Wechselseitig vertauschbare Produkte endlicher Gruppen

Dissertation

der Fakultät für Mathematik und Physik
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Jonas Bochtler
aus Tübingen

2010

Tag der mündlichen Prüfung:	16.02.2010
Dekan:	Prof. Dr. W. Knapp
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. P. Hauck
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. H. Heineken

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Zusammenfassung

Zu einem der wichtigen gruppentheoretischen Probleme gehört die Untersuchung von Gruppen $G = AB$, die sich als Produkt zweier Untergruppen A und B faktorisieren lassen. Dabei steht die folgende Fragestellung im Mittelpunkt:

> Wie beeinflussen die Struktur und Einbettung der Faktoren A und B die Struktur der Gruppe G und umgekehrt?

Diesbezüglich besagt beispielsweise ein berühmtes Ergebnis von H. Wielandt und O. H. Kegel aus den Jahren 1958 und 1961, dass ein endliches Produkt zweier nilpotenter Untergruppen auflösbar ist (vgl. [22, Satz 2]). Bekannt ist aber auch, dass ein Produkt $G = AB$ zweier überauflösbarer Gruppen A und B im Allgemeinen nicht überauflösbar ist, selbst wenn sich die Faktoren normalisieren. Es stellt sich deshalb die Frage, welche Aussagen unter zusätzlichen Bedingungen an die Einbettung von A und B in G möglich sind. Da AB genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn A und B vertauschen (das heißt $AB = BA$ gilt), liegt ein Augenmerk auf der Analyse bestimmter Vertauschbarkeitseigenschaften der Faktoren A und B.

In den letzten Jahren hat dabei vor allem die Untersuchung wechselseitig und total vertauschbarer Produkte von Gruppen einen breiten Raum eingenommen. Nach A. Carocca [17] heißen zwei Untergruppen A und B einer Gruppe G *wechselseitig vertauschbar*, wenn A mit jeder Untergruppe von B und B mit jeder Untergruppe von A vertauscht. Wenn sogar jede Untergruppe von A mit jeder Untergruppe von B vertauscht, dann heißen A und B *total vertauschbar*. Ist dabei $G = AB$, so heißt G *wechselseitig (total) vertauschbares Produkt* (der Untergruppen A und B).

Eingeführt wurden die Konzepte wechselseitig bzw. total vertauschbarer Produkte 1989 von M. Asaad und A. Shaalan [3] als natürliche Verallgemeinerung normaler Produkte (das heißt Produkte zweier Normalteiler) bzw. zentraler Produkte. Tatsächlich sind diese Begriffe auch deutlich weitreichender: Die symmetrische Gruppe vom Grad 3 ist total vertauschbares Produkt ihrer 3- mit einer 2-Sylowuntergruppe, und im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wechselseitig vertauschbare Produkte auftreten, bei denen nicht einmal Subnormalität für einen der Faktoren gilt.

M. Asaad und A. Shaalan untersuchten die einleitende Frage für die Überauflösbarkeit endlicher Gruppen; auch in der vorliegenden Arbeit sei die Endlichkeit aller betrachteten Gruppen vorausgesetzt. Genauer bewiesen die Autoren in [3] das folgende Ergebnis:

> *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der überauflösbaren Untergruppen A und B.*
> *Ist G' nilpotent oder sind A und B total vertauschbar, dann ist G überauflösbar.*

Dies war zugleich der Beginn intensiver Studien wechselseitig und total vertauschbarer Produkte im Rahmen von Klassen von Gruppen und hinsichtlich Struktureigenschaften allgemein, was zu zahlreichen Variationen und wesentlichen Erweiterungen der Resultate aus [3] führte (vgl. [1, 6, 7, 9–16, 20, 21]). In [1] bewiesen M. J. Alejandre, A. Ballester-Bolinches und J. Cossey beispielsweise, dass auch die Core-Freiheit von $A \cap B$ in $G = AB$ für die Überauflösbarkeit der ganzen Gruppe hinreichend ist, wenn die Faktoren A und B überauflösbar und wechselseitig vertauschbar sind; dieses Ergebnis wird als ein Spezialfall von Korollar 6.3.2 in der vorliegenden Arbeit erscheinen. Desweiteren gilt die Abgeschlossenheit unter der Bildung total vertauschbarer Produkte $G = AB$ nicht nur für die Klasse $\mathfrak{U}$ aller überauflösbaren Gruppen, sondern für eine beliebige gesättigte Formation $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{U}$: In diesem Fall erhält man nach [10] sogar die Faktorisierung $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ des $\mathfrak{F}$-Residuums von G (das heißt des kleinsten Normalteilers von G mit zu $\mathfrak{F}$ gehörender Faktorgruppe).
Neben Formationen wurde bei diesen Studien ebenso der duale Klassentyp in den Blick genommen, die Fittingklassen. Für wechselseitig vertauschbare

Produkte bietet sich das in besonderem Maße an: Diese stellen wie erwähnt eine Verallgemeinerung normaler Produkte dar, und Fittingklassen sind nach Definition abgeschlossen unter der Bildung von Normalteilern und normaler Produkte. In [13] wurden spezielle Fittingklassen konstruiert, welche auch unter der Bildung wechselseitig vertauschbarer Produkte abgeschlossen sind. Eine beliebige Fittingklasse hat diese Abschlusseigenschaft jedoch im Allgemeinen nicht (vgl. [15]). J. C. Beidleman und H. Heineken zeigten in [13] aber, dass die Kommutatorgruppen A' und B' Subnormalteiler eines wechselseitig vertauschbaren Produkts $G = AB$ sind, woraus man sofort ableitet:

Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine Fittingklasse. (+)
Ist G in $\mathfrak{F}$ enthalten, dann gehören auch A' und B' zu $\mathfrak{F}$.

In [15] wurde später bewiesen, dass auch die zu (+) duale Aussage gilt:

Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine Fittingklasse. (++)
Gehören A und B zu $\mathfrak{F}$, dann ist auch G' in $\mathfrak{F}$ enthalten.

In der vorliegenden Arbeit wird die Untersuchung wechselseitig vertauschbarer Produkte im Zusammenhang mit Klassen von Gruppen (genauer Fittingklassen, Fittingformationen und gesättigten Formationen) weitergeführt, was unter anderem Erweiterungen der vorgestellten Ergebnisse zur Folge hat. Zuvor werden allgemeine Struktureigenschaften dieser Produkte studiert, welche die Basis für die anschließenden Beweise bilden und auch für sich von Interesse sind.

Kapitel 1 beinhaltet zunächst einige Grundlagen zu Klassen von Gruppen. Als ein hilfreiches Resultat für spätere Teile der Arbeit erweist sich Satz 1.2.1, wonach das $\mathfrak{F}$-Residuum $G^{\mathfrak{F}}$ einer (nicht notwendigerweise auflösbaren) Gruppe G bezüglich einer gesättigten Formation $\mathfrak{F}$ mit dem größten $\mathfrak{F}$-hyperexzentrischen Normalteiler von G zusammenfällt, wenn $G^{\mathfrak{F}}$ abelsch ist. Der Grund ist, dass $\mathfrak{F}$-zentrale Hauptfaktoren von G bekanntlich von den $\mathfrak{F}$-Projektoren gedeckt werden und sich letztere gerade als die Komplemente zu $G^{\mathfrak{F}}$ in G herausstellen.

In Kapitel 2 werden wechselseitig (und total) vertauschbare Produkte eingeführt und verschiedene Beispiele diskutiert. Bestimmte Eigenschaften dieser Beispiele zeigen Grenzen hinsichtlich späterer Fragestellungen auf, etwa zur Nähe wechselseitig vertauschbarer zu normalen Produkten: Beispiel 2.2.1 liefert wechselseitig vertauschbare Produkte $G = AB$ mit Normalteilern N und $\tilde{N}$ derart, dass $(A \cap N)(B \cap \tilde{N})$ keine Untergruppe von G ist. Für die Analyse der Vertauschbarkeit gewisser Untergruppen in wechselseitig vertauschbaren Produkten $G = AB$ ist Beispiel 2.2.3 aufschlussreich, wo $O^p(A)$ und $O^p(B)$ $(2, 3 \neq p \in \mathbb{P})$ nicht wechselseitig vertauschbar sind.

Kapitel 3 ist der Untersuchung allgemeiner struktureller Eigenschaften wechselseitig vertauschbarer Produkte gewidmet.
In Satz 3.1.1 findet sich zunächst ein Kriterium für die Existenz nichttrivialer π-Normalteiler ($\pi \subseteq \mathbb{P}$) von $G = AB$ in einem der wechselseitig vertauschbaren Faktoren A oder B. Dieses Resultat erweitert einen Satz von J. C. Beidleman und H. Heineken [12] und ist insbesondere für Induktionsargumente von beweistechnischem Nutzen. Als direkte Konsequenz des anschließenden Korollars 3.1.3 ergibt sich beispielsweise, dass im Fall eines nilpotenten Schnitts der Untergruppen A und B zu jedem Primteiler p von $|A \cap B|$ ein nichttrivialer p-Normalteiler von G in A oder B existiert; diese Situation liegt bei den in Kapitel 6 diskutierten Gruppen $G = AB$ stets vor, wo $A \cap B$ Core-frei in G ist.
Der Hauptsatz des nächsten Abschnitts (Satz 3.2.3) gibt eine Voraussetzung an Primzahlmengen π und ρ an, unter der $O^{\pi'}(A)$ subnormal (und bei Disjunktheit von π und ρ sogar normal) in $AO^{\rho'}(B)$ ist, wobei A und B wechselseitig vertauschbare Untergruppen einer Gruppe G seien. Diese Voraussetzung ist im wichtigsten Anwendungsfall $\pi = \{p\}$ und $\rho = \{q\}$ für Primzahlen p und q mit $p \geq q$ immer erfüllt. Das angeführte Resultat liefert zahlreiche Möglichkeiten, Subnormalteiler in wechselseitig vertauschbaren Produkten zu finden, und spielt in vielen späteren Beweisen eine Schlüsselrolle (insbesondere bei den Untersuchungen hinsichtlich Fittingklassen und -formationen, die ja abgeschlossen unter der Bildung von Subnormalteilern sind). Als Folgerung erhält man außerdem die Abgeschlossenheit der in [13] konstruierten Fittingklassen unter der Bildung wechselseitig vertauschbarer Produkte.
Der nachfolgende Abschnitt beinhaltet eine bemerkenswerte Strukturaussa-

ge zur Verwandtschaft wechselseitig vertauschbarer mit normalen Produkten. Als Gradmesser für letztere kann dienen, wie groß $N_B(A)$ in B wird (wenn A und B wechselseitig vertauschbar sind). Satz 3.3.4 besagt diesbezüglich, dass $N_B(A)$ das nilpotente Residuum $B^{\mathcal{N}}$ von B enthält. Dieser Satz dualisiert ein Ergebnis von J. C. Beidleman und H. Heineken [14] zu total vertauschbaren Produkten: Hier ist $B^{\mathcal{N}}$ in $C_B(A)$ enthalten, was auf symmetrische Weise die Nähe total vertauschbarer zu zentralen Produkten verdeutlicht. Insbesondere in den Kapiteln 5 und 6 der vorliegenden Arbeit wird Satz 3.3.4 ins Gewicht fallen, wo das Verhalten von Residuen wechselseitig vertauschbarer Untergruppen studiert wird.
Genauer untersucht werden in dieser Arbeit wie angedeutet auch wechselseitig vertauschbare Produkte $G = AB$, bei denen $A \cap B$ Core-frei in G ist. Der letzte Abschnitt von Kapitel 3 behandelt einige Eigenschaften einer solchen Gruppe $G = AB$. Zu diesem Zweck wird die Untergruppe T von G definiert durch die Forderung, T/N sei der Core von $(AN \cap BN)/N$ in G/N (für einen minimalen Normalteiler N von G). Der Nutzen dieser Definition zeigt sich in Induktionsbeweisen, weil die Faktorgruppe G/T wieder ein wechselseitig vertauschbares Produkt zweier Faktoren mit einem Core-freien Schnitt ist. Als hilfreiches Ergebnis erweist sich nun insbesondere Korollar 3.4.3, wonach A oder B sämtliche G-Hauptfaktoren unterhalb von T zentralisiert (bei geeigneter Wahl von N). Dieses Resultat bildet die Basis für die Beweise in Kapitel 6 zu wechselseitig vertauschbaren Produkten und gesättigten Formationen; als Folgerung liefert es außerdem einen Satz von A. Ballester-Bolinches, J. Cossey und M. C. Pedraza-Aguilera [7] sowie J. C. Beidleman und H. Heineken [12].

In den Kapiteln 4, 5 und 6 findet schließlich das Studium wechselseitig vertauschbarer Produkte in Verbindung mit verschiedenen Klassen von Gruppen statt.

Kapitel 4 nimmt diesbezüglich zunächst Fittingklassen $\mathfrak{F}$ in den Blick und dabei vor allem die zugehörigen $\mathfrak{F}$-Radikale (das $\mathfrak{F}$-Radikal $H_{\mathfrak{F}}$ einer Gruppe H ist der größte Normalteiler von H, der zur Fittingklasse $\mathfrak{F}$ gehört). Es wird der Zusammenhang zwischen den $\mathfrak{F}$-Radikalen $A_{\mathfrak{F}}$, $B_{\mathfrak{F}}$ und $G_{\mathfrak{F}}$ in einem wechselseitig vertauschbaren Produkt $G = AB$ untersucht, was auf Erweiterungen der Ergebnisse (+) und (++) von Seite 7 führt. Ein erster Schritt

in diese Richtung sind die Inklusionen $A' \cap G_{\mathfrak{F}} \leq A_{\mathfrak{F}}$ und $B' \cap G_{\mathfrak{F}} \leq B_{\mathfrak{F}}$, welche man sofort aus der von J. C. Beidleman und H. Heineken [13] bewiesenen Subnormalität von A' und B' in G ableitet. Diese Inklusionen verallgemeinern natürlich die Aussage (+). Das Hauptziel von Kapitel 4 ist es zu zeigen, dass sich das Resultat (++) auf ganz symmetrische Weise erweitern lässt, nämlich durch die Inklusion $G' \cap \langle A_{\mathfrak{F}}, B_{\mathfrak{F}} \rangle \leq G_{\mathfrak{F}}$.
Hierfür beginnt der erste Abschnitt mit einer Untersuchung der Gruppe $\langle A_{\mathfrak{F}}, B_{\mathfrak{F}} \rangle$. Es wird die Gleichheit $\langle A_{\mathfrak{F}}, B_{\mathfrak{F}} \rangle = A_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}}$ bewiesen, wonach das Produkt $A_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}}$ schon eine Untergruppe von G ist. Genauer macht Satz 4.1.1 die erstaunliche Aussage, dass die $\mathfrak{F}$-Radikale $A_{\mathfrak{F}}$ und $B_{\mathfrak{F}}$ in einem wechselseitig vertauschbaren Produkt $G = AB$ nicht nur vertauschen, sondern sogar ihrerseits wechselseitig vertauschbar sind.
Mit Hilfe dieses Resultats wird in Satz 4.2.1 dann gezeigt, dass $G' \cap A_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}}$ ein in $\mathfrak{F}$ enthaltener Subnormalteiler von G ist. Insbesondere gilt somit die Inklusion $G' \cap A_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}} \leq G_{\mathfrak{F}}$, welche die Aussage (++) als Spezialfall beinhaltet und die Inklusionen $A' \cap G_{\mathfrak{F}} \leq A_{\mathfrak{F}}$ und $B' \cap G_{\mathfrak{F}} \leq B_{\mathfrak{F}}$ wie gewünscht dualisiert.

Nach den befriedigenden Ergebnissen hinsichtlich Radikalen und Fittingklassen ist Kapitel 5 dem dualen Untergruppen- und Klassentyp gewidmet, den Residuen bezüglich Formationen.
Das in Satz 4.1.1 aufgezeigte Verhalten der Radikale von wechselseitig vertauschbaren Faktoren A und B motiviert zu Beginn die Frage, ob auch die Residuen $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$ bezüglich einer Formation $\mathfrak{F}$ (wechselseitig) vertauschbar sind. Tatsächlich führen die Strukturresultate aus Kapitel 3 diesbezüglich zunächst auf eine positive Aussage (Satz 5.1.1): Enthält die Formation $\mathfrak{F}$ die Klasse $\mathfrak{N}$ aller nilpotenten Gruppen, dann normalisieren sich die $\mathfrak{F}$-Residuen $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$ sogar (und sind damit insbesondere wechselseitig vertauschbar).
In Gegenbeispiel 5.1.3 wird dann aber ersichtlich, dass für eine beliebige Formation $\mathfrak{F}$ im Allgemeinen $A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}} \neq B^{\mathfrak{F}} A^{\mathfrak{F}}$ ist. Es liegt daher nahe, weitere Abschlusseigenschaften einer Formation $\mathfrak{F}$ zu ermitteln, welche die Vertauschbarkeit von $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$ in jedem wechselseitig vertauschbaren Produkt $G = AB$ garantieren.
In Satz 5.2.1 zeigt sich, dass hierfür die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{F}$ unter der Bildung von Normalteilern und normaler Produkte hinreichend ist, das heißt

$A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ stellt für eine Fittingformation $\mathfrak{F}$ eine Untergruppe von G dar. Anders als die zu $\mathfrak{F}$ gehörenden Radikale $A_{\mathfrak{F}}$ und $B_{\mathfrak{F}}$ sind jedoch die Residuen $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$ in dieser Situation im Allgemeinen nicht wechselseitig vertauschbar. Ehe der Frage nach der Vertauschbarkeit von Residuen später noch alternative Antworten zugeführt werden, erfolgt unter Anwendung von Satz 5.2.1 eine weitere Verallgemeinerung der Ergebnisse (+) und (++) von Seite 7 für Fittingformationen. Tatsächlich gelingt diese durch das Verhalten der zugehörigen Residuen auf symmetrische Weise wie durch das Verhalten der Radikale (vgl. Kapitel 4). Die Subnormalität von A' und B' in G liefert zunächst sofort die Inklusionen $(A')^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$ und $(B')^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$, welche die Aussage (+) für eine Fittingformation $\mathfrak{F}$ als Spezialfall beinhalten. Mit Hilfe der Vertauschbarkeit von $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$ wird in Satz 5.3.1 nun gezeigt, dass auch die Inklusion $(G')^{\mathfrak{F}} \leq A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ gilt. Diese erweitert das Resultat (++) und dualisiert zugleich $(A')^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$ sowie $(B')^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$.

In Kapitel 6 werden wechselseitig vertauschbare Produkte schließlich im Hinblick auf gesättigte Formationen untersucht.
Zunächst greift der erste Abschnitt noch einmal die Frage nach der Vertauschbarkeit von Residuen auf. Satz 6.1.1 gibt eine hinreichende Bedingung an eine Formation $\mathfrak{F}$ an, unter der $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ in jedem wechselseitig vertauschbaren Produkt $G = AB$ eine Untergruppe ist; diese Bedingung ist für eine gesättigte Formation $\mathfrak{F}$ stets erfüllt.
Damit rückt die Analyse eines Zusammenhangs zwischen $G^{\mathfrak{F}}$ und der Untergruppe $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ für eine gesättigte Formation $\mathfrak{F}$ in den Blick. Ein bereits zitiertes Resultat aus [10] liefert $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$, wenn $\mathfrak{F}$ die Klasse $\mathfrak{U}$ aller überauflösbaren Gruppen enthält und A und B total vertauschbar sind. Es ist bekannt, dass ein wechselseitig vertauschbares Produkt $G = AB$ mit $A \cap B = 1$ schon ein total vertauschbares Produkt ist; in diesem Fall gilt also wieder die Gleichheit $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ für eine gesättigte Formation $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{U}$. Das Hauptziel von Kapitel 6 ist eine Verallgemeinerung dieses Ergebnisses (Satz 6.3.1): Tatsächlich ist bereits die Trivialität von $(A \cap B)_G$ anstelle der Trivialität von $A \cap B$ hinreichend (mit $(A \cap B)_G$ ist der Core von $A \cap B$ in G bezeichnet). Die Inklusion $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$ gilt (im Fall $(A \cap B)_G = 1$) für eine gesättigte Formation $\mathfrak{F}$ auch ohne die Voraussetzung $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{U}$, wie sich in Satz 6.2.1 herausstellt.
Aus den angeführten Resultaten ergibt sich insbesondere (Korollar 6.3.2),

dass ein wechselseitig vertauschbares Produkt $G = AB$ mit $(A \cap B)_G = 1$ genau dann zu einer gesättigten Formation $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{U}$ gehört, wenn dies auf A und B zutrifft. Für den Spezialfall $\mathcal{F} = \mathcal{U}$ ist Korollar 6.3.2 gerade der Hauptsatz aus [1], desweiteren verallgemeinert dieses Ergebnis Sätze von J. C. Beidleman und H. Heineken [13]. Es wird außerdem dargestellt, wie mit Hilfe der Resultate aus Kapitel 6 die Arbeit [9] deutlich verkürzt werden kann. Die Aussage von Korollar 6.3.2 gilt im Allgemeinen nicht mehr, wenn die gesättigte Formation $\mathcal{F}$ nicht alle überauflösbaren Gruppen enthält oder $(A \cap B)_G \neq 1$ ist. In Korollar 6.3.3 findet sich aber eine Erweiterung von Satz 6.3.1, die auch im Fall $(A \cap B)_G \neq 1$ anwendbar ist.
Eine direkte Konsequenz des letztgenannten Korollars ist beispielsweise, dass ein wechselseitig vertauschbares Produkt $G = AB$ mit $B \in \mathcal{N}$ genau dann im Klassenprodukt $\mathcal{N}\mathcal{F}$ enthalten ist, wenn dies für A gilt ($\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ eine gesättigte Formation). Für $\mathcal{F}$ anstelle von $\mathcal{N}\mathcal{F}$ ist die Aussage jedoch im Allgemeinen falsch. Diese und weitere Beobachtungen zur Zugehörigkeit zu bestimmten Gruppenklassen entnimmt man den Gegenbeispielen des letzten Abschnitts.

An dieser Stelle möchte ich allen meinen herzlichen Dank aussprechen, die das Entstehen dieser Arbeit gefördert haben.
In allererster Linie gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. P. Hauck für die engagierte Betreuung meiner Arbeit und seine fortwährende Bereitschaft zur Diskussion. Seine wertvollen Hinweise und Anregungen haben diese Arbeit maßgeblich beeinflusst und seine Vorlesungen und Seminare mein Interesse an der Gruppentheorie erst geweckt.
Bei Herrn Prof. Dr. J. C. Beidleman und Herrn Prof. Dr. H. Heineken bedanke ich mich sehr für den regelmäßigen Austausch aktueller Forschungsergebnisse zu wechselseitig vertauschbaren Produkten und ihr stetes Interesse an meinen Resultaten.
Für zahlreiche fachliche Gespräche und für ihre Gastfreundschaft danke ich herzlich Herrn Prof. Dr. A. Ballester-Bolinches, Herrn Dr. R. Esteban-Romero, Frau Prof. Dr. A. Martínez-Pastor, Frau Prof. Dr. M. D. Pérez-Ramos und all ihren MitarbeiterInnen, die einen mehrwöchigen Aufenthalt in Valencia (Spanien) 2009 für mich zu einer bereichernden Zeit werden ließen.
Gefördert wurde diese Arbeit durch ein Stipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes, der ich hierfür ebenfalls Dank sagen möchte.

Notation

Generalvoraussetzung in dieser Arbeit sei die Endlichkeit aller betrachteten Gruppen.

Die verwendete Notation und Terminologie ist Standard und folgt bis auf wenige Ausnahmen [19]; insbesondere steht $X < G$ für eine echte Untergruppe X einer Gruppe G. Alle in der vorliegenden Arbeit gebrauchten Bezeichnungen, die von denen in [19] abweichen, sind nachstehend aufgelistet. (Dabei seien X und Y Untergruppen einer Gruppe G und $n \in \mathbb{N}$.)

$\mathrm{Fit}(G)$	Fittinguntergruppe von G
G^n	$\langle g^n \mid g \in G \rangle$
$X \trianglelefteq\trianglelefteq G$	X ist ein Subnormalteiler von G
X^Y	$\langle X^y \mid y \in Y \rangle$
	kleinste Y-invariante Untergruppe von G, die X enthält;
	für $Y = G$: normale Hülle von X in G
X_Y	$\bigcap_{y \in Y} X^y$
	größte in X enthaltene Y-invariante Untergruppe von G;
	für $Y = G$: Core von X in G
$[X] \cdot Y$	semidirektes Produkt von X mit Y
D_{2n}	Diedergruppe der Ordnung $2n$
S_n	symmetrische Gruppe vom Grad n
A_n	alternierende Gruppe vom Grad n
V_4	Kleinsche Vierergruppe

Kapitel 1

Klassen von Gruppen

Ein zentraler Aspekt dieser Arbeit ist, wie bereits in der Einleitung dargelegt, das Studium wechselseitig vertauschbarer Produkte in Verbindung mit bestimmten Klassen von Gruppen. Letztere sind Inhalt dieses Kapitels. Im ersten Abschnitt werden zunächst einige grundlegende Begriffe zusammengestellt, ehe im zweiten Teil eine genauere Untersuchung von Gruppen mit einem abelschen Residuum erfolgt.

1.1 Grundlegende Ergebnisse

Die in diesem Abschnitt aufgeführten Definitionen und Ergebnisse zu Klassen von Gruppen finden sich bis auf Lemma 1.1.9 in [19], auf dieses Buch sei auch für weitergehende Informationen verwiesen.

Gemäß [19, II Definitions (1.1)] ist eine *Klasse von Gruppen* $\mathfrak{X}$ abgeschlossen unter Isomorphie, für $H \in \mathfrak{X}$ und $G \cong H$ gilt demnach stets $G \in \mathfrak{X}$. Eine zu $\mathfrak{X}$ gehörende Gruppe wird im Folgenden auch $\mathfrak{X}$-*Gruppe* genannt. Ist in der vorliegenden Arbeit eine Klasse von Gruppen in beschreibender Form angegeben, so werden anstelle der Mengenklammern runde Klammern verwendet. Mit (H) wird die kleinste Gruppenklasse bezeichnet, welche die Gruppe H enthält.

Von den Klassen von Gruppen, welche in dieser Arbeit auftauchen werden, sind die wichtigsten nachstehend aufgelistet.

$\emptyset$	leere Klasse
$\mathcal{A}$	Klasse aller (endlichen) abelschen Gruppen
$\mathcal{E}$	Klasse aller endlichen Gruppen
$\mathcal{N}$	Klasse aller (endlichen) nilpotenten Gruppen
$\mathcal{S}$	Klasse aller (endlichen) auflösbaren Gruppen
$\mathcal{U}$	Klasse aller (endlichen) überauflösbaren Gruppen

Ist $\mathcal{X}$ eine Klasse von Gruppen und π eine Primzahlmenge, so wird mit $\mathcal{X}_\pi$ die Klasse aller Gruppen in $\mathcal{X}$ bezeichnet, deren Ordnung nur durch Primzahlen aus π teilbar ist (im Fall $\pi = \{p\}$ steht $\mathcal{X}_p$ anstelle von $\mathcal{X}_{\{p\}}$).

Die folgende Definition beinhaltet unter anderem eine häufig verwendete Operation, um aus zwei gegebenen Klassen von Gruppen eine weitere zu konstruieren (das *Klassenprodukt*). Außerdem wird der für diese Arbeit ebenfalls relevante Begriff der *Charakteristik* einer Klasse von Gruppen eingeführt.

Definition 1.1.1 ([19, II Definitions (1.2),(1.3)])**.** Seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ Klassen von Gruppen.
(a) Ihr *Klassenprodukt* $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{X}\mathcal{Y} = (H \mid H \text{ besitzt einen Normalteiler } N \in \mathcal{X} \text{ mit } H/N \in \mathcal{Y}).$$

Im Folgenden werden mitunter Potenzen $\mathcal{X}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) einer Gruppenklasse $\mathcal{X}$ auftauchen; diese sind induktiv definiert durch

$$\mathcal{X}^k = (\mathcal{X}^{k-1})\mathcal{X},$$

beginnend mit der von der trivialen Gruppe erzeugten Klasse $\mathcal{X}^0 = (1)$. Eine Gruppe in $\mathcal{X}^2$ wird auch *meta*-$\mathcal{X}$ genannt, Gruppen in $\mathcal{N}^2$ also beispielsweise *metanilpotent*.
(b) Die *Charakteristik* von $\mathcal{X}$ ist die Menge

$$\mathrm{Char}(\mathcal{X}) = \{p \in \mathbb{P} \mid Z_p \in \mathcal{X}\}.$$

Das Klassenprodukt ist nicht assoziativ, für Gruppenklassen $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ und $\mathcal{Z}$ also im Allgemeinen $(\mathcal{X}\mathcal{Y})\mathcal{Z} \neq \mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{Z})$. In [19, II Lemma (1.10)] sind jedoch hinreichende Bedingungen angegeben, unter denen die Gleichheit $(\mathcal{X}\mathcal{Y})\mathcal{Z} = \mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{Z})$ gilt. In der vorliegenden Arbeit werden diese Bedingungen in den jeweiligen Situationen stets erfüllt sein; das entsprechende Klassenprodukt wird dann einfach mit $\mathfrak{XYZ}$ bezeichnet.

Unter den Abbildungen zwischen Klassen von Gruppen spielen die *Abschlussoperatoren* eine besondere Rolle (vgl. [19, II Definitions (1.4)]). Im Folgenden sind die in dieser Arbeit zitierten Abschlussoperatoren aufgeführt.

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}\mathfrak{X} &= (H \mid H \text{ ist Untergruppe einer Gruppe } G \in \mathfrak{X})\\
\mathrm{S}_n\mathfrak{X} &= (H \mid H \text{ ist Subnormalteiler einer Gruppe } G \in \mathfrak{X})\\
\mathrm{N}_0\mathfrak{X} &= (H \mid H \text{ besitzt Subnormalteiler } K_i \in \mathfrak{X}\ (i \in \{1,\dots,r\}) \text{ mit}\\
&\qquad\qquad H = \langle K_1,\dots,K_r\rangle)\\
\mathrm{Q}\mathfrak{X} &= (H \mid H \text{ ist epimorphes Bild einer Gruppe } G \in \mathfrak{X})\\
\mathrm{R}_0\mathfrak{X} &= (H \mid H \text{ besitzt Normalteiler } N_i\ (i \in \{1,\dots,r\}) \text{ mit}\\
&\qquad\qquad H/N_i \in \mathfrak{X} \text{ und } \textstyle\bigcap_{i=1}^{r} N_i = 1)\\
\mathrm{E}_\phi\mathfrak{X} &= (H \mid H \text{ besitzt einen Normalteiler } N \leq \phi(H) \text{ mit } H/N \in \mathfrak{X})
\end{aligned}$$

Eine Klasse von Gruppen $\mathfrak{X}$ heißt C-*abgeschlossen* (für einen Abschlussoperator C), wenn die Gleichheit $\mathfrak{X} = \mathrm{C}\mathfrak{X}$ gilt. Durch ihre Abschlusseigenschaften lassen sich nun bestimmte Arten von Gruppenklassen definieren - drei der wichtigen Typen (*Fittingklassen*, *(Fitting)formationen*, *gesättigte Formationen*) werden im Folgenden vorgestellt. Diese drei Typen sind es auch, in deren Rahmen wechselseitig vertauschbare Produkte in den Kapiteln 4, 5 und 6 dieser Arbeit studiert werden.

Fittingklassen

Definition 1.1.2 ([19, II Definitions (2.8)]). Eine *Fittingklasse* ist eine Klasse von Gruppen, die S_n- und N_0-abgeschlossen ist.

