswertproblems entlang der Trajektorie gegeben, bei dem die folgenden Differentialgleichungen zu erfüllen sind:

$$\begin{aligned} \hbar v_F \partial_x a(x) + (2\varepsilon_n - 2ie/c \langle \mathbf{v}_F, \mathbf{A} \rangle + \Delta^\dagger a(x))a(x) - \Delta &= 0 \\ \hbar v_F \partial_x b(x) - (2\varepsilon_n - 2ie/c \langle \mathbf{v}_F, \mathbf{A} \rangle + \Delta b(x))b(x) + \Delta^\dagger &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

¹³ Siehe etwa [25, 27, 29, 31]; vergleiche [2].

¹⁴ Siehe [52]; vergleiche auch die Publikation durch Larkin und Ovchinnikov [53].

¹⁵ Grundlagen und Vertiefungen zur quasiklassischen Theorie sind in [54, 55, 56, 57, 58, 59] zu finden.

¹⁶ Siehe [60, 61].

Hierbei gehen mit dem magnetischen Vektorpotential \mathbf{A} und der Gapfunktion Δ zwei Größen ein, die sich im allgemeinen räumlich ändern und damit auch entlang der Trajektorie variieren¹⁷. Als Randbedingungen für das Anfangswertproblem sind Werte tief im Supraleiter, im sogenannten Bulk, vorgegeben:

$$\begin{aligned} a(-\infty) &= \frac{\Delta}{\varepsilon_n + \sqrt{\varepsilon_n^2 + |\Delta|^2}} \\ b(+\infty) &= \frac{\Delta^\dagger}{\varepsilon_n + \sqrt{\varepsilon_n^2 + |\Delta|^2}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Nun zeigen sich die eigentlichen Vorteile der Riccati-Transformation. Die zu lösenden nichtlinearen Riccati-Gleichungen (1.4) sind entkoppelt. Erfolgt ihre numerische Integration in jeweils die Richtung, welche von den bekannten Startwerten aus Gleichung (1.5) vorgegeben wird, so ist das Ergebnis numerisch stabil und schnell konvergent.

Sind auf diese Art und Weise $a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, \varepsilon_n)$ und $b(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, \varepsilon_n)$ durch Integration entlang der Trajektorie gefunden¹⁸, kann über den Eilenberger-Propagator $\hat{g}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, \varepsilon_n)$ aus Gleichung (1.1) die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte berechnet werden:

$$\begin{aligned} N(\mathbf{r}, E) &= -N_0 \frac{1}{2\pi} \langle \text{Im tr}[\hat{\tau}_3 \cdot \hat{g}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, i\varepsilon_n \rightarrow E + i\delta)] \rangle_{FS} \\ &= N_0 \text{Re} \left\langle \frac{1-ab}{1+ab}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, i\varepsilon_n \rightarrow E + i\delta) \right\rangle_{FS} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Hierbei bezeichnet N_0 die Zustandsdichte an der Fermikante in der normalleitenden Phase und $\langle \dots \rangle_{FS}$ eine Mittelung über die Fermifläche. Die Quasiteilchen-Anregungsenergie E stammt aus einer analytischen Fortsetzung der Matsubara-Frequenzen und ist auf die Fermienergie bezogen. Im sauberen Grenzfall, bei dem sich im Supraleiter keine Störstellen befinden und die mittlere freie Weglänge divergiert, ist dabei außerdem der Grenzübergang $\delta \rightarrow 0^+$ zu vollziehen. In einem realistischeren Modell eines sauberen Supraleiters, welcher nur eine geringe Störstellenstreuung aufweist, kann der Parameter δ klein, aber endlich gewählt werden.

Neben der lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichte, die in dieser Arbeit im Mittelpunkt steht, können mit Kenntnis von a und b noch zahlreiche andere physikalische Größen im Supraleiter berechnet werden. Beispielsweise ist die Stromdichte im Supraleiter gerade

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -4\pi i e N_0 k_B T \sum_{\varepsilon_n > 0}^{\omega_c} \left\langle \mathbf{v}_F(\hat{\mathbf{k}}) \frac{1-ab}{1+ab}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, \varepsilon_n) \right\rangle_{FS} \quad (1.7)$$

Und bei der Gapfunktion, welche üblicherweise in der faktorisierten¹⁹ Form

$$\Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) = \Delta_\infty \psi(\mathbf{r}) \chi(\hat{\mathbf{k}}) \quad (1.8)$$

¹⁷ Für eine gemäß Gl. (1.3) parametrisierte Trajektorie gelten also die impliziten Abhängigkeiten $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}_t(x))$ und $\Delta = \Delta(\mathbf{r}_t(x), \hat{\mathbf{k}})$.

¹⁸ Es gelten außerdem diverse Symmetriebeziehungen, etwa $b(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, \varepsilon_n) = a(\mathbf{r}, -\hat{\mathbf{k}}, \varepsilon_n)^*$.

¹⁹ Hier fließt die Annahme ein, die der Supraleitung zugrundeliegende Wechselwirkung V habe die Gestalt $V(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}') = V_\chi(\hat{\mathbf{k}})\chi(\hat{\mathbf{k}}')$, wobei $\chi(\hat{\mathbf{k}})$ die Symmetrie der Supraleitung charakterisiert.

dargestellt wird, gilt für die durch $\psi(\mathbf{r})$ beschriebene räumliche Variation der Zusammenhang:

$$\Delta_\infty \psi(\mathbf{r}) = 2\pi k_B T N_0 V \sum_{\varepsilon_n > 0}^{\omega_c} \left\langle \chi(\hat{\mathbf{k}}) \frac{2a}{1+ab}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}, \varepsilon_n) \right\rangle_{FS} \quad (1.9)$$

Diese Gleichung (1.9) wird als Gapgleichung bezeichnet. Beispielsweise kann mit ihrer Hilfe im räumlich homogenen Bulk-Bereich des Supraleiters die Temperaturabhängigkeit der Gapamplitude Δ_∞ bestimmt werden.

Allerdings hat Gleichung (1.9) auch noch eine viel weitreichendere Eigenschaft: Die Gapfunktion ist ja bei der Lösung der Riccati-Gleichungen (1.4) für a und b bereits selbst implizit eingegangen. Offensichtlich muß das Ergebnis der rechten Seite der Gapgleichung aber gerade wieder der ursprünglich verwendeten Gapfunktion entsprechen. Diese Forderung wird auch als Selbstkonsistenzbedingung bezeichnet, und neben der Gapgleichung läßt sich noch eine weitere solche Bedingung finden. Die gemäß Gleichung (1.7) gegebenen Ströme im Supraleiter hängen über die Maxwell-Gleichung

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1.10)$$

direkt mit dem magnetischen Vektorpotential²⁰ zusammen:

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1.11)$$

Die Invertierung²¹ dieser Poisson-Gleichung muß das selbe magnetische Vektorpotential ergeben, welches bereits bei der Berechnung von a und b verwendet worden ist. In diesem Sinn ist über die Gleichungen (1.7) und (1.11) eine weitere, elektromagnetische Selbstkonsistenzbedingung gegeben.

Eine gemäß Relation (1.3) definierte Trajektorie verläuft innerhalb des Supraleiters, bis sie auf eine räumliche Begrenzung in Form einer Oberfläche trifft. Diese Grenzfläche verändert nicht die entlang der Trajektorie zu lösenden Riccati-Gleichungen (1.4). Stattdessen bewirkt sie spezielle Randbedingungen²², welche lokal an der Grenzfläche berücksichtigt werden müssen. In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich ideale spiegelnde²³ Grenzflächen betrachtet, die keine intrinsische Rauigkeit aufweisen. Bezeichnet $\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}$ den der einlaufenden Trajektorie zugrundeliegenden Fermivektor, so ergibt sich der neue Fermivektor $\hat{\mathbf{k}}_{\text{out}}$ nach dem Auftreffen gerade durch Reflexion an der Grenzfläche. Für die Lösungen a und b der beiden entsprechenden Trajektorienstücke gelten an der Grenzfläche dabei stetige Randbedingungen:

$$\begin{aligned} a(\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}, \varepsilon_n) &= a(\hat{\mathbf{k}}_{\text{out}}, \varepsilon_n) \\ b(\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}, \varepsilon_n) &= b(\hat{\mathbf{k}}_{\text{out}}, \varepsilon_n) \end{aligned} \quad (1.12)$$

²⁰ Neben der kanonischen Beziehung $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ soll die divergenzfreie Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ erfüllt sein.

²¹ In der London-Eichung, bei reell gewählter Gapfunktion, werden dabei von-Neumann-Randbedingungen und das exponentielle Verschwinden von \mathbf{A} im Bulk gefordert.

²² Siehe auch [62, 63, 64] sowie [65].

²³ Der Transmissionkoeffizient ist 0.

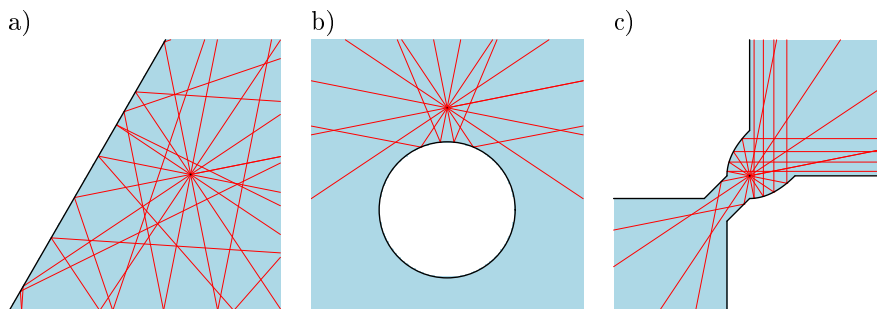


Abbildung 1.1: Beispiele von Supraleitern (blau), die durch verschiedene Grenzflächen-Geometrien (schwarz) begrenzt sind. a) Keilförmiges Eckstück eines Supraleiters mit einem Öffnungswinkel von 60° . b) Supraleiter mit einer lochförmigen Ausstanzung. c) Fokussierender weak link. Zur Veranschaulichung ist in jedem Bild ein ausgewählter Punkt dargestellt, der von 8 Trajektorien (rot) durchlaufen wird. Entlang jeder Trajektorie müssen die Riccati-Gleichungen gelöst werden.

Im folgenden wird die Fermifläche der d -Wellen-Kuprat-Supraleiter als zylinderförmig²⁴ angenommen. In diesem Fall ist die Ausbreitungsrichtung der Trajektorien stets identisch mit dem Fermivektor, da

$$\mathbf{v}_F(\hat{\mathbf{k}}) \parallel \hat{\mathbf{k}} \quad (1.13)$$

Die Trajektorien verlaufen also innerhalb des Supraleiters geradlinig und parallel zum entsprechenden Fermivektor, und sie werden an Grenzflächen genau so reflektiert, wie man das von Lichtstrahlen an einer spiegelnden Oberfläche gewohnt ist. Für die in dieser Arbeit betrachteten nichttrivialen Grenzflächengeometrien bedeutet das konkret, daß zunächst ein Raytracing-Verfahren entwickelt werden muß, um den exakten „Strahlenverlauf“ jeder einzelnen Trajektorie ermitteln zu können²⁵. Dann erst ist es möglich, die Lösungen der Riccati-Gleichungen entlang der polygonalen Trajektorie stückweise zu berechnen und stetig aneinanderzusetzen.

Um die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte gemäß Gleichung (1.6) zu erhalten, ist eine Mittelung über die Fermifläche erforderlich. Zu jedem Fermivektor gibt es genau eine Trajektorie, welche durch den gewählten Punkt verläuft. Insgesamt ist es demnach nötig, den exakten Verlauf aller bzw. sehr vieler dieser Trajektorien zu bestimmen und anschließend auf ihnen die Riccati-Gleichungen (1.4) zu lösen. Die Mittelung über die Fermifläche entspricht dann einer Mittelung über die einzelnen Beiträge aller dieser Trajektorien, die durch den gewählten Punkt verlaufen. Drei Beispiele von nichttrivialen Grenzflächengeometrien, von denen jede einem der nachfolgenden Kapitel dieser Arbeit zuzuordnen ist, sind

²⁴ Es genügt dann, die Fermifläche durch einen eindimensionalen Parameter, den Radialwinkel φ , zu parametrisieren. Der Betrag der Fermigeschwindigkeit soll zudem isotrop sein: $\mathbf{v}_F(\varphi) = v_F(\cos \varphi, \sin \varphi)^T$.

²⁵ Das für die vorliegende Arbeit verwendete Raytracing-Verfahren wurde vom Verfasser entwickelt. Es erlaubt die Verfolgung eines Trajektorienverlaufs innerhalb einer beliebigen Anordnung aus geraden, runden und polygonalen Grenzflächenstücken. Eine Erweiterung auf allgemeinere Formen ist einfach möglich.

in Abbildung 1.1 dargestellt. Zusätzlich sind einige typische Trajektorienverläufe eingezeichnet.

Für das Phänomen der gebundenen Andreev-Zustände spielen im Trajektorienbild genau diejenigen Quasiteilchen-Trajektorien eine besondere Rolle, welche innerhalb einer kurzen Wegstrecke²⁶ einen Vorzeichenwechsel der Gapfunktion erleben. Sie liefern Beiträge zu gebundenen Andreev-Zuständen bei niedrigen Energien. Je größer die absolute Differenz in der Gapamplitude dabei ausfällt, desto höher sind auch die Beiträge. Dieser Mechanismus wird später in Kapitel 4 beim fokussierenden weak link aus Abbildung 1.1.c ausgenutzt. Daß überhaupt gebundene Andreev-Zustände an Grenzflächen von d -Wellen-Supraleitern auftreten können, läßt sich demnach direkt auf die unkonventionelle Symmetriefunktion zurückführen, welche auf der Fermifläche das Vorzeichen wechselt²⁷.

²⁶ „Kurz“ steht hierbei für die Größenordnung einer Kohärenzlänge ξ gemäß Gleichung (2.1).

²⁷ Siehe auch [18] sowie [19].

Kapitel 2

Polygonale Grenzflächen und gebundene Zustände

2.1 Keile

Die einfachsten nichttrivialen Grenzflächen sind polygonal mit lediglich einer Ecke, also keilförmig. Es wird sich zeigen, daß schon bei ihnen ein starker Einfluß der Grenzflächengeometrie auf die Quasiteilchen-Zustandsdichte des d -Wellen-Supraleiters zutage tritt, der zudem überraschende Eigenschaften aufweist.

Die Symmetriefunktion der unkonventionellen $d_{x^2-y^2}$ -Supraleiter wird üblicherweise als $\chi(\varphi) = \cos 2\varphi$ angenommen, und sie weist abwechselnd vier Knoten und vier Maxima der Amplitude auf, wobei das Vorzeichen von „Keule zu Keule“ wechselt. Dieser Anisotropie muß im folgenden stets Rechnung getragen werden, indem die Orientierung zwischen d -Welle und Grenzflächenstruktur angegeben wird. Bei der Untersuchung einer keilförmigen Grenzfläche kann der Keil selbst durch seinen Öffnungswinkel α charakterisiert werden. Die Orientierung zwischen unkonventioneller Symmetriefunktion und Keil wird mit dem Winkel γ parametrisiert, der die Auslenkung einer Keulenrichtung von der Winkelhalbierenden angibt. Eine Skizze hierzu ist in Abbildung 2.1 zu sehen.

Hier und in den nachfolgenden Kapiteln ist die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte aus Gleichung (1.6) bereits auf N_0 normiert. Bei ihrer Berechnung gehen sowohl die Gapfunktion Δ aus Gleichung (1.8) als auch das magnetische Vektorpotential \mathbf{A} ein. Da zunächst keinerlei Magnetfeld vorhanden ist, entfällt das Lösen der elektrodynamischen Selbstkonsistenzbedingung (1.11) mit (1.7), und es ist überall $\mathbf{A} = 0$.

Für den ortsabhängigen Faktor $\psi(\mathbf{r})$ der Gapfunktion wird im folgenden der konstante Wert $\psi(\mathbf{r}) = 1$ angenommen, statt die Gapgleichung (1.9) explizit zu lösen. Dieses zunächst rigoros erscheinende Vorgehen ist im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchaus gerechtfertigt: Sicherlich hat das selbstkonsistent bestimmte $\psi(\mathbf{r})$ an Grenzflächen mit gebundenen Zuständen niedrigere Werte

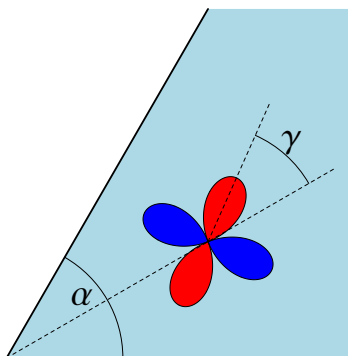


Abbildung 2.1: Skizze eines supraleitenden Keils (blau). Der Öffnungswinkel des Keils wird mit α bezeichnet. Die Orientierung zwischen d -Welle und Keil wird durch den Winkel γ charakterisiert, welcher die Auslenkung der Richtung maximaler Amplitude zur Winkelhalbierenden des Keils mißt.

und steigt erst auf einer Längenskala, die durch die Kohärenzlänge¹

$$\xi = \frac{\hbar v_F}{\Delta_\infty} \quad (2.1)$$

gegeben ist, auf den Bulkwert eins an. Die gebundenen Andreev-Zustände haben dadurch – im Vergleich zur Modellannahme – an der Grenzfläche ein kleineres Gewicht und sind räumlich etwas verschmierter². Die viel grundlegendere Fragestellung, der in dieser Arbeit nachgegangen wird, ist jedoch, ob und wo gebundene Zustände überhaupt existieren, und welche Ursachen dem zugrunde liegen. Diese Aspekte sind praktisch unabhängig von der gewählten lokalen Amplitude $\psi(\mathbf{r})$, da sie ausschließlich phasensensitiv sind³. Bei den im weiteren Verlauf angegebenen spektralen Gewichten gebundener Andreev-Zustände ist es allerdings wichtig, sie nicht auf einer absoluten Skala zu sehen, sondern sie relativ zueinander zu vergleichen. Denn auch der in Gleichung (1.6) verwendete effektive Streuparameter δ hat extreme Auswirkungen auf die absolute Stärke gebundener Andreev-Zustände. Um Vergleichsmöglichkeiten zu schaffen, wird der Parameter – soweit nicht anders angegeben – einheitlich auf den Wert $\delta = 0.1\Delta_\infty$ gesetzt, was einer realistischen Größenordnung entspricht. Durch diese Wahl von δ werden einige Rahmenbedingungen für die Quasiteilchen-Zustandsdichte festgelegt: Für $N(E=0)$ ergibt sich im Inneren des d -Wellen-Supraleiters⁴ ein minimaler, aber endlicher Wert von 0.23, während das maximale spektrale Gewicht gebundener Andreev-Zustände auf etwa 6.50 beschränkt ist⁵.

Um einen ersten Überblick über den Einfluß von Grenzflächen zu erhalten, sind in Abbildung 2.2 für einige keilförmige Geometrien die lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichten bei Energie $E=0$ dargestellt. Zwei Aspekte fallen sofort ins

¹ Die so definierte Kohärenzlänge ist die charakteristische Längenskala der Riccati-Gleichungen (1.4). Sie hängt mit der BCS-Kohärenzlänge ξ_0 über $\xi = \pi\xi_0$ zusammen.

² Siehe etwa [43].

³ Vergleiche auch [18],[19] sowie [43].

⁴ Der Bulkwert eines s -Wellen-Supraleiters ist dann $N(E=0) = \delta/\sqrt{1+\delta^2} \approx 0.10$.

⁵ Dieses Maximum tritt an einer geraden Grenzfläche ($\alpha = \pi$) für optimale d -Wellen-Orientierung auf, d.h. die Knotenrichtung steht senkrecht zur Grenzfläche ($\gamma = \pi/4$).

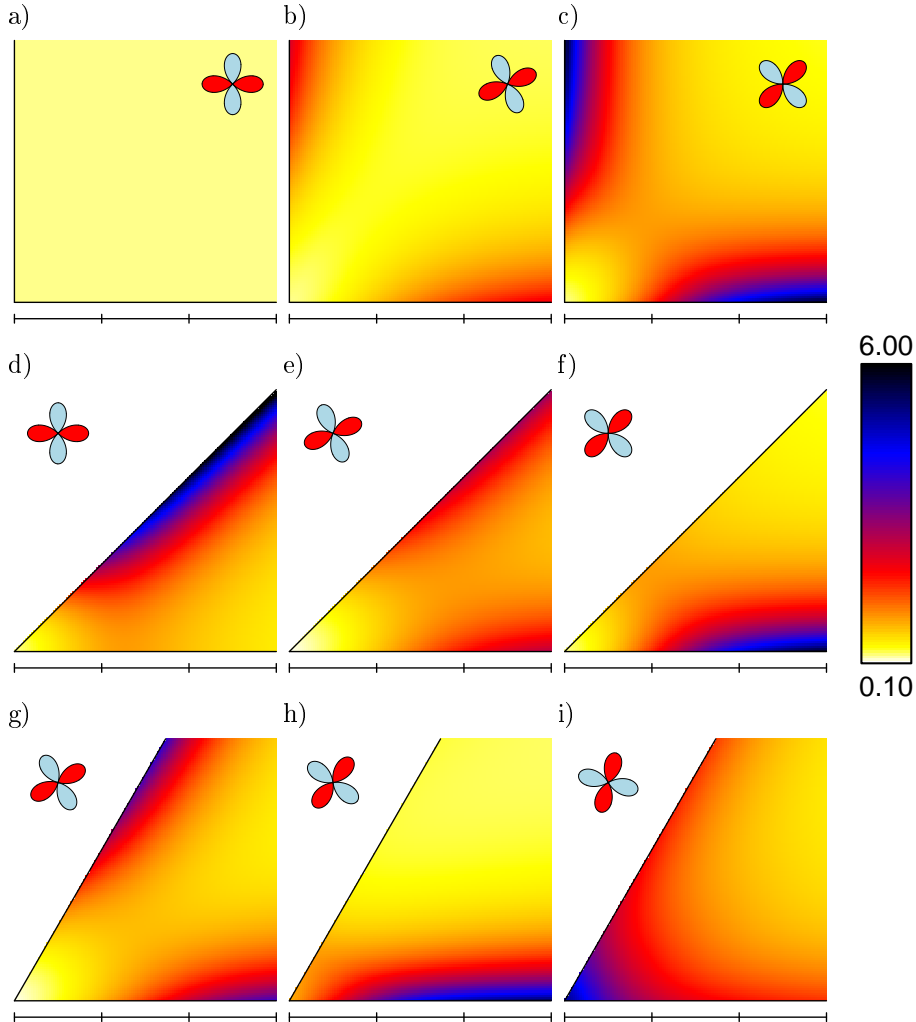


Abbildung 2.2: Lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ in verschiedenen keilförmigen Eckbereichen von d -Wellen-Supraleitern. Die Farbkodierung ist für alle neun Bilder dieselbe, dunkle Bereiche entsprechen einem hohen spektralen Gewicht bei Anregungsenergie $E = 0$ und damit gebundenen Andreev-Zuständen. Die Längenskala ist in Einheiten der Kohärenzlänge ξ unterteilt. Oberste Reihe: Der Öffnungswinkel des Keils ist $\alpha = 90^\circ$ und a) $\gamma = -\pi/4$, b) $\gamma = -\pi/8$, c) $\gamma = 0$. Mittlere Reihe: Der Öffnungswinkel des Keils ist $\alpha = 45^\circ$ und d) $\gamma = -\pi/8$, e) $\gamma = 0$, f) $\gamma = \pi/8$. Unterste Reihe: Der Öffnungswinkel des Keils ist $\alpha = 60^\circ$ und g) $\gamma = 0$, h) $\gamma = \pi/8$, i) $\gamma = \pi/4$. Je nach Konstellation wird in den Eckbereichen die Existenz gebundener Zustände verhindert, z.B. bei c), d), g), oder es werden zusätzliche gebundene Zustände erzeugt, etwa bei i).

Auge: In einiger Entfernung von der Ecke stellen sich an den Grenzflächen gebundene Andreev-Zustände ein, je nachdem, wie die einzelne Grenzfläche zur d -Welle orientiert ist. Dieses wohlbekannte Verhalten kann an Abbildung 2.2.d besonders gut beobachtet werden. Hinsichtlich der oberen Grenzfläche weist die d -Welle die optimale Orientierung für gebundene Zustände auf, während die untere Grenzfläche gerade so orientiert ist, daß keine gebundenen Zustände entstehen. Die Eckstruktur selbst macht sich jedoch innerhalb eines Bereichs, dessen Ausdehnung von der Größenordnung der Kohärenzlänge ξ ist, deutlich bemerkbar. Dabei ist der Einfluß der keilförmigen Grenzflächengeometrie äußerst vielfältig: Obwohl jede Grenzfläche in Abbildung 2.2.c für sich betrachtet gebundene Zustände maximal begünstigt, scheinen diese in der Ecke komplett unterdrückt zu sein, denn die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte nimmt dort den d -Wellen-Bulkwert von 0.23 an. Bei einem kleineren Öffnungswinkel kann der Wert in der Ecke sogar noch deutlich darunter liegen, beispielsweise in Abbildung 2.2.e. Hier entspricht das spektrale Gewicht von 0.11 beinahe dem eines s -Wellen-Supraleiters im Bulk. Allerdings ist auch ein gänzlich anderer Einfluß möglich: Die keilförmige Grenzflächengeometrie kann die Stärke gebundener Andreev-Zustände in der Ecke drastisch erhöhen. Dieser Effekt ist in Abbildung 2.2.i zu sehen.

