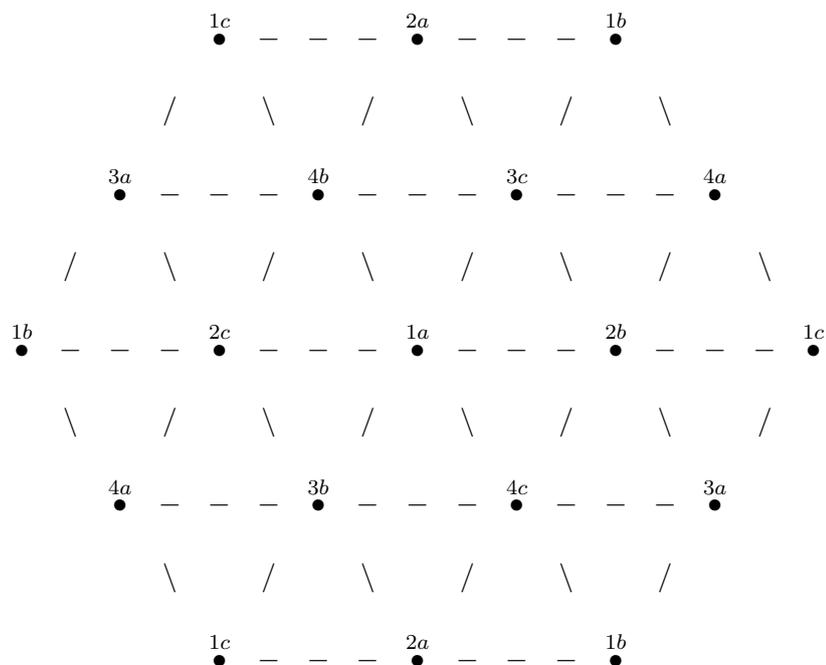


Die Geometrie der Lyonsgruppe



Dissertation
 der Fakultät für Mathematik und Physik der
 Eberhard-Karls-Universität Tübingen zur Erlangung eines
 Grades des Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von
 Matthias Grüninger
 aus Heidenheim an der Brenz

2007

Tag der mündlichen Prüfung: 06.03.2008

Dekan: Prof. Dr. N. Schopohl

1. Berichterstatter: Prof. Dr. Ch. Hering

2. Berichterstatter: Prof. Dr. P. Schmid

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
Zur Notation	9
1 Grundlagen	11
1.1 Simpliziale Komplexe	11
1.2 Überlagerungen simplizialer Komplexe	14
1.3 Amalgame	19
1.4 Geometrien	21
1.5 Kammersysteme	24
1.6 Coxeter-Komplexe und Gebäude	26
1.7 Affine Gebäude	30
1.7.1 Affine Coxeter-Diagramme	30
1.7.2 Das sphärische Gebäude im Unendlichen	31
1.7.3 Die Bäume $T(\mathfrak{m})$ und $T(\mathfrak{p})$	31
1.7.4 Eine Topologie auf Δ^∞	32
1.7.5 Affine Gebäude als metrische Räume	33
1.8 Apartments	34
2 Die 5-lokale Geometrie der Lyonsgruppe	39
2.1 Gruppen vom Typ Ly	39
2.2 Das Cayley-Hexagon $\mathbb{H}(5)$	40
2.3 Konstruktion	42
2.4 Der Diameter des Punktgraphen	46
2.5 Apartments in Δ	51
3 Die Eindeutigkeit der Lyonsgruppe	55
3.1 Geschlossene Pfade der Länge 4 in Γ	55
3.2 Die Wirkung auf den Geraden und Ebenen von Δ	58
3.3 Der Beweis für die Eindeutigkeit	70
3.4 Ein Wurzelsystem für die Lyonsgruppe	75

4	Das Verallgemeinerte Polygon $\tilde{\Delta}^\infty$	81
4.1	Reguläre Sektoren	81
4.2	Elationen und Homologien in $Aut\tilde{\Delta}^\infty$	82
	Literaturverzeichnis	95
	Lebenslauf	97

Einleitung

1972 untersuchte Richard Lyons endliche Gruppen G mit folgender Eigenschaft (siehe [Ly1] und [Ly2]): Es existiert eine Involution $t \in G \setminus Z^*(G)$, so dass $C_G(t)$ eine nicht-zerfallende Erweiterung der Alternierenden Gruppe A_{11} mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2 ist.

Lyons konnte viele Informationen über solche Gruppen gewinnen, so etwa die Einfachheit dieser Gruppen, die Gruppenordnung, die p -lokale Struktur, die Charaktertafel usw. Offen blieb aber zunächst, ob es solche Gruppen überhaupt gibt, und wenn ja, ob je zwei dieser Gruppen isomorph sind. Im Jahr darauf konnte Sims beide Fragen positiv beantworten: Es gibt genau eine endliche Gruppe mit dieser Eigenschaft. Sie ist eine der 26 sporadischen Gruppen und wird in der Literatur meist die *Lyonsgruppe* (Ly) oder die *Lyons-Simsgruppe* (LyS) genannt. Sims Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis hat allerdings den Nachteil, dass er nur mithilfe eines Computers durchgeführt werden kann. Dadurch blieb die Lyonsgruppe ein rein theoretisches Konstrukt. Erst 1981 gelang es Kantor, der Lyonsgruppe Leben einzuhauchen, indem er zeigte, dass diese Gruppe eine fahnentransitive Automorphismengruppe einer Geometrie Δ vom Rang 3 mit affinem Diagramm \tilde{G}_2 ist (siehe [K1]). Der Stabilisator eines Objekts in dieser Geometrie ist entweder eine maximale 5-lokale Untergruppe oder isomorph zur Chevalley-Gruppe $G_2(5)$. Dass eine sporadische Gruppe als fahnentransitive Automorphismengruppe auf einer Geometrie mit affinem Diagramm operiert, ist ein sehr seltenes Phänomen: Nur auf eine weitere sporadische Gruppe, der Suzuki-Gruppe Suz , trifft dies ebenfalls zu.

Durch die Geometrie Δ erhält man einige weitere interessante Geometrien. Setzen wir $\varphi: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ als die universelle Überlagerung von Δ , so ist $\tilde{\Delta}$ nach einem Satz von J. Tits ([Ti2]) ein Gebäude mit dem gleichen Diagramm wie Δ . $\tilde{\Delta}$ ist eines der wenigen bekannten Beispiele für ein nicht-klassisches Gebäude mit affinem Diagramm und fahnentransitiver Automorphismengruppe. Es erscheint daher von Bedeutung, mehr über die Struktur von $\tilde{\Delta}$ und der Automorphismengruppe von $\tilde{\Delta}$ zu erfahren. Wir werden zeigen, dass $Aut\tilde{\Delta}$ eine Erweiterung von Ly mit der Fundamentalgruppe von Δ ist.

Der erste computerfreie Eindeutigkeitsbeweis der Lyonsgruppe ist von Aschbacher und Segev (siehe [AS2]). Die beiden Autoren untersuchten eine andere, mit Ly verbundene Geometrie. Die Stabilisatoren der Objekte dieser Geometrie sind maximale 3-lokale Untergruppen von Ly . Aschbacher und Segev konnten zeigen, dass diese 3-lokale Geometrie einfach-zusammenhängend ist und konnten daraus die Eindeutigkeit der Lyonsgruppe ableiten. Die 5-lokale Geometrie Δ ist jedoch den klassischen Geometrien viel näher verwandt als die 3-lokale Geometrie und kann daher als die natürliche Geometrie von Δ angesehen werden. Es wäre daher wünschenswert, Existenz und Eindeutigkeit von Ly mithilfe von Δ zu beweisen. Das Hauptproblem dabei ist jedoch, dass Δ nicht einfach-zusammenhängend ist.

Dieses Problem kann dadurch behoben werden, indem man zeigt, dass Δ durch die Struktur gewisser dünner Untergeometrien charakterisiert ist. Sei T eine Untergruppe von Ly isomorph zu $Z_4 \times Z_4$. Die Fixelemente von T bilden dann eine dünne Teilgeometrie von Δ , ebenfalls mit Diagramm \tilde{G}_2 . Eine solche Teilgeometrie werden wir als Apartment von Δ bezeichnen. Ist Σ ein Apartment in Δ und $\vartheta : \Delta^* \rightarrow \Delta$ eine Überlagerung, so induziert ϑ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\vartheta^{-1}(\Sigma)$ eine Überlagerung und Σ . Es gilt:

Satz 3.3.1 *Induziert ϑ für jedes Apartment Σ und jede Zusammenhangskomponente Σ^* von $\vartheta^{-1}(\Sigma)$ einen Isomorphismus von Σ^* nach Σ , so ist ϑ selbst ein Isomorphismus.*

Durch diesen Satz sieht man, dass die Apartments Δ charakterisieren. Damit lässt sich nun die Eindeutigkeit von Δ beweisen: Wir bilden das Amalgam \mathfrak{A} bestehend aus einem Punktstabilisator, dem Stabilisator eines kollinearen Punktpaares und dem Stabilisator eines Apartments von Δ . Dann ist Ly eine treue Kompletterung von \mathfrak{A} . Mithilfe von 3.3.1 folgt leicht:

Satz 3.3.7 *Ly ist die universelle Kompletterung von \mathfrak{A} .*

Da die universelle Kompletterung eines Amalgams immer bis auf Isomorphie eindeutig ist, haben wir somit die Eindeutigkeit der Lyonsgruppe gezeigt.

Eine weitere interessante Geometrie, die mit der Lyonsgruppe verbunden ist, ist das Gebäude im Unendlichen von $\tilde{\Delta}$, das wir mit $\tilde{\Delta}^\infty$ bezeichnen werden. Dies ist ein verallgemeinertes Hexagon mit total-unzusammenhängender, kompakter Topologie. Außer den klassischen Polygonen sind sehr wenige solcher Polygone bekannt. $\tilde{\Delta}^\infty$ ist weit davon entfernt, klassisch zu sein; so werden wir z.B. zeigen, dass alle Wurzelelationen trivial sind.

Ist $\tilde{Ly} = \text{Aut}\tilde{\Delta}$, so ist \tilde{Ly} eine Erweiterung von Ly mit der Fundamentalgruppe von Δ , und \tilde{Ly} operiert in natürlicher Weise auf $\tilde{\Delta}^\infty$. Unsere Vermutung

ist, dass \widetilde{Ly} bereits die volle Automorphismengruppe von $\widetilde{\Delta}^\infty$ ist. Wir konnten dies leider weder beweisen noch widerlegen. Ein Resultat, das für die Wahrheit der Vermutung spricht, ist etwa:

Satz 4.2.14 *Ist C der Zentralisator von \widetilde{Ly} in $Aut\widetilde{\Delta}^\infty$, so ist $Aut\widetilde{\Delta}^\infty = C \times \widetilde{Ly}$.*

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Kapitel 1 behandeln die benötigten Grundlagen, insbesondere Überlagerungsabbildungen von Simplicialen Komplexen und Geometrien. In Kapitel 2 geben wir Kantors Konstruktion von Δ an und zeigen, dass Ly die volle Automorphismengruppe von Δ ist. Wir untersuchen ferner einige wichtigen Eigenschaften von Δ , etwa den Punktdiameter. In Kapitel 3 verschaffen wir uns kurz eine kompakte Übersicht über geschlossene Pfade kleiner Länge in Δ . Damit können wir dann Satz 3.3.1 und damit die Eindeutigkeit der Lyonsgruppe beweisen. Wir können damit noch eine Vermutung beweisen, die von den Autoren von [MN] aufgestellt wurde. In Kapitel 4 schließlich untersuchen wir das verallgemeinerte Hexagon $\widetilde{\Delta}^\infty$.

Von Oktober 2006 an erhielt ich ein Stipendium von der Landesgraduiertenstiftung des Landes Baden-Württemberg, wofür ich mich herzlich bedanken möchte. Ferner gilt mein Dank meinem Betreuer, Prof. Dr. Christoph Hering, Frau PD Dr. Barbara Baumeister für ihre hilfreichen Kommentare, Tobias Döhler für seine Hilfe mit GAP und allen anderen, die mich unterstützt haben.

Zur Notation:

Wir benutzen in dieser Arbeit die Notation aus [ATLAS].

Sind A, B und G Gruppen, so bedeutet $G = A.B$, dass G einen Normalteiler N mit $N \cong A$ und $G/N \cong B$ besitzt.

Für eine zerfallende Erweiterung schreiben wir auch $G = A : B$, für eine nichtzerfallende $G = A \cdot B$.

Eine zyklische Gruppe der Ordnung n bezeichnen wir mit Z_n oder einfach nur mit n .

Eine spezielle Gruppe mit Ordnung p^{n+k} , deren Zentrum Ordnung p^n besitzt, wird hingegen mit p^{n+k} bezeichnet.

$G = p^{n_1+n_2+\dots+n_k}.H$ bedeutet, dass G eine aufsteigende Kette von Normalteilern der Ordnung $p^{n_1}, p^{n_1+n_2}, \dots, p^{n_1+n_2+\dots+n_k}$ mit elementar-abelschen Faktorgruppen besitzt, so dass die Faktorgruppe modulo des letzten Normalteilers isomorph zu H ist.

Für Untergruppen H, K einer Gruppe G sei $H/G := \{Hg; g \in G\}$ die Menge der Rechtsnebenklassen modulo H und $H/G \setminus K := \{HgK; g \in G\}$ die Menge der Doppelnebenklassen modulo H und K .

Für eine Menge X sei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X .

Für eine Primzahlpotenz q sei $PG(2, q)$ die desarguessche Projektive Ebene der Ordnung q und $\mathbb{H}(q)$ das Cayley-Hexagon der Ordnung q .

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Simpliciale Komplexe

Ein simplicialer Komplex (vergleiche Chap. 3 in [Sp] und Kap. 3 in [SZ]) ist ein Paar $\Delta = (V, S)$, wobei V eine nichtleere Menge mit $V \cap \mathcal{P}(V) = \emptyset$ und $S \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$ ist. Dabei soll gelten:

- (a) $\{v\} \in S$ für alle $v \in V$.
- (b) Ist $\sigma \in S$ und $\emptyset \neq \tau \subseteq \sigma$, so gilt $\tau \in S$.

V heißt die Eckenmenge von Δ und S die Menge der Simplizes von Δ . Wir sagen, dass $x, y \in V$ benachbart sind (in Zeichen $x \sim y$), falls $\{x, y\} \in S$ ist. Sind $\Delta = (V, S)$, $\Delta' = (V', S')$ zwei Komplexe, so heißt Δ' Teilkomplex von Δ , falls $V' \subseteq V$ und $S' \subseteq S$ ist. Δ' heißt voller Teilkomplex, falls $S' = S \cap \mathcal{P}(V')$ gilt. Ist $\sigma \in S$, so bezeichnen wir den Teilkomplex $(\sigma, \mathcal{P}(\sigma) \setminus \{\emptyset\})$ der Einfachheit halber ebenfalls mit σ .

Für $\sigma \in S$ sei $\dim \sigma := |\sigma| - 1$. Ferner sei $\dim \Delta := \sup\{\dim \sigma; \sigma \in S\}$. Für $S_i := \{\sigma \in S; \dim \sigma = i\}$ heißt $\Delta_n := (V, \bigcup_{i=0}^n S_i)$ das n -Skelett von Δ . Ist $\dim \Delta = 1$, so heißt Δ ein *Graph*; die Elemente aus S_1 heißen die Kanten von Δ .

Für einen simplicialen Komplex Δ sei $Cl(\Delta) := (V, Cl(S))$ mit $Cl(S) := \{\emptyset \neq \sigma \subseteq V; \{v, w\} \in S \text{ für alle } v, w \in \sigma\}$. $Cl(\Delta)$ heißt der von Δ induzierte Cliqueskomplex. Man sieht direkt, dass $Cl(Cl(\Delta)) = Cl(\Delta)$ ist.

Δ heiße *vollständig*, falls $Cl(\Delta) = \Delta$ ist.

Einem simplicialen Komplex $\Delta = (V, S)$ können wir wie folgt einen topologischen Raum zuordnen, die *Geometrische Realisierung* von Δ . Wir setzen $|\Delta| := \{f : V \rightarrow \mathbb{R}; |supp(f)| < \infty, supp(f) \in S, \sum_{x \in supp(f)} f(x) = 1\}$ und entsprechend $|\sigma| := \{f \in |\Delta|; supp(f) \subseteq \sigma\}$ für $\sigma \in S$. Ist $\dim \sigma = n$, so ist

$|\sigma|$ in kanonischer Weise homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge des \mathbb{R}^n . Wir definieren auf $|\Delta|$ wie folgt eine Topologie: Eine Teilmenge U von $|\Delta|$ sei genau dann offen, wenn $U \cap |\sigma|$ offen in $|\sigma|$ für alle σ in S ist.

Seien $\Delta = (V, S)$, $\Delta' = (V', S')$ zwei simpliziale Komplexe. Eine Abbildung $\varphi : V \rightarrow V'$ heisst ein Morphismus, falls $\varphi(\sigma) \in S'$ für alle $\sigma \in S$ gilt. φ heisst Isomorphismus, falls φ bijektiv ist und φ^{-1} ein Morphismus ist.

Wir schreiben im folgenden stets $\varphi : \Delta \rightarrow \Delta'$ statt richtigerweise $\varphi : V \rightarrow V'$. Ist $v \in V$ und $v' \in V'$, so bedeutet $\varphi : (\Delta, v) \rightarrow (\Delta, v')$, dass $v' = \varphi(v)$ ist. Mit $\text{Aut}\Delta := \{\varphi : \Delta \rightarrow \Delta; \varphi \text{ Automorphismus}\}$ bezeichnen wir die Automorphismengruppe von Δ . Sind Δ, Δ' zwei simpliziale Komplexe, $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}\Delta$, $\beta : G \rightarrow \text{Aut}\Delta'$ Homomorphismen, so heisst ein Morphismus $\varphi : \Delta \rightarrow \Delta'$ ein G -Morphismus, falls $\varphi(v^{\alpha(g)}) = \varphi(v)^{\beta(g)}$ für alle $v \in V, g \in G$ gilt. Ist $\Delta' = (V', S')$ ein Teilkomplex von Δ und $G \leq \text{Aut}\Delta$, so sei $G_{(\Delta')} := \{g \in G; v^g = v \text{ für alle } v \in V'\}$.

Sei $\sigma \in S$. Dann sei $\Delta_\sigma := (V_\sigma, S_\sigma)$ mit $V_\sigma := \{v \in V; v \notin \sigma, \sigma \cup \{v\} \in S\}$ und $S_\sigma := \{\tau \in S; \tau \cap \sigma = \emptyset, \tau \cup \sigma \in S\}$. Ferner sei $st(\sigma) := (V_\sigma \cup \sigma, S'_\sigma)$ mit $S'_\sigma := S_\sigma \cup \mathcal{P}(\sigma) \setminus \{\emptyset\} \cup \{\tau \cup \rho; \rho \subseteq \sigma, \tau \in S_\sigma\}$. Δ_σ ist ein Teilkomplex von Δ , genannt das Residuum von σ . Für $v \in V$ schreiben wir Δ_v statt $\Delta_{\{v\}}$. Für $G \leq \text{Aut}(\Delta)$ schreiben wir im folgenden $G_{(\sigma)}$ anstelle von $G_{(\Delta_\sigma)}$ und setzen $G^\sigma := G_\sigma / G_{(\sigma)}$ als die von G_σ induzierte Automorphismengruppe von Δ_σ .

Ein Pfad der Länge n in Δ ist eine Folge $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in V^{n+1}$, so dass stets $\{v_i, v_{i+1}\} \in S$ gilt. Mit $l(\gamma)$ bezeichnen wir die Länge eines Pfades. $o(\gamma) = v_0$ heisst der Ursprung und $end(\gamma) = v_n$ das Ende von γ . γ heisst geschlossen, falls $o(\gamma) = end(\gamma)$ gilt. Die Menge aller Pfade bezeichnen wir mit $Pf(\Delta)$.

Für $v, w \in V$ sei $Pf(\Delta)(v, *) := \{\gamma \in Pf(\Delta); o(\gamma) = v\}$, $Pf(\Delta)(*, w) := \{\gamma \in Pf(\Delta); end(\gamma) = w\}$ und $Pf(\Delta)(v, w) := Pf(\Delta)(v, *) \cap Pf(\Delta)(*, w)$. Sind $\gamma = (v_0, \dots, v_n), \delta = (w_0, \dots, w_m) \in Pf(\Delta)$ mit $v_n = end(\gamma) = o(\delta) = w_0$, so sei $\gamma\delta$ der Pfad $(v_0, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m)$. Mit γ^{-1} bezeichnen wir den Pfad (v_n, \dots, v_0) . Für $v, w \in V$ sei $d(v, w) := \min\{l(\gamma); \gamma \in Pf(v, w)\}$. Dabei gelte $\min\emptyset = \infty$. $diam\Delta := \sup\{d(v, w); v, w \in V\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ heisst der Durchmesser von Δ . Δ heisst zusammenhängend, falls $d(v, w) < \infty$ für alle $v, w \in V$ gilt. Die maximalen zusammenhängenden Teilkomplexe von Δ heissen die Komponenten von Δ .

Beispiel 1.1.1 Sei G eine Gruppe, G_1, \dots, G_n paarweise verschiedene echte Untergruppen von G . Sei $V := G_1/G \cup G_2/G \cup \dots \cup G_n/G$ und $S = \{\emptyset \neq \sigma \subseteq V; \bigcap_{v \in \sigma} v \neq \emptyset\}$. Dies definiert einen Komplex der Dimension $n - 1$; wir bezeichnen diesen Komplex mit $\mathcal{K}(G; G_1, G_2, \dots, G_n)$. G operiert auf $\mathcal{K}(G; G_1, G_2, \dots, G_n)$ durch Rechtsmultiplikation. Es ist leicht zu

sehen, dass $\mathcal{K}(G; G_1, G_2, \dots, G_n)$ genau dann zusammenhängend ist, wenn $G = \langle G_1, \dots, G_n \rangle$ gilt. Nun sei $\sigma \in S$. Dann existiert eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ und ein $g \in G$ mit $\sigma = \{G_j g; j \in J\}$. Setze $H = \bigcap_{j \in J} G_j$ und $H_k = H \cap G_k$ für $k \notin J$. Dann ist $G_\sigma = H^g$ und $H_k t \mapsto G_k t g$ liefert einen Isomorphismus von $\mathcal{K}(H; (H_k)_{k \notin J})$ nach $\mathcal{K}(G; G_1, G_2, \dots, G_n)_\sigma$

Umgekehrt gilt:

Proposition 1.1.2 Sei Δ ein simplizialer Komplex, $G \leq \text{Aut} \Delta$ und $\sigma = \{v_1, \dots, v_n\} \in S$ derart, dass $V = v_1^G \dot{\cup} v_2^G \dot{\cup} \dots \dot{\cup} v_n^G$ gilt und für alle $\tau \in S$ ein $g \in G$ mit $\tau \subseteq \sigma^g$ existiert. Dann ist $\varphi : \mathcal{K}(G; G_{v_1}, \dots, G_{v_n}) \rightarrow \Delta : G_{v_i} g \mapsto v_i^g$ ein G -Isomorphismus.

Beweis: Unmittelbar klar ist, dass φ ein bijektiver G -Morphismus ist. Sei $\tau \in S$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $g \in G$ mit $\tau \subseteq \sigma^g$. Damit ist $\varphi^{-1}(\tau) \subseteq \varphi^{-1}(\sigma^g) = \{G_{v_1} g, \dots, G_{v_n} g\}$. \square

Definition 1.1.3

- (a) Zwei Pfade γ, γ' heißen elementar-homotop, falls gilt: Es existieren Pfade $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_2', \gamma_3$ und ein $\sigma \in S$, so dass $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \gamma' = \gamma_1 \gamma_2' \gamma_3$ und $\gamma_2, \gamma_2' \in Pf(\sigma)$ sind.
- (b) γ und γ' heißen homotop (in Zeichen $\gamma \sim \gamma'$), falls es eine Folge von Pfaden $\gamma = \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n = \gamma'$ gibt, so dass stets γ_i und γ_{i+1} elementar-homotop sind.

Homotope Pfade haben natürlich stets den gleichen Ursprung und das gleiche Ende. Wie man leicht sieht, ist Homotopie eine Äquivalenzrelation auf $Pf(\Delta)$. Wir schreiben $[\gamma]$ für die Äquivalenzklasse von γ .

Lemma 1.1.4

- (a) Sind $\gamma, \delta, \gamma', \delta' \in Pf(\Delta)$ mit $\gamma \sim \gamma', \delta \sim \delta', o(\delta) = \text{end}(\gamma)$, so gilt $\gamma \delta \sim \gamma' \delta'$.
- (b) Ist $\gamma \sim \delta$, so auch $\gamma^{-1} \sim \delta^{-1}$.
- (c) Ist $\gamma \in Pf(\Delta)(v, w)$, so $\gamma \gamma^{-1} \sim (v)$ und $\gamma^{-1} \gamma \sim (w)$.
- (d) Ist $\gamma \delta \sim \gamma' \delta$ oder $\delta \gamma \sim \delta \gamma'$, so gilt $\gamma \sim \gamma'$.

Beweis: (a), (b) und (d) sind klar, wenn elementar-homotop statt homotop vorausgesetzt wird. Der allgemeine Fall folgt mit Induktion nach der Länge der Kette. (c) ist ebenfalls sehr einfach. \square

Definition 1.1.5 Sei $v_0 \in V$ und $\pi_1(\Delta, v_0) := \{[\gamma]; \gamma \in Pf(\Delta)(v_0, v_0)\}$. Wir definieren auf $\pi_1(\Delta, v_0)$ eine binäre Verknüpfung “ \cdot ” durch $[\gamma] \cdot [\delta] = [\gamma\delta]$. Dies ist wohldefiniert wegen Lemma 1.1.4. Da die Verknüpfung von Pfaden assoziativ, ist auch “ \cdot ” assoziativ. Es gilt $[\sigma] \cdot [(v_0)] = [(v_0)] \cdot [\sigma] = [\sigma]$, also ist $[(v_0)]$ das Neutralelement. Nach 1.1.4(c) ist $\gamma\gamma^{-1} \sim (v_0) \sim \gamma^{-1}\gamma$, also haben wir $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$. Damit ist $\pi_1(\Delta, v_0)$ eine Gruppe. $\pi_1(\Delta, v_0)$ heißt die Fundamentalgruppe von Δ bezüglich v_0 .

In [Sp], Chap. 3, Section 6 wird die Fundamentalgruppe eines Simplicialen Komplexes als ”edge-path group” eingeführt. Im gleichen Paragraphen wird auch gezeigt, dass diese Gruppe isomorph ist zur Fundamentalgruppe der Geometrischen Realisierung eines Simplicialen Komplexes (Corollary 17).

Wir haben die Fundamententalgruppe in Abhängigkeit der Ecke v_0 definiert. Das folgende Lemma zeigt, dass die Wahl von v_0 nicht entscheidend ist.

Lemma 1.1.6 Seien $v_0, v_1 \in V, \delta \in Pf(\Delta)(v_0, v_1)$. Dann ist $[\gamma] \rightarrow [\delta^{-1}\gamma\delta]$ ein Isomorphismus von $\pi_1(\Delta, v_0)$ nach $\pi_1(\Delta, v_1)$.

Beweis: Einfach. □

Ist Δ zusammenhängend, so hängt $\pi_1(\Delta, v_0)$ nicht von v_0 ab; mit $\pi_1(\Delta)$ meinen wir eine Gruppe isomorph zu $\pi_1(\Delta, v_0)$ für ein beliebiges $v_0 \in V$.

Definition 1.1.7 Ein simplicialer Komplex Δ heißt einfach-zusammenhängend, falls Δ zusammenhängend ist und $\pi_1(\Delta, v_0) = 1$ für ein (alle) $v_0 \in V$ gilt. Ein einfach-zusammenhängender Graph wird als Baum bezeichnet.

Lemma 1.1.8 Sei Δ zusammenhängend. Dann ist Δ genau dann einfach-zusammenhängend, falls gilt: Sind $\gamma, \delta \in Pf(\Delta)$ mit $o(\gamma) = o(\delta)$ und $end(\gamma) = end(\delta)$, so gilt $\gamma \sim \delta$.

Beweis: Dass diese Bedingung $\pi_1(\Delta) = 1$ impliziert, ist klar. Sei umgekehrt $\pi_1(\Delta) = 1$. Sind γ, δ zwei Pfade mit dieser Eigenschaft, so ist $\gamma\delta^{-1} \sim (o(\gamma))$, folglich $\delta \sim (o(\gamma))\delta \sim \gamma\delta^{-1}\delta \sim \gamma$. □

1.2 Überlagerungen simplicialer Komplexe

Definition 1.2.1 Seien $\tilde{\Delta} = (\tilde{V}, \tilde{S})$ und $\Delta = (V, S)$ zwei simpliciale Komplexe, $v_0 \in V, \tilde{v}_0 \in \tilde{V}$ und $\varphi : (\tilde{\Delta}, \tilde{v}_0) \rightarrow (\Delta, v_0)$ ein Morphismus. Dann heißt $(\tilde{\Delta}, \varphi)$ eine Überlagerung, falls φ surjektiv ist und für alle $\tilde{\sigma} \in \tilde{S}$ der induzierte Morphismus von $st(\tilde{\sigma})$ nach $st(\varphi(\tilde{\sigma}))$ ein Isomorphismus ist.

Die letzte Bedingung in 1.2.1 ist gleichwertig damit, dass φ injektiv auf jedem Simplex ist und Residuen isomorph auf Residuen abbildet.

In [AS1] wird eine Überlagerung von Graphen als "fibering" bezeichnet, während eine "covering" von Graphen einer Überlagerung der dazugehörigen Cliquenkomplexe entspricht.

Satz 1.2.2 *Sei $\varphi : (\tilde{\Delta}, \tilde{v}_0) \rightarrow (\Delta, v_0)$ eine Überlagerung, $v \in V, \tilde{v} \in \varphi^{-1}(v)$, $\gamma = (v, v_1, \dots, v_n)$ ein Pfad in Δ . Dann existiert genau ein Pfad $\tilde{\gamma} = (\tilde{v}, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ in $\tilde{\Delta}$, so dass $\varphi(\tilde{v}_i) = v_i$ für alle i gilt.*

Wir sagen in dieser Situation, dass $\tilde{\gamma}$ ein Lift von γ ist.

Beweis: Wir führen Induktion nach n . Ist $n = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei $n \geq 1$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert für den Pfad $\gamma' = (v, v_1, \dots, v_{n-1})$ ein eindeutiger Lift $\tilde{\gamma}' = (\tilde{v}, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{n-1})$. Da φ einen Isomorphismus von $\Delta_{\tilde{v}_{n-1}}$ nach $\Delta_{v_{n-1}}$ induziert, existiert genau ein $\tilde{v}_n \in \Delta_{\tilde{v}_{n-1}}$ mit $\varphi(\tilde{v}_n) = v_n$. Folglich ist $\tilde{\gamma} = (\tilde{v}, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ der eindeutige Lift von γ . \square

Beispiel 1.2.3 *Sei $G \leq \text{Aut}\Delta$. Definiere $V/G := \{v^G; v \in V\}$, $S/G := \{\{v^G; v \in \sigma\}; \sigma \in S\}$ und $\Delta/G := (V/G, S/G)$. Dann ist die Abbildung $\varphi : \Delta \rightarrow \Delta/G : v \mapsto v^G$ ein Epimorphismus. φ ist genau dann eine Überlagerung, falls $d(v, v^g) \geq 3$ für alle $g \in G$ und alle $v \in V$ mit $v^g \neq v$ gilt.*

Definition 1.2.4 *Sei $\varphi : (\tilde{\Delta}, \tilde{v}_0) \rightarrow (\Delta, v_0)$ eine Überlagerung. Dann heißt $\text{Aut}\tilde{\Delta}_\varphi := \{g \in \text{Aut}(\tilde{\Delta}); \varphi \circ g = \varphi\}$ die Gruppe der Decktransformationen von $\tilde{\Delta}$.*

Lemma 1.2.5 *Ist $\tilde{\Delta}$ zusammenhängend, so operiert $\text{Aut}\tilde{\Delta}_\varphi$ fixpunktfrei auf S .*

Beweis: Sei $\sigma \in \tilde{S}, g \in (\text{Aut}\tilde{\Delta}_\varphi)_\sigma$. Ist $\sigma = \{v\}$, so lässt g auch jede zu v benachbarte Ecke fest; die Behauptung folgt mit Induktion nach dem Abstand zu v . Angenommen, $\dim\sigma \geq 1$ und g operiert fixpunktfrei auf σ . Ist $v \in \sigma$, so ist $v^g \neq v$, aber $\varphi(v) = \varphi(v^g)$, ein Widerspruch. \square

Definition 1.2.6 *Sei Δ zusammenhängend, $v_0 \in V$. Eine Überlagerung $\varphi : (\tilde{\Delta}, \tilde{v}_0) \rightarrow (\Delta, v_0)$ heißt universelle Überlagerung, falls $\tilde{\Delta}$ zusammenhängend ist und gilt: Ist $\psi : (\hat{\Delta}, \hat{v}_0) \rightarrow (\Delta, v_0)$ eine Überlagerung, so existiert eine Überlagerung $\rho : (\tilde{\Delta}, \tilde{v}_0) \rightarrow (\hat{\Delta}, \hat{v}_0)$, so dass $\varphi = \psi \circ \rho$ ist.*

Satz 1.2.7 *Sei Δ zusammenhängend.*

- (a) *Es existiert bis auf Isomorphie genau eine universelle Überlagerung $\varphi : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ von Δ .*
- (b) *Es ist $\pi_1(\Delta) \cong \text{Aut}\tilde{\Delta}_\varphi$.*

Beweis:

- (a) Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit:

Angenommen, $\varphi : (\tilde{\Delta}, \tilde{v}_0) \rightarrow (\Delta, v_0)$ und $\psi : (\hat{\Delta}, \hat{v}_0) \rightarrow (\Delta, v_0)$ sind universelle Überlagerungen von (Δ, v_0) . Dann existieren Überlagerungen $\zeta : (\tilde{\Delta}, \tilde{v}_0) \rightarrow (\hat{\Delta}, \hat{x}_0)$ und $\xi : (\hat{\Delta}, \hat{x}_0) \rightarrow (\tilde{\Delta}, \tilde{v}_0)$ mit $\zeta \circ \psi = \varphi$ und $\xi \circ \varphi = \psi$. Angenommen, es sind $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{V}$, so dass $\zeta(\tilde{x}_1) = \zeta(\tilde{x}_2) = \hat{x}$ ist. Sei $\tilde{\gamma}$ ein Pfad in $\tilde{\Delta}$, der \tilde{x}_1 und \tilde{x}_2 verbindet, und $\hat{\gamma} = \zeta(\tilde{\gamma})$. Dann kann $\tilde{\gamma}$ zu einem Pfad in $\hat{\Delta}$ mit Ursprung \hat{x} geliftet werden, und man sieht leicht, dass dieser Pfad $\hat{\gamma}$ sein muss. Also muss $\xi(\hat{\gamma}) = \tilde{\gamma}$ gelten. Daraus folgt $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$. Damit ist ζ ein Isomorphismus.

Wir zeigen nun die Existenz: Sei $\tilde{V} := \{[\gamma]; \text{end}(\gamma) = v_0\}$, $\tilde{v}_0 = [(\tilde{v}_0)]$ und $\tilde{S} := \{\emptyset \neq \tilde{\sigma} \subseteq \tilde{V}; \exists \sigma \in S, \gamma_0 \in Pf(\Delta)(*, v_0), \text{ so dass jedes } [\gamma] \in \tilde{\sigma} \text{ von der Form } [\gamma] = [\delta\gamma_0] \text{ mit } \delta \in Pf(\sigma) \text{ ist}\}$. Wir definieren φ durch $\varphi([\gamma]) := o(\gamma)$. Dann ist φ sicherlich ein Morphismus, und da Δ zusammenhängend ist, ist φ surjektiv. Angenommen, $\{[\gamma_1], [\gamma_2]\} \in \tilde{S}$ mit $o(\gamma_1) = o(\gamma_2)$. Dann $\gamma_1 \sim \delta_1\gamma_0, \gamma_2 \sim \delta_2\gamma_0$ mit $\delta_1, \delta_2 \in Pf(\sigma)$ für ein $\sigma \in S$. Wegen $o(\delta_1) = o(\delta_2), \text{end}(\delta_1) = \text{end}(\delta_2)$ folgt aber $\delta_1 \sim \delta_2$, also $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Also ist φ injektiv auf jedem Simplex. Man kann leicht sehen, dass φ Residuen isomorph auf Residuen abbildet. Somit ist φ eine Überlagerung.

Sei $\gamma = (v_n, \dots, v_1, v_0) \in Pf(\Delta)(*, v_0)$. $([\gamma], [(v_{n-1}, \dots, v_1, v_0)], \dots, [(v_0)])$ ist dann ein Pfad von $[\gamma]$ nach \tilde{v}_0 , somit ist $\tilde{\Delta}$ zusammenhängend.

Sei $\psi : (\hat{\Delta}, \hat{v}_0) \rightarrow (\Delta, v_0)$ eine Überlagerung. Wir definieren die Abbildung $\zeta : (\tilde{\Delta}, \tilde{v}_0) \rightarrow (\hat{\Delta}, \hat{v}_0)$ wie folgt: Für $\gamma \in Pf(\Delta)(*, v_0)$ existiert ein eindeutiger Lift $\hat{\gamma} \in Pf(\hat{\Delta})(*, \hat{v}_0)$. Setze $\zeta([\gamma]) := o(\hat{\gamma})$; dies ist, wie leicht zu sehen ist, eine Überlagerung mit $\psi \circ \zeta = \varphi$.

- (b) Durch $[\gamma]^{[\delta]} := [\gamma\delta]$ für $\gamma \in Pf(\Delta)(*, v_0), \delta \in Pf(\Delta)(v_0, v_0)$ ist eine Operation von $\pi_1(\Delta, v_0)$ auf $\tilde{\Delta}$ gegeben. $\pi_1(\Delta, v_0)$ ist dabei transitiv auf jeder Urbildfaser von φ . Dadurch bekommen wir eine Einbettung von $\pi_1(\Delta, v_0)$ in $\text{Aut}\tilde{\Delta}_\varphi$. Weil $\text{Aut}\tilde{\Delta}_\varphi$ fixpunktfrei auf $\tilde{\Delta}$ operiert, müssen diese Gruppen schon isomorph sein. \square

Der Beweis hier ist eine Adaption von 5.1 in [Ti1], vergleiche auch 4.2 in [AS1].

Korollar 1.2.8 *Äquivalent sind:*

- (a) Δ einfach-zusammenhängend.
- (b) Jede Überlagerung $\varphi : (\tilde{\Delta}, \tilde{v}_0) \rightarrow (\Delta, v_0)$ ist ein Isomorphismus.
- (c) Die universelle Überlagerung $\varphi : (\tilde{\Delta}, \tilde{v}_0) \rightarrow (\Delta, v_0)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis: Klar. □

Definition 1.2.9

- (a) Seien $\Delta = (V, S)$ ein simplizialer Komplex, $E_o := \{(x, y) \in V^2; x \sim y\}$ und G eine Gruppe. Eine Abbildung $\mu : E_o \rightarrow G$ heiße ein 1-Cozykel von Δ nach G , falls $\mu(x, y)\mu(y, z) = \mu(x, z)$ für alle x, y, z mit $\{x, y, z\} \in S$ gilt. Die Menge aller 1-Cozykel bezeichnen wir mit $Z^1(\Delta, G)$.
- (b) Die 1-Cozykel μ und ν heißen äquivalent, falls es eine Funktion $\beta : V \rightarrow G$ gibt, so dass $\nu(x, y) = \beta(x)\mu(x, y)\beta(y)^{-1}$ für alle $(x, y) \in E_o$ ist. (Wie leicht zu sehen ist, ist dies tatsächlich eine Äquivalenzrelation). Wir bezeichnen die Menge aller Äquivalenzklassen mit $H^1(\Delta, G)$. Ist μ äquivalent zum trivialen Cozykel $(x, y) \mapsto 1$, so heiße μ ein 1-Corand. Die Menge aller 1-Coränder bezeichnen wir mit $B^1(G, \Delta)$.

Es ist leicht zu erkennen, dass $\mu(x, x) = 1$ für alle x und $\mu(x, y)^{-1} = \mu(y, x)$ für alle $(x, y) \in E_o$ gilt. Ist $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ ein Pfad in Δ , so setzen wir $\mu(\gamma) := \mu(v_0, v_1)\mu(v_1, v_2) \dots \mu(v_{n-1}, v_n)$. Ist G abelsch, so sind $Z^1(\Delta, G)$ und $B^1(\Delta, G)$ bezüglich der punktweisen Multiplikation ebenfalls abelsche Gruppen, und es gilt $Z^1(\Delta, G)/B^1(\Delta, G) = H^1(\Delta, G)$.