Benannt sind Fittingklassen nach H. Fitting, der im Jahre 1938 zeigte, dass die Klasse $\mathfrak{N}$ aller nilpotenten Gruppen abgeschlossen unter dem Operator N_0 ist. Von den auf Seite 16 vorgestellten Gruppenklassen ist $\mathfrak{S}$ eine weitere Fittingklasse, die Klassen $\mathcal{A}$ und $\mathfrak{U}$ dagegen nicht (das Produkt zweier überauflösbarer Normalteiler ist im Allgemeinen nicht überauflösbar). Letztere Tatsache war es gerade, die M. Asaad und A. Shaalan wie in der Einleitung dieser Arbeit erwähnt zum Studium hinreichender Bedingungen für Überauflösbarkeit in wechselseitig vertauschbaren Produkten (als Verallgemeinerung von normalen Produkten) motivierte (vgl. [3]).

Zu einer Fittingklasse $\mathfrak{F}$ existiert in jeder Gruppe G das $\mathfrak{F}$-*Radikal* $G_{\mathfrak{F}}$.

Definition 1.1.3 (vgl. [19, II Lemma (2.9)])**.** Sei G eine Gruppe und $\mathfrak{F}$ eine Fittingklasse. Das $\mathfrak{F}$-*Radikal* $G_{\mathfrak{F}}$ von G ist die charakteristische Untergruppe

$$G_{\mathfrak{F}} = \langle K \trianglelefteq\trianglelefteq G \mid K \in \mathfrak{F} \rangle.$$

Offensichtlich ist $G_{\mathfrak{F}}$ der eindeutig bestimmte größte $\mathfrak{F}$-(Sub)normalteiler von G.

Es ist sofort einzusehen, dass für einen Subnormalteiler H von G die Gleichheit $H_{\mathfrak{F}} = H \cap G_{\mathfrak{F}}$ gilt. Beispiele für Radikale einer Gruppe G sind die Fittinguntergruppe $\mathrm{Fit}(G)$ (im Fall $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$) oder der größte π-Normalteiler $O_\pi(G)$ von G (für $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi$, $\pi \subseteq \mathbb{P}$).

Das Klassenprodukt zweier Fittingklassen braucht im Allgemeinen keine Fittingklasse zu sein; es lässt sich aber ein spezielles Klassenprodukt definieren, welches in diesem Fall nach [19, IX Theorem (1.12)] wieder auf eine Fittingklasse führt.

Definition 1.1.4 ([19, IX Definition (1.10)])**.** Sei $\mathfrak{F}$ eine Fittingklasse und $\mathfrak{Y}$ eine (beliebige) Klasse von Gruppen. Das *Fittingprodukt* $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{Y}$ von $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{Y}$ ist wie folgt definiert:

$$\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{Y} = (H \mid H/H_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{Y}).$$

Ist dabei $\mathfrak{Y} = \mathrm{Q}\mathfrak{Y}$, dann gilt offensichtlich die Gleichheit $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{Y} = \mathfrak{F}\mathfrak{Y}$. Dies wird in der vorliegenden Arbeit immer der Fall sein, wenn Klassenprodukte $\mathfrak{F}\mathfrak{Y}$ mit einer Fittingklasse $\mathfrak{F}$ auftreten.

(Fitting)formationen

Das Augenmerk liegt nun auf den Abschlussoperatoren Q und R_0, welche als duale Operatoren zu S_n und N_0 betrachtet werden können. In diesem Sinne ist der zu einer Fittingklasse duale Typ von Gruppenklasse eine *Formation*.

Definition 1.1.5 ([19, II Definition (2.2)])**.** Eine *Formation* ist eine Klasse von Gruppen, die Q- und R_0-abgeschlossen ist.

Alle auf Seite 16 aufgelisteten Klassen von Gruppen sind offensichtlich Formationen, dagegen ist etwa die Klasse aller (endlichen) zyklischen Gruppen nicht R_0-abgeschlossen.

In Analogie zu Definition 1.1.3 wird das $\mathfrak{F}$-*Residuum* $G^{\mathfrak{F}}$ einer Gruppe G bezüglich einer Formation $\mathfrak{F}$ eingeführt, welches das $\mathfrak{F}$-Radikal $G_{\mathfrak{F}}$ (im Fall einer Fittingklasse $\mathfrak{F}$) dualisiert.

Definition 1.1.6 (vgl. [19, II Lemma (2.4)])**.** Sei G eine Gruppe und $\mathfrak{F}$ eine Formation. Das $\mathfrak{F}$-*Residuum* $G^{\mathfrak{F}}$ von G ist die charakteristische Untergruppe

$$G^{\mathfrak{F}} = \bigcap\{N \trianglelefteq G \mid G/N \in \mathfrak{F}\}.$$

Offensichtlich ist $G^{\mathfrak{F}}$ der eindeutig bestimmte kleinste Normalteiler von G mit $\mathfrak{F}$-Faktorgruppe.

Für eine Untergruppe H und einen Normalteiler N von G gilt natürlich $(HN/N)^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}}N/N$. Als Beispiel für ein Residuum einer Gruppe G kann die Kommutatorgruppe G' dienen (im Fall $\mathfrak{F} = \mathcal{A}$). Besonderes Gewicht hat in dieser Arbeit (wie bereits einleitend erwähnt) der Fall $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$: Die nilpotenten Residuen $A^{\mathfrak{N}}$ und $B^{\mathfrak{N}}$ zweier wechselseitig vertauschbarer Untergruppen A und B einer Gruppe G zeigen ein bemerkenswertes Verhalten (vgl. Satz 3.3.4).

Wie schon bei Fittingklassen bewahrt das Klassenprodukt auch bei Formationen im Allgemeinen deren Abschlusseigenschaften nicht; die folgende Modifikation dieses Produktes liefert im Fall zweier Formationen aber wieder eine Formation (vgl. [19, IV Theorem (1.8)]) und dualisiert das Fittingprodukt.

Definition 1.1.7 ([19, IV Definition (1.7)])**.** Sei $\mathfrak{F}$ eine Formation und $\mathfrak{X}$ eine (beliebige) Klasse von Gruppen. Das *Formationsprodukt* $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F}$ von $\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{F}$ ist wie folgt definiert:

$$\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F} = (H \mid H^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}).$$

Es ist leicht einzusehen, dass unter der Voraussetzung $\mathfrak{X} = \mathrm{s}_n\mathfrak{X}$ die Gleichheit $\mathfrak{X} \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{F}$ gilt. In der vorliegenden Arbeit wird dies bei fast allen Klassenprodukten $\mathfrak{X}\mathfrak{F}$ mit einer Formation $\mathfrak{F}$ der Fall sein, einzige Ausnahme ist die in Gegenbeispiel 6.4.3 diskutierte Situation.

Eine große Rolle spielen in dieser Arbeit Formationen, welche gleichzeitig Fittingklassen sind.

Definition 1.1.8 (vgl. [19, II Lemma (2.12)])**.** Eine *Fittingformation* ist eine Klasse von Gruppen, die Fittingklasse und Formation ist.

Wie das folgende Lemma zeigt haben Fittingformationen die Eigenschaft, dass die Residuenbildung eine Faktorisierung $G = HK$ einer Gruppe G als Produkt zweier Subnormalteiler H und K erhält. Dieses Lemma ist eine Erweiterung von [19, II Lemma (2.12)], wo die entsprechende Aussage für Produkte von zwei Normalteilern bewiesen wird.

Lemma 1.1.9. *Sei die Gruppe $G = HK$ Produkt zweier Subnormalteiler H und K von G und $\mathfrak{F}$ eine Fittingformation.*
Dann ist $G^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}}K^{\mathfrak{F}}$.

Beweis. Für einen Subnormalteiler X einer Gruppe Y erhält man zunächst $X/(X \cap Y^{\mathfrak{F}}) \cong XY^{\mathfrak{F}}/Y^{\mathfrak{F}} \in \mathrm{s}_n(Y/Y^{\mathfrak{F}}) \subseteq \mathrm{s}_n\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ und deshalb

$$X^{\mathfrak{F}} \leq Y^{\mathfrak{F}}. \tag{$*$}$$

Seien nun

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_r = G$$

und

$$K = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_s = G$$

Subnormalreihen von G durch H bzw. K. Der Beweis des Lemmas erfolgt durch Induktion nach $r + s$. Der Fall $r = 0$ oder $s = 0$ ist klar mit der Beobachtung ($*$). Seien also $r, s \geq 1$. Dann ist $H_{r-1} = HK \cap H_{r-1} = H(K \cap H_{r-1})$ Produkt der Subnormalteiler H und $K \cap H_{r-1}$ mit den Subnormalreihen

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_{r-1}$$

und

$$K \cap H_{r-1} = K_0 \cap H_{r-1} \trianglelefteq K_1 \cap H_{r-1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_s \cap H_{r-1} = H_{r-1}.$$

Induktiv ist $(H_{r-1})^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}}(K \cap H_{r-1})^{\mathfrak{F}}$, und entsprechend gilt $(K_{s-1})^{\mathfrak{F}} = (K_{s-1} \cap H)^{\mathfrak{F}} K^{\mathfrak{F}}$. Dabei ist $G = H_{r-1}K_{s-1}$ Produkt der Normalteiler H_{r-1} und K_{s-1}, also $G^{\mathfrak{F}} = (H_{r-1})^{\mathfrak{F}}(K_{s-1})^{\mathfrak{F}}$ nach [19, II Lemma (2.12)]. Insgesamt folgt wie behauptet

$$\begin{aligned} G^{\mathfrak{F}} &= (H_{r-1})^{\mathfrak{F}}(K_{s-1})^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}}(K \cap H_{r-1})^{\mathfrak{F}}(K_{s-1})^{\mathfrak{F}} \\ &\overset{(*)}{=} H^{\mathfrak{F}}(K_{s-1})^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}}(K_{s-1} \cap H)^{\mathfrak{F}} K^{\mathfrak{F}} \overset{(*)}{=} H^{\mathfrak{F}} K^{\mathfrak{F}}. \end{aligned}$$

□

Gesättigte Formationen

Definition 1.1.10 ([19, II Definitions (2.1)])**.** Eine *gesättigte Formation* ist eine Formation, die E_ϕ-abgeschlossen ist.

Von den zu Beginn von Abschnitt 1.1 aufgelisteten Formationen ist lediglich die Klasse $\mathcal{A}$ nicht gesättigt.

Im Zusammenhang mit einer gesättigten Formation $\mathfrak{F}$ tauchen $\mathfrak{F}$-*Projektoren* und *deckende* $\mathfrak{F}$-*Untergruppen* auf.

Definition 1.1.11 ([19, III Definition (3.1),(3.5)])**.** Sei U Untergruppe einer Gruppe G und $\mathfrak{X}$ eine Klasse von Gruppen.
(a) U heißt $\mathfrak{X}$-*maximal* in G, wenn gilt:

(i) $U \in \mathfrak{X}$, und
(ii) ist $U \leq V \leq G$ und $V \in \mathfrak{X}$, so ist $U = V$.

(b) U ist ein $\mathfrak{X}$-*Projektor* von G, wenn

$$UN/N \ \mathfrak{X}\text{-maximal in } G/N \text{ für alle } N \trianglelefteq G$$

ist. Die Menge aller $\mathfrak{X}$-Projektoren von G wird mit $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(G)$ bezeichnet.
(c) U ist eine *deckende $\mathfrak{X}$-Untergruppe* von G, wenn

$$U \in \mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(V) \text{ für alle } U \leq V \leq G$$

ist. Die Menge aller deckenden $\mathfrak{X}$-Untergruppen von G erhält die Bezeichnung $\mathrm{Cov}_{\mathfrak{X}}(G)$.

Die Konzepte von $\mathfrak{X}$-Projektoren und deckenden $\mathfrak{X}$-Untergruppen wurden von W. Gaschütz 1969 bzw. 1963 entwickelt. Beispiele für deckende $\mathfrak{X}$-Untergruppen sind die p-Sylowuntergruppen einer endlichen Gruppe (für $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_p$) oder im Fall einer auflösbaren Gruppe deren Hall π-Untergruppen (für $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_\pi$). Tatsächlich waren diese Beispiele für W. Gaschütz gerade die Motivation für die Einführung von deckenden $\mathfrak{X}$-Untergruppen. In einer für die Formationstheorie wegweisenden Arbeit zeigte er im Jahre 1963, dass in jeder endlichen auflösbaren Gruppe deckende $\mathfrak{F}$-Untergruppen existieren und eine einzige Konjugiertenklasse bilden, wenn $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation ist. In diesem Fall fallen die deckenden $\mathfrak{F}$-Untergruppen außerdem genau mit den $\mathfrak{F}$-Projektoren zusammen, wie W. Gaschütz 1969 (sogar für eine $\mathfrak{S}$-Schunckklasse $\mathfrak{F}$) bewies (vgl. [19, III Theorem (3.21)]).

Bei einer nicht-auflösbaren Gruppe G geht die Konjugiertheit aller $\mathfrak{F}$-Projektoren und die Gleichheit $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Cov}_{\mathfrak{F}}(G)$ für eine gesättigte Formation $\mathfrak{F}$ im Allgemeinen verloren. P. Förster zeigte 1984 aber (tatsächlich sogar wieder für eine $\mathfrak{E}$-Schunckklasse $\mathfrak{F}$), dass die Existenz von $\mathfrak{F}$-Projektoren erhalten bleibt.

Satz 1.1.12 ([19, III Theorem (3.10)]). *Sei G eine (endliche) Gruppe und $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation.*
Dann ist $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}}(G) \neq \emptyset$.

In der bereits erwähnten Arbeit aus dem Jahre 1963 führte W. Gaschütz auch das Konzept einer *lokalen Formation* ein. Im selben Jahr bewies er gemeinsam mit seiner Schülerin U. Lubeseder den folgenden berühmten und bedeutenden Satz.

Satz 1.1.13 ([19, IV Theorem (4.6)]). *Eine Formation ist genau dann gesättigt, wenn sie lokal ist.*

Genauer wurde dieser Satz von W. Gaschütz und U. Lubeseder 1963 zunächst nur für ein auflösbares Universum bewiesen, im Jahre 1978 dann aber von P. Schmid auf alle endlichen Gruppen erweitert.

In der vorliegenden Arbeit wird von der lokalen Erklärbarkeit einer gesättigten Formation intensiv Gebrauch gemacht, weshalb dieses Konzept kurz vorgestellt wird.

Definition 1.1.14 ([19, IV Definitions (3.1)])**.** Sei f eine Abbildung, die jeder Primzahl p eine (möglicherweise leere) Formation $f(p)$ zuordnet (f heißt *Formationsfunktion*).
(a) Ein Hauptfaktor H/K einer Gruppe G heißt f*-zentral*, wenn

$$\mathrm{Aut}_G(H/K) \in f(p) \text{ für alle Primteiler } p \text{ von } |H/K|$$

ist. Andernfalls heißt H/K f*-exzentrisch*.
(b) Die durch f definierte *lokale Formation* $\mathfrak{F} = LF(f)$ ist die Klasse aller (endlichen) Gruppen, deren sämtliche Hauptfaktoren f-zentral sind.

Auf dieselbe Formation $\mathfrak{F} = LF(f)$ würde es führen, wenn in 1.1.14 nur die f-Zentralität aller nicht-Frattini Hauptfaktoren einer Gruppe gefordert würde. Offensichtlich ist für eine lokale Formation $\mathfrak{F} = LF(f)$ außerdem die Gleichheit $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \{p \in \mathbb{P} \mid f(p) \neq \emptyset\}$. Letztere Menge wird der *Träger* der Formationsfunktion f genannt.

Unter den lokalen Definitionen f einer Formation $\mathfrak{F} = LF(f)$ gibt es immer genau eine mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(i) *integriert* (das heißt es gilt $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ für alle $p \in \mathbb{P}$) und
(ii) *voll* (das heißt es gilt $f(p) = \mathfrak{S}_p f(p)$ für alle $p \in \mathbb{P}$).

Diese wird mit dem Großbuchstaben F versehen und heißt die *kanonische lokale Definition* von $\mathfrak{F} = LF(F)$ (vgl. [19, IV Theorem (3.7),(3.9)]).

Mit einer integrierten Formationsfunktion lässt sich weiter definieren.

Definition und Bemerkung 1.1.15 (vgl. [19, IV, 6])**.** Sei f eine integrierte lokale Definition der Formation $\mathfrak{F} = LF(f)$.
(a) Ein Hauptfaktor H/K einer Gruppe G heißt $\mathfrak{F}$*-zentral(exzentrisch)*, wenn

H/K f-zentral(exzentrisch) ist.
(b) Ein Normalteiler N einer Gruppe G heißt *$\mathfrak{F}$-hyperzentral(exzentrisch)*, wenn alle G-Hauptfaktoren unterhalb von N $\mathfrak{F}$-zentral(exzentrisch) sind. Das Produkt aller $\mathfrak{F}$-hyperzentralen(exzentrischen) Normalteiler von G ist die eindeutig bestimmte größte $\mathfrak{F}$-hyperzentrale(exzentrische) normale Untergruppe von G und wird mit $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ $(E_{\mathfrak{F}}(G))$ bezeichnet. $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ heißt das *$\mathfrak{F}$-Hyperzentrum* von G.
(c) Die obigen Begriffe sind wohldefiniert, da sie nicht von der speziellen Wahl der Formationsfunktion f mit $\mathfrak{F} = LF(f)$ abhängen, solange diese integriert ist.

Der Grund für die letzte Bemerkung ist die Tatsache, dass zwei integrierte lokale Definitionen f und $\tilde{f}$ von $\mathfrak{F} = LF(f) = LF(\tilde{f})$ die Gleichheit $\mathfrak{S}_p f(p) = \mathfrak{S}_p \tilde{f}(p)$ für alle $p \in \mathbb{P}$ erfüllen.

In dieser Arbeit werden insbesondere gesättigte (lokale) Formationen $\mathfrak{F}$ eine große Rolle spielen, welche die Klasse $\mathfrak{U}$ aller überauflösbaren Gruppen enthalten (vgl. Kapitel 6). Dieser Abschnitt über grundlegende Ergebnisse zu Gruppenklassen endet mit zwei sehr einfachen Beobachtungen, die in diesem Zusammenhang hilfreich sind.

Beobachtung 1.1.16. *Sei H/K ein Hauptfaktor einer Gruppe G und $\mathfrak{U}$ die (gesättigte) Formation aller überauflösbaren Gruppen.*
Ist H/K zyklisch, dann ist H/K $\mathfrak{U}$-zentral.

Beweis. Eine (integrierte) Formationsfunktion u, welche die lokale Formation $\mathfrak{U} = LF(u)$ definiert, ist nach [19, IV Examples (3.4)] durch

$$u(p) = \mathcal{A}(p-1) \text{ für alle Primzahlen } p$$

gegeben (wo $\mathcal{A}(p-1)$ die Klasse aller abelschen Gruppen bezeichnet, deren Exponent $p-1$ teilt). Ist nun p die Ordnung des zyklischen Hauptfaktors H/K von G, dann ist natürlich $\mathrm{Aut}_G(H/K) \in \mathcal{A}(p-1) = u(p)$, also H/K $\mathfrak{U}$-zentral. $\square$

Beobachtung 1.1.17. *Sei H/K ein Hauptfaktor einer Gruppe G und seien $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}$ gesättigte Formationen mit $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{F}$.*
Ist H/K $\mathfrak{D}$-zentral, dann ist H/K $\mathfrak{F}$-zentral.

Beweis. Seien D bzw. F die kanonischen lokalen Definitionen von $\mathcal{D} = LF(D)$ bzw. $\mathcal{F} = LF(F)$. Die Voraussetzung $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ impliziert [19, IV Proposition (3.11)] zufolge

$$D(p) \subseteq F(p) \text{ für alle Primzahlen } p.$$

Damit ist die Behauptung offensichtlich. $\square$

1.2 Gruppen mit abelschem Residuum

Der in diesem Abschnitt vorgestellte Satz beleuchtet den Fall, dass das $\mathfrak{F}$-Residuum $G^{\mathfrak{F}}$ einer (nicht notwendigerweise auflösbaren) Gruppe G bezüglich einer gesättigten Formation $\mathfrak{F}$ abelsch ist. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird vor allem auf Teil (c) des Satzes mehrfach zurückgegriffen, wonach in dieser Situation alle G-Hauptfaktoren unterhalb von $G^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-exzentrisch in G sind. Der Grund hierfür ist, dass $\mathfrak{F}$-zentrale Hauptfaktoren von G von den $\mathfrak{F}$-Projektoren gedeckt werden und sich letztere in Teil (a) des Satzes gerade als die Komplemente zu $G^{\mathfrak{F}}$ in G erweisen.

Satz 1.2.1. *Sei G eine Gruppe und $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation.*
Ist $G^{\mathfrak{F}}$ abelsch, dann gilt:

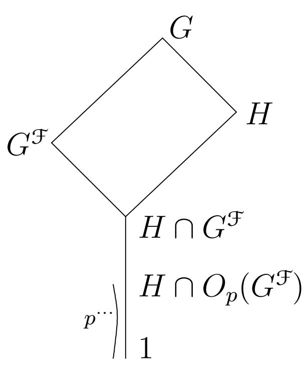
(a) $G^{\mathfrak{F}}$ ist komplementierbar in G, und die folgenden vier Untergruppentypen von G stimmen miteinander überein:

  (1) die $\mathfrak{F}$-Projektoren von G
  (2) die $\mathfrak{F}$-Supplemente zu $G^{\mathfrak{F}}$ in G
  (3) die Komplemente zu $G^{\mathfrak{F}}$ in G
  (4) die deckenden $\mathfrak{F}$-Untergruppen von G,

(b) alle $\mathfrak{F}$-Projektoren (deckenden $\mathfrak{F}$-Untergruppen) von G sind konjugiert,

(c) $G^{\mathfrak{F}}$ ist der größte $\mathfrak{F}$-hyperexzentrische Normalteiler von G.

Beweis. (a) Nach dem in Satz 1.1.12 zitierten Ergebnis von P. Förster ist $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}}(G) \neq \emptyset$. Sei E ein $\mathfrak{F}$-Projektor von G. Natürlich ist dann $G = EG^{\mathfrak{F}}$, also E ein $\mathfrak{F}$-Supplement zu $G^{\mathfrak{F}}$ in G.



Für eine Untergruppe H von G mit $G = HG^{\mathfrak{F}}$ und $H \in \mathfrak{F}$ wird nun gezeigt, dass der Schnitt $H \cap G^{\mathfrak{F}}$ trivial ist (was bedeutet, dass jedes $\mathfrak{F}$-Supplement bereits ein Komplement zu $G^{\mathfrak{F}}$ in G ist). Angenommen es sei $H \cap G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Dann ist $H \cap O_p(G^{\mathfrak{F}}) \neq 1$ für einen Primteiler p von $|H \cap G^{\mathfrak{F}}|$. Bezeichnet F die kanonische lokale Definition von $\mathfrak{F} = LF(F)$, so ist p als Teiler von $|H|$ natürlich im Träger von F enthalten.

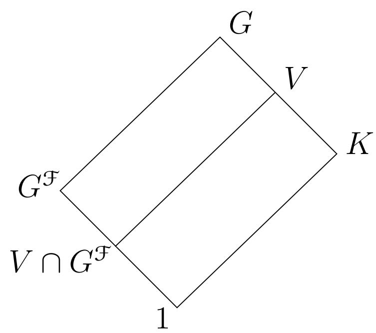
Die Zugehörigkeit von H zu $\mathfrak{F} = LF(F)$ bedingt deshalb [19, IV Theorem (3.2)] zufolge $H \in \mathcal{E}_{p'}\mathcal{S}_p F(p) = \mathcal{E}_{p'}F(p)$, so dass $H^{F(p)}$ eine p'-Gruppe ist. Nach [19, A Proposition (12.5)] gilt bei deren Operation auf der abelschen p-Gruppe $P = O_p(G^{\mathfrak{F}})$ via Konjugation die Zerlegung

$$P = [P, H^{F(p)}] \times C_P(H^{F(p)}),$$

wobei die Komponenten dieser Zerlegung normal in $G = HG^{\mathfrak{F}}$ sind. Als p-Normalteiler von H wird $H \cap P$ dabei vom p'-Normalteiler $H^{F(p)}$ von H zentralisiert, weshalb $1 \neq H \cap P \leq C_P(H^{F(p)})$ ist. Für den Normalteiler $N = O_{p'}(G^{\mathfrak{F}})[P, H^{F(p)}]$ von G gilt also $N < G^{\mathfrak{F}}$, und einen G-Hauptfaktor $G^{\mathfrak{F}}/R$ mit $N \leq R < G^{\mathfrak{F}}$ zentralisiert sowohl $H^{F(p)}$ (wegen der $\mathrm{Inn}(G)$-Isomorphie $G^{\mathfrak{F}}/N \cong C_P(H^{F(p)})$) als auch natürlich $G^{\mathfrak{F}}$. Mit $C = C_G(G^{\mathfrak{F}}/R)$ folgt

$$\mathrm{Aut}_G(G^{\mathfrak{F}}/R) \cong G/C \cong H/(H \cap C) \in \mathrm{Q}F(p) = F(p),$$

so dass $G^{\mathfrak{F}}/R$ $\mathfrak{F}$-zentral ist. Dies bedeutet $G^{\mathfrak{F}} \leq R < G^{\mathfrak{F}}$ und damit den endgültigen Widerspruch. Tatsächlich ist also $H \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$, und das $\mathfrak{F}$-Residuum $G^{\mathfrak{F}}$ wird von jedem seiner $\mathfrak{F}$-Supplemente in G bereits komplementiert.



Im nächsten Schritt wird bewiesen, dass ein Komplement K zu $G^{\mathfrak{F}}$ in G eine deckende $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G ist. Sei dazu V eine Untergruppe mit $K \leq V \leq G$. Zu zeigen ist, dass K ein $\mathfrak{F}$-Projektor von V ist. Da sich $V = V \cap G^{\mathfrak{F}}K = (V \cap G^{\mathfrak{F}})K$ als Produkt des abelschen Normalteilers $V \cap G^{\mathfrak{F}}$ und K schreiben lässt, reicht es dazu nach [19, III Lemma (3.14)] nachzuweisen, dass K eine $\mathfrak{F}$-maximale Untergruppe von V ist. Das ist tatsächlich der Fall: Natürlich ist $K \cong G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, und für eine Untergruppe U mit $K \leq U \leq V$ und $U \in \mathfrak{F}$ lässt sich $K = U$ folgern. Wegen $G = KG^{\mathfrak{F}} = UG^{\mathfrak{F}}$ ist U nämlich ein $\mathfrak{F}$-Supplement zu $G^{\mathfrak{F}}$ in G, so dass wie bereits gesehen $U \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$ und

$$K = K(U \cap G^{\mathfrak{F}}) = U \cap KG^{\mathfrak{F}} = U$$

gilt. Wie behauptet ist also jedes Komplement zu $G^{\mathfrak{F}}$ in G eine deckende $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G.

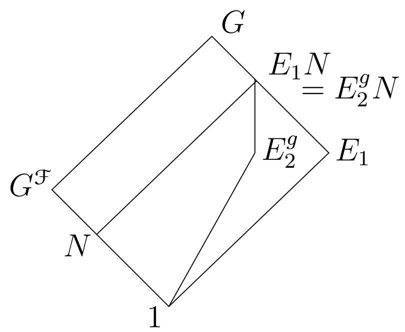
Es bleibt zu bemerken, dass in jeder Gruppe deckende $\mathfrak{F}$-Untergruppen natürlich $\mathfrak{F}$-Projektoren sind.

Insgesamt folgt also, dass die vier genannten Untergruppentypen (1) bis (4) von G miteinander übereinstimmen und wie eingangs erwähnt in G existent sind. Damit ist (a) gezeigt.

(b) Seien E_1 und E_2 $\mathfrak{F}$-Projektoren von G. Der Beweis ihrer Konjugiertheit erfolgt durch Induktion nach $|G|$. O.B.d.A. darf dabei von $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$ ausgegangen werden (sonst ist $E_1 = G = E_2$). Sei N ein minimaler Normalteiler von G mit $N \leq G^{\mathfrak{F}}$. Dann ist $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}/N$ abelsch, und natürlich sind E_1N/N und E_2N/N $\mathfrak{F}$-Projektoren von G/N. Induktiv ist $E_1N/N = (E_2N/N)^{gN}$, also

$$E_1N = (E_2N)^g = E_2^gN$$

für ein $g \in G$.



Zunächst wird nun $N < G^{\mathfrak{F}}$ angenommen. Dann ist $E_1N = E_2^gN < G$, denn sonst wäre $N < G^{\mathfrak{F}} = E_1N \cap G^{\mathfrak{F}} = (E_1 \cap G^{\mathfrak{F}})N$, also $E_1 \cap G^{\mathfrak{F}} \neq 1$ im Widerspruch zu (a). Außerdem ist

$$E_1N/(E_1N \cap G^{\mathfrak{F}}) \cong G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$$

und damit das $\mathfrak{F}$-Residuum $(E_1N)^{\mathfrak{F}}$ von E_1N als Untergruppe von $G^{\mathfrak{F}}$ abelsch. Desweiteren sind E_1 und E_2^g nach (a) deckende $\mathfrak{F}$-Untergruppen von G, also $\mathfrak{F}$-Projektoren von $E_1N = E_2^gN$. Induktiv sind E_1 und E_2^g (in $E_1N = E_2^gN$) konjugiert, was die Konjugiertheit von E_1 und E_2 (in G) impliziert.

Im Folgenden kann daher davon ausgegangen werden, dass $N = G^{\mathfrak{F}}$ ein minimaler Normalteiler von G ist. Dann ist $N = G^{\mathfrak{F}}$ eine elementarabelsche p-Gruppe für eine Primzahl p. Außerdem sind E_1 und E_2 nach (a) Komplemente zu $G^{\mathfrak{F}}$ in G. Wegen $G^{\mathfrak{F}} \cdot\!\!\trianglelefteq G$ sind diese maximal in G: Für eine maximale Untergruppe M_i von G mit $E_i \leq M_i$ ($i \in \{1, 2\}$) ist nämlich $M_i \cap G^{\mathfrak{F}} < G^{\mathfrak{F}}$ und $M_i \cap G^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq G$ (natürlich wird $M_i \cap G^{\mathfrak{F}}$ von M_i und der abelschen Gruppe $G^{\mathfrak{F}}$ normalisiert, ist also normal in $G = M_iG^{\mathfrak{F}}$), so dass die Minimalität von $G^{\mathfrak{F}}$ tatsächlich $M_i \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$ und $M_i = M_i \cap G^{\mathfrak{F}}E_i = (M_i \cap G^{\mathfrak{F}})E_i = E_i$ bedingt.

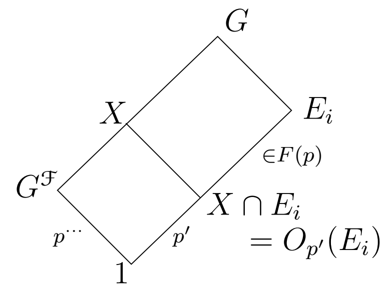
Sei nun

$$X/G^{\mathfrak{F}} = O_{p'}(G/G^{\mathfrak{F}}).$$

Die Isomorphie $G/G^{\mathfrak{F}} \cong E_i$ $(i \in \{1,2\})$ liefert dann, dass $X \cap E_i = O_{p'}(E_i)$ und

$$O_{p'}(E_1)G^{\mathfrak{F}} = X = O_{p'}(E_2)G^{\mathfrak{F}} \qquad (*)$$

gilt.