Offensichtlich wirkt sich die keilförmige Grenzfläche auf die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte im Eckbereich sehr unterschiedlich aus, je nachdem, welcher Öffnungswinkel und welche Orientierung vorgegeben sind. Demnach ist es sinnvoll, im nächsten Schritt alle Geometrien und Orientierungen, die durch die Winkel α und γ vermittelt werden, systematisch zu erfassen. Dabei ist es ausreichend, sich räumlich auf den Eckpunkt des Keils zu beschränken; dieser ist charakteristisch für den ganzen Eckbereich. In Abbildung 2.3 ist die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte im Eckpunkt eines Keils bei Anregungsenergie $E = 0$ aufgetragen. Hierbei läuft der Öffnungswinkel α des Keils von 0 bis 2π entlang der vertikalen Achse, während der Winkel γ , welcher die Orientierung zwischen keilförmiger Geometrie und d -Welle festlegt, horizontal aufgetragen ist. Deutlich zu erkennen ist das globale Maximum⁶ in der Mitte des Bildes, welches das maximale spektrale Gewicht gebundener Andreev-Zustände an einer idealen geraden Grenzfläche wiedergibt. Abbildung 2.3 kann als eine Art Karte benutzt werden, auf der sofort ersichtlich ist, ob in einer vorgegebenen Konstellation gebundene Zustände im Eckbereich existieren oder nicht.

Der interessanteste Bereich ist dabei in der unteren Hälfte, also für Keile mit Öffnungswinkeln $\alpha \leq \pi$ zu sehen. Hier sind unter anderem alle Besonderheiten wiederzufinden, die bereits weiter oben anhand der Beispiele in Abbildung 2.2 vorgestellt worden sind. So treten in der Ecke rechtwinkliger Keile ($\alpha = \pi/2$) unabhängig von der Orientierung keine gebundenen Andreev-Zustände auf, sondern das spektrale Gewicht bei Energie $E = 0$ entspricht durchweg dem d -Wellen-Bulkwert. Ist die „Keulen-Richtung“ parallel zur Winkelhalbierenden ($\gamma = 0$ oder $\gamma = \pi/2$) so sinkt dieses Gewicht für kleinere Öffnungswinkel sogar noch tiefer bis zum s -Wellen-Bulkwert. Am erstaunlichsten ist jedoch, was bei der Orientierung $\gamma = \pi/4$ passiert. Hier ist die Knotenrichtung der d -Welle parallel zur Winkelhalbierenden des Keils, und eine Variation des Keilöffnungswinkels α führt abwechselnd zu niedrigen und hohen spektralen Gewichten bei $E = 0$ in

⁶ Alle Werte, die größer oder gleich 6.00 sind, werden mit der selben Farbe dargestellt.

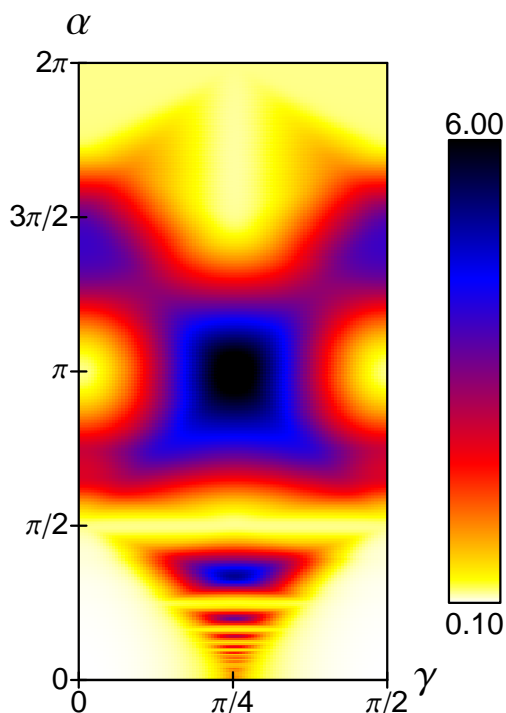


Abbildung 2.3: Lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ im Eckpunkt eines Keils. Der Öffnungswinkel α des Keils läuft entlang der vertikalen Achse. Der Winkel γ parametrisiert die Orientierung zwischen d -Welle und Keil und ist entlang der horizontalen Achse aufgetragen. Das globale Maximum in der Mitte des Bildes repräsentiert den wohlbekanntesten Fall einer geraden Grenzfläche ($\alpha = \pi$), bei der die Knotenrichtung der d -Welle parallel zur Winkelhalbierenden ist ($\gamma = \pi/4$), in diesem Fall also senkrecht auf der Grenzfläche steht.

der Ecke. Diesem Phänomen ist unter anderem auch der in Abbildung 2.2.i vorgestellte Effekt zuzuordnen, bei dem allein durch die keilförmige Grenzflächen-geometrie zusätzliche gebundene Andreev-Zustände in der Ecke erzeugt werden.

Ein Schnitt durch Abbildung 2.3 im wohl interessantesten Bereich bei $\gamma = \pi/4$ ist in Abbildung 2.4 zu sehen. Während die Knotenrichtung der d -Wellen-Symmetriefunktion also parallel zur Winkelhalbierenden des Keils fixiert ist, oszilliert die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ in der Ecke des Keils als Funktion des Öffnungswinkels α . Offensichtlich treten die Minima des spektralen Gewichts dabei für Öffnungswinkel

$$\alpha_n^+ = \frac{\pi}{2n} \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

auf, während die Maxima bei den folgenden Winkeln zu finden sind:

$$\alpha_n^- = \frac{\pi}{2n-1} \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

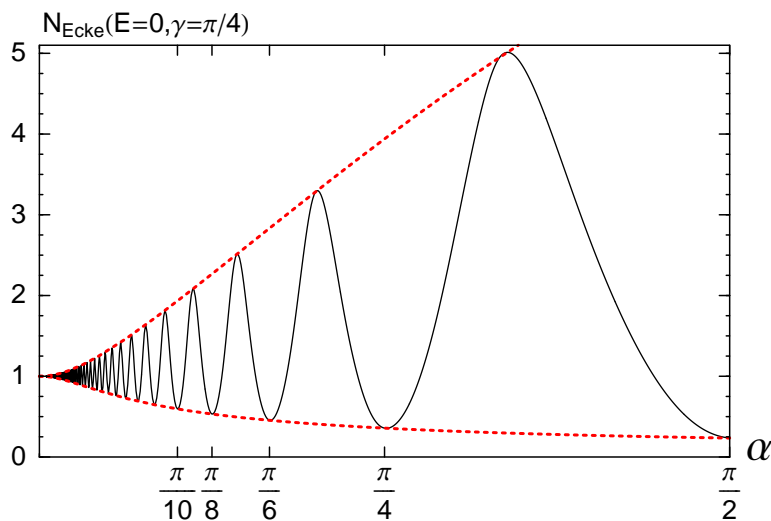


Abbildung 2.4: Starke Oszillationen der lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E=0)$ in der Ecke eines Keils in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α . Die Knotenrichtung der d -Welle ist dabei parallel zur Winkelhalbierenden fixiert ($\gamma = \pi/4$).

Spätestens hier stellt sich die Frage, was denn eigentlich die Ursache dieser vollkommen unterschiedlichen Physik ist, die Keile mit Öffnungswinkeln α_n^+ im Vergleich zu jenen mit Öffnungswinkeln α_n^- aufweisen. Konkreter könnte man sagen: Es muß noch einen prinzipiellen Unterschied zwischen einem 90° -Keil und einem 60° -Keil geben, außer dem (trivialen) Merkmal, daß letzterer einen etwas kleineren Öffnungswinkel besitzt.

Tatsächlich unterscheiden sich Keile mit Öffnungswinkeln α_n^+ von denen mit Öffnungswinkeln α_n^- in einer grundlegenden Eigenschaft – dem Reflexionsverhalten. Zwischen dieser elementaren optischen Eigenschaft und den hier vorgestellten Ergebnissen besteht ein enger Zusammenhang: Wie bereits in Abschnitt 1.2 erläutert wurde, ist der Verlauf einer quasiklassischen Trajektorie derselbe wie der eines klassischen optischen Lichtstrahls. In Abschnitt A.1 des Anhangs wird bewiesen, daß bei einem Keil mit Öffnungswinkel α_n^+ jede einlaufende Trajektorie letztendlich parallel zurückreflektiert wird. Gänzlich anders ist das Reflexionsverhalten für einen Öffnungswinkel der Klasse α_n^- : Hier ist die Richtung der auslaufenden Trajektorie an der Winkelhalbierenden des Keils gespiegelt⁷. Gemeinsam ist den Keilen dabei, daß für fast alle Trajektorien die Zahl der einzelnen durchlaufenen Reflexionen π/α_n^\pm beträgt. Trajektorien, welche parallel zu einem der Schenkel des Keils verlaufen, werden einmal weniger reflektiert.

Die Lösungen der Riccati-Gleichungen (1.4) werden gemäß Abschnitt 1.2 stückweise auf den Quasiteilchen-Trajektorien berechnet und stetig aneinandergesetzt. Hierbei ist die absolute Lage und die Länge jedes einzelnen Teilstücks durchaus von Bedeutung. Nähert man sich allerdings dem Eckpunkt, so verklei-

⁷ Die Unterscheidung der beiden Klassen von Öffnungswinkeln durch die Symbole \pm beruht auf ihrem Reflexionsverhalten.

nert sich bei den Trajektorien die Länge der Zwischenstücke und damit auch ihr Einfluß. Denn auf Längenskalen, welche deutlich unterhalb der Kohärenzlänge ξ liegen, ändert sich die Lösung der Riccati-Gleichungen nur sehr gering. Für Quasiteilchen-Trajektorien, die – als Grenzprozeß betrachtet – durch den Eckpunkt selbst verlaufen, verschwindet die Länge aller einzelnen Zwischenstücke. Es genügt, die Lösung der einlaufenden Trajektorie direkt mit der Lösung der auslaufenden Trajektorie stetig zu verknüpfen. Unter der Annahme einer räumlich konstanten Gapfunktion werden für die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte im Eckpunkt eines Keils gemäß Gleichung (1.6) also lediglich Bulkwerte der Form (1.5), allerdings für unterschiedliche Winkel, miteinander vermischt. Welche Winkelbeiträge miteinander vermischt werden, ist nur vom Reflexionsverhalten des Keils abhängig. Die außerdem durchzuführende Winkelmittelung kann effektiv auf den Winkelbereich eingeschränkt werden, welcher durch den Öffnungswinkel des Keils vorgegeben ist.

In allen weiter oben angesprochenen interessanten Fällen läßt sich somit sogar das komplette Quasiteilchen-Spektrum im Eckpunkt des Keils in einfacher analytischer Form angeben.

Für die Orientierung $\gamma = \pi/4$, bei der die Oszillationen aus Abbildung 2.4 auftreten, ist die Knotenrichtung der d -Welle parallel zur Winkelhalbierenden des Keils. Bezeichnet φ_{in} den Winkel der einlaufenden und φ_{out} denjenigen der auslaufenden Quasiteilchen-Trajektorie, so gilt bei Keilen mit Öffnungswinkeln α_n^+ , welche parallel zurückreflektieren, stets:

$$\chi(\varphi_{\text{in}}) = \chi(\varphi_{\text{out}}) \quad (2.4)$$

Für die Öffnungswinkel α_n^- , bei welchen die Richtung der zurückreflektierten Trajektorie an der Winkelhalbierenden gespiegelt ist, ergibt sich im Vergleich dazu

$$\chi(\varphi_{\text{in}}) = -\chi(\varphi_{\text{out}}) \quad (2.5)$$

Die Symmetriefunktion χ ist in dieser Orientierung ja selbst antisymmetrisch zur Winkelhalbierenden. Im ersten Fall folgt mit Gleichung (2.4) für die normierte Quasiteilchen-Zustandsdichte

$$\begin{aligned} N(E, \alpha \in \alpha_n^+) &= \operatorname{Re} \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} d\varphi \frac{\hat{\varepsilon}_n}{\sqrt{\hat{\varepsilon}_n^2 + \sin^2 2\varphi}} \Big|_{i\hat{\varepsilon}_n \rightarrow \hat{E} + i\hat{\delta}} \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{\alpha} F \left(\alpha, -\frac{1}{\hat{\varepsilon}_n^2} \right) \Big|_{i\hat{\varepsilon}_n \rightarrow \hat{E} + i\hat{\delta}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Für Keile mit Öffnungswinkeln α_n^- ergibt sich mit Gleichung (2.5) hingegen:

$$\begin{aligned} N(E, \alpha \in \alpha_n^-) &= \operatorname{Re} \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} d\varphi \frac{\sqrt{\hat{\varepsilon}_n^2 + \sin^2 2\varphi}}{\hat{\varepsilon}_n} \Big|_{i\hat{\varepsilon}_n \rightarrow \hat{E} + i\hat{\delta}} \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{\alpha} E \left(\alpha, -\frac{1}{\hat{\varepsilon}_n^2} \right) \Big|_{i\hat{\varepsilon}_n \rightarrow \hat{E} + i\hat{\delta}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Die Funktionen F und E auf der jeweils rechten Seite bezeichnen elliptische Integrale erster und zweiter Art. Die Quasiteilchen-Anregungsenergie E tritt

dagegen (genauso wie die beiden anderen energiebehafteten Größen ε_n und δ) auf der rechten Seite ausschließlich in dimensionsloser, mit einem Hut gekennzeichneten Form auf, womit hier eine Normierung auf die Gapamplitude Δ_∞ gemeint ist⁸. Diese beiden Klassen von Quasiteilchen-Spektren, welche in Eckpunkten von Keilen allein durch die Grenzflächengeometrie induziert werden, unterscheiden sich nicht nur in ihrem spektralen Gewicht bei Energie $E = 0$ grundlegend. Ein Blick auf Abbildung 2.5 zeigt, daß sie gänzlich anderer Natur sind.

Das über Gleichung (2.6) gegebene Quasiteilchen-Spektrum entsteht, indem über Bulkbeiträge eines Stücks der Fermifläche gemittelt wird, welches symmetrisch um die Knotenrichtung der d -Welle herum angesiedelt ist. Die eigentliche Breite dieses Winkelbereichs ist dabei durch den halben Öffnungswinkel eingeschränkt. Für den größten Öffnungswinkel seiner Klasse, $\alpha_1^+ = \pi/2$, trägt gerade ein volles Viertel der Fermifläche zu der Zustandsdichte bei, das resultierende Spektrum in der Ecke des Keils ist genau das d -Wellen-Spektrum im Bulk. Bei den nächstkleineren Winkeln α_2^+, α_3^+ etc. werden jedoch die Beiträge der maximalen Gapamplitude immer stärker ausgeschlossen. Die zugehörigen Quasiteilchen-Spektren entsprechen Bulkspektren eines Supraleiters, der eine Symmetriefunktion mit Knoten bei effektiv kleinerer Gapamplitude aufweist. Infolgedessen rücken die beiden Maxima im Quasiteilchen-Spektrum enger zusammen. Allerdings verringert sich dabei ihr spektrales Gewicht, während jenes bei Energie $E = 0$ für kleinere Öffnungswinkel ansteigt. Die Ursache hierfür ist, daß der auf einen endlichen Wert festgelegte effektive Streuparameter δ sich bei einer effektiv kleineren Gapamplitude stärker auswirkt⁹.

Das für Keile mit Öffnungswinkeln α_n^- in der Ecke erzeugte Quasiteilchen-Spektrum hat dagegen die Form (2.7). Aufgrund der Relation (2.5) wechselt zwischen ein- und auslaufender Trajektorie das Vorzeichen der Gapfunktion. Deswegen erfolgt die Fermiflächen-Mittlung hier nicht über Bulkbeiträge, sondern jeder einzelne Winkel trägt zu gebundenen Andreev-Zuständen bei Energie $E = 0$ bei. Die Stärke des Beitrags ist dabei mit der Größe der Gapamplitude des jeweiligen Winkels korreliert. In analoger Weise zu oben ist durch den Öffnungswinkel des Keils gleichzeitig auch eine Beschränkung des beitragenden Fermiflächenabschnitts gegeben. Für $\alpha_1^- = \pi$ tragen noch alle Bereiche der Fermifläche gleichermaßen bei, und es ergibt sich das wohlbekannte Quasiteilchen-Spektrum an einer geraden Grenzfläche mit maximalem spektralem Gewicht der gebundenen Andreev-Zustände bei Energie $E = 0$. Beim nächstkleineren Winkel $\alpha_2^- = \pi/3$ werden bereits die starken Beiträge aus der Richtung des maximalen Gaps nicht mehr berücksichtigt, und das Gewicht des gebundenen Zustands wird kleiner. Genau wie oben entsprechen die Quasiteilchen-Spektren, welche bei kleineren Öffnungswinkeln erzeugt werden, jenen eines Supraleiters, dessen Symmetriefunktion weiterhin Knoten aufweist, welcher allerdings auch effektiv eine geringere Gapamplitude besitzt. Die Auswirkungen des effektiven Streuparameters δ werden dadurch wiederum verstärkt, und das spektrale Gewicht der gebundenen Andreev-Zustände verringert sich ebenso wie ihre Breite¹⁰.

⁸ Es ist also $\hat{E} = E/\Delta_\infty$ etc.

⁹ Das spektrale Gewicht bei Energie $E = 0$ ist durch die Funktion $1/\alpha F(\alpha, -\hat{\delta}^{-2})$ gegeben. Für $\hat{\delta} = 0.1$ ergibt sich daraus die untere Einhüllende aus Abbildung 2.4.

¹⁰ Das spektrale Gewicht der gebundenen Andreev-Zustände bei $E = 0$ ist $1/\alpha E(\alpha, -\hat{\delta}^{-2})$. Für $\hat{\delta} = 0.1$ ergibt sich daraus die obere Einhüllende aus Abbildung 2.4.

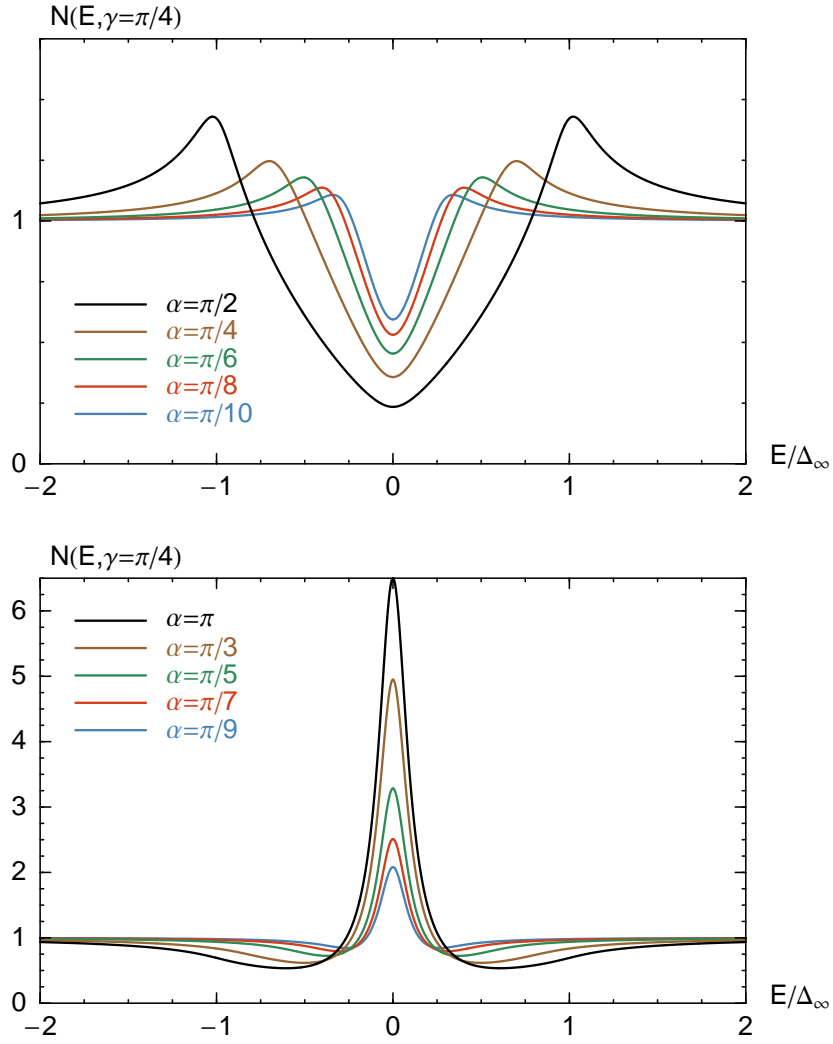


Abbildung 2.5: Lokales Quasiteilchen-Spektrum $N(E)$ im Eckpunkt eines Keils. Die Knotenrichtung der d -Welle ist parallel zur Winkelhalbierenden des Keils orientiert ($\gamma = \pi/4$). Die einzelnen Kurven gehören zu verschiedenen Öffnungswinkeln α des Keils. Aufgrund ihres jeweiligen Reflexionsverhaltens induzieren Öffnungswinkel $\alpha_n^+ = \pi/(2n)$ Bulkspektra (oben), während Öffnungswinkel $\alpha_n^- = \pi/(2n - 1)$ gebundene Andreev-Zustände bei Energie $E = 0$ erzeugen (unten).

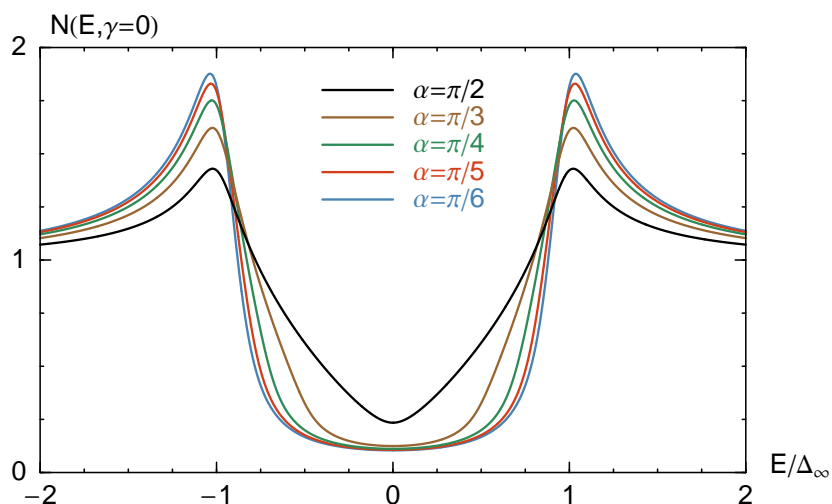


Abbildung 2.6: Lokales Quasiteilchen-Spektrum $N(E)$ im Eckpunkt eines Keils. Die Richtung der maximalen Gapamplitude der d -Welle ist dabei parallel zur Winkelhalbierenden des Keils orientiert ($\gamma = 0$). Für alle Öffnungswinkel $\alpha_n^\pm = \pi/n$ werden Bulkspektren induziert, deren Charakter sich allerdings mit dem Öffnungswinkel selbst verändert. Bei $\alpha_1^\pm = \pi$ und $\alpha_2^\pm = \pi/2$ ergibt sich das Bulkspektrum eines d -Wellen-Supraleiters (schwarz). Kleinere Öffnungswinkel induzieren Bulkspektren von anisotropen s -Wellen-Supraleitern. Im Grenzfall sehr kleiner Öffnungswinkel ist die induzierte s -Welle schließlich isotrop.

In der entgegengesetzten Orientierung $\gamma = 0$ liegt die Richtung der maximalen Gapamplitude parallel zur Winkelhalbierenden des Keils. Interessanterweise wirkt sich das so unterschiedliche Reflexionsverhalten der Keile mit Öffnungswinkeln α_n^+ und jener mit Öffnungswinkeln α_n^- in diesem Fall überhaupt nicht aus. Die Symmetriefunktion selbst ist für $\gamma = 0$ nämlich symmetrisch zur Winkelhalbierenden. Somit ergibt sich nicht nur für eine parallel reflektierte, sondern auch für eine an der Winkelhalbierenden gespiegelte Trajektorienrichtung die Relation

$$\chi(\varphi_{\text{in}}) = \chi(\varphi_{\text{out}}) \quad (2.8)$$

Ein- und auslaufende Quasiteilchen-Trajektorie „sehen“ also keinen Vorzeichenwechsel der Gapfunktion, und für alle Öffnungswinkel $\alpha_n^\pm = \pi/n$ werden im Eckpunkt des Keils nun Bulkspektren erzeugt. Die genaue Form der Quasiteilchen-Spektren ist:

$$\begin{aligned} N(E, \alpha \in \alpha_n^\pm) &= \text{Re} \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} d\varphi \frac{\hat{\varepsilon}_n}{\sqrt{\hat{\varepsilon}_n^2 + \cos^2 2\varphi}} \Big|_{i\hat{\varepsilon}_n \rightarrow \hat{E} + i\delta} \\ &= \text{Re} \frac{1}{\alpha} \frac{\hat{\varepsilon}_n}{\sqrt{1 + \hat{\varepsilon}_n^2}} F\left(\alpha, \frac{1}{1 + \hat{\varepsilon}_n^2}\right) \Big|_{i\hat{\varepsilon}_n \rightarrow \hat{E} + i\delta} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Im Unterschied zu den induzierten Bulkspektren gemäß Gleichung (2.6) stammen die Bulkbeiträge in Gleichung (2.9) wegen der Orientierung $\gamma = 0$ nicht

aus der Umgebung der Knotenrichtung, sondern sie sind um die Richtung maximaler Gapamplitude zentriert. Deswegen wirkt sich der Effekt, daß nur ein durch den Öffnungswinkel festgelegter Bereich der Fermifläche in die Winkelmitteilung involviert ist, hier auch auf ganz andere Art und Weise aus: Für die beiden Öffnungswinkel $\alpha_1^\pm = \pi$ und $\alpha_2^\pm = \pi/2$ tragen letztendlich noch alle Bereiche der Fermifläche gleichmäßig bei, und das lokale Quasiteilchen-Spektrum im Eckpunkt des Keils gemäß Gleichung (2.9) ist nichts weiter als das Bulkspektrum des d -Wellen-Supraleiters. Allerdings befinden sich bei kleineren Öffnungswinkeln α_n^\pm die Knotenrichtungen der d -Wellen-Symmetriefunktion nicht mehr im relevanten Winkelbereich. Bedingt durch die keilförmige Grenzflächengeometrie verhält sich der d -Wellen-Supraleiter im Eckpunkt demgemäß wie ein knotenloser anisotroper s -Wellen-Supraleiter. Dabei nimmt die Anisotropie ab, wenn der Öffnungswinkel verkleinert wird. Eine Reihe der resultierenden Quasiteilchen-Spektren ist in Abbildung 2.6 dargestellt. Die Induktion gesamtter s -Wellen-Bulkspektren in der Ecke eines Keils erklärt damit auch auf natürliche Art und Weise die Existenz eines so niedrigen spektralen Gewichts bei $E = 0$, wie es etwa in Abbildung 2.2.e/g oder Abbildung 2.3 zu beobachten ist.