Definition 1.2.10 Sei $\mu \in Z^1(\Delta, G)$. Wir definieren den simplizialen Komplex $(\Delta \times G)_\mu$ wie folgt: Die Eckenmenge ist $V \times G$ und die Simplizes sind alle Mengen der Form $\{(x_1, g), (x_2, \mu(x_2, x_1)g), \dots, (x_n, \mu(x_n, x_1)g)\}$ mit $\{x_1, \dots, x_n\} \in S$ und $g \in G$. (Man beachte, dass dies unabhängig von der Wahl von x_1 ist).

Satz 1.2.11 Sei Δ zusammenhängend und $\mu \in Z^1(G, \Delta)$. Dann gilt:

- (a) Sei $\tilde{\Delta} = (\Delta \times G)_\mu$ und $\tilde{v}_0 = (v_0, g)$. Dann ist die Abbildung $\varphi : (\tilde{\Delta}, \tilde{v}_0) \rightarrow (\Delta, v_0) : (x, g) \mapsto x$ eine Überlagerungsabbildung.
- (b) Sei $\gamma = (v_1, \dots, v_n) \in Pf(\Delta)$ und $g \in G$. Dann ist
- $$\tilde{\gamma} := ((v_1, g), (v_2, \mu(v_2, v_1)g), \dots, (v_n, \mu(\gamma^{-1})g))$$
- der eindeutige Lift von γ mit Ursprung (v_1, g) .
- (c) Durch $g \mapsto ((v, h) \mapsto (v, hg))$ ist eine Einbettung von G in $Aut\tilde{\Delta}$ gegeben. Es ist $\tilde{\Delta}/G \cong \Delta$.
- (d) Setze $H := \{\mu(\gamma); \gamma \in Pf(\Delta)(v_0, v_0)\} \leq G$. Dann ist H der Stabilisator der Zusammenhangskomponente von $(v_0, 1)$ und es existiert eine Bijektion zwischen den Zusammenhangskomponenten von $(\Delta \times G)_\mu$ und den Rechtsnebenklassen von H in G .
- (e) Genau dann induziert φ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\tilde{\Delta}$ einen Isomorphismus nach Δ , wenn $\mu \in B^1(\Delta, G)$ ist.

Beweis:

- (a) Surjektivität ist klar. Sei $v \in V, g \in G$ und $\sigma = \{x_1, \dots, x_n\}$ ein Simplex in Δ_σ . Definiere $\tilde{\sigma} := \{(x_1, \mu(x_1, v)g), \dots, (x_n, \mu(x_n, v)g)\}$. Dies ist nach Definition der einzige Simplex in $\tilde{\Delta}_{(v, g)}$ mit $\varphi(\tilde{\sigma}) = \sigma$.
- (b) Folgt aus Induktion nach der Länge des Pfades.
- (c) Klar.
- (d) Sei $v \in V$ und $\tilde{\Delta}_1$ die Zusammenhangskomponente von $\tilde{\Delta}$, welche $(v, 1)$ enthält. Dann gilt $\varphi^{-1}(v) \cap \tilde{\Delta}_1 = \{(v, h); h \in H\}$, also ist H der Stabilisator von $\tilde{\Delta}_1$. Da G die Zusammenhangskomponenten von $\tilde{\Delta}$ permutiert, folgt die Behauptung.
- (e) Angenommen, es ist $\mu(x, y) = \beta(x)\beta(y)^{-1}$ für eine Abbildung $\beta : V \rightarrow G$. Ist $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ ein Pfad in Δ , so ist $\mu(\gamma) = \beta(v_0)\beta(v_n)^{-1}$. Insbesondere ist $\mu(\gamma) = 1$, wenn γ geschlossen ist. Damit folgt die Behauptung aus Teil (d). Es gelte umgekehrt, dass φ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\tilde{\Delta}$ einen Isomorphismus induziert. Wähle $v \in V$. Für jedes $x \in V$ existiert dann genau ein Element $\beta(x) \in G$, so dass $(x, \beta(x))$ in der gleichen Zusammenhangskomponente wie $(v, 1)$ liegt. Sei $(x, y) \in E_\sigma$. Dann ist $\{(x, \beta(x)), (y, \mu(y, x)\beta(x))\}$ ein Simplex, also liegt $(y, \mu(y, x)\beta(x))$ in der selben Zusammenhangskomponente wie $(v, 1)$. Damit $\beta(y) = \mu(y, x)\beta(x)$, also $\mu(y, x) = \beta(y)\beta(x)^{-1}$. \square

Definition 1.2.12 Eine Überlagerung $\varphi : (\tilde{\Delta}, \tilde{v}_0) \rightarrow (\Delta, v_0)$ heißt normal, falls $\text{Aut}\tilde{\Delta}_\varphi$ regulär auf $\varphi^{-1}(v)$ für alle $v \in V$ operiert.

Satz 1.2.13 Sei $\varphi : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ eine normale Überlagerung mit Decktransformationsgruppe G .

- (a) Δ und $\tilde{\Delta}/G$ sind isomorph.
- (b) Es existiert ein $\mu \in Z^1(G, \Delta)$, so dass $\tilde{\Delta}$ und $(\Delta \times G)_\mu$ isomorph sind.

Beweis:

- (a) Die Abbildung $\psi : \tilde{\Delta}/G \rightarrow \Delta : v^G \mapsto \varphi(v)$ ist wohldefiniert. Man kann leicht erkennen, dass ψ ein Isomorphismus ist.
- (b) Für alle $x \in V$ wähle ein $\tilde{x} \in \varphi^{-1}(x)$. Sind x und y benachbart, so existiert genau ein Element $\mu(y, x) \in G$, so dass \tilde{x} und $\tilde{y}^{\mu(y, x)}$ benachbart sind. Konjugation mit $\mu(x, y)$ ergibt $\mu(x, y)^{-1} = \mu(y, x)$. Ist $\{x, y, z\} \in S$, so ist $\{\tilde{x}, \tilde{y}^{\mu(y, x)}, \tilde{z}^{\mu(z, x)}\}$ ein Simplex. Also sind \tilde{y} und $\tilde{z}^{\mu(z, x)\mu(y, x)^{-1}}$ benachbart. Wir erhalten $\mu(z, y) = \mu(z, x)\mu(x, y)$. $\psi : (\Delta \times G)_\mu \rightarrow \tilde{\Delta} : (x, g) \mapsto \tilde{x}^g$ ist dann der gewünschte Isomorphismus. \square

Satz 1.2.14 Sei $\varphi : (\tilde{\Delta}, \tilde{v}_0) \rightarrow (\Delta, v_0)$ die universelle Überlagerung von Δ und $g \in \text{Aut}\Delta$. Dann existiert ein $\tilde{g} \in \text{Aut}\tilde{\Delta}$ mit $\varphi(\tilde{v}^{\tilde{g}}) = \varphi(\tilde{v})^g$ für alle $\tilde{v} \in \tilde{V}$. \tilde{g} heisst ein Lift von g .

Beweis: Sei $w = v_0^g$ und $\tilde{w} \in \varphi^{-1}(w)$. Dann sind $g \circ \varphi : (\tilde{\Delta}, \tilde{v}_0) \rightarrow (\Delta, w)$ und $\varphi : (\tilde{\Delta}, \tilde{w}) \rightarrow (\Delta, w)$ beides universelle Überlagerungen, also existiert ein Automorphismus $\tilde{g} : (\tilde{\Delta}, \tilde{v}_0) \rightarrow (\tilde{\Delta}, \tilde{w})$ mit $g \circ \varphi = \varphi \circ \tilde{g}$. \square

Wir bezeichnen mit $\text{Aut}(\tilde{\Delta}, \varphi)$ alle Automorphismen von $\tilde{\Delta}$, die von einem Automorphismus von Δ geliftet wurden. Dies ist eine Untergruppe von $\text{Aut}\tilde{\Delta}$, und es gilt $\text{Aut}(\tilde{\Delta}, \varphi) = N_{\text{Aut}\tilde{\Delta}}(\text{Aut}\tilde{\Delta}_\varphi)$ und $\text{Aut}(\tilde{\Delta}, \varphi)/\text{Aut}\tilde{\Delta}_\varphi \cong \text{Aut}\Delta$. Ist $v \in V$, so können wir die Ecken von $\tilde{\Delta}$ als Homotopieklassen von $Pf(\Delta)(v, v)$ beschreiben; auf dieser Menge haben wir eine natürliche $\text{Aut}\Delta_v$ -Operation. Somit erhalten wir $\text{Aut}\Delta_v \cong \text{Aut}(\tilde{\Delta}, \varphi)_{\tilde{v}}$ für alle $\tilde{v} \in \varphi^{-1}(v)$.

1.3 Amalgame

Definition 1.3.1 Sei (I, \leq) eine partiell geordnete Menge.

- (a) Ein Amalgam von Gruppen ist eine Familie \mathfrak{A} von Gruppen $(G_i)_{i \in I}$ und Homomorphismen $(\varphi_{ji} : G_i \rightarrow G_j)_{i < j}$ mit $\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$ für $i < j < k$.

- (b) Eine Kompletterung von \mathfrak{A} besteht aus einer Gruppe G und einer Familie von Homomorphismen $(\varphi_i : G_i \rightarrow G)_{i \in I}$ mit $\varphi_j \circ \varphi_{ji} = \varphi_i$ für $i < j$. Eine Kompletterung heißt *treu*, falls alle φ_i injektiv sind.
- (c) Eine Kompletterung $(G, (\varphi_i)_{i \in I})$ von \mathfrak{A} heißt *universelle Kompletterung*, falls $G = \langle \text{Im } \varphi_i; i \in I \rangle$ gilt und folgende Bedingung erfüllt ist: Ist $(H, (\psi_i)_{i \in I})$ eine weitere Kompletterung von \mathfrak{A} , so existiert ein Homomorphismus $\psi : G \rightarrow H$ mit $\psi \circ \varphi_i = \psi_i$ für alle $i \in I$.

Wenn G eine treue Kompletterung von \mathfrak{A} ist, so werden wir in Zukunft immer die G_i mit ihren Bildern in G identifizieren.

Satz 1.3.2 *Sei \mathfrak{A} ein Amalgam. Dann besitzt \mathfrak{A} eine bis auf Isomorphie eindeutige universelle Kompletterung. Gibt es eine treue Kompletterung von \mathfrak{A} , so ist auch die universelle Kompletterung treu.*

Beweis: (vergleiche [Ti2], 1.1) Die Eindeutigkeit der universellen Kompletterung und die letzte Behauptung folgen unmittelbar aus der universellen Eigenschaft. Sei \tilde{G} die Gruppe mit Erzeugenden $\bigcup_{i \in I} G_i$ und Relationen $\varphi_{ji}(x) = x$ für $i < j, x \in G_i$ sowie allen Relationen der G_i . Dann sieht man leicht, dass \tilde{G} die universelle Kompletterung von \mathfrak{A} ist. \square

Bemerkung 1.3.3 *Ist G eine Gruppe und ist $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untergruppen in G mit $G_i \leq G_j \leq G$ für $i < j$, so können wir G als treue Kompletterung des Amalgams $\mathfrak{A} := ((G_i)_{i \in I}, (\varphi_{ji})_{i < j})$ auffassen (wobei φ_{ji} die Inklusion von G_i in G_j sei). Sei \tilde{G} die universelle Kompletterung von \mathfrak{A} . Wir erhalten damit einen Homomorphismus von \tilde{G} nach G , der auf allen G_i die Identität induziert.*

Satz 1.3.4 *Sei G eine Gruppe, G_1, \dots, G_n paarweise verschiedene echte Untergruppen von G mit $G = \langle G_1, \dots, G_n \rangle$ und $\Delta := \mathcal{K}(G; G_1, \dots, G_n)$. Sei $I = \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) \setminus \{\emptyset\}$ mit Ordnungsrelation $i \leq j$ falls $j \subseteq i$ gilt. Für $j \in I$ setze $G_j = \bigcap_{i \in j} G_i$ und für $j > k$ sei φ_{jk} die Inklusion von G_j in G_k . Wir erhalten auf diese Art ein Amalgam \mathfrak{A} von Gruppen. Sei \tilde{G} die universelle Kompletterung dieses Amalgams. Dann existiert ein Epimorphismus $\varphi : \tilde{G} \rightarrow G$, der auf allen G_i die Identität induziert. Dann ist $\mathcal{K}(\tilde{G}; G_1, \dots, G_n)$ isomorph zur universellen Überlagerung von Δ .*

Beweis: Mit der letzten Bemerkung in 1.1.1 ist unmittelbar klar, dass φ eine Überlagerung ist. Wegen $\tilde{G} = \langle G_i; i \in I \rangle$ ist $\tilde{\Delta}$ zusammenhängend. Es ist klar, dass φ surjektiv ist. Wir müssen noch die universelle Eigenschaft verifizieren.

Sei $\tilde{\Delta}$ die universelle Überlagerung von Δ und X das Urbild von G in $\text{Aut}\tilde{\Delta}$. Dann können wir die G_i als Untergruppen von X auffassen. Man sieht leicht mit 1.1.2, dass $\tilde{\Delta} \cong \mathcal{K}(X; G_1, \dots, G_n)$ ist. Da $\tilde{\Delta}$ zusammenhängend ist, muss $X = \langle G_1, \dots, G_n \rangle$ gelten. Somit erhalten wir einen Epimorphismus $\psi : \tilde{G} \rightarrow X$. Durch die Abbildung $G_j x \mapsto G_j \psi(x)$ erhalten wir eine Überlagerungsabbildung von $\mathcal{K}(\tilde{G}; G_1, \dots, G_n)$ nach $\mathcal{K}(X; G_1, \dots, G_n)$ und damit nach $\tilde{\Delta}$. Da $\tilde{\Delta}$ die universelle Überlagerung ist, muss diese Abbildung und damit auch ψ ein Isomorphismus sein. \square

1.4 Geometrien

Definition 1.4.1 Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Eine Geometrie vom Rang n ist ein Paar (Δ, θ) , wobei $\Delta = (V, S)$ ein vollständiger, zusammenhängender simplizialer Komplex der Dimension $n - 1$ und $\theta : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$ eine Abbildung ist, so dass gilt:

- (a) Ist $\sigma \in S$, so ist $\theta|_{\sigma}$ injektiv.
- (b) Ist $\dim\sigma < n - 1$, so existieren mindestens zwei verschiedene Simplizes σ_1, σ_2 mit $\sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$ und $\dim\sigma_1 = \dim\sigma_2 = n - 1$.
- (c) Ist $\dim\sigma < n - 2$, so ist das Residuum Δ_{σ} zusammenhängend.

Sind x, y zwei verschiedene Elemente aus V mit $x \sim y$, so sagt man auch, x und y sind inzident (kurz xIy).

Die Abbildung θ heißt Typfunktion. Simplizes in Geometrien werden häufig auch als Fahnen bezeichnet. Oft wird die leere Menge ebenfalls als Fahne gerechnet; man setzt dann $\Delta_{\emptyset} = \Delta$. Die Bedingungen (a) und (b) besagen, dass θ auf maximalen Fahnen immer bijektiv ist, also genau ein Element jeden Typs enthält. Ist σ eine Fahne, so heißt $\text{rang}\sigma = \dim\sigma + 1$, $\text{corang}\sigma = n - \text{rang}\sigma$, $\text{typ}(\sigma) = \theta(\sigma)$, $\text{cotyp}(\sigma) = \{1, \dots, n\} \setminus \text{typ}(\sigma)$. Ist $\text{corang}\sigma \geq 2$ und $f : \text{cotyp}(\sigma) \rightarrow \{1, \dots, \text{corang}\sigma\}$ bijektiv, so ist $(\Delta_{\sigma}, f \circ \theta|_{V_{\sigma}})$ eine Geometrie vom Rang $\text{corang}\sigma$.

Maximale Fahnen werden in Zukunft *Kammern* genannt, Fahnen vom Corang 1 hingegen *Panele*.

Lemma 1.4.2 Ist Δ eine Geometrie, σ_1, σ_2 zwei Fahnen in Δ , so existiert eine Folge C_1, C_2, \dots, C_m von Kammern, so dass $\sigma_1 \subseteq C_1, \sigma_2 \subseteq C_m$ und $C_i \cap C_{i+1}$ ein Panel enthält. Ist τ eine Fahne mit $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{st}(\tau)$, so können die C_i so gewählt werden, dass sie in $\text{st}(\tau)$ liegen.

Eine solche Folge von Kammern nennen wir künftig eine *Galerie*.

Beweis: (vergleiche Theorem 1.9 in [P]) Wir führen Induktion nach $n = \text{rang}\Delta$. Wenn σ_1, σ_2 mit einer nichtleeren Fahne τ inzidieren, so gilt die Behauptung wegen $\text{rang}\Delta_\tau < \text{rang}\Delta$ für $\sigma_1 \setminus \tau, \sigma_2 \setminus \tau$ in Δ_τ , und daraus folgt dann die Behauptung für σ und τ . Es reicht daher aus, die erste Behauptung zu zeigen.

Setze $\delta := \min\{d(x, y); x \in \sigma_1, y \in \sigma_2\}$. Wir führen Induktion nach δ . Für $\delta = 0$ ist die Aussage schon gezeigt. Sei also $\delta > 0$, $x \in \sigma_1$, $y \in \sigma_2$ mit $d(x, y) = \delta$. Es existiert dann ein $z \in V$ mit $d(x, z) = 1$ und $d(z, y) = \delta - 1$. Wir können die Induktionsvoraussetzung nun zum einen auf σ_1 und $\{x, z\}$, zum anderen auf $\{x, z\}$ und σ_2 anwenden. Damit folgt die Behauptung. \square

Sind $(\Delta_1, \theta_1), (\Delta_2, \theta_2)$ zwei Geometrien vom Rang n , so heißt ein simplizialer Morphismus $\varphi : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ ein Morphismus zwischen den Geometrien Δ_1 und Δ_2 , falls es ein $\sigma \in S_n$ mit $\sigma \circ \theta_1 = \theta_2 \circ \varphi$ gibt. φ heißt *typerhaltend*, falls $\sigma = 1$ ist.

Δ heißt *dünn* [dick], falls jedes Panel σ in genau zwei [mindestens drei] Kammern enthalten ist.

Definition 1.4.3 (siehe [Ti1], 6.2)

- (a) Sei $1 \leq i \leq n$ und $\sigma \in S$. Dann heißt $Sh_i(\sigma) := \{v \in V_\sigma; \theta(v) = i\}$ der i -Schatten von σ .
- (b) Eine Geometrie Δ besitzt die *Durchschnittseigenschaft* (engl. *Intersection Property*), falls gilt: Sind $\sigma, \tau \in S$ und ist $1 \leq i \leq n$, so ist $|Sh_i(\sigma) \cap Sh_i(\tau)| \leq 1$ oder es existiert ein $\rho \in S$ mit $\rho \cup \sigma, \rho \cup \tau \in S$ und $Sh_i(\sigma) \cap Sh_i(\tau) = Sh_i(\rho)$.

Proposition 1.4.4 Sei (Δ, θ) eine Geometrie vom Rang n und $\varphi : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ eine Überlagerung. Dann ist $(\tilde{\Delta}, \tilde{\theta})$ mit $\tilde{\theta} := \theta \circ \varphi$ eine Geometrie. Ist Δ dünn [dick], so ist auch $\tilde{\Delta}$ dünn [dick]. Besitzt Δ die Durchschnittseigenschaft, so auch $\tilde{\Delta}$.

Beweis: Die ersten beiden Behauptungen sind klar. Seien $\tilde{\sigma}, \tilde{\tau} \in \tilde{S}$, $\sigma = \varphi(\tilde{\sigma})$ und $\tau = \varphi(\tilde{\tau})$. Wir sehen dann, dass φ die Menge $Sh_i(\tilde{\sigma}) \cap Sh_i(\tilde{\tau})$ injektiv nach $Sh_i(\sigma) \cap Sh_i(\tau)$ abbildet. Angenommen, es ist $|Sh_i(\tilde{\sigma}) \cap Sh_i(\tilde{\tau})| \geq 2$. Dann ist auch $|Sh_i(\sigma) \cap Sh_i(\tau)| \geq 2$ und es existiert ein $\rho \in S$ mit $Sh_i(\rho) = Sh_i(\sigma) \cap Sh_i(\tau)$ und $\rho \cup \sigma, \rho \cup \tau \in S$. Sei $\tilde{\rho}$ das einzige Urbild von ρ in $st(\tilde{\sigma})$. Ist $\tilde{v} \in Sh_i(\tilde{\sigma}) \cap Sh_i(\tilde{\tau})$ und $v = \varphi(\tilde{v})$, so ist $\{v\} \cup \rho$ ein Simplex in $st(\sigma)$, also ist $\{\tilde{v}\} \cup \tilde{\rho}$ ein Simplex in $st(\tilde{\sigma})$, also $\tilde{v} \in Sh_i(\tilde{\rho})$. Ferner ist $\rho \cup \tau$ ein Simplex in Δ_v , also ist $\tilde{\rho} \cup \tilde{\tau}$ ein Simplex in $\tilde{\Delta}_{\tilde{v}}$. Weil $\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}$ Simplices in $st(\tilde{\rho})$ sind und $Sh_i(\rho) = Sh_i(\sigma) \cap Sh_i(\tau)$ gilt, folgt die Behauptung. \square

Beispiel 1.4.5 Seien G_1, \dots, G_n paarweise verschiedene Untergruppen einer Gruppe G . Für $\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, n\}$ setze $G_J = \bigcap_{j \in J} G_j$. Angenommen, es sind die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

- (a) $G_J = \langle G_K; J \subset K \rangle$ für alle $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|J| \leq n - 2$
- (b) Sind $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ und $x_1, \dots, x_k \in G$ mit $G_{i_r} x_r \cap G_{i_s} x_s \neq \emptyset$ für alle $1 \leq r, s \leq k$, so ist $\bigcap_{r=1}^k G_{i_r} x_r \neq \emptyset$. (Diese Bedingung ist äquivalent mit der Vollständigkeit von $\mathcal{K}(G; G_1, \dots, G_n)$.)

Dann ist $(\mathcal{K}(G; G_1, \dots, G_n), \theta)$ mit $\theta(G_i g) = i$ eine Geometrie vom Rang n .

1.5 Kammersysteme

Definition 1.5.1 Sei I eine nichtleere Menge. Ein Kammersystem über I besteht aus einer nichtleeren Menge \mathcal{C} und einer Familie aus Partitionen $(\mathcal{P}_i)_{i \in I}$ von \mathcal{C} , so dass gilt

- (a) Für alle $i \in I$ und alle $X \in \mathcal{P}_i$ ist $|X| \geq 2$.
- (b) Sind $C, D \in \mathcal{C}$ verschieden und existieren $X \in \mathcal{P}_i, Y \in \mathcal{P}_j$ mit $C, D \in X \cap Y$, so ist $i = j$ (und damit $X = Y$).

$C, D \in \mathcal{C}$ heißen i -benachbart (in Zeichen $C \sim_i D$), falls es ein $X \in \mathcal{P}_i$ gibt, so dass $C, D \in X$ gilt.

Definition 1.5.2 Ein Kammersystem $(\mathcal{C}, (\mathcal{P}_i)_{i \in I})$ heißt dünn bzw. dick, falls für alle $i \in I$ und alle $X \in \mathcal{P}_i$ stets $|X| = 2$ bzw. $|X| \geq 3$ gilt.

Wir werden in Zukunft immer voraussetzen, dass I endlich ist.

Definition 1.5.3

- (a) Sei $f = (i_1, \dots, i_n) \in I^n$. Eine Gallerie vom Typ f ist eine Folge $\gamma = (C_0, C_1, \dots, C_n) \in \mathcal{C}^{n+1}$ mit $C_j \sim_{i_j} C_{j+1}$ für alle j . γ heißt nicht-stotternd, falls zwei darauffolgende Kammern immer verschieden sind. $o(\gamma) := C_0$ heißt der Anfang und $end(\gamma) := C_n$ das Ende von γ .
- (b) Sei $J \subseteq I$. Dann heißen $C, D \in \mathcal{C}$ J -benachbart, falls es ein $f \in J^n$ und eine Gallerie γ vom Typ f mit $o(\gamma) = C$ und $end(\gamma) = D$ gibt. Wir schreiben dafür auch $C \sim_J D$. Wie leicht zu sehen ist, ist J -Benachbarkeit eine Äquivalenzrelation auf \mathcal{C} . Für $C \in \mathcal{C}$ sei das J -Residuum von C durch $\mathcal{C}_J(C) := \{D \in \mathcal{C}; C \sim_J D\}$ erklärt. Dies ist in natürlicher Weise ein Kammersystem über J . $|J|$ heißt der Rang, $|I \setminus J|$ der Corang des Residuums.
- (c) Ein Kammersystem heißt zusammenhängend, falls es zu $C, D \in \mathcal{C}$ eine Gallerie γ mit $o(\gamma) = C$ und $end(\gamma) = D$ gibt. \mathcal{C} heißt residuell zusammenhängend, falls jedes Residuum zusammenhängend ist.

Bemerkung 1.5.4

- (a) Ist (Δ, θ) eine Geometrie vom Rang n , so definieren wir das Kammersystem $\text{Cham}\Delta$ wie folgt: Sei $\text{Cham}\Delta$ die Menge der maximalen Fahnen; zwei maximale Fahnen $\{v_1, \dots, v_n\}$ und $\{w_1, \dots, w_n\}$ mit $\theta(v_j) = \theta(w_j) = j$ sind i -benachbart genau dann, wenn $v_j = w_j$ für alle $j \neq i$ sind.

(b) Sei umgekehrt \mathcal{C} ein Kammersystem. Dann definieren wir einen simplizialen Komplex $\Delta(\mathcal{C}) = (V(\mathcal{C}), S(\mathcal{C}))$ wie folgt:

Wir setzen $V(\mathcal{C}) := \{\mathcal{C}_J(\mathcal{C}); C \in \mathcal{C}, |J| = |I| - 1\}$ als Eckenmenge und $S(\mathcal{C}) := \{\emptyset \neq \sigma \subseteq V(\mathcal{C}); \bigcap_{v \in \sigma} v \neq \emptyset\}$ als Menge der Simplizes. Man beachte, dass $V(\mathcal{C})$ unter Umständen nur aus einem Element bestehen kann. Gilt $\mathcal{C}_J(\mathcal{C}) \neq \mathcal{C}_K(\mathcal{C})$ für alle $C \in \mathcal{C}$ und alle $J, K \subseteq I$ mit $|J| = |K| = |I| - 1$ und ist $f : I \rightarrow \{1, \dots, n\}$ eine Bijektion, so können wir eine Typfunktion θ durch $\theta(\mathcal{C}_{I \setminus \{i\}}(\mathcal{C})) := f(i)$ definieren. Unter bestimmten Bedingungen ist $\Delta(\mathcal{C})$ mit dieser Typfunktion eine Geometrie (vergleiche [P], Ch. 12.5). Wie man leicht erkennen kann, gilt $\Delta(\text{Cham}\Delta) = \Delta$. $\text{Cham}(\Delta(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ gilt hingegen nur, falls für $C, D \in \mathcal{C}$ und $J, K \subseteq I$ aus $C \sim_J D$ und $C \sim_K D$ auch $C \sim_{J \cap K} D$ folgt.

Beispiel 1.5.5 Sei G Gruppe, $B \leq P_1, \dots, P_n \leq G$ paarweise verschieden. Wir definieren das Kammersystem $\mathcal{C}(G; B; P_1, \dots, P_n)$ wie folgt: Die Kammern sind die Rechtsnebenklassen von B in G , es gilt $Bx \sim_i By$ genau dann, wenn $P_i x = P_i y$ ist. Dann operiert G als Automorphismengruppe auf $\mathcal{C}(G; B; P_1, \dots, P_n)$. $\mathcal{C}(G; B; P_1, \dots, P_n)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $G = \langle P_1, \dots, P_n \rangle$ ist.

Ähnlich wie in 1.1.2 sieht man:

Satz 1.5.6 Ist \mathcal{C} ein Kammersystem über $\{1, \dots, n\}$, G eine transitive Untergruppe von $\text{Aut}\mathcal{C}$. Sei $B = G_C$ für eine Kammer C und P_i der Stabilisator des i -Residuums von C . Dann ist \mathcal{C} isomorph zu $\mathcal{C}(G; B; P_1, \dots, P_n)$.

Wie für Simpliziale Komplexe existiert auch für Kammersysteme eine Überlagerungstheorie. Wir werden sie allerdings nicht benötigen und verweisen daher nur auf [Ti1] und [Ro1].

1.6 Coxeter-Komplexe und Gebäude

Sei Δ eine Geometrie vom Rang 2 und γ ein geschlossener Pfad in Δ . Da benachbarte Ecken immer unterschiedlichen Typs sind, ist die Länge von γ immer gerade. Wir definieren $girth(\Delta) := \min\{n \in \mathbb{N}; \exists v \in V \exists \gamma \in Pf(\Delta)(v, v) \text{ mit } l(\gamma) = n \text{ und } [\gamma] \neq [(v)]\}$.

Wir führen nun eine wichtige Klasse von Geometrien vom Rang 2 ein.

Definition 1.6.1 Sei $n \in \mathbb{N}_{>1} \cup \{\infty\}$. Eine Geometrie Δ vom Rang 2 heißt schwaches verallgemeinertes n -Gon, falls $diam\Delta = n$ und $girth(\Delta) = 2n$ ist. Δ heißt verallgemeinertes n -Gon, falls Δ zusätzlich noch dick ist. Δ heißt gewöhnliches n -Gon, falls Δ dünn ist.

Ein schwaches verallgemeinertes ∞ -Gon ist gerade ein einfach-zusammenhängender Graph, also eine Baum, so dass jede Ecke mindestens zwei Nachbarn hat. Wir bezeichnen die Elemente des einen Typs eines verallgemeinerten n -Gons mit Punkte und die Elemente des anderen Typs mit Geraden. Zwei Elemente heißen *gegenüberliegend*, falls sie maximalen Abstand n besitzen. Ein geordnetes Apartment ist ein geschlossener Pfad der Länge $2n$, so dass nur Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen. Eine geordnete Wurzel ist ein Pfad der Länge n , so dass Anfangs- und Endpunkt Abstand n haben.

Ist Δ ein verallgemeinertes n -Gon und $x, y \in \Delta$ mit $1 \leq d(x, y) = k < n$, so gibt es genau ein Element $z \in \Delta$ mit $d(x, z) = 1$ und $d(z, y) = k - 1$. Wir bezeichnen z mit $proj_x y$.

Definition 1.6.2 Eine symmetrische $n \times n$ -Matrix $M = (m_{ij})$ heißt Coxeterdiagramm, falls $m_{ij} \in \mathbb{N}_{>0} \cup \{\infty\}$ für alle i, j ist und $m_{ij} = 1$ genau dann gilt, wenn $i = j$ gilt.

Für Coxeter-Diagramme verwendet man gewöhnlich folgende Darstellung:

Man zeichnet Punkte $1, 2, \dots, n$ und verbindet die Punkte $\overset{\bullet}{i}$ und $\overset{\bullet}{j}$ mit $\overset{m_{ij}}{-}$; man schreibt dabei $\bullet - \bullet$ statt $\overset{2}{\bullet - \bullet}$, $\bullet \bullet$ statt $\overset{3}{\bullet - \bullet}$, $\bullet \bullet \bullet$ statt $\overset{4}{\bullet - \bullet}$ und $\bullet \bullet \bullet \bullet$ statt $\overset{6}{\bullet - \bullet}$. Ist z.B.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \infty & 2 & 2 \\ \infty & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

so entspricht das $\overset{\infty}{\bullet \bullet \bullet \bullet}$ in Diagrammschreibweise.

Der Coxeter-Graph zu einem Diagramm M ist der Graph, der entsteht, wenn je zwei Ecken i, j mit $m_{ij} > 2$ verbunden werden. Ein Diagramm heißt zusammenhängend, falls der dazugehörige Graph zusammenhängend ist.

Definition 1.6.3 Sei M ein Coxeterdiagramm vom Rang n . Eine Geometrie Δ vom Rang n heißt Geometrie mit Diagramm M (oder M -GAB), falls gilt: Ist $i \neq j, \sigma \in S$ mit $\theta(\sigma) = \{i, j\}$, so ist Δ_σ ein verallgemeinertes m_{ij} -Gon.

Der Name GAB bedeutet “Geometry which is almost a Building”. Ist Δ eine Geometrie vom Typ $\begin{matrix} & m_{12} & m_{23} \\ & \bullet & \bullet \\ 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 3 \end{matrix}$, so bezeichnen wir die Objekte vom Typ 1 als Punkte, vom Typ 2 als Geraden, vom Typ 3 als Ebenen. Zwei Punkte heißen *kollinear*, falls sie mit einer gemeinsamen Geraden inzidieren, und *koplanar*, falls sie mit einer gemeinsamen Ebenen inzidieren. Der Punktgraph einer Geometrie ist der Graph mit der Menge der Punkte als Eckenmenge, wobei zwei kollineare Punkte benachbart sein sollen.

Ist Δ ein verallgemeinertes n -Gon, so bezeichnen wir das dazugehörige Kammerensystem $\text{Cham}(\Delta)$ ebenfalls als ein verallgemeinertes n -Gon.

Definition 1.6.4 Seien \mathcal{C} ein residuell zusammenhängendes Kammerensystem und M ein Coxeter-Diagramm. Dann heißt \mathcal{C} ein M -SCAB (“System of Chambers which is almost a Building”), falls es jedes m_{ij} -Gon ein verallgemeinertes m_{ij} -Gon ist.

Definition 1.6.5 Sei M ein Coxeter Diagramm. Wir definieren die Gruppe $W(M)$ als Gruppe mit Erzeugenden

$$s_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

und Relationen

$$(s_i s_j)^{m_{ij}} \text{ für } m_{ij} \neq \infty.$$

$W(M)$ heißt die Coxetergruppe zum Diagramm M . Setze $W_i = \langle s_j; i \neq j \rangle \leq W(M)$. Dann heißt $\mathcal{C}(M) := \mathcal{K}(W(M); W_1, \dots, W_n)$ der Coxeter-Komplex zum Diagramm M .

Wie leicht zu sehen ist, ist $\mathcal{C}(M)$ eine einfach-zusammenhängende dünne Geometrie mit Diagramm M . $\mathcal{C}(M)$ ist in gewisser Hinsicht die “Standardgeometrie” mit Diagramm M .

Verschiedene Coxeter-Diagramme können isomorphe Coxetergruppen besitzen. Wir müssen daher die Menge der Erzeugenden auszeichnen. Ist W eine Coxetergruppe mit Erzeugendenmenge $S = \{s_i; i \in I\}$, so bezeichnen wir sie mit (W, S) . Die Elemente aus S und ihre Konjungierten bezeichnen wir als *Spiegelungen*.

Zwei Familien von Coxeter-Diagrammen spielen eine herausragende Rolle.

Definition 1.6.6

- (a) Ein Coxeter-Diagramm M heißt *sphärisch*, falls $\mathcal{C}(M)$ endlich ist.
- (b) Ein Coxeter-Diagramm M heißt *affin*, falls es eine Abbildung f von der Eckenmenge von $\mathcal{C}(M)$ in einen euklidischen Vektorraum \mathbb{E} und einen Monomorphismus ϕ von $W(M)$ in die Isometriegruppe von \mathbb{E} gibt, so dass gilt:
- (i) Es ist $\text{conv}(f(\sigma)) \cap \text{conv}(f(\tau)) = \text{conv}(f(\sigma \cap \tau))$ für alle Simplizes σ und τ , wobei für $X \subseteq \mathbb{E}$ mit $\text{conv}(X)$ die konvexe Hülle von X gemeint ist.
 - (ii) $\mathbb{E} = \bigcup_{C \in \text{Cham}\mathcal{C}(M)} \text{conv}(f(C))$.
 - (iii) Für jede Ecke v von $\mathcal{C}(M)$ und alle $g \in W(M)$ ist $f(v^g) = f(v)^{\phi(g)}$.

Diese Bedingungen besagen gerade, dass wir durch $\mathcal{C}(M)$ eine regelmässige Kachelung von \mathbb{E} erhalten. Aus Bedingung (ii) folgt $\dim \mathbb{E} = \dim \mathcal{C}(M)$. \mathbb{E} ist homöomorph zur Geometrischen Realisierung $|\mathcal{C}(M)|$ von $\mathcal{C}(M)$.

Die Menge der zusammenhängenden sphärischen Coxeter-Diagramme setzt sich aus den unendlichen Familien $(A_n)_{n \geq 1}$, $(C_n)_{n \geq 2}$, $(D_n)_{n \geq 4}$ und $(G_2(m))_{m \geq 5}$ sowie den Ausnahmediagrammen E_6, E_7, E_8, F_4, H_3 und H_4 zusammen. Die Menge der zusammenhängenden affinen Diagramme besteht aus den unendlichen Familien $(\tilde{A}_n)_{n \geq 1}$, $(\tilde{B}_n)_{n \geq 3}$, $(\tilde{C}_n)_{n \geq 2}$ und $(\tilde{D}_n)_{n \geq 4}$ sowie den Ausnahmediagrammen $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8, \tilde{F}_4$ und \tilde{G}_2 (siehe etwa [Ro2]).

Sei s eine Spiegelung in einer Coxetergruppe $W = W(M)$ und $m = \text{Fix}_s(\mathcal{C}(M))$. m ist eine Teilgeometrie von $\mathcal{C}(M)$ vom Corang 1. Wir führen eine Äquivalenzrelation auf $\text{Cham}\mathcal{C}(M)$ ein: zwei Kammern C, D sollen äquivalent sein, falls eine minimale Gallerie $C = C_0, C_1, \dots, C_n = D$ sich nicht mit m schneidet, d.h. wenn das Panel $C_i \cap C_{i+1}$ für alle i nicht in m ist. Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen; wir bezeichnen die Menge der Simplizes in diesen Äquivalenzklassen als *Halbapartments* oder im sphärischen Fall *Wurzeln*; ist α eine solche Wurzel, so heißt m der Rand von α . Wir schreiben dafür $\partial\alpha = m$.

Definition 1.6.7 Ein M -GAB $\Delta = (V, S)$ heißt ein *Gebäude*, falls gilt: Es existiert eine Familie \mathcal{A} von dünnen Untergeometrien von Δ , so dass gilt:

- (a) A ist isomorph zum Coxeter-Komplex $\mathcal{C}(M)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
- (b) Für alle $\sigma, \tau \in S$ existiert ein $A = (V_A, S_A) \in \mathcal{A}$ mit $\sigma, \tau \in S_A$.

Ist Δ ein Gebäude, so bezeichnen wir das zugehörige Kammersystem $\text{Cham}\Delta$ ebenfalls als Gebäude. Die Elemente von \mathcal{A} heißen *Apartments*. \mathcal{A} ist in der Regel nicht eindeutig (außer etwa im sphärischen Fall); es gibt aber genau ein maximales Apartmentsystem. Wir schreiben (Δ, \mathcal{A}) , falls wir ein Apartmentsystem auszeichnen wollen. Ein Unterkomplex X von Δ heiße Wurzel/Mauer von Δ , falls es ein Apartment $A \in \mathcal{A}$ gibt, so dass X eine Mauer/Wurzel in A ist.

Der folgende Satz findet sich als Theorem 1 in [Ti1]

Satz 1.6.8 *Sei Δ eine Geometrie mit Diagramm M .*

- (a) *Ist die universelle Überlagerung jedes Residuums mit Diagramm $C_3 = \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$ oder $H_3 = \bullet \overset{5}{\text{---}} \bullet \text{---} \bullet$ ein Gebäude, so ist die universelle Überlagerung von Δ ein Gebäude.*
- (b) *Δ ist genau dann ein Gebäude, falls Δ residuell einfach-zusammenhängend ist und jedes Residuum mit Diagramm H_3 oder C_3 ein Gebäude ist.*

1.7 Affine Gebäude

1.7.1 Affine Coxeter-Diagramme

In diesem Abschnitt geben wir kurz einige Informationen über affine Gebäude wieder. Für mehr Details und Beweise siehe [Ro2].

Ist M ein affines Coxeter-Diagramm vom Rang $n + 1$, so entspricht $|\mathcal{C}(M)|$ einer regelmäßigen Kachelung des euklidischen Vektorraums \mathbb{R}^n . $W(M)$ ist dann isomorph zu einer Untergruppe von $Aff(\mathbb{R}^n)$; genauer ist $W(M) = \Lambda : W_0$, wobei W_0 eine endliche Coxeter-Gruppe und Λ einem vollständigen Gitter in \mathbb{R}^n entspricht. Λ heißt die *Gruppe der Translationen* in W .