Im Folgenden wird für beide $i \in \{1,2\}$ die Gleichheit $E_i = N_G(O_{p'}(E_i))$ gezeigt: Die Inklusion $E_i \leq N_G(O_{p'}(E_i))$ ist klar. Wäre weiter $N_G(O_{p'}(E_i)) = G$ für ein $i \in \{1,2\}$, dann würden sich der p-Normalteiler $G^{\mathfrak{F}}$ und der p'-Normalteiler $O_{p'}(E_i)$ von G zentralisieren. Das ist aber unmöglich, wie sich unter Betrachtung von F, der kanonischen lokalen Definition von $\mathfrak{F} = LF(F)$, folgern lässt; o.B.d.A. darf dabei nämlich von $p \,\Big|\, |E_i|$ ausgegangen werden (sonst wäre $E_1 = O_{p'}(G) = E_2$ und nichts weiter zu zeigen), so dass p wegen $E_i \in \mathfrak{F}$ im Träger von F enthalten ist. Wie in (a) erhält man dann aus $E_i \in \mathfrak{F} = LF(F)$, dass $E_i \in \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{S}_pF(p) = \mathfrak{E}_{p'}F(p)$ gilt und $E_i/O_{p'}(E_i)$ der Formation $F(p)$ angehört (vgl. [19, IV Theorem (3.2)]). Mit $O_{p'}(E_i) \leq C_G(G^{\mathfrak{F}}) = C$ würde daher

$$\mathrm{Aut}_G(G^{\mathfrak{F}}) \cong G/C \cong E_i/(E_i \cap C) \in \mathrm{Q}F(p) = F(p)$$

folgen, weshalb $G^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-zentral wäre. Dies würde auf $G \in \mathfrak{F}$ führen, ein Widerspruch zu $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Demnach ist für beide $i \in \{1,2\}$ also $E_i \leq N_G(O_{p'}(E_i)) < G$. Da E_1 und E_2 maximale Untergruppen von G sind, erhält man wie behauptet $E_1 = N_G(O_{p'}(E_1))$ und $E_2 = N_G(O_{p'}(E_2))$.

Aus der Darstellung $(*)$ von X und aus $O_{p'}(E_i) \cap G^{\mathfrak{F}} = E_i \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$ $(i \in \{1,2\})$ folgt, dass $O_{p'}(E_1)$ und $O_{p'}(E_2)$ Komplemente zum p-Normalteiler $G^{\mathfrak{F}}$ in X sind. Nach dem Schur-Zassenhaus Theorem (vgl. [19, A Theorem (11.3)]) sind diese in G (genauer in X) konjugiert, was daher auch auf ihre Normalisatoren E_1 und E_2 zutrifft. Somit ist (b) bewiesen.

(c) Sei $E_{\mathfrak{F}}(G)$ der größte $\mathfrak{F}$-hyperexzentrische Normalteiler der Gruppe G (vgl. Definition und Bemerkung 1.1.15). Der Beweis der Gleichheit $E_{\mathfrak{F}}(G) = G^{\mathfrak{F}}$ erfolgt durch Induktion nach $|G|$. O.B.d.A. darf dabei wieder von $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$ ausgegangen werden (sonst gehört G zu $\mathfrak{F}$ und operiert auf jedem Normalteiler $\mathfrak{F}$-hyperzentral, weshalb $E_{\mathfrak{F}}(G) = 1 = G^{\mathfrak{F}}$ gilt). Sei N ein minimaler Normalteiler von G mit $N \leq G^{\mathfrak{F}}$. Wäre N $\mathfrak{F}$-zentral, dann wäre N im $\mathfrak{F}$-Hyperzentrum $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ und damit in jedem $\mathfrak{F}$-Projektor E von G enthalten, wie aus [19, IV Theorem (6.14)] folgt. Es würde also $1 \neq N \leq E \cap G^{\mathfrak{F}}$ gelten, ein Widerspruch zu (a). Daher ist N $\mathfrak{F}$-exzentrisch, und es lässt sich leicht die Gleichheit $E_{\mathfrak{F}}(G)/N = E_{\mathfrak{F}}(G/N)$ folgern. Da $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}/N$ abelsch ist, erhält man nun induktiv

$$E_{\mathfrak{F}}(G)/N = E_{\mathfrak{F}}(G/N) = (G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}/N$$

und wie behauptet $E_{\mathfrak{F}}(G) = G^{\mathfrak{F}}$. Damit ist (c) und der ganze Satz bewiesen. □

Bemerkung. Sei $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation und G eine Gruppe mit abelschem $\mathfrak{F}$-Residuum $G^{\mathfrak{F}}$. Dass $G^{\mathfrak{F}}$ genau von den $\mathfrak{F}$-Projektoren von G komplementiert wird und alle $\mathfrak{F}$-Projektoren konjugiert sind, ist der Inhalt von [8, Theorem 4.2.17] (in Verbindung mit [8, Theorem 4.2.15]). Im Fall einer auflösbaren Gruppe G ist dies ein Ergebnis von E. Shult: Er zeigte in [27] die Komplementierbarkeit von $G^{\mathfrak{F}}$ (und die Konjugiertheit aller Komplemente) genau durch die deckenden $\mathfrak{F}$-Untergruppen von G (die in auflösbaren Gruppen nach dem in Abschnitt 1.1 diskutierten Resultat von W. Gaschütz ja immer mit den $\mathfrak{F}$-Projektoren übereinstimmen).

Kapitel 2

Grundlagen zu wechselseitig vertauschbaren Produkten

In diesem Kapitel werden wechselseitig (und total) vertauschbare Produkte eingeführt. Auf die Vorstellung dieser Konzepte im ersten Abschnitt folgt im nächsten Teil eine Diskussion verschiedener Beispiele. Einige Eigenschaften dieser Beispiele werden für spätere Fragestellungen aufschlussreich sein, etwa zur Vererbung bestimmter Klassenzugehörigkeiten von wechselseitig vertauschbaren Faktoren auf ihr Produkt (Beispiel 2.2.2) oder zur Vertauschbarkeit gewisser Untergruppen der Faktoren (Beispiel 2.2.3). Der dritte Abschnitt dient schließlich dazu, einen Überblick über frühere strukturelle Ergebnisse zu wechselseitig vertauschbaren Produkten zu geben, welche im Laufe dieser Arbeit eine Rolle spielen werden.

2.1 Definition und Kriterien

Das Produkt AB zweier Untergruppen A und B einer Gruppe G ist genau dann selbst eine Untergruppe von G, wenn A und B vertauschen (das heißt $AB = BA$ gilt). Dies rückt die Analyse bestimmter Vertauschbarkeitseigenschaften von A und B in den Blick. In diesem Zusammenhang führten M. Asaad und A. Shaalan [3] die folgenden Konzepte ein, welche später von A. CAROCCA [17] als *wechselseitige (totale) Vertauschbarkeit* bezeichnet wurden.

Definition 2.1.1 (vgl. [3], [17, Definition 3.4])**.** Zwei Untergruppen A und B einer Gruppe G heißen *wechselseitig vertauschbar*, wenn A mit jeder Untergruppe von B und B mit jeder Untergruppe von A vertauscht. Ist $G = AB$ und sind A und B wechselseitig vertauschbar, dann heißt G *wechselseitig vertauschbares Produkt* (der Untergruppen A und B).

Eine noch stärkere Bedingung an die Vertauschbarkeit von Untergruppen wird in der nachstehenden Definition formuliert.

Definition 2.1.2 (vgl. [3], [17, Definition 3.4])**.** Zwei Untergruppen A und B einer Gruppe G heißen *total vertauschbar*, wenn jede Untergruppe von A mit jeder Untergruppe von B vertauscht. Ist $G = AB$ und sind A und B total vertauschbar, dann heißt G *total vertauschbares Produkt* (der Untergruppen A und B).

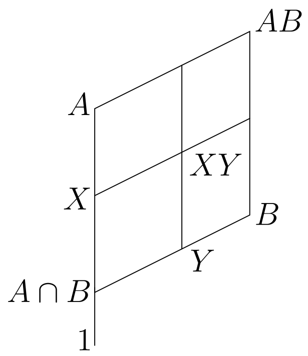
Wechselseitig vertauschbare Produkte verallgemeinern in natürlicher Weise normale Produkte (das heißt Produkte von Normalteilern). Dass dieser Begriff tatsächlich sehr viel weitreichender ist, belegen etwa die Beispiele des Abschnitts 2.2 (vgl. insbesondere die Diskussion in Beispiel 2.2.1). Der Frage nach der Nähe wechselseitig vertauschbarer zu normalen Produkten wird in dieser Arbeit immer wieder unter verschiedenen Blickwinkeln nachgegangen.

Typische Beispiele für total vertauschbare sind zentrale Produkte, darüber hinaus kann etwa auch die symmetrische Gruppe vom Grad 3 als total vertauschbares Produkt (ihrer 3- mit einer 2-Sylowuntergruppe) verstanden werden.

Offensichtlich ist jedes total ein wechselseitig vertauschbares Produkt, umgekehrt gilt dies im Allgemeinen nicht (vgl. Beispiel 2.2.2). Schneiden sich zwei wechselseitig vertauschbare Faktoren aber trivial, dann sind sie tatsächlich schon total vertauschbar, wie das nachstehende Lemma zeigt. Dessen Beweis nutzt lediglich die Dedekind-Identität und kann in [17] eingesehen werden.

Lemma 2.1.3 ([17, Proposition 3.5])**.** *Seien A und B wechselseitig vertauschbare Untergruppen einer Gruppe G.*

Dann sind $X \leq A$ und $Y \leq B$ wechselseitig vertauschbar, wenn $X \cap Y = A \cap B$ gilt; insbesondere sind A und B total vertauschbar, wenn $A \cap B = 1$ ist.



Abschließend folgen noch Kriterien für die wechselseitige Vertauschbarkeit von Gruppen. Mit deren Hilfe werden insbesondere die in Abschnitt 2.2 diskutierten Beispiele auf diese Eigenschaft hin überprüft.

Lemma 2.1.4. *Seien A und B Untergruppen einer Gruppe G.*
Dann gilt: A und B sind genau dann wechselseitig vertauschbar, wenn A mit jeder zyklischen Untergruppe von B vertauscht und umgekehrt.

Beweis. Sei Y eine Untergruppe von B und $ay \in AY$ (mit $a \in A, y \in Y$). Vertauscht A mit jeder zyklischen Untergruppe von B, dann gilt

$$ay \in A\langle y\rangle = \langle y\rangle A \subseteq YA$$

und folgt $AY \subseteq YA$, was bereits $AY = YA$ bedeutet. Eine entsprechende Überlegung für umgekehrte Rollen von A und B zeigt, dass die Vertauschbarkeit mit allen zyklischen Untergruppen des jeweils anderen Faktors für die wechselseitige Vertauschbarkeit von A und B hinreichend ist. Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist trivial. □

Aus dem nächsten Kriterium für die wechselseitige Vertauschbarkeit von Gruppen entspringt eine einfache Konstruktionsmöglichkeit, wie aus einem bestehenden wechselseitig vertauschbaren Produkt ein weiteres gewonnen werden kann (nämlich durch eine normale Erweiterung, bei der die Ausgangsgruppe als Faktorgruppe auftaucht). Dieses Prinzip findet an einigen Stellen in dieser Arbeit Anwendung, meist werden dabei zerfallende Erweiterungen mit Moduln der Ausgangsgruppen über endlichen Körpern gebildet (vgl. etwa Beispiel 2.2.3).

Lemma 2.1.5. *Seien A und B Untergruppen einer Gruppe G und N ein Normalteiler von G mit $N \leq A \cap B$.*
Dann gilt: A und B sind genau dann wechselseitig vertauschbar, wenn A/N und B/N wechselseitig vertauschbar sind.

Beweis. Die Notwendigkeit der wechselseitigen Vertauschbarkeit von A/N und B/N für die von A und B ist sehr leicht einzusehen. Gezeigt wird nun, dass diese Bedingung auch hinreichend ist: Für eine Untergruppe Y von B gilt unter letztgenannter Voraussetzung

$$(A/N)(YN/N) \leq G/N,$$

also

$$G \geq AYN = ANY = AY.$$

Auf entsprechende Weise folgt die Vertauschbarkeit von B mit allen Untergruppen von A und somit die Behauptung. □

Lemma 2.1.5 führt nicht nur auf ein Konstruktionsprinzip, wie aus einem wechselseitig vertauschbaren Produkt $G = AB$ ein neues gebildet werden kann, sondern auch auf eine weitere Faktorisierung von G, bei der die Faktoren wieder wechselseitig vertauschbar sind.

Lemma 2.1.6. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und N ein Normalteiler von G.*
Dann ist G auch wechselseitig vertauschbares Produkt von AN und BN.

Beweis. Es lässt sich einfach verifizieren, dass AN/N und BN/N wechselseitig vertauschbar sind. Eine Anwendung von Lemma 2.1.5 liefert damit die Behauptung. □

2.2 Beispiele

Die erste Gruppe G, welche im Folgenden als wechselseitig vertauschbares Produkt zweier Untergruppen A und B geschrieben wird, ist eine p-Gruppe ($p \in \mathbb{P}$) aus [26]. In der zitierten Arbeit klassifiziert L. Rédei die endlichen nicht-kommutativen Gruppen, deren sämtliche echten Untergruppen abelsch sind.

Beispiel 2.2.1. Eine solche Gruppe ist nach [26, Satz 7] auch durch nachstehende Präsentation gegeben:

$$G = \langle x, y \mid x^{p^l} = y^{p^m} = [x, y]^p = [x, y, x] = [x, y, y] = 1\rangle.$$

Hierbei sei p eine Primzahl und gelte $2 \leq l, m \in \mathbb{N}$. Aus [26, Satz 8] lassen sich die folgenden Eigenschaften von G entnehmen:

(i) Die Ordnung von G ist p^{l+m+1}, x hat die Ordnung p^l und y die Ordnung p^m.

(ii) $G' = \langle [x, y]\rangle$ hat die Ordnung p (und ist natürlich in $Z(G)$ enthalten).

(iii) Mit der Vertauschbarkeit von $[x, y]$ mit x und y erhält man außerdem

$$(x^p)^y = (x^y)^p = (x[x, y])^p = x^p[x, y]^p = x^p$$

und entsprechend $(y^p)^x = y^p$, was auf $\langle x^p\rangle\langle y^p\rangle \leq Z(G)$ führt.

Ins Blickfeld dieser Arbeit kam die angegebene Gruppe G ursprünglich beim Studium folgender Frage:

> Ist in einem wechselseitig vertauschbaren Produkt $G = AB$ für zwei Normalteiler N und $\tilde{N}$ das Produkt $(A \cap N)(B \cap \tilde{N})$ eine Untergruppe von G?

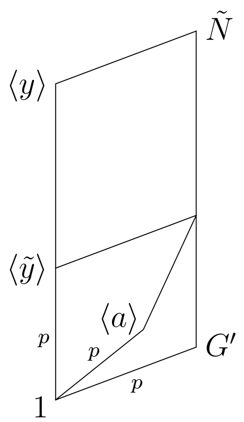
Die Antwort fällt natürlich positiv aus, wenn A oder B ein Normalteiler von G ist. Tatsächlich war es auch gerade die bereits angesprochene Untersuchung der Nähe wechselseitig vertauschbarer zu normalen Produkten, die diese Frage motivierte. Im Folgenden wird gezeigt, dass letztere aber im Allgemeinen zu verneinen ist: Die diskutierte Gruppe G stellt ein Gegenbeispiel dar.

Dazu werden die nachstehenden Normalteiler von G eingeführt:

$$N = \langle x\rangle G',$$
$$\tilde{N} = \langle y\rangle G'.$$

Aus Ordnungsgründen (vgl. (i) und (ii)) gilt dabei $\langle x\rangle \cap G' = 1 = \langle y\rangle \cap G'$, wegen der Zentralität von G' also

$$N = \langle x\rangle \times G'$$
$$\text{und} \quad \tilde{N} = \langle y\rangle \times G'.$$



Sei nun $\tilde{y}$ ein Element der Ordnung p aus $\langle y\rangle$ (etwa $\tilde{y} = y^{p^{m-1}}$). Da $m \geq 2$ gewählt wurde und $|\langle y\rangle| \overset{\text{(i)}}{=} p^m$ ist, gilt

$$\langle \tilde{y}\rangle \leq \langle y^p\rangle \overset{\text{(iii)}}{\leq} Z(G).$$

Desweiteren existiert in der elementarabelschen p-Gruppe $\langle \tilde{y}\rangle \times G'$ natürlich ein Element a mit

$$\langle a\rangle\langle \tilde{y}\rangle = \langle a\rangle G' \; (= \langle \tilde{y}\rangle \times G'), \tag{$*$}$$

beispielsweise $a = \tilde{y}[x, y]$. Für dieses Element setze

$$A = \langle x\rangle\langle a\rangle.$$

(Man beachte, dass mit $\langle \tilde{y}\rangle$ und G' auch $\langle a\rangle$ zentral in G ist, also A eine Untergruppe von G darstellt.) Analog lässt sich ein Element $b \in N \cap Z(G)$ finden mit $o(b) = p$ und $\langle b\rangle \cap \langle x\rangle = 1 = \langle b\rangle \cap G'$. Setze entsprechend

$$B = \langle y\rangle\langle b\rangle.$$

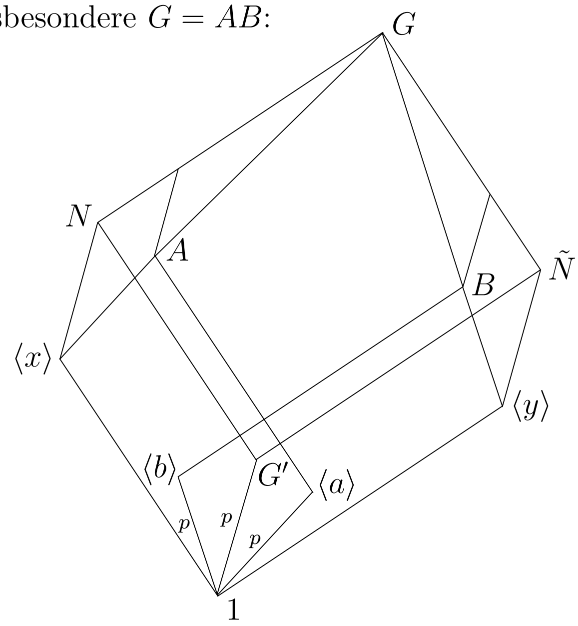
Für diese Untergruppen A und B von G gilt dann:

(1) $G = A\langle y\rangle = \langle x\rangle B$, also insbesondere $G = AB$:

Wegen der Wahl von a ist

$$\begin{aligned} A\langle y\rangle &= \langle x\rangle\langle a\rangle\langle y\rangle \\ &= \langle x\rangle\langle a\rangle\langle\tilde{y}\rangle\langle y\rangle \\ &\overset{(*)}{=} \langle x\rangle\langle a\rangle G'\langle y\rangle \\ &= \langle x\rangle\tilde{N} \\ &= G. \end{aligned}$$

Entsprechend kann $G = \langle x\rangle B$ geprüft werden.



(2) A und B sind wechselseitig vertauschbar:

$A = \langle x\rangle\langle a\rangle$ und $B = \langle y\rangle\langle b\rangle$ sind als zentrale Produkte zyklischer Gruppen natürlich abelsch, womit

$$A \cap B \trianglelefteq AB \overset{(1)}{=} G$$

folgt. Es lässt sich deshalb das Kriterium aus Lemma 2.1.5 anwenden, wonach A und B schon dann wechselseitig vertauschbar sind, wenn dies auf $A/(A \cap B)$ und $B/(A \cap B)$ zutrifft. Weil dabei

$$A \overset{(1)}{=} \langle x\rangle B \cap A = \langle x\rangle(B \cap A)$$

gilt, ist $A/(A \cap B) = \langle x(A \cap B)\rangle$ zyklisch, und die Untergruppen dieser Faktorgruppe sind genau die $\langle x^k\rangle(A \cap B)/(A \cap B)$ mit $k \in \mathbb{N}$. Zu prüfen ist also

$$\langle x^k\rangle B \leq G \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Im Fall $\langle x^k\rangle = \langle x\rangle$ wurde dies in (1) gezeigt. Ist dagegen $\langle x^k\rangle < \langle x\rangle$, so gilt

$$\langle x^k\rangle \leq \langle x^p\rangle \overset{\text{(iii)}}{\leq} Z(G)$$

und folglich wieder $\langle x^k\rangle B \leq G$. Dass umgekehrt auch alle Untergruppen von $B/(A \cap B)$ mit $A/(A \cap B)$ vertauschen (und A und B somit wie behauptet wechselseitig vertauschbar sind), erhält man auf entsprechende Weise.

(3) $A \cap N = \langle x \rangle$ und $B \cap \tilde{N} = \langle y \rangle$:
Nach Wahl von a ist $a \notin G' = N \cap \tilde{N}$, also $a \notin N$. Wegen $o(a) = p$ bleibt bloß $\langle a \rangle \cap N = 1$, und damit gilt tatsächlich

$$A \cap N = \langle x \rangle \langle a \rangle \cap N = \langle x \rangle (\langle a \rangle \cap N) = \langle x \rangle .$$

Die Gleichheit $B \cap \tilde{N} = \langle y \rangle$ folgt analog.

Natürlich sind die Untergruppen $\langle x \rangle$ und $\langle y \rangle$ von G nicht vertauschbar (aus Ordnungsgründen ist offensichtlich $\langle x \rangle \langle y \rangle \neq \langle x, y \rangle = G$). Zusammenfassend ist somit gezeigt worden:

> Es existieren wechselseitig vertauschbare Produkte $G = AB$ der Untergruppen A und B mit Normalteilern N und $\tilde{N}$ derart, dass das Produkt $(A \cap N)(B \cap \tilde{N})$ keine Untergruppe von G ist.

Diese Tatsache kann als Indiz dafür gewertet werden, dass das Konzept wechselseitig vertauschbarer Produkte deutlich allgemeiner als das normaler Produkte ist.

Das folgende Beispiel wurde von A. Ballester-Bolinches, J. C. Beidleman, J. Cossey, H. Heineken und M. C. Pedraza-Aguilera in [4] vorgestellt. Es ist aus zweierlei Gründen von besonderem Interesse: Zum einen stellt es (wie im Folgenden dargelegt wird) ein wechselseitig, aber nicht total vertauschbares Produkt mit einem Core-freien Schnitt der Faktoren dar. Zum anderen liefert es einen weiteren Aspekt zur Diskussion der Nähe wechselseitig vertauschbarer zu normalen Produkten.

Beispiel 2.2.2 (vgl. [4, Example 1])**.** Sei

$$B = \langle x, y \mid x^3 = [y, x, x], y^3 = [y, x, x]^2, [y, x]^3 = [y, x, x]^3 = [y, x, y] = 1 \rangle .$$

Nach [4] hat B die Ordnung 3^4 und die (maximale) Nilpotenzklasse 3. Weiter lässt sich aus [4] entnehmen:

(i) Alle Elemente aus $B \setminus B'$ haben die Ordnung 9. Außerdem gilt $|B'| = 9$ (wie Ordnung und Nilpotenzklasse von B bedingen), und B' ist elementarabelsch.

(ii) B^3 hat die Ordnung 3 (und ist wegen des Exponenten 3 von B/B' natürlich in B' enthalten).

(iii) B besitzt einen Automorphismus α mit

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x^2 \\ \text{und}\quad y^\alpha &= y^5. \end{aligned}$$

Man kann leicht prüfen, dass $o(\alpha) = 6$ ist.

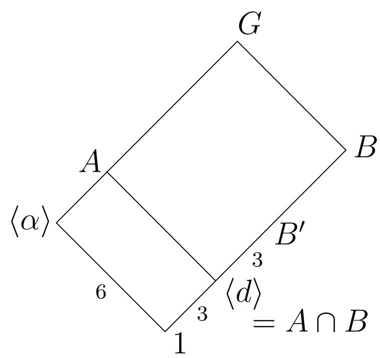
(iv) Für $d = [y, x][y^{-1}, x^{-1}]$ gilt $d^\alpha = d$. Eine einfache Rechnung zeigt außerdem $N_B(\langle d\rangle) < B$ (so wird $\langle d\rangle$ etwa von x nicht normalisiert).

Sei nun

$$G = [B] \cdot \langle\alpha\rangle$$

das semidirekte Produkt bezüglich der natürlichen Operation von $\langle\alpha\rangle$ auf B, und setze

$$A = \langle\alpha, d\rangle \overset{\text{(iv)}}{=} \langle\alpha\rangle \times \langle d\rangle.$$



Dann ist offensichtlich $G = AB$, und weiter gilt:

(1) A und B sind wechselseitig vertauschbar:
Sei $z \in B \setminus \langle d\rangle$. Ist $o(z) = 3$, dann ist (i) zufolge $z \in B'$ und

$$\langle d\rangle\langle z\rangle = B'.$$

Im Fall $o(z) > 3$ liefert (ii) die Gleichheit $\langle z^3\rangle = B^3$ ($\neq \langle d\rangle$ nach (iv)), und mit (i) folgt daher

$$\langle d\rangle\langle z\rangle = \langle d\rangle\langle z^3\rangle\langle z\rangle = B'\langle z\rangle.$$

Stets ist demnach $\langle d\rangle\langle z\rangle$ eine Untergruppe von B, welche B' enthält. Weil α auf B/B' einen Potenzautomorphismus induziert (man beachte $x^\alpha = x^2$ und $y^\alpha = y^5 \equiv y^2 \bmod B'$ wegen $y^3 \in B^3 \leq B'$), ist somit

$$A\langle z\rangle = \langle\alpha\rangle\langle d\rangle\langle z\rangle$$

eine Untergruppe von G. Man erhält die Vertauschbarkeit von A mit allen zyklischen Untergruppen von B, und es ist klar, dass umgekehrt auch der Normalteiler B mit allen (zyklischen) Untergruppen von A vertauscht. Wie in Lemma 2.1.4 gezeigt wurde, ist dies für die wechselseitige Vertauschbarkeit von A und B bereits hinreichend.

(2) A und B sind nicht total vertauschbar, und es ist $(A \cap B)_G = 1$:

Natürlich würde $\langle \alpha \rangle \leq A$ nur dann mit jeder Untergruppe von B vertauschen, wenn α ein Potenzautomorphismus von B wäre. Als solcher müsste α nach [18, Corollary 2.2.2.] aber B' zentralisieren, doch nicht einmal α^3 tut dies (es gilt $x^{\alpha^3} = x^{-1}$, also wird $1 \neq x^3 \in B'$ von α^3 invertiert). Weil ferner die Untergruppe $A \cap B = \langle d \rangle$ minimal und nicht normal in B ist (vgl. (iv)), folgt $(A \cap B)_G = \langle d \rangle_B = 1$ sofort.

Solche wechselseitig vertauschbaren Produkte $G = AB$ mit $(A \cap B)_G = 1$ werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch eingehend studiert, vor allem in Kapitel 6 im Zusammenhang mit gesättigten Formationen. Die dortigen Ergebnisse machen deutlich, dass sich diese Gruppen sehr ähnlich zu total vertauschbaren Produkten verhalten; tatsächlich sind ja (wie in Lemma 2.1.3 bemerkt) zwei wechselseitig vertauschbare Untergruppen A und B einer Gruppe G schon total vertauschbar, wenn nicht nur der Core von $A \cap B$ in AB, sondern $A \cap B$ selbst trivial ist. Dass darüber hinaus aber auch wechselseitig vertauschbare Produkte $G = AB$ mit $(A \cap B)_G = 1$ existieren, die nicht total vertauschbar sind (und die Untersuchung dieser Gruppen nicht unter das Studium total vertauschbarer Produkte fällt), zeigt das diskutierte Beispiel.

Für die Analyse dieser Produkte in Kapitel 6 wird außerdem die folgende einfache Beobachtung von Interesse sein:

(3) $G^{\mathcal{N}}$ ist nicht abelsch:

Es gilt nämlich $G^{\mathcal{N}} = B$, wie sich leicht verifizieren lässt: Die Inklusion $G^{\mathcal{N}} \leq B$ ist offensichtlich. Weil dazu α wie in (1) gesehen einen Potenzautomorphismus auf B/B' induziert, der die Elemente dieser Faktorgruppe invertiert, kann ein G-Hauptfaktor B/R nicht zentral sein, und es folgt in der Tat $G^{\mathcal{N}} = B$.

Wie bereits erwähnt gibt das vorliegende Beispiel zudem einen Hinweis darauf, wie sehr wechselseitig vertauschbare Produkte mit normalen Produkten verwandt sind. Ein Hauptsatz des nächsten Kapitels (Satz 3.3.4) besagt diesbezüglich, dass A vom nilpotenten Residuum $B^{\mathcal{N}}$ von B normalisiert wird (wenn A und B wechselseitig vertauschbar sind). In diesem Zusammenhang zeigt das diskutierte Beispiel Grenzen auf. Es gilt nämlich:

(4) A wird von B' nicht normalisiert:
Aus $o(\alpha) \overset{\text{(iii)}}{=} 6$ erhält man

$$\langle \alpha^3 \rangle = O_2(\langle \alpha \rangle \times \langle d \rangle) = O_2(A).$$

Würde B' also A normalisieren, dann auch $\langle \alpha^3 \rangle$. Dies hätte zur Folge, dass α^3 auf B' trivial operiert, was wie in (2) gezeigt aber nicht der Fall ist.

Das abschließende Beispiel nutzt die im Zusammenhang mit Lemma 2.1.5 kurz diskutierte Konstruktionsmöglichkeit, aus einem bestehenden wechselseitig vertauschbaren Produkt (hier der symmetrischen Gruppe S_3) ein weiteres zu gewinnen (nämlich durch eine Erweiterung, bei der ein S_3-Modul über einem endlichen Körper als Normalteiler und die S_3 als Faktorgruppe auftaucht).

Beispiel 2.2.3. Sei p eine Primzahl, $p \neq 2, 3$, und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Weiter sei

$$S_3 = \langle x, y \mid x^3 = y^2 = 1, x^y = x^{-1} \rangle$$

die symmetrische Gruppe vom Grad 3 und V ein treuer und irreduzibler S_3-Modul über $\mathbb{F}_p$. Dabei hat V die $\mathbb{F}_p$-Dimension 2 und enthält (verstanden als $\langle y \rangle$-Modul) den trivialen $\langle y \rangle$-Modul (der $\mathbb{F}_p$-Dimension 1) als Teil- und Faktormodul.

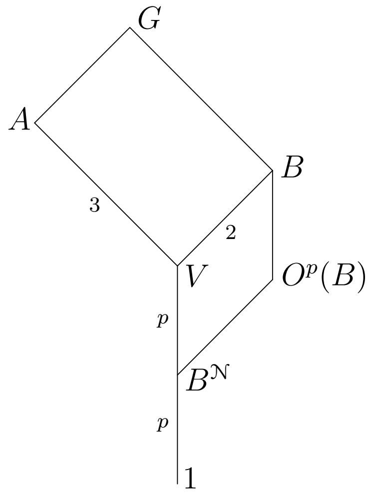
Schließlich sei

$$G = [V] \cdot S_3$$

das zugehörige semidirekte Produkt mit den Untergruppen

$$A = \langle x \rangle V$$
$$\text{und} \quad B = \langle y \rangle V.$$

Natürlich ist $G = AB$, und weiter gilt:



(1) A und B sind wechselseitig vertauschbar:

Nach Lemma 2.1.5 ist dies äquivalent zur wechselseitigen Vertauschbarkeit von A/V und B/V, also zu der von $\langle x \rangle$ und $\langle y \rangle$ (als Untergruppen der S_3). Diese ist offensichtlich.

Abschließend werden noch zwei einfache Beobachtungen vorgestellt, auf die im weiteren Verlauf der Arbeit zurückgegriffen wird. Sie sind insbesondere für das in Kapitel 5 und 6 stattfindende Studium von Residuen (bezüglich Formationen) in wechselseitig vertauschbaren Produkten aufschlussreich.

(2) $B^{\mathfrak{N}}$ ist nicht normal in G:

Nach Konstruktion von G ist $B^{\mathfrak{N}}$ eine echte Untergruppe von V und natürlich nicht trivial (wegen $p \neq 2$ würde y sonst V zentralisieren). Die Behauptung folgt aus der Irreduzibilität von V als S_3-Modul.