2.2 Polygonale Grenzflächen

In diesem Abschnitt werden d -Wellen-Supraleiter mit komplizierteren polygonalen Grenzflächen untersucht. Dabei sind die einzelnen Facetten der Grenzflächengeometrie von der Größenordnung einer Kohärenzlänge. Man kann also die polygonale Grenzfläche auch als ein Modell einer rauhen Oberfläche auffassen¹¹. Interessanterweise spielen die im vorangegangenen Abschnitt 2.1 gefundenen Effekte, welche bei einer einfachen keilförmigen Grenzfläche auftreten, auch bei diesen komplizierteren polygonalen Grenzflächengeometrien die Hauptrolle.

In Abbildung 2.7 ist die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ eines d -Wellen-Supraleiters dargestellt, bei dem die Grenzflächenstruktur durch einen regelmäßigen rechtwinkligen Polygonzug gegeben ist. Ist die d -Wellen-Symmetriefunktion gerade so orientiert, daß bei einem geraden Verlauf der Grenzfläche keine gebundenen Andreev-Zustände existieren würden (Abbildung 2.7.a), so sind an den „inneren“ Bereichen der Facetten dennoch gebundene Zustände präsent. Dies ist nicht weiter erstaunlich, denn eine gedachte gerade Grenzfläche weist zwar nicht die für gebundene Zustände optimale Orientierung auf, dafür aber jedes einzelne Polygonstück für sich betrachtet. In den äußeren Ecken selbst fehlen die gebundenen Andreev-Zustände: Die beiden Polygonstücke, welche jeweils eine äußere Ecke begrenzen, bilden eine rechtwinklige keilförmige Umgebung und induzieren deswegen Bulkspektren im Eckbereich. Für die entgegengesetzte Orientierung der d -Welle in Abbildung 2.7.b sind nirgendwo gebundene Andreev-Zustände zu finden, obwohl eine gedachte gerade Grenzfläche ein Maximum erwarten lassen würde. Wiederum ist die Orientierung der einzelnen Facetten wichtiger, und in den äußeren Eckbereichen selbst kommt der Einfluß einer keilförmigen Grenzflächengeometrie zum Tragen. Beide Aspekte erlauben in diesem Fall lediglich d -Wellen-Bulkspektren.

¹¹ Im Vergleich zu Modellen intrinsisch rauher Grenzflächen, etwa in [40], [41] oder auch [1].

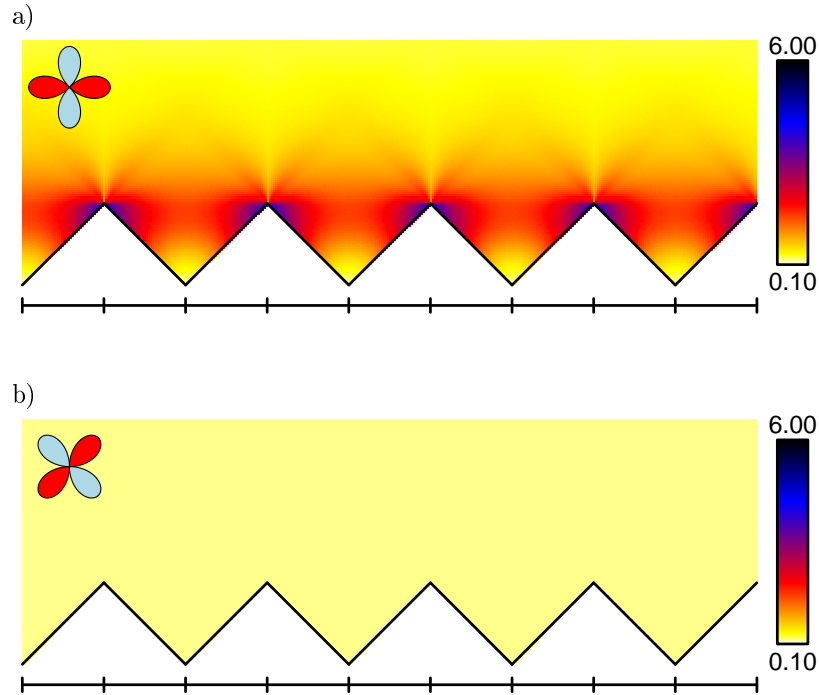


Abbildung 2.7: Lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ eines d -Wellen-Supraleiters mit einem regelmäßigen 90° -Polygonzug als Grenzfläche. Die Längenskala ist in Einheiten der Kohärenzlänge ξ unterteilt.

Wie fundamental die Eigenschaften eines einzelnen Keils für die Beschreibung von polygonalen Grenzflächengeometrien sind, läßt sich auch in Abbildung 2.8 erkennen. Als facettierte Begrenzung des d -Wellen-Supraleiters wird hier ein regelmäßiger 60° -Polygonzug angenommen. Offensichtlich hängt die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte einzig davon ab, wie die d -Welle zur Winkelhalbierenden der einzelnen Keile orientiert ist, aus denen sich die Grenzfläche zusammensetzt. In der oberen Teilabbildung 2.8.a ist die Richtung der maximalen Gapamplitude parallel zur Winkelhalbierenden, und in den Eckbereichen ergibt sich folglich ein Bulkspektrum, welches dem eines anisotropen s -Wellen-Supraleiters ähnelt¹². In der unteren Teilabbildung 2.8.b liegt die Knotenrichtung der d -Welle parallel zur Winkelhalbierenden, und die Keile selbst induzieren gebundene Andreev-Zustände in den Eckbereichen¹³. Beide Effekte sind im vorangegangenen Abschnitt 2.1 bereits ausführlicher erläutert worden. Ein direkter Vergleich von Abbildung 2.8.a/b mit dem jeweils zugehörigen unendlich ausgedehnten Keil in Abbildung 2.2.g/i zeigt, daß aufgrund der beschränkten Kantenlänge des 60° -Polygonzuges effektiv nur der tatsächliche Eckbereich des einzelnen Keils von Bedeutung ist. Für starke gebundene Andreev-Zustände, wie sie sich etwa in Abbildung 2.2.g in einiger Entfernung vom Eckbereich einstellen können, sind die Facetten des hier betrachteten Polygonzuges schlicht zu kurz. Ein anderer

¹² Vergleiche Abbildung 2.6, $\alpha = \pi/3$.

¹³ Vergleiche z.B. Abbildung 2.5, $\alpha = \pi/3$.

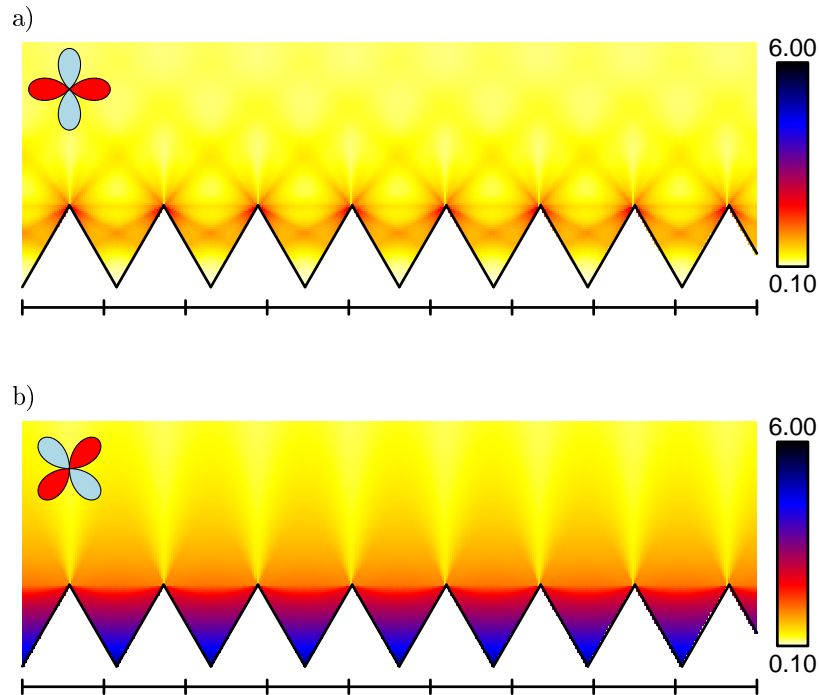


Abbildung 2.8: Lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ eines d -Wellen-Supraleiters mit einem regelmäßigen 60° -Polygonzug als Grenzfläche. Die Längenskala ist in Einheiten der Kohärenzlänge ξ unterteilt.

Effekt, der in der Praxis wohl kaum relevant sein wird, besteht in der leichten Schraffur bzw. Riffelung, welche in Abbildung 2.8.a sowohl in den Eckbereichen als auch in Richtung Bulk zu sehen ist. Die Ursache hierfür ist neben der endlichen Ausdehnung der Keile auch in dem Einfluß ihrer periodischen Anordnung zu finden.

Ein weiteres Beispiel eines d -Wellen Supraleiters, dessen Grenzflächengeometrie durch einen regelmäßigen Polygonzug vorgegeben ist, wird in Abbildung 2.9 gezeigt. Der Polygonzug besteht hier aus Keilen mit Öffnungswinkeln von 60° und 90° , die sich gegenseitig abwechseln. Die Winkelhalbierende jedes einzelnen Keils steht dabei senkrecht auf dem gedachten horizontalen Verlauf der Grenzfläche. Offensichtlich läßt sich die resultierende Quasiteilchen-Zustandsdichte einfach aus den Ergebnissen für regelmäßige 90° - oder 60° -Polygonzüge zusammensetzen, welche bereits in den Abbildungen 2.7 und 2.8 vorgestellt worden sind. Ein interessanter Nebeneffekt ergibt sich in Teilabbildung 2.9.b: Das unterschiedliche Reflexionsverhalten von Keilen mit verschiedenen Öffnungswinkeln, welches die Grundlage der Oszillationen in Abbildung 2.4 darstellt, führt hier letztendlich zu einer räumlichen Oszillation der lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichte entlang der Grenzfläche. Von Ecke zu Ecke ändert sich nicht nur das spektrale Gewicht bei $E = 0$, sondern der Charakter des gesamten Quasiteilchen-Spektrums. Die Periode einer solchen Oszillation entspricht im vorliegenden Fall etwa drei Kohärenzlängen.

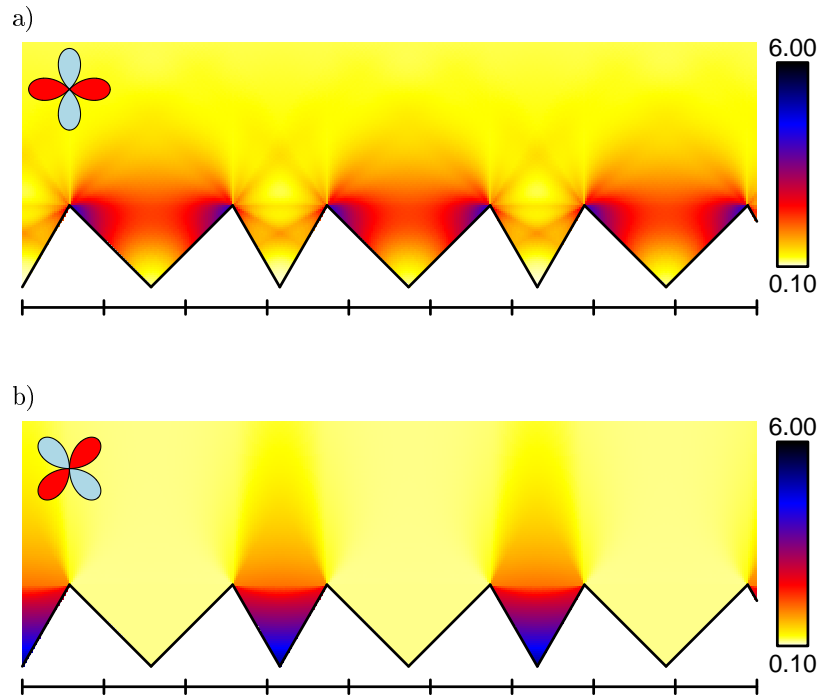


Abbildung 2.9: Lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ eines d -Wellen-Supraleiters mit einem regelmäßigen 60° - 90° -Polygonzug als Grenzfläche. Die Längenskala ist in Einheiten der Kohärenzlänge ξ unterteilt.

Eine sehr raue Grenzfläche kann durch einen unregelmäßigen Polygonzug modelliert werden. Für ein Beispiel einer solchen rauhen Grenzflächenstruktur ist in Abbildung 2.10 die resultierende lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte bei $E = 0$ dargestellt. Die Ausdehnung des ausgewählten Bildausschnitts weist dabei eine Länge von 22ξ auf. Analytische Aussagen sowie die Karte aus Abbildung 2.3 sind in diesem Fall nur bedingt hilfreich. Zwar können einige Teilstrukturen der Grenzfläche als isolierte keilförmige Geometrien betrachtet werden, etwa die kleine, fast rechtwinklige Ecke, welche sich etwa drei Kohärenzlängen vom linken Bildrand entfernt befindet und das erwartete, zu Abbildung 2.7 vergleichbare Verhalten zeigt. In ihrer Gesamtheit ist eine solche raue Grenzfläche jedoch zu komplex: Oft ist schon die notwendige Bedingung für eine Zerlegung in keilförmige Untergeometrien nicht erfüllt, daß bei den Vielfachreflexionen von Quasiteilchen-Trajektorien hauptsächlich nur zwei benachbarte Polygonstücke partizipieren.

Allerdings können trotzdem wichtige Erkenntnisse gewonnen werden: Bei hinreichender Rauigkeit der Grenzfläche existieren lokal bei jeder Orientierung der d -Wellen-Symmetriefunktion gebundene Andreev-Zustände. Eine über einen größeren Bereich der rauhen Grenzfläche räumlich gemittelte Quasiteilchen-Zustandsdichte wird also einerseits gebundene Andreev-Zustände bei Energie $E = 0$ haben, andererseits wird das Spektrum auch Anteile von d - und anisotropen s -Wellen-Bulkspektra aufweisen. Die genaue Stärke dieser drei Anteile

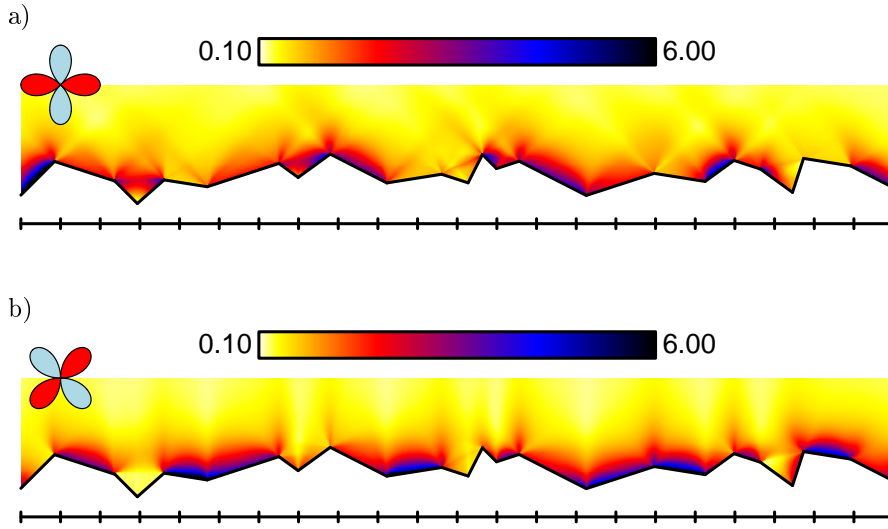


Abbildung 2.10: Lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ eines d -Wellen-Supraleiters entlang einer unregelmäßigen polygonalen Grenzflächenstruktur. Die Längenskala ist in Einheiten der Kohärenzlänge ξ unterteilt, der gesamte Bildausschnitt erstreckt sich also über 22ξ .

ist dabei extrem von der Art der Rauigkeit abhängig. Jede einzelne Eigenschaft der Grenzfläche spielt eine Rolle: Neben der Länge der Polygonstücke sind dabei auch bevorzugte Orientierungen der Facetten oder sich öfters wiederholende Strukturen in Betracht zu ziehen. Die zu Beginn dieses Abschnitts vorgestellten regelmäßigen Grenzflächengeometrien können als seltene Sonderfälle einer rauen Grenzfläche angesehen werden, bei denen ein räumlich gemitteltes Quasiteilchen-Spektrum sich nicht aus allen drei der oben genannten Bestandteile zusammensetzen würde.

2.3 Einfluß von Vortices

Die charakteristische Längenskala der in dieser Arbeit vorgestellten Effekte ist die Kohärenzlänge ξ . Daneben existiert noch eine weitere wichtige Längenskala in Supraleitern: Die magnetische Eindringtiefe λ gibt vor, auf welcher Längenskala ein äußeres Magnetfeld und damit verbundene elektrodynamische Effekte, wie etwa Abschirmströme, innerhalb des Supraleiters abfallen. Die bekannten d -Wellen-Supraleiter gehören zu den extremen Typ-II-Supraleitern¹⁴, d.h. für den Parameter $\kappa = \lambda/\xi$ gilt bei ihnen $\kappa \gg 1$. Es ist also einerseits möglich, daß das Magnetfeld in Form von Abrikosov-Vortices in den Supraleiter eindringt. Andererseits sind die beiden relevanten Längenskalen ξ und λ von so unterschiedlicher Größenordnung, daß Effekte auf der Skala der Kohärenzlänge praktisch in einem Bereich mit räumlich konstantem Magnetfeld auftreten.

¹⁴ Vergleiche etwa [66], Tabelle 2.7.

In diesem Abschnitt wird angenommen, daß das äußere Magnetfeld verschwunden ist, aber ein einzelner Abrikosov-Vortex aufgrund von Pinning im d -Wellen-Supraleiter zurückbleibt. Sowohl der Abstand des Vortex zur Grenzfläche des Supraleiters als auch die gesamte betrachtete Längenskala sollen dabei deutlich kleiner sein als die magnetische Eindringtiefe λ . Im vorliegenden Grenzfall $\kappa \gg 1$ kann das magnetische Vektorpotential in der London-Eichung dann als negativer Gradient einer bestimmten Funktion ϕ geschrieben werden:

$$\mathbf{A} = -\frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\phi \quad (2.10)$$

Im Gültigkeitsbereich dieser Gleichung ist nämlich sofort ersichtlich, daß lokal kein Magnetfeld herrscht:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (2.11)$$

Wegen der geforderten Divergenzfreiheit des magnetischen Vektorpotentials folgt außerdem, daß

$$\nabla \cdot (\nabla\phi) = 0 \quad (2.12)$$

Die Funktion ϕ muß also lokal die Laplace-Gleichung erfüllen. Zudem sind von-Neumannsche Randbedingungen erforderlich. An einer Grenzfläche des Supraleiters mit Normalenvektor \mathbf{n} soll also stets gelten:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla\phi = 0 \quad (2.13)$$

Bis jetzt wurde noch keine Aussage über die physikalische Natur der Funktion ϕ getroffen. Verwendet man allerdings eine in den Riccati-Gleichungen (1.4) enthaltene Eichtransformation

$$\begin{aligned} \Delta &\rightarrow \Delta' = \Delta e^{i\phi} \\ \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\phi \end{aligned} \quad (2.14)$$

so verschwindet danach das neue magnetische Vektorpotential \mathbf{A}' , während die vormals reelle Gapfunktion Δ mit einem räumlich veränderlichen Phasenfaktor multipliziert wird. Die Phase der neuen Gapfunktion entspricht dabei genau der Funktion ϕ . Um der Vortizität Rechnung zu tragen, ist demnach als eine weitere Bedingung zu fordern, daß sich die Phase ϕ bei einem positiven Umlauf um das Vortexzentrum gerade um den Betrag 2π vergrößert hat¹⁵.

Für einen einzelnen gepinnten Abrikosov-Vortex vor einer geraden Grenzfläche kann man den zugehörigen Phasenfaktor $e^{i\phi}$ sehr einfach über einen Ansatz erhalten, welcher analog zur klassischen Spiegelladungsmethode in der Elektrostatik funktioniert. Die physikalischen Auswirkungen eines solchen gepinnten Vortex auf die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte an der Grenzfläche lassen sich, sofern kein äußeres Magnetfeld angelegt ist, mit dem Schlagwort „Vortex-Schatten-Effekt“ beschreiben¹⁶. Um den dem Vortex am nächsten liegenden Punkt der Grenzfläche herum bildet sich eine „Schattenregion“ aus, innerhalb derer gebundene Andreev-Zustände deutlich unterdrückt werden. Bis auf die Verringerung des spektralen Gewichts gebundener Zustände bei Energie $E = 0$

¹⁵ Auf Vortices mit höherer Vortizität wird hier nicht eingegangen. Prinzipiell sind damit aber keine zusätzlichen Schwierigkeiten verbunden.

¹⁶ Siehe auch [2].

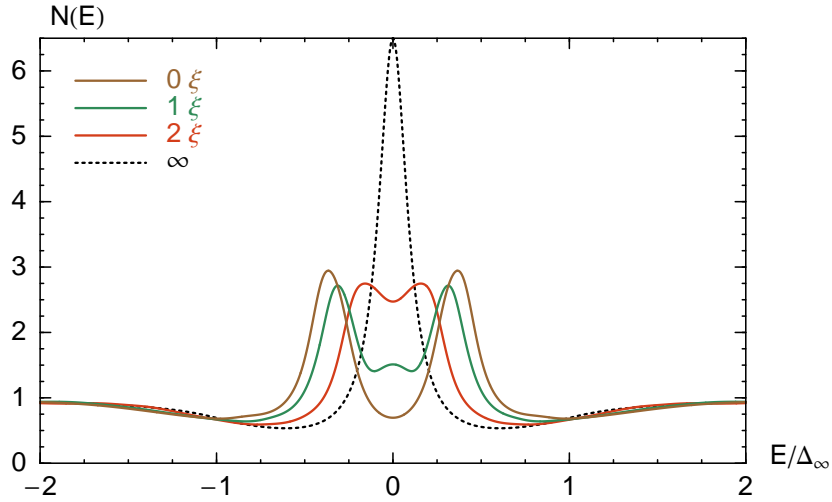


Abbildung 2.11: Typische Veränderung lokaler Quasiteilchen-Spektren $N(E)$ an einer geraden Grenzfläche eines d -Wellen-Supraleiters unter dem Einfluß eines gepinnten Abrikosov-Vortex. Grenzfläche und d -Welle sind dabei so orientiert, daß sich ohne Vortex maximale gebundene Andreev-Zustände ausbilden (gepunktet). Die Anwesenheit eines einzelnen Abrikosov-Vortex, welcher hier im Abstand von 2ξ vor der Grenzfläche gepinnt ist, sorgt für eine Aufspaltung des Maximums, indem das spektrale Gewicht von $E = 0$ zu höheren Energien verschoben wird. Dieser Effekt ist maximal an dem Punkt der Grenzfläche, welcher dem Vortex am nächsten liegt (braun) und verringert sich mit zunehmendem Abstand. Die einzelnen Kurven zeigen lokale Quasiteilchen-Spektren an Punkten der Grenzfläche, die vom Zentrum der Schattenregion 0ξ , 1ξ , 2ξ und ∞ entfernt sind.

besteht jedoch keinerlei Gemeinsamkeit zwischen diesem Einfluß eines Vortex und der in den vorangegangenen Abschnitten behandelten Möglichkeit, daß Grenzflächengeometrien Bulkspektren induzieren. Ein Blick auf Abbildung 2.11, in der einige typische lokale Quasiteilchen-Spektren in der Schattenregion dargestellt sind, verdeutlicht dies. Das ursprünglich hohe spektrale Gewicht der gebundenen Zustände bei $E = 0$ verschiebt sich effektiv zu höheren Energien. Als Resultat wird das Maximum aufgespalten. Die physikalische Ursache hierfür liegt in der inhomogenen Phasenverteilung um den Vortex herum und den damit korrelierten Strömen. Bereits seit längerer Zeit ist bekannt, daß homogene Oberflächenströme für eine Aufspaltung des Maximums gebundener Andreev-Zustände an der Grenzfläche sorgen¹⁷. Im Falle der nichthomogenen Strom- und Phasenverteilung, welche durch einen Vortex vorgegeben wird, kommt es gleichfalls zu einer solchen Aufspaltung, allerdings hängt ihre genaue Stärke und Charakteristik von den geometrischen Vorgaben ab. Grundsätzlich verringert sich der Einfluß des Abrikosov-Vortex und damit die Aufspaltung bei größeren Abständen des Vortex zur Grenzfläche. Ist der Abstand des Vortex fixiert, so nimmt die Aufspaltung gleichfalls ab, wenn die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte an

¹⁷ Siehe [40].