Beispiel 1.7.1 Sei $M = \widetilde{A}_1 = \bullet \overset{\infty}{\dashrightarrow} \bullet$. Dies ist das einzige affine Diagramm der Dimension 2. Wir können $\mathcal{C}(M)$ in \mathbb{R} wie folgt darstellen: Die Ecken sind die Elemente von \mathbb{Z} , wobei x mit $x + 1$ und $x - 1$ inzident ist. $W(M)$ wird von den beiden Spiegelungen s und t mit $x^s = -x$ und $x^t = 2 - x$ erzeugt. Es ist dann $W(M) = \Lambda : \langle s \rangle$ mit $\Lambda = \{x \mapsto x + 2k; k \in \mathbb{Z}\}$.

Durch die Identifikation von $|\mathcal{C}(M)|$ mit dem euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^n erhalten wir in natürlicher Weise eine Metrik d auf $|\mathcal{C}(M)|$.

Eine Ecke $v \in \mathcal{C}(M)$ heißt *speziell*, falls $W(M)_v \cong W_0$ ist. Das Diagramm M_0 , das durch Streichen des Typs von v aus M entsteht, heißt das M gehörige sphärische Diagramm.

Sei im folgenden v eine spezielle Ecke und m_1, \dots, m_k die verschiedenen Mauern, die v enthalten. Ein Teilkomplex S von $\mathcal{C}(M)$ heißt ein *Sektor*, falls $|S|$ der Abschluß einer Zusammenhangskomponente von $|\mathcal{C}(M)| \setminus \bigcup_{i=1}^k |m_i|$ ist. v heißt der *Ursprung* von S . Für einen solchen Sektor S gibt es genau eine Kammer $C \in S$ mit $v \in C$. C wird die *Anfangskammer* von S genannt. Zwei Sektoren S_1 und S_2 mit demselben Ursprung v heißen *i -benachbart*, falls $S_1 \cap S_2$ ein Panel vom Cotyp i in Δ_v enthält. Der Schnitt $S_1 \cap S_2$ wird in diesem Fall ein *Sektorpanel vom Cotyp i* genannt; dies ist ein Teilkomplex der Dimension $n - 1$. Ein Sektor besitzt genau n Sektorpanele, einen für jedes Panel in S , in dem v enthalten ist. Ein *Sektorgesicht* ist ein Schnitt von Sektorpanelen eines Sektors.

Zwei Sektoren S_1, S_2 werden als *parallel* bezeichnet, falls $S_1 \cap S_2$ einen Sektor enthält. Dies ist äquivalent dazu, dass es ein $t \in \Lambda$ mit $S_1^t = S_2$ gibt. Entsprechend sind zwei Sektorgesichter P_1 und P_2 parallel, wenn es zwei parallele Sektoren $S_1 \supset P_1$ und $S_2 \supset P_2$ gibt und P_1, P_2 vom gleichen Cotyp sind. Zwei Mauern m_1 und m_2 heißen parallel, falls es zu jedem Sektorpanel in m_1 ein dazu paralleles Sektorpanel in m_2 gibt und umgekehrt. Dies ist gleichwertig dazu, dass es ein $q > 0$ gibt, so dass für alle $x \in |m_1|$ ein $y \in |m_2|$ mit $d(x, y) \leq q$ existiert.

Parallelität ist, wie leicht zu sehen ist, eine Äquivalenzrelation; wir bezeichnen die Äquivalenzklasse eines Sektors S mit S^∞ . Entsprechend werden m^∞ und P^∞ für eine Mauer m und ein Sektorgesicht P definiert.

Es sei $\mathcal{C}(M)^\infty := \{S^\infty; S \text{ Sektor in } \mathcal{C}(M)\}$. $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2 \in \text{Cham}\mathcal{C}(M)^\infty$ seien dabei i -benachbart, falls es Sektoren $S_1 \in \mathfrak{S}_1, S_2 \in \mathfrak{S}_2$ gibt, so dass S_1, S_2 i -benachbart sind. Dann ist $\Delta(\mathcal{C}(M)^\infty)$ isomorph zum sphärischen Coxeterkomplex $\mathcal{C}(M_0)$.

1.7.2 Das sphärische Gebäude im Unendlichen

Sei Δ ein Gebäude mit affinem Diagramm M und maximalen Apartmentsystem \mathcal{A} . $S \subseteq \Delta$ heißt Sektor in Δ , falls es ein Apartment A gibt, so dass S ein Sektor in A ist. Entsprechend werden Sektorpanele etc. von Δ definiert. Sei Δ^∞ die Geometrie mit $\text{Cham}\Delta^\infty = \{S^\infty; S \text{ Sektor in } \Delta\}$. $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2 \in \text{Cham}\Delta^\infty$ seien dabei i -benachbart, falls es Sektoren $S_1 \in \mathfrak{S}_1, S_2 \in \mathfrak{S}_2$ gibt, so dass S_1, S_2 i -benachbart sind. Für $A \in \mathcal{A}$ sei A^∞ die Geometrie mit $\text{Cham}A^\infty = \{S^\infty; S \text{ Sektor in } A\}$. Es gilt dann (siehe [Ro2], 9.6):

Satz 1.7.2 Δ^∞ ist ein sphärisches Gebäude vom Typ M_0 , und die Abbildung $A \mapsto A^\infty$ ist eine Bijektion zwischen den Apartments in Δ und denen in Δ^∞ .

Beispiel 1.7.3 Sei $B = (V, E)$ ein Baum mit $|B_v| \geq 3$ für alle $v \in V$. Dann entspricht ein Apartment A in B einer unendlichen Sequenz $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $v_n \sim v_{n+1}$. Ein Sektor in A entspricht eine unendliche Teilsequenz $(v_n)_{n \geq m}$ oder $(v_n)_{n \leq m}$ für $m \in \mathbb{Z}$. Zwei Sektoren sind parallel, wenn sie unendlich viele Punkte gemeinsam haben, also wenn sie “in die gleiche Richtung laufen”. A^∞ besitzt damit genau 2 Parallelenklassen. B^∞ besitzt als Geometrie vom Rang 1 keine weitere Struktur. Die Elemente aus B^∞ heißen die Endpunkte von B .

1.7.3 Die Bäume $T(\mathfrak{m})$ und $T(\mathfrak{p})$

Sei \mathfrak{m} eine Parallelenklasse von Mauern in Δ . Sei $T(\mathfrak{m})$ der Graph mit Eckenmenge \mathfrak{m} , wobei zwei verschiedene Mauern m_1 und m_2 benachbart sein sollen, falls $[x, y] \cap |m| = \emptyset$ für alle $x \in |m_1|, y \in |m_2|$ und alle $m \in T(\mathfrak{m}) \setminus \{m_1, m_2\}$ ist. Es gilt dann:

Satz 1.7.4 ([Ro2], 10.3) $T(\mathfrak{m})$ ist ein Baum. Die Endpunkte von $T(\mathfrak{m})$ entsprechen den Wurzeln in Δ^∞ mit $\partial\alpha = \mathfrak{m}$.

Zwei Sektorpanele P_1, P_2 werden *asymptotisch* genannt, falls $P_1 \cap P_2$ ein Sektorpanel enthält. Dies ist eine Äquivalenzrelation, die feiner ist als Parallelität. Für ein Sektorpanel P bezeichnen wir mit $[P]$ die Asymptotenklasse von P . Für eine Parallelenklasse \mathfrak{p} sei $T(\mathfrak{p})$ der Graph mit Eckenmenge

$\{[P]; P \in \mathfrak{p}\}$, wobei zwei verschiedene Klassen $[P_1]$ und $[P_2]$ benachbart sein sollen, falls es $P'_1 \in [P_1], P'_2 \in [P_2]$ gibt, so dass P'_1, P'_2 in einem gemeinsamen Apartment A liegen und es zwei parallele Mauern m_1, m_2 in A gibt, die P'_1 bzw. P'_2 enthalten und in $T(m_1^\infty)$ benachbart sind. Dann gilt:

Satz 1.7.5 ([Ro2],10.4)

- (a) $T(\mathfrak{p})$ ist ein Baum. Die Endpunkte in $T(\mathfrak{p})$ entsprechen den Kammern in Δ^∞ , die \mathfrak{p} enthalten.
- (b) Sei \mathfrak{m} eine Mauer in Δ^∞ , die \mathfrak{p} enthält. Für jede Mauer $m \in \mathfrak{m}$ gibt es genau eine Asymptotenklasse $C_m \subseteq \mathfrak{p}$ mit $C_m \cap \{P \in \mathfrak{p}; P \subseteq \mathfrak{p}\} \neq \emptyset$ ist. Die Abbildung $m \mapsto C_m$ ist ein Isomorphismus zwischen $T(\mathfrak{m})$ und $T(\mathfrak{p})$

1.7.4 Eine Topologie auf Δ^∞

Ist Δ ein affines Gebäude, so ist auf Δ^∞ eine Topologie gegeben, so dass Δ^∞ ein kompakter, total-unzusammenhängender topologischer Raum ist. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf die Fälle Rang 2 und Rang 3.

Ist B ein Baum, so können wir wie folgt eine Metrik auf B^∞ definieren. Wähle eine Ecke v_0 in B . Für zwei verschiedene Enden $\alpha, \beta \in B^\infty$ gibt es genau ein Apartment $A = \{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$ mit $A^\infty = \{\alpha, \beta\}$. Setze $\omega(\alpha, \beta) := \min\{d(v_0, x_n); n \in \mathbb{N}\}$ und $\omega(\alpha, \alpha) = \infty$. Definiere $\delta(\alpha, \beta) := \exp(-\omega(\alpha, \beta))$. δ ist dann eine sogenannte *Ultrametrik* auf B^∞ ; das bedeutet, es gilt die verschärfte Dreiecksungleichung $\delta(\alpha, \beta) \leq \max\{\delta(\alpha, \gamma), \delta(\beta, \gamma)\}$ für alle α, β und $\gamma \in B^\infty$. Auf diese Art wird B^∞ ein total-unzusammenhängender topologischer Raum. Diese Topologie hängt nicht von der Wahl der Ecke v_0 ab.

Nun sei Δ ein affines Gebäude mit zusammenhängendem Diagramm vom Rang 3. Dann hat Δ entweder Diagramm $\tilde{A}_2 = \begin{array}{c} \blacktriangle \\ \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \end{array}$ oder $\tilde{C}_2 = \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}$ oder $\tilde{G}_2 = \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}$. Das Gebäude im Unendlichen ist dann eine projektive Ebene bzw. ein verallgemeinertes Viereck bzw. ein verallgemeinertes Hexagon. Im Fall \tilde{A}_2 sind alle Ecken speziell, im Fall \tilde{C}_2 alle Ecken vom Typ 1 und 3 (also alle Punkte und Ebenen), im Fall \tilde{G}_2 alle Ecken vom Typ 1 (also alle Punkte). Eine Mauer in Δ ist eine unendliche Sequenz $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $v_n \in V, v_n \sim v_{n+1}$ und ein Sektorpanel ist eine unendliche Sequenz $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $v_n \sim v_{n+1}$ und v_0 speziell. Sei im folgenden v eine spezielle Ecke und seien i und j die beiden übrigen Typen mit $i > j$. Definiere $\mathfrak{P}(V_\infty) := \{P; P \text{ Sektorpanel mit } P = (v, v_i, \dots) \text{ und } v_i \in V_i\}$ und $\mathfrak{L}(V_\infty) := \{L; L \text{ Sektorpanel mit } L = (v, v_j, \dots) \text{ und } v_j \in V_j\}$. $P \in \mathfrak{P}(V_\infty)$ soll genau dann inzident mit

$L \in \mathfrak{L}(V_\infty)$ sein, wenn es einen Sektor S mit Anfangspunkt v gibt, so dass P und L in S liegen. Dann ist die Geometrie V_∞ , die wir dadurch erhalten, isomorph zu Δ^∞ (bis auf eventuelle Permutation der Indizes). Für $x \in V$ sei $\mathfrak{P}_x = \{P \in \mathfrak{P}(V_\infty); x \in P\}$ und entsprechend $\mathfrak{L}_x = \{L \in \mathfrak{L}(V_\infty); x \in L\}$. Sei τ die Topologie auf V_∞ bzw. Δ^∞ , die durch die Mengen \mathfrak{P}_x und \mathfrak{L}_x bzw. durch ihre Bilder in Δ^∞ erzeugt wird. Auf diese Art wird Δ^∞ zu einem *Topologischen Polygon*, d.h. dass für $1 \leq k < m < \text{diam}\Delta^\infty$ die Abbildungen $f_k^m : \{(x, y) \in \tilde{\Delta}^\infty; d(x, y) = m\} \rightarrow \Delta^\infty : (x, y) \mapsto f_k^m(x, y)$ alle stetig sind, wobei $f_k(x, y)$ das eindeutig bestimmte Element mit $d(x, f_k^m(x, y)) = k$ und $d(f_k^m(x, y), y) = m - k$ sein soll. Diese Topologie hängt nicht von der Wahl der speziellen Ecke v ab (siehe [GVM], 3.5.3). (Δ^∞, τ) ist total-unzusammenhängend. Für alle $\mathfrak{p} \in \Delta^\infty$ ist die von τ auf $\Delta_\mathfrak{p}^\infty$ induzierte Topologie gleich der von $T(\mathfrak{p})$ induzierten Topologie. Sind $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \Delta^\infty$ von verschiedenem Typ, so ist τ durch die auf $\Delta_\mathfrak{p}^\infty$ und $\Delta_\mathfrak{q}^\infty$ induzierte Topologie eindeutig bestimmt.

1.7.5 Affine Gebäude als metrische Räume

Sei wieder Δ ein affines Gebäude. Sind $x, y \in |\Delta|$, so existiert ein Apartment A mit $x, y \in |A|$. Ist d_A die kanonische Metrik auf $|A| \cong |\mathcal{C}(M)| \cong \mathbb{R}^n$, so setzen wir $d(x, y) := d_A(x, y)$. Man kann zeigen, dass dies nicht von der Wahl des Apartments A abhängt. Auf diese Art wird $|\Delta|$ zu einem vollständigen metrischen Raum. $\text{Aut}\Delta$ operiert dabei als Gruppe von Isometrien auf diesen Raum. Für $x, y \in |\Delta|$ sei $[x, y] := \{z \in |\Delta|; d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}$. $[x, y]$ heißt die *Geodäsische* zwischen x und y und ist in jedem Apartment enthalten, welches x und y enthält. Für $t \in [0, 1]$ gibt es einen eindeutigen Punkt $z \in [x, y]$ mit $d(x, z) = td(x, y)$, $d(y, z) = (1 - t)d(x, y)$; diesen Punkt bezeichnen wir mit $t \cdot x + (1 - t) \cdot y$. $(|\Delta|, d)$ ist ein Raum mit negativer Krümmung, das heißt für alle $x, y, z \in |\Delta|$ gilt $d^2(z, \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y) \leq \frac{1}{2}(d^2(z, x) + d^2(z, y)) - \frac{1}{4}d^2(x, y)$.

Satz 1.7.6 (Fixpunkt-Satz von Bruhat-Tits, [B], VI.4.1) *Sei G eine Gruppe von Isometrien auf einem Raum X mit negativer Krümmung. Gibt es eine G -invariante beschränkte Teilmenge $Y \subseteq X$, so besitzt G einen Fixpunkt.*

Korollar 1.7.7 *Ist $G \leq \text{Aut}\Delta$ endlich, so besitzt G einen Fixpunkt.*

Beweis: Wähle $x \in \Delta$. Dann lässt G die beschränkte Menge x^G fest. \square

Korollar 1.7.8 *Ist $\varphi : \Delta \rightarrow \bar{\Delta}$ eine Überlagerung, so ist $\pi_1(\bar{\Delta})$ torsionsfrei.*

Beweis: Folgt aus 1.2.5, 1.2.7(b) und 1.7.7. \square

1.8 Apartments

Da Apartments eine herausragende Rolle in der Gebäudetheorie spielen, liegt es nahe, dass man versucht, den Begriff des Apartment auch für andere Geometrie zu verallgemeinern. Ist Δ ein Gebäude und $\varphi : \Delta \rightarrow \overline{\Delta}$ eine Überlagerung, so ist man versucht, die Bilder der Apartments von Δ als Apartments von $\overline{\Delta}$ zu definieren. Doch dabei stößt man schnell auf Probleme, da wichtige Eigenschaften eines Apartment A unter φ verlorengehen können; so ist $\varphi(A)$ im allgemeinen weder dünn noch residuell-zusammenhängend noch muss jede Fahne in einer Kammer liegen. Induziert jedoch φ eine Überlagerung von A nach $\varphi(A)$, so bleiben viele wesentliche Eigenschaften von A erhalten. Das motiviert zu folgender Motivation.

Definition 1.8.1 Sei $\varphi : \Delta = (V, S) \rightarrow \overline{\Delta} = (\overline{V}, \overline{S})$ eine Überlagerung. Eine Teilgeometrie $A = (V_A, S_A)$ von Δ heißt (φ) -regulär, falls φ eine Überlagerung von A nach $\varphi(A) := \overline{A} = (\overline{V}_A, \overline{S}_A)$ induziert, wobei $\overline{V}_A := \varphi(V_A)$ und $\overline{S}_A := \overline{S} \cap \mathcal{P}(\overline{V}_A)$ sei.

Das Bild einer φ -regulären Teilgeometrie ist natürlich ebenfalls eine Geometrie.

Lemma 1.8.2 Ist $\varphi : \Delta \rightarrow \overline{\Delta}$ eine Überlagerung, so sind für eine Teilgeometrie A von Δ äquivalent:

- (a) A ist regulär.
- (b) Für $v \in V_A$ und $\overline{v} = \varphi(v)$ induziert φ eine Bijektion von $S_v \cap S_A$ nach $\overline{S}_{\overline{v}} \cap \overline{S}_A$.

Beweis: Klar. □

Lemma 1.8.3 Seien $\varphi : \Delta \rightarrow \overline{\Delta}$, $\psi : \overline{\Delta} \rightarrow \hat{\Delta}$ und $\rho : \Delta \rightarrow \hat{\Delta}$ Überlagerungsabbildungen mit $\psi \circ \varphi = \rho$. Sei A eine Teilgeometrie von Δ , $\overline{A} := \varphi(A)$ und $\hat{A} := \psi(A)$. Dann ist A genau dann ρ -regulär, wenn A φ -regulär und \overline{A} ψ -regulär ist.

Beweis: Angenommen, A ist ρ -regulär. Sei $\overline{v} \in \overline{V}_A$ und v ein Urbild von \overline{v} in A .

Ist $\overline{\sigma}$ ein Simplex in $\overline{A}_{\overline{v}}$, so besitzt $\overline{\sigma}$ ein Urbild σ in Δ_v . Ist $\hat{\sigma} = \psi(\overline{\sigma})$, so sehen wir, dass $\rho(\sigma) = \hat{\sigma}$ gilt. Da $\hat{\sigma}$ nur ein Urbild in Δ_v besitzt und A nach Voraussetzung ρ -regulär ist, muss σ in A enthalten sein. Damit ist A auch φ -regulär und damit ist insbesondere \overline{A} eine dünne Teilgeometrie von $\overline{\Delta}$. Sei nun $v \in V_A$, $\overline{v} := \varphi(v)$ und $\hat{v} := \rho(v)$. Sei $\hat{\sigma}$ ein Simplex in $\hat{\Delta}_{\hat{v}}$, der in \hat{A} liegt. Dann existiert ein Simplex $\sigma \in A_v$ mit $\rho(\sigma) = \hat{\sigma}$. Setzen wir $\overline{\sigma} := \varphi(\sigma)$, so

sehen wir, dass \overline{A} Bedingung (b) in 1.8.2 erfüllt.

Die andere Richtung zeigt man leicht mit der Eigenschaft (b) in 1.8.2. \square

Der folgende Satz beschreibt, wann eine dünne Teilgeometrie regulär ist, wenn die Überlagerung normal ist.

Satz 1.8.4 *Seien $\Delta = (V, S)$ und $\overline{\Delta} = (\overline{V}, \overline{S})$ Geometrien vom Rang n , $\varphi : \Delta \rightarrow \overline{\Delta}$ eine normale Überlagerung, Π die Decktransformationsgruppe von φ , $A = (V_A, S_A)$ eine dünne Teilgeometrie von Δ vom gleichen Rang wie Δ und $\overline{A} = \varphi(A)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) A ist regulär.
- (b) \overline{A} ist eine dünne Geometrie.
- (c) Für jede dünne Untergeometrie A_1 mit $\varphi(A_1) = \overline{A}$ gilt: Sind $x \in A, y \in A_1$ mit $x = y$ oder xIy , so gilt $A = A_1$.
- (d) Für alle $v \in A$ ist $v^\Pi \cap A = v^{\Pi_A}$ und $\Delta_v^\Pi \cap A = A_v^{\Pi_A}$.

Beweis:

(a) \rightarrow (b) : Klar.

(b) \rightarrow (c) : Wir beweisen zunächst, dass aus $\text{Cham}A \cap \text{Cham}A_1 \neq \emptyset$ schon $A = A_1$ folgt. Angenommen, es ist $C \in \text{Cham}A \cap \text{Cham}A_1$. Wir zeigen durch Induktion nach $m = d(C, D)$, dass für alle $D \in \text{Cham}A$ auch $D \in \text{Cham}A_1$ gilt. Das ist klar für $m = 0$, sei also $m > 0$. Dann existiert ein D' in $\text{Cham}A$ mit $d(C, D') = m - 1$ und $d(D', D) = m - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $D' \in \text{Cham}A_1$. Ist $i = \text{cotyp}(D \cap D')$, so existiert in A_1 genau ein D'' mit $D'' \sim_i D'$ und $D'' \neq D'$. Aber dann sind $\varphi(D), \varphi(D'') \sim_i \varphi(D')$. Da \overline{A} dünn ist, folgern wir $D = D''$.

Nun seien $x \in A$ und $y \in A_1$, so dass x und y inzident sind. Sei C_1 eine Kammer in A , die x enthält. Da \overline{A} eine Geometrie ist, gibt es eine Kammer \overline{C}_2 in \overline{A} , die $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ enthält. Es existiert dann eine Gallerie $\overline{\gamma}$ in $\overline{A}_{\varphi(x)}$, die $\overline{C}_1 := \varphi(C_1)$ und \overline{C}_2 verbindet. Da \overline{A} dünn ist, kann $\overline{\gamma}$ zu einer Gallerie γ in A_x geliftet werden. Damit $y \in A$. Ist C_3 eine Kammer in A_1 , in der x enthalten ist, und $\overline{C}_3 = \varphi(C_3)$, so kann auch \overline{C}_2 mit \overline{C}_3 durch eine Gallerie in \overline{A}_y verbunden. Auch diese Gallerie kann in A_y geliftet werden, und damit sieht man $C_3 \in A$. Es folgt die Behauptung.

(c) \rightarrow (d): Sind $v \in A$ und $g \in \Pi$ mit $v^g \in A$, so ist $v \in A \cap A^{g^{-1}}$, also $A = A^{g^{-1}}$ und damit $g \in \Pi_A$. Nun seien $y \in \Delta_v$ und $g \in \Pi$ mit $y^g \in A$. Wegen $x^g \in A^g, y^g \in A$ und $x^g I y^g$ folgt dann $A = A^g$, also $g \in \Pi_A$. Damit ist auch $y = (y^g)^{g^{-1}} \in A$.

- (d) \rightarrow (a): Nach Voraussetzung induziert φ einen bijektiven Morphismus von A/Π_A nach \bar{A} . Sei $\bar{\sigma}$ ein Simplex in \bar{A} und $\bar{v} \in \bar{\sigma}$. Ist v ein Urbild von \bar{v} , so existiert in $st(v)$ genau ein σ mit $\varphi(\sigma) = \bar{\sigma}$. Für jedes $x \in \sigma \setminus \{v\}$ existiert dann ein $g \in \Pi$ mit $x^g \in A$. Aber nach Voraussetzung folgt dann $\sigma \subseteq A$. Somit ist $A/\Pi_A \cong \bar{A}$. Da $\Delta \rightarrow \Delta/\Pi$ eine Überlagerung ist, muss auch $A \rightarrow A/\Pi_A$ eine Überlagerung sein. \square

Bemerkung 1.8.5 *Man sieht leicht, dass man (c) auch direkt aus (a) folgern kann. Daher sind für eine nichtnotwendig dünne Teilgeometrie die Bedingungen (a), (c) und (d) gleichwertig (wobei in (c) nicht mehr vorausgesetzt wird, dass A_1 dünn ist).*

Im folgenden sei stets Δ ein Gebäude und $\varphi : \Delta \rightarrow \bar{\Delta}$ eine Überlagerungsabbildung.

Korollar 1.8.6

- (a) *Ist $\bar{\Delta}$ endlich, so besitzt Δ nur abzählbar viele reguläre Apartments.*
- (b) *Ist A ein reguläres Apartment und $\bar{A} := \varphi(A)$, so ist $\pi_1(\bar{A})$ isomorph zu einer Untergruppe von $\pi_1(\bar{\Delta})$.*

Beweis:

- (a) Sei $\Pi = \pi_1(\bar{\Delta})$. Jedes reguläre Apartment von Δ ist eine Zusammenhangskomponente des Urbilds einer dünnen Teilgeometrie von $\bar{\Delta}$ mit demselben Diagramm wie $\bar{\Delta}$. Da $\bar{\Delta}$ endlich ist, besitzt $\bar{\Delta}$ nur endlich viele dünne Teilgeometrien. Sei \bar{A} ein solche Untergeometrie und seien A_1, A_2 zwei reguläre Apartments mit $\varphi(A_1) = \varphi(A_2) = \bar{A}$. Ist $\bar{v} \in \bar{A}$, so existiert ein $v \in A_1$ und ein $g \in \Pi$ mit $\varphi(v) = \bar{v}$ und $v^g \in A_2$. Damit ist aber $A_2 = A_1^g$ wegen Satz 1.8.4. Damit sind die Zusammenhangskomponenten von $\varphi^{-1}(\bar{A})$ alle unter Π konjugiert. Somit besitzt \bar{A} genau $|\Pi : \Pi_{A_1}|$ verschiedene Urbilder. Da $\bar{\Delta}$ endlich ist, besitzt $\bar{\Delta}$ nur abzählbar viele geschlossene Pfade, also ist Π abzählbar, somit hat \bar{A} nur abzählbar viele Urbilder. Daher gibt es insgesamt nur abzählbar viele reguläre Apartments.

- (b) Es ist $\pi_1(\bar{A}) \cong \Pi_A \leq \Pi \cong \pi_1(\bar{\Delta})$. \square

Bemerkung 1.8.7 *Ist Δ ein affines Gebäude, so hat Δ überabzählbar viele Apartments. Ist $\varphi : \Delta \rightarrow \bar{\Delta}$ eine Überlagerungsabbildung, so sind daher die meisten Apartments nicht regulär.*

Proposition 1.8.8 *Sei \bar{A} eine dünne Teilgeometrie von $\bar{\Delta}$ mit demselben Diagramm wie $\bar{\Delta}$. Ist A eine Zusammenhangskomponente von $\varphi^{-1}(\bar{A})$, so ist A ein reguläres Apartment.*

Beweis: Sei σ eine Fahne in A mit $\text{cotyp}\sigma = \{i, j\}$ und $i \neq j$. Da φ eine Überlagerung ist, muss A_σ ein gewöhnliches m_{ij} -Gon sein. Ist \mathcal{C} der zu Δ gehörige Coxeter-Komplex, so ist A nach Theorem 13.24 in [P] ein Quotient von \mathcal{C} ist. Weil Δ ein Gebäude ist, muss $A \cong \mathcal{C}$ sein (folgt etwa aus [Ro2], 4.2). Daher ist A ein Apartment in Δ . Nach Voraussetzung ist $\bar{A} = \varphi(A)$ dünn, also ist A regulär. \square

Proposition 1.8.9 *Sei $G = \text{Aut}(\Delta)_\varphi, \bar{G} = \text{Aut}\bar{\Delta} = G/\Pi$, A ein reguläres Apartment in Δ und $\bar{A} = \varphi(A)$. Dann ist $G_A\Pi/\Pi = \bar{G}_{\bar{A}}$. Insbesondere operiert G_A genau dann transitiv auf A , wenn $\bar{G}_{\bar{A}}$ transitiv auf \bar{A} operiert.*

Beweis: Es ist klar, dass $G_A\Pi/\Pi$ in $\bar{G}_{\bar{A}}$ enthalten ist. Sei $\bar{g} \in \bar{G}_{\bar{A}}$. Dann existiert ein Lift $g \in G$ von \bar{g} . Wir haben $\varphi(A^g) = \varphi(A)^{\bar{g}} = \bar{A}$. Damit ist A^g ein Zusammenhangskomponente von $\varphi^{-1}(\bar{A})$. Es gibt also ein $\alpha \in \Pi$ mit $A^\alpha = A^g$, folglich ist $g\alpha^{-1} \in G_A$. Also haben wir Gleichheit gezeigt. Die zweite Aussage folgt daraus leicht. \square

Kapitel 2

Die 5-lokale Geometrie der Lyonsgruppe

2.1 Gruppen vom Typ Ly

Definition 2.1.1 Eine endliche Gruppe G heißt Gruppe vom Typ Ly , falls gilt: Es existiert eine Involution $t \in G \setminus Z^*(G)$ mit $C_G(t) \cong 2 \cdot A_{11}$.

R. Lyons hat 1972 erstmals solche Gruppen untersucht und folgende Ergebnisse erzielt (siehe [Ly1] und [Ly2]):

Satz 2.1.2 Sei G eine Gruppe vom Typ Ly . Dann gilt:

- (a) G ist einfach.
- (b) $|G| = 2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$.
- (c) G besitzt eine maximale Untergruppe $H \cong G_2(5)$. G hat Rang 5 bezüglich der Operation auf H/G mit nichttrivialen Doppelpunktstabilisatoren $5^{1+4} : (4 \cdot S_4)$, $PSU(3, 3)$, $2 \cdot (A_5 \times A_4)$.2 und $3 : PSL(2, 7)$. Ist χ der Permutationscharakter von H/G , so ist $\chi = 1a + 45694a + 3028266a + 4226695a$ (Notation siehe [ATLAS]).
- (d) Es gibt jeweils eine Klasse von Involutionen und Elementen der Ordnung 4. Ist t ein Element der Ordnung 4, so entspricht t einer Doppeltransposition in $C_G(\langle t^2 \rangle) / \langle t^2 \rangle \cong A_{11}$.
- (e) Es gibt genau zwei Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung 3, die wir im folgenden mit $3A$ und $3B$ nennen. Ist $x \in 3A$, so $N_G(\langle x \rangle) \cong 3 \cdot \text{AutMcL}$ maximal in G , ist $x \in 3B$, so $C_G(x)$ eine Erweiterung einer speziellen Gruppe der Ordnung 3^6 mit einer Gruppe vom Typ $2 \cdot A_5 \cdot 2$.

Ist t eine Involution, so ist in $C_G(t)/\langle t \rangle \cong A_{11}$ ein Element aus $3A$ ein 3-Zykel, während ein Element aus $3B$ das Produkt von zwei oder drei disjunkten 3-Zykeln ist.

- (f) G hat genau zwei Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung 5 ($5A$ und $5B$) mit $N_G(\langle x \rangle) \cong 5^{1+4} : (4 \cdot S_6)$ für $x \in 5A$ und $N_G(\langle x \rangle) \cong (5 \times 5^3) : S_3$ für $x \in 5B$. In $C_G(t)/\langle t \rangle \cong A_{11}$ ist ein $5A$ -Element ein 5-Zykel und ein $5B$ -Element das Produkt zweier disjunkter 5-Zykeln.

Ferner zeigte Lyons, dass G genau 53 Konjugiertenklassen besitzt und bestimmte die Charaktertafel von G . 1973 zeigte C. Sims, dass es bis auf Isomorphie genau eine Gruppe vom Typ Ly gibt ([Si]). Diese wurde im folgenden die *Lyonsgruppe* (Ly) oder die *Lyons-Simsgruppe* LyS genannt. Sims' Beweis hatte jedoch den Nachteil, dass er massiv auf die Hilfe eines Computers zurückgreifen musste. Der Beweis war daher schwer nachvollziehbar und lieferte wenig Einsicht in die Struktur der Gruppe. Aschbacher und Segev konnten 1992 einen computerunabhängigen Eindeutigkeitsbeweis liefern ([AS2]), 2002 gelang Meierfrankenfeld und Parker der erste Existenzbeweis ohne Computerhilfe ([MP]). Wilson und Woldar gelang es, die Untergruppenstruktur von Ly zu bestimmen (siehe [Wi1], [Wi2], [Wo]). Den wichtigsten Schritt zum Verständnis der Lyonsgruppe gelang allerdings William Kantor, der zeigte, dass die Lyonsgruppe fahnentransitive Automorphismengruppe eines GABs mit Diagramm G_2 ist. Diese Geometrie wird Gegenstand des Rests dieser Arbeit sein.

2.2 Das Cayley-Hexagon $\mathbb{H}(5)$

Bevor wir Kantors Konstruktion wiedergeben, benötigen wir einige Informationen über das verallgemeinerte Hexagon $\mathbb{H}(5) = \mathbb{H}(\mathbb{F}_5)$. Für die Konstruktion und Eigenschaften des Cayley-Hexagons $\mathbb{H}(\mathbb{K})$ für einen beliebigen Körper \mathbb{K} siehe etwa [VM].

- (1) $\mathbb{H}(5)$ besitzt je 3906 Punkte und Geraden, jede Gerade inzidiert mit 6 Punkten und jeder Punkt mit 6 Geraden. Die Automorphismengruppe von $\mathbb{H}(5)$ ist die einfache Gruppe $G_2(5)$. Der Stabilisator eines Punktes ist eine Gruppe vom Typ $5^{2+1+2} : GL(2, 5)$, während der Stabilisator einer Gerade eine Gruppe vom Typ $5^{1+4} : GL(2, 5)$ ist. Der Stabilisator B eines inzidenten Punkt-Geradenpaares ist eine Gruppe vom Typ $5^{1+4+1} : (4 \times 4)$, der Normalisator einer 5-Sylowgruppe in $G_2(5)$. Ist $T \cong 4 \times 4$ eine 2-Sylowgruppe in B , so ist $A := \text{Fix}(T)$ ein Apartment in $\mathbb{H}(5)$, also ein gewöhnliches Sechseck. Sei N der Normalisator von

T in $G_2(5)$. Dann ist N eine zerfallende Erweiterung von T mit einer D_6 , und N/T operiert regulär auf A . B und N bilden ein *Tits-System* in $G_2(5)$ (siehe [Ro2]). Damit operiert $G_2(5)$ transitiv auf den Paaren (C, Σ) , wobei C eine Kammer in $\mathbb{H}(5)$ und Σ ein Apartment ist, welches C enthält. Ist x ein Punkt oder eine Gerade in $\mathbb{H}(5)$, so operiert der Stabilisator von x in $G_2(5)$ für $1 \leq n \leq 6$ transitiv auf der Menge $V_n(x) = \{y \in \mathbb{H}(5); d(x, y) = n\}$. Der Stabilisator ist dabei eine Gruppe vom Typ $5^{7-n} : (4 \times 4)$ für $1 \leq n \leq 5$ und isomorph zu $GL(2, 5)$ für $n = 6$.

- (2) $\mathbb{H}(5)$ besitzt die *Moufang-Eigenschaft*, d.h. ist $\alpha = (x_0, x_1, \dots, x_6)$ eine geordnete Wurzel in $\mathbb{H}(5)$ und $U_\alpha := \{g \in G_2(5); \text{ist } 1 \leq i \leq 5 \text{ und } yIx_i, \text{ so } y^g = y\}$, so operiert U_α regulär auf der Menge aller Apartments, die α enthalten (oder gleichbedeutend auf allen mit x_0 inzidenten Elementen, die verschieden von x_1 sind). Damit ist $U_\alpha \cong Z_5$. U_α wird eine *Wurzelgruppe* genannt. Es gibt zwei verschiedene Konjugiertenklassen von Wurzelgruppen, die mit x_0 Punkt und die mit x_0 Gerade.
- (3) $G_2(5)$ hat genau eine Konjugiertenklasse von Involutionen. Ist t eine Involution in $G_2(5)$, so ist der Zentralisator in $G_2(5)$ eine Gruppe vom Typ $2 \cdot (A_5 \times A_5)$. $\text{Fix}(t)$ enthält je 42 Punkte und Geraden. Seien π_i, π_{ij} die Fixpunkte und l_i, l_{ij} die Fixgeraden ($i, j = 1, \dots, 6$). Dann können wir die Indizes so wählen, dass jeweils π_i mit l_{ij} , l_i mit π_{ij} und π_{ij} mit l_{ji} inzident sind. Es ist dann $l_{ij} = \text{proj}_{\pi_i} l_j$ und $\pi_{ij} = \text{proj}_{l_i} \pi_j$. Der Zentralisator von t operiert jeweils als $PGL(2, 5)$ auf der Menge $\{\pi_i; 1 \leq i \leq 6\}$ und $\{l_i; 1 \leq i \leq 6\}$; der Kern ist stets eine $SL(2, 5)$.
- (4) $G_2(5)$ hat genau zwei Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung 3, die wir mit $3A$ und $3B$ bezeichnen werden. Ein Element aus $3A$ lässt 126 Geraden und keinen Punkt fest. Diese 126 Geraden bilden einen *Spread*, d.h. sie haben paarweise Abstand 6 und für jeden Punkt gibt es genau eine solche Gerade mit Abstand maximal 3. Ein Element aus $3B$ lässt 6 Punkte und keine Gerade fest. $3A$ - bzw. $3B$ -Elemente in $G_2(5)$ sind auch $3A$ - bzw. $3B$ -Elemente in Ly . Es folgt, dass $(A_5 \times A_5) \cdot 2 \cong C_{G_2(5)}(t)/\langle t \rangle \leq C_{Ly}(t)/\langle t \rangle \cong A_{11}$ eine Partition vom Typ $\{5, 6\}$ festlässt und auf den 5 Ziffern als S_5 und auf den 6 Ziffern als $PGL(2, 5)$ operiert. Sind N_1 und N_2 die Kerne der Wirkungen auf den 5 bzw. 6 Ziffern, so gilt $N_1 \cong N_2 \cong SL(2, 5)$. N_1 lässt die Geraden l_1, \dots, l_6 und N_2 die Punkte π_1, \dots, π_6 fest.
- (5) Daraus folgt auch, dass es in $G_2(5)$ genau zwei Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung 4 gibt. Ist s ein Element aus der ersten

Klasse und ist $s^2 = t$, so lässt s alle l_i und genau zwei der π_1 fest. Ist s hingegen aus der zweiten Klasse und gilt wieder $s^2 = t$, so lässt s alle π_i und genau zwei der l_i fest.

2.3 Konstruktion

Im folgenden Abschnitt wollen wir die Konstruktion der 5-lokalen Geometrie der Lyons-Gruppe wiedergeben. Diese Konstruktion findet man bereits in [K1], allerdings etwas weniger detailliert. Sei G eine Gruppe vom Typ Ly , H eine Untergruppe von G isomorph zu $G_2(5)$ und $\mathfrak{P} = H/G$. Ist $x \in \mathfrak{P}$, so bezeichnen wir die nicht-trivialen G_x -Bahnen auf \mathfrak{P} mit $\Gamma(x), \Gamma_2(x), \Gamma_3(x)$ und $\Gamma_4(x)$. Die entsprechenden Doppelpunktstabilisatoren sind isomorph zu $5^{1+4} : 4 \cdot S_4$, $U_3(3)$, $2 \cdot (A_5 \times A_4).2$ und $3 : PGL(2, 7)$. Die Elemente von \mathfrak{P} werden die Punkte unserer Geometrie sein. Sei Γ der Graph mit Eckenmenge \mathfrak{P} und $x \sim y$ für $y \in \Gamma(x)$. Betrachten wir die Stabilisatoren, so stellen wir folgendes fest:

(*) Ist $U \leq G$ mit $5^2 \mid |U|$, so bilden die Fixpunkte von U eine Clique in Γ .

Sei $x = H$, $y \in \Gamma(x)$ und $R = O_5(G_{x,y}) \cong 5^{1+4}$. Dann ist $Z(R) = R'$ das Zentrum einer 5-Sylowgruppe von H . Folglich gibt es eine Gerade $L \in \mathbb{H}(5)$, so dass $N_H(R) = H_L$ und $R \leq H_{(L)}$ ist. Sei $l = \{x\} \cup y^{N_H(R)}$. Dann ist $|l| = 6$ und $l \setminus \{x\}$ ist Imprimitivitätsblock von H in Γ . Da l punktweise von R festgelassen wird, bilden die Punkte in l wegen (*) eine Clique in Γ . Sei nun $z \in \mathfrak{P}$ ein Fixpunkt von R . Es gilt dann $R = O_5(H_z)$, also $H_z \leq N_H(R)$. Da $N_H(R)$ genau fünf zu $5^{1+4} : (4 \cdot S_4)$ isomorphe Untergruppen besitzt, die alle normalisatorgleich in H sind, folgern wir, dass R außer x genau fünf Punkte festlässt. Also sind die Punkte in l die Menge aller Fixpunkte von R .