(3) $O^p(A)$ $(= A)$ und $O^p(B)$ sind nicht wechselseitig vertauschbar:

Unter der gegenteiligen Annahme würde $O^p(B)$ insbesondere mit der 3-Sylowuntergruppe $\langle x \rangle \leq O^p(A)$ von A vertauschen. Die Untergruppe $\langle x \rangle O^p(B)$ wäre dann wie G p-abgeschlossen, wobei $B^{\mathfrak{N}}$ die (einzige) p-Sylowuntergruppe von $O^p(B)$ ist und damit auch von $\langle x \rangle O^p(B)$ wäre (man beachte $p \neq 3 = |\langle x \rangle O^p(B) : O^p(B)|$). Es würde also

$$B^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq \langle x \rangle O^p(B)$$

und folglich $B^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq \langle x \rangle B = AB = G$ gelten, ein Widerspruch zu (2). Somit vertauscht $O^p(B)$ doch nicht mit jeder Untergruppe von $O^p(A)$, was die Behauptung beweist.

2.3 Überblick: Frühere Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden einige frühere Ergebnisse zur Struktur wechselseitig vertauschbarer Produkte zusammengestellt, welche für die weitere Arbeit von Bedeutung sind und häufig zitiert werden.

Das erste Lemma beleuchtet, wie sich die wechselseitige Vertauschbarkeit zweier Faktoren A und B auf Unter- und Faktorgruppen von $G = AB$ vererbt. Die Teile (a) und (b) sind in [13] zu finden, Teil (c) ist sehr leicht einzusehen.

Lemma 2.3.1 (vgl. [13, Lemma 1]). *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B.*

(a) Ist $U \leq G$, dann ist auch $(U \cap A)(U \cap B) \leq G$, und $U \cap A$ und $U \cap B$ sind wechselseitig vertauschbar.

(b) Ist $U \trianglelefteq G$, dann ist auch $(U \cap A)(U \cap B) \trianglelefteq G$.

(c) Ist $N \trianglelefteq G$, dann sind AN/N und BN/N wechselseitig vertauschbar; ist dabei $A \cap B \leq N$, dann sind AN/N und BN/N sogar total vertauschbar.

Im nächsten Lemma wird deutlich, dass der Schnitt der wechselseitig vertauschbaren Untergruppen A und B einer Gruppe $G = AB$ besondere Eigenschaften hat. Die Subnormalität von $A \cap B$ in G (Teil (a)) wurde in [17] gezeigt und wird in dieser Arbeit fortlaufend benutzt, meist ohne expliziten Verweis auf Lemma 2.3.2. Teil (b) ist ein Ergebnis aus [13].

Lemma 2.3.2 ([17, Proposition 3.5], [13, Lemma 1]). *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B.*

(a) $A \cap B$ ist subnormal in G.

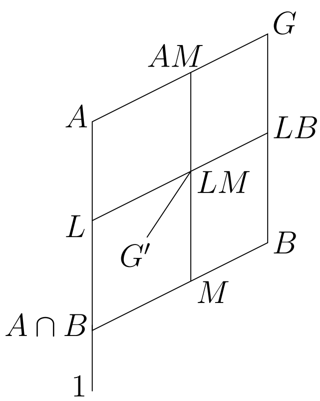
(b) $(A \cap B)^G/(A \cap B)_G$ ist nilpotent.

Neben dem Schnitt $A \cap B$ finden sich noch weitere interessante Beispiele für Subnormalteiler eines wechselseitig vertauschbaren Produkts $G = AB$, welche in den Faktoren A bzw. B enthalten sind. Dies beinhaltet der nachstehende Satz von J. C. Beidleman und H. Heineken [13].

Satz 2.3.3 ([13, Theorem 1]). *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B.*
Dann sind A' und B' subnormal in G.

Der eben angeführte Satz kann als Indiz dafür gewertet werden, dass eine gewisse Verbindung von wechselseitig vertauschbaren zu subnormalen Produkten besteht. Noch deutlicher wird dieser Zusammenhang durch folgendes Resultat aus [15].

Satz 2.3.4 ([15, Theorem 2]). *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B.*
Dann existieren Untergruppen L und M mit den folgenden Eigenschaften:



(i) $A' \leq L \leq A$, $B' \leq M \leq B$,

(ii) $A \cap B = L \cap M$,

(iii) $L, M \trianglelefteq\trianglelefteq G$,

(iv) $G' \leq LB \cap AM = LM$.

Satz 2.3.4 erlaubt die Aussage, dass Produkte $G = AB$ zweier wechselseitig vertauschbarer Untergruppen A und B nahe bei Produkten von Subnormalteilern liegen: Es existieren Subnormalteiler L bzw. M von G in den Faktoren A bzw. B derart, dass das Produkt LM groß genug wird, um ein Normalteiler von G mit einer abelschen Faktorgruppe zu sein. Es verwundert nicht, dass dieses Resultat insbesondere in den Kapiteln 4 und 5 der vorliegenden Arbeit zur Anwendung kommt, wo wechselseitig vertauschbare Produkte im Rahmen von Fittingklassen und -formationen studiert werden (die ja abgeschlossen unter der Bildung von Subnormalteilern sind).

Der Beweis von Satz 2.3.4 basiert vor allem darauf, dass die wechselseitig vertauschbaren Untergruppen A und B die Deck-Meide Eigenschaft im Sinne von [19, A Definition (10.8)] haben und bestimmte Hauptfaktoren ihres

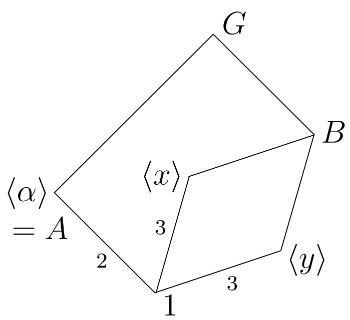
Produkts zentralisieren. Die letztgenannten Eigenschaften sind für die Untersuchung wechselseitig vertauschbarer Produkte von großer Bedeutung und wurden von J. C. Beidleman und H. Heineken in [13] bewiesen.

Satz 2.3.5 ([13, Lemma 1,2])**.** *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B.*

(a) Ist N ein minimaler Normalteiler von G, dann ist $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{1, N\}$.
(b) Ist N ein minimaler Normalteiler von G mit $A \cap N = 1$ und $N \leq B$, dann ist $A \leq C_G(N)$ oder $B \leq C_G(N)$; ist N nicht-zyklisch, dann ist $A \leq C_G(N)$.
(c) Ist N ein minimaler Normalteiler von G mit $A \cap N = 1 = B \cap N$, dann ist $A \leq C_G(N)$ oder $B \leq C_G(N)$, und N ist zyklisch (von Primzahlordnung).

Bemerkung. Die in diesem Abschnitt zusammengestellten Ergebnisse spielen in der Theorie wechselseitig vertauschbarer Produkte eine wichtige Rolle. Es sei jedoch abschließend darauf hingewiesen, dass sie wechselseitig vertauschbare Produkte nicht charakterisieren. Sei beispielsweise

$$B = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = [x, y] = 1 \rangle$$



eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 9 und $A = \langle \alpha \rangle \leq \mathrm{Aut}(B)$ die zyklische Gruppe der Ordnung 2 mit

$$x^\alpha = x$$
$$\text{und} \quad y^\alpha = y^{-1}.$$

Das zugehörige semidirekte Produkt

$$G = [B] \cdot A$$

besitzt offensichtlich alle in 2.3 aufgeführten Eigenschaften (natürlich außer denen aus Lemma 2.3.1): Die Inhalte von Lemma 2.3.2 und Satz 2.3.3 gelten wegen $A \cap B = A' = B' = 1$ trivialerweise. Mit $L = 1$ und $M = B$

finden sich desweiteren Untergruppen in A und B von der Art wie in Satz 2.3.4 angegeben. Außerdem sind sämtliche Hauptfaktoren von G zyklisch und werden vom Faktor $B = \mathrm{Fit}(G)$ zentralisiert; damit sind auch alle Aussagen von Satz 2.3.5 (Deck-Meide Eigenschaft der Faktoren, Zentralisation gewisser Hauptfaktoren) erfüllt. Aber dennoch sind A und B nicht wechselseitig vertauschbar; α ist kein Potenzautomorphismus von B, weshalb $A = \langle \alpha \rangle$ mit manchen Untergruppen von B (etwa $\langle xy \rangle$) nicht vertauscht.

Kapitel 3

Eigenschaften wechselseitig vertauschbarer Produkte

Dieses Kapitel ist der Untersuchung struktureller Eigenschaften wechselseitig vertauschbarer Produkte gewidmet. Die Ergebnisse bilden die Grundlage für die anschließenden Studien hinsichtlich Klassen von Gruppen und sind auch für sich von Interesse.

3.1 Existenz nichttrivialer π-Normalteiler

Zu Beginn wird ein Kriterium für die Existenz nichttrivialer π-Normalteiler ($\pi \subseteq \mathbb{P}$) von $G = AB$ in einem der wechselseitig vertauschbaren Faktoren A oder B vorgestellt (Satz 3.1.1). Dieses Resultat erweitert das Theorem 1 aus [12] (vgl. Korollar 3.1.2), wo J. C. Beidleman und H. Heineken zeigen, dass (irgend)ein nichttrivialer Normalteiler von G in A oder B enthalten ist. Tatsächlich stellen die Beweisideen von [12, Theorem 1] auch die Basis für den Beweis des folgenden Satzes dar.

Satz 3.1.1. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und π eine Primzahlmenge.*
Ist $(A \cap O_\pi(G))(B \cap O_\pi(G)) \neq 1$, dann ist schon $O_\pi(A_G)O_\pi(B_G) \neq 1$ (das heißt es existiert ein nichttrivialer π-Normalteiler von G in A oder B).

Beweis. Angenommen die Behauptung sei falsch. Sei dann $G = AB$ ein wechselseitig vertauschbares Produkt mit $(A \cap O_\pi(G))(B \cap O_\pi(G)) \neq 1$, mit $O_\pi(A_G)O_\pi(B_G) = 1$ und mit minimaler Ordnung unter all diesen Gegenbeispielen. Weiter sei N ein minimaler π-Normalteiler von G (man beachte $O_\pi(G) \neq 1$). Die wechselseitig vertauschbaren Untergruppen A und B haben Satz 2.3.5 zufolge die Deck-Meide Eigenschaft. Nach Wahl von G wird der minimale Normalteiler N von A und B gemieden; in dieser Situation ist $|N| = p$ für eine Primzahl $p \in \pi$, und o.B.d.A. darf von $A \leq C_G(N)$ ausgegangen werden (vgl. wieder Satz 2.3.5). Für das betrachtete minimale Gegenbeispiel gilt weiter:

(1) Es existiert ein G-Hauptfaktor K/N derart, dass K eine elementarabelsche p-Gruppe und $K = (A \cap K)N = (B \cap K)N$ ist:

Wäre $R = (A \cap O_\pi(G))(B \cap O_\pi(G))$ in N enthalten, so würde

$$1 \neq R = (A \cap R)(B \cap R) \subseteq (A \cap N)(B \cap N) = 1$$

gelten, ein Widerspruch. Also ist RN/N nichttrivial und desweiteren identisch mit $((AN/N) \cap O_\pi(G/N))((BN/N) \cap O_\pi(G/N))$. Für die wechselseitig vertauschbaren Faktorgruppen AN/N und BN/N bedingt die Wahl von G daher

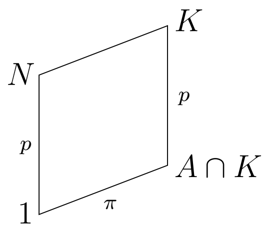
$$O_\pi((AN/N)_{G/N})O_\pi((BN/N)_{G/N}) \neq 1.$$

Es existiert somit ein π-Hauptfaktor K/N von G, der von A oder B gedeckt wird. Dabei ist Lemma 2.3.1 zufolge mit K auch $(A \cap K)(B \cap K)$ ein π-Normalteiler von G und nichttrivial (sonst würden K und insbesondere K/N von A und B gemieden). Nach Wahl von G gilt also $A \cap K \neq 1 \neq B \cap K$, was

$$(A \cap K)N \neq N \neq (B \cap K)N$$

bedeutet. Aufgrund der Deck-Meide Eigenschaft von A und B bleibt damit nur

$$(A \cap K)N = K = (B \cap K)N.$$



Weil überdies $A \cap K$ von N zentralisiert wird, ist $A \cap K$ normal in $(A \cap K)N = K$ mit einer zu N isomorphen Faktorgruppe. Man erhält

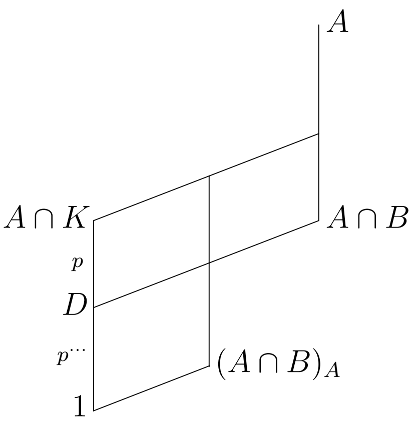
$$K'K^p \leq A \cap K \leq A,$$

so dass der π-Normalteiler $K'K^p$ von G trivial sein muss und K wie behauptet eine elementarabelsche p-Gruppe ist.

(2) K/N ist zyklisch:

Angenommen K/N sei nicht zyklisch. Für die Untergruppe $D = A \cap B \cap K$ gilt $|A \cap K : D| = p$, wie man aus

$$1 \neq |A \cap K : D| = |(A \cap K)(B \cap K) : B \cap K| \;\Big|\; |K : B \cap K| \overset{(1)}{=} |N| = p$$



erhält, und nach Annahme ist $|A \cap K| \overset{(1)}{=} |K : N| > p$. Folglich ist D nicht trivial, wohingegen

$$\begin{aligned} D_A = (A \cap B \cap K)_A &= A \cap B_A \cap K \\ &= A \cap B_G \cap K = 1 \end{aligned}$$

ist ($B_G \cap K$ ist ein in B enthaltener p-Normalteiler von G). Weiter lässt sich aus der wechselseitigen Vertauschbarkeit von A und B ableiten, dass $A \cap B$ eine quasinormale Untergruppe von A ist (das heißt mit allen Untergruppen von A vertauscht). Einem Resultat von R. Maier und P. Schmid aus [25, Theorem] zufolge ist daher $(A \cap B)/(A \cap B)_A$ in $Z_\infty(A/(A \cap B)_A)$ enthalten, dem Hyperzentrum von $A/(A \cap B)_A$. Insbesondere wird die p-Untergruppe D von $A \cap B$ von allen p'-Elementen aus A (und damit von deren Erzeugnis $O^p(A)$) modulo $(A \cap B)_A$ zentralisiert. Dies führt auf

$$[D, O^p(A)] \leq (A \cap B)_A \cap K = (A \cap B \cap K)_A = D_A = 1.$$

Also wird D und somit auch D^A von $O^p(A)$ zentralisiert. Dabei ist $D \leq D^A \leq A \cap K$ und wie gesehen $D \neq D^A$, so dass wegen $|A \cap K : D| = p$ nur $D^A = A \cap K$ bleibt. Man erhält

$$O^p(A) \leq C_A(A \cap K) = C_A(K/N),$$

die letzte Gleichheit aufgrund der $\mathrm{Inn}(A)$-Isomorphie

$$A \cap K \overset{(1)}{\cong} K/N.$$

Ganz analog lässt sich $O^p(B) \leq C_B(K/N)$ folgern. Insgesamt ist demnach $G/C_G(K/N)$ das Produkt zweier p-Gruppen, also selbst eine p-Gruppe. Der p-Hauptfaktor K/N ist damit zentral in G, weshalb die Annahme $|K/N| > p$ falsch war und K/N in der Tat zyklisch ist.

(3) Das Gegenbeispiel existiert nicht:

Die Indizes von $C_A(A \cap K)$ und $C_A(N)$ in A teilen $p-1$ (man beachte $|A \cap K| \overset{(1)}{=} |K/N| \overset{(2)}{=} p$ und $|N| = p$), woraus

$$O^{p'}(A) \leq C_A(A \cap K) \cap C_A(N) = C_A((A \cap K)N) \overset{(1)}{\leq} C_G(K)$$

folgt. Dieselben Argumente liefern $O^{p'}(B) \leq C_G(K)$, so dass $G/C_G(K)$ als Produkt von p'-Gruppen selbst eine p'-Gruppe ist. Insbesondere ist die elementarabelsche p-Gruppe K nach dem Satz von Maschke (vgl. [19, A Theorem (11.5)]) als $G/C_G(K)$-Modul (über dem Körper mit p Elementen) vollständig reduzibel. Der Teilmodul N wird daher in K komplementiert von einem (minimalen) Normalteiler $\tilde{N}$ von G,

$$K = N \times \tilde{N}.$$

Nach Wahl von G ist dabei $A \cap K < (A \cap K)\tilde{N}$ und folglich aus Ordnungsgründen $K = (A \cap K)\tilde{N}$. Dies führt auf die $\mathrm{Inn}(A)$-Isomorphien

$$\tilde{N} \cong K/(A \cap K) \cong N,$$

mit denen man

$$C_A(\tilde{N}) = C_A(N) = A$$

erhält. A zentralisiert demnach $K = N \times \tilde{N}$ und insbesondere $B \cap K$. Letztere Gruppe ist somit ein nichttrivialer π-Normalteiler von $AB = G$, der in B enthalten ist. Dies widerspricht der Wahl von G.

Ein Gegenbeispiel kann also nicht existieren, und damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Bemerkungen. (a) Die Aussage von Satz 3.1.1 ist im Allgemeinen falsch, wenn statt der Bedingung $(A \cap O_\pi(G))(B \cap O_\pi(G)) \neq 1$ nur die schwächere Forderung $O_\pi(G) \neq 1$ gestellt wird. Sei beispielsweise

$$G = S_3 \times \langle z \rangle$$

das direkte Produkt der symmetrischen Gruppe vom Grad 3,

$$S_3 = \langle x, y \mid x^3 = y^2 = 1, x^y = x^{-1} \rangle,$$

mit einer zyklischen Gruppe $\langle z \rangle$ der Ordnung 2. Setze

$$\begin{aligned} & A = S_3 \\ \text{und} \quad & B = \langle x \rangle \langle yz \rangle. \end{aligned}$$

Dann ist natürlich $G = AB$, und die Untergruppen A und B sind wechselseitig vertauschbar (sogar normal in G). Zwar ist $O_2(G) = \langle z \rangle \neq 1$, aber kein echter 2-Normalteiler von G ist in A oder B enthalten.
(b) Ist $A \cap O_\pi(G) \neq 1$, so existiert zwar Satz 3.1.1 zufolge ein nichttrivialer π-Normalteiler von G in A oder B, nicht aber zwangsläufig in A. Als Gegenbeispiel kann jedes wechselseitig vertauschbare Produkt $G = AB$ mit $A \neq 1$, $A_G = 1$ und der Menge π aller Primteiler von $|G|$ dienen (etwa $G = S_3$, $A \in \mathrm{Syl}_2(G)$ und $\pi = \{2, 3\}$).

Als Korollar zu Satz 3.1.1 erhält man wie schon erwähnt den folgenden Satz von J. C. Beidleman und H. Heineken [12].

Korollar 3.1.2 ([12, Theorem 1])**.** *Sei $G = AB$ (nichttriviales) wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B.*
Dann ist $A_G B_G \neq 1$.

Beweis. Mit der Menge π aller Primteiler von $|G|$ folgt die Behauptung direkt aus Satz 3.1.1. □

Eine weitere offensichtliche, aber für spätere Beweise hilfreiche Konsequenz von Satz 3.1.1 ist die nachstehende.

Korollar 3.1.3. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B, π eine Primzahlmenge und H ein Subnormalteiler von G, der in A enthalten ist (etwa $H = A'$ oder $H = A \cap B$).*
Ist $O_\pi(H) \neq 1$, dann ist $O_\pi(A_G)O_\pi(B_G) \neq 1$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$1 \neq O_\pi(H) \leq A \cap O_\pi(G)$$

und somit Satz 3.1.1 anwendbar. □

Ein mögliches Fazit aus den Resultaten dieses Abschnitts ist, dass unter gewissen Umständen durchaus vielerlei nichttriviale Normalteiler von $G = AB$ in den wechselseitig vertauschbaren Faktoren A oder B zu finden sind. Ist beispielsweise $A \cap B$ nilpotent, dann gilt $O_p(A_G)O_p(B_G) \neq 1$ für jeden Primteiler p von $|A \cap B|$ (vgl. Korollar 3.1.3). Diese Situation liegt etwa bei den in Kapitel 6 diskutierten Gruppen $G = AB$ vor, wo $A \cap B$ Core-frei in G ist. Die vorgestellten Ergebnisse werden dort von beweistechnischem Nutzen sein.

3.2 $O^{\pi'}(A)$ ist subnormal in $AO^{\rho'}(B)$

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts (Satz 3.2.3) beinhaltet eine Bedingung an Primzahlmengen π und ρ, unter der $O^{\pi'}(A)$ subnormal (und bei Disjunktheit von π und ρ sogar normal) in $AO^{\rho'}(B)$ ist, wobei A und B wechselseitig vertauschbare Untergruppen einer Gruppe G seien. Der häufigste Anwendungsfall ist der einelementiger Mengen $\pi = \{p\}$ und $\rho = \{q\}$ für Primzahlen p und q mit $p \geq q$. Die daraus resultierenden Möglichkeiten, (Sub)normalteiler in wechselseitig vertauschbaren Produkten zu erhalten, erweisen sich für viele spätere Beweise als hilfreich. Insbesondere im Zusammenhang mit den unter der Bildung von Subnormalteilern abgeschlossenen Fittingklassen und -formationen spielt das angeführte Resultat eine Schlüsselrolle.

Um dieses Ergebnis vorzustellen, werden zuvor zwei einfache Hilfsaussagen benötigt.

Lemma 3.2.1. *Sei G eine Gruppe, π eine Primzahlmenge und H ein Subnormalteiler mit π-Index in G.*
Dann ist $O^\pi(H) = O^\pi(G)$.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine Reihe

$$H = K_r \trianglelefteq K_{r-1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_1 = G,$$

wobei stets $K_{i+1} \trianglelefteq K_i$ und K_i/K_{i+1} eine π-Gruppe ist. Wegen $O^\pi(K_{i+1}) \operatorname{char} K_{i+1} \trianglelefteq K_i$ ist $O^\pi(K_{i+1}) \trianglelefteq K_i$ mit einer π-Faktorgruppe $K_i/O^\pi(K_{i+1})$. Folglich gilt $O^\pi(K_i) \leq O^\pi(K_{i+1})$. Dabei ist natürlich auch $K_{i+1}/O^\pi(K_i)$ eine π-Gruppe und gilt deshalb $O^\pi(K_{i+1}) \leq O^\pi(K_i)$. Man erhält die Gleichheit $O^\pi(K_{i+1}) = O^\pi(K_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ und damit die Behauptung

$$\begin{array}{r|l} & K_i \\ \pi & \\ & K_{i+1} \\ \pi & \\ & O^\pi(K_{i+1}) \end{array}$$

$$O^\pi(H) = O^\pi(K_r) = O^\pi(K_{r-1}) = \ldots = O^\pi(K_1) = O^\pi(G).$$

$\square$

Das nächste Lemma wird in den folgenden Abschnitten häufig benutzt und hat mehr technischen Charakter. Dabei wird in großem Maße von der Eigenschaft der Untergruppen A und B einer Gruppe G Gebrauch gemacht, wechselseitig vertauschbar zu sein. Man beachte, dass aus diesem Grund auch unter den gegebenen Voraussetzungen $X \leq A$ und $A \cap B \leq Y \leq B$ das Produkt XY eine Untergruppe von G ist (vgl. Lemma 2.1.3).

Lemma 3.2.2. *Seien A und B wechselseitig vertauschbare Untergruppen einer Gruppe G und π eine Primzahlmenge. Sei weiter $X \leq A$ und $A \cap B \leq Y \leq B$.*
Ist Y subnormal in XY $(= YX)$, dann wird $O^{\pi}(Y)$ von $O^{\pi'}(X)$ normalisiert.

Beweis. Sei $x \in X$ ein π-Element. Dann ist $\langle x \rangle Y$ eine Untergruppe von G wegen der wechselseitigen Vertauschbarkeit von A und Y (vgl. Lemma 2.1.3), und Y ist nach Voraussetzung ein Subnormalteiler mit π-Index in $\langle x \rangle Y$. Nach Lemma 3.2.1 gilt daher

$$O^{\pi}(Y) = O^{\pi}(\langle x \rangle Y) \trianglelefteq \langle x \rangle Y,$$

so dass $O^{\pi}(Y)$ von x und damit wie behauptet von $O^{\pi'}(X) = \langle x \in X \mid x\ \pi\text{-Element} \rangle$ normalisiert wird. $\square$

Bemerkung. Die Voraussetzungen aus Lemma 3.2.2 sind für $X = A$ und $Y = A \cap B$ erfüllt. Für zwei wechselseitig vertauschbare Untergruppen A und B einer Gruppe G und eine Primzahlmenge π gilt also stets

$$O^{\pi'}(A) \leq N_G(O^{\pi}(A \cap B)).$$

Nun kann der angekündigte Hauptsatz dieses Abschnitts aufgezeigt werden.

Satz 3.2.3. *Seien A und B wechselseitig vertauschbare Untergruppen einer Gruppe G und π und ρ Primzahlmengen derart, dass p kein Teiler von $q - 1$ ist für alle $p \in \pi$ und $q \in \pi \cup \rho$.*
Dann ist $O^{\pi'}(A)$ subnormal in $AO^{\rho'}(B)$.
Ist dabei $\pi \cap \rho = \emptyset$, dann ist $O^{\pi'}(A)$ sogar normal in $AO^{\rho'}(B)$.

Beweis. Setze $\tilde{A} = O^{\pi'}(A)(A\cap B)$ und $\tilde{B} = O^{\rho'}(B)(A\cap B)$. Die Untergruppen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ sind nach Lemma 2.1.3 wechselseitig vertauschbar. Ziel ist es nun,

$$\tilde{A} \trianglelefteq\trianglelefteq \tilde{A}\tilde{B}$$

zu zeigen. Dann ist nämlich $O^{\pi'}(A) \trianglelefteq \tilde{A} \trianglelefteq\trianglelefteq \tilde{A}\tilde{B}$ und natürlich $O^{\pi'}(A) \trianglelefteq A$. Wie im ersten Teil des Satzes behauptet folgt dann $O^{\pi'}(A) \trianglelefteq\trianglelefteq A(\tilde{A}\tilde{B}) = AO^{\rho'}(B)$ mit einem Resultat von R. Maier und H. Wielandt (vgl. [23, Theorem 7.7.1]).

Dabei ist $\tilde{A} \trianglelefteq\trianglelefteq A$ mit π'-Index $|A : \tilde{A}|$, so dass Lemma 3.2.1 zufolge $O^{\pi'}(\tilde{A}) = O^{\pi'}(A)$ ist. Analog erhält man $O^{\rho'}(\tilde{B}) = O^{\rho'}(B)$. Für die wechselseitig vertauschbaren Untergruppen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ gilt demnach $\tilde{A} = O^{\pi'}(\tilde{A})(\tilde{A} \cap \tilde{B})$ und $\tilde{B} = O^{\rho'}(\tilde{B})(\tilde{A} \cap \tilde{B})$. Um $\tilde{A} \trianglelefteq\trianglelefteq \tilde{A}\tilde{B}$ zu sehen, darf im Folgenden daher o.B.d.A. von

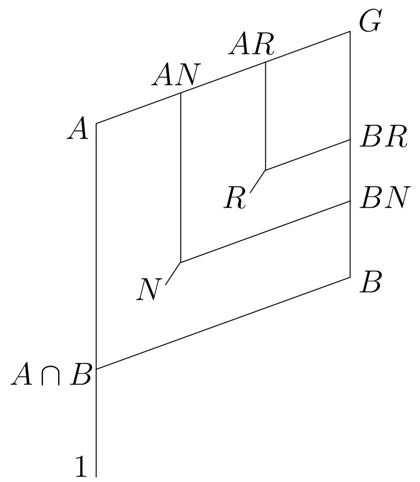
$$\begin{aligned} A &= \tilde{A} = O^{\pi'}(A)(A\cap B), \\ B &= \tilde{B} = O^{\rho'}(B)(A\cap B) \end{aligned} \tag{$*$}$$

und außerdem natürlich von $G = AB$ ausgegangen werden.

Für den weiteren Beweis werden die nachstehenden Normalteiler von G eingeführt:

$$N = (A\cap B)^G,$$
$$R = A^{\mathfrak{N}} N B^{\mathfrak{N}}.$$

Die Subnormalität von A in $G = AB$ gewinnt man nun in drei Schritten.



(1) $A \trianglelefteq\trianglelefteq AN$:
Nach Lemma 3.2.2 gilt zunächst

$$O^{\pi'}(A) \leq O^{(\pi\cup\rho)'}(A) \leq N_G(O^{(\pi\cup\rho)}(A\cap B)),$$

und entsprechend ist $O^{\rho'}(B) \leq N_G(O^{(\pi\cup\rho)}(A \cap B))$. Insgesamt führt dies auf

$$O^{(\pi\cup\rho)}(A \cap B) \trianglelefteq O^{\pi'}(A)(A \cap B)O^{\rho'}(B) \stackrel{(*)}{=} AB = G.$$

Als Erzeugnis von $(\pi\cup\rho)$-Subnormalteilern von $G/O^{(\pi\cup\rho)}(A\cap B)$ ist natürlich $N/O^{(\pi\cup\rho)}(A \cap B)$ selbst eine $(\pi \cup \rho)$-Gruppe.

Weiter haben A und B nach Satz 2.3.5 die Deck-Meide Eigenschaft. Dabei zentralisiert A jeden $(\pi\cup\rho)$-Hauptfaktor von G, den A meidet: Angenommen A zentralisiere einen solchen Hauptfaktor H/K nicht. Aus Satz 2.3.5 folgt dann, dass H/K zyklisch ist und von B zentralisiert wird. Ist $q \in \pi \cup \rho$ die Primzahl mit $|H/K| = q$, dann ist der Index von $C_G(H/K)$ in G ein Teiler von $q - 1$. Die Wahl von π und ρ bedingt nun, dass neben B auch alle π-Elemente von G in $C_G(H/K)$ enthalten sind. Es folgt $G = AB \stackrel{(*)}{=} O^{\pi'}(A)B = C_G(H/K)$, so dass die Annahme $A \not\leq C_G(H/K)$ falsch war.

Sei nun $O^{(\pi\cup\rho)}(A \cap B) = K_r \trianglelefteq K_{r-1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_1 = N$ eine Reihe derart, dass alle K_i/K_{i+1} $(\pi\cup\rho)$-Hauptfaktoren von G sind. Dann lässt sich folgern, dass $AK_{i+1} \trianglelefteq AK_i$ für alle i ist. Wird K_i/K_{i+1} nämlich von A gemieden, dann zentralisieren sich dieser $(\pi \cup \rho)$-Hauptfaktor und AK_{i+1}/K_{i+1} nach obiger Beobachtung. Man erhält

$$AK_{i+1}/K_{i+1} \trianglelefteq (AK_{i+1}/K_{i+1})(K_i/K_{i+1}) = AK_i/K_{i+1}$$

und $AK_{i+1} \trianglelefteq AK_i$. Im anderen Fall wird K_i/K_{i+1} von A gedeckt, so dass $AK_{i+1} = AK_i$ und nichts weiter zu zeigen ist. Nun liefert die Reihe

$$A = AK_r \trianglelefteq AK_{r-1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq AK_1 = AN$$

wie behauptet die Subnormalität von A in AN.