Punkten der Grenzfläche berechnet wird, welche eine größere Entfernung zum Projektionspunkt des Vortex auf die Grenzfläche haben. Dieses Verhalten ist bereits in Abbildung 2.11 wiedergegeben worden. Nähere Informationen über den Effekt eines einzelnen Abrikosov-Vortex, welcher vor einer geraden Grenzfläche gepinnt ist, können in Publikation [2] nachgelesen werden.

In diesem Abschnitt soll nun aufgezeigt werden, wie der Einfluß eines Vortex auch auf d -Wellen-Supraleiter mit polygonalen Grenzflächengeometrien verallgemeinert werden kann. Zunächst muß das – im Vergleich zu einer geraden Grenzfläche – kompliziertere Reflexionsverhalten der Quasiteilchen-Trajektorien berücksichtigt werden, wie es auch schon in den vorangegangenen Abschnitten erfolgt ist. Außerdem ist es jedoch noch erforderlich, zu der jeweils vorgegebenen Grenzflächengeometrie die zugehörige nichttriviale Phasenverteilung zu ermitteln. Die gesuchte Phasenfunktion ϕ soll fast überall die Laplace-Gleichung (2.12) lösen, entlang jedes einzelnen Stücks der Grenzfläche von-Neumannsche Randbedingungen (2.13) erfüllen und eine „Phasenquelle“ der Stärke 2π an der Vortexposition aufweisen. Interessanterweise ist dies eine Problemstellung, welche auch in anderen Gebieten der Physik häufiger auftritt. Ein Analogon aus der Elektrostatik ist die Beschreibung einer Punktladung, welche sich innerhalb einer speziellen Anordnung geerdeter Leiterflächen befindet. Ein weiteres Beispiel sind Wirbelströmungen in idealen Flüssigkeiten mit einer vorgegebenen Kanalstruktur als Umrandung.

Für zweidimensionale Probleme wie im vorliegenden Fall bietet sich die Verwendung einer sehr eleganten Technik an, der Methode konformer Abbildungen. Sie erlaubt es oftmals, für nicht zu komplizierte Randgeometrien sogar analytische Lösungen zu erhalten. Die Methode konformer Abbildungen („conformal mapping“) wird in zahlreichen mathematischen und auch einigen physikalischen Fachbüchern ausführlich beschrieben¹⁸. In Abschnitt A.2 des Anhangs sind einige Grundlagen dieser Methode kurz erläutert, außerdem wird eine analytische Lösung für den Phasenfaktor eines Vortex innerhalb einer keilförmigen Grenzflächengeometrie hergeleitet. Damit ist es nun möglich, den Einfluß eines Abrikosov-Vortex auf die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte für beliebige keilförmige Geometrien bei variabler Vortexposition zu berechnen.

Ergebnisse für einen Keil mit Öffnungswinkel $\alpha = 3\pi/2$ sind in Abbildung 2.12 wiedergegeben. Die resultierende lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte für spitzwinklige Keile ist in Abbildung 2.13 zu sehen. Offensichtlich wird das spektrale Gewicht gebundener Andreev-Zustände bei Energie $E = 0$ in Anwesenheit eines gepinnten Abrikosov-Vortex insgesamt verringert. Die Ursache hierfür ist die effektive Verschiebung des spektralen Gewichts zu höheren Energien. Dieser Effekt ist zwar prinzipiell nichtlokal, und es bedarf zu seiner korrekten Berechnung an der Grenzfläche auch der vollen Phaseninformation innerhalb des Supraleiters, welche beim Lösen der Riccati-Gleichungen (1.4) entlang der Quasiteilchen-Trajektorien eingeht. Allerdings ist im Rahmen einer qualitativen Abschätzung die Faustregel durchaus sinnvoll, wonach die Reduktion nur von der lokalen Stärke des magnetischen Vektorpotentials – beziehungsweise des Phasengradienten

¹⁸ Siehe etwa [67],[68] für mathematische Grundlagen der Methode konformer Abbildungen. Beispiele für verschiedene physikalische Anwendungen sind unter anderem in [69] und [70] zu finden. Speziell auf die Schwarz-Christoffel-Transformation für polygonale Begrenzungen beziehen sich [71],[72] sowie die numerischen Hilfsmittel [73, 74, 75].

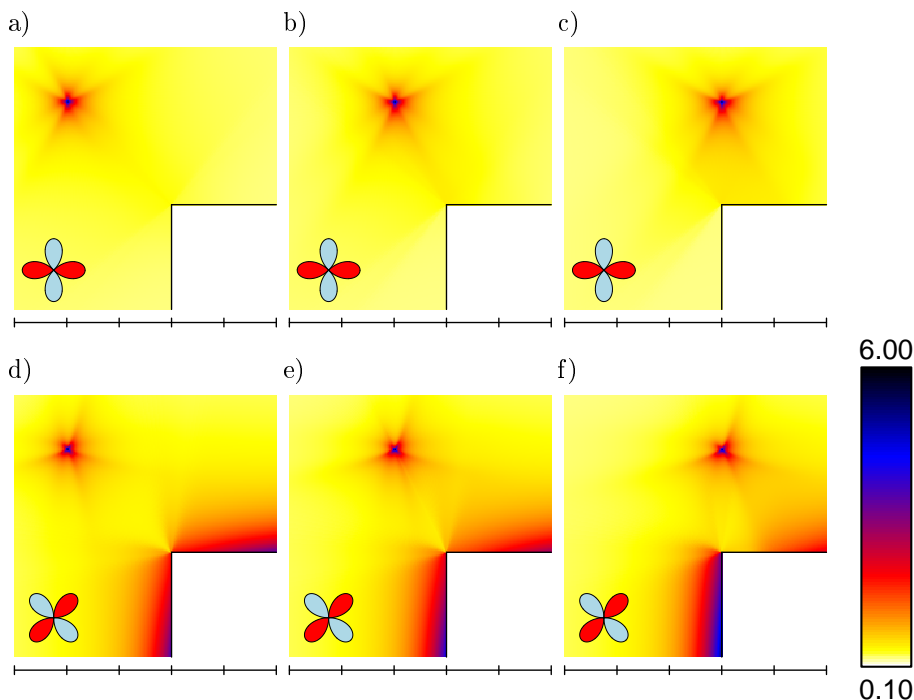


Abbildung 2.12: Lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ in einem d -Wellen-Supraleiter, der eine keilförmige Grenzflächengeometrie mit Öffnungswinkel $\alpha = 3\pi/2$ aufweist. Ein gepinnter Abrikosov-Vortex sitzt in einem vertikalen Abstand von 2ξ zum Eckpunkt des Keils. Der horizontale Abstand ist spaltenweise 2ξ , 1ξ und 0 . Die Längenskala ist in Einheiten der Kohärenzlänge ξ unterteilt. a)-c) Der Vortex nimmt kaum Einfluß auf die Bulk-Zustandsdichte bei niedrigen Energien. d)-f) Das spektrale Gewicht gebundener Andreev-Zustände an der Grenzfläche wird in der Nähe des Vortex reduziert und bei f) insbesondere in einem Schattenbereich um den Projektionspunkt herum stark unterdrückt.

gemäß Gleichung (2.10) – entlang der Grenzfläche abhängt. Hierzu ist ein Vergleich der Ergebnisse für die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ aus den Abbildungen 2.12.d-f und 2.13 mit den zugrundeliegenden Phasenverteilungen in Abbildung A.1 des Anhangs nützlich. Man kann deutlich erkennen, daß in der Umgebung derjenigen Punkte, welche sich bei einer Projektion des Vortex auf die Grenzflächen ergeben, der Phasengradient am stärksten ist. Diese Regionen entsprechen gleichzeitig den Schattenbereichen der Grenzfläche, in welchen das spektrale Gewicht am meisten verringert wird. Die in Abbildung 2.13.c durch die Grenzflächengeometrie induzierten gebundenen Andreev-Zustände in der Ecke des Keils sind dagegen weniger betroffen, weil in der Eckregion der Phasengradient nur sehr schwach ausgeprägt ist. Ein weiteres Beispiel bieten die Abbildungen 2.12.f und A.1.e: Der Phasengradient ist an der oberen, horizontalen Grenzfläche recht stark, während an der nach unten gerichteten vertikalen Grenzfläche fast eine homogene Phasenverteilung vorliegt. Dementsprechend ist der Einfluß des Abrikosov-Vortex auf die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte an der unteren Kante nur noch sehr gering.

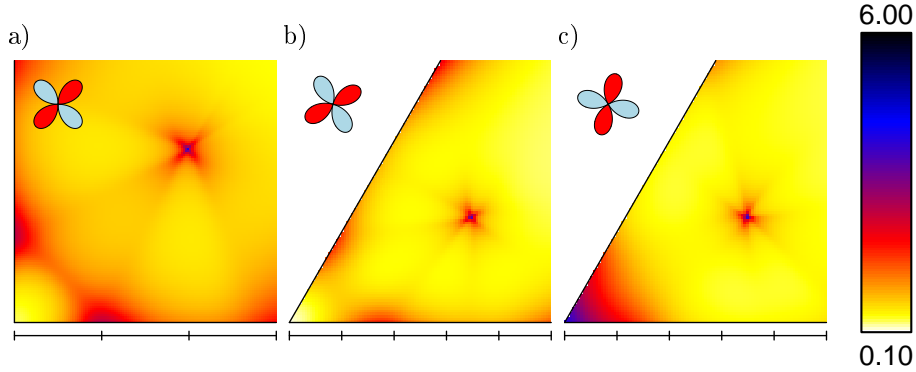


Abbildung 2.13: Einfluß eines gepinnten Abrikosov-Vortex auf die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ in einem d -Wellen-Supraleiter. Der Abstand des Vortex zu jeder Grenzfläche beträgt 2ξ . Die Längenskala ist in Einheiten der Kohärenzlänge ξ unterteilt. a) Der Öffnungswinkel des Keils ist $\alpha = \pi/2$. Dieses Bild muß im Vergleich zu Abbildung 2.2.c gesehen werden. b),c) Der Öffnungswinkel des Keils ist $\alpha = \pi/3$. Diese Bilder sind mit den Abbildungen 2.2.g/i zu vergleichen. Offensichtlich ist das spektrale Gewicht gebundener Andreev-Zustände an der Grenzfläche durch den Vortex reduziert und insbesondere in einem Schattenbereich um die Projektionspunkte herum stark unterdrückt. Geometrisch induzierte gebundene Andreev-Zustände in der Ecke sind dagegen geringer betroffen.

Die in diesem Abschnitt vollzogene Verallgemeinerung des „Vortex-Schatten-Effekts“ aus Publikation [2] auf keilförmige Grenzflächengeometrien macht deutlich, daß der Einfluß eines Abrikosov-Vortex auf die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte bei niedrigen Energien primär von der ihn umgebenden Phasenverteilung abhängt. In Bereichen mit starkem Phasengradienten ist der Einfluß stark, vor allem um Projektionspunkte auf Grenzflächen herum. In Bereichen fast konstanter Phase ist auch der Einfluß des Vortex gering. Ein weiterer Schritt in Richtung komplizierterer polygonaler Grenzflächenstrukturen ist in der Regel aufwendiger¹⁹, liefert jedoch dasselbe Ergebnis. Ein schönes Beispiel hierzu ist in Publikation [1] zu finden. Eine Verallgemeinerung auf mehrere Vortices ist mithilfe des Phasenfaktors aus Gleichung (A.22) ohne weiteres möglich: Die Phasenverteilungen einzelner Abrikosov-Vortices sind additiv und die jeweiligen Phasenfaktoren müssen lediglich miteinander multipliziert werden.

¹⁹ Für polygonale Ränder existiert eine spezielle Form der konformen Abbildung, die Schwarz-Christoffel-Transformation. Die in ihr auftretenden unbekannt Parameter können meist nur numerisch bestimmt werden. Vergleiche auch [71, 72, 73, 74, 75].

Kapitel 3

Kreisförmige Grenzflächen und gebundene Zustände

3.1 Keile mit abgerundeten Ecken

In diesem Kapitel werden d -Wellen-Supraleiter untersucht, deren Grenzflächengeometrien auch runde Teilstücke aufweisen. Als ein erstes Beispiel hierfür dienen keilförmige Grenzflächen mit abgerundeter Eckstruktur, wie sie in Abbildung 3.1.a schematisch zu sehen sind. Die resultierenden lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichten können direkt mit denjenigen aus Abschnitt 2.1 verglichen werden, in dem „echte“ Keile mit spitzen Ecken behandelt worden sind.

Abbildung 3.2 zeigt die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ in einem rechtwinkligen Keil mit abgerundetem Eckbereich. Ein Vergleich mit den entsprechenden Resultaten für spitze Keile in den Teilabbildungen 2.2.c/a macht deutlich, daß für die Orientierung $\gamma = 0$ keine signifikanten Änderungen auftreten. Ist allerdings die Knotenrichtung der d -Wellen-Symmetriefunktion parallel zur Winkelhalbierenden, also $\gamma = \pi/4$, so existieren starke gebundene Andreev-Zustände im abgerundeten Eckbereich des Supraleiters. Die räumliche Ausdehnung der gebundenen Zustände hängt dabei eng mit den Ausmaßen der Abrundung zusammen.

Für die Erklärung dieser Eigenschaft ist wiederum das Reflexionsverhalten der Grenzflächengeometrie von entscheidender Bedeutung. Allerdings muß dabei zwischen den geraden Teilstücken einerseits und dem kreisförmigen Eckabschnitt andererseits unterschieden werden. Eine Quasiteilchen-Trajektorie, welche nur an den geraden Kanten reflektiert wird, läuft für den Öffnungswinkel $\alpha = \pi/2$ parallel aus dem Keil wieder hinaus¹. Genau das gegensätzliche Reflexionsverhalten findet man jedoch bei Trajektorien, die in der Umgebung des Scheitelpunkts auf die Abrundung treffen: Ihre Richtung wird an der Winkelhalbierenden gespiegelt². Quasiteilchen-Trajektorien in der Eckregion sind damit einem eigenen lokalen Reflexionsverhalten unterworfen, welches sich von demjenigen

¹ Vergleiche die Abschnitte 2.1 und A.1. Der Öffnungswinkel $\alpha = \pi/2$ ist α_1^+ .

² Die Tangentialebene des Scheitelpunkts steht senkrecht auf der Winkelhalbierenden.

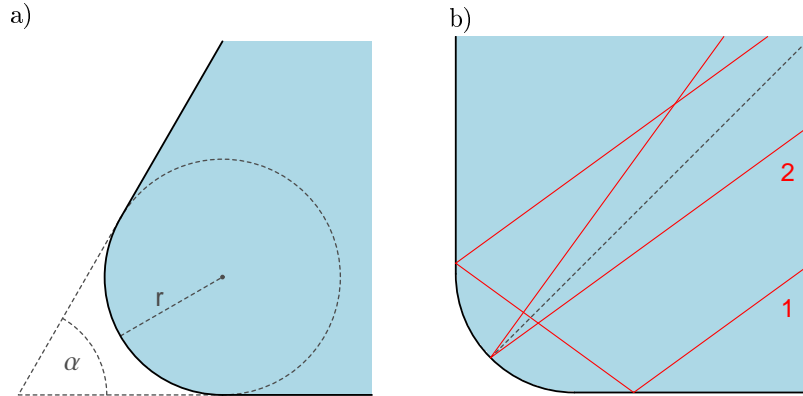


Abbildung 3.1: Beispiele von Supraleitern (blau), die eine keilförmige Grenzflächen­geometrie mit abgerundetem Eckbereich besitzen. a) Schematische Darstellung. Die abgerundete Ecke besteht aus dem passenden Segment eines Kreises mit Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden. Neben dem Öffnungswinkel α kann der Kreisradius r variiert werden. b) Typischer Verlauf von Quasiteilchen-Trajektorien (rot). Trajektorien, welche den runden Bereich nicht treffen, werden dem Reflexionsverhalten des Keils gemäß zurückgeworfen (1). Trajektorien, die den runden Bereich treffen, sind lokal einem eigenen Reflexionsverhalten unterworfen, welches in der Nähe des Scheitelpunkts einer Spiegelung an der Winkelhalbierenden entspricht (2). Beide Reflexionsverhalten können sich sehr unterschiedlich auswirken.

der spitzen Keilstruktur, abhängig vom Öffnungswinkel, grundlegend unterscheiden kann. Eine Veranschaulichung dieses unterschiedlichen Reflexionsverhaltens ist in Abbildung 3.1.b dargestellt.

Für die Orientierung $\gamma = 0$ ist die Symmetriefunktion des d -Wellen-Supraleiters selbst symmetrisch zur Winkelhalbierenden des Keils. Das lokale Reflexionsverhalten der runden Ecke führt somit nicht zu gebundenen Andreev-Zuständen. Allerdings ergeben sich weniger signifikante Abweichungen von den Ergebnissen eines spitzen Keils, die an Kaustik-Effekte in der Optik erinnern und in Abbildung 3.2.a-c als tropfenförmiges Gebiet in der Nähe der Abrundung in Erscheinung treten. Hierfür sind Quasiteilchen-Trajektorien verantwortlich, welche nicht in der nächsten Umgebung des Scheitelpunkts auf die runde Grenzfläche treffen und deswegen auch nicht gespiegelt zur Winkelhalbierenden reflektiert werden³.

Wesentlich bedeutendere Auswirkungen hat der runde Eckbereich für die Orientierung $\gamma = \pi/4$: Quasiteilchen-Trajektorien, welche in der Nähe des Scheitelpunkts auf die Abrundung treffen und an der Winkelhalbierenden gespiegelt werden, erfahren nun einen Vorzeichenwechsel der Gapfunktion. Als Konsequenz ergeben sich gebundene Andreev-Zustände in der Eckregion. Verringert man den Radius r der Abrundung, so schrumpft damit auch die räumliche Ausdehnung

³ Außerdem ist bei Keilen mit abgerundeten Ecken die Anzahl der von den Quasiteilchen-Trajektorien durchlaufenen Einzel-Reflexionen sehr variabel.

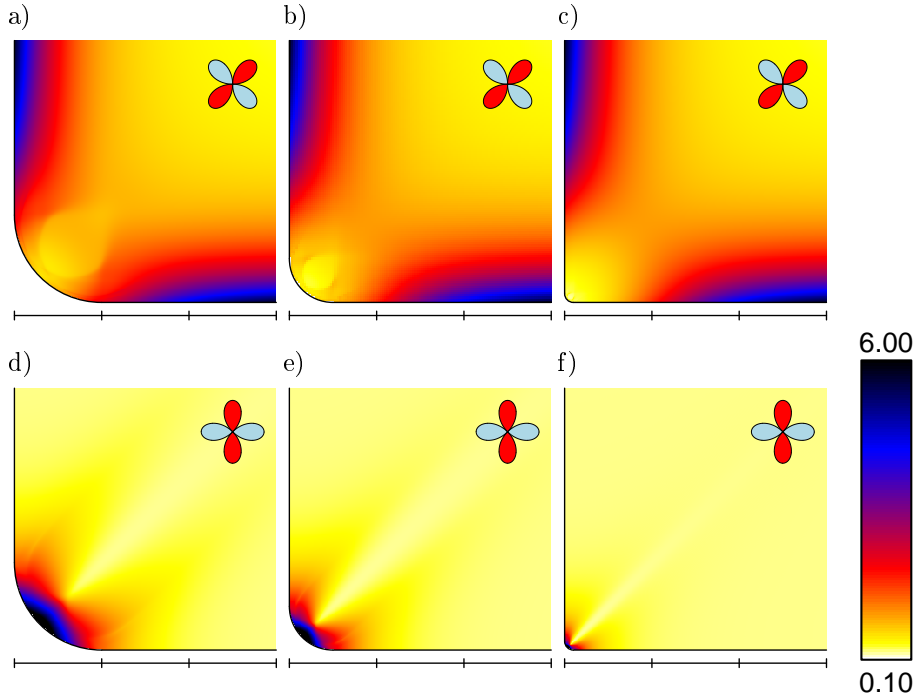


Abbildung 3.2: Lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ im abgerundeten Eckbereich eines d -Wellen-Supraleiters. Der Öffnungswinkel der keilförmigen Eckstruktur ist $\alpha = \pi/2$. Der Radius der abgerundeten Ecke beträgt (spaltenweise von links nach rechts): 1ξ , 0.5ξ , 0.1ξ . Die Längenskala ist in Einheiten der Kohärenzlänge ξ unterteilt. a)-c) Die Richtung maximaler Gapamplitude ist parallel zur Winkelhalbierenden orientiert ($\gamma = 0$). d)-f) Die Knotenrichtung der d -Welle ist parallel zur Winkelhalbierenden orientiert ($\gamma = \pi/4$).

des Gebiets, in dem dieser Effekt auftritt. Die Stärke der gebundenen Andreev-Zustände am Scheitelpunkt selbst bleibt dagegen stabil auf hohem Niveau, da dort lokal stets das runde Stück der Grenzflächengeometrie dominiert⁴. Insofern ist die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte im Scheitelpunkt für kleine Abrundungen mit $r \ll \xi$ nicht mehr repräsentativ für den größeren Eckbereich auf der Längenskala der Kohärenzlänge – im Unterschied zum Eckpunkt spitzer Keile aus Abschnitt 2.1. Im formalen Limes $r \rightarrow 0$ unterscheiden sich dementsprechend die Ergebnisse für einen Keil mit abgerundeter Ecke von denen eines spitzen Keils genau und nur im Eckpunkt. Dies ist letztlich eine Folge des grundsätzlichen geometrischen Gegensatzes zwischen „rund“ und „eckig“.

Weitere Beispiele der lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ für Keile mit abgerundeten Ecken sind in Abbildung 3.3 dargestellt. Der Öffnungswinkel beträgt hier $\alpha = \pi/3$, und die Resultate können direkt mit denen aus Abbildung 2.2.g/i verglichen werden. Im Gegensatz zum vorherigen rechtwinkligen Beispiel weisen die keilförmigen Stücke der Grenzflächengeometrie für den Öffnungs-

⁴ Diese Aussage bezieht sich auf die Größe des Winkelbereichs, innerhalb dessen am Scheitelpunkt reflektierte Quasiteilchen-Trajektorien nur diese eine (symmetrische) Reflexion erfahren.

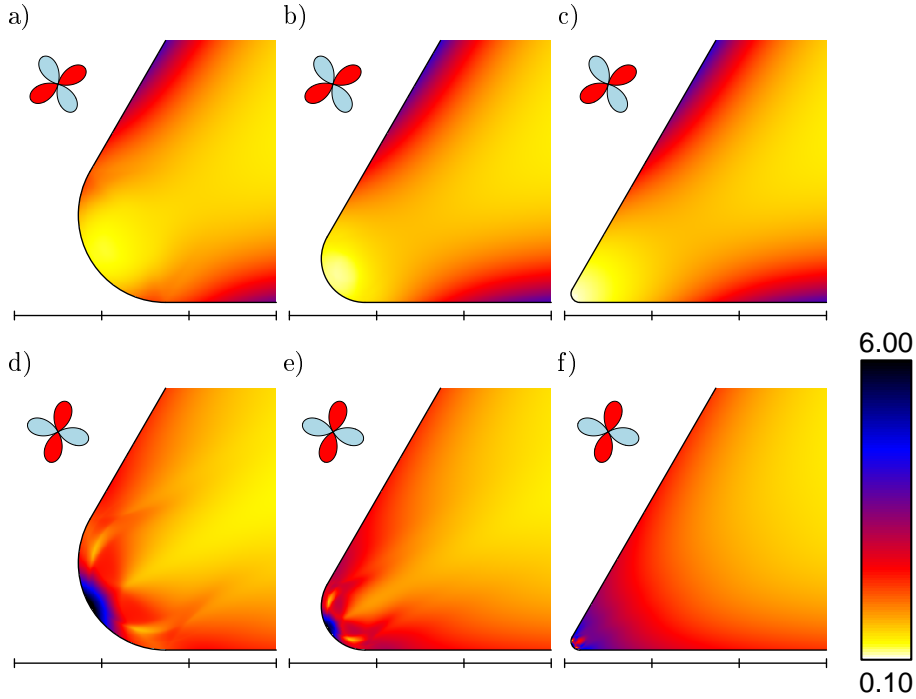


Abbildung 3.3: Lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ im abgerundeten Eckbereich eines d -Wellen-Supraleiters. Der Öffnungswinkel der keilförmigen Eckstruktur ist $\alpha = \pi/3$. Der Radius der abgerundeten Ecke beträgt (spaltenweise von links nach rechts): 1ξ , 0.5ξ , 0.1ξ . Die Längenskala ist in Einheiten der Kohärenzlänge ξ unterteilt. a)-c) Die Richtung maximaler Gapamplitude ist parallel zur Winkelhalbierenden orientiert ($\gamma = 0$). d)-f) Die Knotenrichtung der d -Welle ist parallel zur Winkelhalbierenden orientiert ($\gamma = \pi/4$).

winkel $\alpha = \pi/3$ selbst ein Reflexionsverhalten auf, welches die Richtung reflektierter Quasiteilchen-Trajektorien an der Winkelhalbierenden des Keils spiegelt⁵. Damit sind sich in diesem Fall das Reflexionsverhalten des runden und des keilförmigen Anteils der Grenzfläche sehr ähnlich, und für die Orientierung $\gamma = 0$ ist keine relevante Veränderung der lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichte aufgrund der Abrundung wahrnehmbar. Wechselt dagegen für $\gamma = \pi/4$ die Symmetriefunktion der d -Welle bei der Richtung der Winkelhalbierenden das Vorzeichen, so erzeugen beide Grenzflächen-Anteile jeweils für sich genommen gebundene Andreev-Zustände im Eckbereich. In ihrem Zusammenwirken ergibt sich letztlich ein interessantes Wechselspiel: In Abbildung 3.3.d ist der Radius r der Abrundung zu groß, um den Einfluß des keilförmigen Anteils in der Ecke sichtbar werden zu lassen. Das starke Gewicht der gebundenen Andreev-Zustände ist vergleichbar mit Abbildung 3.2.d und geht allein auf die runde Eckstruktur zurück. Für einen kleineren Radius, wie in Abbildung 3.3.e, kann anscheinend zwischen den einzelnen Beiträgen unterschieden werden. Einerseits bleiben die starken gebundenen Zustände in der Umgebung des Scheitelpunkts bestehen, ihre räumliche Ausdehnung nimmt allerdings ab. Andererseits kom-

⁵ Vergleiche die Abschnitte 2.1 und A.1. Der Öffnungswinkel $\alpha = \pi/3$ ist α_2^- .