Sei $\mathfrak{L} = \{l^g; g \in G\}$. Wir bezeichnen die Elemente von \mathfrak{L} als Geraden. Für alle $y, z \in \mathfrak{P}$ gilt, dass y und z genau dann auf einer gemeinsamen Gerade liegen, wenn $z \in \Gamma(y)$ ist. Diese Gerade ist die Menge aller Fixpunkte von $O_5(G_{y,z})$, also eindeutig bestimmt. Wir können diese Gerade daher mit yz bezeichnen. Ist $R = O_5(G_l)$, so ist l die einzige Gerade, die von R punktweise festgelassen wird. Folglich haben wir $N_G(R) \leq G_l$. Weil $N_G(R) \cong 5^{1+4} : (4 \cdot S_6)$ eine maximale Untergruppe in G ist, erhalten wir $N_G(R) = G_l$ und $G_{(l)} = O_{5,2}(N_G(R)) \cong 5^{1+4} : 4$, also $G_l/G_{(l)} \cong S_6$. Folglich operiert G_l sechsfach transitiv auf den Punkten in l .

Wir definieren nun die Ebenen in unserer Geometrie. Sei P ein Punkt in $\mathbb{H}(5)$ und E die Untergruppe in $H \cong G_2(5)$, die alle mit P kollinearen Punkte festlässt. Dann ist $E \cong 5^3$. Sei π die Menge der Fixpunkte von E in \mathfrak{P} . Da E sechs verschiedene Geraden in $\mathbb{H}(5)$ punktweise festlässt, muss E auch sechs

verschiedene Geraden in \mathfrak{P} punktweise festlassen, also ist $|\pi| \geq 1 + 6 \cdot 5 = 31$. Andererseits bilden die Fixpunkte von E eine Clique wegen (*). Ist z ein Fixpunkt von E , so lässt E die Gerade xz punktweise fest, da $|xz \setminus \{x, z\}| = 4$ ist. Somit ist $E \leq O_5(G_{x,z}) = O_5(G_{xz})$. Da die Geraden durch x in eindeutiger Beziehung zu den Geraden zu $\mathbb{H}(5)$ stehen und E genau 6 Geraden in $\mathbb{H}(5)$ festlässt, folgern wir $|\pi| = 31$.

Sei nun l eine Gerade in π , in der x enthalten ist. Dann gilt $N_{G_l}(E) = 5^{1+2+2} : GL(2, 5)$, während H_x irreduzibel auf $O_5(G_l)/Z(O_5(G_l))$ operiert. Daraus folgt, dass $N_{G_l}(E)$ in G_l nicht zum Stabilisator eines Punktes konjugiert ist und damit transitiv auf den Punkten von l operiert. Andererseits haben wir auch, dass $N_{G_x}(E)$ transitiv auf den Geraden in π durch x ist. Insgesamt folgt also, dass $N_G(E)$ transitiv auf den Punkten und Geraden in π operiert. Wir folgern, dass die Punkte und Geraden in π eine projektive Ebene der Ordnung 5 bilden und $N_G(E)$ transitiv auf dieser Ebene operiert. Das bedeutet, dass G_π die Gruppe $SL(3, 5)$ auf π induziert. Wegen $G_{x,\pi} \cong 5^{2+1+2} : GL(2, 5)$ wissen wir, dass $G_\pi = N_G(E)$ eine Erweiterung von E mit einer $SL(3, 5)$ ist. Diese Erweiterung ist nichtzerfallend, da eine 5-Sylowgruppe von $N_G(E)$ sonst Klasse 3 hätte; 5-Sylowgruppen von $N_G(E)$ sind aber auch 5-Sylowgruppen von G , und diese haben Klasse 5 ([Ly1], Lemma 2.14).

Sei $\mathfrak{F} = \{\pi^g; g \in G\}$. Wir nennen die Elemente aus \mathfrak{F} Ebenen. Da die Ebenen durch einen Punkt mit den Punkten von $\mathbb{H}(5)$ in eindeutiger Beziehung stehen, ist die von den Ebenen und Geraden durch einen Punkt induzierte Geometrie isomorph zu $\mathbb{H}(5)$.

Sei Δ die Geometrie vom Rang 3 mit $\mathfrak{P} \cup \mathfrak{L} \cup \mathfrak{F}$ als Eckenmenger, der Inklusion als Inzidenzrelation und der natürlichen Typfunktion. Zusammenfassend haben wir also:

Satz 2.3.1 Δ ist GAB mit Diagramm $\tilde{G}_2 = \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$ und nicht-trivialen Residuen $\mathbb{H}(5)$ und $PG(2, 5)$. G ist eine fahnentransitive Automorphismengruppe von Δ mit

- (a) $G_x \cong G_2(5)$ für einen Punkt x .
- (b) $G_l \cong 5^{1+4} : 4 \cdot S_6$ für eine Gerade l . Die Operation von $G^l \cong S_6$ auf den sechs Punkten und den sechs Ebenen, die mit l inzidieren, ist dabei nicht isomorph. Ein 3-Element in G_l , ist ein 3A-Element, falls es einen Punkt in l festlässt, und ein 3B-Element, falls es eine l inzidente Ebene festlässt.
- (c) $G_\pi = 5^3 \cdot SL(3, 5)$ und $G^\pi = SL(3, 5)$.

- (d) Der Stabilisator einer maximalen Fahne von Δ ist eine Gruppe vom Typ $5^{1+4+1} : 4 \times 4$, also der Normalisator einer 5-Sylowgruppe in G und $G_2(5)$.
- (e) $\Delta \cong \mathcal{K}(G; G_x, G_l, G_\pi)$ für eine maximale Fahne $\{x, l, \pi\}$.
- (f) Δ erfüllt die Durchschnittseigenschaft.

Beweis: Da G transitiv auf \mathfrak{P} und G_x transitiv auf den maximalen Fahnen von Δ_x für alle $x \in \mathfrak{P}$ operiert, operiert G transitiv auf den maximalen Fahnen von Δ . Es folgt, dass G_l transitiv auf den maximalen Fahnen in Δ_l operieren muss, also der Stabilisator eines Punktes nicht zu einem Ebenenstabilisator konjugiert sein kann. Jedes 3-Element, das einen Punkt in l festlässt, muss wegen 2.2 ein 3A-Element sein. Ist g ein 3B-Element in G_x , so lässt g eine Ebene π in Δ_x invariant. Ein 3-Element in $SL(3, 5)$ lässt aber stets eine Gerade in $PG(2, 5)$ fest, also lässt g ein inzidentes Geraden-Ebenenpaar fest.

Eine Ebene und eine Gerade, die nicht inzident sind, schneiden sich höchstens in einem Punkt. Eine Ebene und ein Punkt, die nicht inzident sind, sind zu keiner gemeinsamen Gerade inzident. Ein Punkt und eine Gerade, die nicht inzident sind, sind in maximal einer Ebene enthalten. Der Schnitt zweier Ebenen ist entweder leer, ein Punkt oder eine Gerade. Wenn zwei Geraden zwei gemeinsame Punkte enthalten, sind sie gleich. Wenn zwei Geraden in einer gemeinsamen Ebene liegen, schneiden sie sich in einem Punkt. Damit sind sie entweder gleich oder es existiert keine weitere Ebene, zu der beide Geraden kollinear sind. Wenn zwei verschiedene Punkte kollinear sind, ist die Verbindungsgerade eindeutig bestimmt; wenn sie nicht kollinear sind, sind sie auch nicht koplanar. Damit folgt (f). (e) folgt aus 1.1.2. Der Rest folgt aus dem vorhergehendem. \square .

Mit den Sätzen 1.2.14, 1.3.4 und 1.6.8 folgt unmittelbar:

Satz 2.3.2 Sei $\varphi : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ die universelle Überlagerung von Δ .

- (a) $\tilde{\Delta}$ ist ein (affines) Gebäude mit Diagramm \tilde{G}_2 .
- (b) Sei $\tilde{G} = \{\tilde{g} \in \text{Aut}\tilde{\Delta}; \exists g \in G \text{ mit } \varphi \circ \tilde{g} = g \circ \varphi\}$. Dann ist \tilde{G} eine Erweiterung von G mit $\pi_1(\Delta)$.
- (c) Sei $\{x, l, \pi\}$ eine maximale Fahne in Δ . Dann ist \tilde{G} die universelle Komplettierung eines Amalgams bestehend aus G_x, G_l und G_π sowie ihren Schnitten in G .

Ein Apartment in einem affinen Gebäude besitzt stets unendlich viele Kammern; damit sieht man, dass $\tilde{\Delta}$ selbst unendlich viele Kammern besitzt. Somit ist $|\pi_1(\Delta)| = \infty$. (Allerdings ist $\pi_1(\Delta)$ abzählbar: Da Δ endlich ist, gibt es nur abzählbar viele geschlossene Pfade in Δ , daher ist $\pi_1(\Delta)$ von abzählbar vielen Elementen erzeugt).

Für eine Fahne σ in Δ sei von nun an $\mathfrak{P}(\sigma) := \mathfrak{P} \cap V_\sigma$. Entsprechend seien $\mathfrak{L}(\sigma)$ und $\mathfrak{F}(\sigma)$ definiert.

Mithilfe des folgenden Satzes können wir die volle Automorphismengruppe von Δ und $\tilde{\Delta}$ bestimmen.

Satz 2.3.3 *Sei Ω ein \tilde{G}_2 -GAB mit $\Omega_p = \mathbb{H}(5)$ (mit den Ebenen von Ω als Punkte von $\mathbb{H}(5)$) und $\Omega_E = PG(2, 5)$ für jeden Punkt p und jede Ebene E . Sei J Untergruppe von $Aut\Omega$, so dass J transitiv auf den maximalen Fahnen von Ω operiert und $J^p \cong G_2(5)$, $J^l \cong S_6$ und $J^E \cong SL(3, 5)$ für jeden Punkt p , jede Gerade l und jede Ebene E gilt. Dann ist $J = Aut\Omega$ und $J_{(p)} = 1$ für jeden Punkt p .*

Beweis: Sei $A = Aut(\Omega)$ und p ein Punkt von Ω . Da J transitiv auf den Punkten von Ω operiert, gilt $A = JA_p$. Da $J_p \cong G_2(5)$ die volle Automorphismengruppe von Ω_p ist, gilt $A_p = J_p A_{(p)}$, also $A = JJ_p A_{(p)} = JA_{(p)}$. Sei $X = A_{(p)}$. Wir zeigen $X = 1$.

Ist l eine Gerade durch p , so gilt $X \leq A_l$. Wegen $A = JX$ folgt $A_l = J_l X$. Ist K der Stabilisator aller Ebenen durch l , so gilt $J_{(l)} X = K \trianglelefteq A_l$. Es ist also $K \leq A_{l,p}$. Weil J_l und damit A_l transitiv auf den Punkten von l ist, folgt $K \leq A_{l,q}$ für alle $q \in \mathfrak{P}(l)$, also $K = A_{(l)}$. Es folgt, dass X alle zu p kollinearen Punkte festlässt.

Ist E eine Ebene durch p , so lässt X alle Punkte auf E invariant, also folgt $X \leq A_{(E)}$. Sei m eine Gerade in E und H der Stabilisator aller Punkte von m . Dann ist $H = J_{(m)} X \trianglelefteq J_m$ und $H \leq A_{m,E}$. Es folgt wiederum $X \leq H = A_{(m)}$.

Seien nun l eine Gerade durch p , q ein von p verschiedener Punkt auf l und $\alpha = (E', m, E, l, F, n, F')$ eine geordnete Wurzel in Ω_q . Ist U_α die dazugehörige Wurzelgruppe in A^q , so $|U_\alpha| = 5$ und das Bild von X in A^q liegt in U_α . Damit ist $|X : X \cap A_{(q)}| \leq 5$. Wir haben einerseits $X \cap A_{(q)} \leq A_{(E')}$, andererseits $X \cap A_{(E')} \leq A_{(q)}$, da U_α scharf transitiv auf der Menge der von m verschiedenen Geraden durch q in E' operiert. Damit ist $A_{(q)} \cap X = A_{(E')} \cap X$.

Angenommen, es ist $X \cap A_{(q)} \neq X$. Dann ist $|X : X \cap A_{(q)}| = 5$. Sei $x \in X \setminus A_{(q)}$. x induziert damit eine Elation mit Achse m auf E' . Das Zentrum r von x muss auf m liegen. Somit lässt X alle Geraden durch r in E' invariant. Es ist $J_{E',p,m}^E \cong GL(2, 5)$. Diese Gruppe transitiv auf den Punkten

von m und transitiv auf $\mathfrak{F}(m) \setminus \{E\}$. Damit ist auch $J_{E,E',p,m}$ transitiv auf den Punkten von m . Jedes Element aus X lässt alle Geraden in E' durch r fest. Weil X von $J_{E,E',p,m}$ normalisiert wird, können wir daraus aber $X \leq A_{(E')}$ und damit $X \leq A_{(q)}$ folgern, ein Widerspruch.

Wir haben daher $A_{(p)} = X \leq A_{(q)}$. Da J transitiv auf den Punkten von Ω ist, muss auch die umgekehrte Inklusion gelten. Damit folgt leicht, dass $X = 1$ ist. \square

Korollar 2.3.4 *Es ist $\text{Aut}\Delta = G$ und $\text{Aut}\tilde{\Delta} = \tilde{G}$.*

Entscheidend für den Beweis von 2.3.3 war, dass ein Element, welches alle Elemente aus $\mathfrak{P}(l)$ für eine Gerade l invariant lässt, auch alle Elemente aus $\mathfrak{F}(l)$ festlässt und umgekehrt. Dies ist eine sehr ungewöhnliche Situation, wie man sie bei klassischen Geometrien nicht findet. Ist z.B. \mathbb{K} ein Körper, $\Omega = PG(3, \mathbb{K})$ und L eine Gerade in Ω , so induziert $PGL(4, \mathbb{K})$ auf dem verallgemeinerten Digon Ω_L eine Gruppe vom Typ $PGL(2, \mathbb{K}) \times PGL(2, \mathbb{K})$, wobei der eine Faktor trivial auf den Punkten in L und der andere trivial auf den Ebenen durch L operiert. Wesentlich für die Existenz von Δ ist daher, dass die S_6 zwei verschiedene, nicht-isomorphe Permutationsdarstellungen vom Grad 6 besitzt, was bei keiner anderen symmetrischen Gruppe endlichen Grades der Fall ist.

Die Automorphismengruppe von $\tilde{\Delta}$ ist erstaunlich klein: Die Gruppe ist zwar transitiv auf den maximalen Fahnen, aber der Stabilisator einer nichtleeren Fahne ist stets endlich. Insbesondere ist $\text{Aut}\tilde{\Delta}$ nicht *stark transitiv*, d.h. transitiv auf den Paaren (C, A) mit C Kammer, A Apartment und $C \in A$. Damit sieht man, dass $\tilde{\Delta}$ kein klassisches Gebäude sein kann.

2.4 Der Diameter des Punktgraphen

Sei im Folgenden stets x ein Punkt in Δ .

Lemma 2.4.1 *Es gibt genau drei verschiedene Bahnen von Tripeln (x, y, z) , so dass y zu x und z kollinear ist, aber x, y und z auf keiner gemeinsamen Ebene liegen.*

- (a) *Typ (I): In diesem Fall ist $d(yx, yz) = 4$ in Δ_y und $G_{xyz} \cong 5 : (4 \times 4)$.*
- (b) *Typ (IIa): In diesem Fall ist $d(yx, yz) = 6$ in Δ_y und $G_{xyz} \cong 4 \cdot S_4$.*
- (c) *Typ (IIb): In diesem Fall ist $d(yx, yz) = 6$ in Δ_y und $G_{xyz} \cong 3 : 8$.*

Beweis: G_y operiert transitiv auf allen Geradenpaaren (l, m) aus Δ_y , für die $d(l, m) = 4$ bzw. $d(l, m) = 6$ gilt. Ist $d(l, m) = 4$, so ist $H := G_{y,l,m}$ eine Gruppe vom Typ $5^{1+2} : (4 \times 4)$.

Ist (l, E, n, F, m) der eindeutig bestimmte Pfad zwischen l und m in Δ_y , so operiert H transitiv auf $\{(E_1, E_2) \mid E_1, E_2 \text{ Ebenen mit } E_1 Il, E_2 Im \text{ und } E_1 \neq E, E_2 \neq F\}$. Daraus folgt, dass die Gruppe H transitiv auf der Menge $\{(x, z) \mid x \text{ Punkt auf } l, z \text{ Punkt auf } m \text{ mit } x \neq y \neq z\}$ operiert.

Der Stabilisator eines solchen Paares in G_y ist dann eine Gruppe vom Typ $5 : (4 \times 4)$. Insgesamt können wir folgern, dass G_y transitiv auf der Menge $\{(x, z) \mid x, z \text{ sind zu } y \text{ kollineare Punkte mit } d(yx, yz) = 4\}$ operiert.

Nun sei $d(l, m) = 6$ in Δ_y . Sei wieder $H := G_{y,l,m}$. Dann ist H eine Gruppe isomorph zu $GL(2, 5)$. Da $H \leq G_{x,l} \cong 5^{1+4} : (4 \cdot S_5)$ ist, operiert H als S_5 auf der Menge $\mathfrak{P}(l) \setminus \{y\}$. Analog operiert H als S_5 auf $\mathfrak{P}(m) \setminus \{y\}$. Es folgt, dass H in $\mathfrak{P}(l) \setminus \{y\} \times \mathfrak{P}(m) \setminus \{y\}$ genau zwei Bahnen besitzt, deren Stabilisatoren Gruppen vom Typ $4 \cdot S_4$ bzw. $4 \cdot S_3$ sind. Eine Untergruppe vom Typ $4 \cdot S_3$ in $GL(2, 5)$ enthält ein Element mit Determinante ungleich ± 1 , dessen Quadrat in $Z(GL(2, 5))$ ist, also ein Element der Ordnung 8. \square

Lemma 2.4.2

- (a) Ist (x, y, z) ein Pfad vom Typ (I), so ist $z \in \Gamma_3(x)$.
- (b) Sei nun $z \in \Gamma_3(x)$. Ist $y \in \Gamma(x) \cap \Gamma(z)$, so ist $d(yx, yz) = 4$ in Δ_y . Es ist $|\Gamma(x) \cap \Gamma(z)| = 36$. Es gibt genau sechs Geraden l_1, \dots, l_6 und je sechs Ebenen E_1, \dots, E_6 , so dass diese Punkte gerade die Punkte auf l_1, \dots, l_6 sind und l_i mit x auf der Ebene E_i und mit z auf der Ebene F_i liegt. Für $i \neq j$ gilt $d(E_i, E_j) = 6$ in Δ_x (und analog $d(F_i, F_j) = 6$ in Δ_z). G_{xz} operiert transitiv als $PGL(2, 5)$ auf $\{E_1, \dots, E_6\}$ und auf $\{F_1, \dots, F_6\}$.

Beweis:

- (a) Ist (x, y, z) ein Pfad vom Typ (I), so gilt wegen $5 \mid |G_{xyz}|$ entweder stets $z \in \Gamma_3(x)$ oder stets $z \in \Gamma(x)$. Wir müssen also einen Pfad finden, so dass x und z nicht kollinear sind.

Sei $x \in \mathfrak{P}$, $A = (m_1, E_1, \dots, m_6, E_6)$ ein geordnetes Apartment in Δ_x (mit m_i Gerade und E_i Ebene) und T der punktweise Stabilisator von A . Dann ist $T \cong 4 \times 4$. Auf m_i gibt es also noch jeweils einen zweiten Punkt y_i , der von T festgelassen wird. Da y_1, y_2 beide auf E_1 liegen, sind sie kollinear, und die Verbindungsgerade $y_1 y_2$ ist ebenfalls T -invariant. Es gibt eine zweite Ebene F durch $y_1 y_2$, die von T festgelassen wird. Da $Fix(T) \cap \Delta_F$ ein Apartment in F ist, gibt es einen dritten Fixpunkt

z von T in F , der nicht auf y_1y_2 liegt. Da $(y_1x, E_1, y_1y_2, F, y_1z)$ ein Pfad der Länge 4 in Δ_{y_1} ist, ist (x, y_1, z) ein Pfad vom Typ (I).

Angenommen, x und z sind kollinear. Dann würde T auch die Gerade xz festlassen. Da aber m_1, \dots, m_6 die einzigen Fixgeraden von T in Δ_x sind, muss $xz = m_i$ für ein i sein.

Es gibt ein Element $r \in G_{x,A}$, welches A bei E_1 spiegelt, also m_1 und m_2 vertauscht. r vertauscht damit auch y_1 und y_2 , lässt also y_1y_2 fest. Da E_1 und F die einzigen Ebenen auf y_1y_2 sind, die von T festgehalten werden, lässt r auch F invariant. Weil y_1, y_2, z die einzigen Fixpunkte von T auf F sind, erhalten wir $z^r = z$. Somit gilt $(xz)^r = xz$, ein Widerspruch, da keine der Geraden m_1, \dots, m_6 fix unter r ist. Folglich muss $z \in \Gamma_3(x)$ gelten.

- (b) Sei nun $z \in \Gamma_3(x)$. Aus Teil (a) folgt, dass es ein $y \in \Gamma(x) \cap \Gamma(z)$ gibt, so dass $d(yx, yz) = 4$ ist. Da G transitiv auf der Menge der Pfade vom Typ (I) operiert, operiert G_{xz} transitiv auf der Menge solcher Punkte. Durch doppeltes Abzählen folgt, dass es insgesamt 36 Punkte gibt, die zusammen mit x und z einen Pfad vom Typ (I) bilden.

Ist (xy, E, l, F, yz) der eindeutig bestimmte Pfad in Δ_y für einen solchen Punkt y , so ist für alle Punkte y' auf l auch (x, y', z) ein Pfad vom Typ (I) (der entsprechende Pfad in $\Delta_{y'}$ ist $(y'x, E, l, F, y'z)$). E bzw. F ist dabei die einzige Ebene, die l und x bzw. z enthält. Für jeden Punkt p , der in E , aber nicht auf l liegt, ist (yp, E, l, F, yz) ein Pfad der Länge 4 in Δ_y , also ist (p, y, z) ein Pfad vom Typ (I). Daher sind p und z nicht kollinear. Also liegen alle zu z kollinearen Punkte in E auf der Geraden l .

Sei E' eine weitere Ebene, die x und eine Gerade enthält, deren Punkte alle zu z kollinear sind. Angenommen, es gibt einen Punkt $q \in E \cap E'$, so dass (x, q, z) ein Pfad vom Typ (I) ist. Sei (qx, E', l', F', qz) der entsprechende Pfad in Δ_q . Da E und E' die Punkte x und q gemeinsam haben, schneiden sie sich in der Geraden qx . E' und F' haben die Punkte z und q gemeinsam, schneiden sich also in der Geraden qz . Damit sind (E, l, F, qz, F') und (E, qx, E', l', F') zwei verschiedene Pfade der Länge vier in Δ_q , ein Widerspruch, da Δ_q ein verallgemeinertes Hexagon ist.

Es gibt also genau 6 solcher Ebenen, die von G_{xz} transitiv permutiert werden. Sei Ω die Menge dieser Ebenen, t die zentrale Involution in G_{xz} , $Z = \langle t \rangle$ und $M, N \trianglelefteq G_{xz}$ mit $N \cong SL(2, 5)$, $M \cong SL(2, 3)$. Dann ist $M = C_{G_{xz}}(N)$. Wir stellen fest, dass N keinen Fixpunkt in Ω hat, da N sonst eine Gerade und zwei ihrer Ebenen festlassen würde und damit eine Untergruppe einer auflösbaren Gruppe vom Typ

$5^{1+4} : 4.S_4$ wäre. Es folgt, dass N als A_5 zweifach transitiv auf Ω operiert. Daraus folgt leicht, dass M der Kern der Wirkung von G_{xz} auf Ω ist und G_{xz} als S_5 scharf dreifach transitiv auf Ω wirkt. Die Gruppe $2.(A_5 \times A_5).2 \cong C_{G_x}(t)$ hat zwei Bahnen auf der Menge der Fixebenen von t in Δ_x mit Bahnlängen 36 und 6, wobei t alle Geraden durch eine Ebene der letzteren Bahn invariant lässt. Diese sechs Ebenen haben alle paarweise maximalen Abstand in Δ_x . Wegen $3 \mid |G_{x,z,E}|$ für $E \in \Omega$ folgt damit, dass die Ebenen aus Ω diesen sechs Punkten in Δ_x entsprechen. Damit haben alle Ebenen aus Ω maximalen Abstand in Δ_x .

Wir zeigen nun, dass diese 36 Punkte alle Punkte in $\Gamma(x) \cap \Gamma(z)$ sind. Angenommen, es gibt einen Punkt y , der zu z und x kollinear ist, so dass $d(yx, yz) = 6$ ist. Dann ist G_{xyz} isomorph zu einer Gruppe vom Typ $4 \cdot S_4$ oder $4 \cdot S_3$. Sei t die zentrale Involution in G_{xz} und s die zentrale Involution in G_{xyz} . Ist $s \neq t$, so entspricht s in $C_G(t)/\langle t \rangle \cong A_{11}$ einem Produkt von vier disjunkten Transpositionen (siehe 2.1.2 (d)). Es gibt ein 3A-Element in $C_{G_x}(t)$, welches s zentralisiert. $C_{G_x}(t)/\langle t \rangle$ lässt aber eine Partition vom Typ $\{5, 6\}$ fest und operiert als $PGL(2, 5)$ auf den sechs Ziffern. Daher müssen drei Ziffern, die s festlässt, in der Bahn der Länge fünf liegen. Damit kann aber s keine zweite Potenz in $G_{x,y,z} \leq C_{G_x}(t)$ sein, ein Widerspruch. Daher ist $s = t$.

t lässt damit die Gerade yx fest. Es gibt daher eine Ebene $F \in \Omega$ mit $d(F, yx) \leq 3$. Sei l die Gerade in F , deren Punkte alle zu z kollinear sind, und F^* die Ebene, die l und z enthält.

Angenommen, es ist $d(F, yx) = 1$. Ist y inzident zu l , so liegt yz in F^* , ein Widerspruch zur Annahme $d(yx, yz) = 6$. Ist y nicht auf l , so ist (y, p, z) mit $p = yx \cap l$ ein Pfad vom Typ (I), also gilt $z \in \Gamma_3(y)$, ebenfalls ein Widerspruch. Also können wir $d(F, yx) = 3$ annehmen.

Sei (F, l', F', yx) der eindeutig bestimmte Pfad in Δ_x . Es existiert dann ein Pfad $(yx, F', l'', F'', l''', F''', yz)$ in Δ_y . Sei p der Schnittpunkt von l' und l'' in F' und q der Schnittpunkt von l und l' in F . Dann ist (p, y, z) ein Pfad vom Typ (I), also gilt $p \neq q$. Da (l', F, l, F^*, qz) ein Pfad der Länge 4 in Δ_q ist, ist auch (p, q, z) ein Pfad vom Typ (I). Es folgt, dass die Ebenen F und F'' Abstand 6 in Δ_p haben müssen. Dies ist aber ein Widerspruch, da (F, l', F', l'', F'') ein Pfad der Länge 4 in Δ_p ist. Also kann es einen solchen Punkt y nicht geben. \square

Lemma 2.4.3 *Seien $x, y, z \in \mathfrak{P}$ drei paarweise kollineare Punkte. Dann gibt es eine Ebene E , auf der alle drei Punkte liegen.*

Beweis: Wir müssen zeigen, dass $d(yx, yz) \leq 2$ in Δ_y gilt. Wegen Lemma 2.4.2 kann nicht $d(yx, yz) = 4$ in Δ_y gelten. Angenommen, es gilt $d(yx, yz) = 6$ in Δ_y . Dann muss wieder nach 2.4.2 $d(xy, xz) = 6$ in Δ_z gelten. Sei $(yx, E_1, l_1, E_2, l_2, E_3, yz)$ ein Pfad in Δ_y . Dann gibt es in Δ_z einen eindeutig bestimmten Pfad $(yz, E_3, l_3, E_4, l_4, E_5, xz)$. l_2 und l_3 sind zwei Geraden in E_3 , enthalten also einen gemeinsamen Punkt p . Dann sind $(yx, E_1, l_1, E_2, l_2 = yp)$ und $(zx, E_5, l_4, E_4, l_3 = zp)$ Pfade der Länge 4 in Δ_y bzw. Δ_z . Da aber $d(E_2, E_4) \leq 4$ gilt, muss nach Lemma 2.4.2 $E_2 = E_4$ gelten. Aber dann haben E_2 und E_3 sowohl die Gerade l_2 als auch den Punkt z gemeinsam, ein Widerspruch. \square

Im folgenden sei stets $\Lambda := Cl(\Gamma)$. Durch Lemma 2.4.3 wissen wir nun, dass Λ alle Informationen über Δ enthält: Ebenen können wir mit den maximalen Simplizes in Λ mit 31 Elementen indentifizieren, Geraden mit 6-elementigen Simplizes, die in genau 6 verschiedenen maximalen Simplizes liegen. Ist $\psi : \hat{\Delta} \rightarrow \Delta$ eine Überlagerung, so induziert ψ in natürlicher Weise eine Überlagerung von Λ . Ist umgekehrt $\psi : \hat{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ eine Überlagerung, so können wir auf gleiche Weise eine Geometrie $\hat{\Delta}$ konstruieren, welche Δ überlagert. Somit sieht man:

Satz 2.4.4 *Ist $\varphi : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ die universelle Überlagerung von Δ und ist $\tilde{\Gamma}$ der Punktgraph von $\tilde{\Delta}$, so ist die induzierte Überlagerung von $Cl(\tilde{\Gamma})$ nach Λ die universelle Überlagerung von Λ . Insbesondere gilt $\pi_1(\Delta) \cong \pi_1(\Lambda)$.*

Lemma 2.4.5 *Sei (x, y, z) ein Pfad vom Typ (IIa). Dann ist $z \in \Gamma_2(x)$.*

Beweis: Nach Lemma 2.4.2 und Lemma 2.4.3 ist $z \in \Gamma_2(x) \cup \Gamma_4(x)$. Da 32 ein Teiler von $|G_{xyz}|$ ist, muss $z \in \Gamma_2(x)$ sein. \square

Lemma 2.4.6 *Sei (x, y, z) ein Pfad vom Typ (IIb). Dann ist $z \in \Gamma_4(x)$.*

Beweis: Es muss $z \in \Gamma_2(x) \cup \Gamma_4(x)$ gelten. Angenommen, $z \in \Gamma_2(x)$. Es ist $H := G_{xyz} \cong 3 : 8$. Ist g ein Element der Ordnung 4 in G_{xyz} , so lässt g genau zwei Geraden l_1, l_2 in Δ_x punktweise fest. Betrachtet man die Wirkung von $C_{G_x}(g) \cong GL(2, 5)$ auf der Menge der Fixgeraden von g in Δ_x , so erkennt man, dass l_1 und l_2 die beiden einzigen H -invarianten Geraden in Δ_x sind. y muss mit einer dieser beiden Geraden inzidieren, etwa mit l_1 . Ist $J = N_{G_{xz}}(\langle g \rangle)$, so ist $H \leq J \cong 4.S_4$. Für $a \in J \setminus H$ ist y^a ebenfalls in $\Gamma(x) \cap \Gamma(z) \cap \mathfrak{P}(l_1)$, ein Widerspruch, da dann die drei Punkte y, y^a und z paarweise kollinear sind, z aber nicht mit $yy^a = xy$ in einer gemeinsamen Ebene liegen können. \square

Lemma 2.4.7 *Sei $z \in \Gamma_4(x)$. Dann ist $|\Gamma(x) \cap \Gamma(z)| = 42$. G_{xz} ist transitiv auf $\Gamma(x) \cap \Gamma(z)$ mit Kern $O_3(G_{xz})$. Sind y, y' zwei verschiedene Punkte in $\Gamma(x) \cap \Gamma(z)$, so gilt $d(xy, xy') = 6$ in Δ_x .*

Beweis: Die erste Aussage folgt durch doppeltes Abzählen. Weil G transitiv auf den Pfaden vom Typ (IIb) operiert, operiert G_{xz} transitiv auf $\Gamma(x) \cap \Gamma(z)$.

Sei $h \in G_{xz}$ mit $o(h) = 7$ und S eine 3-Sylowgruppe in $N_{G_{xz}}(\langle h \rangle)$. Dann ist $S \cap C_{G_{xz}}(\langle h \rangle) = O_3(G_{xz})$. Aus Proposition 2.8 in [Ly] folgt damit, dass alle 3A-Elemente in S in $O_3(G_{xz})$ enthalten sind. Ist $y \in \Gamma(x) \cap \Gamma(z)$, so enthält G_{xyz} ein Element der Ordnung 3, und dieses Element muss ein 3A-Element sein, da es ein inzidentes Punkt-Geradenpaar invariant lässt. Daher $O_3(G_{xz})$ der Kern der Wirkung von G_{xz} auf $\Gamma(x) \cap \Gamma(z)$.

Angenommen, es sind $y, y' \in \Gamma(x) \cap \Gamma(z)$ mit $d(xy, xy') \leq 4$. Wäre $d(xy, xy') = 2$, so gäbe es Ebenen E_1 und E_2 , so dass E_1 die Punkte x, y, y' und E_2 die Punkte z, y, y' enthält. Daraus würde aber $z \in \Gamma_3(x)$ folgen. Angenommen, es gilt $d(xy, xy') = 4$. Dann wäre $y' \in \Gamma_3(y)$ und $x, z \in \Gamma(y) \cap \Gamma(y')$. Aus Lemma 2.4.2 würde dann folgen, dass 3 kein Teiler von $|G_{x,z,y,y'}|$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch wegen $O_3(G_{x,z}) \leq G_{x,z,y,y'}$. Folglich gilt $d(xy, xy') = 6$. \square

Damit haben wir gezeigt:

Satz 2.4.8 *Für alle $y, z \in \mathfrak{P}$ ist $\Gamma(y) \cap \Gamma(z) \neq \emptyset$, und somit ist $\text{diam}\Gamma = 2$.*

2.5 Apartments in Δ

Lemma 2.5.1

- (a) *Es gibt genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen in G , die isomorph zu $Z_4 \times Z_4$ ist.*
- (b) *Ist T eine solche Untergruppe und $\Sigma := \text{Fix}(T)$, so ist Σ eine dünne, zusammenhängende Untergeometrie von Δ mit Diagramm \tilde{G}_2 . Σ besitzt genau 12 Punkten, 36 Geraden und 24 Ebenen. Es ist $T = G_{(\Sigma)}$, $N_G(T) = G_\Sigma$ und $N_G(T)/T \cong S_4 \times S_3$ ist epimorphes Bild von $W(\tilde{G}_2)$ und operiert transitiv auf den maximalen Fahnen von Σ .*

Beweis:

- (a) Sei z eine Involution in G , x, y Elemente in $C_G(z)$, deren Bilder in $C_G(z)/\langle z \rangle \cong A_{11}$ die Elemente $(12)(34)$ und $(1324)(5768)$ repräsentieren. Dann ist $x^2 = z$ und y^2 ist eine von z verschiedene Involution. Wegen [Ly1], 2.1 (c) kommutieren x und y , also ist $\langle x, y \rangle \cong 4 \times 4$. Jedes Element, dessen Quadrat gleich z ist, ist in $C_G(z)/\langle z \rangle$ von der Form $(ab)(cd)$. Ein Element der Ordnung 4, das mit diesem Element kommutiert und dessen Quadrat von z verschieden ist, muss notwendig von

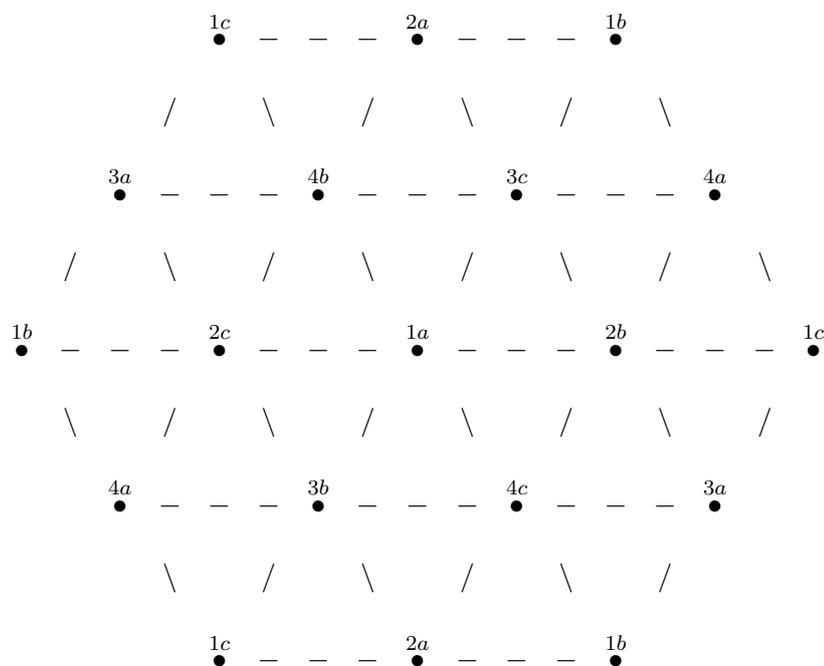
der Form $(abcd)(efgh)$ sein. Damit gibt es in $C_G(z)$ genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen $T \cong Z_4 \times Z_4$ mit $z \in T$. Da G nur eine Konjugiertenklasse von Involuntoren besitzt, folgt die Behauptung.

- (b) Sei χ der Permutationscharakter von G bezüglich \mathfrak{P} . Ist T eine Untergruppe von G , die isomorph zu $Z_4 \times Z_4$ ist, so ist $\langle \chi|T, 1_T \rangle = 12$, also enthält $\Sigma := \text{Fix}(T)$ genau 12 Punkte. Da der Stabilisator einer maximalen Fahne in Δ eine $Z_4 \times Z_4$ enthält, existiert eine maximale Fahne $\{x, l, \pi\}$ in Σ . Es ist dann $\Sigma \cap \Delta_x$ ein Apartment in Δ_x und es existieren Elemente $s, t \in N_{G_x}(T)$ mit $l^s \neq l, \pi^s = \pi$ und $l^t = l, \pi^t \neq \pi$ und $o(s) = o(t) = 2, o(st) = 6$. In $N_{G_l}(T)$ gibt es ein Element r mit $\pi^r = \pi$ und $x^r \neq x$ und $o(Tr) = 2 = o(Trt)$. r, s liegen beide in $N_{G_\pi}(T)$, also sieht man, dass $o(Trs) = 3$ sein muss. Damit ist $N_G(T)/T$ ein epimorphes Bild von $W(\tilde{G}_2)$. Da auf jeder Gerade in $\Delta_x \cap \Sigma$ ein weiterer Fixpunkt von T liegen muss, enthält die Zusammenhangskomponente von x mindestens 7 Punkte. Daher muss Σ zusammenhängend sein, und man sieht leicht, dass $N_G(T)/T$ von r, s und t erzeugt wird und transitiv auf den maximalen Fahnen von Σ operiert. Damit ist $|N_G(T) : T| = 12|N_{G_x}(T) : T| = 144$. Für eine Gerade l und eine Ebene π in Σ ist $\Delta_l \cap \Sigma$ und Δ_π ein Apartment in Δ_l bzw. Δ_π . Damit erhält man durch doppeltes Abzählen, dass Σ genau 24 Ebenen und 36 Geraden enthält. $N_G(T)/T$ ist ein epimorphes Bild der Coxeter-Gruppe vom Typ \tilde{G}_2 und hat genau 144 Elemente; daraus folgt $N_G(T)/T \cong S_4 \times S_3$. \square

Wir nennen eine Teilgeometrie Σ von Δ , die von einer Untergruppe vom Typ $Z_4 \times Z_4$ punktweise invariantgelassen wird, im folgenden stets ein *Apartment von Δ* . Mit \mathcal{A} meinen wir die Menge aller Apartments in Δ . Für eine Teilmenge X von Δ sei $\mathcal{A}_X = \{\Sigma \in \mathcal{A}; X \subseteq \Sigma\}$.

Ein Apartment Σ kann wie folgt beschrieben werden (siehe [K1], S. 246): Punkte sind die Elemente aus $\{1, 2, 3, 4\} \times \{a, b, c\}$; zwei Punkte sind genau dann kollinear, wenn beide Koordinaten verschieden sind. Ein Paar kollinearere Punkte entspricht dann einer Gerade und drei paarweise kollineare Punkte einer Ebene. Es ist $G_\Sigma/T = S_4 \times S_3$, wobei die Wirkung von G_Σ/T der natürlichen Wirkung von $S_4 \times S_3$ auf $\{1, 2, 3, 4\} \times \{a, b, c\}$ entspricht. Zwei Punkte stehen in Relation Γ_2 , wenn die erste Koordinate gleich ist, und

in Relation Γ_3 , wenn die zweite Koordinate gleich ist (siehe Abbildung).