(2) $AN \trianglelefteq AR$:

Lemma 2.3.1 zufolge ist G/N total vertauschbares Produkt der Faktorgruppen AN/N und BN/N. Nach [14, Theorem 1] zentralisiert in einem total vertauschbaren Produkt stets ein Faktor das nilpotente Residuum des jeweils anderen Faktors. Insbesondere ist hier also

$$G/N \trianglerighteq (AN/N)^{\mathfrak{N}}(BN/N)^{\mathfrak{N}} = A^{\mathfrak{N}}NB^{\mathfrak{N}}/N = R/N$$

und R ein Normalteiler von G. Mit [14, Theorem 1] folgt weiter

$$AN/N \trianglelefteq (AN/N)(BN/N)^{\mathfrak{N}} = AR/N,$$

so dass tatsächlich $AN \trianglelefteq AR$ ist.

(3) $AR \trianglelefteq\trianglelefteq G$:

$A/(A \cap R)$ besitzt eine normale Hall π- und $B/(B \cap R)$ eine normale Hall ρ-Untergruppe, da $A^{\mathfrak{N}}$ und $B^{\mathfrak{N}}$ in R enthalten sind. Aufgrund der Gleichheiten $(*)$ können A bzw. B aber keine echten Normalteiler oberhalb von $A \cap B$ mit π'- bzw. ρ'-Faktorgruppe besitzen. Also ist AR/R eine π- und BR/R eine ρ-Gruppe, so dass ihr Produkt G/R eine $(\pi \cup \rho)$-Gruppe ist.

Die Aussage $AR \trianglelefteq\trianglelefteq G$ folgt nun wie in Schritt (1): In einer Reihe $R = K_r \trianglelefteq K_{r-1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_1 = G$ zentralisiert A jeden Hauptfaktor K_i/K_{i+1} von G, den A meidet (K_i/K_{i+1} ist eine $(\pi \cup \rho)$-Gruppe). Damit erhält man wieder $AK_{i+1} \trianglelefteq AK_i$ für alle i und somit die Reihe

$$AR = AK_r \trianglelefteq AK_{r-1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq AK_1 = G.$$

Wie behauptet ist also $AR \trianglelefteq\trianglelefteq G$.

Insgesamt liefern die obigen drei Schritte die Subnormalität von A in G. Wie eingangs aufgezeigt ist damit der erste Teil des Satzes bewiesen.

Für die Primzahlmengen π und ρ gelte nun zusätzlich $\pi \cap \rho = \emptyset$, und für zwei wechselseitig vertauschbare Untergruppen A und B einer Gruppe G setze wieder $\tilde{A} = O^{\pi'}(A)(A \cap B)$. Nach Lemma 2.1.3 gilt $\tilde{A}O^{\rho'}(B) \leq G$, und wie eben gezeigt ist $\tilde{A}$ ein Subnormalteiler von $\tilde{A}O^{\rho'}(B)$. Weil die Disjunktheit von π und ρ natürlich $O^{\pi}(O^{\rho'}(B)) = O^{\rho'}(B)$ bedingt, führt dies nach Lemma 3.2.2 auf

$$O^{\rho'}(B) \leq N_G(O^{\pi'}(\tilde{A})).$$

Lemma 3.2.1 zufolge ist $O^{\pi'}(\tilde{A}) = O^{\pi'}(A)$, und somit ist die Behauptung des Satzes vollständig bewiesen. □

Bemerkungen. (a) Seien p und q Primzahlen mit $p \geq q$. Die Voraussetzung an die Primzahlmengen π und ρ aus Satz 3.2.3 ist für $\pi = \{p\}$ und $\rho = \{p, q\}$ erfüllt. Für zwei wechselseitig vertauschbare Untergruppen A und B einer Gruppe G ist demnach stets

$$O^{p'}(A) \trianglelefteq\trianglelefteq AO^{\{p,q\}'}(B)$$

und insbesondere

$$O^{p'}(A) \trianglelefteq\trianglelefteq AO^{q'}(B).$$

Ist dabei $p > q$, dann erfüllen $\pi = \{p\}$ und $\rho = \{q\}$ auch die Zusatzbedingung $\pi \cap \rho = \emptyset$, so dass Satz 3.2.3 zufolge

$$O^{p'}(A) \trianglelefteq AO^{q'}(B)$$

gilt.
(b) Eine Verallgemeinerung der Aussage $O^{\pi'}(A) \trianglelefteq\trianglelefteq AO^{\rho'}(B)$ auf beliebige Primzahlmengen π und ρ ist unmöglich, auch im Fall $\pi = \rho$. Ein Gegenbeispiel ist jedes wechselseitig vertauschbare Produkt $G = AB$, bei dem A kein Subnormalteiler von G ist, in Verbindung mit der Menge $\pi = \rho$ aller Primteiler von $|G|$.
(c) Erfüllen zwei Primzahlmengen π und ρ die Voraussetzung aus Satz 3.2.3, aber ohne die Zusatzbedingung $\pi \cap \rho = \emptyset$, so ist die Aussage $O^{\pi'}(A) \trianglelefteq AO^{\rho'}(B)$ im Allgemeinen falsch. Als Gegenbeispiel kann die in Beispiel 2.2.1 diskutierte Gruppe dienen. Sie ist eine p-Gruppe ($p \in \mathbb{P}$) und lässt sich wie gesehen derart als wechselseitig vertauschbares Produkt von Untergruppen A und B schreiben, dass $A = O^{p'}(A)$ nicht normal in $AO^{p'}(B) = G$ ist.
(d) Ein späteres Ergebnis dieser Arbeit wird es ermöglichen, Satz 3.2.3 auf paarweise wechselseitig vertauschbare Untergruppen $G_1, \ldots, G_r$ ($r \in \mathbb{N}$) einer Gruppe G zu verallgemeinern (vgl. Korollar 5.2.2).

In vielen späteren Beweisen wird Satz 3.2.3 vor allem dazu genutzt, (Sub)normalteiler in wechselseitig vertauschbaren Produkten $G = AB$ zu finden. Darüber hinaus liefert dieses Resultat auch Möglichkeiten, aus Eigenschaften der Faktoren A und B Rückschlüsse auf deren Einbettung in ihr Produkt $G = AB$ zu ziehen. Eine solche Anwendung von Satz 3.2.3 ist Inhalt des folgenden Korollars.

Korollar 3.2.4. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B. Sei außerdem A/A' eine p- und B/B' eine q-Gruppe für Primzahlen p und q.*
Ist $p = q$, dann ist A (und B) subnormal in G.
Ist $p > q$, dann ist A sogar normal in G.

Beweis. Da in auflösbaren Gruppen jeder maximale Normalteiler eine abelsche Faktorgruppe hat, ist unter den gegebenen Voraussetzungen $A/A^{\mathcal{S}} = O^{p'}(A/A^{\mathcal{S}})$ und $B/B^{\mathcal{S}} = O^{q'}(B/B^{\mathcal{S}})$, also $A = O^{p'}(A)A^{\mathcal{S}}$ und $B = O^{q'}(B)B^{\mathcal{S}}$. Aus [7, Theorem 1] folgt dabei $B^{\mathcal{S}} \leq N_G(A) \leq N_G(O^{p'}(A))$, und [7, Corollary 1] besagt $A^{\mathcal{S}} \trianglelefteq G$.

Ist nun $p = q$, dann gilt Satz 3.2.3 zufolge $O^{p'}(A) \trianglelefteq\trianglelefteq AO^{p'}(B)$. Zudem ist wie gesehen $O^{p'}(A) \trianglelefteq AB^{\mathcal{S}}$, also $O^{p'}(A) \trianglelefteq\trianglelefteq AO^{p'}(B)B^{\mathcal{S}} = AB = G$ nach [23, Theorem 7.7.1]. Mit $A^{\mathcal{S}} \trianglelefteq G$ folgt wie behauptet

$$A = O^{p'}(A)A^{\mathcal{S}} \trianglelefteq\trianglelefteq G,$$

und aus Symmetriegründen ist auch $B = O^{p'}(B)B^{\mathcal{S}} \trianglelefteq\trianglelefteq G$.

Im Fall $p > q$ ist $O^{p'}(A) \trianglelefteq AO^{q'}(B)$ nach Satz 3.2.3. Mit derselben Argumentation wie eben lässt sich nun $A \trianglelefteq G$ folgern. □

Bemerkung. Allgemeiner lässt sich obiges Korollar natürlich auch für $\pi, \rho \subseteq \mathbb{P}$ anstelle von $p, q \in \mathbb{P}$ formulieren:
Ist A/A' eine π- und B/B' eine ρ-Gruppe für Primzahlmengen π und ρ, welche die Voraussetzung aus Satz 3.2.3 erfüllen, dann ist A subnormal in G. Ist dabei $\pi \cap \rho = \emptyset$, dann ist A sogar normal in G.
Diese Aussage kann genauso bewiesen werden wie Korollar 3.2.4, welches den Spezialfall $\pi = \{p\}$ und $\rho = \{q\}$ beinhaltet.

In [13] konstruierten J. C. Beidleman und H. Heineken Klassen von Gruppen (durch bestimmte Primzahlmengen), die abgeschlossen unter der Bildung wechselseitig vertauschbarer Produkte sind (vgl. dazu auch die einleitende Diskussion in Kapitel 4). Gemeinsam mit A. Ballester-Bolinches und M. C. Pedraza-Aguilera zeigten sie später in [5], dass die Abschlusseigenschaft dieser Gruppenklassen auch bezüglich Produkten $G = G_1 \cdots G_r$

($r \in \mathbb{N}$) von paarweise wechselseitig vertauschbaren Untergruppen $G_1, \dots, G_r$ bestehen bleibt.

Diese Ergebnisse erhält man nun auch als Korollare zu Satz 3.2.3. Davor muss der in [13] eingeführte Begriff einer *p-spezialen* Primzahlmenge ($p \in \mathbb{P}$) vorgestellt werden.

Definition 3.2.5 (vgl. [13])**.** Sei p eine Primzahl. Die Primzahlmenge π heißt *p-spezial*, wenn p kein Teiler von $q(q-1)$ ist für alle $q \in \pi$.

Damit lässt sich der erste Klassentyp beschreiben, der abgeschlossen unter der Bildung von Produkten paarweise wechselseitig vertauschbarer Untergruppen ist.

Korollar 3.2.6 ([5, Theorem 2])**.** *Sei $G = G_1 \cdots G_r$ ($r \in \mathbb{N}$) Produkt der paarweise wechselseitig vertauschbaren Untergruppen $G_1, \dots, G_r$ und π eine p-speziale Primzahlmenge für eine Primzahl p.*
Sind $G_1, \dots, G_r$ im Klassenprodukt $\mathcal{S}_p\mathcal{E}_\pi$ enthalten, dann gilt das auch für G.

Beweis. Sei $q \in \pi$. Nach Definition von π ist p von q verschieden und kein Teiler von $q-1$, also gilt Satz 3.2.3 zufolge

$$O^{p'}(G_i) \trianglelefteq G_i O^{q'}(G_j)$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, r\}$. Daher wird $O^{p'}(G_i)$ von $\prod_{q \in \pi} O^{q'}(G_j)$ normalisiert, wobei $G_j \in \mathcal{S}_p\mathcal{E}_\pi$ die Gleichheit

$$\prod_{q \in \pi} O^{q'}(G_j) = O^p(G_j)$$

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[d, dash, "\pi"'] \\ O^{p'}(G_i) \arrow[d, dash, "p^{\cdots}"'] \\ 1 \end{tikzcd}$$

bedingt. Somit ist

$$\langle O^{p'}(G_i) \mid i \in \{1, \dots, r\} \rangle$$

ein Normalteiler von $\langle O^{p'}(G_i), O^p(G_i) \mid i \in \{1, \dots, r\} \rangle = G$ mit π-Faktorgruppe. Nach Voraussetzung sind $O^{p'}(G_i)$ bzw. $O^{p'}(G_j)$ für alle $i, j \in \{1, \dots, r\}$ normale p-Sylowuntergruppen von G_i bzw. G_j und als solche nach [2, Corollary 1.3.3] miteinander vertauschbar. Insgesamt ist folglich

$$\langle O^{p'}(G_i) \mid i \in \{1, \dots, r\} \rangle = \prod_{i=1}^{r} O^{p'}(G_i) = O^\pi(G)$$

eine p-Gruppe und die Behauptung bewiesen. $\square$

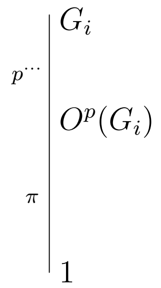
Auf fast identische Weise kann mit Satz 3.2.3 auch beim folgenden in [5] vorgestellten Klassentyp verifiziert werden, dass er abgeschlossen unter der Bildung wechselseitig vertauschbarer Produkte ist. Dabei wird im Vorhinein ein Ergebnis aus Kapitel 5 dieser Arbeit (Satz 5.2.1) zur Vertauschbarkeit gewisser Untergruppen in wechselseitig vertauschbaren Produkten zitiert.

Korollar 3.2.7 ([5, Corollary 2])**.** *Sei $G = G_1 \cdots G_r$ ($r \in \mathbb{N}$) Produkt der paarweise wechselseitig vertauschbaren Untergruppen $G_1, \ldots, G_r$ und π eine Primzahlmenge, in der keine Primteiler von $p(p-1)$ auftauchen für eine Primzahl p.*
Gehören $G_1, \ldots, G_r$ zum Klassenprodukt $\mathcal{E}_\pi \mathcal{S}_p$, dann gilt das auch für G.

Beweis. Sei $q \in \pi$. Nach Voraussetzung ist q von p verschieden und kein Teiler von $p-1$, so dass Satz 3.2.3 zufolge

$$O^{q'}(G_i) \trianglelefteq G_i O^{p'}(G_j)$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ gilt. Folglich wird $\prod_{q \in \pi} O^{q'}(G_i)$ von $O^{p'}(G_j)$ normalisiert, wobei $G_i \in \mathcal{E}_\pi \mathcal{S}_p$ natürlich



$$\prod_{q \in \pi} O^{q'}(G_i) = O^p(G_i)$$

bedingt. Daher ist

$$\langle O^p(G_i) \mid i \in \{1, \ldots, r\} \rangle$$

ein Normalteiler von $\langle O^p(G_i), O^{p'}(G_i) \mid i \in \{1, \ldots, r\} \rangle = G$ mit p-Faktorgruppe. Dabei sind $O^p(G_i)$ und $O^p(G_j)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ nach Voraussetzung π-Gruppen und Satz 5.2.1 zufolge vertauschbar. Insgesamt ist somit

$$\langle O^p(G_i) \mid i \in \{1, \ldots, r\} \rangle = \prod_{i=1}^{r} O^p(G_i) = O^p(G)$$

eine π-Gruppe und die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung. Die folgende alternative Argumentation im Beweis von Korollar 3.2.7 kommt (unter Anwendung des Feit-Thompson Theorems, wonach Gruppen ungerader Ordnung auflösbar sind) ohne den Vorgriff auf Satz 5.2.1 aus:
Nach Wahl von π ist $2 \notin \pi$ und somit $\mathcal{E}_\pi \mathcal{S}_p \subseteq \mathcal{S}$. Mit den Untergruppen G_i und G_j ist bekanntermaßen auch ihr wechselseitig vertauschbares Produkt $G_i G_j$ auflösbar für alle $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ (vgl. etwa [17, Corollary 1]). Dies ermöglicht eine Anwendung von [2, Lemma 1.3.2]: Demnach sind $O^p(G_i)$ und $O^p(G_j)$ als normale Hall π-Untergruppen von G_i und G_j vertauschbar (was im obigen Beweis mit Satz 5.2.1 begründet wurde).

3.3 $B^{\mathcal{N}}$ normalisiert A, $A^{\mathcal{N}}$ normalisiert B

Der Hauptsatz dieses Abschnitts (Satz 3.3.4) liefert einen bemerkenswerten Aspekt zur mehrfach angesprochenen Diskussion der Nähe wechselseitig vertauschbarer zu normalen Produkten. Als Gradmesser für letztere kann dienen, wie groß $N_B(A)$ in B wird (wenn A und B wechselseitig vertauschbar sind). Satz 3.3.4 besagt diesbezüglich, dass $N_B(A)$ das nilpotente Residuum $B^{\mathcal{N}}$ von B enthält. Mit diesem Satz wird zugleich ein Ergebnis von J. C. Beidleman und H. Heineken [14] zu total vertauschbaren Produkten dualisiert: Hier ist $B^{\mathcal{N}}$ in $C_B(A)$ enthalten, was auf symmetrische Weise die Verwandtschaft total vertauschbarer mit zentralen Produkten unterstreicht. Die Ergebnisse dieses Abschnitts geben insbesondere Aufschluss über das Verhalten von Residuen bezüglich Formationen in wechselseitig vertauschbaren Produkten. Sie kommen daher vor allem in den Kapiteln 5 und 6 der vorliegenden Arbeit zur Anwendung, wo dieses Verhalten untersucht wird.

Der Beweis von Satz 3.3.4 wird mit einigen Lemmata vorbereitet.

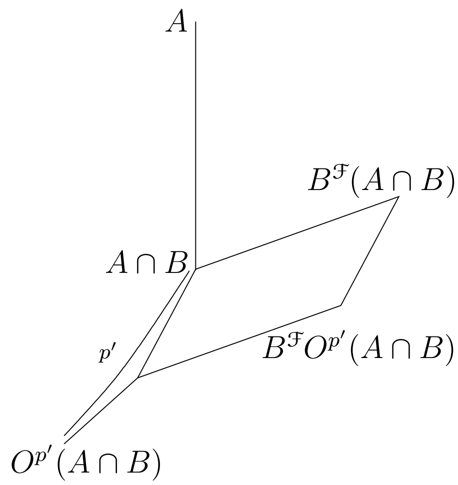
Lemma 3.3.1. *Seien A und B wechselseitig vertauschbare Untergruppen einer Gruppe G und $\mathcal{F}$ eine gesättigte Formation.*
Ist $B^{\mathcal{F}} = O^{p'}(B^{\mathcal{F}})$ für eine Primzahl $p \in \mathrm{Char}(\mathcal{F})$, dann wird $O^p(A)$ von $B^{\mathcal{F}}$ normalisiert.

Beweis. Setze $\tilde{A} = O^p(A)(A \cap B)$. Die Untergruppen $\tilde{A}$ und B sind nach Lemma 2.1.3 wechselseitig vertauschbar. Außerdem ist $\tilde{A} \trianglelefteq\trianglelefteq A$ mit p-Index $|A : \tilde{A}|$, so dass Lemma 3.2.1 zufolge $O^p(\tilde{A}) = O^p(A)$ und $\tilde{A} = O^p(\tilde{A})(\tilde{A} \cap B)$ ist. Um zu zeigen, dass $O^p(\tilde{A}) = O^p(A)$ von $B^{\mathcal{F}}$ normalisiert wird, darf im Folgenden daher o.B.d.A. von

$$A = \tilde{A} = O^p(A)(A \cap B)$$

ausgegangen werden.

Aufgrund der Voraussetzung $B^{\mathcal{F}} = O^{p'}(B^{\mathcal{F}})$ ist $[B, B^{\mathcal{F}}]$ ein Normalteiler von B mit p-Index in $B^{\mathcal{F}}$. Da p in der Charakteristik von $\mathcal{F}$ auftaucht, folgt aus der Zentralität der Faktorgruppe $B^{\mathcal{F}}/[B, B^{\mathcal{F}}]$ ihre $\mathcal{F}$-Hyperzentralität in B. Dies führt auf $B^{\mathcal{F}} = [B, B^{\mathcal{F}}] \trianglelefteq B'$, wobei $B' \trianglelefteq\trianglelefteq AB$ gilt nach Satz 2.3.3. Somit ist $B^{\mathcal{F}}$ ein Subnormalteiler von AB.



Die Subnormalität von $B^{\mathfrak{F}}(A \cap B)$ in $AB^{\mathfrak{F}}$ bedingt nach Lemma 3.2.2 nun

$$O^p(A) \leq N_G(O^{p'}(B^{\mathfrak{F}}(A \cap B))).$$

Dabei ist $B^{\mathfrak{F}}(A \cap B)$ ein Produkt zweier Subnormalteiler, so dass aus Lemma 1.1.9 die Gleichheit

$$\begin{aligned} O^{p'}(B^{\mathfrak{F}}(A \cap B)) &= O^{p'}(B^{\mathfrak{F}})O^{p'}(A \cap B) \\ &= B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B) \end{aligned}$$

folgt. Demnach wird $B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B)$ von $O^p(A)$ und damit von $A = O^p(A)(A \cap B)$ normalisiert. Auch $A \cap B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B)$ ist normal in $AB^{\mathfrak{F}}$: Dafür ist nur noch zu zeigen, dass der Normalisator dieser Untergruppe $B^{\mathfrak{F}}$ enthält. Mit Lemma 3.2.2 erhält man zunächst $O^p(B) \leq N_G(O^{p'}(A \cap B))$ und $O^{p'}(B) \leq N_G(O^p(A \cap B))$, weshalb insgesamt

$$O^p(B) \cap O^{p'}(B) \leq N_G(A \cap B)$$

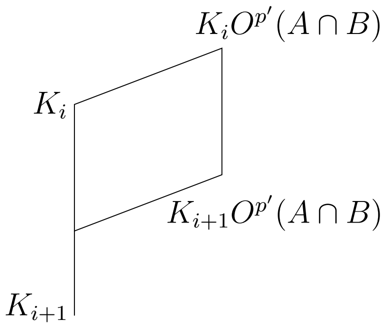
gilt. Dabei resultiert aus $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$ die Inklusion $B^{\mathfrak{F}} \leq O^p(B)$ (vgl. [19, IV Corollary (4.3)]), und die Gleichheit $B^{\mathfrak{F}} = O^{p'}(B^{\mathfrak{F}})$ liefert $B^{\mathfrak{F}} \leq O^{p'}(B)$. Mit $A \cap B$ normalisiert $B^{\mathfrak{F}}$ natürlich wie behauptet auch $A \cap B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B)$.

Auf der Faktorgruppe $B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B)/(A \cap B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B))$ induziert A Potenzautomorphismen: Für eine Untergruppe V mit $A \cap B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B) \leq V \leq B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B)$ gilt $AV = VA$ aufgrund der wechselseitigen Vertauschbarkeit von A und B. Es folgt

$$V = V(A \cap B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B)) = VA \cap B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B) \trianglelefteq VA,$$

so dass $V/(A \cap B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B))$ tatsächlich invariant unter der Operation von A via Konjugation ist. Nach [18, Corollary 2.2.2.] zentralisiert jeder Potenzautomorphismus die Kommutatorgruppe, hier ist demnach $[A, (B^{\mathfrak{F}})'] \leq A \cap B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B)$ und $A \trianglelefteq A(B^{\mathfrak{F}})'$.

Sei nun $(B^{\mathfrak{F}})' = K_r \trianglelefteq K_{r-1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_1 = B^{\mathfrak{F}}$ eine Reihe derart, dass alle K_i/K_{i+1} Hauptfaktoren von B sind. Die Voraussetzung $B^{\mathfrak{F}} = O^{p'}(B^{\mathfrak{F}})$ impliziert, dass $B^{\mathfrak{F}}/(B^{\mathfrak{F}})'$ und damit sämtliche K_i/K_{i+1} p-Gruppen sind. Nach dem Satz von Clifford (vgl. [19, B Lemma (7.1)]) sind diese B-Hauptfaktoren als $O^p(B)$-Moduln (über dem Körper mit p Elementen) vollständig reduzibel.



Wie oben dargelegt gilt $B^{\mathfrak{F}} \leq O^p(B) \leq N_G(O^{p'}(A \cap B))$, weshalb $K_{i+1}O^{p'}(A \cap B) \trianglelefteq K_iO^{p'}(A \cap B)$ für alle i ist und sich auch $K_iO^{p'}(A \cap B)/K_{i+1}O^{p'}(A \cap B)$ als $O^p(B)$-Modul verstehen lässt. Dieser ist $O^p(B)$-isomorph zu einem Faktormodul von K_i/K_{i+1} und damit ebenso ein vollständig reduzibler $O^p(B)$-Modul. Für ein beliebiges, aber festes i mit $K_{i+1}O^{p'}(A \cap B) < K_iO^{p'}(A \cap B)$ sei

$$K_iO^{p'}(A \cap B)/K_{i+1}O^{p'}(A \cap B) = \bigoplus_{j=1}^{s} V_j$$

eine Zerlegung in irreduzible $O^p(B)$-Teilmoduln V_j. Dabei ist V_j für alle $j \in \{1, \ldots, s\}$ ein Hauptfaktor von $AO^p(B)$: Zunächst gilt die Inklusion $A \cap B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B) \leq (B^{\mathfrak{F}})'O^{p'}(A \cap B)$. Diese folgt aus $A \cap B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B) = (A \cap B^{\mathfrak{F}})O^{p'}(A \cap B) = O^p(A \cap B^{\mathfrak{F}})O^{p'}(A \cap B)$ und aus $O^p(A \cap B^{\mathfrak{F}}) \leq O^p(B^{\mathfrak{F}}) \leq (B^{\mathfrak{F}})'$. Damit liegt V_j zwischen $A \cap B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B)$ und $B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B)$. Weil A auf der Faktorgruppe $B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B)/(A \cap B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B))$ Potenzautomorphismen induziert, ist jeder der irreduziblen $O^p(B)$-Moduln V_j wie behauptet ein Hauptfaktor von $AO^p(B)$.

Nach Lemma 2.1.3 kann $AO^p(B)$ als wechselseitig vertauschbares Produkt von A und $(A \cap B)O^p(B)$ verstanden werden. Dabei meidet A mit der Faktorgruppe $B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B)/(A \cap B^{\mathfrak{F}}O^{p'}(A \cap B))$ auch sämtliche Hauptfaktoren V_j. Da diese unterhalb von $O^{p'}(A \cap B)B^{\mathfrak{F}} \leq (A \cap B)O^p(B)$ liegen, werden sie außerdem natürlich von $(A \cap B)O^p(B)$ gedeckt. Jeder Hauptfaktor V_j wird deshalb nach Satz 2.3.5 von A oder $(A \cap B)O^p(B)$ zentralisiert. Angenommen $(A \cap B)O^p(B)$ zentralisiere einen dieser Hauptfaktoren. Dann erhält man

$$[O^p(B), K_i]K_{i+1}O^{p'}(A \cap B) < K_iO^{p'}(A \cap B),$$

also $[O^p(B), K_i]K_{i+1} < K_i$. Aus der Normalität von $[O^p(B), K_i]K_{i+1}$ in B und der Irreduzibilität von K_i/K_{i+1} als B-Modul folgt damit $[O^p(B), K_i] \leq K_{i+1}$.

Als p-Hauptfaktor von B, den $O^p(B)$ zentralisiert, ist K_i/K_{i+1} schon zentral in B. Da p zur Charakteristik von $\mathfrak{F}$ gehört, ist K_i/K_{i+1} somit insbesondere $\mathfrak{F}$-zentral in B. Dies steht im Widerspruch zu Satz 1.2.1, wonach B auf $B^{\mathfrak{F}}/(B^{\mathfrak{F}})'$ $\mathfrak{F}$-hyperexzentrisch operiert, also B-Hauptfaktoren zwischen $(B^{\mathfrak{F}})'$ und $B^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-exzentrisch in B sind. Folglich werden alle Hauptfaktoren V_j von A zentralisiert. Damit zentralisiert A ganz $K_iO^{p'}(A \cap B)/K_{i+1}O^{p'}(A \cap B)$, was $AK_{i+1} \trianglelefteq AK_i$ bedeutet. Dies ist im Fall $K_{i+1}O^{p'}(A \cap B) = K_iO^{p'}(A \cap B)$ trivial und gilt somit für alle $i \in \{1, \dots, r-1\}$.

Insgesamt erhält man die Reihe

$$A \trianglelefteq A(B^{\mathfrak{F}})' = AK_r \trianglelefteq AK_{r-1} \trianglelefteq \dots \trianglelefteq AK_1 = AB^{\mathfrak{F}}.$$

Mit der Subnormalität von A in $AB^{\mathfrak{F}}$ folgt nach Lemma 3.2.2 die Behauptung

$$B^{\mathfrak{F}} = O^{p'}(B^{\mathfrak{F}}) \leq N_G(O^p(A)).$$

□

Die Aussage von Lemma 3.3.1 wird später in Korollar 3.3.5 noch in einer deutlich allgemeineren Form erscheinen.

Lemma 3.3.2. *Seien A und B wechselseitig vertauschbare Untergruppen einer Gruppe G und $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation mit voller Charakteristik. Dann ist A subnormal in $AB^{\mathfrak{F}}$.*

Beweis. Für jede Primzahl p setze $\mathfrak{F}(p) = \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{F}$. Stets ist dann $\mathfrak{F}(p)$ eine gesättigte Formation mit voller Charakteristik und

$$O^{p'}(B^{\mathfrak{F}(p)}) = B^{\mathfrak{F}(p)} = O^{p'}(B^{\mathfrak{F}}).$$

Dies hat zweierlei Konsequenzen. Zum einen lässt sich Lemma 3.3.1 anwenden, welches

$$O^p(A) \trianglelefteq AB^{\mathfrak{F}(p)} \tag{1}$$

liefert. Zum anderen resultiert aus $B^{\mathfrak{F}(p)} = O^{p'}(B^{\mathfrak{F}})$ die Inklusion $AB^{\mathfrak{F}(p)} \leq AO^{p'}(B)$. Nach Satz 3.2.3 ist $O^{p'}(A) \trianglelefteq\trianglelefteq AO^{p'}(B)$, also insbesondere

$$O^{p'}(A) \trianglelefteq\trianglelefteq AB^{\mathfrak{F}(p)}. \tag{2}$$

Gemeinsam führen (1) und (2) auf

$$A = O^p(A)O^{p'}(A) \trianglelefteq\trianglelefteq AB^{\mathfrak{F}(p)} = AO^{p'}(B^{\mathfrak{F}})$$

für jede Primzahl p.

Für zwei (verschiedene) Primzahlen q und r ist dabei

$$(AO^{q'}(B^{\mathfrak{F}}))(AO^{r'}(B^{\mathfrak{F}})) = AO^{q'}(B^{\mathfrak{F}})O^{r'}(B^{\mathfrak{F}})$$

eine Untergruppe von G aufgrund der wechselseitigen Vertauschbarkeit von A und B. Mit einem Resultat von R. Maier und H. Wielandt (vgl. [23, Theorem 7.7.1]) folgt deshalb die Behauptung

$$A \trianglelefteq\trianglelefteq \prod_{p\in\mathbb{P}} AO^{p'}(B^{\mathfrak{F}}) = A\left(\prod_{p\in\mathbb{P}} O^{p'}(B^{\mathfrak{F}})\right) = AB^{\mathfrak{F}}.$$

□

Der bereits angekündigte Hauptsatz dieses Abschnitts zeigt, dass A in der Situation von Lemma 3.3.2 nicht nur subnormal, sondern sogar normal in $AB^{\mathfrak{F}}$ ist. Bevor gleich dessen Beweis vorgestellt werden kann, ist noch ein einfaches Lemma zu einer möglichen Faktorisierung des nilpotenten Residuums $G^{\mathfrak{N}}$ einer Gruppe G nötig.

Lemma 3.3.3. *Sei G eine Gruppe und p eine Primzahl.*
Dann ist $G^{\mathfrak{N}} = (O^p(G))^{\mathfrak{N}}O^p(G^{\mathfrak{N}})$.

Beweis. Es lässt sich leicht überlegen, dass o.B.d.A. von $O^p(G^{\mathfrak{N}}) = 1$ ausgegangen werden darf. Zu zeigen ist also die Gleichheit

$$G^{\mathfrak{N}} = (O^p(G))^{\mathfrak{N}},$$

wenn $G^{\mathfrak{N}}$ eine p-Gruppe ist.