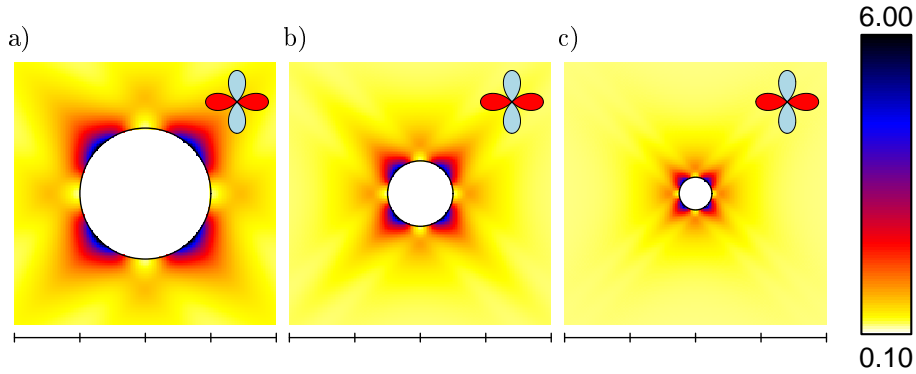


Abbildung 3.4: Lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ um eine kreisförmige Ausstanzung im Inneren eines d -Wellen-Supraleiters herum. Die Längenskala ist in Einheiten der Kohärenzlänge ξ unterteilt. a) Der Lochradius beträgt ξ , b) Der Lochradius beträgt $\xi/2$. c) Der Lochradius beträgt $\xi/4$. Das Quasiteilchen-Spektrum an der runden Grenzfläche richtet sich nach der Orientierung der Tangentialebene.

men schwächere gebundene Zustände hinzu, welche dafür flächendeckend auf einer Längenskala der Kohärenzlänge das Keilgebiet füllen. Sie werden durch die geraden Stücke der Grenzflächengeometrie erzeugt. Die weiter oben bereits erwähnten Kaustik-Effekte wirken sich auf diese gebundenen Andreev-Zustände allerdings noch destruktiv aus. Im Grenzfall sehr kleiner Radien $r \ll \xi$ dominiert das Reflexionsverhalten des Keils: In Teilabbildung 3.3.f stellen sich überall – bis auf den kleinen Bereich der Abrundung – die geometrisch induzierten gebundenen Andreev-Zustände eines spitzen Keils ein, wie sie in Abschnitt 2.1, Abbildung 2.2.i, bereits präsentiert worden sind.

3.2 Löcher

Die wohl einfachste Grenzflächengeometrie mit runden Anteilen ist ein geschlossener Kreis. In den nächsten beiden Abschnitten werden Supraleiter untersucht, die tief in ihrem Inneren, weit weg von anderen Grenzflächen, eine kreisförmige Ausstanzung aufweisen oder gelocht sind. Eine schematische Darstellung hierzu ist in Abbildung 1.1.b der Einleitung wiedergegeben. Die resultierende lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte ist in Abbildung 3.4 zu sehen. Offensichtlich existieren vier verschiedene Bereiche auf der Grenzflächengeometrie, in denen starke gebundene Andreev-Zustände bei Energie $E = 0$ aufzufinden sind. Das Zentrum eines solchen Bereichs ist dabei jeweils ein Punkt, dessen zugehöriger Normalenvektor der Grenzfläche gerade parallel zu einer Knotenrichtung der d -Welle gerichtet ist. Die entsprechende Tangentialebene nimmt an diesen Punkten genau die optimale Orientierung für gebundene Andreev-Zustände ein. An ihr reflektierte Quasiteilchen-Trajektorien sehen durchweg einen Vorzeichenwechsel der Symmetriefunktion des Gaps.

Analog gibt es ebenso vier dazwischenliegende Bereiche, bei denen die Tangentialebene lokal gerade so ausgerichtet ist, daß keinerlei gebundene Zustände existie-

ren. In Abbildung 3.4 sind diese Punkte jeweils oben, unten, links und rechts am Lochrand zu sehen, und ihr zugehöriger Normalenvektor ist parallel zu einer der „Keulen“-Richtungen der d -Wellen-Symmetriefunktion. Auf diese Art und Weise ergibt sich eine natürliche Oszillation der lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichte bei einem Umlauf um das Loch herum.

In den drei dargestellten Beispielen liegen die Lochradien auf der Längenskala der Kohärenzlänge. Die lokale Krümmung der Grenzfläche macht sich dann bereits bei Punkten bemerkbar, welche in nicht allzu großem Abstand liegen. Als Resultat sind in den Abbildungen in der Nähe des Loches strahlen- bzw. sternförmige Muster zu erkennen, welche die vierfache Symmetrie der supraleitenden Symmetriefunktion aufweisen. Bei Löchern mit sehr viel größerem Radius stirbt dieser Effekt aus, und lokal resultiert praktisch das triviale Ergebnis einer geraden Grenzfläche.

3.3 Flußführende Löcher unter Vortexeinfluß

Vergrößert man den Radius eines Lochs auf die Längenskala der magnetischen Eindringtiefe λ , so kann sich im Loch und seiner Umgebung stabil ein magnetischer Fluß von einigen Flußquanten Φ_0 befinden. In diesem Abschnitt wird untersucht, welchen Einfluß ein einzelner Abrikosov-Vortex auf die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte am Rand eines solchen flußführenden Lochs ausübt. Die grundlegende Situation ist in Abbildung 3.5.a schematisch dargestellt. Um die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte in dieser Anordnung berechnen zu können, muß die korrekte Ortsabhängigkeit des Magnetfelds berücksichtigt werden. In sehr guter Näherung ist das Magnetfeld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ innerhalb des Supraleiters als Lösung einer Helmholtz-Gleichung gegeben

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)B = \frac{1}{\lambda^2}B \quad (3.1)$$

Dabei ist über die magnetische Eindringtiefe λ die charakteristische Längenskala des elektrodynamischen Problems festgelegt. Für die Typ-II-Supraleiter, wie sie in der vorliegenden Arbeit untersucht werden, übersteigt die magnetische Eindringtiefe λ die Kohärenzlänge ξ deutlich, es gilt

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} \gg 1 \quad (3.2)$$

Um Gleichung (3.1) zu lösen, muß neben der geometrischen Randbedingung, daß das Magnetfeld innerhalb des Lochs und auf dem Lochrand einen konstanten Wert annimmt, zudem die Flußquantisierung berücksichtigt werden. Der gesamte magnetische Fluß durch das Loch, den Vortex und die sie umgebenden Bereiche des Supraleiters kann nur ein ganzzahliges Vielfaches eines Flußquants betragen:

$$\int ds \mathbf{B} = (n_F + 1)\Phi_0 \quad n_F \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

Beträgt der Abstand d des Vortex zum Lochrand etliche magnetische Eindringtiefen, so kann räumlich noch zwischen den einzelnen Beiträgen zum Gesamtfluß unterschieden werden. Der Vortex trägt mit seiner nächsten Umgebung dann

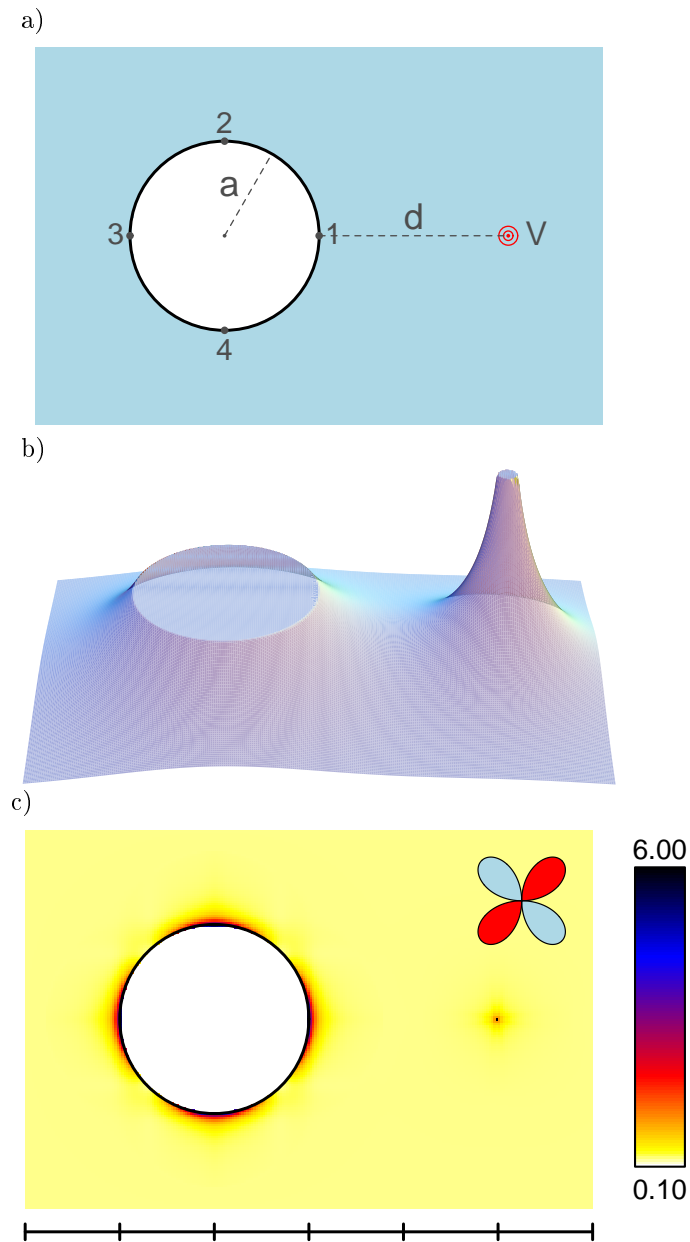


Abbildung 3.5: a) Schematische Darstellung eines gelochten, flußführenden d -Wellen-Supraleiters. Der Radius des Lochs sei a , und im Abstand d von der Grenzfläche befindet sich ein Abrikosov-Vortex. Der gesamte magnetische Fluß im System beträgt $n_F + 1$ Flußquanten. b) Verteilung des Magnetfelds B für das Fallbeispiel $\kappa = 10$, $a = 1\lambda$, $d = 2\lambda$ und $n_F = 2$. c) Zugehörige lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$. Die Längenskala ist in Einheiten der magnetischen Eindringtiefe λ unterteilt. An den Punkten 1-4 aus a) existieren gebundene Andreev-Zustände an der Grenzfläche, die dem Einfluß von Vortex und magnetischem Fluß unterworfen sind.

gerade ein Flußquant Φ_0 , während die Lochregion für n_F Flußquanten verantwortlich ist. Bei geringeren Abständen ist eine solche Unterscheidung allerdings nicht mehr möglich.

Für die Herleitung einer Lösung von Gleichung (3.1), welche sowohl die geometrische Randbedingung des Lochs als auch die physikalische der Flußquantisierung (3.3) berücksichtigt, sei auf [76] und [77] verwiesen. Ein Beispiel der resultierenden Magnetfeldverteilung für ein Loch mit Radius $a = \lambda$, einen Vortexabstand von $d = 2\lambda$, $\kappa = 10$ und $n_F = 2$ ist in Abbildung 3.5.b zu sehen. In Abschnitt A.3 des Anhangs wird aus dem Magnetfeld B das zugehörige magnetische Vektorpotential \mathbf{A} abgeleitet, welches dann bei der quasiklassischen Berechnung der lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichte eingeht.

Ein typisches Ergebnis des lokalen spektralen Gewichts $N(E = 0)$ wird in Abbildung 3.5.c wiedergegeben. Gebundene Andreev-Zustände existieren lediglich an der Vortexposition sowie in einem schmalen Streifen um die runde Grenzfläche herum, dessen Breite von der Größenordnung einer Kohärenzlänge ist. Innerhalb dieses schmalen Bereichs sind außerdem große Variationen in der Stärke der gebundenen Andreev-Zustände zu erkennen. Analog zur lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichte flußloser gelochter d -Wellen-Supraleiter, welche im vorangegangenen Abschnitt 3.2 vorgestellt worden ist, gibt es auch hier um die kreisförmige Grenzfläche herum vier verschiedene Regionen mit ausgeprägten gebundenen Andreev-Zuständen. Die jeweiligen lokalen Maxima sind dabei an den Punkten 1-4 aus Abbildung 3.5.a aufzufinden⁶.

Im folgenden wird nun der Frage nachgegangen, wie sich – bei einer fest vorgegebenen Flußquantenzahl im System – das spektrale Gewicht der gebundenen Andreev-Zustände an der kreisförmigen Grenzfläche ändert, wenn der Abstand des Abrikosov-Vortex variiert wird. Dabei ist es sinnvoll, eine Beschränkung auf die Punkte 1 und 3 aus Abbildung 3.5.a vorzunehmen, welche beide starke gebundene Andreev-Zustände aufweisen können. Während Punkt 1 an der dem Abrikosov-Vortex zugewandten Seite liegt, ist Punkt 3 gerade gegenüber auf der Rückseite des Lochs. Im weiteren Verlauf werden die exemplarischen Rahmenbedingungen des gelochten d -Wellen-Supraleiters aus Abbildung 3.5 beibehalten, nämlich ein Lochradius von $a = \lambda$ und $\kappa = 10$. Wie sich die am Punkt 1 resultierende lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ in Abhängigkeit vom Vortexabstand d für verschiedene Flußquantenzahlen n_F verändert, ist in Abbildung 3.7 dargestellt. Das analoge Ergebnis für den gegenüberliegenden Punkt 3 kann in Abbildung 3.6 betrachtet werden. Das spektrale Gewicht der gebundenen Andreev-Zustände zeigt zwischen den beiden Punkten deutliche Unterschiede, welche nachfolgend erläutert werden sollen.

Ist der Abrikosov-Vortex sehr weit vom Loch entfernt, also $d \gg \lambda$, so übt er keinen Einfluß auf die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte an der Grenzfläche aus, und der magnetische Fluß im Loch und seiner Umgebung beträgt genau n_F Flußquanten. Aufgrund dieses „äußeren“ Magnetfelds ist die Stärke der gebundenen Andreev-Zustände bei Energie $E = 0$ bereits reduziert, und das spektrale Gewicht wird zu höheren Energien verschoben⁷. Dieser Effekt hängt lediglich von der Amplitude des magnetischen Vektorpotentials an der Grenzfläche ab,

⁶ Beim Vergleich der Abbildungen 3.4 und 3.5.c ist die unterschiedliche Orientierung der d -Welle zu beachten.

⁷ Siehe auch [40].

nicht jedoch von seiner Richtung. Desweiteren betrifft er die Punkte 1 und 3 gleichermaßen, denn die Rotationssymmetrie der kreisförmigen Grenzfläche wird ja erst durch einen Einfluß des Abrikosov-Vortex bei kleineren Abständen gebrochen. Für große Vortexabstände $d \gg \lambda$ und $n_F = 0$ ist also kein Fluß im Loch gefangen, und auf beiden Seiten des Lochs sind die maximalen gebundenen Andreev-Zustände vorzufinden. Für $n_F = \pm 1$ trägt das Loch gerade ein Flußquant bzw. Antiflußquant, und das spektrale Gewicht ist an beiden Punkten 1 und 3 gleichermaßen reduziert. Bei $n_F = \pm 2$ ist das spektrale Gewicht schließlich noch stärker verringert.

Kommt der Abrikosov-Vortex näher, so ist die Unterscheidung zwischen zweierlei Effekten sinnvoll, welche man als direkten und indirekten Vortexeinfluß bezeichnen könnte. Der erste, direkte Einfluß beruht darauf, daß sich die nicht-rotationssymmetrischen Anteile⁸ des magnetischen Vektorpotentials an der dem Vortex zugewandten Seite des Lochs stark erhöhen. Allerdings ist die Rückseite um Punkt 3 herum davon praktisch nicht betroffen. Der zweite, indirekte Einfluß geht auf den rotationssymmetrischen Anteil⁹ des magnetischen Vektorpotentials zurück. Nähert sich der Abrikosov-Vortex dem Loch, so verändert sich auch das Magnetfeld darin, und zusätzlicher positiver Fluß koppelt im Loch ein¹⁰.

Dementsprechend läßt sich das Verhalten der lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichte am Punkt 3, auf der vom direkten Vortexeinfluß abgeschirmten Seite, recht einfach erklären. Hier ist nur der indirekte Einfluß relevant. Für $n_F \geq 0$ erhöht sich beim Näherrücken des Vortex der eingekoppelte magnetische Fluß und damit auch die Amplitude des rotationssymmetrischen magnetischen Vektorpotentials. Dadurch wird das sogenannte „Splitting“ der gebundenen Andreev-Zustände an der Grenzfläche noch verstärkt, und das in Abbildung 3.6 gezeigte spektrale Gewicht $N(E = 0)$ nimmt weiter ab. Bei negativen Flußquantenzahlen $n_F < 0$ verringert sich dagegen der absolut eingekoppelte magnetische Fluß, wenn der Vortexabstand reduziert wird, da die Magnetfelder in Loch und Vortex entgegengesetzte Vorzeichen haben¹¹. Folglich geht auch die Verschiebung des spektralen Gewichts zu höheren Energien zurück, und der Wert von $N(E = 0)$ steigt an. Da die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte in Abbildung 3.6 praktisch nur von der Stärke des Magnetfelds im Loch bestimmt wird, ergibt sich für eine vorgegebene Flußquantenzahl n_F im theoretischen Limes $d \rightarrow 0$ derselbe Wert wie für die nächsthöhere Flußquantenzahl $n_F + 1$ bei der Asymptotik $d \rightarrow \infty$. Beide Male befindet sich im Loch und seiner nächsten Umgebung ein rotationssymmetrisch verteilter magnetischer Fluß von $n_F + 1$ Flußquanten.

Die resultierende lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte am dem Vortex zugewandten Punkt 1 ist in Abbildung 3.7 wiedergegeben. Bis auf die oben besprochenen gleichen Ausgangswerte bei sehr großen Vortexabständen $d \gg \lambda$ unterscheiden sich die Kurvenverläufe, wenn der Abrikosov-Vortex näherrückt, doch drastisch von jenen aus Abbildung 3.6. Im Vergleich zu Punkt 3 dominiert am Punkt 1 nämlich der direkte Vortexeinfluß: Verringert sich der Vortexabstand, so steigt der nicht-rotationssymmetrische Anteil des magnetischen Vek-

⁸ In Anhang A.3 sind dies die Terme (A.31) und (A.33) bzw. (A.48), welche das Magnetfeld eines einzelnen Vortex vor einem Loch generieren, mit der Randbedingung eines verschwindenden Magnetfelds auf dem Lochrand. Siehe auch [76].

⁹ In Anhang A.3 ist dies der Term (A.32) bzw. (A.49).

¹⁰ Siehe auch Formel (A.24) für das Magnetfeld B_a innerhalb des Lochs.

¹¹ Relativ zum Magnetfeld des Lochs handelt es sich um einen näherrückenden Antivortex.

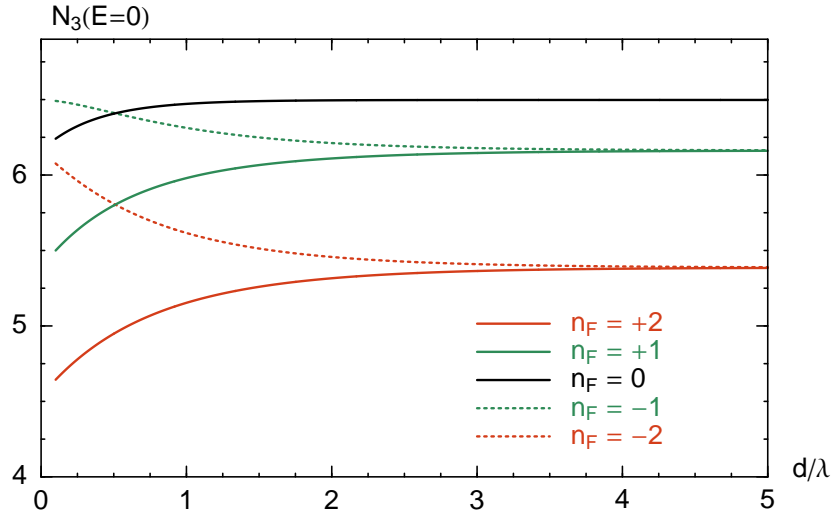


Abbildung 3.6: Lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ an der Rückseite eines flußführenden Lochs (Punkt 3 aus Abbildung 3.5.a). Ein einzelner Abrikosov-Vortex befindet sich im Abstand d von der Lochkante. Der Gesamtfluß des Systems ist quantisiert und beträgt $n_F + 1$ Flußquanten. Die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte ist auf der Rückseite des Lochs von einem direkten Vortexeinfluß praktisch abgeschirmt. Sie unterliegt lediglich einem indirekten Einfluß, da sich bei einer Verrückung des Abrikosov-Vortex auch der im Loch eingekoppelte magnetische Fluß verändert.

torpotentials um den Punkt 1 herum stark an. Der dort gleichfalls vorhandene rotationssymmetrische Anteil aufgrund eines eingefangenen Flusses wird dadurch allerdings nur verstärkt, wenn $n_F < 0$ ist. Für positive Flussquantenzahlen $n_F > 0$ wirken sich die beiden Beiträge jedoch entgegen. Anhand der Kurven in Abbildung 3.7 lassen sich die jeweiligen Konsequenzen für die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte sehr schön nachvollziehen. Für negative Flussquantenzahlen $n_F < 0$ erhöht sich bei kleineren Vortexabständen die Amplitude des magnetischen Vektorpotentials in der Umgebung von Punkt 1. Dadurch wird noch mehr spektrales Gewicht in Richtung höherer Energien verschoben, und der Wert $N(E = 0)$ sinkt monoton. Ein interessantes nichtmonotones Verhalten tritt dagegen für positive $n_F > 0$ zutage. Rückt der Abrikosov-Vortex näher, so macht sich der anwachsende direkte Vortexeinfluß zunächst in einer Verringerung des absoluten magnetischen Vektorpotentials bemerkbar. Damit geht auch das „Splitting“ zurück, und das spektrale Gewicht der gebundenen Andreev-Zustände erhöht sich. Bei einem Abstand von $d \approx \lambda$ heben sich die beiden konkurrierenden Beiträge des magnetischen Vektorpotentials auf der dem Vortex zugewandten Seite der Grenzfläche gerade auf¹², und die gebundenen Andreev-Zustände erreichen ihre maximale Stärke. Ab diesem Punkt überwiegt der direkte Vortexeinfluß, und der Betrag des resultierenden magnetischen Vektorpotentials wächst sehr schnell an. Damit nimmt auch das spektrale Gewicht der gebundenen Andreev-Zustände wieder rapide ab.

¹² Dieser Abstand ist von der Stärke des äußeren Magnetfelds abhängig.

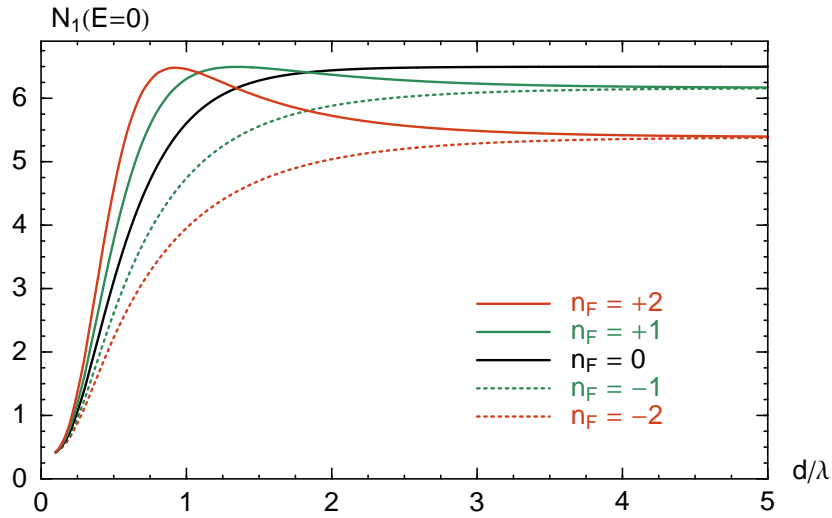


Abbildung 3.7: Lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ an der dem Abrikosov-Vortex zugewandten Seite eines flußführenden Lochs (Punkt 1 aus Abbildung 3.5.a). Der einzelne Abrikosov-Vortex befindet sich im Abstand d von der Lochkante. Der Gesamtfluß des Systems ist quantisiert und beträgt $n_F + 1$ Flußquanten. Die lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte unterliegt einem starken, direkten Einfluß durch den Abrikosov-Vortex, sodaß für $n_F \leq 0$ das spektrale Gewicht noch stärker zu höheren Energien verschoben wird, wenn der Vortex naherrückt („Vortex-Schatten-Effekt“). Sind das äußere und das Vortex-Magnetfeld gleich gerichtet ($n_F > 0$), so wirkt der direkte Einfluß durch den Vortex dem des äußeren Magnetfelds entgegen. Dies führt bei einer Verringerung des Vortexabstands zunächst zu einer Erhöhung des spektralen Gewichts.