Alternativ kann man Σ auch so beschreiben. Sei ϵ eine primitive dritte Einheitswurzel, $R = \mathbb{Z}[\epsilon]$ und $I = 2\sqrt{-3}R$. Die Punkte von Σ sind die Elemente aus R/I , zwei Punkte $r + I, s + I$ sind genau dann kollinear, wenn es eine Einheit $u \in R$ mit $r + u + I = s + I$ gibt. G_Σ/T können wir dann mit $A\Gamma L(R)/I$ identifizieren.

Lemma 2.5.2

- (a) Es ist $T \leq N_G(T)'$ und $N_G(T)'/T \cong A_4 \times A_3$.
- (b) T besitzt ein Komplement in $N_G(T)'$.
- (c) Es ist $|C_G(T) : T| = 3$.

Beweis:

- (a) Für einen Punkt p in Σ ist $T \leq N_G(T)'_p$, also $T \leq N_G(T)'$. Die zweite Aussage ist klar.

- (b) Sei z eine Involution in T . In $C_G(z) \cong 2 \cdot A_{11}$ rechnet man nach, dass T ein Komplement in $C_G(z) \cap N_G(T)'$ besitzt. $|N_G(T)' : C_G(z) \cap N_G(T)'| = 3$ impliziert, dass T auch ein Komplement in $N_G(T)'$ besitzt (Satz von Gaschütz, 17.4 in [H]).
- (c) Das rechnet man ebenfalls in $N_G(T) \cap C_G(z)$ nach. □

Lemma 2.5.3 *Sei $\varphi : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ die universelle Überlagerung von Δ , $\Pi = \text{Aut}\Delta_\varphi$ und $\tilde{G} = \text{Aut}\tilde{\Delta}$. Nach der Bemerkung nach 1.2.14 können wir dann T als Untergruppe von \tilde{G} auffassen. Sei $\tilde{\Sigma} = \text{Fix}_{\tilde{\Delta}}(T)$. Dann gilt:*

- (a) $\tilde{\Sigma}$ ist ein reguläres Apartment mit $\varphi(\tilde{\Sigma}) = \Sigma$.
- (b) $T = \tilde{G}_{(\tilde{\Sigma})}$, $N := G_{\tilde{\Sigma}} = N_{\tilde{G}}(T)$ ist eine Erweiterung von T mit einer Coxeter-Gruppe vom Typ \tilde{G}_2 .
- (c) Ist $N_0 = N \cap \Pi$, so ist $N_0 \cap T = 1$, $N/N_0T \cong S_4 \times S_3$, $N_0 \leq C_{\tilde{G}}(T)$ und $|C_{\tilde{G}}(T) : N_0T| = 3$.

Beweis: (a) und (b) sind klar. Die ersten beiden Eigenschaften von N_0 sind ebenfalls klar. Es ist $[T, N_0] \leq N_0 \cap T = 1$, weil beide Gruppen normal in N sind. Aus $|N_G(T) : C_G(T)| = 3$ folgt $|C_{\tilde{G}}(T) : N_0T| = 3$. □

Kapitel 3

Die Eindeutigkeit der Lyonsgruppe

3.1 Geschlossene Pfade der Länge 4 in Γ

Lemma 3.1.1 *Sei $y \in \Gamma_3(x)$. Dann gilt:*

- (a) *Ist $z \in \Gamma(x) \cap \Gamma(y)$, so enthält $\Gamma(x) \cap \Gamma(y)$ jeweils 5 Punkte aus $\Gamma(z)$ und $\Gamma_3(z)$, 25 Punkte aus $\Gamma_2(z)$ und keinen Punkt aus $\Gamma_4(z)$.*
- (b) *Sei Φ_{xy} der Graph mit Eckenmenge $\Gamma(x) \cap \Gamma(y)$ und $z \sim w$ für $w, z \in \Gamma(x) \cap \Gamma(y)$ genau dann, wenn $\mathcal{A}_{x,y,z,w} \neq \emptyset$ ist oder wenn z und w kollinear sind. Dann ist Φ_{xy} zusammenhängend.*

Beweis:

- (a) Es gibt 6 paarweise gegenüberliegende Ebenen $\pi_1, \dots, \pi_6 \in \Delta_x$ und Geraden $l_i \in \pi_i$, so dass $\Gamma(x) \cap \Gamma(y)$ genau die Punkte auf den l_i sind. Sei etwa $z \in l_1$. Für $w \in \Gamma(x) \cap \Gamma(y)$ sind dann w und z genau dann kollinear, wenn $w \in l_1$ ist. Für $i > 1$ gibt es auf l_i genau einen Punkt, der zu z in Relation Γ_3 steht, nämlich der Schnittpunkt von l_i mit $\text{proj}_{\pi_i} xz$. Die übrigen Punkte stehen in Relation Γ_2 oder Γ_4 zu z . Wegen $|G_{x,y,z}| = 80$ ist für einen solchen Punkt w ist dann $|G_{x,y,z,w}|$ nicht durch 3 teilbar, also kann nicht $w \in \Gamma_4(z)$ gelten.
- (b) Für $w \in \pi_1$ sind w und z kollinear. Ist $w \in \pi_i$ mit $i > 1$, so existiert ein Punkt $v \in l_i$, so dass x, y, z und v in einem gemeinsamen Apartment liegen. Damit folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.1.2 *Sei $y \in \Gamma_2(x)$ und sei Ψ_{xy} die Geometrie mit Eckenmenge $(\Gamma(x) \cap \Gamma(y)) \cup \mathcal{A}_{xy}$, wobei $z \in \Gamma(x) \cap \Gamma(y)$ und $A \in \mathcal{A}_{xy}$ genau dann inzident*

sein sollen, wenn $z \in A$ gilt. Dann ist die Ψ_{xy} isomorph zum Cayley-Hexagon $\mathbb{H}(2)$.

Beweis: Sei $A \in \mathcal{A}_{xy}$, $z \in \Gamma(x) \cap \Gamma(y) \cap A$. Dann ist $G_{xy} = PSU(3, 3)$, $G_{xyA} = (4 \times 4) : S_3$, $G_{xyz} = 4 \cdot S_4$ und $G_{xyzA} = (4 \times 4) : 2$. Damit folgt, dass die Wirkungen von G_{xy} auf $\mathbb{H}(2)$ und auf Ψ_{xy} äquivalent sind. \square

Wir betrachten nun die Fixmenge einer Involution in G : Seien $x \in \mathfrak{P}$, t eine Involution in G_x , $l_i, \pi_i, l_{ij}, \pi_{ij}, N_1$ und N_2 wie in 2.2 (3) und (4). Da t alle mit l_i inzidenten Ebenen invariant lässt, muss t auch $\mathfrak{P}(l_i)$ elementweise festlassen. Der Normalteiler N_1 von $C_{G_x}(t)$ lässt alle Geraden l_i invariant und operiert als A_5 auf $\mathfrak{P}(l_i) \setminus \{x\}$. Der Normalteiler N_2 operiert hingegen transitiv als $PSL(2, 5)$ auf der Menge der l_i . Ist $\Omega := \bigcup_{i=1}^6 \mathfrak{P}(l_i) \setminus \{x\}$, so können wir den Elementen aus Ω daher Koordinaten (i, j) mit $1 \leq i \leq 6$ und $1 \leq j \leq 5$ geben, so dass (i, j) mit l_i inzident ist und die Wirkung von $N_2 N_1 / \langle t \rangle$ auf Ω äquivalent zur Wirkung von $PSL(2, 5) \times A_5$ auf $\{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 5\}$ ist. Seien $y = (i, j)$ und $z = (k, l)$ zwei Punkte aus Ω , die auf verschiedenen Geraden liegen (also $i \neq k$). Ist $j = l$, so ist $|G_{x,y,z}| \geq 48$, also ist (y, x, z) ein Pfad vom Typ (IIa) und damit stehen y und z in Relation Γ_2 . Im Fall $j \neq l$ hingegen gilt $z \in \Gamma_4(y)$.

Satz 3.1.3

- (a) Ist $y \in \Gamma_4(x)$, so existieren z und $w \in \Gamma(x) \cap \Gamma(y)$, so dass $w \in \Gamma_2(z)$ ist.
- (b) Der Graph Θ_{xy} mit $\Gamma(x) \cap \Gamma(y)$ als Ecken und den Paaren $\{u, v\}$ mit $u \in \Gamma_2(v)$ als Kanten ist zusammenhängend.

Beweis: Sei $y \in \Gamma_4(x)$ und g ein Element der Ordnung 3 in $O_3(G_{xy})$. Dann g ein 3A-Element und es ist $N_{G_x}(\langle g \rangle) \cong 3.U_3(5).2$ (siehe [ATLAS]). Damit sieht, dass g genau 750 Punkte aus $\Gamma_4(x)$ invariant lässt.

Sei t eine Involution in $C_{G_x}(g)$ und seien l_1, \dots, l_6 die sechs Geraden in Δ_x , die von t punktweise festgelassen werden. Wie wir oben gesehen haben, können wir die von x verschiedenen Punkten auf diesen Geraden mit den Tupeln (i, j) mit $i = 1, \dots, 6$ und $j = 1, \dots, 5$ bezeichnen. $C_{G_x}(t) \cong 2.(A_5 \times A_5).2$ operiert als $PGL(2, 5)$ auf der ersten Koordinate und als S_5 auf der zweiten Koordinate. Da g ein 3A-Element ist, entspricht g einem 3-Zykel in $C_G(t)/\langle t \rangle$ und ist damit in N_1 enthalten. Also sehen wir, dass g alle Geraden l_i und auf oBdA alle Punkte mit zweiter Koordinate 4 oder 5 festlässt. Sei $u_i = (i, 4)$. Dann stehen die u_i paarweise in Relation Γ_2 . g lässt in Δ_{u_i} genau 126 paarweise gegenüberliegende Geraden fest, also l_i und noch 125 weitere. Auf jeder dieser Geraden liegt genau ein Punkt in $\Gamma_4(x)$, der von g festgelassen

wird. Wir bekommen auf diese Weise also maximal $6 \cdot 125 = 750$ Punkte in $\Gamma_4(x) \cap \text{Fix}_g(\mathfrak{P})$.

Angenommen, diese Punkte sind alle verschieden. $\Gamma_4(x) \cap \text{Fix}_g(\mathfrak{P})$ besteht dann genau aus diesen Punkten.

Sei h ein $3B$ -Element in $C_{G_x}(\langle g, t \rangle)$. Dann lässt h keine der Geraden l_i und daher keinen der Punkte u_i fest, also lässt h keinen Punkt in $\Gamma_4(x) \cap \text{Fix}_g(\mathfrak{P})$ invariant. Die Gruppe $C_{G_x}(g)/\langle g \rangle \cong U_3(5)$ besitzt genau eine Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 3, also lässt kein $3B$ -Element in dieser Gruppe einen Punkt in $\Gamma_4(x) \cap \text{Fix}_g(\mathfrak{P})$ fest. Dies ist jedoch ein Widerspruch, denn in $G_{x,y} \cong 3 : PGL(2, 7)$ gibt es ein $3B$ -Element. Also existieren ein $i \neq j$ und einen Punkt $y \in \Gamma_4(x) \cap \text{Fix}_g(\mathfrak{P})$, so dass y sowohl mit u_i als auch mit u_j inzidiert. Also sind $u_i, u_j \in \Gamma(x) \cap \Gamma(y)$ mit $u_i \in \Gamma_2(u_j)$ und Teil (a) ist gezeigt.

Durch Betrachten der Doppelpunktstabilisatoren in $\Gamma(u_i) \cap \Gamma(u_j)$ stellen wir fest, dass $G_{x,y,u_i,u_j} = \langle g \rangle$ gelten muss. $W = G_{x,y}/\langle g \rangle$ ist isomorph zu $PGL(2, 7)$ und operiert transitiv auf den Ecken von Θ_{xy} . Der Stabilisator einer Ecke in W ist zyklisch der Ordnung 8. Der Stabilisator einer Zusammenhangskomponente in W hat daher entweder Ordnung 16 oder ist W selbst. Da jede Ecke aber mindestens 8 Nachbarn hat, muss Θ_{xy} zusammenhängend sein. \square

3.2 Die Wirkung auf den Geraden und Ebenen von Δ

Satz 3.2.1 Sei $p \in \mathfrak{P}$ und $H = G_p$. Dann zerfällt \mathfrak{F} in genau sieben H -Bahnen.

Beweis: Sei $\chi = 1_H^G$ der Permutationscharakter von H/G . Dann ist $\chi = 1a + 45694a + 1543500a + 3028266a + 4226695a$ [Ly1, ATLAS]. Sei π eine Ebene und $K = G_\pi$. In der folgenden Tabelle ist für jede Konjugiertenklasse C von G die Anzahl der Elemente in $K \cap C$ sowie $\chi(g)$ für ein $g \in C$ angegeben.

1A	2A	3B	4A	5A	5B	6B	8B
1	19375	387500	775000	18724	74400	387500	3875000
8835156	2772	243	84	156	6	3	4
10A	10B	12B	15B	20A	24B	24C	
542500	1860000	3875000	1550000	6975000	3875000	3875000	
12	2	3	3	4	1	1	
25A	30B	31ABCDE					
1860000	1550000	je 3000000					
1	3	1					

Man erhält $|H/G \setminus K| = \langle 1_H^G, 1_K^G \rangle = \langle \chi, 1_K^G \rangle = \langle \chi_K, 1_K \rangle = 7$. \square

Wir bezeichnen die Bahnen künftig mit $\mathfrak{F}_1(p)$ bis $\mathfrak{F}_7(p)$, wobei wir die Bahnen so ordnen, dass $|\mathfrak{F}_i| \leq |\mathfrak{F}_{i+1}|$ gilt. Außerdem werden wir später sehen, dass wir \mathfrak{F}_5 und \mathfrak{F}_6 dadurch unterscheiden können, dass eine \mathfrak{F}_5 -Ebene Punkte aus Γ_2 enthält und eine \mathfrak{F}_6 -Ebene nicht.

Drei Bahnen können wir sofort identifizieren: π ist aus \mathfrak{F}_1 genau dann, wenn $pI\pi$ gilt. Ist $\pi \in \mathfrak{F}_2$, so gibt es Ebene $\pi' \in \mathfrak{F}_1$, so dass $\pi \cap \pi'$ eine Gerade ist. Ist $\pi \in \mathfrak{F}_3$, so gibt es einen zu p kollinearen Punkt q in π , so dass $d(pq, \pi) = 5$ in Δ_q gilt. Man rechnet leicht nach, dass $|\mathfrak{F}_1| = 3906$, $|\mathfrak{F}_2| = 488250$, $|\mathfrak{F}_3| = 73237500$ gilt.

Lemma 3.2.2 Sei $\pi \in \bigcup_{i=4}^7 \mathfrak{F}_i$. Dann gilt:

- 5 ist kein Teiler von $|H_\pi|$.
- H_π enthält keine Untergruppe isomorph zu 4×4 .
- H_π enthält kein Element der Ordnung 6.

Beweis:

- (a) Sei x ein Element der Ordnung 5 in H . Zunächst halten wir fest, dass jede unter x invariante Ebene einen Fixpunkt von x enthält.

Angenommen, x ist ein $5A$ -Element in H_π . Dann hat x genau 156 Fixpunkte. Sei $S := N_G(\langle x \rangle)$. Dann gibt es eine Gerade $l \in \mathfrak{L}$, so dass $S = G_l$ ist. x lässt dann alle Punkte fest, welche auf einer Ebene liegen, die mit l inzidiert. Dies sind genau $6 + 6 \cdot 25 = 156$ Punkte, also sind dies alle Fixpunkte von x .

Sei q ein Fixpunkt von x . Dann existiert eine Ebene π_1 , die l und q enthält. Sei $m \neq l$ eine Gerade in π_1 durch q und π_2 eine Ebene durch m .

Da alle Punkte von m in π_1 liegen und x daher m punktweise festlässt, wird auch π_2 von x festgelassen. Ist m' jedoch eine von m verschiedene Gerade in π_2 , so ist $m \cap m'$ der einzige Fixpunkt von x auf m , da ja alle Fixpunkte in π_2 auf m liegen. Folglich ist π_2 auch die einzige Ebene durch m' , welche unter x invariant bleibt. Wir sehen also, dass eine Ebene in Δ_q genau dann eine Fixebene von x ist, wenn sie sich mit einer mit l inzidenten Ebene in einer Gerade schneidet. Dies bedeutet jedoch, dass sie mit einem Punkt aus l inzidiert. Da p ebenfalls in einer Ebene durch l liegt, muss $\pi \in \bigcup_{i=1}^3 \mathfrak{F}_i(p)$ sein.

Ein $5B$ -Element $x \in H$ hat genau sechs Fixpunkte, die alle auf einer Geraden in Δ_p liegen. Da jede Fixebene von x auch einen Fixpunkt enthält, erhalten wir, dass alle Fixebenen von x in $\mathfrak{F}_1(p) \cup \mathfrak{F}_2(p) \cup \mathfrak{F}_3(p)$ liegt.

- (b) Die Fixelemente einer Gruppe der Form 4×4 bilden ein Apartment. Alle Ebenen, die zusammen mit p in einem Apartment liegen, sind jedoch in $\bigcup_{i=1}^3 \mathfrak{F}_i$.
- (c) Ein Element der Ordnung 6, welches eine Ebene festlässt, muss ein $6B$ -Element sein. Sei $x \in H$ ein solches Element. Dann hat x genau drei Fixpunkte, etwa p, q und r . Zu jedem Fixpunkt gibt es 6 Fixebenen von x , die mit diesem Punkt inzidieren, und auf jeder Fixebene liegt genau ein Fixpunkt von x . Es folgt, dass x genau 18 Fixebenen besitzt. Seien π_1 bis π_6 die 6 Fixebenen von x , die mit p inzidieren. Auf jeder Ebene π_i gibt es genau eine Gerade l_i , die von x festgelassen wird. x lässt genau 3 Ebenen durch l fest. Somit erhalten wir 18 verschiedene Fixebenen von x , die alle in $\mathfrak{F}_1(p) \cup \mathfrak{F}_2(p)$ liegen. \square

Satz 3.2.3

- (a) Sei $\pi \in \mathfrak{F}_4$. Dann ist $H_\pi \cong 31 : 3$.

(b) Ist $\pi \in \mathfrak{F}_5 \cup \mathfrak{F}_6$, so ist $H_\pi \cong S_4$. Ist $\pi \in \mathfrak{F}_7$, so ist $H_\pi \cong A_4$.

Beweis:

- (a) Da 31 ein einfacher Teiler von $|G|$, $|G_2(5)|$ und $|SL_3(5)|$ ist, gibt es eine Bahn \mathfrak{F}_4 , so dass $31 \mid |H_\pi|$ für $\pi \in \mathfrak{F}_4$ gilt. Eine Gruppe der Ordnung 31 hat Index 3 in ihrem Normalisator in $SL_3(5)$ und Index 6 in ihrem Normalisator in $G_2(5)$ und G . Durch doppeltes Abzählen der Menge $\{(\pi, S); \pi \in \mathfrak{F}, S \in Syl_{31}(G_\pi)\}$ sieht man, dass eine Gruppe der Ordnung 31 genau zwei Ebenen invariant lässt. Ist S eine 31-Sylowgruppe von G_p , so sind die beiden S -invarianten Ebenen unter $N_{G_p}(S)$ konjugiert. Somit gibt es genau eine Bahn von Ebenen mit Bahnlänge prim zu 31. Der Stabilisator einer solchen Ebene ist eine Gruppe vom Typ $31 : 3$. Diese Bahn bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_4(p)$. (Wenn wir Teil (b) bewiesen haben, sehen wir, dass dies tatsächlich die viertkleinste Bahn ist). Es ist dann $|\mathfrak{F}_4| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7 = 63000000$.
- (b) Die übrigen drei Bahnen haben nach Lemma 3.1.2 und Teil (a) $\{2, 3\}$ -Gruppen als Stabilisatoren. Es gibt $|\mathfrak{F}_5 \cup \mathfrak{F}_6 \cup \mathfrak{F}_7| = 976500000 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 31$. Die Ordnung eines Stabilisators muss also jeweils ein Teiler von 96 sein. Aus numerischen Gründen kann man sofort alle Zahlen kleiner gleich 6 ausschließen. Außerdem dürfen 32 und 96 ausgeschlossen werden, da der Stabilisator nach Lemma 3.1.2(b) keine $Z_4 \times Z_4$ enthalten darf. Angenommen, es wäre $|H_\pi| = 48$ für ein $\pi \in \mathfrak{F}_5 \cup \mathfrak{F}_6 \cup \mathfrak{F}_7$. Ist $\Omega_1(Z(O_2(H_\pi)))$ zyklisch, so enthält H_π ein Element der Ordnung 6, ein Widerspruch. Ist $\Omega_1(Z(O_2(H_\pi)))$ isomorph zur V_4 , so kann H_π nur isomorph zu $(4 \times 4) : 3$ sein, da der Normalisator einer V_4 in $SL(3, 5)$ eine Gruppe isomorph zu $(4 \times 4) : S_3$ ist. Auch dies ist ein Widerspruch.

Wir haben also $|H_\pi| \in \{8, 12, 16, 24\}$. Hat H_π die Ordnung 12 oder 24, so muss ein minimaler Normalteiler in $O_2(H_\pi)$ isomorph zur V_4 sein, da H_π sonst ein Element der Ordnung 6 enthalten würde. Man sieht daher, dass H_π in diesem Fall isomorph zur A_4 oder S_4 sein muss. Die möglichen Bahnlängen sind also $6n, 4n, 3n, 2n$ mit $n = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 31$. Es gibt genau zwei Möglichkeiten, drei dieser Zahlen so auszuwählen, dass die Summe gerade $976500000 = 8n$ ergibt, nämlich $2n, 2n, 4n$ und $2n, 3n, 3n$.

Angenommen, der letztere Fall liege vor. Sei π eine Ebene durch p und $g \in H_\pi$ ein Element der Ordnung 3. Dann ist g ein $3B$ -Element und hat genau 243 Fixpunkte. p ist der einzige Fixpunkt von g in π und es gibt genau eine Fixgerade l von g in π . Diese Gerade geht nicht durch

p . g lässt noch zwei weitere Ebenen durch l fest, und auf jeder dieser Ebenen liegt genau ein Fixpunkt von g . Es folgt, dass es genau zwei Punkte q gibt, so dass $\pi \in \mathfrak{F}_2(q)$ ist.

Angenommen, es gibt einen Punkt $q \in \text{Fix}_g(\mathfrak{P})$ mit $\pi \in \mathfrak{F}_3(\pi)$. Dann gibt es in π genau einen Punkt r , der zu q kollinear ist. Wir haben dann, dass g auch r und damit die Gerade qr festlässt, ein Widerspruch, da ein $3B$ -Element kein inzidenten Punkt-Geradenpaar invariant lässt. Die anderen Punktstabilisatoren in H_π haben Ordnung 93, 24, 16, 16. Der Punktstabilisator mit Ordnung 24 muss dabei isomorph zu S_4 sein. Alle zu S_4 isomorphen Untergruppen sind in $SL(3, 5)$ konjugiert. Durch doppeltes Abzählen erhält man, dass g in genau 10 zu S_4 isomorphen Untergruppen und in genau 80 Untergruppen vom Typ $31 : 3$ in $5^3 \cdot SL(3, 5)$ liegt. Da eine Gruppe vom Typ $31 : 3$ normalisatorgleich ist und eine Gruppe vom Typ S_4 Index 4 in ihrem Normalisator hat, erhalten wir auf diese Weise aber nur $1 + 2 + 40 + 80 = 123$ Fixpunkte von g , ein Widerspruch.

Also muss der erste Fall vorliegen. Es ist also $|H_\pi| = 24$ für $\pi \in \mathfrak{F}_5 \cup \mathfrak{F}_6$ und $|H_\pi| = 12$ für $\pi \in \mathfrak{F}_7$. Damit ist $H_\pi = S_4$ in den beiden ersten Fällen und $H_\pi = A_4$ im letzten Fall. \square

Lemma 3.2.4 *Sei π eine Ebene aus \mathfrak{F}_3 , y der einzige zu p kollineare Punkt in π und $l = \text{proj}_\pi py$. Dann gilt:*

- (a) $G_{p,\pi} = G_{p,\pi,y} = G_{p,\pi,y,l} = 5 : (4 \times 4)$
- (b) π enthält je fünf Punkte aus $\Gamma_2(p)$ und $\Gamma_3(p)$ und 20 Punkte aus $\Gamma_4(p)$. Alle Punkte aus $\Gamma_3(p)$ liegen auf der Geraden l .
- (c) Es gibt einen Punkt $z \in \Gamma_3(p)$ mit $G_{p,\pi,z} = G_{p,\pi}$. $G_{p,\pi}$ operiert transitiv auf den übrigen vier Punkten aus $\Gamma_3(p)$.
- (d) Sind y_1, \dots, y_5 die fünf Punkte aus $\Gamma_2(p)$, so operiert $G_{p,\pi}$ zweifach transitiv auf diesen Punkten.
- (e) $l^* = \{z, y_1, \dots, y_5\}$ ist eine Gerade.
- (f) Alle Ebenen durch l^* sind \mathfrak{F}_3 -Ebenen. G_{p,l^*} ist isomorph zu $GL(2, 5)$ und operiert transitiv auf $\mathfrak{F}(l^*)$.

Beweis: Es gilt $G_{y,py,\pi} = 5^2 : (4 \times 4)$. Da diese Gruppe transitiv auf $\mathfrak{P}(py) \setminus \{y\}$ operiert, erhalten wir (a). Alle von y verschiedenen Punkte auf l liegen in $\Gamma_3(p)$ und die übrigen Punkte in π liegen alle in $\Gamma_2(p) \cup \Gamma_4(p)$. Ist m eine von l

verschiedene Gerade durch y , so enthält m genau einen Punkt aus $\Gamma_2(p)$, also erhalten wir (b). Sei $\pi' = \text{proj}_l p y$. Dann existiert genau ein Punkt $y \neq z$ mit $G_{l,y,z,\pi,\pi'} = G_{l,y,z,p,\pi'}$, also gilt damit auch $G_{p,\pi,z} = G_{p,\pi}$. Ist w ein anderer Punkt, so gilt $G_{y,l,\pi,\pi',w} = 5^{1+4} : 4$ und somit $G_{p,y,l,\pi,\pi',w} \leq 5 : 4$. Damit folgt (c). Die Gruppe $G_{p,\pi} = 5 : (4 \times 4)$ operiert transitiv auf den Geraden durch y in π , die von l verschieden sind. Da jede dieser Geraden genau einen Punkt aus $\Gamma_2(p)$ enthält, operiert $G_{p,\pi}$ also auch transitiv auf $\{y_1, \dots, y_5\}$. Wegen $O_2(G_{p,\pi}) = 4$ ist diese Wirkung zweifach transitiv.

Für $1 \leq i < j \leq 5$ sei $l_{ij} = l_{ji} := y_i y_j$. Dann ist $l_{ij} \cap l \neq y$ für alle i, j , denn y_i ist ja der einzige Punkt aus Γ_2 auf der Geraden yy_i . Sei $k := |\{l_{ij}; i \neq j\}|$. Da die Gruppe $G_{p,\pi}$ zweifach transitiv auf der Menge der y_i operiert, ist k ein Teiler von 10. $G_{x,\pi}$ ist aber auch transitiv auf $\mathfrak{P}(l) \setminus \{y, z\}$. Wäre als $l \cap l_{ij} \neq z$ für ein Paar (i, j) , so wäre 4 ein Teiler von k , ein Widerspruch. Damit ist $y_i z = l_{ij} = y_j z$ für alle i, j . Es folgt (e).

l^* ist $G_{p,\pi}$ -invariant, also ist $G_{p,\pi,l^*} = 5 : (4 \times 4)$. Da G_{p,π,l^*} eine Bahn der Länge fünf in $\mathfrak{P}(l^*)$ besitzt, operiert diese Gruppe transitiv auf $\mathfrak{F}(l^*) \setminus \{\pi\}$. Sei Σ ein Apartment, welches p, π und l^* enthält und π^* die von π verschiedene Ebene, die mit l^* inzidiert. Es existiert dann ein $t \in G_{\Sigma,p,l^*}$ mit $\pi^t = \pi^*$ und $(\pi^*)^t = \pi$. (Ist $p = 1a, y = 3c$ und $\pi = \{3c, 2a, 1b\}$ so ist $l^* = \{2a, 1b\}$ und $\pi^* = \{2a, 1b, 4c\}$. Wähle $t = (34)$). Wir haben damit, dass $|G_{p,l^*}| = 240$ ist und G_{p,l^*} zweifach transitiv auf $\mathfrak{F}(l^*)$ operiert. Wegen $G_{l^*} = (5^{1+4}) : (4 \cdot S_6)$ folgt also $G_{p,l^*} \cong GL(2, 5)$. \square

Lemma 3.2.5 *Ist π eine Ebene aus \mathfrak{F}_4 und l eine Gerade in π , so inzidiert l mit einer Ebene, die nicht in \mathfrak{F}_4 liegt.*

Beweis: Sei q ein Punkt auf π . Dann existiert eine Gerade m in Δ_q , so dass m einen zu p kollinearen Punkt enthält. π kann nicht mit m inzident sein, da die Punkte in π ja alle in der gleichen H -Bahn liegen.

Ist $(m = l_0, \pi_0, l_1, \dots, \pi_k = \pi)$ ein Pfad minimaler Länge zwischen m und π , so gibt es ein j , so dass $\pi_{j+1} \in \mathfrak{F}_7$ und $\pi_j \notin \mathfrak{F}_7$ ist. Da H_π transitiv auf $\mathfrak{L}(\pi)$ ist, folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.2.6 Sei $J \leq SL(3, 5)$ mit $J \cong S_4$. Dann gilt:

(a) J bzw. J' besitzt 5 Punktbahnen auf $PG(2, 5)$:

Bahn	\mathfrak{D}	Ex_1	Ex_2	Inn_1	Inn_2
Anzahl Punkte	6	3	12	4	6
Stabilisator eines Punktes in J :	Z_4	D_4	Z_2	S_3	$Z_2 \times Z_2$
Stabilisator eines Punktes in J' :	Z_2	V_4	1	Z_3	Z_2

(b) J bzw. J' besitzt 5 Geradenbahnen auf $PG(2, 5)$:

Bahn	\mathfrak{T}	Sek_1	Sek_2	Pas_1	Pas_2
Anzahl Geraden	6	3	12	4	6
Stabilisator einer Geraden in J :	Z_4	D_4	Z_2	S_3	$Z_2 \times Z_2$
Stabilisator einer Geraden in J' :	Z_2	V_4	1	Z_3	Z_2

(c) Die folgende Tabelle gibt an, zu wievielen Geraden/Punkten aus jeder Bahn ein Punkt/eine Gerade inzident ist:

	\mathfrak{T}	Sek_1	Sek_2	Pas_1	Pas_2
\mathfrak{D}	1/1	1/2	4/2	0/0	0/0
Ex_1	2/1	2/2	0/0	0/0	2/1
Ex_2	2/4	0/0	2/2	1/3	1/2
Inn_1	0/0	0/0	3/1	0/0	3/2
Inn_2	0/0	1/2	2/1	2/3	1/1

(Z. B. bedeutet der erste Eintrag in der zweiten Zeile, dass durch einen Punkt aus Ex_1 genau zwei Geraden aus \mathfrak{T} gehen und eine Gerade aus \mathfrak{T} genau einen Punkt aus Ex_1 enthält.)

Beweis: Im folgenden sei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die kanonische Basis von \mathbb{F}_5^3 . Sei $S_4 \cong J \leq SL(3, 5)$. Dann besitzt J einen Normalteiler $A \cong V_4$. Wir können annehmen, dass $A = \langle \text{diag}(1, -1, -1), \text{diag}(-1, -1, 1) \rangle$ ist. Der Normalisator von A in $SL(3, 5)$ besitzt genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen isomorph zu S_3 (die Normalisatoren einer 3-Sylowgruppe). Somit kann oBdA angenommen werden, dass J die Gruppe aller monomialen Matrizen mit Determinante 1 und Einträgen 1 und -1 ist.

J lässt also die quadratische Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ und damit ein Oval \mathfrak{D} in $PG(2, 5)$ fest. Der Stabilisator von \mathfrak{D} in $SL(3, 5)$ ist isomorph zu S_5 und operiert dreifach transitiv auf \mathfrak{D} . Folglich operieren J und J' transitiv auf \mathfrak{D} . Sei $Ex_1 = \{\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, \langle e_3 \rangle\}$. Diese Punkte sind äußere Punkte mit $J_{\langle e_i \rangle} \cong D_4$. Der Punkt $P = \langle e_1 + e_2 + 2e_3 \rangle$ ist ein weiterer äußerer Punkt mit $|J_P| = 2$ und $|J'_P| = 1$. Damit haben wir eine zweite Bahn von äußeren Punkten der Länge

12 gefunden. Diese Bahn bezeichnen wir mit Ex_2 . Sei $Inn_1 = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle^J$ und $Inn_2 = \langle e_1 + e_2 \rangle^J$. Dann sind alle Punkte in $Inn_1 \cup Inn_2$ innere Punkte. Für $P \in Inn_1$ gilt $J_P \cong S_3$ und $J'_P \cong Z_3$. Für $P \in Inn_2$ ist J_P eine in S_4 zu $\langle (12), (34) \rangle$ konjugierte Untergruppe und J'_P zyklisch der Ordnung 2. Da J eine Polarität von $PG(2, 5)$ zentralisiert, erhalten wir dazu dual die Aussagen über die Geradenbahnen. Die Beziehungen in Teil (c) lassen sich dann einfach nachrechnen. \square

Wir haben also insgesamt 16 H -Bahnen von Paaren (q, π) mit $qI\pi$ und $\pi \in \bigcup_{i=4}^7 \mathfrak{F}_i$.

Lemma 3.2.7 *Ist $q \in \Gamma_2(p)$, so besitzt H_q genau drei Bahnen von Ebenen π mit $qI\pi$. Im ersten Fall ist $\pi \in \mathfrak{F}_3$, im zweiten $\pi \in \mathfrak{F}_5$ und $q \in \mathfrak{D}(\pi)$, im dritten $\pi \in \mathfrak{F}_7$ und $q \in Inn_1(\pi)$.*

Beweis: Sei χ der Permutationscharakter von G_q auf $\mathfrak{F}(q)$ (also auf den Punkten von $\mathbb{H}(5)$) und π eine Ebene durch q . Dann ist $|(G_q)_\pi/G_q \backslash H_q| = \langle \chi, 1_{H_q}^{G_q} \rangle = \langle \chi_{H_q}, 1_{H_q} \rangle = 3$. Damit folgt die erste Behauptung.

Es gibt genau eine Bahn, deren Elemente in \mathfrak{F}_3 sind. In dieser Bahn sind genau 378 Ebenen. Mit Blick auf Lemma 3.2.6 haben die übrigen Bahnen Länge 3024, 2016, 1512, 1008 oder 756. Die einzige Möglichkeit, dass zwei dieser Zahlen zusammen $3906 - 378 = 3528$ ergeben, ist 2016 und 1512. Da es in $\bigcup_{i \neq 4} \mathfrak{F}_i$ keine Gerade geben kann, die nur aus Punkten aus Γ_2 besteht, müssen die Punkte aus Inn_1 in einer Ebene aus \mathfrak{F}_7 Punkte aus Γ_2 sein.

Nun sei $r \in \Gamma(p) \cap \Gamma(q)$. Dann existieren genau 30 Punkte $s \in \Gamma(p) \cap \Gamma(q)$, so dass $d(qs, qr) = 4$ in Δ_q gilt (Lemma 3.1.2 und Satz 3.1.3). Ist π eine zu qr inzidente Ebene, l die Gerade in π , die alle Punkte aus $\Gamma_2(p) \cap \pi$ enthält, so operiert $G_{l,p} \cong GL(2, 5)$ transitiv auf den Ebenen durch l (Lemma 3.2.4). Auf jeder Ebene außer π gibt es genau einen Punkt $s \in \Gamma(p)$. Diese Punkte sind alle von verschieden, also erhalten wir auf diese Art $6 \cdot 5 = 30$ verschiedene Punkte $s \in \Gamma(p) \cap \Gamma(q)$ mit $d(qr, qs) = 4$.

Sei m eine von qr und l verschiedene Gerade in π durch q . Wird $J := G_{p,q,m,\pi}$ gesetzt, so ist J isomorph zu Z_4 , und J besitzt genau eine weitere Fixebene π' durch m . Angenommen, π' enthalte einen Punkt s aus $\Gamma(p)$. Dann haben qr und qs Abstand 4 in Δ_q , ein Widerspruch, denn dann müsste $\pi \cap \pi'$ entweder l oder q sein.

π' kann deshalb keine \mathfrak{F}_3 -Ebene sein, folglich haben wir $G_{p,q,\pi'} \cong Z_4$. Damit ist π' eine \mathfrak{F}_5 -Ebene und $q \in \mathfrak{D}(\pi')$. \square

Lemma 3.2.8 *Ist $q \in \Gamma_4(p)$, so besitzt H_q jeweils genau zehn Bahnen auf $\mathfrak{L}(q)$ und $\mathfrak{F}(q)$.*

Beweis: Berechnet man aus der Charaktertafel von $G_{pq} \cong 3 : PGL(2, 7)$. \square

Satz 3.2.9

- (a) *Ist $\pi \in \mathfrak{F}_4$, so sind alle Punkte aus π in Γ_4 .*
- (b) *Ist $\pi \in \mathfrak{F}_5$, so sind die Punkte aus \mathfrak{D} in Γ_2 , die Punkte aus $Ex_1 \cup Inn_2$ in Γ_3 , die Punkte aus $Ex_2 \cup Inn_1$ in Γ_4 .*
- (c) *Ist $\pi \in \mathfrak{F}_6$, so sind die Punkte aus $Ex_1 \cup Ex_2 \cup Inn_2$ in Γ_4 und die Punkte aus $\mathfrak{D} \cup Inn_1$ in Γ_3 .*
- (d) *Ist $\pi \in \mathfrak{F}_7$, so sind die Punkte aus Inn_1 in Γ_2 , die Punkte aus Inn_2 in Γ_3 und die Punkte aus $Ex_1 \cup Ex_2 \cup \mathfrak{D}$ in Γ_4 .*

Beweis: Sei $q \in \Gamma_4$ und $r \in \Gamma(p) \cap \Gamma(q)$. Setzt man $K := H_{q,r}$, so haben wir $|N_{H_q}(K) : K| = 2$, also existiert genau ein weiterer K -invarianter Punkt in $\Gamma(p) \cap \Gamma(q)$. Dann gibt es genau 6 Ebenen π in Δ_q mit $d(\pi, qr) = d(\pi, qs) = 3$, die von K transitiv permutiert werden. Da es ein Element in H_q gibt, welches r und s vertauscht, haben wir $8 \mid |H_{q,\pi}|$ für eine solche Ebene π . Eine derartige Ebene kann keinen zu p kollinearen Punkt enthalten, also muss sie in $\bigcup_{i=5}^6 \mathfrak{F}_i$ sein. Ist ferner $l = proj_{\pi} qr$, so enthält l genau einen Punkt $a \in \Gamma_3$. Für diesen Punkt gilt $H_{q,\pi,l} = H_{q,\pi,a} = 4$. Folglich ist π eine \mathfrak{F}_6 -Ebene, $q \in Ex_1(\pi)$, $a \in \mathfrak{D}(\pi)$ und $l \in \mathfrak{L}(\pi)$.

Sei nun $q \in \Gamma_3$. Wir haben also eine H_q -Bahn von Ebenen in Δ_q in \mathfrak{F}_6 mit Länge $2880 : 4 = 720$. Außerdem haben wir in $\mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3$ genau 186 Ebenen von Δ_q . Aus den Lemmata 3.2.7 und 3.2.8 folgt, dass es noch genau vier weitere Bahnen in \mathfrak{F}_4 bis \mathfrak{F}_7 gibt. Die möglichen Bahnlängen sind 360, 480, 720, 960, 1440 und 2880. Wegen $3000 \equiv 8 \pmod{16}$ muss eine Bahnlänge 360 sein. Also sind in Ex_1 -Punkte in einer Ebene aus \mathfrak{F}_5 ebenfalls aus Γ_3 . $1440 + 720 + 480 = 2640$ ist die einzige Möglichkeit ist, 2640 als Summe von drei der obigen Zahlen zu schreiben, ohne 960 mehrfach zu verwenden. Daraus folgt sofort, dass alle Punkte auf einer Ebenen in \mathfrak{F}_4 sowie die Ex_2 -Punkte einer Ebenen aus \mathfrak{F}_7 Punkte aus Γ_4 sind.