Sofort ersichtlich ist die Inklusion $(O^p(G))^{\mathfrak{N}} \le G^{\mathfrak{N}}$. Wäre dabei $(O^p(G))^{\mathfrak{N}}$ eine echte Untergruppe von $G^{\mathfrak{N}}$, dann ließe sich ein (p-)Hauptfaktor $G^{\mathfrak{N}}/R$ von G mit $(O^p(G))^{\mathfrak{N}} \le R < G^{\mathfrak{N}}$ finden. Für diesen würde $G^{\mathfrak{N}}/R \le \mathrm{Soc}(O^p(G)/R) \le Z(O^p(G)/R)$ gelten, die letzte Inklusion aufgrund der Nilpotenz von $O^p(G)/R$. Als p-Hauptfaktor von G, den $O^p(G)$ zentralisiert, wäre $G^{\mathfrak{N}}/R$ schon zentral in G. Dies hätte $G^{\mathfrak{N}} \le R < G^{\mathfrak{N}}$ zur Folge, ein Widerspruch. Wie behauptet ist also $G^{\mathfrak{N}} = (O^p(G))^{\mathfrak{N}}$.

$$\begin{array}{l|l} & G \\ & O^p(G) \\ & \\ & G^{\mathfrak{N}} \\ p^{\cdots} & R \\ & 1 \end{array}$$

□

Nun sind alle Vorbereitungen getroffen, um den folgenden Hauptsatz zu beweisen.

Satz 3.3.4. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B.*
Dann gilt: $B^{\mathfrak{N}}$ normalisiert A, und $A^{\mathfrak{N}}$ normalisiert B.

Beweis. Angenommen die Behauptung sei falsch. Sei dann $G = AB$ ein wechselseitig vertauschbares Produkt mit $B^{\mathfrak{N}} \not\le N_G(A)$ und mit $|G| + |A||B|$ minimal unter solchen Gegenbeispielen. Für diese Gruppe $G = AB$ gilt:

(1) $A_G = 1$:
Für jeden Normalteiler N von G sind AN/N und BN/N wechselseitig vertauschbar. Wäre ein nichttrivialer Normalteiler $N \trianglelefteq G$ in A enthalten, dann würde die Wahl von G also

$$B^{\mathfrak{N}}N/N = (BN/N)^{\mathfrak{N}} \le N_{G/N}(A/N)$$

und $B^{\mathfrak{N}} \le N_G(A)$ bedingen. Dieser Widerspruch liefert $A_G = 1$, wie behauptet.

(2) $1 \ne A \cap B$ ist eine p-Gruppe ($p \in \mathbb{P}$) mit $O^p(B) \le N_G(A \cap B)$, und es gilt $\mathrm{Soc}(G) \le O_p(G)$:
Die Untergruppen A und B schneiden sich nicht trivial; sonst wären sie total vertauschbar (vgl. Lemma 2.1.3), und es würde nach [14, Theorem 1] im Widerspruch zur Wahl von G sogar $B^{\mathfrak{N}} \le C_G(A)$ gelten. Außerdem ist mit A_G auch $(A \cap B)_G$ trivial und daher $1 \ne (A \cap B)^G$ nilpotent (vgl. Lemma

2.3.2). Somit existiert für einen Primteiler p von $|(A \cap B)^G|$ ein minimaler p-Normalteiler N von G. Aus der Wahl von G lässt sich folgern, dass AN/N von $B^{\mathcal{N}}N/N$ normalisiert wird, also $B^{\mathcal{N}} \leq N_G(AN)$ gilt. Für einen (weiteren) minimalen Normalteiler $\tilde{N}$ von G normalisiert $B^{\mathcal{N}}$ entsprechend auch $A\tilde{N}$. Dabei wird $\tilde{N}$ nach Satz 2.3.5 von AN gemieden oder gedeckt, denn $G = AB$ kann als wechselseitig vertauschbares Produkt von AN und BN verstanden werden (vgl. Lemma 2.1.6). Wäre $\tilde{N} \cap AN = 1$, dann würde $B^{\mathcal{N}}$ also $A\tilde{N} \cap AN = A(\tilde{N} \cap AN) = A$ normalisieren, ein Widerspruch. Somit ist $A\tilde{N} \leq AN$ und daher $|\tilde{N}| = |A\tilde{N} : A|$ als Teiler von $|AN : A| = |N|$ eine p-Potenz (hierbei wurde berücksichtigt, dass A nach (1) einen minimalen Normalteiler von G nicht deckt, so dass $A \cap \tilde{N} = 1 = A \cap N$ gilt). Wie behauptet folgt $\mathrm{Soc}(G) \leq O_p(G)$, und insbesondere ist der nilpotente Normalteiler $(A \cap B)^G$ eine p-Gruppe.

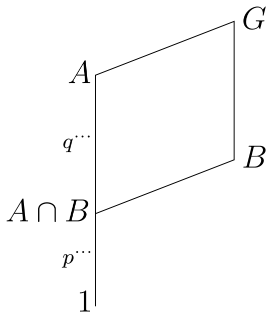
Weil Lemma 3.2.2 zufolge $O^p(B) \leq N_G(O^{p'}(A \cap B))$ ist und hier wie gesehen $O^{p'}(A \cap B) = A \cap B$ gilt, ist schließlich (2) bewiesen.

(3) $A = A_q(A \cap B)$ (für eine Primzahl q und eine (jede) q-Sylowuntergruppe A_q von A):

Sei A_r für jeden Primteiler r von $|A|$ eine beliebige, aber feste r-Sylowuntergruppe von A, und setze für diese $A(r) = A_r(A \cap B)$. Stets ist nach Lemma 2.1.3 dann $A(r)$ eine Untergruppe von A, die mit B wechselseitig vertauschbar ist. Wäre $A(r) < A$ für alle r, dann würde die Wahl von G jeweils

$$B^{\mathcal{N}} \leq N_G(A(r))$$

implizieren. Folglich würde $B^{\mathcal{N}}$ auch $\langle A(r) \mid r \,\big|\, |A| \rangle = A$ normalisieren, ein Widerspruch. Wie behauptet existiert also eine Primzahl q mit $A(q) = A = A_q(A \cap B)$.



Im Folgenden werden die Fälle $q \neq p$ und $q = p$ unterschieden.

Fall I: $q \neq p$.

Hier ist natürlich $O^{q'}(A) = O^p(A)$, und es gilt $A = O^{q'}(A)(A \cap B) = O^p(A)(A \cap B)$ nach (3).

Für das betrachtete minimale Gegenbeispiel erhält man weiter:

(4) B ist eine q'-Gruppe:

Zunächst lässt sich ableiten, dass $O^{q'}(B)(A \cap B)$ Core-frei in G ist. Angenommen $O^{q'}(B)(A \cap B)$ enthalte einen minimalen Normalteiler N von G. Wie in (2) folgt dann induktiv $B^{\mathcal{N}} \leq N_G(AN)$. Dabei ist mit $O^{q'}(A)$ schon ganz $A = O^{q'}(A)(A \cap B)$ ein Subnormalteiler von $AO^{q'}(B)$ (vgl. Satz 3.2.3) und somit insbesondere von $AN \leq AO^{q'}(B)$. Weil $|AN : A| = |N|$ wie in (2) gezeigt eine p-Potenz ist, erhält man mit Lemma 3.2.1 insgesamt

$$O^p(A) = O^p(AN) \trianglelefteq ANB^{\mathcal{N}}.$$

Als Untergruppe von $O^p(B)$ normalisiert $B^{\mathcal{N}}$ nach (2) auch $A \cap B$ und damit ganz $A = O^p(A)(A \cap B)$. Dieser Widerspruch liefert $(O^{q'}(B)(A \cap B))_G = 1$, wie behauptet.

Eine erneute Anwendung von Satz 3.2.3 zeigt im nächsten Schritt, dass $O^{q'}(B)$ und damit $O^{q'}(B)(A \cap B)$ subnormal in $BO^{q'}(A) = BA = G$ ist. Nach Lemma 3.2.2 wird daher $O^q(O^{q'}(B)(A \cap B))$ von $O^{q'}(A)$ normalisiert. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
(O^q(O^{q'}(B)))^G &= (O^q(O^{q'}(B)))^{BO^{q'}(A)} \\
&= (O^q(O^{q'}(B)))^{O^{q'}(A)} \\
&\leq (O^q(O^{q'}(B)(A \cap B)))^{O^{q'}(A)} = O^q(O^{q'}(B)(A \cap B)),
\end{aligned}$$

und $(O^q(O^{q'}(B)))^G$ ist ein in $O^{q'}(B)(A \cap B)$ enthaltener Normalteiler von G. Wie gesehen ist somit $O^q(O^{q'}(B)) = 1$ und $O^{q'}(B)$ ein q-Subnormalteiler von G. Als solcher muss $O^{q'}(B)$ aber wie behauptet trivial sein, da sonst im Widerspruch zu (2) ein (minimaler) q-Normalteiler von G existieren würde.

(5) Das Gegenbeispiel existiert nicht in Fall I:

$B^{\mathcal{N}}$ ist (4) zufolge eine q'-Gruppe und A nach Lemma 3.3.2 subnormal in $AB^{\mathcal{N}}$, woraus man mit Lemma 3.2.2 auf

$$B^{\mathcal{N}} = O^q(B^{\mathcal{N}}) \leq N_G(O^{q'}(A))$$

schließen kann. Weil außerdem wie in (2) gezeigt $B^{\mathcal{N}} \leq O^p(B) \leq N_G(A \cap B)$ gilt, normalisiert $B^{\mathcal{N}}$ damit ganz $A = O^{q'}(A)(A \cap B)$, was den endgültigen Widerspruch in Fall I darstellt.

Zu untersuchen bleibt somit noch

Fall II: $q = p$.

Entscheidend war in Fall I die Subnormalität von A in $AB^{\mathcal{N}}$ und die Konsequenz, dass $O^{q'}(A)$ von der q'-Gruppe $B^{\mathcal{N}}$ normalisiert wird. Entsprechendes kann man nun für die p'-Elemente von $B^{\mathcal{N}}$ zeigen und desweiteren die Faktorisierung von $B^{\mathcal{N}}$ aus Lemma 3.3.3 nutzen. Es gilt nämlich:

(4)' $(O^p(B))^{\mathcal{N}}$ normalisiert A:
Wäre $B = O^p(B)(A \cap B)$, dann würde

$$1 \overset{(2)}{\neq} (A \cap B)^G = (A \cap B)^{O^p(B)A} \overset{(2)}{=} (A \cap B)^A \leq A$$

gelten und im Widerspruch zu (1) ein nichttrivialer Normalteiler von G in A existieren. Also ist $O^p(B)(A \cap B)$ eine echte Untergruppe von B und außerdem wechselseitig vertauschbar mit A (vgl. Lemma 2.1.3). Die Wahl von G bedingt daher

$$(O^p(B)(A \cap B))^{\mathcal{N}} \leq N_G(A),$$

was wegen $(O^p(B))^{\mathcal{N}} \leq (O^p(B)(A \cap B))^{\mathcal{N}}$ die Behauptung liefert.

(5)' Das Gegenbeispiel existiert auch nicht in Fall II:
Nach (2) und (3) ist A eine p-Gruppe. Aus der Subnormalität von A in $AB^{\mathcal{N}}$ (vgl. Lemma 3.3.2) folgt mit Lemma 3.2.2 deshalb

$$O^p(B^{\mathcal{N}}) \leq N_G(O^{p'}(A)) = N_G(A).$$

Gemeinsam mit (4)' und der Faktorisierung von $B^{\mathcal{N}}$ aus Lemma 3.3.3 führt dies auf

$$B^{\mathcal{N}} = (O^p(B))^{\mathcal{N}} O^p(B^{\mathcal{N}}) \leq N_G(A)$$

und somit auf den endgültigen Widerspruch in Fall II.

Ein Gegenbeispiel kann also nicht existieren, und damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Bemerkungen. Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B.
(a) Das nilpotente Residuum $B^{\mathfrak{N}}$ normalisiert A, wird aber umgekehrt von A im Allgemeinen nicht normalisiert. Ansonsten wäre $B^{\mathfrak{N}}$ ein Normalteiler von $G = AB$, dies ist aber etwa in Beispiel 2.2.3 wie gesehen nicht der Fall.
(b) Satz 3.3.4 legt die Frage nahe, ob A nicht nur vom nilpotenten Residuum $B^{\mathfrak{N}}$, sondern vielleicht sogar von der Kommutatorgruppe B' normalisiert wird. Diese Frage ist aber im Allgemeinen zu verneinen, wie in Beispiel 2.2.2 gezeigt wurde.

Das folgende Korollar zu Satz 3.3.4 ist eine deutliche Verallgemeinerung von Lemma 3.3.1. Es erweitert den Inhalt dieses Lemmas auf nicht-gesättigte Formationen, lässt als Voraussetzung die Gleichheit $B^{\mathfrak{F}} = O^{\pi'}(B^{\mathfrak{F}})$ (anstelle von $B^{\mathfrak{F}} = O^{p'}(B^{\mathfrak{F}})$) für bestimmte Primzahlmengen π zu und liefert statt $B^{\mathfrak{F}} \leq N_G(O^p(A))$ die stärkere Aussage $B^{\mathfrak{F}} \leq N_G(A)$.

Korollar 3.3.5. *Seien A und B wechselseitig vertauschbare Untergruppen einer Gruppe G und $\mathfrak{F}$ eine Formation.*
Ist $B^{\mathfrak{F}} = O^{\pi'}(B^{\mathfrak{F}})$ für eine Primzahlmenge π mit $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$ (etwa $\pi \subseteq \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$ und $\mathfrak{F}$ gesättigt), dann wird A von $B^{\mathfrak{F}}$ normalisiert.

Beweis. Die Voraussetzungen ergeben

$$B^{\mathfrak{F}} = O^{\pi'}(B^{\mathfrak{F}}) \leq O^{\pi'}(B^{\mathfrak{N}_\pi}) \leq B^{\mathfrak{N}},$$

und somit folgt die Behauptung direkt aus Satz 3.3.4. □

Bemerkung. Anstelle von $B^{\mathfrak{F}} = O^{\pi'}(B^{\mathfrak{F}})$ ist natürlich auch die (in nicht-auflösbaren Gruppen möglicherweise) schwächere Voraussetzung

$$B^{\mathfrak{F}} = O^p(B^{\mathfrak{F}}) \text{ für alle } p \in \pi'$$

hinreichend, welche $B^{\mathfrak{F}} = B^{\mathfrak{N}_{\pi'}\mathfrak{F}}$ bedeutet.

3.4 Eigenschaften bei Core-freiem Schnitt von A und B

Genauer studiert werden in dieser Arbeit auch wechselseitig vertauschbare Produkte $G = AB$, bei denen $A \cap B$ keinen nichttrivialen Normalteiler von G enthält. Dieser letzte Abschnitt von Kapitel 3 stellt einige Eigenschaften einer solchen Gruppe $G = AB$ vor; darauf bauen schließlich die Beweise in Kapitel 6 zu wechselseitig vertauschbaren Produkten und gesättigten Formationen auf. Zu diesem Zweck wird im Folgenden für einen minimalen Normalteiler N von G die Untergruppe $T = (AN \cap BN)_G$ betrachtet. Der Nutzen zeigt sich in Induktionsbeweisen: Während die Ergebnisse von Abschnitt 3.4 Auskunft über den Normalteiler T geben, erlaubt die Induktionsannahme eine Aussage über G/T, denn diese Faktorgruppe ist nach Definition von T wieder ein wechselseitig vertauschbares Produkt zweier Faktoren mit einem Core-freien Schnitt. Eine beispielhafte Demonstration dieser Argumentationsmöglichkeit findet sich am Ende des Abschnitts (Korollar 3.4.4).

Der erste Satz listet einige Eigenschaften von T und $C_G(T)$ auf.

Satz 3.4.1. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B mit $(A \cap B)_G = 1$. Sei weiter N ein minimaler Normalteiler von G, und setze $T = (AN \cap BN)_G$ $(\geq N)$.*
Ist $T \neq N$, dann gilt:

(1) T ist eine elementarabelsche p-Gruppe für eine Primzahl p.

Ist dabei $N \leq B$, dann gilt zudem (wobei $C = C_G(T)$ gesetzt ist):

(2) BC/C ist eine p-Gruppe,
(3) $T/(A \cap T)$ $(\cong N)$ hat Ordnung p,
(4) AC/C ist im Klassenprodukt $\mathcal{S}_p\mathcal{A}$ enthalten,
(5) alle von p verschiedenen Primteiler von $|AC/C|$ teilen $p-1$,
(6) G/C ist p-abgeschlossen.

Beweis. Der Beweis von Aussage (1) erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird gezeigt:

(1)' N ist eine elementarabelsche p-Gruppe für eine Primzahl p:

Nach Satz 2.3.5 haben A und B die Deck-Meide Eigenschaft. Dabei ist der Fall, dass N von A und B gedeckt wird, aufgrund der Voraussetzung $(A \cap B)_G = 1$ unmöglich.

Wird N von A und B gemieden, dann ist Satz 2.3.5 zufolge $|N| = p$ für eine Primzahl p und nichts weiter zu zeigen.

Es bleibt der Fall zu untersuchen, dass N von einem der Faktoren A bzw. B gemieden und vom anderen gedeckt wird. O.B.d.A. sei $A \cap N = 1$ und $N \leq B$. Mit $T \leq AN \cap B \leq B$ erhält man dann $A \cap T = A \cap B \cap T$, weshalb $A \cap T$ subnormal in T ist. Außerdem hat $(A \cap B)_G = 1$ nach Lemma 2.3.2 zur Folge, dass $A \cap B$ und damit $A \cap T = A \cap B \cap T$ nilpotent ist. Daher gilt

$$A \cap T \leq \mathrm{Fit}(T). \tag{$*$}$$

Als charakteristische Untergruppe von $T \trianglelefteq G$ ist $\mathrm{Fit}(T)$ normal in G, so dass $N \cap \mathrm{Fit}(T) = 1$ oder $N \leq \mathrm{Fit}(T)$ ist. Wäre $N \cap \mathrm{Fit}(T) = 1$, dann würde mit $T = AN \cap T = (A \cap T)N$ und der Inklusion $(*)$ die Gleichheit

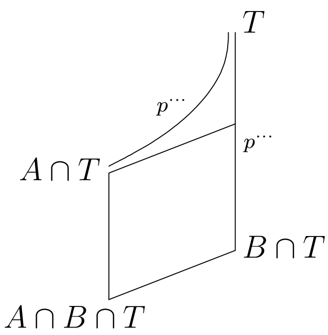
$$\mathrm{Fit}(T) = T \cap \mathrm{Fit}(T) = (A \cap T)N \cap \mathrm{Fit}(T) \overset{(*)}{=} (A \cap T)(N \cap \mathrm{Fit}(T)) = A \cap T$$

folgen. Somit wäre $\mathrm{Fit}(T) = A \cap T$ ein in $A \cap B$ enthaltener Normalteiler von G, also trivial wegen $(A \cap B)_G = 1$. Es würde daher

$$T = (A \cap T)N = N$$

gelten, ein Widerspruch zur Voraussetzung $T \neq N$. Demnach ist $N \leq \mathrm{Fit}(T)$, weshalb N nilpotent und damit wie behauptet eine elementarabelsche p-Gruppe für eine Primzahl p ist.

Mit Hilfe von (1)' lässt sich nun beweisen:



(1) T ist eine elementarabelsche p-Gruppe:

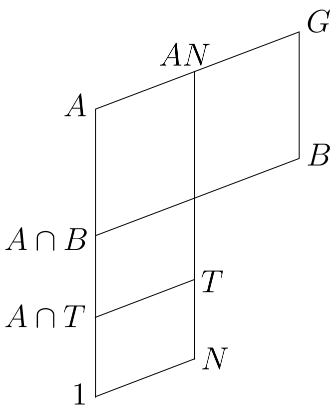
Zunächst gilt $T = (A \cap T)N = (B \cap T)N$. Da $|N|$ wie in (1)' gezeigt eine p-Potenz ist, trifft dies folglich auch auf die Indizes $|T : A \cap T|$ und $|T : B \cap T|$ (welche $|N|$ teilen) zu. Weiter ist $(A \cap T)(B \cap T)$ nach Lemma 2.3.1 eine Untergruppe von G und daher $|A \cap T : A \cap B \cap T| = |(A \cap T)(B \cap T) : B \cap T|$ als Teiler von $|T : B \cap T|$ ebenfalls eine p-Potenz. Man erhält, dass $A \cap B \cap T$ ein Subnormalteiler von T mit p-Index $|T : A \cap B \cap T| = |T : A \cap T||A \cap T : A \cap B \cap T|$ ist. Das bedeutet Lemma 3.2.1 zufolge

$$O^p(A \cap B \cap T) = O^p(T) \operatorname{char} T \trianglelefteq G,$$

so dass $O^p(T)$ normal in G und in $A \cap B$ enthalten ist. Wie $(A \cap B)_G$ ist also auch $O^p(T)$ trivial und T eine p-Gruppe. Insbesondere ist nun $N \leq \mathrm{Soc}(T) \leq Z(T)$, woraus $A \cap T \trianglelefteq (A \cap T)N = T$ und $B \cap T \trianglelefteq (B \cap T)N = T$ folgt. Dabei sind $T/(A \cap T)$ und $T/(B \cap T)$ isomorph zu Faktorgruppen von N, also elementarabelsch nach (1)'. Folglich ist

$$T'T^p \leq A \cap B \cap T \text{ und } T'T^p \operatorname{char} T \trianglelefteq G,$$

weshalb wieder bloß $T'T^p = 1$ bleibt und T tatsächlich eine elementarabelsche p-Gruppe ist.



Im weiteren Verlauf des Beweises sei nun $N \leq B$. Natürlich ist dann auch $T = (AN \cap B)_G$ in B enthalten. Außerdem ist $A \cap N = 1$, denn sonst wäre $N \leq A \cap B$ im Widerspruch zur Voraussetzung $(A \cap B)_G = 1$.

(2) BC/C ist eine p-Gruppe (wobei $C = C_G(T)$):

Aus der wechselseitigen Vertauschbarkeit von A und B lässt sich folgern, dass $A \cap B$ eine quasinormale Untergruppe von B ist (das heißt mit allen Untergruppen von B vertauscht). Nach einem Ergebnis von R. Maier und P. Schmid (vgl. [25, Theorem]) ist daher $(A\cap B)/(A\cap B)_B$ in $Z_\infty(B/(A\cap B)_B)$ enthalten, dem Hyperzentrum von $B/(A \cap B)_B$. Insbesondere wird jede p-Untergruppe von $A \cap B$ von allen p'-Elementen aus B (und damit von deren Erzeugnis $O^p(B)$) modulo $(A \cap B)_B$ zentralisiert. Weil $A \cap T$ nach (1) eine p-Gruppe (und in $A \cap B$ enthalten) ist, gilt also

$$[A \cap T, O^p(B)] \leq (A \cap B)_B \cap T = A_B \cap B \cap T = A_{AB} \cap T = A_G \cap T.$$

Die Untergruppe $A_G \cap T$ ist ein in $A \cap B$ enthaltener Normalteiler von G und deshalb trivial. Folglich wird $A \cap T$ und damit auch $(A \cap T)^B = (A \cap T)^{AB} = (A \cap T)^G$ von $O^p(B)$ zentralisiert. Dabei gilt für den Normalteiler $(A \cap T)^G$ von G entweder $N \cap (A \cap T)^G = 1$ oder $N \leq (A \cap T)^G$. Wäre $N \cap (A \cap T)^G = 1$, dann würde mit $T = AN \cap T = (A \cap T)N$ die Gleichheit

$$(A\cap T)^G = T \cap (A\cap T)^G = (A\cap T)N \cap (A\cap T)^G = (A\cap T)(N \cap (A\cap T)^G) = A\cap T$$

folgen. Somit wäre $A \cap T$ normal in G und in $A \cap B$ enthalten, also trivial. Es würde daher

$$T = (A \cap T)N = N$$

gelten, ein Widerspruch zur Voraussetzung $T \neq N$. Also ist $N \leq (A \cap T)^G$, und mit $T = (A \cap T)N \leq (A \cap T)^G \leq T$ folgt

$$O^p(B) \leq C_G((A \cap T)^G) = C_G(T) = C.$$

Wie behauptet ist BC/C eine p-Gruppe.

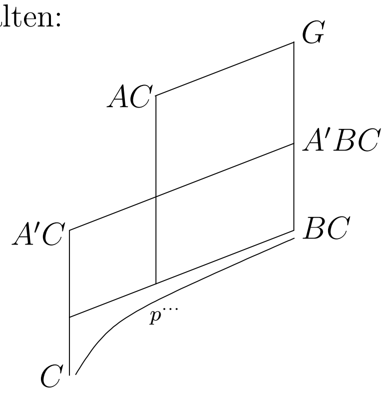
(3) $T/(A \cap T)$ ($\cong N$) hat Ordnung p:

Natürlich ist $A \cap T$ normal in T (T ist abelsch nach (1)). Die Gleichheiten $T = (A \cap T)N$ und $A \cap N = 1$ liefern dabei

$$T/(A \cap T) = (A \cap T)N/(A \cap T) \cong N/(A \cap T \cap N) \cong N.$$

Es bleibt zu zeigen, dass der minimale Normalteiler N zyklisch ist. Unter der gegenteiligen Annahme wäre neben $O^p(B)$ (vgl. (2)) auch A in $C_G(N)$ enthalten, wie man aus Satz 2.3.5 erhält. Damit wäre $G/C_G(N)$ eine p-Gruppe, also der minimale p-Normalteiler N schon zentral in G und insbesondere zyklisch. Dieser Widerspruch führt auf die Behauptung $|N| = p$.

(4) AC/C ist im Klassenprodukt $\mathcal{S}_p\mathcal{A}$ enthalten:



G/C ist wechselseitig vertauschbares Produkt der Faktorgruppen AC/C und BC/C. Deshalb ist das Produkt $(AC/C)'(BC/C)$ eine Untergruppe und $(AC/C)'$ ein Subnormalteiler von G/C (vgl. Satz 2.3.3). Dessen Index in $(AC/C)'(BC/C)$ ist nach (2) eine p-Potenz. Lemma 3.2.1 zufolge ist daher

$$O^p((AC/C)') = O^p((AC/C)'(BC/C)) \trianglelefteq (AC/C)'(BC/C),$$

so dass $O^p((AC/C)') = O^p(A')C/C$ von BC/C und natürlich auch von AC/C normalisiert wird. Folglich ist $O^p(A')C$ ein Normalteiler von $G = AB$, womit auch

$$[O^p(A'), T] = [O^p(A')C, T]$$

normal in G ist. Bei der Operation von A auf $T/(A \cap T)$ via Konjugation ist die induzierte Automorphismengruppe (3) zufolge abelsch. Somit operieren A' und insbesondere $O^p(A')$ trivial auf $T/(A \cap T)$, weshalb

$$[O^p(A'), T] \leq A \cap T$$

gilt. Insgesamt erhält man, dass $[O^p(A'), T]$ ein in $A \cap B$ enthaltener Normalteiler von G ist. Nach Voraussetzung ist also $[O^p(A'), T] = 1$ und $O^p(A') \leq C_G(T) = C$. In der Tat ist demnach $(AC/C)'$ eine p-Gruppe.

(5) Alle von p verschiedenen Primteiler von $|AC/C|$ teilen $p-1$:

Angenommen es existiere ein Primteiler q von $|AC/C|$, $q \neq p$, der $p-1$ nicht teilt. Die Primzahlmengen $\pi = \{q\}$ und $\rho = \{p\}$ erfüllen dann die Voraussetzung aus Satz 3.2.3, mitsamt der Zusatzbedingung $\pi \cap \rho = \emptyset$. Für die wechselseitig vertauschbaren Faktorgruppen AC/C und BC/C gilt demzufolge

$$O^{q'}(AC/C) \trianglelefteq (AC/C)O^{p'}(BC/C).$$

Nach (2) ist dabei $O^{p'}(BC/C) = BC/C$, also gilt

$$O^{q'}(A)C/C = O^{q'}(AC/C) \trianglelefteq (AC/C)(BC/C) = G/C.$$

Mit $O^{q'}(A)C$ ist nun auch

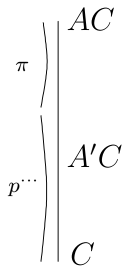
$$[O^{q'}(A), T] = [O^{q'}(A)C, T]$$

ein Normalteiler von G. Die Ordnung der von A auf $T/(A \cap T)$ induzierten Automorphismengruppe teilt $p-1$ nach (3). Weil q kein Teiler von $p-1$ ist, operieren also alle q-Elemente von A trivial auf $T/(A \cap T)$, und es gilt

$$[O^{q'}(A), T] \leq A \cap T.$$

Insgesamt ist folglich $[O^{q'}(A), T]$ normal in G und in $A \cap B$ enthalten. Es bleibt wieder bloß $[O^{q'}(A), T] = 1$ und $O^{q'}(A) \leq C_G(T) = C$. Damit ist AC/C eine q'-Gruppe, und q kann kein Primteiler von $|AC/C|$ sein. Dieser Widerspruch liefert, dass sämtliche Primteiler von $|AC/C|$ außer p tatsächlich $p-1$ teilen.

(6) G/C ist p-abgeschlossen:
Die Primzahlmenge $\pi = \{q \in \mathbb{P} \mid q \,\big|\, |AC/C| \text{ und } q \neq p\}$ ist p-spezial (vgl. Definition 3.2.5): Jede Primzahl $q \in \pi$ teilt $p-1$ nach (5), folglich kann p kein Teiler von $q(q-1)$ sein für alle $q \in \pi$.



Aus (4) und der Definition von π erhält man weiter, dass AC/C im Klassenprodukt $\mathcal{S}_p\mathcal{E}_\pi$ enthalten ist. Dasselbe gilt nach (2) für die p-Gruppe BC/C. Aus Korollar 3.2.6 folgt nun, dass auch G/C als wechselseitig vertauschbares Produkt von AC/C und BC/C zu $\mathcal{S}_p\mathcal{E}_\pi$ gehört. Da p nicht in π enthalten ist, ist G/C somit wie behauptet p-abgeschlossen.

Damit ist der ganze Satz bewiesen. $\square$

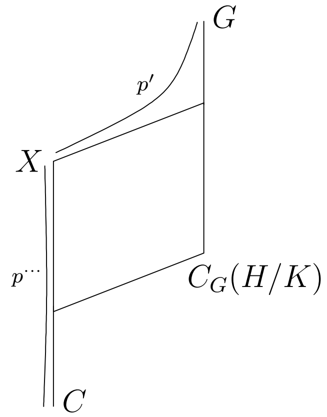
Als wichtige Konsequenzen für spätere Beweise erweisen sich die nachstehenden Aussagen zur Zentralisation der G-Hauptfaktoren unterhalb von T.

Korollar 3.4.2. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B mit $(A \cap B)_G = 1$. Sei weiter N ein minimaler Normalteiler von G mit $N \leq B$, und setze $T = (AN \cap B)_G$ $(\geq N)$.*
Ist $T \neq N$, dann zentralisiert B sämtliche G-Hauptfaktoren unterhalb von T.

Beweis. Ein Hauptfaktor H/K von G mit $1 \leq K < H \leq T$ ist nach Satz 3.4.1 eine p-Gruppe ($p \in \mathbb{P}$). Sei nun

$$X/C = O_p(G/C),$$

wobei wieder $C = C_G(T)$ gesetzt ist. Dann ist $XC_G(H/K)/C_G(H/K)$ ein p-Normalteiler von $G/C_G(H/K)$ (man beachte $C \leq C_G(H/K)$), also trivial (H/K ist ein p-Hauptfaktor). Darüber hinaus ist G/C Satz 3.4.1 zufolge p-abgeschlossen und BC/C eine p-Untergruppe. Insgesamt erhält man



$$BC/C \leq X/C \leq C_G(H/K)/C$$

und damit die Behauptung, dass H/K von B zentralisiert wird. □

Eine ähnliche Aussage wie Korollar 3.4.2 liefert im Fall $T = N$ das in Satz 2.3.5 angeführte Ergebnis von J. C. Beidleman und H. Heineken [13]: Unter der Voraussetzung $(A \cap B)_G = 1$ und $T = N \leq B$ ist natürlich $A \cap N = 1$, und in dieser Situation gilt Satz 2.3.5 zufolge $A \leq C_G(T)$ oder $B \leq C_G(T)$. Die beiden Fälle $T \neq N$ und $T = N$ können daher wie folgt zusammengefasst werden.