Das Analogon des in Abschnitt 2.3 und Publikation [2] beschriebenen „Vortex-Schatten-Effekts“ ohne äußeres Magnetfeld ist hier – für einen d -Wellen-Supra-leiter mit gelochter Grenzflächengeometrie – in Abbildung 3.7 über den Fall $n_F = 0$ gegeben. Offensichtlich existiert dieser Effekt auch bei schwachen äußeren Magnetfeldern, sofern man von kleinen Vortexabständen $d \ll \lambda$ ausgeht. Bei größeren Vortexabständen und endlichen äußeren Magnetfeldern kann jedoch genau der gegenteilige Effekt auftreten: Das spektrale Gewicht gebundener Andreev-Zustände steigt an, wenn der Abrikosov-Vortex näherkommt.

Kapitel 4

Parabelförmige Grenzflächen und gebundene Zustände

4.1 Fokussierender weak link

Bislang wurde in den vorangegangenen Kapiteln der Frage nachgegangen, wo und wodurch gebundene Andreev-Zustände in d -Wellen-Supraleitern auftreten, wenn diese polygonale oder kreisförmige Grenzflächen besitzen. Räumlich gesehen sind dabei die stärksten gebundenen Andreev-Zustände stets direkt an der jeweiligen Grenzfläche angesiedelt¹ und nehmen in den Supraleiter hinein rasch ab. Daß ein solches monotones Verhalten allerdings nicht grundsätzlich gegeben sein muß, kann an einigen Ergebnissen bereits erahnt werden. Geht man etwa bei den lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichten eines gelochten d -Wellen-Supraleiters in Abbildung 3.4 von einem der vier lokalen Minima an der Grenzfläche aus, so erhöht sich in den Supraleiter hinein zunächst das spektrale Gewicht bei Energie $E = 0$, wenn auch nur schwach.

In diesem letzten Kapitel der vorliegenden Arbeit wird nun gezielt eine andere nichttriviale Grenzflächenstruktur entworfen, welche allein aus geometrischen Gründen ein signifikantes lokales Maximum gebundener Andreev-Zustände *innerhalb* des d -Wellen-Supraleiters erzeugt. Dazu wird die optische Eigenschaft einer Parabel benutzt, alle parallel zu ihrer Symmetrieachse einfallenden Strahlen in einem Brennpunkt zu fokussieren und umgekehrt alle Strahlen aus dem Brennpunkt auch wieder parallel hinauszuwerfen.

Der grundlegende Aufbau dieser speziellen Grenzflächengeometrie ist in Abbildung 4.1 näher erläutert. Im Prinzip handelt es sich um einen sogenannten „weak link“, eine räumliche Verengung zwischen zwei massiven Supraleitern, der von seiner Form her an einen Flaschenhals erinnert. Das Funktionsprinzip kann der schematischen Abbildung 4.2 entnommen werden. Bei der angegebenen Orientierung der d -Wellen-Symmetriefunktion erfahren alle Quasiteilchen-Trajektorien,

¹ Der für gebundene Zustände nötige Vorzeichenwechsel der Symmetriefunktion findet bei der Reflexion der Quasiteilchen-Trajektorien an der Grenzfläche statt.

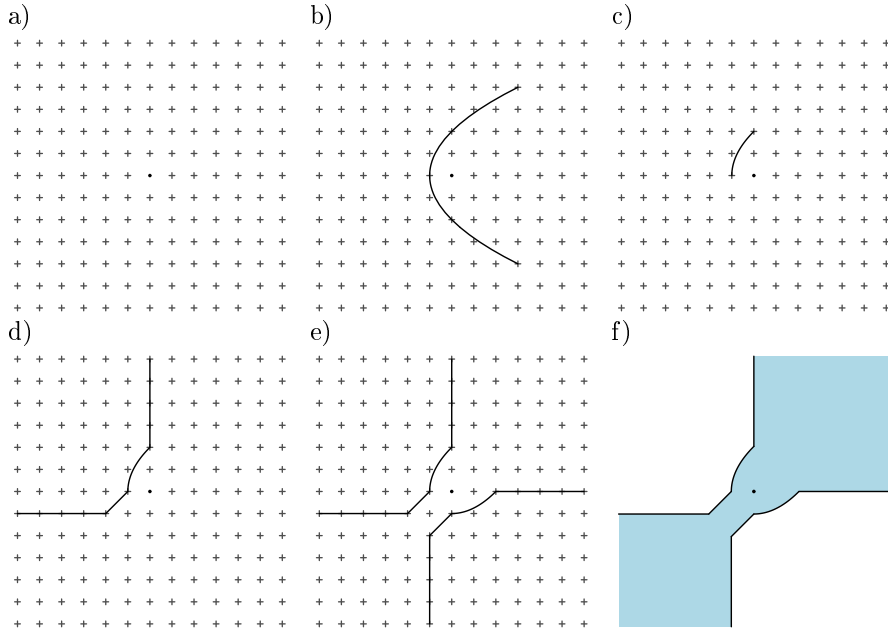


Abbildung 4.1: Schrittweises Entstehen der in diesem Kapitel untersuchten fokussierenden Grenzflächengeometrie. Das äquidistante Gitter dient einer besseren Veranschaulichung des grundlegenden Aufbaus. a) Auszeichnung eines Punkts. b) Gedrehte Parabel mit dem ausgezeichneten Punkt als Brennpunkt. c) Beschränkung auf ein kleines Teilstück der Parabel. d) Erweiterung um polygonale Grenzflächen-Anteile. e) Verdopplung durch Spiegeln. f) Fertige Geometrie eines Supraleiters (blau) mit einer räumlichen Verengung in Form eines Flaschenhalses.

welche durch den ausgezeichneten Punkt verlaufen und von der Grenzflächengeometrie reflektiert werden, in unmittelbarer Nachbarschaft des Punktes einen Vorzeichenwechsel der Gapfunktion. Für sämtliche Trajektorien, die dabei auf die parabelförmigen Teilstücke treffen, vollzieht sich der Vorzeichenwechsel – per Konstruktion – sogar zwischen den maximal möglichen Amplituden. Dies führt zu vielen Beiträgen für starke gebundene Andreev-Zustände am ausgezeichneten Punkt.

Die resultierende lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ ist in Abbildung 4.3 dargestellt. In der ersten Spalte ist die d -Wellen-Symmetriefunktion zur Geometrie gerade so orientiert, daß sich an den langen geraden Grenzflächen in einiger Entfernung des weak links die üblichen gebundenen Andreev-Zustände ergeben. Allerdings treten innerhalb der Verengung selbst keine signifikanten gebundenen Zustände auf. Gänzlich anders ist das Resultat in der rechten Spalte für die konstruktive Orientierung der d -Wellen-Symmetriefunktion, wie sie auch in Abbildung 4.2 angedeutet ist. Hier kann man sehr gut nachvollziehen, wie sich das spektrale Gewicht gebundener Andreev-Zustände am ausgezeichneten Punkt stark vergrößert, wenn die absoluten Ausmaße der Grenzflächengeometrie verringert werden. Bei typischen Abmessungen unterhalb einer Kohärenzlänge ξ , etwa bei Abbildung 4.3.f, ist am ausgezeichneten Punkt ein signifikantes lo-

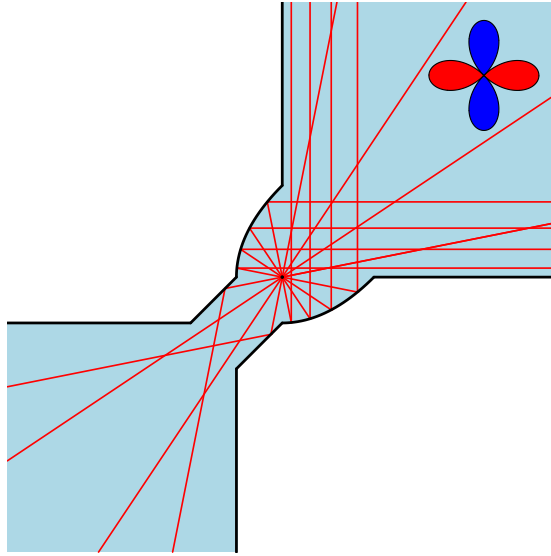


Abbildung 4.2: Grundlegende Funktionsweise der in diesem Kapitel untersuchten fokussierenden Grenzflächengeometrie eines d -Wellen-Supraleiters (blau). Dargestellt sind einige typische Quasiteilchen-Trajektorien (rot), welche durch den ausgezeichneten Punkt verlaufen. Fast alle dieser Trajektorien treffen auf die Grenzfläche auf und „sehen“ einen Vorzeichenwechsel der d -Wellen-Symmetriefunktion. Diejenigen Trajektorien, welche die parabelförmigen Teilstücke treffen, werden zweimal reflektiert. Dabei ist gewährleistet, daß die ein- und auslaufenden Trajektorien jeweils in Richtungen unterschiedlichen Vorzeichens bei maximaler Amplitude verlaufen.

kales Maximum des spektralen Gewichts bei $E = 0$ aufzufinden, welches allein durch die Grenzflächengeometrie induziert wird.

Eine Vergrößerung des interessantesten räumlichen Bereichs wird abschließend in Abbildung 4.4 präsentiert. Neben Kaustik-Effekten, welche jenen aus Abbildung 3.3 ähneln, ist hier deutlicher zu erkennen, daß das lokale Maximum am ausgezeichneten Punkt in einen ganzen Bereich erhöhten spektralen Gewichts eingebettet ist, der quer zur Richtung des weak links verläuft. Interessanterweise erzeugt die hier vorgestellte Grenzflächengeometrie zusätzlich um den gedachten Schnittpunkt der Parabelstücke herum einen kleinen Bereich, in dem keine gebundenen Andreev-Zustände vorliegen. Dieser Bereich liegt in direkter Nachbarschaft des ausgezeichneten Punktes und ist in den Abbildungen 4.3.f und 4.4.f klar zu erkennen.

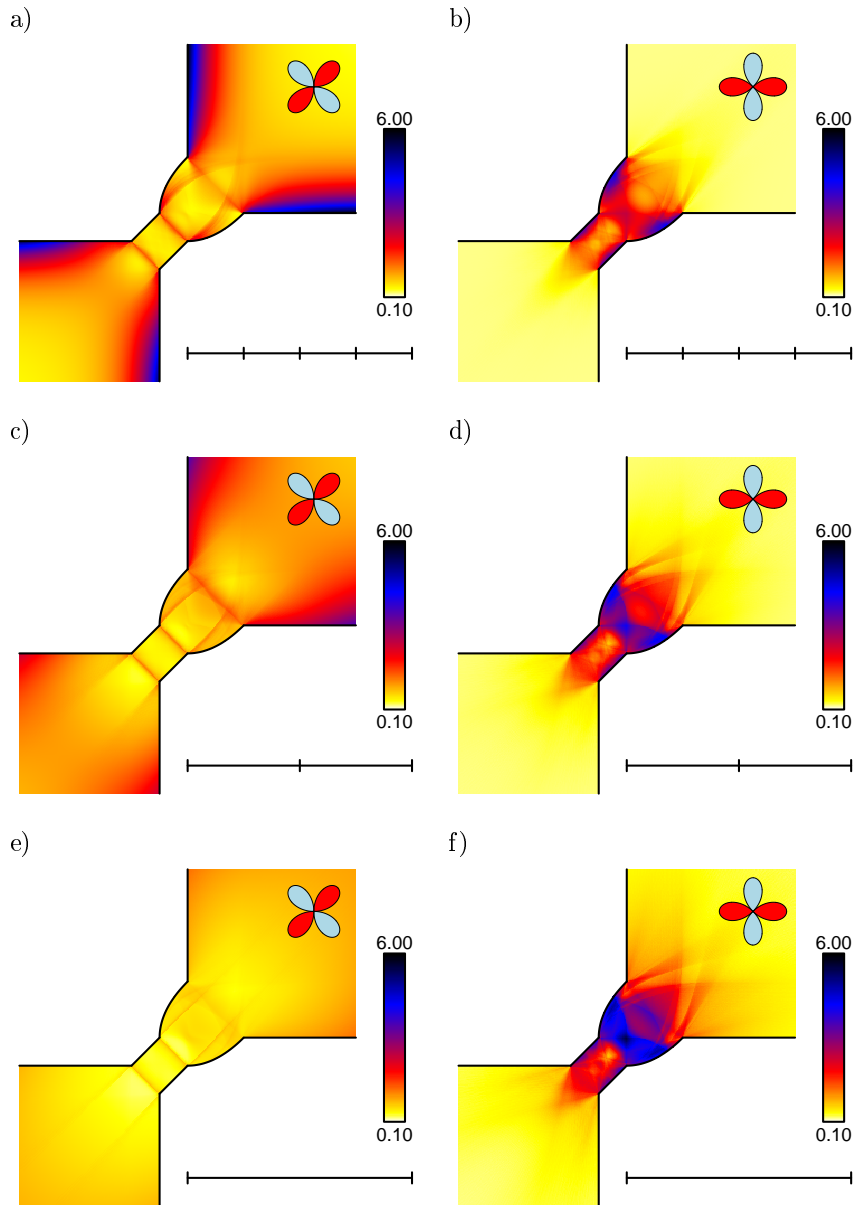


Abbildung 4.3: Lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ in einem fokussierenden weak link eines d -Wellen-Supraleiters. Die Längenskala ist in Einheiten der Kohärenzlänge ξ unterteilt. Die absolute Größe der Anordnung halbiert sich also von Zeile zu Zeile. Linke Spalte a),c),e): Die d -Wellen-Symmetriefunktion ist für den weak link nicht-konstruktiv orientiert. Rechte Spalte b),d),f): Bei dieser Orientierung der d -Welle entstehen signifikante gebundene Andreev-Zustände am ausgezeichneten Punkt, wenn die Ausmaße der Grenzflächengeometrie klein genug sind.

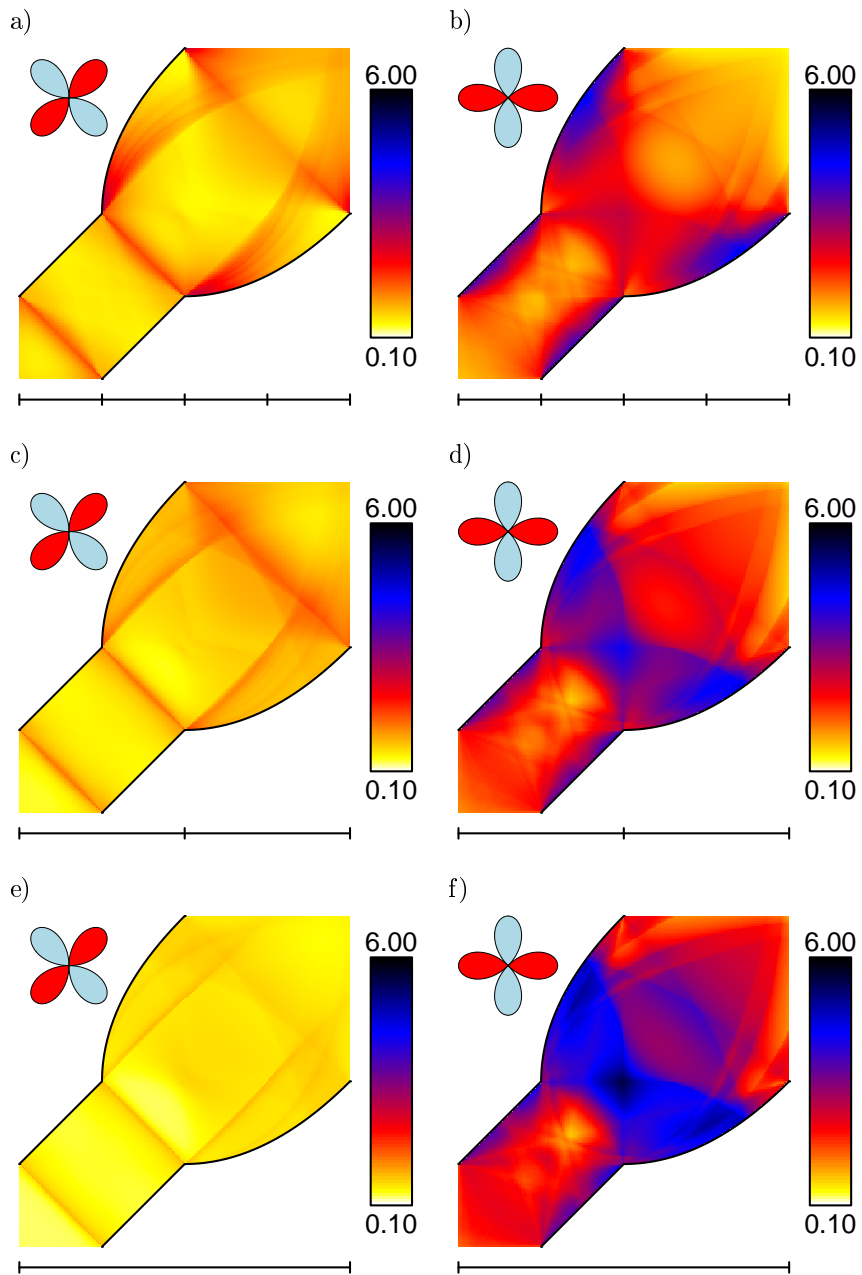


Abbildung 4.4: Lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte $N(E = 0)$ in einem fokussierenden weak link eines d -Wellen-Supraleiters. Hier wird nur der Ausschnitt des tatsächlichen weak links gezeigt und die Längenskala ist ausnahmsweise in Einheiten von $\xi/2$ unterteilt. Die absolute Größe der Anordnung halbiert sich von Zeile zu Zeile. Linke Spalte a),c),e): Die d -Wellen-Symmetriefunktion ist für den weak link nicht-konstruktiv orientiert. Rechte Spalte b),d),f): Bei dieser Orientierung der d -Welle entstehen signifikante gebundene Andreev-Zustände am ausgezeichneten Punkt, wenn die Ausmaße der Grenzflächengeometrie klein genug sind.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In dieser Arbeit ist der Frage nachgegangen worden, wie gebundene Andreev-Zustände in d -Wellen-Supraleitern allein durch die Geometrie einer Grenzfläche beeinflusst werden. Für die Existenz gebundener Andreev-Zustände an einer Grenzfläche ist von entscheidender Bedeutung, daß die dort reflektierten Quasiteilchen-Trajektorien einen Vorzeichenwechsel der Gapfunktion erleben. Bei nichttrivialen Grenzflächengeometrien rückt damit unweigerlich eine Eigenschaft in den Mittelpunkt, welche zunächst kaum mit einem Supraleiter in Verbindung zu stehen scheint: das klassische optische Reflexionsverhalten einer analogen spiegelnden Anordnung.

Darauf aufbauend ergeben sich allein schon bei einfachen keilförmigen Grenzflächengeometrien überraschende Ergebnisse. In Abhängigkeit von Öffnungswinkel und Orientierung zur Gapfunktion kann im Eckbereich des Keils eine Vielzahl von Quasiteilchen-Spektren erzeugt werden. Außer geometrisch induzierten gebundenen Andreev-Zuständen ist es etwa auch möglich, in der Ecke Bulkspektren einer d -, s - oder anisotropen s -Welle aufzufinden. Betrachtet man Keile, deren Winkelhalbierende parallel zur Knotenrichtung der d -Welle ausgerichtet ist, zeigt sich ein spektakuläres oszillatorisches Verhalten des induzierten Quasiteilchen-Spektrums: Verringert man kontinuierlich den Öffnungswinkel des Keils, so resultiert in der Ecke eine wechselnde Abfolge von gebundenen Zuständen und Bulkspektren. Dieser Effekt läßt sich direkt auf das unterschiedliche Reflexionsverhalten von Keilen verschiedener Öffnungswinkel zurückführen.

In der vorliegenden Arbeit wird der Rauigkeit einer Grenzfläche Rechnung getragen, indem die tatsächliche räumliche Ausdehnung einzelner Facetten und Grenzflächenstrukturen Berücksichtigung findet. Im Gegensatz zu Modellen intrinsischer Rauigkeit zeigen die hier erzielten Ergebnisse für kompliziertere polygonale Grenzflächenstrukturen eine starke lokale Variation der Quasiteilchen-Zustandsdichte, welche direkt mit der konkreten Facettierung und Beschaffenheit der Grenzfläche zusammenhängt. Damit ist ein grundlegender Schritt zu einem theoretischen Verständnis räumlich hochaufgelöster Tunnelmessungen vollzogen, in denen genau solche Abhängigkeiten aufgefunden werden¹.

¹ Vergleiche etwa [32],[33] sowie [78].

Runde Grenzflächengeometrien besitzen ein eigenes Reflexionsverhalten. Damit kann sich in Keilen mit abgerundeten Ecken eine andere lokale Quasiteilchen-Zustandsdichte einstellen als bei spitzen Keilen. Entlang geschlossener runder Grenzflächen innerhalb eines d -Wellen-Supraleiters ergibt sich eine typische Variation der lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichte: Vier Bereiche mit maximalen gebundenen Andreev-Zuständen wechseln sich mit vier Bereichen ab, in denen normale Bulkspektren auftreten. Dieses Resultat spiegelt direkt die vierfache Symmetrie der d -Welle wider.

Löcher, deren Radius von der Größenordnung der magnetischen Eindringtiefe ist, können zudem einen stabilen magnetischen Fluß von einigen Flußquanten beinhalten. Wenn sich zusätzlich noch ein Abrikosov-Vortex in der Nähe befindet, unterliegen die gebundenen Andreev-Zustände an der kreisförmigen Grenzfläche einem Wechselspiel der verschiedenen Einflüsse. Während gebundene Andreev-Zustände an der Rückseite des Lochs von einem direkten Vortexeinfluß abgeschirmt sind und nur auf Änderungen des eingekoppelten magnetischen Flusses reagieren, ergibt sich auf der dem Abrikosov-Vortex zugewandten Seite ein interessanter Effekt. Befinden sich im Loch und seiner Umgebung bereits einige Flußquanten, so verändert sich die Stärke der gebundenen Andreev-Zustände nicht-monoton, wenn der Vortexabstand verringert wird. Rückt der Abrikosov-Vortex aus großer Entfernung näher, steigt das spektrale Gewicht der gebundenen Andreev-Zustände zunächst an, bis ein Maximalwert erreicht ist. Erst bei Vortex-Abständen unterhalb der magnetischen Eindringtiefe ergibt sich dann der bereits bekannte Vortex-Schatten-Effekt, eine starke Unterdrückung gebundener Andreev-Zustände auf der dem Vortex zugewandten Seite des Lochs².

Die direkte Abhängigkeit der gebundenen Andreev-Zustände von klassischen Reflexions-Eigenschaften der Grenzflächengeometrie eröffnet theoretisch auch die faszinierende Möglichkeit, durch eine künstliche Konstruktion der Grenzfläche nach optischen Gesichtspunkten neue Effekte in der Supraleitung zu erzeugen. Als Beispiel hierfür wurde in der vorliegenden Arbeit ein weak link vorgestellt, der eine spezielle Grenzflächengeometrie mit parabolischen Anteilen aufweist. Basierend auf der optisch fokussierenden Eigenschaft einer Parabel wird damit innerhalb eines d -Wellen-Supraleiters ein starkes lokales Maximum gebundener Andreev-Zustände erzeugt, welches nicht auf räumliche Inhomogenitäten wie einen Abrikosov-Vortex zurückgeht, sondern allein geometrische Ursachen hat.

Zumindest für einige der hier gewonnenen Ergebnisse erscheint eine direkte experimentelle Bestätigung durchaus realistisch. Tunnelmessungen mit einer räumlichen Auflösung unterhalb der Kohärenzlänge sind heutzutage ohne weiteres möglich³. Auch wenn es nicht machbar sein sollte, verschiedene, auf der Skala der Kohärenzlänge spitze Keile zielgerichtet zu fabrizieren, so scheint bereits in herkömmlichen „natürlichen“ Proben eine hinreichende Menge solcher Strukturen vorzuliegen⁴. Selbst Löcher, deren Radius lediglich von der Größenordnung der Kohärenzlänge ist, sind durchaus anzutreffen⁵. Eine kompliziertere Geometrie wie der fokussierende weak link müsste dagegen künstlich hergestellt werden.

² Vergleiche [2].

³ Siehe etwa die STM-Messungen [32, 33, 78]. Vergleiche dazu auch [79, 80, 81].

⁴ Vergleiche etwa [32] und [33].

⁵ Siehe [32].

Dies mag für die bekannten Kuprat-Supraleiter mit Standardtechniken (noch) nicht möglich sein. Publikation [82] zeigt jedoch, daß prinzipiell – wenn auch in etwas anderem Kontext – bereits Grenzflächengeometrien mit atomarer Genauigkeit zusammengesetzt werden können. Auch hier sind die klassischen optischen Eigenschaften der Grenzfläche für das beobachtete nichtklassische Phänomen von entscheidender Bedeutung.

Anhang

A.1 Reflexionseigenschaften von Keilen

In diesem Abschnitt wird das spezielle Reflexionsverhalten eines Keils mit Öffnungswinkel α untersucht. Der Keil liege in der komplexen Ebene, wobei der erste Schenkel durch die nichtnegative reelle Achse gegeben ist und der zweite Schenkel durch den komplexen Einheitsvektor $e^{i\alpha}$ aufgespannt wird. Die Ausbreitungsrichtung einer Trajektorie, die mithilfe eines Winkels φ beschrieben werden kann, soll ebenfalls durch den zugehörigen komplexen Einheitsvektor $e^{i\varphi}$ repräsentiert werden.

Verwendet man den Operator C als Bezeichnung für das komplexe Konjugieren, so läßt sich die Reflexion einer Trajektorie an einer beliebigen spiegelnden Geraden mit Richtung $e^{i\gamma}$ darstellen durch die Operation

$$S_\gamma = U_\gamma C U_{-\gamma} = C U_{-2\gamma} = U_{2\gamma} C \quad (\text{A.1})$$

Hierbei vermittelt der Operator $U_\gamma = e^{i\gamma} \cdot \mathbb{1}$ eine Drehung in der komplexen Ebene um dem Winkel γ .