Sei $\pi \in \mathfrak{F}_3$ und l eine Gerade in π , die genau einen Punkt q aus Γ_2 und genau einen Punkt r aus Γ_3 enthält. Dann ist $K = H_{\pi,l} = 4$. K lässt dann noch genau eine weitere mit l inzidierende Ebene fest, die dann aus \mathfrak{F}_5 sein muss. Also sind die Ex_2 -Punkte in einer solchen Ebene Γ_4 -Punkte. Die übrigen vier Ebenen durch l müssen dann in \mathfrak{F}_7 liegen. Sei π'' eine solche Ebene.

Da l genau einen Punkt aus $Inn_1(\pi'') \subset \Gamma_2(p)$ enthält, muss l eine Gerade aus $Sek_2(\pi'')$ sein. Das bedeutet, dass die Punkte in $\mathfrak{D}(\pi'')$ Punkte aus Γ_4 und die Punkte aus $Inn_2(\pi'')$ Punkte aus Γ_3 sind. Wir können daraus auch folgern, dass die Ex_2 -Punkte in einer \mathfrak{F}_6 -Ebene aus Γ_4 sind.

Sei nun $\pi \in \mathfrak{F}_4$. Dann ist $\mathfrak{P}(\pi) \subset \Gamma_4$ und $H_\pi \cong 31 : 3$ operiert jeweils transitiv auf $\mathfrak{P}(\pi)$ und $\mathfrak{L}(\pi)$. Ist $l \in \mathfrak{L}(\pi)$ und $K = H_l$, so ist $K_\pi = H_{\pi,l} = Z_3$, also ist $|K| < 18$ wegen 3.2.5. Da jede Involution in G_l , die von einem Element der Ordnung 3 zentralisiert wird, in $G_{(l)}$ enthalten ist, kann H_l kein Element der Ordnung 6 enthalten. Ferner kann 5 kein Teiler von $|K|$ sein, denn sonst gäbe es einen Punkt $q \in \mathfrak{P}(l)$ mit $5 \mid |K_q|$, ein Widerspruch zu $q \in \Gamma_4$.

Wäre $|K| = 3$, so müsste l eine Pas_1 -Gerade oder eine Sek_2 -Gerade in einer Ebene in \mathfrak{F}_7 sein. Dann wäre l jedoch mit einem Punkt aus Γ_2 oder Γ_3 inzident, ein Widerspruch. Angenommen, es ist $|K| = 9$. Dann gibt es eine Ebene $\pi' \in \mathfrak{F}_7$ mit $l \in Pas_1(\pi')$, ein Widerspruch, da l keine Punkte aus Γ_3 enthält.

Angenommen, es ist $K \cong A_4$. Dann gibt es aber zwei mit l inzidente Ebenen π_1 und π_2 , für die $H_{l,\pi_1} = H_{l,\pi_2} = K$ gelten würde, ein Widerspruch.

Wir sehen also, dass K die Ordnung 6 und damit $K \cong S_3$ gelten muss. Es gibt also eine Ebene in Δ_l mit $K_\pi = S_3$, zwei Ebenen mit $K_\pi = 3$ und drei Ebenen mit $K_\pi = 2$. l inzidiert also mit einer Ebene aus \mathfrak{F}_5 oder \mathfrak{F}_6 und ist dort eine Pas_1 -Gerade, mit zwei Ebenen aus \mathfrak{F}_4 und mit drei Ebenen aus \mathfrak{F}_7 und ist dort eine \mathfrak{Z} -Gerade. Es folgt, dass die Ex_1 -Punkte in einer \mathfrak{F}_7 -Gerade Punkte aus Γ_4 sind.

Sei π eine \mathfrak{F}_7 -Ebene und l eine Pas_1 -Gerade in π . Dann enthält l jeweils drei Punkte aus Γ_3 und Γ_4 . $H_{\pi,l}$ operiert jeweils transitiv auf diese Punkte. Sei $K = H_l$. Dann ist $3 \leq |K| \leq 18$. Ähnlich wie oben sieht man, dass K kein Element der Ordnung 5 oder 6 enthalten darf und nicht isomorph zu A_4 ist. Da in einer \mathfrak{F}_7 -Ebene nur Pas_1 -Geraden die Punkteverteilung $3 \Gamma_3, 3 \Gamma_4$ besitzen und H transitiv auf $\{(\pi, m); \pi \in \mathfrak{F}_7, m \in Pas_1(\pi)\}$ operiert, sind alle mit l inzidenten \mathfrak{F}_7 -Ebenen unter K konjugiert. Daher kann K nicht Ordnung 3 oder 9 besitzen. $|K|$ kann auch nicht 18 sein, da eine Involution in K dann fixpunktfrei auf $\mathfrak{F}(\pi)$ operieren würde; eine Involution in G_l hat jedoch mindestens zwei Fixebenen. Es folgt, dass $K \cong S_3$ ist. Ist $\pi \in \mathfrak{F}(l)$ mit $K_\pi = 2$, so muss $\pi \in \mathfrak{F}_6$ und $l \in Sek_2(\pi)$ sein. Daher sind entweder die Inn_1 -Punkte oder die Inn_2 -Punkte in π aus Γ_3 . Also haben wir noch zwei Möglichkeiten:

- (I) In einer Ebene aus \mathfrak{F}_5 sind die Inn_1 -Punkte aus Γ_3 und die Inn_2 -Punkte aus Γ_4 . In einer Ebene aus \mathfrak{F}_6 sind die Inn_1 -Punkte aus Γ_4 und die Inn_2 -Punkte aus Γ_3 .

- (II) In einer Ebene aus \mathfrak{F}_5 sind die Inn_1 -Punkte aus Γ_4 und die Inn_2 -Punkte aus Γ_3 . In einer Ebene aus \mathfrak{F}_6 sind die Inn_1 -Punkte aus Γ_3 und die Inn_2 -Punkte aus Γ_4 .

Angenommen, der erste Fall liegt vor. Sei l eine Sek_1 -Gerade in einer Ebene aus \mathfrak{F}_5 und $K = H_l$. Dann enthält l je zwei Punkte aus Γ_2, Γ_3 und Γ_4 . Daran sieht man, dass jede Ebene π , die l enthält, eine \mathfrak{F}_5 -Ebene sein muss und l eine Sek_1 -Gerade in π ist. Da H transitiv auf der Menge der Paare (π, m) mit $\pi \in \mathfrak{F}_5$ und m Sek_1 -Gerade in π wirkt, muss K transitiv auf den Ebenen in Δ_l operieren. Also gilt $|K| = 6 \cdot 8 = 48$. Da aber K drei verschiedene Bahnen von Punkten in Δ_l mit Bahnlänge zwei besitzt, lässt ein Element der Ordnung 3 in K alle Punkte in Δ_l fest, ein Widerspruch. Also muss Fall (II) vorliegen. \square

Satz 3.2.10 G_p hat folgende Bahnen auf \mathfrak{L} :

Bahn	Charakterisierung	Punkte	Ebenen	G_{pl}
\mathfrak{L}_1		$p, 5 \Gamma$	$6 \mathfrak{F}_1$	$5^{1+4} : GL(2, 5)$
\mathfrak{L}_2		6Γ	$1 \mathfrak{F}_1, 5 \mathfrak{F}_2$	$5^4 : (4 \times 4)$
\mathfrak{L}_3		$1 \Gamma, 5 \Gamma_3$	$1 \mathfrak{F}_2, 5 \mathfrak{F}_3$	$5^2 : (4 \times 4)$
\mathfrak{L}_4		$5 \Gamma_2, 1 \Gamma_3$	$6 \mathfrak{F}_3$	$GL(2, 5)$
\mathfrak{L}_5		$1 \Gamma, 1 \Gamma_2, 4 \Gamma_4$	$6 \mathfrak{F}_3$	$4 \cdot S_4$
\mathfrak{L}_6	$\mathfrak{T} \in \mathfrak{F}_6$	$1 \Gamma_3, 5 \Gamma_4$	$1 \mathfrak{F}_3, 5 \mathfrak{F}_6$	$5 : 4$
\mathfrak{L}_7	\mathfrak{T} in \mathfrak{F}_5, Sek_2 in \mathfrak{F}_7	$1 \Gamma_2, 1 \Gamma_3, 4 \Gamma_4$	$1 \mathfrak{F}_3, 1 \mathfrak{F}_5, 4 \mathfrak{F}_7$	4
\mathfrak{L}_8	Pas_1 in $\mathfrak{F}_6, \mathfrak{T}$ in \mathfrak{F}_7	$6 \Gamma_4(3, 3)$	$2 \mathfrak{F}_4, 1 \mathfrak{F}_6, 3 \mathfrak{F}_7$	S_3
\mathfrak{L}_9	Sek_1 in \mathfrak{F}_5	$2 \Gamma_2, 4 \Gamma_3$	$6 \mathfrak{F}_5$	$GL(2, 3)$
\mathfrak{L}_{10}	Sek_2 in \mathfrak{F}_5, Pas_2 in \mathfrak{F}_7	$2 \Gamma_2, 1 \Gamma_3, 3 \Gamma_4$	$3 \mathfrak{F}_5, 3 \mathfrak{F}_7$	S_3
L_{11}	Pas_1 in \mathfrak{F}_5 und \mathfrak{F}_7, Sek_2 in \mathfrak{F}_6	$3 \Gamma_3, 3 \Gamma_4$	$1 \mathfrak{F}_5, 3 \mathfrak{F}_6, 2 \mathfrak{F}_7$	S_3
\mathfrak{L}_{12}	Pas_2 in \mathfrak{F}_5, Sek_1 in \mathfrak{F}_6	$2 \Gamma_3, 4 \Gamma_4$	$4 \mathfrak{F}_5, 2 \mathfrak{F}_6$	$Z_8 : Z_2$
\mathfrak{L}_{13}	Pas_2 in \mathfrak{F}_6, Sek_1 in \mathfrak{F}_7	$2 \Gamma_3, 4 \Gamma_4(3, 1)$	$3 \mathfrak{F}_6, 3 \mathfrak{F}_7$	D_6

Beweis: Aus Satz 3.2.9 bzw. dem Beweis dieses Satzes wissen wir, dass jeweils genau eine Bahn von Geraden mit folgender Punktverteilung gibt:

- (i) $1 \Gamma_2, 1 \Gamma_3, 4 \Gamma_4$
- (ii) $3 \Gamma_3, 3 \Gamma_4$
- (iii) $6 \Gamma_4$.

Daraus lässt sich auch die Struktur des Stabilisators berechnen. Ferner gibt es jeweils nur eine Bahn von Geraden mit Punktverteilung $1 \Gamma_3, 5 \Gamma_4$ und $2\Gamma_2, 4 \Gamma_3$. Im zweiten Fall ist damit $|H_l| = 6 \cdot |H_{l,\pi}|$ für alle $\pi \in \mathfrak{F}(l)$, womit

wir den Stabilisator bestimmen können.

Sei $l \in \text{Sek}_2(\mathfrak{F}_5)$. Dann besitzt l zwei Punkte aus Γ_2 , einen Punkt aus Γ_3 und drei Punkte aus Γ_4 . Angenommen, alle Ebenen in $\mathfrak{F}(l)$ sind aus \mathfrak{F}_5 . Dann ist $|H_l| = 12$. Wegen $H_{(l)} = 1$ kann H_l kein Element der Ordnung 6 enthalten, also muss $H_l \cong A_4$ sein. Aber H_l operiert transitiv auf den beiden Γ_2 -Punkten, ein Widerspruch. Daher muss es in $\mathfrak{P}(l)$ auch eine Ebene $\pi \in \mathfrak{F}_7$ geben und es ist dann $l \in \text{Pas}_2(\pi)$. Es folgt, dass $H_l \cong S_3$ ist.

Folgende Geraden besitzen genau zwei Punkte aus Γ_3 und vier Punkte aus Γ_4 : $\text{Pas}_2(\mathfrak{F}_5)$, $\text{Sek}_1(\mathfrak{F}_6)$, $\text{Pas}_2(\mathfrak{F}_6)$ und $\text{Sek}_1(\mathfrak{F}_7)$. Für $\pi \in \mathfrak{F}_6$ und $l \in \text{Sek}_1(\pi)$ ist $H_{\pi,l} \cong D_4$ und $H_\pi^l \cong V_4$. In den übrigen Fällen ist $H_{\pi,l} \cong V_4$ und $H_\pi^l \cong Z_2$. Sei $l \in \text{Pas}_2(\mathfrak{F}_6) \cup \text{Sek}_1(\mathfrak{F}_7)$. Angenommen, es ist H_l transitiv auf $\mathfrak{F}(l)$. Dann ist $|H_l| = 24$ und $|H^l| = 12$. Da H^l transitiv auf den beiden Γ_3 -Punkten in $\mathfrak{P}(l)$ operiert, gibt es einen Normalteiler mit Index 2 und damit eine normale Untergruppe der Ordnung 3. Es folgt, dass $H^l \cong D_6$ ist. Dann muss H^l aber ein Element enthalten, das bezüglich der Wirkung auf $\mathfrak{P}(l)$ eine Transposition ist. Das Quadrat eines solchen Elements ist aber ein Element in $G_{(l)}$, das durch 4 teilbare Ordnung besitzt, ein Widerspruch zu $H_{(l)} = 2$.

Angenommen, $\text{Sek}_1(\mathfrak{F}_7)$ und $\text{Pas}_2(\mathfrak{F}_6)$ lägen in verschiedenen H -Bahnen. Dann bildet eine dieser beiden Geradenmengen mit $\text{Pas}_2(\mathfrak{F}_5)$ eine gemeinsame Bahn. Für $l \in \text{Pas}_2(\mathfrak{F}_5)$ muss dann $|H_l| = 4 \cdot 3 = 12$ sein, also operiert H_l^l als S_3 auf den vier Γ_4 -Punkten von l . Dies ist jedoch ein Widerspruch, denn ist π' eine \mathfrak{F}_5 -Ebene in $\mathfrak{F}(l)$, so lässt $H_{l,\pi'}$ keinen Γ_4 -Punkt in l fest.

Wir haben damit insgesamt drei verschiedene Möglichkeiten für H -Bahnen auf den Geraden mit vier Γ_4 - und zwei Γ_3 -Punkten:

- (i) $\text{Sek}_1(\mathfrak{F}_7) \cup \text{Pas}_2(\mathfrak{F}_6), \text{Sek}_1(\mathfrak{F}_6) \cup \text{Pas}_2(\mathfrak{F}_5)$.
- (ii) $\text{Sek}_1(\mathfrak{F}_7) \cup \text{Pas}_2(\mathfrak{F}_5) \cup \text{Pas}_2(\mathfrak{F}_6), \text{Sek}_1(\mathfrak{F}_6)$.
- (iii) $\text{Sek}_1(\mathfrak{F}_7) \cup \text{Pas}_2(\mathfrak{F}_6), \text{Sek}_1(\mathfrak{F}_6), \text{Pas}_2(\mathfrak{F}_5)$.

Sei $q \in \Gamma_4(p)$. Angenommen, Fall (iii) liegt vor. Ist $l \in \text{Sek}_2(\mathfrak{F}_7) \cup \text{Pas}_2(\mathfrak{F}_6)$, so muss $H^l = S_3$ gelten, also hat H_l zwei Bahnen von Γ_4 -Punkten. Auf diese Art sieht man, dass H_q mindestens elf Bahnen auf $\mathfrak{L}(q)$ besitzt, ein Widerspruch zu Lemma 3.2.8. Angenommen, der Fall (ii) liegt vor. Sei $l \in \text{Sek}_1(\mathfrak{F}_7) \cup \text{Pas}_2(\mathfrak{F}_6) \cup \text{Pas}_2(\mathfrak{F}_5)$. Dann ist $|H_l| = 8$ und $|H^l| = 4$. Angenommen, es gibt ein Element $a \in H_l$ mit $o(a) = 4$. Weil H_l Bahnen der Länge zwei in $\mathfrak{F}(l)$ besitzt, muss $a^2 \in H_{(l)}$ sein. Ferner besitzt a keinen Fixpunkt in $\mathfrak{F}(l)$, entspricht also dem Produkt von drei disjunkten Transpositionen. Dies ist aber ein Widerspruch, denn ist $Z = Z(O_5(G_l))$, so muss a in diesem Fall einen Automorphismus der Ordnung 4 auf Z induzieren, also kann a^2

keine Involution in $G_{(l)}$ sein. Es folgt, dass H_l elementar-abelsch der Ordnung 8 sein muss. Dies ist jedoch ebenfalls unmöglich, denn G_l enthält keine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung 8. Also muss Fall (i) vorliegen. Damit erhalten also genau dreizehn Bahnen. Es fehlen noch die Stabilisatoren einer Gerade aus \mathfrak{L}_{12} und \mathfrak{L}_{13} .

Ist $l \in \mathfrak{L}_{12}$, so ist also $|H_l| = 16$ und $|H_{(l)}| = 2$. H^l ist eine Untergruppe der Ordnung 8 in S_6 , die keine Transposition und kein Element vom Typ $(2, 2, 2)$ enthalten darf, weil sonst ein Element der Ordnung 4 in $H_{(l)}$ wäre. Ferner kann ein H^l keinen 4-Zykel enthalten, da ein solches Element eine Ebene in $\mathfrak{F}(l)$ festlassen müsste. Daraus kann gefolgert werden, dass H^l eine Untergruppe von A_6 ist. Es folgt, dass H_l ein Element der Ordnung 8 enthält. Da H_l eine V_4 enthält, muss diese Erweiterung zerfallen. (Der genaue Isomorphietyp lässt sich nicht so leicht bestimmen, ist aber nicht weiter von Belang.)

Ist $l \in \mathfrak{L}_{13}$, so ist $|H_l| = 12$. H_l besitzt einen Normalteiler der Ordnung 2 und eine elementar-abelsche 2-Sylowgruppe. Ist t eine Involution in $H_l \setminus H_{(l)}$ und $s \in H_l$ ein Element der Ordnung 3, so können s und t nicht kommutieren. Folglich muss $H_l \cong D_6$ gelten. \square

Mithilfe von 3.2.10 können wir angeben, zu wievielen Punkten aus welcher Bahn jeder Punkt aus \mathfrak{P} kollinear ist. Diese Tabelle steht auch in [K1], dort allerdings ohne Beweis.

	p	Γ	Γ_2	Γ_3	Γ_4
p		19530			
Γ	1	154	3125	3750	12500
Γ_2		63	2520	4599	12348
Γ_3		36	2190	4544	12720
Γ_4		42	1056	4452	12978

Ein Punkt aus Γ_2 ist z.B. zu 63 Punkten aus Γ , 2520 Punkten aus Γ_2 , 4544 Punkten aus Γ_3 und 12398 Punkten aus Γ_4 kollinear.

3.3 Der Beweis für die Eindeutigkeit

Satz 3.3.1 *Sei $\vartheta : \Delta^* \rightarrow \Delta$ eine Überlagerung mit Δ^* zusammenhängend. Angenommen, für jedes Apartment Σ von Δ und für jede Zusammenhangskomponente Σ^* von $\vartheta^{-1}(\Sigma)$ induziert ϑ einen Isomorphismus von Σ^* nach Σ . Dann ist ϑ ein Isomorphismus.*

Beweis: Da $\varphi : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ die universelle Überlagerung von Δ ist, existiert eine Überlagerung $\zeta : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta^*$ mit $\vartheta \circ \zeta = \varphi$. Sei $\Pi = \text{Aut}_{\tilde{\Delta}} \varphi \cong \pi_1(\Delta)$ und $\Pi_0 = \text{Aut}_{\tilde{\Delta}} \zeta \cong \pi_1(\Delta^*)$. Dann ist $\Pi_0 \leq \Pi$, $\Delta \cong \tilde{\Delta}/\Pi$ und $\Delta^* \cong \tilde{\Delta}/\Pi_0$. Sei Σ ein Apartment in Δ , $\tilde{\Sigma}$ ein Apartment in $\tilde{\Delta}$ mit $\varphi(\tilde{\Sigma}) = \Sigma$ und $\Sigma^* := \zeta(\tilde{\Sigma})$. Dann ist $\Pi_{\tilde{\Sigma}} \leq \Pi_0$, denn für $v \in \tilde{\Sigma}$ und $g \in \Pi_{\tilde{\Sigma}}$ sind $\zeta(v), \zeta(v^g) \in \Sigma^*$ und $\vartheta \circ \zeta(v) = \varphi(v) = \varphi(v^g) = \vartheta \circ \zeta(v^g)$, folglich $\zeta(v^g) = \zeta(v)$ und $g \in \Pi_0$. Daher reicht es aus, dass wir zeigen, dass $\Pi = \langle \Pi_{\tilde{\Sigma}}^g; g \in \tilde{G} \rangle$ gilt. Wir dürfen annehmen, dass $\Pi_0 = \langle \Pi_{\tilde{\Sigma}}^g; g \in \tilde{G} \rangle$ ist. Wegen Π_0 normal in Π ist ϑ eine normale Überlagerung mit $\text{Aut}_{\tilde{\Delta}} \vartheta = \Pi/\Pi_0 =: B$. Da Π_0 auch in \tilde{G} normal ist, haben wir, dass $G^* = \text{Aut}_{\tilde{\Delta}} \Delta^* = \tilde{G}/\Pi_0$ transitiv auf $\text{Cham} \Delta^*$ operiert.

Sei Γ^* der Punktgraph von Δ^* und $\Lambda^* := \text{Cl}(\Gamma^*)$. Dann induziert ϑ eine Überlagerung von Λ^* nach Λ , die wir ebenfalls mit ϑ bezeichnen. Wir zeigen, dass diese Überlagerung ein Isomorphismus ist. Sei $x \in \mathfrak{P}$ und $x^* \in \vartheta^{-1}(x)$. Setze $E_o = \{(y, z); y, z \in \mathfrak{P}, z \text{ und } y \text{ kollinear}\}$. Wir wählen uns für alle $y \in \mathfrak{P}$ ein $y^* \in \vartheta^{-1}(y)$, so dass $d(x^*, y^*) = d(x, y)$ gilt. Wir erhalten also ein $\mu \in Z^1(\Lambda, B)$ mit $(y^*)^{\mu(y, z)} \sim z^*$ für alle $(y, z) \in E_o$. Nach Konstruktion gilt $\mu(x, y) = 1$ für alle $y \in \Gamma(x)$. Ist $d(x, z) = 2$, so existiert nach Konstruktion ein $y_0 \in \Gamma(x) \cap \Gamma(z)$ mit $\mu(y_0, z) = 1$.

Wir benötigen zum Beweis einige Lemmata.

Lemma 3.3.2 *Sei $z \in \Gamma_2(x) \cup \Gamma_3(x)$. Dann gilt $\mu(y, z) = 1$ für alle $y \in \Gamma(x) \cap \Gamma(z)$.*

Beweis: Es existiert ein $y_0 \in \Gamma(x) \cap \Gamma(z)$ mit $\mu(y_0, z) = 1$. Angenommen, x, z, y und y_0 liegen in einem gemeinsamen Apartment A . Dann kann der geschlossene Pfad $\gamma = (x, y_0, z, y, x)$ in A zu einem geschlossenen Pfad mit Anfang und Ende in x^* geliftet werden. Dieser Pfad ist aber gerade der Pfad $(x^*, (y_0^*)^{\mu(y_0, x)} = (y_0^*), (z^*)^{\mu(z, y_0)} = z^*, (y^*)^{\mu(y, z)}, (x^*)^{\mu(x, y)\mu(y, z)} = (x^*)^{\mu(z, y)})$. Es folgt in diesem Fall also $\mu(y, z) = 1$. Angenommen, y und y_0 sind kollinear. Dann ist $\mu(y_0, z) = \mu(y_0, y)\mu(y, z) = \mu(y_0, x)\mu(x, y)\mu(y, z) = 1$. Da es nach 3.1.1 und 3.1.2 immer eine Kette $y_0, y_1, \dots, y_n = y$ von Elementen in $\Gamma(x) \cap \Gamma(z)$ gibt, so dass x, y_i, z, y_{i+1} in einem gemeinsamen Apartment liegen oder y_i, y_{i+1} kollinear sind, folgt die Behauptung. \square

Da G transitiv auf Γ und G^* transitiv Γ^* operieren, folgt unmittelbar:

Lemma 3.3.3 *Sind $y, z \in \mathfrak{P}$ mit $z \in \Gamma_2(y) \cup \Gamma_3(y)$, so existiert genau ein $z^+ \in \vartheta^{-1}(z)$ mit $d(y^*, z^+) = 2$. Ist $w \in \Gamma(y) \cap \Gamma(z)$, so ist $z^+ = (z^*)^{\mu(z,w)\mu(w,y)}$.*

Lemma 3.3.4 *Sei $z \in \Gamma_4(x)$ und $y \in \Gamma(x) \cap \Gamma(z)$. Dann ist $\mu(y, z) = 1$.*

Beweis: Sei wieder $y_0 \in \Gamma(x) \cap \Gamma(z)$ mit $\mu(y_0, z) = 1$. Angenommen, es ist $y \in \Gamma_2(y_0)$. Dann haben wir $y^+ = (y^*)^{\mu(y,x)\mu(x,y_0)} = y^*$ und $y^+ = (y^*)^{\mu(y,z)\mu(z,y_0)} = (y^*)^{\mu(y,z)}$. Es folgt hier also $\mu(y, z) = 1$. Im allgemeinen Fall gibt es immer eine Kette $y_0, y_1, \dots, y_n = y$ von Elementen aus $\Gamma(x) \cap \Gamma(z)$ (siehe Satz 3.1.3), so dass $y_{i+1} \in \Gamma_2(y_i)$ ist. Mit Induktion folgt die Behauptung. \square

Die Gruppen G_x und G_{x^*} sind in natürlicher Weise isomorph. Wir werden sie im folgenden identifizieren und können daher G_x als Untergruppe von G^* auffassen.

Lemma 3.3.5 *Für alle $g \in G_x$ und alle $y, z \in \mathfrak{P}$ mit $y \sim z$ gilt $\mu(y^g, z^g) = \mu(y, z)^g$.*

Beweis: Wir haben für alle $y \in \mathfrak{P}$ gezeigt, dass y^* das einzige Element in $\vartheta^{-1}(y)$ ist, so dass $d(x^*, y^*) = d(x, y)$ gilt. Für $g \in G_x$ folgt daher $d(x^*, y^*) = d((x^*)^g, (y^*)^g) = d(x^*, (y^*)^g)$ und $d(x, y^g) = d(x^*, (y^g)^*)$, also gilt wegen $(y^*)^g \in \vartheta^{-1}(y^g)$ daher $(y^*)^g = (y^g)^*$. Für $(y, z) \in E_0$ haben wir $(y^*)^{\mu(y,z)} \sim z^*$, also $(y^*)^{\mu(y,z)^g} \sim (z^*)^g$ und damit $((y^g)^*)^{\mu(y,z)^g} \sim (z^g)^*$. Somit folgt die Behauptung. \square

Ende des Beweises von 3.3.1: Sei $\pi \in \mathfrak{F}$. Wir führen eine Relation \perp auf $\mathfrak{P}(\pi)$ ein, wobei $y \perp z$ genau dann gelten soll, wenn $\mu(y, z) = 1$ gilt. Wegen 3.3.5 ist \perp eine $G_{x,\pi}$ -invariante Relation und wegen $\mu(y, z) = \mu(z, y)^{-1}$ und $\mu(y, z)\mu(z, w) = \mu(y, w)$ für alle $y, z, w \in \mathfrak{P}(\pi)$ ist \perp eine Äquivalenzrelation. Ist $\pi \in \bigcup_{i=1}^3 \mathfrak{F}_i$, so gibt es einen zu x kollinearen Punkt y in π , also ist nach 3.3.2 und 3.3.4 $y \perp z$ für alle $z \in \mathfrak{P}(\pi)$. Damit ist \perp in diesem Fall die Allrelation.

Sei $\pi \in \mathfrak{F}_5 \cup \mathfrak{F}_6$, $y \in Ex_2(\pi)$ und t_1, t_2 die beiden \mathfrak{T} -Geraden durch y in π . Ist $y_i It_i$ für $i = 1, 2$, so liegen y_i und y jeweils in einer \mathfrak{F}_3 -Ebene, also gilt $y \perp y_i$ und damit $y_1 \perp y_2$. Die Äquivalenzklasse von y enthält damit zwei Punkte aus Ex_1 . Da $G_{x,\pi}$ primitiv auf diesen Punkten operiert, enthält sie also alle Ex_1 -Punkte. Folglich ist sie $G_{x,\pi}$ -invariant und enthält daher alle Punkte aus $\mathfrak{D}(\pi)$, $Ex_1(\pi)$ und $Ex_2(\pi)$.

Sei π eine \mathfrak{F}_7 -Ebene, $y \in \mathfrak{D}(\pi)$ und l_1, l_2 zwei verschiedene Sek_2 -Geraden

durch y in π . Ist wieder $y_i Il_i$, so liegen y und y_i in einer \mathfrak{F}_3 -Ebene, also ist $y \perp y_i$ und damit $y_1 \perp y_2$. Die Äquivalenzklasse von y enthält also zwei Punkte aus $Inn_1(\pi)$ und damit wiederum alle Punkte aus $Inn_1(\pi)$. Daher ist sie $G_{x,\pi}$ -invariant und enthält alle Punkte aus $\mathfrak{D}(\pi)$, $Inn_1(\pi)$, $Inn_2(\pi)$ und $Ex_2(\pi)$.

Sei π nun eine \mathfrak{F}_4 -Ebene und l eine Gerade in π . Dann gibt es eine \mathfrak{F}_7 -Ebene π' , so dass $l \in \mathfrak{T}(\pi')$ gilt. Somit gibt es zwei Punkte y, z auf l , für die $y \perp z$ gilt (in π' und damit in π). Da $G_{x,\pi}$ primitiv auf $\mathfrak{P}(\pi)$ operiert, können wir $y \perp z$ für alle $y, z \in \mathfrak{P}(\pi)$ folgern.

Seien π eine \mathfrak{F}_7 -Ebene, $t \in \mathfrak{T}(\pi)$, $y \in Ex_1(\pi) \cap \mathfrak{P}(t)$ und $z \in \mathfrak{D}(\pi) \cap \mathfrak{P}(t)$. Dann liegt t in einer \mathfrak{F}_4 -Ebene, also gilt $y \perp z$. Damit haben wir dann, dass \perp die Allrelation auf π ist.

Sei π nun wieder eine \mathfrak{F}_5 -Ebene und $l \in Sek_2(\pi)$. Dann gibt es eine \mathfrak{F}_7 -Ebene π' , so dass $l \in Pas_2(\pi')$ ist. Deshalb ist $y \perp z$ für alle $y, z Il$. Da l mit Punkten aus $\mathfrak{D}(\pi)$, $Ex_2(\pi)$, $Inn_1(\pi)$ und $Inn_2(\pi)$ inzidiert, muss \perp die Allrelation auf π sein.

Sei π jetzt eine \mathfrak{F}_6 -Ebene und l eine Sek_2 -Gerade in π . Dann ist l eine Pas_1 -Gerade in einer \mathfrak{F}_7 -Ebene π' , also gilt $y \perp z$ für alle $y, z Il$. Auf l liegen Punkte aus $\mathfrak{D}(\pi)$, $Ex_2(\pi)$, $Inn_1(\pi)$ und $Inn_2(\pi)$, also ist \perp die Allrelation auf π .

Wir haben damit $\mu(y, z) = 1$ für alle $(y, z) \in E_o$ gezeigt. Da Δ^* zusammenhängend ist, ist ϑ ein Isomorphismus nach 1.2.11(e). \square

Mithilfe dieses Satzes können wir nun zeigen, dass je zwei Gruppen vom Typ Ly isomorph sind. Im folgenden sei $x \in \mathfrak{P}$, x' ein zu x kollinearere Punkt, Σ ein Apartment, welches x und x' enthält. Seien $G_1 = G_x$, $G_2 = G_{x,x'} \cong 5^{1+4} : (4 \cdot S_4.2)$ und $G_3 = G_\Sigma$. Für $i \neq j$ sei $G_{ij} = G_i \cap G_j$ und $G_{123} = G_1 \cap G_2 \cap G_3$. Sei \mathfrak{A} das Amalgam aus $G_1, G_2, G_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}$ und G_{123} , wobei alle Homomorphismen durch die Inklusionen gegeben sind. (Die genauen Isomorphietypen von G_2 und G_3 sowie ihren Untergruppen sind bekannt: Wir wissen, wie $G_2 = 5^{1+4} : (4 \cdot S_4.2)$ in einer Gruppe vom Typ $5^{1+4} : (4 \cdot S_6)$ enthalten ist. Damit ist die Operation der $4.S_4.2$ auf $O_5(G_2)$ bestimmt. Im Fall $G_3 = (4 \times 4).(S_4 \times S_3)$ kennen wir die Operation der $S_4 \times S_3$ auf der $Z_4 \times Z_4$ und wissen, dass eine Untergruppe vom Typ $(Z_4 \times Z_4).(D_4 \times S_3)$ in einer $2 \cdot A_{11}$ enthalten ist; dadurch sieht man etwa mit 17.2 und 17.4 in [H], dass die Erweiterung bestimmt ist). Sei \hat{G} die universelle Kompletzierung von \mathfrak{A} . Da G eine treue Kompletzierung von \mathfrak{A} ist, ist auch \hat{G} treu. Wir können daher G_1, G_2 und G_3 als Untergruppen von \hat{G} auffassen.

Nach der Definition der universellen Kompletzierung existiert ein Homomorphismus $\xi : \hat{G} \rightarrow G$, so dass $\xi|_{G_i}$ für $i = 1, 2, 3$ ein Isomorphismus ist. Setze $B = Ker(\xi)$. Sei t eine Involution in G_{23} , so dass $G_2 = G_{12}\langle t \rangle$ gilt.

Wir definieren den Graphen $\hat{\Gamma}$ wie folgt: Die Eckenmenge $\hat{\mathfrak{P}}$ von $\hat{\Gamma}$ besteht aus

den Elementen aus G_1/\hat{G} , die Kanten die Paare $\{G_1g, G_1thg\}$ mit $g \in \hat{G}$ und $h \in G_1$. Analog bilden wir den Graphen $\hat{\Sigma}$ mit Eckenmenge $\{G_1g; g \in G_3\}$ und Kantenmenge $\{G_1g, G_1thg; h \in G_{13}, g \in G_3\}$. Dann ist $\hat{\Sigma}$ ein voller Untergraph von $\hat{\Gamma}$. Sei $\zeta : \hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ mit $\zeta(G_1g) = x^{\xi(g)}$. Wir haben $\hat{G} \leq \text{Aut}\hat{\Gamma}$ mit $\zeta(v^g) = \zeta(v)^{\xi(g)}$ für $g \in \hat{G}$ und $v \in \hat{\mathfrak{P}}$.

Lemma 3.3.6

- (a) Für alle $g \in \hat{G}$ wird $\hat{\Sigma}^{\xi(g)}$ isomorph auf $\Sigma^{\xi(g)}$ abgebildet.
- (b) ζ induziert eine Überlagerung von $Cl(\hat{\Gamma})$ nach $Cl(\Gamma)$.

Beweis:

- (a) Sowohl Σ als auch $\hat{\Sigma}$ können mit dem Graph identifiziert werden, dessen Ecken die Nebenklassen von G_{13} in G_3 sind, wobei $G_{13}g \sim G_{13}thg$ für $h \in G_{13}$ und $g \in G_3$ gilt. Damit ist klar, dass $\zeta(\hat{\Sigma}) = \Sigma$ ist und dass $\zeta|_{\hat{\Sigma}}$ ein Isomorphismus ist. Für $g \in \hat{G}$ ist $\zeta(\hat{\Sigma}^g) = \Sigma^{\xi(g)}$. Somit folgt die Behauptung.

- (b) Es ist klar, dass ζ ein surjektiver Morphismus von $\hat{\Gamma}$ nach Γ ist. Ist $\{G_1g, G_1thg\}$ mit $g \in \hat{G}$ und $h \in G_1$ eine Kante in $\hat{\Gamma}$ und $\hat{g} \in \xi^{-1}(g)$, so ist $G_1\hat{g}th$ das einzige Element in $\zeta^{-1}(G_1thg)$, das mit $G_1\hat{g}$ eine Kante bildet. Somit ist ζ eine Überlagerung von $\hat{\Gamma}$ nach Γ .

Sei $\hat{x} \in \zeta^{-1}(x) \cap \hat{\Sigma}$ und seien $\hat{y}, \hat{z} \in \Gamma_{\hat{x}}$, so dass $y = \zeta(\hat{y}) \sim \zeta(\hat{z}) = z$ gilt. Angenommen, x, y, z liegen nicht auf einer gemeinsamen Gerade in Δ . Dann existiert ein $g \in \hat{G}$, so dass $x, y, z \in \Sigma^g$ gilt. Da alle Apartments, die x enthalten, unter G_1 konjugiert sind, können wir $g \in G_1$ wählen. Da ζ eine Überlagerung von $\hat{\Gamma}$ nach Γ ist, gibt es für y und z jeweils genau ein Urbild in $\hat{y} \in \zeta^{-1}(y)$ und $\hat{z} \in \zeta^{-1}(z)$, welches mit \hat{x} eine Kante bildet. Da ζ einen Isomorphismus von $\hat{\Sigma}^g$ nach Σ^g induziert, sind \hat{y} und \hat{z} in $\hat{\Sigma}^g$. Da y und z in Σ^g benachbart sind, müssen auch \hat{y} und \hat{z} benachbart sein.

Da \hat{G} transitiv auf $\hat{\mathfrak{P}}$ operiert und weil $\zeta(v^g) = \zeta(v)^{\xi(g)}$ für alle $v \in \hat{\mathfrak{P}}$ und $g \in \hat{G}$ gilt, haben wir also gezeigt: Sind w, y, z paarweise benachbarte Punkte in Γ , die auf keiner gemeinsamen Gerade in Δ liegen, und ist $\hat{w} \in \zeta^{-1}(w), \hat{y} \in \zeta^{-1}(y)$ und $\hat{z} \in \zeta^{-1}(z)$ mit $\hat{w} \sim \hat{y}$ und $\hat{w} \sim \hat{z}$, so gilt auch $\hat{y} \sim \hat{z}$.

Nehmen wir nun an, dass x, y, z auf einer gemeinsamen Geraden in Δ liegen. Sei π eine Ebene durch xy und w ein Punkt in π , der nicht auf xy liegt. Sei \hat{w} der einzige Punkt in $\zeta^{-1}(w) \cap \hat{\Gamma}_{\hat{x}}$. Da x, y, w und x, z, w jeweils nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen, folgt $\hat{w} \sim \hat{y}$ und $\hat{w} \sim \hat{z}$. Da y, z, w nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen, können

wir also auch $\hat{y} \sim \hat{z}$ folgern. Daraus folgt, dass $\zeta : Cl(\hat{\Gamma}) \rightarrow Cl(\Gamma)$ eine Überlagerung ist. \square

Satz 3.3.7 ζ ist ein Isomorphismus.

Beweis: Wir definieren die Geometrie $\hat{\Delta}$ wie folgt: Punkte sind die Ecken aus $\hat{\Gamma}$, Ebenen sind die maximalen Cliques in $\hat{\Gamma}$ (diese müssen 31 Punkte besitzen, da $\zeta : Cl(\hat{\Gamma}) \rightarrow Cl(\Gamma)$ eine Überlagerung ist), Geraden sind die sechselementigen Cliques, die in genau sechs maximalen Cliques enthalten sind. Damit induziert ζ eine Überlagerung von $\hat{\Delta}$ nach Δ . Nach Satz 3.3.1 und 3.3.6 (a) muss ζ daher ein Isomorphismus sein. \square

Wir haben damit $|\hat{G}| = |G_1| |\hat{\mathfrak{P}}| = |G_1| |\mathfrak{P}| = |G|$, also folgt unmittelbar

Korollar 3.3.8 $\hat{G} \cong G$.

Damit haben wir gezeigt:

Korollar 3.3.9 Je zwei Gruppen vom Typ Ly sind isomorph.

Beweis: Ist G eine Gruppe vom Typ Ly , so ist G als universelle Komplettierung des Amalgams \mathfrak{A} eindeutig bestimmt. \square

Von nun bezeichnen wir die bis auf Isomorphie einzige Gruppe vom Typ Ly als die Lyonsgruppe (kurz Ly). Mit \widetilde{Ly} meinen wir die Automorphismengruppe von $\hat{\Delta}$, also die Erweiterung der Lyonsgruppe mit der Fundamentalgruppe von Δ .

3.4 Ein Wurzelsystem für die Lyonsgruppe

Eine Chevalley-Gruppe $G(\mathbb{K})$ definiert über einem Körper \mathbb{K} wird von einem System von *Wurzelgruppen* erzeugt, das sind nilpotente Untergruppen (oft isomorph zu $(\mathbb{K}, +)$), so dass für zwei Wurzelgruppe U und V eine der folgenden drei Möglichkeiten gilt.

- (i) $[U, V] = 1$
- (ii) $\langle U, V \rangle$ ist nilpotent, und die aufsteigende Zentralreihe von $\langle U, V \rangle$ wird durch andere Wurzelgruppen beschrieben.
- (iii) $\langle U, V \rangle$ ist eine zweifach transitive Permutationsgruppe (etwa $SL(2, \mathbb{K})$) und U und V haben jeweils einen Fixpunkt und operieren scharf-transitiv auf den anderen Punkten. Die beiden Fixpunkte sind dabei verschieden.