Korollar 3.4.3. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B mit $(A \cap B)_G = 1$. Sei weiter N ein minimaler Normalteiler von G mit $N \leq B$, und setze $T = (AN \cap B)_G$.*
Dann zentralisiert A oder B sämtliche G-Hauptfaktoren unterhalb von T.

Die abschließende Anwendung der Ergebnisse dieses Abschnitts demonstriert, wie sich mit deren Hilfe in Induktionsbeweisen argumentieren lässt. Es wird ein Satz von A. Ballester-Bolinches, J. Cossey und M. C. Pedraza-Aguilera [7] sowie J. C. Beidleman und H. Heineken [12] abgeleitet.

Korollar 3.4.4 ([7, Theorem 2], [12, Theorem 3 (2)]). *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B mit $(A \cap B)_G = 1$. Sind alle Hauptfaktoren von A und B einfach, dann auch die von G.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Ordnung von $G = AB$. Korollar 3.1.2 zufolge existiert ein minimaler Normalteiler N von G in A oder B; o.B.d.A. sei $N \leq B$. Da sich die Voraussetzungen des Korollars auf die Faktorgruppe G/T (mit $T = (AN \cap B)_G$) übertragen, sind nach Induktionsannahme alle G-Hauptfaktoren oberhalb von T einfach.

Für einen G-Hauptfaktor H/K unterhalb von T existiert nach Korollar 3.4.3 eine Untergruppe $X \in \{A, B\}$, welche H/K zentralisiert. Wird H/K dabei von der Untergruppe $Y \in \{A, B\} \setminus \{X\}$ gemieden, so ist dieser Hauptfaktor Satz 2.3.5 zufolge zyklisch. Andernfalls wird H/K von Y gedeckt und ist isomorph zu einem Y-Hauptfaktor, also nach Voraussetzung einfach. Auch alle Hauptfaktoren von G unterhalb von T sind folglich einfache Gruppen, und die Behauptung ist bewiesen. □

Kapitel 4

Wechselseitig vertauschbare Produkte und Fittingklassen

In den Kapiteln 4, 5 und 6 dieser Arbeit findet das Studium wechselseitig vertauschbarer Produkte im Rahmen von verschiedenen Klassen von Gruppen statt.

Kapitel 4 nimmt diesbezüglich zunächst Fittingklassen in den Blick. Vor dem Hintergrund der bereits mehrfach untersuchten Nähe wechselseitig vertauschbarer zu normalen Produkten bietet sich das in besonderem Maße an, denn Fittingklassen sind abgeschlossen unter der Bildung von Normalteilern und normaler Produkte. Die Situation ist für wechselseitig vertauschbare Produkte $G = AB$ jedoch eine andere: Dort vererbt sich die Zugehörigkeit zu einer Fittingklasse im Allgemeinen weder von G auf A und B noch in die umgekehrte Richtung (vgl. [15]). (Eine Ausnahme bilden hier wie gesehen die in [13] konstruierten Fittingklassen aus Korollar 3.2.6 und Korollar 3.2.7.) Nichtsdestoweniger verhalten sich wechselseitig vertauschbare Produkte bezüglich Fittingklassen "beinahe" wie normale Produkte. Mit der Subnormalität von A' und B' in G (vgl. Satz 2.3.3) erhält man nämlich unmittelbar:

> *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine Fittingklasse.* (+)
> *Ist G in $\mathfrak{F}$ enthalten, dann gehören auch A' und B' zu $\mathfrak{F}$.*

In [15] wurde gezeigt, dass auch die zu (+) duale Aussage gilt:

Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine Fittingklasse. (++)
Gehören A und B zu $\mathfrak{F}$, dann ist auch G' in $\mathfrak{F}$ enthalten.

In diesem Kapitel wird das Verhalten der zu einer Fittingklasse $\mathfrak{F}$ gehörenden Radikale $A_\mathfrak{F}$, $B_\mathfrak{F}$ und $G_\mathfrak{F}$ in einem wechselseitig vertauschbaren Produkt $G = AB$ untersucht, was Erweiterungen der Ergebnisse (+) und (++) zur Folge hat. Diesbezüglich liefert die Subnormalität von A' und B' in G zunächst sofort die Inklusionen $A' \cap G_\mathfrak{F} \leq A_\mathfrak{F}$ und $B' \cap G_\mathfrak{F} \leq B_\mathfrak{F}$, welche natürlich die Aussage (+) verallgemeinern. Die Symmetrie der Resultate (+) und (++) führt nun auf die Frage, ob sich (++) auf analoge Weise erweitern lässt, nämlich durch die Inklusion $G' \cap \langle A_\mathfrak{F}, B_\mathfrak{F} \rangle \leq G_\mathfrak{F}$. Das Hauptziel von Kapitel 4 ist es zu beweisen, dass diese Frage positiv beantwortet werden kann. (Die Ergebnisse dieses Kapitels wurden bereits in [16] publiziert.)

4.1 $A_\mathfrak{F}$ und $B_\mathfrak{F}$ sind wechselseitig vertauschbar ($\mathfrak{F}$ Fittingklasse)

Hierfür behandelt der erste Abschnitt zunächst die Gruppe $\langle A_\mathfrak{F}, B_\mathfrak{F} \rangle$. Im folgenden Satz wird insbesondere die Gleichheit $\langle A_\mathfrak{F}, B_\mathfrak{F} \rangle = A_\mathfrak{F} B_\mathfrak{F}$ gezeigt, das heißt das Produkt $A_\mathfrak{F} B_\mathfrak{F}$ ist schon eine Untergruppe eines wechselseitig vertauschbaren Produkts $G = AB$. Tatsächlich vertauschen $A_\mathfrak{F}$ und $B_\mathfrak{F}$ nicht nur, sondern sind sogar ihrerseits wechselseitig vertauschbar.

Satz 4.1.1. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine Fittingklasse.*
Dann sind $A_\mathfrak{F}$ und $B_\mathfrak{F}$ wechselseitig vertauschbar; insbesondere ist $A_\mathfrak{F} B_\mathfrak{F}$ eine Untergruppe von G.

Beweis. Im ersten (und größten) Teil des Beweises wird zunächst gezeigt, dass $A_\mathfrak{F} B_\mathfrak{F}$ eine Untergruppe von G ist. Angenommen diese Behauptung sei falsch. Sei dann $G = AB$ ein wechselseitig vertauschbares Produkt mit $A_\mathfrak{F} B_\mathfrak{F} \not\leq G$ für eine Fittingklasse $\mathfrak{F}$ und mit $|G| + |A||B|$ minimal unter allen Gegenbeispielen. Für diese Gruppe $G = AB$ gilt:

(1) $A = A_{\mathfrak{F}}(A \cap B)$ und $B = B_{\mathfrak{F}}(A \cap B)$:

Die Untergruppen $A_{\mathfrak{F}}(A \cap B)$ und B sind nach Lemma 2.1.3 wechselseitig vertauschbar. Wäre $A_{\mathfrak{F}}(A \cap B) < A$, dann würde die Wahl von G also

$$(A_{\mathfrak{F}}(A \cap B))_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}} \leq G$$

bedingen. Dabei ist aber $A_{\mathfrak{F}}(A \cap B)$ subnormal in A und deshalb

$$(A_{\mathfrak{F}}(A \cap B))_{\mathfrak{F}} = A_{\mathfrak{F}}(A \cap B) \cap A_{\mathfrak{F}} = A_{\mathfrak{F}}.$$

Folglich wäre

$$A_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}} = (A_{\mathfrak{F}}(A \cap B))_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}} \leq G$$

im Widerspruch zur Wahl von G. Also ist tatsächlich $A = A_{\mathfrak{F}}(A \cap B)$, und analog folgt $B = B_{\mathfrak{F}}(A \cap B)$.

(2) $G = \langle A_{\mathfrak{F}}, B_{\mathfrak{F}} \rangle$:

Setze $J = \langle A_{\mathfrak{F}}, B_{\mathfrak{F}} \rangle$. Die Untergruppen $J \cap A$ und $J \cap B$ sind Lemma 2.3.1 zufolge wechselseitig vertauschbar. Wäre $J < G$, dann würde nach Wahl von G deshalb

$$(J \cap A)_{\mathfrak{F}} (J \cap B)_{\mathfrak{F}} \leq G$$

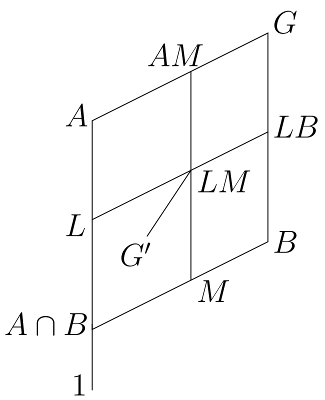
gelten. Dabei ist aber natürlich $J \trianglelefteq \langle J, A \cap B \rangle \overset{(1)}{=} G$, wegen der Normalität von $J \cap A$ in A also

$$(J \cap A)_{\mathfrak{F}} = J \cap A_{\mathfrak{F}} = A_{\mathfrak{F}}$$

und entsprechend $(J \cap B)_{\mathfrak{F}} = B_{\mathfrak{F}}$. Demnach wäre

$$A_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}} = (J \cap A)_{\mathfrak{F}} (J \cap B)_{\mathfrak{F}} \leq G,$$

ein Widerspruch. In der Tat ist daher $J = G = \langle A_{\mathfrak{F}}, B_{\mathfrak{F}} \rangle$.



In jedem wechselseitig vertauschbaren Produkt $G = AB$ existieren nach Satz 2.3.4 Untergruppen L und M mit folgenden Eigenschaften:

(i) $A' \leq L \leq A$, $B' \leq M \leq B$,

(ii) $A \cap B = L \cap M$,

(iii) $L, M \trianglelefteq\trianglelefteq G$,

(iv) $G' \leq LB \cap AM = LM$.

Für das betrachtete minimale Gegenbeispiel gilt damit weiter:

(3) $L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}} = (LM)_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq G$:

Als Normalteiler von A erfüllt L die Gleichung $L_{\mathfrak{F}} = L \cap A_{\mathfrak{F}}$, so dass (1) zufolge $L \overset{(1)}{=} L \cap A_{\mathfrak{F}}(A \cap B) = (L \cap A_{\mathfrak{F}})(A \cap B) = L_{\mathfrak{F}}(A \cap B)$ ist. Unter Berücksichtigung der Subnormalität von L und M in G gilt somit

$$\begin{aligned} L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}} &= L_{\mathfrak{F}}(M \cap (LM)_{\mathfrak{F}}) = L_{\mathfrak{F}}M \cap (LM)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}(A \cap B)M \cap (LM)_{\mathfrak{F}} \\ &= LM \cap (LM)_{\mathfrak{F}} = (LM)_{\mathfrak{F}} \operatorname{char} LM \trianglelefteq G, \end{aligned}$$

also wie behauptet $L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}} = (LM)_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq G$.

(4) $G/L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}$ ist nilpotent:

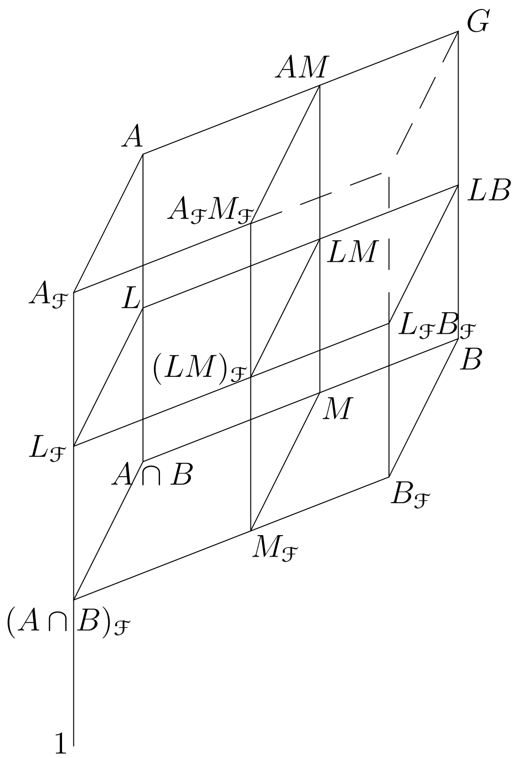
Aufgrund der Normalität von $L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}$ in G ist $A_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}} = A_{\mathfrak{F}}L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}$ eine Untergruppe von G. Wie in (3) lässt sich außerdem $M = M_{\mathfrak{F}}(A \cap B)$ sehen, so dass

$$A_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq A_{\mathfrak{F}}(A \cap B)M_{\mathfrak{F}} \overset{(1)}{=} AM$$

gilt. Natürlich ist auch $LM \trianglelefteq AM$. Folglich ist

$$\begin{aligned} &[LM, A_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}] \\ &\quad \leq LM \cap A_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}} \\ &\quad = (LM \cap A_{\mathfrak{F}})M_{\mathfrak{F}} \\ &\quad = (LM \cap A \cap A_{\mathfrak{F}})M_{\mathfrak{F}} \\ &\quad = (L \cap A_{\mathfrak{F}})M_{\mathfrak{F}} \\ &\quad = L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}} \end{aligned}$$

und $A_{\mathfrak{F}} \leq C_G(LM/L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}})$. Analog erhält man $B_{\mathfrak{F}} \leq C_G(LM/L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}})$. Nach (2) wird G von $A_{\mathfrak{F}}$ und $B_{\mathfrak{F}}$ erzeugt, daher ist $LM/L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}$ zentral in $G/L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}$. Weil die Faktorgruppe G/LM abelsch ist, folgt damit die Nilpotenz von $G/L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}$.



(5) $G/L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}$ ist eine p-Gruppe für eine Primzahl p:

Für jede Primzahl q setze $G(q) = G_q L_{\mathfrak{F}} M_{\mathfrak{F}}$, wobei G_q eine q-Sylowuntergruppe von G sei. Dabei ist die Definition der Untergruppe $G(q)$ wegen der Nilpotenz von $G/L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}$ unabhängig von der speziellen Wahl von $G_q \in \mathrm{Syl}_q(G)$. Angenommen es sei $G(q) < G$ für alle $q \in \mathbb{P}$. Da die Untergruppen $G(q) \cap A$ und $G(q) \cap B$ nach Lemma 2.3.1 wechselseitig vertauschbar sind, bedingt die Wahl von G dann jeweils

$$(G(q) \cap A)_{\mathfrak{F}}(G(q) \cap B)_{\mathfrak{F}} \leq G.$$

Die Nilpotenz von $G/L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}$ liefert natürlich $G(q) \trianglelefteq G$, was

$$(G(q) \cap A)_{\mathfrak{F}} = G(q) \cap A_{\mathfrak{F}}$$

und $(G(q) \cap B)_{\mathfrak{F}} = G(q) \cap B_{\mathfrak{F}}$ bedeutet. Demzufolge ist

$$(G(q) \cap A_{\mathfrak{F}})(G(q) \cap B_{\mathfrak{F}}) \leq G$$

für jede Primzahl q. Dabei gilt aber:

(i) $(G(q) \cap A_{\mathfrak{F}})(G(q) \cap B_{\mathfrak{F}})$ vertauscht mit $(G(p) \cap A_{\mathfrak{F}})(G(p) \cap B_{\mathfrak{F}})$ für Primzahlen $q \neq p$:

Der Grund dafür ist, dass die Faktorgruppen dieser Produkte modulo $L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}$ eine q- bzw. p-Gruppe sind und sich wegen der Nilpotenz von $G/L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}$ daher zentralisieren.

(ii) $G(q) \cap A_{\mathfrak{F}}$ vertauscht mit $G(p) \cap B_{\mathfrak{F}}$ für Primzahlen $q \neq p$:

Für die Gruppen $(G(q) \cap A_{\mathfrak{F}})M_{\mathfrak{F}}$ und $L_{\mathfrak{F}}(G(p) \cap B_{\mathfrak{F}})$ folgt dies wie in (i), also ist

$$\begin{aligned} G &\geq (G(q) \cap A_{\mathfrak{F}})M_{\mathfrak{F}}L_{\mathfrak{F}}(G(p) \cap B_{\mathfrak{F}}) \\ &= (G(q) \cap A_{\mathfrak{F}})L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}(G(p) \cap B_{\mathfrak{F}}) \\ &= (G(q) \cap A_{\mathfrak{F}})(G(p) \cap B_{\mathfrak{F}}). \end{aligned}$$

(iii) $A_{\mathfrak{F}} = \prod_{q \in \mathbb{P}}(G(q) \cap A_{\mathfrak{F}})$ und $B_{\mathfrak{F}} = \prod_{q \in \mathbb{P}}(G(q) \cap B_{\mathfrak{F}})$:

Dies erhält man unmittelbar aus der Definition und Normalität von $G(q)$.

Insgesamt ist daher

$$\begin{aligned} G &\overset{\text{(i)}}{\geq} \prod_{q\in\mathbb{P}} (G(q)\cap A_{\mathfrak{F}})(G(q)\cap B_{\mathfrak{F}}) \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} \prod_{q\in\mathbb{P}} (G(q)\cap A_{\mathfrak{F}}) \prod_{q\in\mathbb{P}} (G(q)\cap B_{\mathfrak{F}}) \\ &\overset{\text{(iii)}}{=} A_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}} \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Wahl von G. Tatsächlich existiert also eine Primzahl p mit $G(p) = G = G_p L_{\mathfrak{F}} M_{\mathfrak{F}}$, und wie behauptet ist $G/L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}$ eine p-Gruppe.

(6) $A = O^{p'}(A)(A\cap B)$ und $B = O^{p'}(B)(A\cap B)$:

Nach (5) ist $A/(L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}} \cap A)$ eine p-Gruppe. Dabei folgt unter Berücksichtigung der Subnormalität von $A\cap B$ in G die Gleichheit $L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}\cap A = L_{\mathfrak{F}}(M_{\mathfrak{F}}\cap A) = L_{\mathfrak{F}}(M_{\mathfrak{F}}\cap A\cap B) = L_{\mathfrak{F}}(A\cap B)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}$, so dass also $A_{\mathfrak{F}} = O^{p'}(A_{\mathfrak{F}})L_{\mathfrak{F}}$ ist. Aus $O^{p'}(A)(A\cap B) \trianglelefteq\trianglelefteq A$ schließt man weiter $O^{p'}(A_{\mathfrak{F}}) \leq (O^{p'}(A)(A\cap B))_{\mathfrak{F}} \leq A_{\mathfrak{F}}$ und erhält insgesamt

$$A_{\mathfrak{F}} = (O^{p'}(A)(A\cap B))_{\mathfrak{F}} L_{\mathfrak{F}}. \tag{$*$}$$

Wäre nun $O^{p'}(A)(A\cap B) < A$, dann würde die Wahl von G auf

$$(O^{p'}(A)(A\cap B))_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}} \leq G$$

führen (nach Lemma 2.1.3 sind die Untergruppen $O^{p'}(A)(A\cap B)$ und B wechselseitig vertauschbar). Wegen der Normalität von $L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}$ in G wäre dann aber auch

$$\begin{aligned} A_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}} &\overset{(*)}{=} (O^{p'}(A)(A\cap B))_{\mathfrak{F}} L_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}} \\ &= (O^{p'}(A)(A\cap B))_{\mathfrak{F}} (L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}) B_{\mathfrak{F}} \leq G, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. Daher ist in der Tat $A = O^{p'}(A)(A\cap B)$, und entsprechend folgt $B = O^{p'}(B)(A\cap B)$.

(7) Das Gegenbeispiel existiert nicht:

Für die wechselseitig vertauschbaren Untergruppen A und B gilt Satz 3.2.3 zufolge $O^{p'}(A) \trianglelefteq\trianglelefteq AO^{p'}(B)$. Wegen der Gleichheiten aus (6) bedeutet das $O^{p'}(A) \trianglelefteq\trianglelefteq AO^{p'}(B) \overset{(6)}{=} AB = G$, und natürlich ist auch $A \cap B \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Also ist

$$A_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq A \overset{(6)}{=} O^{p'}(A)(A \cap B) \trianglelefteq\trianglelefteq G,$$

und ganz analog erhält man $B_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq B \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Als Erzeugnis von $\mathfrak{F}$-Subnormalteilern ist nun $G \overset{(2)}{=} \langle A_{\mathfrak{F}}, B_{\mathfrak{F}} \rangle$ selbst in $\mathfrak{F}$ enthalten, denn $\mathfrak{F}$ ist eine Fittingklasse. Dann gehören aber auch die Subnormalteiler A und B von G zu $\mathfrak{F}$, was zum endgültigen Widerspruch

$$A_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}} = AB = G$$

führt.

Im Ganzen ist somit gezeigt worden, dass $A_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}}$ in jedem wechselseitig vertauschbaren Produkt $G = AB$ eine Untergruppe darstellt. Damit lässt sich nun in wenigen Schritten verifizieren, dass $A_{\mathfrak{F}}$ und $B_{\mathfrak{F}}$ tatsächlich sogar wechselseitig vertauschbar sind. Da $A_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}} \leq G$ gilt, ist nämlich Lemma 2.3.1 anwendbar und liefert die wechselseitige Vertauschbarkeit der Untergruppen $A_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}} \cap A$ und $A_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}} \cap B$. Wegen der Subnormalität von $A \cap B$ in G ist dabei

$$A_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}} \cap A = A_{\mathfrak{F}}(B_{\mathfrak{F}} \cap A \cap B) = A_{\mathfrak{F}}(A \cap B)_{\mathfrak{F}} = A_{\mathfrak{F}},$$

und auf entsprechende Weise folgt $A_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}} \cap B = B_{\mathfrak{F}}$. Die Behauptung ist nun vollständig bewiesen. □

4.2 $G' \cap A_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}} \leq G_{\mathfrak{F}}$

Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine Fittingklasse. Mit Hilfe der in Satz 4.1.1 aufgezeigten (wechselseitigen) Vertauschbarkeit der $\mathfrak{F}$-Radikale $A_{\mathfrak{F}}$ und $B_{\mathfrak{F}}$ wird im nachstehenden Satz nun (insbesondere) die Inklusion $G' \cap A_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}} \leq G_{\mathfrak{F}}$ bewiesen. Diese erweitert das Resultat (++) von Seite 82 und dualisiert zugleich die Inklusionen $A' \cap G_{\mathfrak{F}} \leq A_{\mathfrak{F}}$ und $B' \cap G_{\mathfrak{F}} \leq B_{\mathfrak{F}}$.

Satz 4.2.1. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine Fittingklasse.*
Dann ist $G' \cap A_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}}$ ein in $\mathfrak{F}$ enthaltener Subnormalteiler von G; insbesondere gilt $G' \cap A_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}} \leq G_{\mathfrak{F}}$.

Beweis. Nach Satz 4.1.1 ist $A_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}} \leq G$. Seien nun L und M wie im Beweis dieses Satzes (vgl. Satz 2.3.4). Für diese Untergruppen erhält man $LB \cap A_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}} = (LB \cap A \cap A_{\mathfrak{F}})B_{\mathfrak{F}} = (L \cap A_{\mathfrak{F}})B_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}}$, das letzte Gleichheitszeichen wegen der Normalität von L in A. Auf analoge Weise folgt $AM \cap A_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}} = A_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}$, und somit gilt

$$LM \cap A_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}} = LB \cap AM \cap A_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}} \cap A_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}(B_{\mathfrak{F}} \cap A_{\mathfrak{F}})M_{\mathfrak{F}}.$$

Dabei ist $B_{\mathfrak{F}} \cap A_{\mathfrak{F}} = B_{\mathfrak{F}} \cap A_{\mathfrak{F}} \cap (A \cap B) = B_{\mathfrak{F}} \cap (A \cap B)_{\mathfrak{F}} = (A \cap B)_{\mathfrak{F}}$ aufgrund der Subnormalität von $A \cap B$ in G. Insgesamt führt dies auf die Gleichheit

$$LM \cap A_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}(B_{\mathfrak{F}} \cap A_{\mathfrak{F}})M_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}. \qquad (*)$$

Die Untergruppen $L_{\mathfrak{F}}$ und $M_{\mathfrak{F}}$ sind $\mathfrak{F}$-Subnormalteiler von G, was sich auf ihr Produkt $L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}$ vererbt. Aus

$$G' \cap A_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq LM \cap A_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}} \overset{(*)}{=} L_{\mathfrak{F}}M_{\mathfrak{F}}$$

folgert man schließlich die Behauptung, dass auch $G' \cap A_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}}$ ein Subnormalteiler von G und in $\mathfrak{F}$ enthalten ist. □

Bemerkung. Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine Fittingklasse. Vor dem Hintergrund von Satz 4.2.1 stellt sich die Frage, ob die Untergruppe $A_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}}$ selbst (und nicht nur $G' \cap A_{\mathfrak{F}}B_{\mathfrak{F}}$) ein Subnormalteiler von G ist. Diese Frage ist aber im Allgemeinen zu verneinen; so ist beispielsweise die symmetrische Gruppe $G = S_4$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen $A = A_4$ und einer (zur Diedergruppe D_8 isomorphen) 2-Sylowuntergruppe B von G. Dabei ist $\mathrm{Fit}(A)\,\mathrm{Fit}(B) = V_4B = B$ natürlich nicht subnormal in G.
Eine Ausnahme bildet hier die Fittingklasse $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$ aller auflösbaren Gruppen. In jedem wechselseitig vertauschbaren Produkt $G = AB$ ist [12, Theorem 4] zufolge nämlich $A_{\mathfrak{S}} = G_{\mathfrak{S}} \cap A$ und $B_{\mathfrak{S}} = G_{\mathfrak{S}} \cap B$, also $A_{\mathfrak{S}}B_{\mathfrak{S}} = (G_{\mathfrak{S}} \cap A)(G_{\mathfrak{S}} \cap B)$ ein Normalteiler von G nach Lemma 2.3.1.

Kapitel 5

Wechselseitig vertauschbare Produkte und Fittingformationen

Nach den vorherigen Untersuchungen hinsichtlich Radikalen und Fittingklassen ist Kapitel 5 dem dualen Untergruppen- und Klassentyp gewidmet, den Residuen bezüglich Formationen. Es beginnt in Abschnitt 5.1 mit einer Diskussion der folgenden Leitfrage:

> Sind die Residuen $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$ zweier wechselseitig vertauschbarer Faktoren A und B bezüglich einer Formation $\mathfrak{F}$ (wechselseitig) vertauschbar?

Ein Ergebnis des zweiten Abschnitts (Satz 5.2.1) besagt, dass die Vertauschbarkeit der $\mathfrak{F}$-Residuen vorliegt, wenn $\mathfrak{F}$ eine Fittingformation ist. Dieses Resultat wird im abschließenden Teil dazu genutzt, eine weitere Verallgemeinerung der Aussagen (+) und (++) aus Kapitel 4 (vgl. Seite 81f.) für Fittingformationen aufzuzeigen.

5.1 Diskussion: Vertauschbarkeit von Residuen

Die eben angeführte Leitfrage dieses Abschnitts (welche auch in späteren Teilen der Arbeit wieder aufgegriffen wird) ist aus verschiedenen Gründen von

Interesse: Zum einen fällt die Antwort nach Satz 4.1.1 für den dualen Untergruppentyp, die zu einer Fittingklasse gehörenden Radikale, positiv aus. Zum anderen motiviert das Verständnis wechselseitig vertauschbarer Produkte als Verallgemeinerung normaler Produkte ohnehin die Untersuchung, ob charakteristische Untergruppen zweier wechselseitig vertauschbarer Faktoren (wie im Fall zweier Normalteiler) miteinander vertauschen.

Tatsächlich ermöglichen die Strukturresultate aus Abschnitt 3.3 zunächst eine positive Antwort auf die vorgestellte Leitfrage.

Satz 5.1.1. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine Formation, welche die Klasse $\mathfrak{N}$ aller nilpotenten Gruppen enthält.*
Dann normalisieren sich $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$.

Beweis. Die Voraussetzung $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ und Satz 3.3.4 ergeben

$$A^{\mathfrak{F}} \leq A^{\mathfrak{N}} \leq N_G(B) \leq N_G(B^{\mathfrak{F}}),$$

und entsprechend folgt $B^{\mathfrak{F}} \leq N_G(A^{\mathfrak{F}})$. □

Im Fall $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ sind die $\mathfrak{F}$-Residuen $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$ nach Satz 5.1.1 insbesondere also wechselseitig vertauschbar, und $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ ist eine Untergruppe von $G = AB$. Genauer ist $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ in dieser Situation subnormal in G.

Korollar 5.1.2. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine Formation, welche die Klasse $\mathfrak{N}$ aller nilpotenten Gruppen enthält.*
Dann ist $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ ein Subnormalteiler von G.

Beweis. Satz 5.1.1 zufolge ist $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \leq G$. Nach Voraussetzung ist $A^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq A'$, wobei $A' \trianglelefteq\trianglelefteq G$ gilt (vgl. Satz 2.3.3). Ebenso ist $B^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq B' \trianglelefteq\trianglelefteq G$ und daher wie behauptet $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq\trianglelefteq G$. □

Bemerkung. Ohne die Bedingung $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ an die Formation $\mathfrak{F}$ ist $\langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}} \rangle$ im Allgemeinen kein Subnormalteiler von G, wie etwa die Klasse aller 3-Gruppen und die symmetrische Gruppe S_3 zeigen (die Gruppe S_3 ist wechselseitig vertauschbares Produkt ihrer 3- mit einer 2-Sylowuntergruppe).

Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts wird nun aufgezeigt, was bezüglich der Vertauschbarkeit von Residuen in wechselseitig vertauschbaren Produkten nicht erwartet werden darf. Die im folgenden Gegenbeispiel vorgestellte Gruppe taucht in einem anderen Zusammenhang auch in [15, Example (b)] auf.

Gegenbeispiel 5.1.3. *Es existiert ein wechselseitig vertauschbares Produkt $G = AB$ der Untergruppen A und B und eine Formation $\mathfrak{F}$ derart, dass $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ keine Untergruppe von G ist.*

Beweis. Sei P die extraspezielle Gruppe der Ordnung 27 vom Exponenten 3, gegeben durch die Präsentation

$$P = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = 1, [x, y] \in Z(P)\rangle.$$

P besitzt zwei Automorphismen α und β mit

$$\begin{aligned} x^{\alpha} &= x \quad \text{ und } \; y^{\alpha} = y^{-1} \\ \text{sowie} \quad x^{\beta} &= x^{-1} \text{ und } \; y^{\beta} = y. \end{aligned}$$

Offensichtlich stellt $\langle \alpha, \beta\rangle \leq \mathrm{Aut}(P)$ eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 4 dar.