Bei der nachfolgenden Betrachtung ist irrelevant, an welcher Stelle eine Trajektorie einen Schenkel trifft – es interessiert lediglich die Ausbreitungsrichtung. Die einlaufende Trajektorie habe vor der ersten Reflexion den Winkel $\varphi \in (\pi, \pi + \alpha]$ und treffe o.B.d.A. zuerst auf Schenkel eins. Da es unmöglich ist, daß eine Reflexion zweimal hintereinander am selben Schenkel auftritt, erfolgen alle weiteren Reflexionen abwechselnd zwischen Schenkel zwei und Schenkel eins. Ist der Winkel der Trajektorie schließlich erstmalig irgendwo im Intervall $[0, \alpha]$ angelangt, erfolgen keine weiteren Reflexionen. Endet die Folge von Reflexionen an Schenkel zwei, so ist die Gesamtwirkung des Keils nach $n \in \mathbb{N}$ Doppelreflexionen:

$$R_n^+ = (S_\alpha S_0)^n = (U_{2\alpha} C C)^n = U_{2n\alpha} \quad (\text{A.2})$$

Endet die Folge hingegen am ersten Schenkel, so erhält man für $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n^- = S_0 (S_\alpha S_0)^{n-1} = C U_{2(n-1)\alpha} = C U_{-\alpha} U_{(2n-1)\alpha} = S_{\alpha/2} U_{(2n-1)\alpha} \quad (\text{A.3})$$

Das Ergebnis R_n^+ ist eine Drehung um den Winkel $2n\alpha$. Dagegen ist R_n^- eine Drehung um den Winkel $(2n-1)\alpha$ mit anschließender Spiegelung an der Winkelhalbierenden des Keils.

Für Keile mit Öffnungswinkel $\alpha_n^+ = \pi/2n$ ist somit nach $2n$ Einzelreflexionen¹ gemäß R_n^+ eine Gesamtdrehung des Trajektorienwinkels um π erreicht, danach erfolgt keine weitere Reflexion. Damit verläuft jede auslaufende Trajektorie genau antiparallel zur einlaufenden Trajektorie.

Analog ist für Keile mit Öffnungswinkel $\alpha_n^- = \pi/(2n - 1)$ nach $2n - 1$ Einzelreflexionen² gemäß R_n^- letztendlich eine Drehung des Trajektorienwinkels um π mit anschließender Spiegelung an der Winkelhalbierenden des Keils erfolgt. Die Richtung jeder auslaufenden Trajektorie ist also nicht nur entgegengesetzt zur einlaufenden, sondern zusätzlich an der Winkelhalbierenden gespiegelt.

A.2 Konforme Abbildungen und Phasenfaktor

Die Grundlage der Methode konformer Abbildungen besteht darin, natürliche Eigenschaften analytischer Funktionen auszunutzen. So ist die Laplace-Gleichung invariant bei einer Transformation des zugrundeliegenden Gebietes durch analytische Funktionen. Da analytische Funktionen zudem konform sind und somit auch lokale Winkeltreue gewährleisten³, bleiben hierbei von-Neumannsche Randbedingungen erhalten.

Oftmals wird eine Lösung der Laplace-Gleichung für ein Zielgebiet gesucht, welches nichttriviale Ränder aufweist. Andererseits mag auf einem einfachen sogenannten Modellgebiet, etwa dem oberen Halbraum der komplexen Ebene oder dem Einheitskreis, bereits eine Lösung bekannt sein. Es ist dann ausreichend, eine analytische Funktion zu finden, welche den komplizierteren Rand des Zielgebiets auf den einfachen Rand des Modellgebiets abbildet. Ist diese Abbildungsfunktion dann bekannt, so kann mit ihr das gesamte Zielgebiet auf das Modellgebiet transformiert werden, um die dort bereits vorhandene Lösung auszuwerten. Auf diese Weise ergibt sich die Lösung der Laplace-Gleichung im Zielgebiet praktisch von selbst, sofern die analytische Abbildungsfunktion auf ein anderes, einfacheres Gebiet bekannt ist, für das eine entsprechende Lösung schon vorliegt.

In Abschnitt 2.3 wird zur Berechnung der lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichten bei Anwesenheit eines Abrikosov-Vortex eine Lösung für den Phasenfaktor $e^{i\phi}$ gesucht. Hierbei muß ϕ selbst überall eine Lösung der homogenen Laplace-Gleichung

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = 0 \quad (\text{A.4})$$

sein, außer an der Position des Vortex, wo sich eine Phasenquelle der Stärke 2π befindet. Außerdem sollen an jedem Stück der Grenzfläche mit dem lokalen Normalenvektor \mathbf{n} von-Neumannsche Randbedingungen erfüllt sein

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (\text{A.5})$$

¹ Für die spezielle Trajektorie mit Winkel $\varphi = \pi + \alpha$, welche parallel zu Schenkel zwei ist, genügt eine Reflexion weniger. Das Reflexionsverhalten R_n^- liefert dann für die zugehörige auslaufende Trajektorie den Winkel α .

² Auch hier ist die spezielle Trajektorie mit Winkel $\varphi = \pi + \alpha$, welche parallel zu Schenkel zwei ist, gesondert zu betrachten. Bereits nach $2n - 2$ Einzelreflexionen erhält man über das Reflexionsverhalten R_{n-1}^+ für die auslaufende Trajektorie den Winkel 0.

³ Kritische Punkte, an denen die Ableitung der Abbildungsfunktion verschwindet, sind im folgenden ausgenommen.

Um die Methode konformer Abbildungen anzuwenden, wird nun zunächst ein einfaches Modellgebiet betrachtet, in diesem Fall die obere komplexe Halbebene \mathbb{C}^+ mit Rand \mathbb{R} . Die noch unbekannte Phasenfunktion Φ auf diesem Modellgebiet sei eine reelle Skalarfunktion der unabhängigen Variablen z und z^* . Dann gelten die Operatoridentitäten⁴

$$\nabla = \partial_x + i\partial_y = 2\partial_{z^*} \quad (\text{A.6})$$

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial_z\partial_{z^*} \quad (\text{A.7})$$

Ist der Vortex am Punkt $z_v \in \mathbb{C}^+$ positioniert, so kann man zunächst die Eigenschaften eines Phasenfaktors der folgenden Gestalt untersuchen

$$e^{i\Phi_1} = \frac{z - z_v}{|z - z_v|} \quad (\text{A.8})$$

Das so definierte Φ_1 besitzt bis auf die von-Neumannschen Randbedingungen bereits alle übrigen geforderten Eigenschaften. Der wohl kürzeste Weg, dies zu beweisen, bedient sich der Relation⁵

$$|z| = \sqrt{zz^*} = s(z)\sqrt{z}\sqrt{z^*} \quad (\text{A.9})$$

mit

$$s(z) = \begin{cases} +1 & z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \\ -1 & z \in \mathbb{R}^- \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Damit erhält der Phasenfaktor (A.8) die Gestalt

$$e^{i\Phi_1} = s(z - z_v) \frac{\sqrt{z - z_v}}{\sqrt{z^* - z_v^*}} \quad (\text{A.11})$$

und die Phasenfunktion Φ_1 selbst ist

$$\begin{aligned} \Phi_1(z, z^*) &= -i \ln \left(s(z - z_v) \frac{\sqrt{z - z_v}}{\sqrt{z^* - z_v^*}} \right) \\ &= -i \ln s(z - z_v) - \frac{i}{2} \ln(z - z_v) + \frac{i}{2} \ln(z^* - z_v^*) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

In dieser Darstellung liefert die Anwendung der Gleichungen (A.6) und (A.7) sofort

$$\nabla\Phi_1 = \frac{i}{z^* - z_v^*} \quad (\text{A.13})$$

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{A.14})$$

Die Laplace-Gleichung ist also überall bis auf den singulären Punkt $z = z_v$ erfüllt. Ein geschlossenes Wegintegral über den Phasengradienten, welches den Punkt z_v umläuft, ist mithilfe der komplexen Darstellung gerade⁶

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \nabla\Phi_1(\mathbf{r}) = \text{Re} \oint dz (\nabla\Phi_1)^* = \text{Re}(-i) \oint dz \frac{1}{z - z_v} = 2\pi \quad (\text{A.15})$$

⁴ Es ist $\partial_x = \partial_z + \partial_{z^*}$ und $\partial_y = i(\partial_z - \partial_{z^*})$.

⁵ Hierbei wird von der Standarddefinition der komplexen Wurzelfunktion ausgegangen.

⁶ Beim letzten Schritt geht der Residuensatz ein. Ein geschlossenes Wegintegral, welches nicht um z_v verläuft, hat dementsprechend den Wert 0.

Somit weist Φ_1 also auch den richtigen Quellterm an der Vortexposition auf. Allerdings werden die von-Neumannschen Randbedingungen noch nicht erfüllt: Der gemäß Gleichung (A.8) definierte Phasenfaktor repräsentiert einen freien Vortex. Da der Rand des gewählten Modellgebiets, die reelle Achse, eine sehr einfache Gestalt hat, können die Randbedingungen allerdings analog zur klassischen Spiegelladungs-Methode gewährleistet werden. Nötig ist lediglich die Positionierung eines zusätzlichen Antivortex⁷ an der gespiegelten Vortexposition $z_v^* \in \mathbb{C}^-$. Als Endergebnis für den Phasenfaktor im Modellgebiet resultiert:

$$e^{i\Phi} = \frac{z - z_v}{|z - z_v|} \cdot \frac{z^* - z_v}{|z^* - z_v|} \quad (\text{A.16})$$

Hierfür ergibt sich analog zu oben für den Phasengradienten der explizite Ausdruck

$$\nabla\Phi = \frac{i}{z^* - z_v^*} - \frac{i}{z^* - z_v} \quad (\text{A.17})$$

Entlang der Grenzfläche gilt dann mit $z = z^* \in \mathbb{R}$:

$$\nabla\Phi = 2\text{Im}\frac{1}{z - z_v} \in \mathbb{R} \quad (\text{A.18})$$

Somit sind mit dem Phasenfaktor gemäß Gleichung (A.16) jetzt auch von-Neumannsche Randbedingungen im Modellgebiet erfüllt.

Nachdem nun die korrekte Lösung Φ auf dem Modellgebiet bekannt ist, reicht es aus, eine analytische Funktion zu finden, welche das Zielgebiet mit komplizierteren Rändern auf das Modellgebiet abbildet. Da in dieser Arbeit die Lösung für keilförmige Zielgebiete von Interesse ist, wird die Transformation über die Potenzfunktion vermittelt. Bekanntlich ist die Funktion

$$w(z) = z^{\alpha/\pi} \quad (\text{A.19})$$

analytisch und bildet die obere komplexe Halbebene \mathbb{C}^+ auf ein keilförmiges Gebiet mit Öffnungswinkel α ab. Insbesondere wird die positive reelle Achse auf sich selbst abgebildet und entspricht dem ersten Schenkel des Keils. Der zweite Schenkel, welcher durch den komplexen Einheitsvektor $e^{i\alpha}$ aufgespannt wird, geht dagegen aus der negativen reellen Achse hervor. Für die Abbildung des Keils auf das Modellgebiet benötigt man nur noch eine analytische Umkehrfunktion von Gleichung (A.19). Die naheliegende Abbildung

$$z(w) = w^{\pi/\alpha} \quad (\text{A.20})$$

ist nur für Öffnungswinkel $\alpha \leq \pi$ geeignet. Bei größeren Öffnungswinkeln werden aufgrund der Unstetigkeit der Potenzfunktion an der negativen reellen Achse nicht mehr alle Punkte w aus dem Keilgebiet in die obere komplexe Halbebene \mathbb{C}^+ abgebildet. Dieses Problem kann durch geeignete komplexe Rotationen gelöst werden. Die leicht modifizierte Funktion

$$z(w) = e^{i\pi(1-\pi/\alpha)} \left(w e^{i(\pi-\alpha)} \right)^{\pi/\alpha} \quad (\text{A.21})$$

⁷ Dieses Vorgehen ist beispielsweise in [83], §18.5, und [84], S. 76f., zu finden, um für die Vortex-Lösung der London-Gleichung die richtigen Randbedingungen an einer geraden Grenzfläche zu erzeugen.

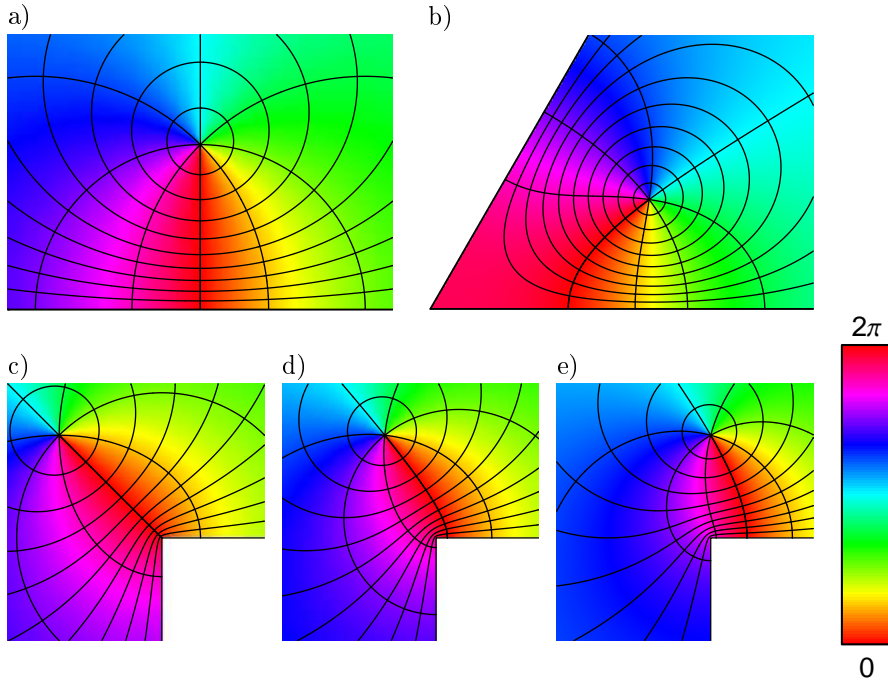


Abbildung A.1: Beispiele für die gemäß Gleichung (A.22) bestimmte analytische Phasenverteilung ϕ um einen Vortex in einer keilförmigen Grenzflächen-Geometrie. a) Lösung im Modellgebiet, der oberen komplexen Halbebene. b) Typische Lösung für einen Vortex in einem Keil mit spitzem Öffnungswinkel (hier: $\alpha = \pi/3$). Um die Projektionspunkte an beiden Grenzflächen herum ist der Phasengradient am stärksten. c)-e) Der Öffnungswinkel des Keils beträgt $\alpha = 3\pi/2$. Die Position des Vortex verändert sich in horizontaler Richtung. Diese Bilder können direkt mit der resultierenden lokalen Quasiteilchen-Zustandsdichte in Abbildung 2.12.d-f verglichen werden.

bildet das keilförmige Gebiet für jeden Öffnungswinkel analytisch (und somit auch stetig) auf das Modellgebiet der oberen komplexen Halbebene ab. Mit der weiter oben abgeleiteten dortigen Lösung (A.16) ist damit der⁸ gesuchte Phasenfaktor an einem Punkt $w = r_x + ir_y$ des keilförmigen Gebiets

$$e^{i\phi(\mathbf{r})} = \frac{z(w) - z(w_v)}{|z(w) - z(w_v)|} \cdot \frac{z(w)^* - z(w_v)}{|z(w)^* - z(w_v)|} \quad (\text{A.22})$$

Dabei ist die Abbildung $z(w)$ gemäß Gleichung (A.21) zu verwenden, über welche auch der Öffnungswinkel α des Keils eingeht. Die Position des Vortex wird durch die Konstante $w_v = r_{x,v} + ir_{y,v}$ festgelegt. Einige Beispiele für diese durch die Methode konformer Abbildungen gewonnene analytische Lösung ϕ der Laplace-Gleichung sind in Abbildung A.1 zu sehen.

⁸ Ein zusätzlicher globaler Phasenfaktor ist physikalisch bedeutungslos.

A.3 Vortex vor einem Loch: magnetisches Vektorpotential

An dieser Stelle soll für einen gelochten Supraleiter mit Abrikosov-Vortex gemäß Abschnitt 3.3 und Abbildung 3.5 das zugehörige magnetische Vektorpotential \mathbf{A} in der London-Eichung berechnet werden. Hierbei sind Polarkoordinaten r, θ nützlich, deren Ursprung im Mittelpunkt des Lochs liegt. Wie in der schematischen Abbildung 3.5.a dargestellt, bezeichnet a den Lochradius. Statt des Vortexabstands d zum Lochrand wird im folgenden allerdings die Radialkoordinate $R = a + d$ verwendet, um die Vortexposition \mathbf{R} zu charakterisieren.

Ausgangspunkt ist diejenige Magnetfeldverteilung $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, welche die Helmholtz-Gleichung (3.1) löst, auf dem Lochrand einen konstanten Wert B_a annimmt und die Flußquantisierung (3.3) erfüllt. Gemäß [76] gilt:

$$B(r, \theta) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(|\mathbf{r} - \mathbf{R}|/\lambda) + B_a \frac{K_0(r/\lambda)}{K_0(a/\lambda)} - \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\theta} \frac{I_k(a/\lambda) K_k(R/\lambda)}{K_k(a/\lambda)} K_k(r/\lambda) \quad (\text{A.23})$$

Die hierbei auftretenden I_k und K_k sind modifizierte Bessel-Funktionen⁹. Der erste Term ist das Magnetfeld eines freien Abrikosov-Vortex an der Position \mathbf{R} . Der zweite Term ist rotationssymmetrisch und die Lösung der Helmholtz-Gleichung für ein Loch mit Radius a , welches auf dem Lochrand das konstante Magnetfeld B_a annimmt. Der dritte Term korrigiert das Magnetfeld des freien Vortex gerade so, daß es überall auf dem Lochrand verschwindet. Damit ist die geometrische Randbedingung erfüllt. Alle drei Terme lösen für sich betrachtet die Helmholtz-Gleichung (3.1). Für das Magnetfeld auf dem Lochrand und innerhalb des Lochs folgt aus der Flußquantisierung

$$B_a = \frac{\Phi_0}{\pi a^2} \frac{n_F K_0(a/\lambda) + K_0(R/\lambda)}{K_2(a/\lambda)} \quad (\text{A.24})$$

Dabei ist $n_F + 1$ die Anzahl der Gesamtflußquanten im System. Das Magnetfeld im Loch wächst also nicht nur an, wenn n_F erhöht wird, sondern auch bei einem Näherrücken des Vortex.

Das zum Magnetfeld (A.23) zugehörige Vektorpotential \mathbf{A} ist definiert über

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (\text{A.25})$$

Außerdem gilt in der geforderten London-Eichung Divergenzfreiheit sowie die Randbedingung, daß \mathbf{A} parallel zu vorgegebenen Grenzflächen verläuft. Tief im Inneren des Supraleiters muß \mathbf{A} zudem exponentiell abfallen. In den folgenden beiden Unterabschnitten werden zwei verschiedene Möglichkeiten gezeigt, wie aus dem Magnetfeld (A.23) mit (A.24) das geforderte magnetische Vektorpotential hergeleitet werden kann.

⁹ Für Definitionen und nützliche Relationen vergleiche [85], 9.6, und [86], 8.40ff.

A.3.1 Klassische Herleitung mit der London-Gleichung

Bereits für die Berechnung des Magnetfelds wurde angenommen, daß innerhalb des Supraleiters die London-Gleichung gültig ist:

$$\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi} \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{A} \quad (\text{A.26})$$

Zusammen mit der Maxwell-Gleichung

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (\text{A.27})$$

gilt demnach

$$\mathbf{A} = -\lambda^2 \nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{A.28})$$

Das magnetische Vektorpotential in der London-Eichung ergibt sich damit durch einfaches Anwenden eines Differentialoperators auf die bereits bekannte Lösung für das Magnetfeld \mathbf{B} , wobei die geforderten Randbedingungen automatisch erfüllt werden. In Polarkoordinaten folgt sofort

$$\mathbf{A} = -\lambda^2 \left(\mathbf{e}_r \frac{1}{r} \partial_\theta B(r, \theta) - \mathbf{e}_\theta \partial_r B(r, \theta) \right) \quad (\text{A.29})$$

Der erste Term des Magnetfelds $B(r, \theta)$ gemäß Gleichung (A.23) liefert unter Verwendung von

$$|\mathbf{r} - \mathbf{R}| = \sqrt{r^2 - 2rR \cos \theta + R^2} \quad (\text{A.30})$$

das zugehörige magnetische Vektorpotential

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda} \frac{K_1(\sqrt{r^2 - 2rR \cos \theta + R^2}/\lambda)}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos \theta + R^2}} (R \sin \theta \mathbf{e}_r + (R \cos \theta - r) \mathbf{e}_\theta) \quad (\text{A.31})$$

Dies ist das Vektorpotential eines freien Vortex, der sich an der Position \mathbf{R} befindet. Für den zweiten, dem Loch zuzuordnenden rotationssymmetrischen Term des Magnetfelds ergibt die Operation (A.28) sofort das Vektorpotential:

$$\mathbf{A}_2 = -\lambda B_a \frac{K_1(r/\lambda)}{K_0(a/\lambda)} \mathbf{e}_\theta \quad (\text{A.32})$$

Aus dem dritten Korrekturterm des Magnetfelds erhält man¹⁰:

$$\mathbf{A}_3 = -\frac{1}{2} \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta} (K_{k-1}(r/\lambda)(i\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta) - K_{k+1}(r/\lambda)(i\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta)) \quad (\text{A.33})$$

Abkürzend steht hierbei c_k für die Koeffizienten

$$c_k = \frac{I_k(a/\lambda) K_k(R/\lambda)}{K_k(a/\lambda)} \quad (\text{A.34})$$

Damit ist das gesuchte magnetische Vektorpotential in der London-Eichung schließlich durch die Summe

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 \quad (\text{A.35})$$

gegeben und erfüllt alle geforderten Randbedingungen.

¹⁰ Es gilt $\partial_r K_k(r/\lambda) = -\frac{1}{2\lambda} (K_{k-1}(r/\lambda) + K_{k+1}(r/\lambda))$. Außerdem findet die Rekurrenzbeziehung $K_{k-1}(r/\lambda) - K_{k+1}(r/\lambda) = -2k \frac{\lambda}{r} K_k(r/\lambda)$ Verwendung.

A.3.2 Herleitung über die Greens-Funktion

Die vorangegangene Herleitung erscheint deswegen besonders einfach, weil bei der bloßen Anwendung des Differentialoperators (A.28) keine Sorge für die Randbedingungen getragen werden muß. Tatsächlich steckt die gesamte diesbezügliche Arbeit bereits in dem Ausdruck (A.23) für das Magnetfeld, welcher gerade so konstruiert worden ist, daß er die Randbedingungen korrekt gewährleistet¹¹. Allerdings hat die oben vorgestellte Herleitung auch einen Schwachpunkt: Sie steht und fällt nämlich mit der Tatsache, daß das vorgegebene Magnetfeld die Helmholtz-Gleichung (3.1) erfüllt. Sollte das nicht mehr überall der Fall sein, etwa bei einer Magnetfeldverteilung, welche selbstkonsistent berechnet worden ist oder einer speziellen Modellannahme genügt, so muß eine allgemeinere Art der Herleitung gefunden werden.

In diesem Unterabschnitt wird deswegen gezeigt, wie mithilfe einer passenden Greens-Funktion zu jeder beliebigen Magnetfeldvorgabe das zugehörige magnetische Vektorpotential im gelochten Supraleiter bestimmt werden kann¹². In engem Zusammenhang damit stehen einige Erkenntnisse aus dem vorangegangenen Abschnitt A.2 des Anhangs, die sich auf die Methode konformer Abbildungen beziehen. Ähnlich wie bei der geraden Grenzfläche besteht auch für die hier vorgegebene runde Geometrie die Möglichkeit, durch Positionierung eines passenden Antivortex zunächst einmal eine Lösung Φ der Laplace-Gleichung zu erhalten. Bezeichnet

$$z_v = \rho e^{i\phi} \quad (\text{A.36})$$

mit $\rho > a$ eine Vortexposition in der komplexen Ebene außerhalb des Lochs, so muß ein entsprechender Antivortex an der Stelle

$$\tilde{z}_v = \frac{a^2}{z_v^*} = \frac{a^2}{\rho} e^{i\phi} \quad (\text{A.37})$$

innerhalb des Lochs positioniert werden. Der zugehörige Phasengradient ist dann

$$\nabla\Phi = \frac{i}{z^* - z_v^*} - \frac{i}{z^* - \tilde{z}_v^*} \quad (\text{A.38})$$

Analog zum Phasengradienten gemäß Gleichung (A.17) ist auch dieser divergenzfrei und besitzt eine „Phasen-“ bzw. Rotationsquelle an der Vortexposition z_v . Durch die Platzierung des Antivortex bei \tilde{z}_v sind zudem gerade von-Neumannsche Randbedingungen entlang des gesamten Lochrands gewährleistet. Ein Beispiel dieser Phasenverteilung ist in Abbildung A.2 zu sehen.

Faßt man Gleichung (A.38) als komplexe Repräsentation eines ebenen Vektorfelds $\nabla\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_v)$ auf, so gilt demnach

$$\nabla \cdot \nabla\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_v) = 0 \quad (\text{A.39})$$

und

$$\nabla \times \nabla\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_v) = 2\pi\delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_v)\mathbf{e}_z \quad (\text{A.40})$$

¹¹ Vergleiche [76],[77].