Im Fall (iii) sagen wir, dass U und V *gegenüberliegend* sind. Die Kommutatorrelationen der Wurzelgruppen geben eine Präsentation von $G(\mathbb{K})$, das bedeutet, jede Gruppe mit diesen Relationen ist ein epimorphes Bild von $G(\mathbb{K})$.

In [MN] erkannten Meyer und Neutsch, dass für die Lyonsgruppe eine ähnliche Situation vorliegt. Die Geometrie Δ liefert ein System von Untergruppen, die alle isomorph zu $(\mathbb{F}_5, +)$, die die Lyonsgruppe erzeugen und die sich so ähnlich verhalten wie die Wurzelgruppen einer Chevalley-Gruppe. Die Autoren vermuteten, dass die Kommutatorrelationen dieser Gruppen zu einer Präsentation der Lyonsgruppe führen, konnten diese Vermutung aber nicht beweisen. Mithilfe der Charakterisierung der Geometrie Δ durch ihre Apartments können wir diese Vermutung nun beweisen. Wir verwenden allerdings eine etwas verschiedene Beschreibung des "Wurzelsystems" der Lyonsgruppe, die wir für geeigneter halten.

Wir geben kurz ein Wurzelsystem für die Chevalley-Gruppe $G_2(5)$ an: Sei $A = (\pi_1, l_1, \dots, \pi_6, l_6)$ ein geordnetes Apartment in $\mathbb{H}(5)$ mit π_i Punkt und l_i Gerade. A enthält dann die Wurzeln $\alpha_i := (\pi_{i-1}, l_{i-1}, \dots, l_{i+1}, \pi_{i+2})$ und $\beta_i := (l_{i-2}, \pi_{i-1}, \dots, \pi_{i+1}, l_{i+1})$ mit $i = 1, \dots, 6$, wobei alle Indizes modulo 6 gelesen werden. Seien nun $U_i := U_{\alpha_i}, V_i := U_{\beta_i}$ die dazugehörigen Wurzelgruppen. Dann sind U_i, V_i isomorph zu Z_5 und wir können Erzeuger x_i von U_i, y_i von V_i so wählen, dass folgende Kommutatorrelationen gelten:

$$\begin{aligned} [x_i, x_{i+1}] &= [x_i, y_i] = [x_i, y_{i+1}] = [y_i, x_{i+1}] = [x_i, y_{i+2}] = 1 \\ [x_{2i+1}, x_{2i+3}] &= x_{2i+2}^2 \\ [x_{2i}, x_{2i+2}] &= x_{2i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[y_{2i+1}, y_{2i+2}] &= x_{2i+1}^3 \\
[y_{2i}, y_{2i+1}] &= x_{2i}^4 \\
[y_{2i+1}, y_{2i+3}] &= x_{2i+1} y_{2i+2} x_{2i+2}^2 \\
[y_{2i}, y_{2i+2}] &= x_{2i}^2 y_{2i+1}^4 x_{2i+1} \\
[y_{2i+1}, x_{2i+3}] &= x_{2i+1}^3 y_{2i+2}^2 x_{2i+2}^4 y_{2i+3} \\
[y_{2i}, x_{2i+2}] &= x_{2i}^2 y_{2i+1} x_{2i+i}^3 y_{2i+2}^2 \\
[x_{2i+1}, y_{2i+4}] &= y_{2i+2} x_{2i+2}^4 y_{2i+3}^2 x_{2i+3}^2 \cdot \\
[x_{2i}, y_{2i+3}] &= y_{2i+1}^2 x_{2i+1}^3 y_{2i+2} x_{2i+2}^3 \cdot
\end{aligned}$$

Für alle i ist $\langle x_{i+1}, x_{i+2} \rangle$ eine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung 5^2 und $\langle x_i, x_{i+3} \rangle$ operiert treu als $SL(2, 5)$ auf dieser Gruppe. $\langle U_i, V_{i+1}, U_{i+1}, V_{i+2}, U_{i+2} \rangle$ ist eine extraspezielle Gruppe der Ordnung 5^5 mit Zentrum U_{i+1} und $\langle y_i, y_{i+3} \rangle$ operiert treu auf der zentralen Faktorgruppe und induziert darauf eine $SL(2, 5)$. Wir nennen diese Bedingungen die *Chevalley-Relationen für $G_2(5)$* .

Diese Relationen unterscheiden sich leicht von denen, wie sie in der Literatur, etwa in [C] üblicherweise angegeben werden. Sie haben aber daher den Vorteil, dass die Exponenten bezüglich "Verschiebungen" invariant sind, was wir für das Wurzelsystem der Lyonsgruppe später benötigen werden.

Die zwölf 7×7 -Matrizen über \mathbb{F}_5 in [MN] erfüllen gerade diese Bedingungen (mit $x_i = L_{3^{i-1}}$ und $y_i = K_{3^{i+3}}$), und nicht die Kommutatorrelationen, die an dieser Stelle angegeben sind.

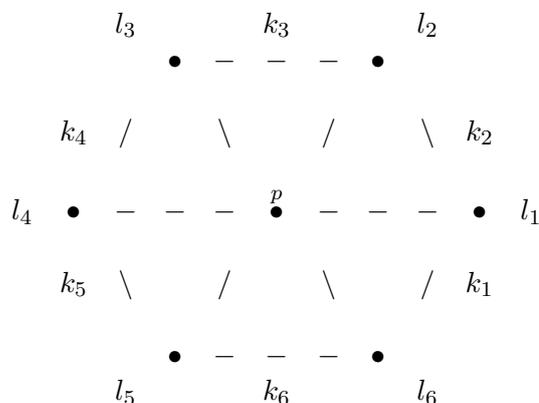
Wir nennen die U_i *lange Wurzeln* und die V_i die *kurzen Wurzeln*. Als Abstand zweier Wurzeln definieren wir den Abstand der Anfangselemente der Wurzeln.

Satz 3.4.1 *Sei H die Gruppe mit Erzeugern x_i, y_i ($i = 1, \dots, 6$) und den Chevalley-Relationen für $G_2(5)$ als Relationen. Dann ist $H \cong G_2(5)$.*

Beweis: Das folgt aus einem Satz von Steinberg (siehe 12.1.1 in [C]). \square

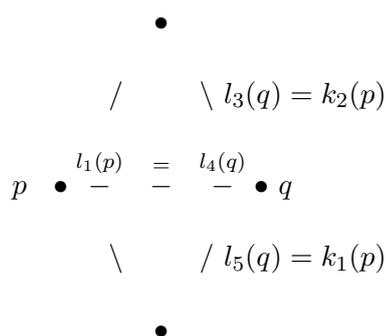
Jetzt sei Σ ein Apartment in Δ . Für jede Gerade $l \in \Sigma$ sei $U_l = Z(O_5(Ly_l))$. Für einen Punkt p in Σ gibt es genau 6 Geraden l_1, \dots, l_6 mit $p \in U_{l_i}$ und 6 Geraden k_1, \dots, k_6 , so dass p und k_i in einer eindeutig bestimmten Ebene π_i liegen (siehe Abbildung). Wir bezeichnen die l_i als lange Wurzeln bezüglich

p und die k_i als kurze Wurzeln bezüglich p .



Wir wählen unsere Indizierung dabei wie folgt: Sei X die Fitting-Untergruppe von $\text{Aut}\Sigma \cong S_4 \times S_3$. Dann ist $X \cong V_4 \times A_3$ und X operiert scharf-transitiv auf die Menge der Punkte in Σ . Wir wählen uns einen beliebigen Punkt $p \in \Sigma$ fest und indizieren die Wurzeln um p wie oben. Ist q ein anderer Punkt, so gibt es genau ein $t \in X$, dass p auf q abbildet. Wir definieren dann $l_i(q) := l_i(p)^t$ und $k_i(q) := k_i(p)^t$.

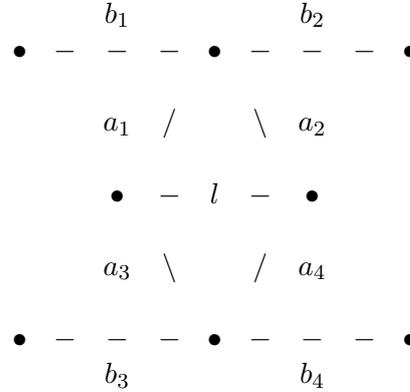
Wir können nun Elemente x_l^p aus U_l wählen, so dass für $x_i := x_{l_i}^p$ und $y_i = x_{k_i}^p$ die Chevalley-Relationen für $G_2(5)$ erfüllt sind. Man beachte, dass ein Paar langer Wurzeln mit Abstand 4 bezüglich eines Punktes auch ein Paar kurzer Wurzeln mit Abstand 2 bezüglich eines anderen Punktes ist (siehe Abbildung).



Es ist $[x_3, x_5] = x_4^2$ und $[y_2, y_1] = x_1^2$. Für die anderen Fälle passen die Exponenten ebenso. Wir können daher $x_l := x_l^p$ immer unabhängig vom Mittelpunkt p wählen.

Als nächstes betrachten wir eine Gerade l . In der folgenden Abbildung sind

alle Geraden m eingezeichnet, so dass $[U_l, U_m] = 1$ ist.



U_l und die U_{a_i} erzeugen eine extraspezielle Gruppe der Ordnung 5^5 mit Zentrum U_l . Sei M die zentrale Faktorgruppe dieser Gruppe. Wir erhalten eine treue Darstellung von $H := \langle U_{b_i}; i = 1, 2, 3, 4 \rangle$ in $GL(M)$. Bezüglich der geordneten Basis $\mathfrak{b} := (x_{a_1}, x_{a_2}, x_{a_4}, x_{a_3})$ von M sehen die Matrizen zu den von $x_{b_1}, x_{b_2}, x_{b_3}$ und x_{b_4} induzierten linearen Abbildungen wie folgt aus:

$$x_{b_1}^{\mathfrak{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, x_{b_2}^{\mathfrak{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x_{b_3}^{\mathfrak{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$x_{b_4}^{\mathfrak{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese vier Matrizen erzeugen eine Gruppe isomorph zu $SL(2, 9)$ (\star). Mit den Ergebnissen des vorherigen Kapitels können wir nun eine Präsentation der Lyonsgruppe. Dieses Ergebnis ist eine Variation von Vermutung 1 in [MN].

Satz 3.4.2 *Sei Ω die Gruppe mit Erzeugenden $\{x_l; l \in \mathfrak{L}(\Sigma)\}$ und folgenden Relationen:*

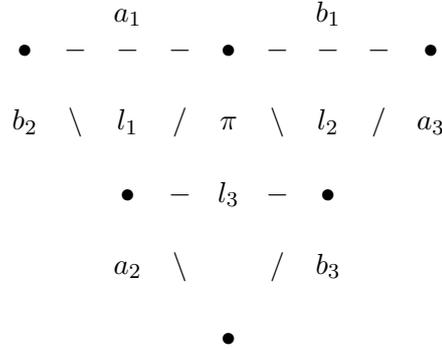
- (a) *Für jeden Punkt p in Σ gelten die Chevalley-Relationen für $G_2(5)$.*
- (b) *Für jede Gerade l in Σ gilt die Bedingung (\star).*

Dann ist $\Omega \cong Ly$.

Beweis: Da es in Ly Elemente gibt, die die Relationen (a) und (b) erfüllen und die Gruppe erzeugen, existiert ein Epimorphismus $\zeta : \Omega \rightarrow Ly$.

Wir zeigen zunächst, dass es einen Epimorphismus $\psi : \widetilde{Ly} \rightarrow \Omega$ gibt, so dass $\zeta \circ \psi$ der kanonische Epimorphismus von \widetilde{Ly} nach Ly ist. Im folgenden sei $U_l := \langle x_l \rangle \leq \Omega$. Für einen Punkt p in Σ sei $\Omega(p)$ die von allen Wurzelgruppen um p erzeugte Gruppe. Dann ist nach Voraussetzung $\Omega(p) \cong G_2(5)$. Für eine Gerade l sei $\Omega_0(l)$ die Gruppe, die von allen Wurzelgruppen U_m mit $[U_l, U_m] = 1$ erzeugt wird. Es ist also dann $\Omega_0(l) \cong 5^{1+4} : SL(2, 9)$.

Ist π eine Ebene und seien l_1, l_2 und l_3 die drei mit π inzidenten Ebenen in Σ , so kommutieren die dazugehörigen Wurzelgruppen U_{l_i} paarweise. Wir setzen $E(\pi) := \langle x_{l_1}, x_{l_2}, x_{l_3} \rangle$. Dann ist $E(\pi)$ elementarabelsch der Ordnung 5^3 und das folgende Diagramm zeigt alle Wurzelgruppen, die $E(\pi)$ normalisieren.



Modulo $E(\pi)$ ist dann für i, j, k paarweise verschieden $[U_{a_i}, U_{b_j}] = 1$, $[U_{a_i}, U_{a_j}] = U_{b_k}$ und $[U_{b_i}, U_{b_j}] = U_{a_k}$. Außerdem ist $\langle a_i, b_i \rangle \cong SL(2, 5)$. Damit bilden die U_{a_i} und U_{b_i} ein Wurzelsystem für $SL(3, 5)$, also folgt wieder aus [C], 12.1.1, dass $\langle E(\pi), U_{a_i}, U_{b_i}; i = 1, 2, 3 \rangle / E(\pi) \cong SL(3, 5)$ ist und $\Omega(\pi) := \langle E(\pi), U_{a_i}, U_{b_i}; i = 1, 2, 3 \rangle$ eine Erweiterung von $E(\pi)$ mit einer $SL(3, 5)$ ist. Der genaue Typ der Erweiterung ist ebenfalls bestimmt, da wir Erzeugende und Relationen von $\Omega(\pi)$ kennen. So kann man leicht erkennen, dass eine 5-Sylowgruppe von $\Omega(\pi)$ Nilpotenzklasse 5 besitzt und diese Erweiterung daher nicht zerfällt.

Für zwei gegenüberliegende Geraden l, l' sei $T_{l,l'} = N_{\langle U_l, U_{l'} \rangle}(U_l) \cap N_{\langle U_l, U_{l'} \rangle}(U_{l'})$. Wegen $\langle U_l, U_{l'} \rangle \cong SL(2, 5)$ ist $T_{l,l'}$ zyklisch der Ordnung 4. Für einen Punkt/eine Gerade/eine Ebene $x \in \Sigma$ sei $T(x)$ die von allen $T_{l,l'}$ erzeugte Untergruppe, wobei $U_l, U_{l'}$ zu den Erzeugerwurzelgruppen von $\Omega(x)$ bzw. $\Omega_0(x)$ gehören. Dann normalisiert $T(x)$ alle Erzeugerwurzelgruppen von $\Omega(x)$ bzw. $\Omega_0(x)$, und es ist $T(x)$ isomorph zu $Z_4 \times Z_4$, falls x ein Punkt oder eine Ebene ist, und $T(x) = Z_4$, falls x eine Gerade ist. In diesem Fall ist $T(x) = T_{b_1, b_2} = T_{b_3, b_4} = T_{b_1, b_3} = T_{b_2, b_4}$. Damit kann erkennen, dass $T(p) = T(\pi)$ für

einen Punkt p und eine mit p inzidente Ebene π ist. Mit Induktion sieht man daher, dass $T := T(p)$ unabhängig von p ist und alle Wurzelgruppen U_l normalisiert.

Für eine Gerade l sei $\Omega(l) := \langle \Omega_0(l), T \rangle$. Da $\Omega_0(l)$ von T normalisiert wird, sieht man, dass $\Omega(l) \cong 5^{1+4} : (4 \cdot S_6)$ ist.

Sei $\{p, l, \pi\}$ eine maximale Fahne in Σ mit p Punkt, l Gerade, π Ebene. Dann ist $\Omega(p) \cap \Omega(l) = 5^{1+4} : GL(2, 5)$, $\Omega(p) \cap \Omega(\pi) = 5^{2+1+2} : GL(2, 5)$, $\Omega(l) \cap \Omega(\pi) = 5^{1+2+2} : GL(2, 5)$ und $\Omega(p) \cap \Omega(l) \cap \Omega(\pi) = 5^6 : T$ (Dies erkennen wir daran, weil einerseits die jeweiligen Wurzelgruppen und T in den Schnitten enthalten sind, andererseits, weil diese Untergruppen jeweils maximal sind). Man sieht leicht, dass Ω von $\Omega(p)$, $\Omega(l)$ und $\Omega(\pi)$ erzeugt ist. Somit gibt es einen Epimorphismus $\psi : \widetilde{Ly} \rightarrow \Omega$, der auf $G_2(5)$, $5^{1+4} : (4 \cdot S_6)$ und $5^3 \cdot SL(3, 5)$ die Identität induziert. Da ψ auf $\Omega(p)$, $\Omega(l)$ und $\Omega(\pi)$ ebenfalls einen Isomorphismus induziert, ist $\zeta \circ \psi$ der kanonische Epimorphismus von \widetilde{Ly} nach Ly . Der Rest ist einfach: Wir bilden die Restklassengeometrie Δ_Ω aus den Untergruppen $\Omega(p)$, $\Omega(l)$, $\Omega(\pi)$. Δ_Ω ist dann eine normale Überlagerung von Δ und wird andererseits von $\widetilde{\Delta}$ überlagert. Man sieht aber leicht, dass man Σ nach Δ_Ω einbetten kann. Damit ist ζ nach 3.3.1 ein Isomorphismus. \square

Wenn wir in unserer Definition anstelle von Σ den Coxeter-Komplex vom Typ \widetilde{G}_2 nehmen, erhalten wir eine Präsentation von \widetilde{Ly} . Wie sieht es aber aus, wenn wir andere Überlagerungen von Σ nehmen? Es ist nicht gewährleistet, dass wir echte Erweiterungen von Ly erhalten.

Eine andere mögliche Verallgemeinerung wäre die folgendende: Für jede Gerade L in Σ (oder in einer Überlagerung von Σ) nehmen wir eine Gruppe U_L isomorph zur additiven Gruppe eines Körpers \mathbb{K} und verlangen, dass die Wurzelgruppen um einen Punkt den Chevalley-Relationen genügen und für jede Gerade l die Gruppe, die von den vier äußeren, mit U_l kommutierenden Wurzelgruppen U_{b_1}, \dots, U_{b_4} erzeugt wird, treu auf der zentralen Faktorgruppe der von den vier inneren Wurzelgruppen U_{a_1}, \dots, U_{a_4} erzeugten Gruppe operiert. Es wäre interessant, welche Gruppen durch diese Relationen erzeugt werden. Im Fall $\text{char}\mathbb{K} = 3$ sieht man leicht, dass diese Gruppen trivial sind, da in diesem Fall zwei kurze Wurzeln mit Abstand 2 kommutieren, zwei lange Wurzeln mit Abstand 4 aber nicht.

Kapitel 4

Das Verallgemeinerte Polygon



4.1 Reguläre Sektoren

Im folgenden sei \mathfrak{B} ein affines Gebäude, $\varphi : \mathfrak{B} \rightarrow \overline{\mathfrak{B}}$ eine Überlagerung mit $\overline{\mathfrak{B}}$ endlich, $G = \text{Aut}(\mathfrak{B}, \varphi)$, $L = \text{Aut}\mathfrak{B}_\varphi$, $\overline{G} = G/L = \text{Aut}\overline{\mathfrak{B}}$ und \mathfrak{S} eine Parallelenklasse von Sektoren in \mathfrak{B}^∞ . Wir definieren $\varphi(\mathfrak{S}) := \{c \in \text{Cham}(\overline{\mathfrak{B}}); c \in \varphi(S) \text{ für alle } S \in \mathfrak{S}\}$.

Proposition 4.1.1 *Es gibt einen Sektor $S \in \mathfrak{S}$ mit $\text{Cham}\varphi(S) = \varphi(\mathfrak{S})$. Insbesondere ist $\varphi(\mathfrak{S}) \neq \emptyset$.*

Beweis: Sei $c \in \text{Cham}(\overline{\mathfrak{B}}) \setminus \varphi(\mathfrak{S})$. Dann gibt es einen Sektor $S_c \in \mathfrak{S}$ mit $c \notin \text{Cham}\varphi(S_c)$. Setze $S_0 = \bigcap_{c \in \text{Cham}(\overline{\mathfrak{B}}) \setminus \varphi(\mathfrak{S})} S_c$. Da $\overline{\mathfrak{B}}$ endlich ist, ist S_0 ein Schnitt von endlich vielen Sektoren. Damit enthält S_0 einen Sektor S . Es ist dann $S \in \mathfrak{S}$ mit $\text{Cham}\varphi(S) = \varphi(\mathfrak{S})$. \square

Lemma 4.1.2 *Sei Σ ein φ -reguläres Apartment in \mathfrak{B} , S ein Sektor in Σ und $\mathfrak{S} = S^\infty$. Dann ist $\varphi(S) = \varphi(\mathfrak{S}) = \varphi(\Sigma)$, Σ ist das einzige reguläre Apartment, das einen zu S parallelen Sektor enthält, und es gilt $G_{\mathfrak{S}} = G_{\mathfrak{S}, \Sigma}$.*

Beweis: Sei $W = \text{Aut}\Sigma$ die zu \mathfrak{B} gehörige Coxeter-Gruppe und Λ die Untergruppe der Translationen in W . Wir können dann L_Σ als Untergruppe von W auffassen. Ferner sei $\overline{\Sigma} := \varphi(\Sigma)$. Da Σ regulär ist, induziert φ eine Überlagerung von Σ nach $\overline{\Sigma}$. Folglich hat L_Σ endlichen Index in W . Damit hat auch $\Lambda \cap L_\Sigma$ endlichen Index in Λ ; somit sehen wir, dass $\bigcup_{\alpha \in L_\Sigma} S^\alpha$ ganz Σ sein muss. Wir folgern $\varphi(\Sigma) = \varphi(S)$. Da dasselbe auch für jeden Teilsektor von S gilt, erhalten wir $\text{Cham}\varphi(\Sigma) = \varphi(\mathfrak{S})$. Ist S' ein zu S paralleler Sektor und Σ' ein reguläres Apartment mit $S' \in \Sigma'$, so ist $\varphi(\Sigma') = \varphi(S) = \overline{\Sigma}$. Aber

dann gilt nach 1.8.6 entweder $\Sigma = \Sigma'$ oder $\Sigma \cap \Sigma' = \emptyset$. $S \cap S'$ enthält aber einen Sektor, der sowohl in Σ als auch in Σ' enthalten ist. Also ist $\Sigma = \Sigma'$. Damit folgt die Behauptung. \square

Das folgende Lemma werden wir später noch benötigen:

Lemma 4.1.3 *Sei B ein Baum ohne Endpunkte. Operiert $x \in \text{Aut} B$ fixpunktfrei auf V und lässt x einen Endpunkt \mathfrak{e} in B^∞ fest, so lässt x genau einen weiteren Endpunkt in B^∞ invariant.*

Beweis: Sei $E = (v_0, v_1, v_2, \dots)$ ein Halbapartment in B mit $E^\infty = \mathfrak{e}$. Wegen $(E^x)^\infty = \mathfrak{e} = E^\infty$ haben E und E^x ein Halbapartment gemeinsam. Es gibt daher $i, j \in \mathbb{N}$, so dass $v_i^x = v_j$ ist. Dann ist auch $v_{i+k}^x = v_{j+k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $v_j = v_i^x \neq v_i$ ist, können wir annehmen, dass $i < j$ ist (sonst ersetze x durch x^{-1}). Ist $E_0 = (v_i, v_{i+1}, \dots)$, so ist $E_0^x \subset E_0$. Entsprechend haben wir $E_0^{x^k} \subset E_0^{x^l}$ für $k > l$. Setze $A := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_0^{x^n}$. Dann ist A ein unter x invariantes Apartment mit $\mathfrak{e} \in A^\infty$. A enthält noch genau einen weiteren Endpunkt \mathfrak{e}' , der von x festgelassen wird. x kann aber keinen dritten Endpunkt festlassen, da drei Endpunkte eine eindeutige Kreuzung (franz. *carrefour*) definieren (siehe [Ro2], Chap. 10, Example 2). \square

4.2 Elationen und Homologien in $\text{Aut} \tilde{\Delta}^\infty$

Wir betrachten nun wir das affine Gebäude $\tilde{\Delta}$, welches die universelle Kompletterung der Geometrie Δ der Lyonsgruppe Ly ist, und das zugehörige sphärische Gebäude im Unendlichen, das verallgemeinerte Hexagon $\tilde{\Delta}^\infty$. Die Punkte, Geraden und Ebenen von $\tilde{\Delta}$ bezeichnen wir mit $\tilde{\mathfrak{P}}$, $\tilde{\mathfrak{L}}$ und $\tilde{\mathfrak{E}}$. Wir haben eine natürliche Wirkung von \tilde{Ly} auf dem verallgemeinerten Hexagon $\tilde{\Delta}^\infty$, welche mit der in 1.7.4 beschriebenen Topologie auf $\tilde{\Delta}^\infty$ verträglich ist. Mit $\text{Aut}(\tilde{\Delta}^\infty)_{\text{top}}$ bezeichnen wir die Gruppe aller topologischen Automorphismen von $\tilde{\Delta}^\infty$.

Wir erinnern an dieser Stelle an zwei Begriffe: Ist Ψ ein verallgemeinertes n -Gon für ein $n \geq 2$, so heißt ein Element $g \in \text{Aut} \Psi$ eine *Elation*, falls es eine Wurzel α gibt, so dass $g \in U_\alpha$ ist. $g \in \text{Aut} \Psi$ heißt eine *Homologie*, falls es $x, y \in \Psi$ gibt, so dass $d(x, y) = n$ ist und $g \in \text{Aut} \Psi_{(x)} \cap \text{Aut} \Psi_{(y)}$ ist. Ist n gerade, so sind x, y entweder beides Punkte oder beides Geraden; je nachdem heißt dann g eine Punkt- oder Geradenhomologie.

Lemma 4.2.1 *Ist $x \in \tilde{Ly}$ ein 5-Element, so ist $\text{Fix}_{\tilde{\Delta}}(x)$ endlich.*

Beweis: Sei \bar{x} das Bild von x in Ly . Dann kann man leicht sehen, dass φ eine Überlagerung von $\text{Fix}_{\tilde{\Delta}}(x)$ nach $\text{Fix}_{\Delta}(\bar{x})$ induziert. Aus dem Beweis von 3.2.2

(i) folgt, dass $\text{Fix}_\Delta(\bar{x})$ einfach-zusammenhängend ist. Sind $a, b \in \text{Fix}_{\tilde{\Delta}}(x)$, so folgt $[a, b] \in \text{Fix}_{|\tilde{\Delta}|}(x)$, wobei mit $[a, b]$ die Geodäsische zwischen a und b gemeint ist, siehe 1.7.5. Damit ist $\text{Fix}_{\tilde{\Delta}}(x)$ zusammenhängend. Also sehen wir, dass φ einen Isomorphismus von $\text{Fix}_{\tilde{\Delta}}(x)$ nach $\text{Fix}_\Delta(\bar{x})$ induziert. \square

Satz 4.2.2 *Jede Wurzelgruppe in $\text{Aut}\tilde{\Delta}^\infty$ ist trivial.*

Beweis: Angenommen, es gibt eine Wurzel α in $\tilde{\Delta}^\infty$ und ein Element $1 \neq x \in U_\alpha$. Nach ([Ro2], 10.8) ist dann $x \in \text{Aut}\tilde{\Delta} = \widetilde{Ly}$. Angenommen, $o(x)$ ist endlich. Sei \mathfrak{S} eine Parallelenklasse von Sektoren im Inneren von α und sei S ein Sektor in \mathfrak{S} . Da $o(x)$ endlich ist, lässt x ein Element a in $\tilde{\Delta}$ invariant. Es existiert dann ein Sektorpanel P durch a , so dass P Sektorpanel eines zu S parallelen Sektors ist. Da x alle Nachbarn von P^∞ invariant lässt, operiert x trivial auf $T(P^\infty)$. Somit lässt x die Asymptotenklasse von P fest. Also sieht man, dass x ein Sektorpanel punktweise festlässt. Daher lässt x auch eine spezielle Ecke v_0 fest. Es existiert genau ein Sektor $S_0 \in \mathfrak{S}$ mit Anfangspunkt v_0 . S_0 wird von x festgelassen, da sowohl v_0 als auch S_0^∞ unter x fest bleiben. Es folgt, dass x den Sektor S_0 punktweise festlässt, insbesondere auch die Anfangskammer c von S_0 . Also ist x ein Element von \widetilde{Ly}_c . Da der Fixbereich eines 5-singulären Elementes von \widetilde{Ly}_c endlich ist, muss x ein 2-Element sein. Ein 2-Element in \widetilde{Ly}_c lässt aber ein Apartment A in $\tilde{\Delta}$ und damit auch das Apartment A^∞ in $\tilde{\Delta}^\infty$ punktweise fest. Dann existiert ein Sektor T in A , so dass S^∞ und T^∞ gegenüberliegen. Da x die 1-Umgebung von S^∞ punktweise festlässt, lässt x daher ein Apartment in $\tilde{\Delta}^\infty$ fest, welches S^∞ und T^∞ enthält, ein Widerspruch zu [TW], 3.7.

Also ist $o(x)$ unendlich. Wir können insbesondere $x \in \Pi$ annehmen. x operiert also fixpunktfrei auf $\tilde{\Delta}$. Sei $\mathfrak{m} = \partial\alpha$. Nach [TW], 3.7 kann x kein Apartment festlassen, welches α enthält. Nach Lemma 4.1.3 folgt daher, dass x eine Mauer M in $T(\mathfrak{m})$ festlässt. Sei R das Halbapartment mit $\partial R = M$ und $R^\infty = \alpha$. Dann lässt x alle zu M parallelen Mauern in R fest. Sei $P = (v_1, v_2, \dots)$ ein Sektorpanel in R , so dass $\mathfrak{p} = P^\infty$ im Inneren von α ist und v_1 in M liegt. Da x alle Nachbarn von \mathfrak{p} festlässt, lässt x auch alle Ecken in $T(\mathfrak{p})$ fest. Insbesondere lässt x auch die Asymptotenklasse $[P]$ von P fest. Wir haben daher also, dass es $i \neq j$ gibt, so dass v_i, v_j spezielle Ecken sind und $v_i^g = v_j$ ist. Seien M_i, M_j die zu M parallelen Mauern mit $v_i \in M_i$ und $v_j \in M_j$. Dann haben wir $v_i^g = v_j \in M_j$ und $v_i^g \in M_i^g = M_i$, ein Widerspruch, da M_i und M_j zwei verschiedene Mauern sind. Es folgt die Behauptung. \square

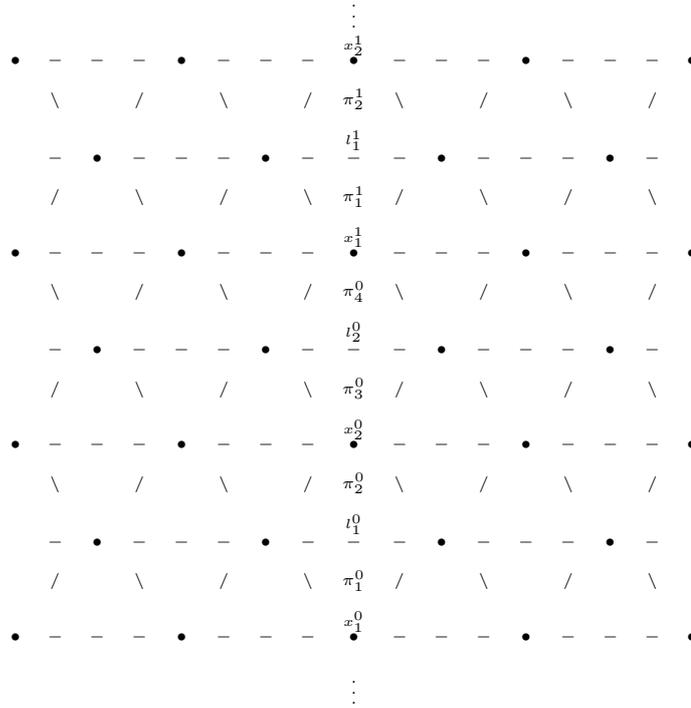
Ist $Z_4 \times Z_4 \cong T \leq \widetilde{Ly}$, so ist $\text{Fix}(T)$ ein φ -reguläres Apartment in $\tilde{\Delta}$ und \widetilde{Ly}_Σ operiert transitiv auf den Kammern von Σ . Wir nennen ein solches Apartment von nun an ein besonderes Apartment. Wir bezeichnen ferner

die Wurzeln, Sektoren, Mauern und Sektorpanele, die in einem besonderen Apartment liegen, als besondere Wurzeln, Sektoren etc.

Es gibt zwei verschiedene Klassen von besonderen Mauern und Sektorpanelen: Eine Mauer der ersten Klasse ist eine unendliche Sequenz

$$(\dots, x_1^0, \pi_1^0, l_1^0, \pi_2^0, x_2^0, \pi_3^0, l_2^0, \pi_4^0, x_1^1, \pi_1^1, \dots),$$

wobei $x_i^j \in \tilde{\mathfrak{P}}$, $l_i^j \in \tilde{\mathfrak{L}}$ und $\pi_i^j \in \tilde{\mathfrak{F}}$ ist. Das Bild unter φ ist jeweils vom oberen Index unabhängig. Wir bezeichnen diese Bilder x_1, π_1, l_1 usw. Dann ist $x_2 \in \Gamma_3(x_1)$ und es gilt $d(\pi_1, \pi_4) = d(\pi_2, \pi_3) = 6$ in Δ_{x_1} bzw. Δ_{x_2} . Entsprechend ist ein Sektorpanel der ersten Art eine unendliche Sequenz $(x_1^0, \pi_1^0, l_1^0, \pi_2^0, x_2^0, \pi_3^0, l_2^0, \pi_4^0, x_1^1, \pi_1^1, \dots)$, wobei die x_i^j, l_i^j, π_i^j und ihre Bilder in Δ die gleichen Eigenschaften haben wie oben. In der Abbildung unten ist ein Apartment in $\tilde{\Delta}$ und eine besondere Mauer der ersten Klasse eingezeichnet.



Man rechnet leicht nach, dass $Ly_{x_1, x_2, l_1, l_2, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4} \cong 4 \cdot S_4$ ist. 3-Elemente in dieser Gruppe sind 3B-Elemente. Ist daher z die zentrale Involution in dieser Gruppe, so hat $Ly_{x_1, x_2, l_1, l_2, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4} / \langle z \rangle \leq C_{Ly}(z) / \langle z \rangle \cong A_{11}$ Bahnen der Länge 4, 6 und 1 auf der Ziffernmenge von 1 bis 11.

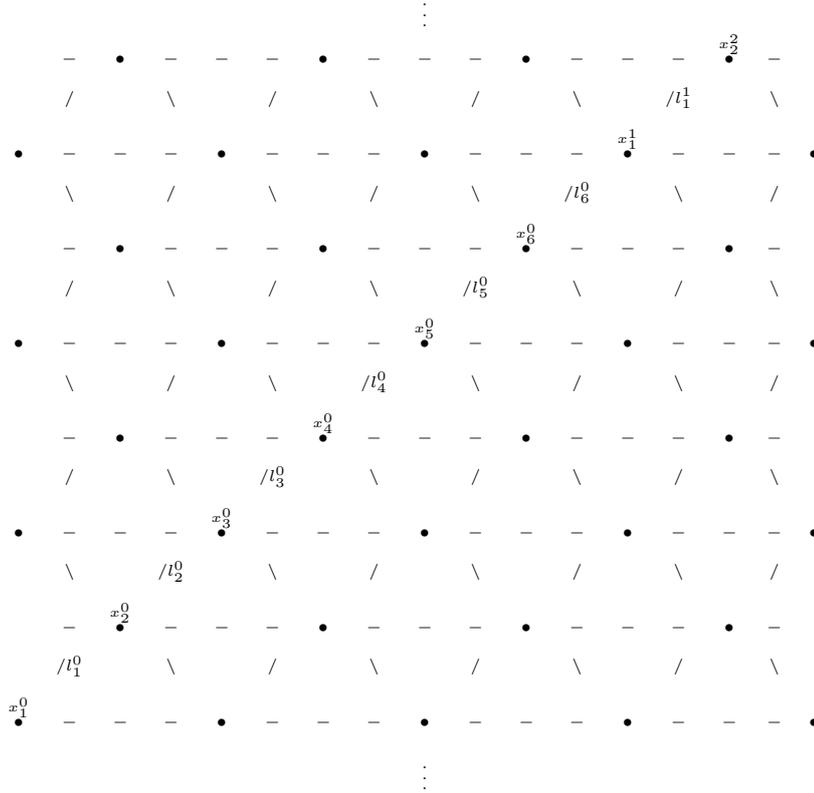
Eine Mauer zweiter Art ist eine unendliche Sequenz

$$(\dots, x_1^0, l_1^0, x_2^0, l_2^0, x_3^0, l_3^0, x_4^0, l_4^0, x_5^0, l_5^0, x_6^0, l_6^0, x_1^1, l_1^1, \dots),$$

wobei die Bilder unter φ wieder vom oberen Index unabhängig sind. Dabei stehen x_1, x_3, x_5 und x_2, x_4, x_6 jeweils in Relation Γ_2 (siehe Bild). Entsprechend ist ein Sektorpanel zweiter Art eine unendliche Sequenz

$$(x_1^0, l_1^0, x_2^0, l_2^0, x_3^0, l_3^0, x_4^0, l_4^0, x_5^0, l_5^0, x_6^0, l_6^0, x_1^1, l_1^1, \dots),$$

wobei x_i^j, l_i^j und ihre Bilder unter φ wieder die gleichen Eigenschaften besitzen.



Man überzeugt sich ohne Mühe, dass $Ly_{x_1, \dots, x_6, l_1, \dots, l_6} = 4 \cdot S_4$ ist. 3-Elemente in dieser Gruppe sind dabei 3A-Elemente. Ist z die zentrale Involution in dieser Gruppe, so besitzt $Ly_{x_1, \dots, x_6, l_1, \dots, l_6} / \langle z \rangle$ aufgefasst als Untergruppe von $C_{Ly}(z) / \langle z \rangle \cong A_{11}$ Bahnen der Länge 4, 4 und 3 auf $\{1, \dots, 11\}$. Ein Punkt [eine Gerade] in dem verallgemeinerten Hexagon $\tilde{\Delta}^\infty$ ist eine Parallelenklasse von Sektorpanelen erster [zweiter] Art.

Satz 4.2.3 Sei $\tilde{\Delta}_{bes}^\infty := \{P^\infty; P \text{ besonderes Sektorpanel}\}$. Dann ist $\tilde{\Delta}_{bes}^\infty$ dicht in $\tilde{\Delta}^\infty$.

Beweis: Sei $x \in \tilde{\mathfrak{P}}$. Für $y \in \tilde{\mathfrak{P}}$ sei $\mathfrak{B}(x, y) := \{P^\infty; P \text{ Sektorpanel durch } x \text{ und } y\}$. Dann bildet das System $\{\mathfrak{B}(x, y); y \in \tilde{\mathfrak{P}}\}$ eine Basis der Topologie von $\tilde{\Delta}^\infty$ (das folgt aus [GVM], 3.4.2). Sei (x, \dots, w, y) das gemeinsame

Anfangssegment eines jeden Sektorpanels mit Anfangspunkt x durch y . Ist $z \in \tilde{\Delta}_y$ mit $d(w, z) = 6$, so existiert ein Sektorpanel mit Anfangssegment (x, \dots, w, y, z) . Andererseits existiert auch ein besonderes Sektorpanel P mit Anfang (y, z, z_1, z_2, \dots) . $Q := (x, \dots, w, y, z, z_1, z_2, \dots)$ ist dann ein Sektorpanel asymptotisch zu P . Damit folgt die Behauptung. \square

Es sei im folgenden $\tilde{\Delta}_0^\infty$ das kleinste verallgemeinerte Teilhexagon von $\tilde{\Delta}^\infty$, welches $\tilde{\Delta}_{bes}^\infty$ enthält. Mit $\tilde{\Delta}_{bes}^\infty$ ist auch $\tilde{\Delta}_0^\infty$ abzählbar. Dies kann man wie folgt erkennen: Haben zwei Elemente in $\tilde{\Delta}_{bes}^\infty$ Abstand kleiner als sechs in $\tilde{\Delta}^\infty$ und liegt der eindeutig bestimmte Pfad dieser Länge zwischen den beiden Elementen nicht in $\tilde{\Delta}_{bes}^\infty$, so nehmen wir diese hinzu. Auf diese Art erhält man höchstens abzählbar viele neue Elemente. Für die neue Geometrie, die wir auf diese Art erhalten haben, wiederholen wir das. Nach abzählbar vielen Schritten erhält man dann ein verallgemeinertes Teilhexagon von $\tilde{\Delta}^\infty$.