¹² Pathologische Vorgaben sind hierbei ausgenommen.

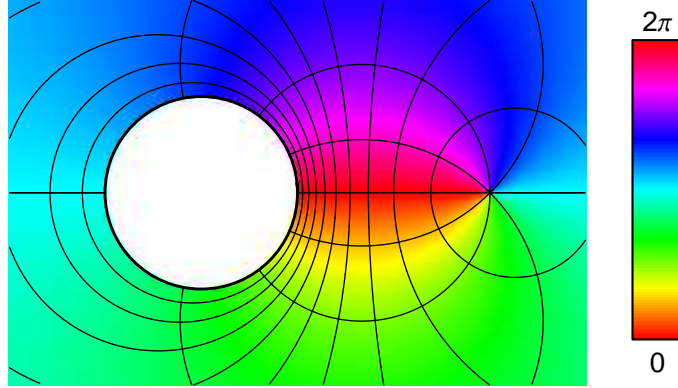


Abbildung A.2: Phasenverteilung Φ eines Vortex vor einer kreisförmigen Grenzfläche gemäß Gleichung (A.38). Der Phasengradient an der Grenzfläche ist auf der dem Vortex zugewandten Seite am stärksten. Auf der gegenüberliegenden Seite ist die Phase dagegen fast konstant.

Für eine vorgegebene Magnetfeldverteilung $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(\mathbf{r})\mathbf{e}_z$ resultiert dann das zugehörige magnetische Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ aus einer Integration über alle Vortexpositionen \mathbf{r}_v innerhalb des Supraleiters:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_S d^2r_v \nabla\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_v) B(\mathbf{r}_v) \quad (\text{A.41})$$

Aus den Gleichungen (A.39) und (A.40) folgen sofort die grundlegenden Eigenschaften:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{A.42})$$

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (\text{A.43})$$

Zusätzlich vererben sich die von-Neumannschen Randbedingungen auf das magnetische Vektorpotential, und es verläuft entlang des Lochrands parallel zur Grenzfläche¹³. Um die Integrationsformel (A.41) konkret auszuwerten, ist es von Nutzen, wiederum in die komplexe Notation zu wechseln. Dann gilt für das komplexe Vektorpotential $A = A_x + iA_y$:

$$\begin{aligned} A(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_a^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{i}{re^{-i\theta} - \rho e^{-i\phi}} - \frac{i}{re^{-i\theta} - \frac{a^2}{\rho} e^{-i\phi}} \right) B(\rho, \phi) \\ &= \frac{1}{r} e^{i\theta} \int_a^\infty d\rho \rho \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{ie^{i\phi}}{e^{i\phi} - \frac{\rho}{r} e^{i\theta}} - \frac{ie^{i\phi}}{e^{i\phi} - \frac{a^2}{r\rho} e^{i\theta}} \right) B(\rho, \phi) \\ &= \frac{1}{r} e^{i\theta} \int_a^\infty d\rho \rho \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1(0)} dz' \left(\frac{1}{z' - z_1} - \frac{1}{z' - z_2} \right) B(\rho, -i \ln z') \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

¹³ Eine Superposition verschiedener Vektorfelder, welche die gleichen von-Neumannschen Randbedingungen erfüllen, hat dieselbe Eigenschaft. Für alle Vortexpositionen \mathbf{r}_v genügt der Integrand aus Formel (A.41) diesen Randbedingungen für die vorgegebene gelochte Geometrie.

Hierbei wurde definiert

$$z_1 = \frac{\rho}{r} e^{i\theta} \quad (\text{A.45})$$

$$z_2 = \frac{a^2}{r\rho} e^{i\theta} \quad (\text{A.46})$$

Die komplexe Zahl z_1 befindet sich innerhalb des Einheitskreises $C_1(0)$, wenn $\rho < r$ ist. Die Zahl z_2 liegt wegen $r, \rho > a$ stets im Einheitskreis. Für eine beschränkte nichtpathologische Magnetfeldverteilung B kann dann direkt ausgewertet werden:

$$A(r, \theta) = \frac{1}{r} i e^{i\theta} \left(\int_a^r d\rho \rho B(\rho, \theta - i \ln \frac{\rho}{r}) - \int_a^\infty d\rho \rho B(\rho, \theta - i \ln \frac{a^2}{r\rho}) \right) \quad (\text{A.47})$$

Die vorgegebene Magnetfeldverteilung $B(\rho, \phi)$ muß in ihrer Phasenvariablen ϕ 2π -periodisch sein. Die nun einzusetzenden komplexen Phasenargumente stehen damit lediglich für einen Übergang der Fourierterme gemäß $e^{i\phi} \rightarrow \frac{\rho}{r} e^{i\theta}$ bzw. $e^{i\phi} \rightarrow \frac{a^2}{r\rho} e^{i\theta}$.

Mithilfe der Formeln (A.44) und (A.47) ist es jetzt möglich, durch eine einfache Integration das gewünschte magnetische Vektorpotential zu erhalten. Unter anderem können sie auch auf das in dieser Arbeit verwendete Magnetfeld gemäß Gleichung (A.23) angewendet werden. Dieses verhält sich jedoch an der Vortexposition \mathbf{R} unphysikalisch, da es dort nichtregulär ist. Wertet man den nichtregulären ersten Magnetfeld-Term, welcher den freien Vortex darstellt, mit Formel (A.44) aus und den zugehörigen regulären Korrektur-Term mithilfe von Formel (A.47), so folgt für das komplexe Vektorpotential dieser beiden Anteile in der London-Eichung¹⁴:

$$\begin{aligned} A_1(r, \theta) + A_3(r, \theta) &= \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda} \frac{K_1(\sqrt{r^2 - 2rR \cos \theta + R^2}/\lambda)}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos \theta + R^2}} i(R - r e^{i\theta}) \\ &+ \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda} i \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{I_k(a/\lambda) K_k(R/\lambda)}{K_k(a/\lambda)} e^{i(k+1)\theta} K_{k+1}(r/\lambda) \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Der um das Loch herum rotationssymmetrische Anteil des Magnetfelds führt sofort auf

$$\begin{aligned} A_2(r, \theta) &= -\frac{1}{r} i e^{i\theta} \frac{B_a}{K_0(a/\lambda)} \int_r^\infty d\rho \rho K_0(\rho/\lambda) \\ &= -\lambda B_a \frac{K_1(r/\lambda)}{K_0(a/\lambda)} i e^{i\theta} \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Diese Ergebnisse für das magnetische Vektorpotential stimmen mit den vorherigen aus Unterabschnitt A.3.1 überein. Offensichtlich wird das durch eine Transformation der dortigen Resultate (A.31)-(A.33) in die hier verwendete komplexe Notation, indem die Ersetzungen $\mathbf{e}_r \rightarrow e^{i\theta}$ und $\mathbf{e}_\theta \rightarrow i e^{i\theta}$ durchgeführt werden.

¹⁴ Bei dieser recht länglichen Rechnung werden unter anderem die Stammfunktionen $\int dx x^{k+1} I_k(x) = x^{k+1} I_{k+1}(x)$ und $\int dx x^{k+1} K_k(x) = -x^{k+1} K_{k+1}(x)$ sowie das Summationstheorem für Besselfunktionen verwendet; siehe auch [86], 8.53.

Literaturverzeichnis

- [1] C. Iniotakis, S. Graser, T. Dahm und N. Schopohl, *Local density of states at polygonal boundaries of d-wave superconductors*, Phys. Rev. B **71**, 214508 (2005).
- [2] S. Graser, C. Iniotakis, T. Dahm und N. Schopohl, *Shadow on the Wall Cast by an Abrikosov Vortex*, Phys. Rev. Lett. **93**, 247001 (2004).
- [3] J.G. Bednorz und K.A. Müller, *Possible High T_c Superconductivity in the Ba-La-Cu-O System*, Z. Phys. B **64**, 189 (1986).
- [4] J.G. Bednorz, M. Takashige und K.A. Müller, *Susceptibility Measurements Support High- T_c Superconductivity in the Ba-La-Cu-O System*, Europhys. Lett. **3**, 379 (1987).
- [5] J.G. Bednorz und K.A. Müller, *Perovskite-type oxides – The new approach to high- T_c superconductivity*, Rev. Mod. Phys. **60**, 585 (1988).
- [6] C.C. Tsuei und J.R. Kirtley, *Pairing symmetry in cuprate superconductors*, Rev. Mod. Phys. **72**, 969-1016 (2000).
- [7] M. Sgrist und K. Ueda, *Phenomenological theory of unconventional superconductivity*, Rev. Mod. Phys. **63**, 239-311 (1991).
- [8] J. Annett, N. Goldenfeld und S.R. Renn, *Interpretation of the temperature dependence of the electromagnetic penetration depth in $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$* , Phys. Rev. B **43**, 2778 (1991).
- [9] P.J. Hirschfeld, W.O. Putikka und D.J. Scalapino, *d-wave model for microwave response of high- T_c superconductors*, Phys. Rev. B **50**, 10250 (1994).
- [10] J.D. Kokales, P. Fournier, L.V. Mercaldo, V.V. Talanov, R.L. Greene und S.M. Anlage, *Microwave Electrodynamics of Electron-Doped Cuprate Superconductors*, Phys. Rev. Lett **85**, 3696 (2000).

-
- [11] H. Ding, M.R. Norman, J.C. Campuzano, M. Randeria, A.F. Bellman, T. Yokoya, T. Takahashi, T. Mochiku und K. Kadowaki, *Angle-resolved photoemission spectroscopy study of the superconducting gap anisotropy in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$* , Phys. Rev. B **54**, R9678 (1996).
- [12] C.C. Tsuei, J.R. Kirtley, C.C. Chi, L.S. Yu-Jahnes, A. Gupta, T. Shaw, J.Z. Sun und M.B. Ketchen, *Pairing Symmetry and Flux Quantization in a Tricrystal Superconducting Ring of $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$* , Phys. Rev. Lett. **73**, 593 (1994).
- [13] D.A. Wollman, D.J. Van Harlingen, W.C. Lee, D.M. Ginsberg und A.J. Leggett, *Experimental Determination of the Superconducting Pairing State in YBCO from the Phase Coherence of YBCO-Pb dc SQUIDS*, Phys. Rev. Lett. **71**, 2134 (1993).
- [14] D.J. Van Harlingen, *Phase-sensitive tests of the symmetry of the pairing state in the high-temperature superconductors – Evidence for $d_{x^2-y^2}$ symmetry*, Rev. Mod. Phys. **67**, 515-535 (1995).
- [15] R.R. Schulz, B. Chesca, B. Goetz, C.W. Schneider, A. Schmehl, H. Bielefeldt, H. Hilgenkamp, J. Mannhart und C.C. Tsuei, *Design and realization of an all d -wave dc π -superconducting quantum interference device*, Appl. Phys. Lett. **76**, 912 (2000).
- [16] B. Chesca, R.R. Schulz, B. Goetz, C.W. Schneider, H. Hilgenkamp und J. Mannhart, *d -Wave Induced Zero-Field Resonances in dc π -Superconducting Quantum Interference Devices*, Phys. Rev. Lett. **88**, 177003 (2002).
- [17] B. Chesca, K. Ehrhardt, M. Mößle, R. Straub, D. Koelle, R. Kleiner und A. Tsukada, *Magnetic-Field Dependence of the Maximum Supercurrent of $\text{La}_{2-x}\text{Ce}_x\text{CuO}_{4-y}$ Interferometers: Evidence for a Predominant $d_{x^2-y^2}$ Superconducting Order Parameter*, Phys. Rev. Lett. **90**, 057004 (2003).
- [18] C.-R. Hu, *Midgap Surface States as a Novel Signature for $d_{x_a^2-x_b^2}$ -Wave Superconductivity*, Phys. Rev. Lett. **72**, 1526 (1994).
- [19] L.J. Buchholtz, M. Palumbo, D. Rainer und J.A. Sauls, *The Effect of Surfaces on the Tunneling Density of States of an Anisotropically Paired Superconductor*, J. Low Temp. Phys. **101**, 1099 (1995).
- [20] Y. Tanaka und S. Kashiwaya, *Theory of Tunneling Spectroscopy of d -Wave Superconductors*, Phys. Rev. Lett. **74**, 3451 (1995).
- [21] S. Kashiwaya und Y. Tanaka, *Tunnelling effects on surface bound states in unconventional superconductors*, Rep. Prog. Phys. **63**, 1641-1724 (2000).

-
- [22] L. Alff, S. Kleefisch, U. Schoop, M. Zittartz, T. Kemen, T. Bauch, A. Marx und R. Gross, *Andreev bound states in high temperature superconductors*, Eur. Phys. J. B **5**, 423 (1998).
- [23] G. Deutscher, *Andreev–Saint-James reflections: A probe of cuprate superconductors*, Rev. Mod. Phys. **77**, 109-135 (2005).
- [24] J. Geerk, X.X. Xi und G. Linker, *Electron tunneling into thin films of $Y_1Ba_2Cu_3O_7$* , Z. Phys. B **73**, 329 (1988).
- [25] S. Kashiwaya, Y. Tanaka, M. Koyanagi, H. Takashima und K. Kajimura, *Origin of zero-bias conductance peaks in high- T_c superconductors*, Phys. Rev. B **51**, 1350 (1995).
- [26] M. Covington, R. Scheuerer, K. Bloom und L.H. Greene, *Tunneling and anisotropic charge transport properties of superconducting (110)-oriented $YBa_2Cu_3O_7$ thin films*, Appl. Phys. Lett. **68**, 1717 (1996).
- [27] M. Covington, M. Aprili, E. Paraoanu, L.H. Greene, F. Xu, J. Zhu und C.A. Mirkin, *Observation of Surface-Induced Broken Time-Reversal Symmetry in $YBa_2Cu_3O_7$ Tunnel Junctions*, Phys. Rev. Lett. **79**, 277 (1997).
- [28] L. Alff, H. Takashima, S. Kashiwaya, N. Terada, H. Ihara, Y. Tanaka, M. Koyanagi und K. Kajimura, *Spatially continuous zero-bias conductance peak on (110) $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ surfaces*, Phys. Rev. B **55**, R14757 (1997).
- [29] M. Aprili, E. Badica und L.H. Greene, *Doppler Shift of the Andreev Bound States at the YBCO Surface*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4630 (1999).
- [30] I. Iguchi, W. Wang, M. Yamazaki, Y. Tanaka und S. Kashiwaya, *Angle-resolved Andreev bound states in anisotropic d -wave high- T_c $YBa_2Cu_3O_{7-y}$ superconductors*, Phys. Rev. B **62**, R6131 (2000).
- [31] Y. Dagan und G. Deutscher, *Doping and Magnetic Field Dependence of In-Plane Tunneling into $YBa_2Cu_3O_{7-x}$: Possible Evidence for the Existence of a Quantum Critical Point*, Phys. Rev. Lett. **87**, 177004 (2001).
- [32] A. Sharoni, G. Koren und O. Millo, *Correlation of tunneling spectra with surface nanomorphology and doping in thin $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ films*, Europhys. Lett. **54**, 675 (2001).
- [33] A. Sharoni, G. Leibovitch, A. Kohen, R. Beck, G. Deutscher, G. Koren und O. Millo, *Scanning tunneling spectroscopy of a -axis $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ films: k -selectivity and the shape of the superconducting gap*, Europhys. Lett. **62**, 883 (2003).

-
- [34] B. Chesca, M. Seifried, T. Dahm, N. Schopohl, D. Koelle, R. Kleiner und A. Tsukada, *Observation of Andreev bound states in bicrystal grain-boundary Josephson junctions of the electron-doped superconductor $La_{2-x}Ce_xCuO_{4-y}$* , Phys. Rev. B **71**, 104504 (2005).
- [35] A.F. Andreev, *The thermal conductivity of the intermediate state in superconductors*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **46**, 1823 (1964); Sov. Phys. JETP **19**, 1228 (1964).
- [36] J. Nicol, S. Shapiro und P.H. Smith, *Direct measurement of the superconducting energy gap*, Phys. Rev. Lett. **5**, 461 (1960).
- [37] I. Giaever, *Electron tunneling between two superconductors*, Phys. Rev. Lett. **5**, 464 (1960).
- [38] J. Bardeen, *Tunneling from a many-particle point of view*, Phys. Rev. Lett. **6**, 57 (1961).
- [39] I. Giaever, *Electron tunneling and superconductivity*, Rev. Mod. Phys. **46**, 245 (1974).
- [40] M. Fogelström, D. Rainer und J.A. Sauls, *Tunneling into Current-Carrying Surface States of High- T_c Superconductors*, Phys. Rev. Lett. **79**, 281 (1997).
- [41] T. Lück, U. Eckern und A. Shelankov, *d -wave superconductors near surfaces and interfaces: A scattering matrix approach within the quasiclassical technique*, Phys. Rev. B **63**, 064510 (2001).
- [42] Yu.S. Barash, H. Burkhardt und D. Rainer, *Low-Temperature Anomaly in the Josephson Critical Current of Junctions in d -Wave Superconductors*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4070 (1996).
- [43] Yu.S. Barash, A.A. Svidzinsky und H. Burkhardt, *Quasiparticle bound states and low-temperature peaks of the conductance of NIS junctions in d -wave superconductors*, Phys. Rev. B **55**, 15282 (1997).
- [44] A. Poenicke, Yu.S. Barash, C. Bruder, V. Istyukov, *Broadening of Andreev bound states in $d_{x^2-y^2}$ superconductors*, Phys. Rev. B **59**, 7102 (1999).
- [45] M.S. Kalenkov, M. Fogelström und Yu.S. Barash, *Two regimes for effects of surface disorder on the zero-bias conductance peak of tunnel junctions involving d -wave superconductors*, Phys. Rev. B **70**, 184505 (2004).
- [46] Y. Tanuma, Y. Tanaka, M. Yamashiro und S. Kashiwaya, *Local density of states on rough surfaces of $d_{x^2-y^2}$ -wave superconductors*, Phys. Rev. B **57**, 7997 (1998).

-
- [47] N. Stefanakis, *Local density of states for the corner geometry interface of d -wave superconductors within the extended Hubbard model*, Phys. Rev. B **66**, 024514 (2002).
- [48] Y. Nagato und K. Nagai, *Surface and size effect of a d_{xy} -state superconductor*, Phys. Rev. B **51**, 16254 (1995).
- [49] Ya.V. Fominov und A.A. Golubov, *Density of states in d -wave superconductors of finite size*, Phys. Rev. B **70**, 212513 (2004).
- [50] M.H.S. Amin, S.N. Rashkeev, M. Coury, A.N. Omelyanchouk und A.M. Zagoskin, *$d+is$ versus $d+id'$ time reversal symmetry breaking states in finite size systems*, Phys. Rev. B **66**, 174515 (2002).
- [51] V.M. Fomin, J.T. Devreese und V.V. Moshchalkov, *Surface superconductivity in a wedge*, Europhys. Lett. **42**, 553 (1998).
- [52] G. Eilenberger, *Transformation of Gorkov's Equation for Type II Superconductors into Transport-Like Equations*, Z. Phys. **214**, 195 (1968).
- [53] A.I. Larkin und Yu.N. Ovchinnikov, *Quasiclassical Method in the Theory of Superconductivity*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **55**, 2262 (1968); Sov. Phys. JETP **28**, 1200 (1969).
- [54] D. Rainer und J.A. Sauls (Hg.), *Quasiclassical Methods in Superconductivity and Superfluidity, Verditz '96*.
- [55] J.W. Serene und D. Rainer, *The quasiclassical approach to superfluid ^3He* , Phys. Rep. **101**, 221-311 (1983).
- [56] W. Belzig, F.K. Wilhelm, C. Bruder und G. Schön, *Quasiclassical Green's function approach to mesoscopic superconductivity*, Superlattices and Microstructures **25**, 1251-1288 (1999).
- [57] J. Rammer und H. Smith, *Quantum field-theoretical methods in transport theory of metals*, Rev. Mod. Phys. **58**, 323-359 (1986).
- [58] U. Eckern und A. Schmid, *Quasiclassical Green's Function in the BCS Pairing Theory*, J. Low Temp. Phys. **45**, 137-166 (1981).
- [59] A.L. Shelankov, *On the Derivation of Quasiclassical Equations for Superconductors*, J. Low Temp. Phys. **60**, 29 (1985).
- [60] N. Schopohl und K. Maki, *Quasiparticle spectrum around a vortex line in a d -wave superconductor*, Phys. Rev. B **52**, 490 (1995).

-
- [61] N. Schopohl, *Transformation of the Eilenberger Equations of Superconductivity to a Scalar Riccati Equation*, cond-mat/9804064 (1998); in [54], S. 88.
- [62] A.V. Zaitsev, *Quasiclassical equations of the theory of superconductivity for contiguous metals and the properties of constricted microcontacts*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **86**, 1742 (1984); Sov. Phys. JETP **59**, 1015 (1984).
- [63] A. Shelankov und M. Ozana, *Quasiclassical theory of superconductivity: A multiple-interface geometry*, Phys. Rev. B **61**, 7077 (2000).
- [64] M. Eschrig, *Distribution functions in nonequilibrium theory of superconductivity and Andreev spectroscopy in unconventional superconductors*, Phys. Rev. B **61**, 9061 (2000).
- [65] T. Lück, *D-Wave Superconductors in the Vicinity of Boundaries*, Dissertation, ISBN 3-8265-9790-7, Shaker Verlag (2002).
- [66] W. Buckel und R. Kleiner, *Supraleitung, Grundlagen und Anwendungen*, ISBN 3-527-40348-5, Wiley-VCH Verlag (2004).
- [67] P. Henrici, *Applied and computational complex analysis*, Band 1, ISBN 0-471-37244-7, John Wiley & Sons (1974).
- [68] M.R. Spiegel, *Komplexe Variablen, Theorie und Anwendung*, ISBN 0-07-092016-8, McGraw-Hill Book Company (1977).
- [69] R. Schinzinger und P.A.A. Laura, *Conformal Mapping, Methods and Applications*, ISBN 0-486-43236-X, Dover Publications (2003).
- [70] L.M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, ISBN 0-486-68970-0, Dover Publications (1996).
- [71] T.A. Driscoll und L.N. Trefethen, *Schwarz-Christoffel Mapping*, ISBN 0-521-80726-3, Cambridge University Press (2002).
- [72] H.D. Däppen, *Die Schwarz-Christoffel-Abbildung für zweifach zusammenhängende Gebiete mit Anwendungen*, Diss. ETH Nr. 8495 (1988).
- [73] T.A. Driscoll, *A MATLAB toolbox for Schwarz-Christoffel mapping*, Algorithm 756, ACM Transactions on Mathematical Software **22**, 168 (1996).
- [74] T.A. Driscoll, *Improvements to the Schwarz-Christoffel toolbox for MATLAB*, Algorithm 843, ACM Transactions on Mathematical Software **31**, 239 (2005).
- [75] C. Hu, *A software package for computing Schwarz-Christoffel transformation for doubly connected polygonal regions*, Algorithm 785, ACM Transactions on Mathematical Software **24**, 317 (1998).

-
- [76] O.V. Dolgov und N. Schopohl, *Macroscopic electrodynamics: general properties and application to superconductors*, unveröffentlicht.
- [77] G.S. Mkrtchyan und V.V. Shmidt, *Interaction between a Cavity and a Vortex in a Superconductor of the second kind*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61**, 367 (1971); Sov. Phys. JETP **34**, 195 (1972).
- [78] S. Misra, S. Oh, D.J. Hornbaker, T. DiLuccio, J.N. Eckstein und A. Yazdani, *Formation of Andreev bound state at the step edges of $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ surface*, Phys. Rev. B **66**, R100510 (2002).
- [79] S.H. Pan, E.W. Hudson, K.M. Lang, H. Eisaki, S. Uchida und J.C. Davis, *Imaging the effects of individual zinc impurity atoms on superconductivity in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$* , Nature **403**, 746 (2000).
- [80] S.H. Pan, J.P. O'Neal, R.L. Badzey, C. Chamon, H. Ding, J.R. Engelbrecht, Z. Wang, H. Eisaki, S. Uchida, A.K. Gupta, K.-W. Ng, E.W. Hudson, K.M. Lang und J.C. Davis, *Microscopic electronic inhomogeneity in the high- T_c superconductor $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$* , Nature **413**, 282 (2001).
- [81] K.M. Lang, V. Madhavan, J.E. Hoffman, E.W. Hudson, H. Eisaki, S. Uchida und J.C. Davis, *Imaging the granular structure of high- T_c superconductivity in underdoped $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$* , Nature **415**, 412 (2002).
- [82] H.C. Manoharan, C.P. Lutz und D.M. Eigler, *Quantum mirages formed by coherent projection of electronic structure*, Nature **403**, 512 (2000).
- [83] A.A. Abrikosov, *Fundamentals of the Theory of Metals*, ISBN 0444-87094-6, Elsevier Science Publishers (1988).
- [84] P.-G. deGennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, ISBN 0-201-40842-2, Addison-Wesley Publishing Company (1996).
- [85] M. Abramowitz und I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, ISBN 0-486-61272-4, Dover Publications (1970).
- [86] I.S. Gradshteyn und I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, ISBN 0-12-294760-6, Academic Press (1980).

Danksagung

Ich bedanke mich bei Professor Dr. Nils Schopohl sowie bei Privatdozent Dr. Thomas Dahm für die hervorragende Unterstützung und Betreuung. Besonderer Dank geht an Siegfried Graser für fruchtbare Diskussionen und außerfachliche Übungseinheiten. Desweiteren danke ich der gesamten Arbeitsgruppe für die vielen unterhaltsamen Momente und die angenehme Atmosphäre.

Kapitel 2 dieser Dissertation ist zu großen Teilen in Publikation [1] veröffentlicht. Zudem stehen die Abschnitte 2.3 und 3.3 in enger Beziehung zu Publikation [2].