Es wäre interessant zu erfahren, welche Struktur $\tilde{\Delta}_{bes}^\infty$ besitzt, ob etwa schon $\tilde{\Delta}_{bes}^\infty = \tilde{\Delta}_0^\infty$ gilt. Ferner wäre es schön, wenn man wissen würde, welche besonderen geometrischen Eigenschaften diese besonderen Punkte besitzen, ob sie etwa regulär im Sinne von 1.9.4 in [VM] sind.

Lemma 4.2.4

- (a) Sei M eine besondere Mauer und $\mathfrak{m} := M^\infty$. Dann hat M genau 6 Nachbarn in $T(\mathfrak{m})$, welche von \widetilde{Ly}_M transitiv permutiert werden.
- (b) Sei P ein besonderes Sektorpanel und $\mathfrak{p} := P^\infty$. Dann hat $[P]$ genau 6 Nachbarn in $T(\mathfrak{p})$, welche von $\widetilde{Ly}_{[P]}$ transitiv permutiert werden.

Beweis:

- (a) Sei zunächst $M = (\dots, x_1^1, \pi_1^1, l_1^1, \pi_2^1, x_2^1, \pi_3^1, l_2^1, \pi_4^1, x_1^2, \pi_1^2, \dots)$ eine Mauer der ersten Art. Jede Mauer mit Abstand 1 zu M in $T(\mathfrak{m})$ geht durch einen Punkt in $\mathfrak{P}(l_1^1)$. Sei y_1^1 so ein Punkt. Durch y_1^1 ist ein Pfad $(\pi_1^1, x_1^1 y_1^1, \hat{\pi}_4^0, m_2^0, \hat{\pi}_3^0, l', \pi_4^0)$ in $\tilde{\Delta}_{x_1^1}$ und ein Pfad $(\pi_2^1, x_2^1 y_1^1, \hat{\pi}_1^1, m_1^1, \hat{\pi}_2^1, l'', \pi_3^1)$ in $\tilde{\Delta}_{x_2^1}$ bestimmt. Setze $y_0^2 := l' \cap l_2^0$ und $y_2^1 := l'' \cap l_2^1$. Dann enthält jede zu M parallele Mauer, die durch den Punkt y_1^1 geht, die Teilsequenz $(y_2^0, \hat{\pi}_3^0, m_2^0, \hat{\pi}_4^0, y_1^1, \hat{\pi}_1^1, m_1^1, \hat{\pi}_2^1, y_2^1)$. Durch y_2^0 und y_2^1 sind wieder eindeutige Pfade in $\tilde{\Delta}_{x_2^0}$ und $\tilde{\Delta}_{x_2^1}$ bestimmt, und man bekommt auf die gleiche Art die Punkte y_1^0 und y_2^2 , die Ebenen $\hat{\pi}_1^0, \hat{\pi}_2^0, \hat{\pi}_3^1$ und $\hat{\pi}_4^1$ sowie die Geraden m_1^0 und m_2^2 . Man fährt auf diese Weise fort und sieht, dass es maximal eine zu M parallele Mauer durch y_1^1 . Umgekehrt gibt es auch so eine Mauer, da $\widetilde{Ly}_{m, y_1^1}$ eine Gruppe vom Typ $Z_4 \times Z_4$ enthält, was

bedeutet, dass M und y_1^1 in einem besonderen Apartment enthalten sind.

Nun sei $M = (\dots, x_1^1, l_1^1, x_2^1, l_2^1, x_3^1, l_3^1, x_4^1, l_4^1, x_5^1, l_5^1, x_6^1, l_6^1, x_1^2, l_1^2, \dots)$ eine Mauer der zweiten Art. Eine Mauer M' , die zu M Abstand 1 in $T(\mathfrak{m})$ hat, geht durch einen Punkt y_1^1 , der zusammen mit l_1^1 eine Ebene π_1^1 erzeugt. Diese bestimmt eindeutige Pfade $(l_6^0, \pi_6^0, \hat{l}_6^0, \hat{\pi}_6^0, \tilde{l}_6^0, \pi_1^1, l_1^1)$ in $\tilde{\Delta}_{x_1^1}$ und $(l_1^1, \pi_1^1, \hat{l}_1^1, \hat{\pi}_1^1, \tilde{l}_1^1, \pi_2^1, l_2^1)$ in $\tilde{\Delta}_{x_2^1}$. Damit ist y_1^1 als Schnittpunkt von \tilde{l}_6^0 mit \hat{l}_1^1 durch die Wahl von π_1^1 eindeutig festgelegt. π_6^0 und π_2^1 bestimmen jetzt eindeutige Pfade in $\tilde{\Delta}_{x_6^0}$ und $\tilde{\Delta}_{x_2^1}$ und wir bekommen die Schnittpunkte y_6^0 und y_2^1 ; so fortfahrend sieht man, dass M' durch π_1^1 bestimmt ist. Mit dem gleichen Argument wie im ersten Fall sieht man daher, dass es genau 6 Möglichkeiten für M' gibt.

- (b) Sei M die besondere Mauer, die P enthält, und $\mathfrak{m} := M^\infty$. Angenommen, $[Q]$ habe Abstand 1 zu $[P]$ in $T(\mathfrak{p})$. Dann existiert ein $Q' \in [Q]$, so dass Q' in einer zu M parallelen Mauer M' enthalten, die Abstand 1 zu M in $T(\mathfrak{m})$ hat ([Ro2], 10.6). Damit folgt die Behauptung. \square

Lemma 4.2.5

- (a) *Ist M eine besondere Mauer und M' parallel zu M , so ist auch M' besonders.*
- (b) *Ist P ein besonderes Sektorpanel und P' parallel zu P , so enthält P' ein besonderes Sektorpanel P'' .*

Beweis: Beide Aussagen folgen mit dem vorherigenden Lemma und Induktion nach dem Abstand in $T(M^\infty)$ bzw. $T(P^\infty)$. \square

Lemma 4.2.6 *Sei $\Psi = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $G \leq \text{Aut}\Psi$. Angenommen, es gibt ein $v \in V$ und ein $t \in G$, so dass G_v transitiv auf Ψ_v operiert und dass $v^t \in \Psi_v$ ist. Dann operiert G transitiv auf V und E .*

Beweis: Sei $x \in V$. Wir zeigen durch Induktion nach $d(v, x)$, dass es ein $g \in G$ mit $v^g = x$ gibt. Das ist klar für $d(v, x) = 0$. Sei also $d(v, x) = n > 0$ und $y \in V$ mit $d(v, y) = n - 1$ und $d(y, x) = 1$. Nach Induktionsannahme gibt es ein $g \in G$ mit $v^g = y$. Es ist dann $x^{g^{-1}} \in \Psi_v$, also gibt es ein $a \in G_v$ mit $v^{ta} = x^{g^{-1}}$, also $v^{tag} = x$. Damit ist G transitiv auf V , und da G_v transitiv auf Ψ_v ist, operiert G auch transitiv auf E . \square

Im folgenden sei Σ ein besonderes Apartment mit $T = \widetilde{Ly}_{(\Sigma)}$.

Lemma 4.2.7

- (a) Es ist $N_{\tilde{L}y}(T) = \tilde{L}y_\Sigma$ eine Erweiterung von T mit $W(\tilde{G}_2) = \mathbb{Z}^2 : D_6$, $T = \tilde{L}y_{(\Sigma)}$ und $N_{\tilde{L}y}(T)/C_{\tilde{L}y}(T) = Z_2^2 : D_6$.
- (b) Sei $\Lambda = \tilde{L}y_{(\Sigma^\infty)}$ das Urbild der Translationsuntergruppe von $W(\tilde{G}_2)$ in $\tilde{L}y_\Sigma$ und $L = \Pi \cap \tilde{L}y_\Sigma$. Dann ist $L \cap T = 1$ und $|\Lambda : TL| = 12$.

Beweis:

- (a) Die ersten beiden Aussagen sind sehr einfach zu verifizieren. Sei z eine Involution in T , $\bar{T} = \varphi(T)$ und $\bar{z} := \varphi(z)$. Dann sehen wir, dass $|N_{L_y}(\bar{T}) \cap C_{L_y}(\bar{z}) : C_{L_y}(\bar{T}) \cap C_{L_y}(\bar{z})| = 16$ ist, indem wir in $C_{L_y}(\bar{z}) \cong 2 \cdot A_{11}$ rechnen. Damit erhalten wir auch die letzte Behauptung.
- (b) $T \cap L = 1$ gilt, da Π fixpunktfrei auf $\tilde{\Delta}^\infty$ operiert. Da das Bild von Σ in Δ genau 12 Punkte besitzt, gilt $|\Sigma : TL| = 12$.

□

Im folgenden sei stets M eine besondere Mauer, $\mathfrak{m} := M^\infty$ und $\Psi := T(\mathfrak{m})$.

Lemma 4.2.8

- (a) Es ist $\tilde{L}y_{(M)} = 4 \cdot S_4$ und $\tilde{L}y_M = (\tilde{L}y_{(M)} : C) : \langle t \rangle$, wobei C unendlich zyklisch ist und t Ordnung 2 besitzt. Für $J = C_C(\tilde{L}y_{(M)})$ ist $|C : J| = 2$ und $|J : C \cap \Pi| \in \{1, 3\}$, je nachdem, ob M eine besondere Mauer der ersten oder zweiten Art ist.
- (b) Ist z die zentrale Involution in $\tilde{L}y_{(M)}$, so ist $\langle z \rangle$ das Zentrum von $\tilde{L}y_M$.
- (c) Ist K der Kern der Wirkung von $\tilde{L}y_M$ auf die Menge der Nachbarn von M in $T(M^\infty)$ und x ein Punkt in M , so ist $K = J : (K \cap \tilde{L}y_{M,x})$. Es ist $K \cap \tilde{L}y_{M,x} \cong Q_8$. Ist M eine Mauer der ersten Art, so induziert jedes Element aus $K \cap \tilde{L}y_{M,x}$ eine Punkthomologie auf Δ_x . Ist M eine Mauer der zweiten Art, so induziert jedes Element aus $K \cap \tilde{L}y_{M,x}$ eine Geradenhomologie auf Δ_x .

Beweis:

- (a) Sei $\bar{M} := \varphi(M)$. Dann ist $Ly_{(\bar{M})}$ eine Gruppe vom Typ $4 \cdot S_4$. Diese Gruppe lässt sich zu einer Untergruppe von \widetilde{Ly} liften, und diese Gruppe ist dann gerade $\widetilde{Ly}_{(M)}$. Sei x ein Punkt auf M und t eine involutorische Spiegelung in \widetilde{Ly}_Σ , welche M an dem Punkt x spiegelt. Dann ist $\widetilde{Ly}_{M,x} = \widetilde{Ly}_{(M)} : \langle t \rangle$.
- Ist $\bar{\Lambda}$ das Bild von Λ in Ly , so besitzt T in dieser Gruppe ein Komplement, das von zwei Elementen \bar{a} und \bar{b} mit $o(\bar{a}) = 2$ und $o(\bar{b}) = 6$ erzeugt wird. Seien a und b Urbilder dieser beiden Elemente in \widetilde{Ly} . Dann ist $[a, b] \in T \cap \Pi = 1$ und $a^2, b^6 \in \Pi$. Damit sehen wir, dass T ein Komplement $E = \langle a, b \rangle$ in Λ besitzt. Wegen $|\Lambda : E| = 16, |E : E \cap \Pi| = 12$ und $|\Lambda : \Lambda \cap \Pi| = 192$ ist $\Lambda \cap \Pi \leq E$.
- Sei C die Untergruppe in E , die alle Translationen in Richtung M enthält. Diese Gruppe normalisiert $\widetilde{Ly}_{(M)}$ und wirkt transitiv auf den Punkten in M , also haben wir mit dem Frattini-Argument $\widetilde{Ly}_M = \widetilde{Ly}_{M,x}C$. Weil t die Elemente in C invertiert, haben wir $\widetilde{Ly}_{(M)}C$ normal in \widetilde{Ly}_M . Wegen Lemma 4.2.7 gilt $|C : C_C(T)| = 2$, also $|C : J| \geq 2$. Ist M eine besondere Mauer der ersten Klasse, so ist $|C : C \cap \Pi| = 2$ und wir sind fertig. Ist M eine besondere Mauer der zweiten Art, so ist $|C : C \cap \Pi| = 6$. Da es in $\widetilde{Ly}_{(M)}$ keinen Automorphismus der Ordnung 3 gibt, der T zentralisiert, erhalten wir auch in diesem Fall $|C : J| = 2$.
- (b) Da t die Elemente aus C invertiert, muss das Zentrum von \widetilde{Ly}_M in $\widetilde{Ly}_{(M)}$ enthalten sein. Ist \bar{z} das Bild von z in Ly , so ist $Ly_{(\bar{M})}$ in $C_{Ly}(\bar{z})$ enthalten. In $C_{Ly}(\bar{z})$ erkennt man, dass der Normalisator von $Ly_{(\bar{M})}$ gerade das Bild von \widetilde{Ly}_M ist. Damit lässt sich das Zentrum von \widetilde{Ly}_M bestimmen.
- (c) Sei K der Kern der Wirkung von \widetilde{Ly}_M auf der 1-Umgebung von M in $\Psi = T(\mathfrak{m})$ und sei $m := M \cap \tilde{\Delta}_x$. Dann ist m eine Mauer in $\tilde{\Delta}_x$ und $\widetilde{Ly}_{m,x}$ operiert als $PGL(2, 5)$ auf die Menge der Wurzeln α in $\tilde{\Delta}_x$ mit $\partial\alpha = m$. Der Kern dieser Wirkung ist eine Q_8 und besteht aus Punkthomologien, falls M eine Mauer der ersten Art ist, und aus Geradenhomologien, falls M eine Mauer der zweiten Art ist. Da es zu jeder solchen Wurzel α genau eine Mauer M' in $T(\mathfrak{m})$ mit Abstand 1 zu M gibt, operiert die Gruppe $\widetilde{Ly}_{M,x}$ transitiv als S_4 auf die Nachbarn von M in $T(\mathfrak{m})$. Nun sei l eine Gerade in M und $m := M \cap \tilde{\Delta}_l$. Dann operiert

$\widetilde{Ly}_{l,m}$ transitiv als $Z_2 \times S_4$ auf der sechselementigen Menge $R(m) := \{\alpha; \alpha \text{ Wurzel in } \tilde{\Delta}_l \text{ mit } \partial\alpha = m\}$. Deswegen induziert $\widetilde{Ly}_{l,M}$ auch diese Gruppe auf Ψ_M . Da es für $M' \in \Psi_M$ genau ein $M'' \in \Psi_M \setminus \{M'\}$, so dass M, M' und M'' in einem besonderen Apartment liegen, sieht man, dass auch $\widetilde{Ly}_M/K = Z_2 \times S_4$ sein muss. C kann nicht im Kern dieser Wirkung sein, da $\widetilde{Ly}_M = \widetilde{Ly}_{M,x}C$ sonst als S_4 auf Ψ_M operieren würde. Andererseits sieht man leicht, dass $C \cap \Pi$ im Kern liegen muss. Ist M eine Mauer der ersten Art, so erhält man $J \leq K$; ist M eine Mauer der zweiten Art, so ist JK/K normal in $Ly_M/K \cong Z_2 \times S_4$ und hat Ordnung 1 oder 3; auch damit folgt die Behauptung. \square

Lemma 4.2.9 *Sei $M_0 \in \Psi_M$ mit $\Psi = T(\mathfrak{m})$, x ein Punkt in M , z die zentrale Involution in K , $Z := \langle z \rangle \times J$ und K_0 der Kern der Wirkung von \widetilde{Ly}_{M_0} auf Ψ_{M_0} .*

(a) *Es ist $K_0 \cap K = Z$.*

(b) *Z ist der Kern der Wirkung von $\widetilde{Ly}_{\mathfrak{m}}$ auf $T(\mathfrak{m})$.*

Beweis:

(a) Es ist $K = J(K \cap \widetilde{Ly}_{M,x})$ Angenommen, M_0 liegt in Σ . Dann existiert ein $\alpha \in \Lambda$ mit $M^\alpha = M_0$. Da α die Gruppe J zentralisiert, ist in diesem Fall $J \leq K_0$. Da \widetilde{Ly}_M transitiv auf Ψ_M operiert und J normal in \widetilde{Ly}_M ist, gilt dies in jedem Fall. Da KK_0/K_0 eine Untergruppe von $Z_2 \times S_4$ ist, sieht man, dass die zentrale Involution in $K \cap \widetilde{Ly}_{(M)}$ ebenfalls in K_0 enthalten sein muss. Insgesamt erhalten wird daher $Z \leq K \cap K_0$.

Sei M eine Mauer der ersten Art und (x, π, l) eine Teilsequenz in M . Dann existiert ein Punkt $y \in M_0$, der inzident mit l ist. Jedes Element aus $K \cap \widetilde{Ly}_{M,x}$ induziert eine Punkthomologie in $\tilde{\Delta}_x$ und lässt alle Punkte in l fest. Somit induziert jedes Element in $K \cap \widetilde{Ly}_{M,x}$ eine Geradenhomologie auf $\tilde{\Delta}_y$. Da ein Element der Ordnung 4 in \widetilde{Ly}_y nicht gleichzeitig eine Geraden- und Punkthomologie sein kann (siehe 2.2), muss $K \cap K_0 \cap \widetilde{Ly}_{M,x} = \langle z \rangle$ gelten.

Sei M eine Mauer der zweiten Art und (l_1, x, l_2) eine Teilsequenz in M . Jedes Element in $\widetilde{Ly}_{M,x} \cap K$ induziert eine Geradenhomologie in $\tilde{\Delta}_x$. Es gibt eine Ebene $\pi \in \tilde{\mathfrak{F}}(l_1)$ und einen Punkt $y \in \tilde{\mathfrak{P}}(\pi) \setminus \tilde{\mathfrak{P}}(l_1)$, so dass M_0 durch y geht. Ein Element aus $K \cap \widetilde{Ly}_{M,x}$ lässt $\tilde{\mathfrak{F}}(l_1)$ und damit auch $\tilde{\mathfrak{P}}(l_1)$ elementweise fest. Es folgt, dass ein solches Element

alle Geraden in $\tilde{\Delta}_{\{y,\pi\}}$ invariant lässt. Mit dem gleichen Argument folgt $K \cap K_0 \cap \tilde{Ly}_{M,x} = \langle z \rangle$.

(b) Folgt mit (a) und Induktion nach dem Abstand in $T(\mathbf{m})$. \square

Lemma 4.2.10

- (a) $\tilde{Ly}_{\mathbf{m}} = \langle \tilde{Ly}_M, \tilde{Ly}_{\Sigma,\mathbf{m}} \rangle$ operiert transitiv auf $T(\mathbf{m})$.
- (b) $\Pi_{\mathbf{m}}/(J \cap \Pi)$ ist eine freie Gruppe.
- (c) Ist M eine besondere Mauer der ersten Art, so ist $\tilde{Ly}_{\mathbf{m}}\Pi/\Pi \cong 2 \cdot A_{11}$
- (d) Ist M eine besondere Mauer der zweiten Art, so ist $\tilde{Ly}_{\mathbf{m}}\Pi/\Pi\langle z \rangle$ der Stabilisator einer Partition vom Typ $(4, 4, 3)$ in $C_{Ly}(\bar{z})/\langle \bar{z} \rangle \cong A_{11}$.

Beweis

- (a) Sei M' eine zu M parallele Mauer mit Abstand 1 in Σ . Dann existiert ein $t \in \tilde{Ly}_{\Sigma}$ mit $M^t = M'$. Mit 4.2.4 (a) und 4.2.6 folgt, dass $\langle \tilde{Ly}_M, \tilde{Ly}_{\Sigma,\mathbf{m}} \rangle$ transitiv auf $T(\mathbf{m})$ operiert. Mit dem Frattini-Argument folgt $\langle \tilde{Ly}_M, \tilde{Ly}_{\Sigma,\mathbf{m}} \rangle = \tilde{Ly}_{\mathbf{m}}$.
- (b) Angenommen, es gibt eine Kante $\{M, M'\}$ in $T(\mathbf{m})$ und ein $x \in \Pi_{\mathbf{m}} \setminus J$, das M und M' vertauscht. Dann gibt es genau ein besonderes Apartment A , welches M und M' enthält, also erhalten wir $x \in \Pi_A$. Damit erhalten wir aber einen Widerspruch, denn x kann dann keine Translation auf $|A|$ induzieren. Also operiert $\Pi_{\mathbf{m}}/(J \cap \Pi)$ frei auf den Ecken und Kanten von $T(\mathbf{m})$, ist also frei wegen [DD], I.4.2.
- (c) Sei M Mauer der zweiten Art. In $C_{Ly}(\bar{z})/\langle \bar{z} \rangle \cong A_{11}$ hat $\tilde{Ly}_{(M)}\Pi/\Pi\langle z \rangle$ Bahnen der Länge 4, 6 und 1, während $\tilde{Ly}_{\Sigma,\mathbf{m}}\Pi/\Pi\langle z \rangle$ Bahnen der Länge 8 und 3 hat. Somit ist $\tilde{Ly}_{\mathbf{m}}\Pi/\Pi$ transitiv auf den 11 Elementen; da $\tilde{Ly}_{\Sigma,\mathbf{m}}\Pi/\Pi\langle z \rangle$ einen 3-Zykel enthält, sieht man leicht, dass $\tilde{Ly}_{\mathbf{m}}\Pi/\Pi\langle z \rangle \cong A_{11}$ gelten muss. Damit folgt die Behauptung.
- (d) Wir fassen wieder $\tilde{Ly}_{(M)}\Pi/\Pi\langle z \rangle$ und $\tilde{Ly}_{\Sigma,\mathbf{m}}\Pi/\Pi\langle z \rangle$ als Untergruppen von A_{11} auf. Wir sehen, dass beide Gruppen eine Partition vom Typ $(4, 4, 3)$ festlassen. Da $\tilde{Ly}_{(M)}\Pi/\Pi\langle z \rangle$ als S_4 auf einer Bahn mit 4 Elementen operiert, $\tilde{Ly}_{\Sigma,\mathbf{m}}\Pi/\Pi\langle z \rangle$ die beiden Blöcke der Länge 4 vertauscht und als S_3 auf der Bahn der Länge 3 operiert, folgt die Behauptung. \square

Im folgenden seien P und P^* zwei nicht-parallele Sektorpanele in M . Ist $\mathbf{p} = P^\infty$ und $\mathbf{p}^* = (P^*)^\infty$, so ist dann $\mathbf{m} = \{\mathbf{p}, \mathbf{p}^*\}$.

Lemma 4.2.11

- (a) *Es ist $\widetilde{Ly}_{(P)} = \widetilde{Ly}_{(P^*)} = \widetilde{Ly}_{(M)}$, $\widetilde{Ly}_{[P]} = \widetilde{Ly}_{[P^*]} = \widetilde{Ly}_{(P)} : C$ (mit C wie in 4.2.8).*
- (b) *$\widetilde{Ly}_{\mathfrak{p}} = \widetilde{Ly}_{\mathfrak{p}^*} = \langle \widetilde{Ly}_{(P)}, \widetilde{Ly}_{\Sigma, \mathfrak{p}} \rangle$. Diese Gruppe hat Index 2 in $\widetilde{Ly}_{\mathfrak{m}}$.*

Beweis:

- (a) Da M die einzige besondere Mauer ist, in der ein Sektorpanel aus $[P]$ enthalten ist, haben wir $\widetilde{Ly}_P = \widetilde{Ly}_{(P)} = \widetilde{Ly}_{(M)}$ und $\widetilde{Ly}_{[P]} \leq \widetilde{Ly}_M$. Sind C und t wie in 4.2.8, so gilt $C \leq \widetilde{Ly}_{[P]}$, während P^t und P nicht asymptotisch sind. Damit folgt die Behauptung.
- (b) Die erste Behauptung zeigt man genau wie in 4.2.10(a). Es ist $\mathfrak{m} = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^*\}$, und es gibt ein Element in $\widetilde{Ly}_{\mathfrak{m}}$, das \mathfrak{p} und \mathfrak{p}^* vertauscht. Da M die einzige besondere Mauer ist, die P enthält, folgt die Behauptung. \square

Lemma 4.2.12

- (a) *$\langle z \rangle \times J$ ist Kern der Wirkung von $\widetilde{Ly}_{\mathfrak{p}}$ auf $T(\mathfrak{p})$. Dies ist die Gruppe aller $\{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^*\}$ -Homologien in \widetilde{Ly} .*
- (b) *Ist $\mathfrak{q} \in \tilde{\Delta}^\infty$, so dass Z trivial auf $\tilde{\Delta}_{\mathfrak{q}}^\infty$ operiert, so ist $\mathfrak{q} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^*\}$.*
- (c) *Es ist $N_{\widetilde{Ly}}(Z) = \widetilde{Ly}_{\mathfrak{m}}$ und $C_{\widetilde{Ly}}(Z) = \widetilde{Ly}_{\mathfrak{p}}$.*

Beweis:

- (a) Ist $Q \in \mathfrak{p}$, so existiert genau eine Mauer $M_Q \in \mathfrak{m}$, die ein Panel aus $[Q]$ enthält, und $[Q] \mapsto M_Q$ ist ein Isomorphismus von $T(\mathfrak{p})$ nach $T(\mathfrak{m})$, folglich ist $\langle z \rangle \times J$ gerade der Kern der Wirkung von $\widetilde{Ly}_{\mathfrak{p}}$ auf $T(\mathfrak{p})$. Die Enden von $T(\mathfrak{p})$ entsprechen gerade den Punkten/Geraden in $\tilde{\Delta}^\infty$, die mit \mathfrak{p} inzident sind ([Ro2], 10.4). Ein Automorphismus von $T(\mathfrak{p})$ ist genau dann die Identität, wenn er alle Enden festlässt. Daher ist $\langle z \rangle \times J$ gerade die Gruppe der $\{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^*\}$ -Homologien in \widetilde{Ly} .
- (b) Angenommen, \mathfrak{p} und \mathfrak{q} haben maximalen Abstand. Sei A^∞ ein Apartment in $\tilde{\Delta}^\infty$, das \mathfrak{p} und \mathfrak{q} enthält und A das entsprechende Apartment in $\tilde{\Delta}$. Dann ist $A^x = A$ für alle $x \in Z$, da Z sowohl $\tilde{\Delta}_{\mathfrak{p}}^\infty$ als auch $\tilde{\Delta}_{\mathfrak{q}}^\infty$ invariant lässt. Seien $P \in \mathfrak{p}, Q \in \mathfrak{q}$ Sektorpanele, die beide in A liegen, so dass P besonderes ist. Dann sind $\bigcup_{x \in Z} Q^x$ und $\bigcup_{x \in Z} P^x$ Mauern in

$A = \bigcup_{x \in Z} A^x$. Da \mathfrak{p} und \mathfrak{q} maximalen Abstand haben, müssen die beiden Mauern gleich sein. Diese Mauer ist \widetilde{Ly}_P -invariant, hat daher eine Gruppe vom Typ 4×4 in ihrem Stabilisator und ist somit besonders. Also muss $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{q}$ gelten.

Angenommen, \mathfrak{p} und \mathfrak{q} haben nicht maximalen Abstand. Da $\text{Fix}_Z(\tilde{\Delta}^\infty)$ ein schwaches verallgemeinertes Hexagon ist ([VM], 4.4.2), gibt es ein Z -invariantes Apartment A^∞ in $\tilde{\Delta}^\infty$, in dem sowohl \mathfrak{p} auch \mathfrak{q} liegen. Sei $P \in \mathfrak{p}$, $Q \in \mathfrak{q}$ Sektorpanele in A . Dann gibt es Mauern M_P, M_Q in A mit $P \subseteq M_P$, $Q \subseteq M_Q$. Da Z die Asymptotenklassen von P und Q festlässt, lässt Z auch M_P und M_Q fest. Aber M_P und M_Q sind nicht parallel, also gibt es einen eindeutigen Schnittpunkt a , der ebenfalls Z -invariant ist. Da $Z \cap \Pi \neq 1$ ist und Π fixpunktfrei auf $\tilde{\Delta}$ operiert, erhalten wir so einen Widerspruch. \square

- (c) Wir haben sowohl $\widetilde{Ly}_M, \widetilde{Ly}_{\Sigma, \mathfrak{m}} \leq N_{\widetilde{Ly}}(Z)$, also damit $\widetilde{Ly}_{\mathfrak{m}} \leq N_{\widetilde{Ly}}(Z)$. Ebenso ist $\widetilde{Ly}_P, \widetilde{Ly}_{\Sigma, \mathfrak{p}} \leq C_{\widetilde{Ly}}(Z)$ und daher $\widetilde{Ly}_{\mathfrak{p}} \leq C_{\widetilde{Ly}}(Z)$. Andererseits ist wegen (a) \mathfrak{m} die einzige Mauer, so dass Z trivial auf $T(\mathfrak{m})$ operiert. Zudem ist $|\widetilde{Ly}_{\mathfrak{m}} : \widetilde{Ly}_{\mathfrak{p}}| = 2$ und es gibt ein Element in $\widetilde{Ly}_{\mathfrak{m}}$, welches die Elemente aus J invertiert. Damit erhalten wir auch die anderen Inklusion. \square

Korollar 4.2.13 \widetilde{Ly} ist ein Normalteiler von $\text{Aut}\tilde{\Delta}^\infty$.

Beweis: Jede Involution in \widetilde{Ly} lässt eine Kammer fest. Da der Stabilisator eines Punktes nur eine Klasse von Involution hat, hat \widetilde{Ly} nur eine Klasse von Involution. Nach Satz 4.2.11 ist jede Involution sowohl eine Punkt- als auch eine Geradenhomologie. Umgekehrt induziert jedes Element von $\text{Aut}\tilde{\Delta}^\infty$ einen Automorphismus von $\tilde{\Delta}$, falls es mindestens ein Panel jeden Typs elementweise festlässt ([Ro2], 10.7). Da \widetilde{Ly} von Involutionen erzeugt wird, folgt die Behauptung. \square

Eine Gruppe G heißt komplett, falls $Z(G) = 1$ und $\text{Aut}G = \text{Inn}G$ ist.

Satz 4.2.14

- (a) \widetilde{Ly} ist komplett.
- (b) $\text{Aut}\tilde{\Delta}^\infty = \widetilde{Ly} \times C_{\text{Aut}\tilde{\Delta}^\infty}(\widetilde{Ly})$.
- (c) Es ist $|\text{Aut}_{\text{top}}(\tilde{\Delta}^\infty) : \widetilde{Ly}| \leq 2$. Gibt es ein $1 \neq z \in C_{\text{Aut}\tilde{\Delta}^\infty}(\widetilde{Ly}) \cap \text{Aut}_{\text{top}}(\tilde{\Delta}^\infty)$, so lässt z alle besonderen Mauern in $\tilde{\Delta}^\infty$ fest und vertauscht die beiden Punkte oder Geraden in diesen Mauern.

Beweis:

- (a) Da $Z(Ly) = 1$ ist, haben wir $Z(\tilde{Ly}) \leq \Pi$. Angenommen, $z \in Z(\tilde{Ly})$. Sei M eine besondere Mauer, $\mathfrak{m} = M^\infty$, P ein Sektorpanel in M und $\mathfrak{p} = P^\infty$ und $Z = Z(\tilde{Ly}_\mathfrak{m})$. Dann haben wir $\mathfrak{m}^z = \mathfrak{m}$ wegen Lemma 4.2.12 (b), also $z \in \tilde{Ly}_\mathfrak{m} \cap Z(\tilde{Ly}) \leq Z(\tilde{Ly}_\mathfrak{m})$. Somit sehen wir, dass z jeden Punkt und jede Gerade in $\tilde{\Delta}_{bes}^\infty$ invariant lässt. Da $\tilde{\Delta}_{bes}^\infty$ dicht in $\tilde{\Delta}^\infty$ ist, muss $z = 1$ sein.

Sei nun $H = \text{Aut}\tilde{Ly}$. Wir können dann \tilde{Ly} als Untergruppe von H auffassen. Sei ferner p ein Punkt in $\tilde{\Delta}$ und $X = \tilde{Ly}_p$. Da \tilde{Ly} genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen isomorph zu $G_2(5)$ enthält, haben wir $H = \tilde{Ly}N_H(X)$. Da X komplett ist, haben wir $N_H(X) = XC_H(X)$. Sei l eine Gerade in $\tilde{\Delta}_p$. Dann ist $Y = \tilde{Ly}_l$ die einzige Obergruppe von X_l , die isomorph zu $5^{1+4} : (4 \cdot S_6)$ ist, wird also von $D := C_H(X)$ festgelassen. Sei $W = DY \leq N_H(Y)$. Wir haben dann $D = C_W(O_{5,2}(Y)) \trianglelefteq W$, folglich $[Y, D] = 1$. Also ist $\tilde{Ly} = \langle X, Y \rangle \leq C_{\tilde{Ly}}(D)$. Damit folgt die Behauptung.

- (b) Folgt aus (a) und 4.2.13.

- (c) Sei $z \in C_{\text{Aut}\tilde{\Delta}^\infty}(\tilde{Ly})$. Dann lässt z wegen 4.2.12(b) alle besonderen Mauern invariant. Angenommen, es ist $\mathfrak{m} = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^*\}$ eine besondere Mauer mit $\mathfrak{p}^z = \mathfrak{p}^*$ und $(\mathfrak{p}^*)^z = \mathfrak{p}$. Dann vertauscht z die beiden Panele in allen besonderen Mauern einer Klasse. Ist Σ^∞ ein besonderes Apartment mit $\mathfrak{m} \subset \Sigma^\infty$, $\mathfrak{m}' = \{\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^*\}$ eine Mauer in Σ^∞ mit $\mathfrak{q}I\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}^*I\mathfrak{p}^*$, so muss auch $\mathfrak{q}^z = \mathfrak{q}^*$ und $(\mathfrak{q}^*)^z = \mathfrak{q}$ gelten. Daher muss einer der beiden folgenden Fälle gelten: Entweder vertauscht z die beiden Elemente in jeder besonderen Mauer, oder z operiert trivial auf $\tilde{\Delta}_{bes}^\infty$ und damit auf $\tilde{\Delta}_0^\infty$. Ist $1 \neq z \in \text{Aut}(\tilde{\Delta}^\infty)_{\text{top}} \cap C_{\text{Aut}\tilde{\Delta}^\infty}(\tilde{Ly})$, so muss wegen $\tilde{\Delta}_{bes}^\infty$ dicht in $\tilde{\Delta}^\infty$ der erste Fall vorliegen. \square

Ist \mathbb{L} ein lokal-kompakter Körper mit total-unzusammenhängender Topologie (etwa \mathbb{Q}_p) und \mathbb{K} ein in \mathbb{L} dichter Teilkörper (etwa \mathbb{Q}), so gibt es nur eine Möglichkeit, die Topologie von \mathbb{K} auf \mathbb{L} so fortzusetzen, dass \mathbb{L} lokal-kompakt ist. Falls für verallgemeinerte Polygone mit total-unzusammenhängender Topologie ein ähnlicher Satz gilt, wäre jeder Automorphismus von $\tilde{\Delta}^\infty$ topologisch. Ferner erscheint es plausibel, dass jeder topologische Automorphismus von $\tilde{\Delta}^\infty$ einen Automorphismus von $\tilde{\Delta}$ induziert. Damit liegt folgende Vermutung nahe:

Vermutung: *Es gilt $\text{Aut}\tilde{\Delta}^\infty = \tilde{Ly}$.*

Literaturverzeichnis

- [AS1] Aschbacher, Michael; Segev, Yoav: *Extending morphisms and graphs*, Ann. Math. (2) 135, No. 2, 297-329 (1992)
- [AS2] Aschbacher, Michael; Segev, Yoav: *The uniqueness of groups of Lyons type*, J. Am. Math. Soc. 5, No. 1, 75-98 (1992)
- [ATLAS] Conway J. H. et.al.: *Atlas of finite simple groups*, Oxford, Clarendon Press (1985)
- [B] Brown, Kenneth S.: *Buildings* New York etc., Springer Verlag (1989)
- [C] Carter, Roger W.: *Simple Groups of Lie type*, J. Wiley and Sons, London etc. (1972)
- [DD] Dicks, Warren; Dunnwoody, M.J.: *Groups acting on Graphs*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge, Cambridge University Press (1989)
- [GVM] Grundhöfer, Theo; Van Maldeghem, Hendrik: *Topological Polygons and Affine Buildings of Rank Three*, Atti Sem. Math. Fis. Univ. Modena, 38, 459-474 (1990)
- [H] Huppert, B.: *Endliche Gruppen I*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1967)
- [K1] Kantor, William M.: *Geometries which are almost buildings*, Eur. J. Comb. 2, 239-247 (1981)
- [K2] Kantor, William M.: *Generalized Polygons, SCABs and GABs*, Proc. CIME-Conf. Buildings and the Geometry of Diagrams, Como 1984, Springer Lecture Note 1181, 79-158
- [Ly1] Lyons, Richard: *Evidence for a new finite simple group*, J. Algebra 20, 540-569 (1972)

- [Ly2] Lyons, Richard: *Errata: Evidence for a new finite simple group*, J. Algebra 34, 188-189 (1975)
- [MN] Neutsch, Wolfram; Meyer, Werner: *A root system for the Lyons group*, Math. Ann. 282, No. 2, 282-299 (1989)
- [MP] Meierfrankenfeld, U., Parker, C.W.: *A Computerfree Construction of the Lyonsgroup*, Preprint, 2002
- [P] Pasini, Antonio: *Diagram Geometries*, Oxford, Clarendon Press (1997)
- [Ro1] Ronan, Mark: *Coverings and Automorphisms of Chamber Systems*, Eur. J. Comb. 1, 259-269 (1980)
- [Ro2] Ronan, Mark: *Lectures on Buildings*, Perspectives in Mathematics 7, Boston MA: Academic Press
- [Si] Sims, Charles: *The existence and the uniqueness of Lyons' group*, Finite Groups '72 Proc. Gainesville Conf. 1972, 138-141 (1973)
- [Sp] Spanier, Edwin H.: *Algebraic Topology*, New York etc., McGraw-Hill, 1966
- [SZ] Stoecker, R., Zieschang H.: *Algebraische Topologie*, B. G. Teubner, Stuttgart (1988)
- [Ti1] Tits, Jacques: *A local approach to Buildings*, The Geometric Vein, The Coxeter Festschrift, 519-547 (1982)
- [Ti2] Tits, Jacques: *Buildings and Group Amalgamations*, Proc. Int. Conf., St. Andrews/Scotland 1985, London Math. Soc. Lecturer Notes Ser. 121, 110-127 (1986)
- [TW] Tits, Jacques; Weiss, Richard M.: *Moufang Polygons*, Berlin etc., Springer 2002
- [VM] Van Maldeghem, Hendrik: *Generalized Polygons*, Monographs in Mathematics 93, Basel, Birkhäuser (1998)
- [Wi1] Wilson, Robert. A.: *The subgroup structure of the Lyons group*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 95, 403-409 (1984)
- [Wi2] Wilson, Robert A.: *The maximal subgroups of Lyons' sporadic group*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 97, 433-436 (1985)
- [Wo] Woldar, Andrew J.: *On the maximal subgroups of Lyons' group* Commun. Algebra 15, 1195-1203 (1987)

Lebenslauf

12.02.1976 Geburt in Heidenheim an der Brenz

1982-1986 Besuch der Grundschule in Gerstetten

1986-1992 Besuch der Realschule Gerstetten

1992-1995 Besuch des Wirtschaftsgymnasiums Heidenheim

WS 1995/96 und SS 1996 VWL-Studium an der Universität Tübingen

WS 1996/97-WS 2001/02 Studium der Mathematik mit Nebenfach VWL
an der Universität Tübingen

07.09.1998 Vordiplom

27.04.2002 Diplom; Titel der Diplomarbeit: „Nullstellen irreduzibler Cha-
raktere“, betreut von Prof. Dr. P. Schmid

WS 2000/01-WS 2001/02 Wissenschaftliche Hilfskraft an der Universität
Tübingen

seit SS 2002: Promotion an der Universität Tübingen unter Betreuung von
Prof. Dr. Ch. Hering

SS 2002-SS 2006: Wissenschaftlicher Angestellter an der Universität Tübin-
gen

seit WS 2006/07 Stipendium nach dem Landesgraduiertenförderungsgesetz
(LGFG)

Meine akademischen Lehrer waren:

In Mathematik: K.-J. Engels, G. Betsch, P. Leinen, F. Loose, P. Schmid,
Ch. Hering, M. Voit, U. Felgner, E. Dettweiler, V. Batyrew, W. Grölz,
U. Riese, W. Kaup

In VWL: H. Kuhnle, G. Ronning, E. Schaich, W. Neuss, R. Wiegert, W.
Wiegard, D. Cansier, U. Walz