Sei nun

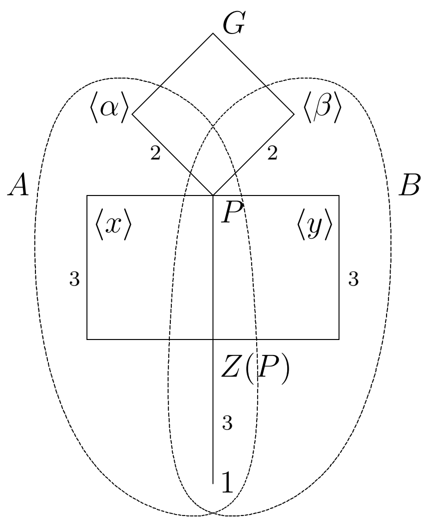
$$G = [P] \cdot \langle \alpha, \beta\rangle$$

das zugehörige semidirekte Produkt mit den Untergruppen

$$\begin{aligned} A &= \langle \alpha, Z(P), x\rangle \\ \text{und} \quad B &= \langle \beta, Z(P), y\rangle. \end{aligned}$$

Nach Definition von α und β ist dabei

$$\begin{aligned} A &= \langle \alpha\rangle Z(P) \times \langle x\rangle \\ \text{und} \quad B &= \langle \beta\rangle Z(P) \times \langle y\rangle. \end{aligned}$$



Sofort ersichtlich ist die Gleichheit $G = AB$, und desweiteren gilt:

(1) A und B sind wechselseitig vertauschbar:

Nach dem Kriterium aus Lemma 2.1.5 ist dies äquivalent zur wechselseitigen Vertauschbarkeit von $A/Z(P)$ und $B/Z(P)$. Letztere ist leicht einzusehen: $A/Z(P) = (\langle\alpha\rangle Z(P)/Z(P)) \times (\langle x\rangle Z(P)/Z(P))$ besitzt als (echte und nichttriviale) Untergruppen nur $\langle\alpha\rangle Z(P)/Z(P)$ und $\langle x\rangle Z(P)/Z(P)$; für beide ist die Vertauschbarkeit mit $B/Z(P)$ klar. Die entsprechende Aussage folgt für vertauschte Rollen von A und B genauso.

Schließlich sei

$$\mathfrak{F} = (H \mid \text{alle 3-Hauptfaktoren von } H \text{ sind nicht zentral}).$$

Offensichtlich ist $\mathfrak{F}$ eine Formation. Für die zugehörigen Residuen $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$ der wechselseitig vertauschbaren Untergruppen A und B gilt dann:

(2) $A^{\mathfrak{F}} = \langle x\rangle$ und $B^{\mathfrak{F}} = \langle y\rangle$:

Der minimale 3-Normalteiler $\langle x\rangle$ von A ist zentral und daher $A^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Außerdem wird $Z(P)$ vom Automorphismus α invertiert, so dass $\langle\alpha\rangle Z(P)$ eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 6 und

$$A/\langle x\rangle \cong \langle\alpha\rangle Z(P) \in \mathfrak{F}$$

ist. Man erhält

$$1 \neq A^{\mathfrak{F}} \leq \langle x\rangle$$

und somit die behauptete Gleichheit $A^{\mathfrak{F}} = \langle x\rangle$. Analog folgt $B^{\mathfrak{F}} = \langle y\rangle$.

Natürlich sind die Untergruppen $\langle x\rangle$ und $\langle y\rangle$ von P nicht vertauschbar, das heißt das Produkt $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ ist keine Untergruppe von G. □

Bemerkungen. (a) Bei der eben konstruierten Gruppe $G = AB$ gilt offensichtlich $A^{\mathfrak{F}} = Z(A)$ und $B^{\mathfrak{F}} = Z(B)$. Die Zentren sind daher (neben den Residuen) ein weiteres Beispiel für charakteristische Untergruppen zweier wechselseitig vertauschbarer Faktoren, die im Allgemeinen nicht vertauschen.

(b) Für die Diskussion der Verwandtschaft wechselseitig vertauschbarer mit normalen Produkten ist die angeführte Gruppe noch unter einem anderen Gesichtspunkt aufschlussreich: Beide wechselseitig vertauschbaren Untergruppen A und B sind hier nicht einmal Subnormalteiler von $G = AB$.

Da die Leitfrage dieses Abschnitts für eine beliebige Formation $\mathfrak{F}$ also im Allgemeinen zu verneinen ist, liegt es nahe, weitere Abschlusseigenschaften von $\mathfrak{F}$ zu ermitteln, welche die Vertauschbarkeit von $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$ in jedem wechselseitig vertauschbaren Produkt $G = AB$ garantieren. Diesem Problem werden in den folgenden Teilen der Arbeit verschiedene Lösungen zugeführt. Im Vorhinein sei schon erwähnt, dass etwa die Formation $\mathfrak{F} = \mathcal{S}_p$ $(p \in \mathbb{P})$ die Voraussetzungen erfüllt, unter denen $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \leq G$ in allen wechselseitig vertauschbaren Produkten $G = AB$ gilt (vgl. Satz 5.2.1 oder Satz 6.1.1). In Beispiel 2.2.3 wurde aber ein wechselseitig vertauschbares Produkt $G = AB$ behandelt, bei dem $O^p(A)$ und $O^p(B)$ nicht wechselseitig vertauschbar sind (für $p \neq 2, 3$). Zur Diskussion der (wechselseitigen) Vertauschbarkeit von Residuen lässt sich deshalb noch die nachstehende Aussage hinzufügen.

Gegenbeispiel 5.1.4. *Es existieren (*S*-,* N_0*- und* E_ϕ*-abgeschlossene) Formationen* $\mathfrak{F}$ *derart, dass* $A^{\mathfrak{F}}$ *und* $B^{\mathfrak{F}}$ *in jedem wechselseitig vertauschbaren Produkt* $G = AB$ *der Untergruppen* A *und* B *zwar vertauschbar, aber im Allgemeinen nicht wechselseitig vertauschbar sind.*

5.2 $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$ sind vertauschbar ($\mathfrak{F}$ Fittingformation)

In diesem Abschnitt werden erste mögliche Abschlusseigenschaften einer Formation $\mathfrak{F}$ vorgestellt, welche $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \leq G$ in jedem wechselseitig vertauschbaren Produkt $G = AB$ sicherstellen. Eine hinreichende Bedingung ist nach Satz 5.2.1, dass $\mathfrak{F}$ eine Fittingformation ist. Vor dem folgenden Hintergrund erscheint das plausibel: Wie im Zusammenhang mit Satz 2.3.4 diskutiert besteht eine gewisse Nähe von wechselseitig vertauschbaren zu subnormalen Produkten. Bei einem Produkt $G = AB$ zweier Subnormalteiler A und B ist die Vertauschbarkeit von $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$ für eine Fittingformation $\mathfrak{F}$ aber klar, nach Lemma 1.1.9 gilt dann sogar $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$. Es verwundert deshalb auch nicht, dass im Beweis von Satz 5.2.1 der Satz 3.2.3 eine Rolle spielt, welcher wie in Abschnitt 3.2 angemerkt beim Auffinden von Subnormalteilern in wechselseitig vertauschbaren Produkten hilft.

Satz 5.2.1. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine Fittingformation.*
Dann ist $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ eine Untergruppe von G.

Beweis. Angenommen die Behauptung sei falsch. Sei dann $G = AB$ ein wechselseitig vertauschbares Produkt mit $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \not\leq G$ für eine Fittingformation $\mathfrak{F}$ und mit $|A| + |B|$ minimal unter allen Gegenbeispielen. Für diese Gruppe $G = AB$ gilt:

(1) Sind $N_1, N_2 \trianglelefteq A$ mit $A = N_1N_2$, dann ist $A = N_1(A \cap B)$ oder $A = N_2(A \cap B)$; dieselbe Aussage gilt auch für B:

Die Untergruppen $N_i(A \cap B)$ und B ($i \in \{1, 2\}$) sind nach Lemma 2.1.3 wechselseitig vertauschbar. Wäre $N_i(A \cap B) < A$ für beide $i \in \{1, 2\}$, dann würde die Wahl von G also

$$(N_i(A \cap B))^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \leq G$$

bedingen. Dabei ist $N_i(A \cap B)$ Produkt zweier Subnormalteiler von A und deshalb

$$(N_i(A \cap B))^{\mathfrak{F}} = (N_i)^{\mathfrak{F}}(A \cap B)^{\mathfrak{F}}$$

nach Lemma 1.1.9. Wegen $(A \cap B)^{\mathfrak{F}} \leq B^{\mathfrak{F}}$ wäre folglich

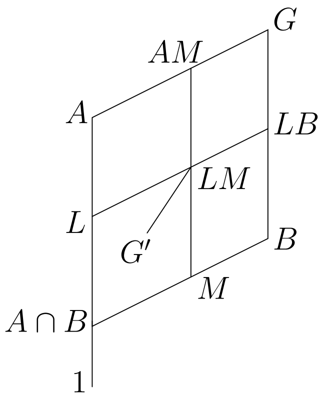
$$(N_i)^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}} = (N_i)^{\mathfrak{F}} (A \cap B)^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}} = (N_i(A \cap B))^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}} \leq G$$

für beide $i \in \{1, 2\}$. Weil aber Lemma 1.1.9 zufolge $A^{\mathfrak{F}} = (N_1)^{\mathfrak{F}} (N_2)^{\mathfrak{F}}$ gilt, wäre dann

$$A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}} = (N_1)^{\mathfrak{F}} (N_2)^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}} = (N_1)^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}} (N_2)^{\mathfrak{F}} = B^{\mathfrak{F}} (N_1)^{\mathfrak{F}} (N_2)^{\mathfrak{F}} = B^{\mathfrak{F}} A^{\mathfrak{F}},$$

also $A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}} \leq G$ im Widerspruch zur Wahl von G. Daher ist tatsächlich $A = N_1(A \cap B)$ oder $A = N_2(A \cap B)$, und analog folgt dieselbe Aussage auch für B.

Im wechselseitig vertauschbaren Produkt $G = AB$ existieren nach Satz 2.3.4 Untergruppen L und M mit folgenden Eigenschaften:



(i) $A' \leq L \leq A$, $B' \leq M \leq B$,

(ii) $A \cap B = L \cap M$,

(iii) $L, M \trianglelefteq\trianglelefteq G$,

(iv) $G' \leq LB \cap AM = LM$.

Für das betrachtete minimale Gegenbeispiel gilt dann weiter:

(2) A oder B ist subnormal in G:

Angenommen weder A noch B sei ein Subnormalteiler von G. Weil A/L dann nichttrivial (und abelsch) ist, existiert eine Primzahl p mit $A/L > O^p(A/L) = O^p(A)L/L$, also $A > O^p(A)L \geq O^p(A)(A \cap B)$. Nach (1) folgt daraus

$$A = O^{p'}(A)(A \cap B),$$

und analog lässt sich eine Primzahl q finden mit

$$B = O^{q'}(B)(A \cap B).$$

O.B.d.A. sei $p \geq q$. Dann ist Satz 3.2.3 zufolge $O^{p'}(A) \trianglelefteq\trianglelefteq AO^{q'}(B) = AB = G$, und natürlich ist auch $A \cap B \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Also gilt

$$A = O^{p'}(A)(A \cap B) \trianglelefteq\trianglelefteq G,$$

was der obigen Annahme widerspricht und die behauptete Subnormalität von A oder B in G beweist.

(3) Das Gegenbeispiel existiert nicht:

Nach (2) darf o.B.d.A. von $A \trianglelefteq\trianglelefteq G$ ausgegangen werden. Somit handelt es sich bei AM um ein Produkt zweier Subnormalteiler von G, und deshalb gilt Lemma 1.1.9 zufolge $(AM)^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}M^{\mathfrak{F}}$. Dabei ist $(AM)^{\mathfrak{F}} \operatorname{char} AM \trianglelefteq G$ und insgesamt folglich $A^{\mathfrak{F}}M^{\mathfrak{F}} = (AM)^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq G$. Gemeinsam mit der Inklusion $M^{\mathfrak{F}} \leq B^{\mathfrak{F}}$ führt dies auf den endgültigen Widerspruch

$$A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}M^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \leq G.$$

Ein Gegenbeispiel kann also nicht existieren, und damit ist die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung. Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine Fittingformation. Die Residuen $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$ sind nach Satz 5.2.1 zwar vertauschbar; es sei aber noch einmal an Gegenbeispiel 5.1.4 erinnert, wonach $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$ in dieser Situation im Allgemeinen nicht wechselseitig vertauschbar sind. Darin unterscheidet sich das Verhalten dieser Residuen auch von dem der zu $\mathfrak{F}$ gehörenden Radikale $A_{\mathfrak{F}}$ und $B_{\mathfrak{F}}$ (vgl. Satz 4.1.1). Anders stellt sich die Sachlage natürlich im Fall $\operatorname{Char}(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$ dar, wo [19, IX Lemma (1.8)] zufolge $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ gilt: Hier normalisieren sich $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$ nach Satz 5.1.1 sogar.

In Abschnitt 3.2 wurde angekündigt, dass sich Satz 3.2.3 auf paarweise wechselseitig vertauschbare Untergruppen $G_1, \ldots, G_r$ $(r \in \mathbb{N})$ einer Gruppe G verallgemeinern lässt. Mit Hilfe von Satz 5.2.1 ist dies nun möglich.

Korollar 5.2.2. *Seien $G_1, \ldots, G_r$ $(r \in \mathbb{N})$ paarweise wechselseitig vertauschbare Untergruppen einer Gruppe G und π und ρ Primzahlmengen derart, dass p kein Teiler von $q-1$ ist für alle $p \in \pi$ und $q \in \pi \cup \rho$.*
Dann ist $O^{\pi'}(G_i)$ subnormal in $G_i(\prod_{j=1}^{r} O^{\rho'}(G_j))$ für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$.
Ist dabei $\pi \cap \rho = \emptyset$, dann ist $O^{\pi'}(G_i)$ sogar normal in $G_i(\prod_{j=1}^{r} O^{\rho'}(G_j))$.

Beweis. Sei $i \in \{1, \dots, r\}$. Nach Satz 5.2.1 ist $O^{\rho'}(G_j)O^{\rho'}(G_k)$ eine Untergruppe von G für alle $j, k \in \{1, \dots, r\}$, und wegen der wechselseitigen Vertauschbarkeit von G_i mit G_j und G_k vertauscht auch $G_iO^{\rho'}(G_j)$ mit $G_iO^{\rho'}(G_k)$. Aufgrund der Wahl der Primzahlmengen π und ρ ist dabei stets $O^{\pi'}(G_i) \trianglelefteq\trianglelefteq G_iO^{\rho'}(G_j)$ nach Satz 3.2.3, woraus man mit [23, Theorem 7.7.1] wie behauptet $O^{\pi'}(G_i) \trianglelefteq\trianglelefteq \prod_{j=1}^{r} G_iO^{\rho'}(G_j) = G_i(\prod_{j=1}^{r} O^{\rho'}(G_j))$ erhält.

Ist zusätzlich $\pi \cap \rho = \emptyset$, dann ist für alle $j \in \{1, \dots, r\}$ Satz 3.2.3 zufolge $O^{\pi'}(G_i) \trianglelefteq G_iO^{\rho'}(G_j)$ und somit tatsächlich $O^{\pi'}(G_i) \trianglelefteq G_i(\prod_{j=1}^{r} O^{\rho'}(G_j))$. $\square$

5.3 $(G')^{\mathfrak{F}} \leq A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$

Ehe später noch alternative Antworten auf die Leitfrage nach der Vertauschbarkeit von Residuen aufgezeigt werden, erfolgt in diesem Abschnitt unter Anwendung von Satz 5.2.1 eine weitere Verallgemeinerung der folgenden Ergebnisse (vgl. die einleitende Diskussion in Kapitel 4).

> *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine Fittingformation.*
> *Ist G in $\mathfrak{F}$ enthalten, dann gehören auch A' und B' zu $\mathfrak{F}$.* (+)
> *Gehören A und B zu $\mathfrak{F}$, dann ist auch G' in $\mathfrak{F}$ enthalten.* (++)

Tatsächlich stellt sich heraus, dass sich diese Resultate durch das Verhalten der $\mathfrak{F}$-Residuen auf symmetrische Weise erweitern lassen wie in Kapitel 4 durch das Verhalten der $\mathfrak{F}$-Radikale ($\mathfrak{F}$ eine Fittingformation). Die Subnormalität von A' und B' im wechselseitig vertauschbaren Produkt $G = AB$ (vgl. Satz 2.3.3) liefert zunächst sofort die Inklusionen $(A')^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$ und $(B')^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$, welche die Aussage (+) als Spezialfall beinhalten. Mit Hilfe der Vertauschbarkeit von $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$ wird im nachstehenden Satz nun bewiesen, dass auch die Inklusion $(G')^{\mathfrak{F}} \leq A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ gilt. Diese verallgemeinert die Aussage (++) und dualisiert zugleich $(A')^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$ sowie $(B')^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$.

Satz 5.3.1. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine Fittingformation.*
Dann ist $(G')^{\mathfrak{F}} \leq A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$.

Beweis. Nach Satz 5.2.1 ist $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \leq G$. Seien nun L und M wie im Beweis dieses Satzes (vgl. Satz 2.3.4). Dann ist $G' \trianglelefteq LM$ und daher

$$(G')^{\mathfrak{F}} \leq (LM)^{\mathfrak{F}}.$$

Wegen der Subnormalität von L und M in G ist dabei

$$(LM)^{\mathfrak{F}} = L^{\mathfrak{F}}M^{\mathfrak{F}},$$

wie eine Anwendung von Lemma 1.1.9 ergibt. Schließlich ist $L \trianglelefteq A$ und deshalb $L^{\mathfrak{F}} \leq A^{\mathfrak{F}}$. Entsprechend gilt $M^{\mathfrak{F}} \leq B^{\mathfrak{F}}$, also

$$L^{\mathfrak{F}}M^{\mathfrak{F}} \leq A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}.$$

Insgesamt folgt wie behauptet

$$(G')^{\mathfrak{F}} \leq (LM)^{\mathfrak{F}} = L^{\mathfrak{F}} M^{\mathfrak{F}} \leq A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}}.$$

□

Bemerkung. Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine Fittingformation. Vor dem Hintergrund der Inklusion $G' \cap A_{\mathfrak{F}} B_{\mathfrak{F}} \leq G_{\mathfrak{F}}$ aus Satz 4.2.1 stellt sich die Frage, ob vielleicht auch die Inklusion $G' \cap G^{\mathfrak{F}} \leq A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}}$ gilt, welche die Aussage von Satz 5.3.1 in entsprechender Form sogar noch verschärfen würde. Die Antwort auf diese Frage fällt aber im Allgemeinen negativ aus; ein Gegenbeispiel für die Fittingformation $\mathfrak{N}$ aller nilpotenten Gruppen ist jedes nicht-nilpotente wechselseitig vertauschbare Produkt zweier nilpotenter Untergruppen (etwa die symmetrische Gruppe S_3).

Kapitel 6

Wechselseitig vertauschbare Produkte und gesättigte Formationen

In diesem Kapitel werden wechselseitig vertauschbare Produkte schließlich in Verbindung mit gesättigten Formationen studiert. Abschnitt 6.1 greift zunächst noch einmal die Frage nach der Vertauschbarkeit von Residuen auf und hat zum Ergebnis, dass $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \leq G$ in jedem wechselseitig vertauschbaren Produkt $G = AB$ insbesondere dann gilt, wenn $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation ist (Korollar 6.1.2). Damit rückt die Untersuchung eines Zusammenhangs zwischen $G^{\mathfrak{F}}$ und der Untergruppe $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ in den Blick, womit sich die anschließenden Abschnitte 6.2 und 6.3 befassen. Daraus ergeben sich einige Aussagen zur Vererbung bestimmter Klassenzugehörigkeiten von wechselseitig vertauschbaren Faktoren auf ihr Produkt und umgekehrt. Was diesbezüglich nicht erwartet werden darf, zeigen die Gegenbeispiele des abschließenden Abschnitts 6.4.

6.1 $A^{\mathcal{F}}$ und $B^{\mathcal{F}}$ sind vertauschbar ($\mathcal{F}$ gesättigte Formation)

Der folgende Satz beinhaltet eine Bedingung an eine Formation $\mathcal{F}$, welche die Gleichheit $A^{\mathcal{F}}B^{\mathcal{F}} = B^{\mathcal{F}}A^{\mathcal{F}}$ in jedem wechselseitig vertauschbaren Produkt AB impliziert.

Satz 6.1.1. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathcal{F}$ eine Formation mit $\mathrm{Char}(\mathcal{F}) = \pi \subseteq \mathbb{P}$.*
Ist $\mathcal{N}_\pi \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}_\pi$, dann ist $A^{\mathcal{F}}B^{\mathcal{F}}$ eine Untergruppe von G.

Beweis. Da $A/A^{\mathcal{F}}$ und $B/B^{\mathcal{F}}$ π-Gruppen sind (man beachte $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}_\pi$), liefert Lemma 3.2.1 die Gleichheiten

$$\begin{aligned} O^\pi(A^{\mathcal{F}}) &= O^\pi(A) \\ \text{und} \quad O^\pi(B^{\mathcal{F}}) &= O^\pi(B). \end{aligned}$$

Mit Satz 5.2.1 folgert man daraus

$$O^\pi(A^{\mathcal{F}})O^\pi(B^{\mathcal{F}}) = O^\pi(B^{\mathcal{F}})O^\pi(A^{\mathcal{F}}). \tag{1}$$

Desweiteren führt die Voraussetzung $\mathcal{N}_\pi \subseteq \mathcal{F}$ auf

$$O^{\pi'}(A^{\mathcal{F}}) \leq O^{\pi'}(A^{\mathcal{N}_\pi}) \leq A^{\mathcal{N}}.$$

Nach Satz 3.3.4 normalisiert $O^{\pi'}(A^{\mathcal{F}})$ daher B und somit die charakteristischen Untergruppen $O^\pi(B^{\mathcal{F}})$ sowie $O^{\pi'}(B^{\mathcal{F}})$. Entsprechendes gilt für vertauschte Rollen von A und B, das heißt es ist

$$\begin{aligned} O^{\pi'}(A^{\mathcal{F}}) &\leq N_G(O^\pi(B^{\mathcal{F}})) \cap N_G(O^{\pi'}(B^{\mathcal{F}})) \\ \text{und} \quad O^{\pi'}(B^{\mathcal{F}}) &\leq N_G(O^\pi(A^{\mathcal{F}})) \cap N_G(O^{\pi'}(A^{\mathcal{F}})). \end{aligned} \tag{2}$$

Gemeinsam liefern (1) und (2) nun die Behauptung

$$\begin{aligned} A^{\mathcal{F}}B^{\mathcal{F}} &= O^{\pi'}(A^{\mathcal{F}})O^\pi(A^{\mathcal{F}})O^\pi(B^{\mathcal{F}})O^{\pi'}(B^{\mathcal{F}}) \\ &\overset{(1)}{=} O^{\pi'}(A^{\mathcal{F}})O^\pi(B^{\mathcal{F}})O^\pi(A^{\mathcal{F}})O^{\pi'}(B^{\mathcal{F}}) \\ &\overset{(2)}{=} O^{\pi'}(B^{\mathcal{F}})O^\pi(B^{\mathcal{F}})O^\pi(A^{\mathcal{F}})O^{\pi'}(A^{\mathcal{F}}) = B^{\mathcal{F}}A^{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

□

Die wichtigste Konsequenz von Satz 6.1.1 ist die nachstehende.

Korollar 6.1.2. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation.*
Dann ist $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ eine Untergruppe von G.

Beweis. Ist $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation mit $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \pi \subseteq \mathbb{P}$, dann ist die Voraussetzung

$$\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}_\pi$$

aus Satz 6.1.1 stets erfüllt (vgl. [19, IV Corollary (4.3)]). Es bleibt nichts weiter zu zeigen. □

Bemerkung. Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B. Für eine gesättigte Formation $\mathfrak{F}$ mit voller Charakteristik liefert Satz 5.1.1 (wie für alle Formationen oberhalb der Klasse $\mathfrak{N}$ aller nilpotenten Gruppen), dass sich $A^{\mathfrak{F}}$ und $B^{\mathfrak{F}}$ sogar normalisieren. Es sei aber noch einmal auf Gegenbeispiel 5.1.4 verwiesen, wonach dies für gesättigte Formationen beliebiger Charakteristik im Allgemeinen falsch ist.

Mit der Aussage von Korollar 6.1.2 schließt die Diskussion der Vertauschbarkeit von Residuen wechselseitig vertauschbarer Untergruppen A und B einer Gruppe $G = AB$. Stattdessen wird das Ergebnis $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \leq G$ für eine gesättigte Formation $\mathfrak{F}$ in den folgenden Abschnitten dazu genutzt, einen Zusammenhang zwischen $G^{\mathfrak{F}}$ und $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ aufzuzeigen.

6.2 Core-freier Schnitt von A und B: $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$

Bei der Untersuchung der Frage, wie sich die Zugehörigkeit zweier total vertauschbarer Untergruppen A und B zu bestimmten Klassen von Gruppen auf ihr Produkt $G = AB$ vererbt, bewiesen M. Asaad und A. Shaalan [3] das folgende Ergebnis:

Sei $G = AB$ total vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B.
Sind A und B in $\mathfrak{U}$ enthalten, dann gehört auch G zu $\mathfrak{U}$.

Später zeigte R. Maier [24], dass diese Vererbungseigenschaft nicht nur für die Klasse $\mathfrak{U}$ aller überauflösbaren Gruppen gilt, sondern für jede gesättigte Formation $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Dieses Ergebnis wurde in [10] erheblich verallgemeinert, wo A. Ballester-Bolinches, M. C. Pedraza-Aguilera und M. D. Pérez-Ramos das Verhalten der $\mathfrak{F}$-Residuen $A^{\mathfrak{F}}$, $B^{\mathfrak{F}}$ und $G^{\mathfrak{F}}$ in total vertauschbaren Produkten $G = AB$ studierten und folgenden Satz bewiesen:

Sei $G = AB$ total vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation, welche die Klasse $\mathfrak{U}$ aller überauflösbaren Gruppen enthält.
Dann ist $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$.

Es ist bekannt, dass ein wechselseitig vertauschbares Produkt $G = AB$ mit $A \cap B = 1$ tatsächlich schon ein total vertauschbares Produkt ist (vgl. Lemma 2.1.3). Das Resultat von A. Ballester-Bolinches, M. C. Pedraza-Aguilera und M. D. Pérez-Ramos liefert daher sofort:

Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation, welche die Klasse $\mathfrak{U}$ aller überauflösbaren Gruppen enthält.
Ist $A \cap B = 1$, dann ist $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$.

Ziel der kommenden Abschnitte ist eine Verallgemeinerung dieses Ergebnisses (Satz 6.3.1): Tatsächlich reicht es, die Core-Freiheit anstelle der Trivialität von $A \cap B$ vorauszusetzen. Als Korollar erhält man folgende Vererbungseigenschaft: Im Fall $(A \cap B)_G = 1$ gehört G genau dann zu $\mathfrak{F}$, wenn dies auf A und B zutrifft (wobei $G = AB$ ein wechselseitig vertauschbares Produkt und $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation sei, welche die Klasse $\mathfrak{U}$ enthält). Für den Fall $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ ist letztere Vererbungseigenschaft gerade der Hauptsatz aus [1]. Als Spezialfall erscheint auch dessen Erweiterung aus [13, Theorem 6], wo J. C. Beidleman und H. Heineken diese Vererbungseigenschaft für die (gesättigte) Formation aller p-überauflösbaren Gruppen ($p \in \mathbb{P}$) bewiesen.

Wie später aufgezeigt wird, ist die Faktorisierung des $\mathfrak{F}$-Residuums $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ (in einem wechselseitig vertauschbaren Produkt $G = AB$ mit $(A \cap B)_G = 1$) im Allgemeinen falsch, wenn die gesättigte Formation $\mathfrak{F}$ nicht alle überauflösbaren Gruppen enthält. Ein weiteres Ergebnis (Satz 6.2.1) ist aber, dass für eine beliebige gesättigte Formation $\mathfrak{F}$ das Produkt $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ weiterhin eine Untergruppe von $G^{\mathfrak{F}}$ ist. Insbesondere gehören A und B folglich stets zu $\mathfrak{F}$, wenn dies für G gilt.

Mit dem Beweis dieses ersten Hauptsatzes zu wechselseitig vertauschbaren Produkten $G = AB$ mit $(A \cap B)_G = 1$ im Zusammenhang mit gesättigten Formationen soll nun mit der Ausführung der vorgestellten Ergebnisse begonnen werden.

Satz 6.2.1. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation.*
Ist $(A \cap B)_G = 1$, dann gilt $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Ordnung von $G = AB$. Korollar 3.1.2 zufolge existiert ein minimaler Normalteiler N von G in A oder B; o.B.d.A. sei $N \leq B$. Die Voraussetzungen des Satzes übertragen sich auf die Faktorgruppe G/T (mit $T = (AN \cap B)_G$): Die Untergruppen AT/T und B/T sind wechselseitig vertauschbar, und ihr Schnitt $(AT/T) \cap (B/T) = (AN \cap B)/T$ ist nach Definition von T Core-frei in G/T. Da $|G/T| < |G|$ ist ($1 \neq N$ ist in T enthalten), gilt nach Induktionsannahme somit

$$(A^{\mathfrak{F}}T/T)(B^{\mathfrak{F}}T/T) = (AT/T)^{\mathfrak{F}}(B/T)^{\mathfrak{F}} \leq (G/T)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}T/T,$$

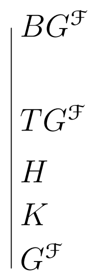
also

$$A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}T. \tag{$*$}$$

Aus Korollar 3.4.3 und der $\mathrm{Inn}(G)$-Isomorphie

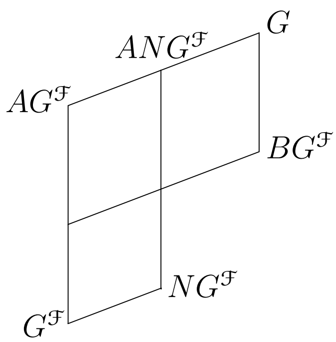
$$TG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cong T/(T \cap G^{\mathfrak{F}})$$

leitet man desweiteren ab, dass A oder B jeden G-Hauptfaktor H/K mit $G^{\mathfrak{F}} \leq K < H \leq TG^{\mathfrak{F}}$ zentralisiert.



Wird H/K von A zentralisiert, dann induzieren G und B bei der Konjugation auf diesem Hauptfaktor dieselbe Automorphismengruppe. Insbesondere ist H/K ein $\mathfrak{F}$-zentraler Hauptfaktor sowohl von G als auch von $BG^{\mathfrak{F}}$. Wird H/K von B zentralisiert, so operiert B auf dieser Faktorgruppe $\mathfrak{F}$-hyperzentral. Dafür muss lediglich bemerkt werden, dass der Primteiler von $|H/K|$ als Teiler von $|G/G^{\mathfrak{F}}|$ in der Charakteristik von $\mathfrak{F}$ auftaucht. Im Ganzen erhält man, dass $TG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}}$ ein $\mathfrak{F}$-hyperzentraler Normalteiler von $BG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}}$ mit einer $\mathfrak{F}$-Faktorgruppe ist (letztere Aussage folgt mit der Inklusion $B^{\mathfrak{F}} \overset{(*)}{\leq} G^{\mathfrak{F}}T$). Demnach ist schon $BG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}}$ in $\mathfrak{F}$ enthalten.

Auf identische Weise lässt sich folgern, dass $AG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}}$ zu $\mathfrak{F}$ gehört (wenn $NG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}}$ von A gedeckt wird, also $T \leq AG^{\mathfrak{F}}$ ist) bzw. $ANG^{\mathfrak{F}}/NG^{\mathfrak{F}}$ eine $\mathfrak{F}$-Gruppe ist (wenn $NG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}}$ von A gemieden wird).



Im zweiten Fall gilt aber wieder

$$AG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cong ANG^{\mathfrak{F}}/NG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}.$$

Insgesamt ist daher sowohl $AG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}}$ als auch $BG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}}$ in $\mathfrak{F}$ enthalten, was gleichbedeutend mit der Behauptung $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$ ist. $\square$

Als Korollar zu Satz 6.2.1 erhält man die folgende Vererbungseigenschaft.

Korollar 6.2.2. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation.*
Ist im Fall $(A \cap B)_G = 1$ die Gruppe G in $\mathfrak{F}$ enthalten, dann gilt das auch für die Faktoren A und B.

Bemerkungen. Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation.
(a) Gleichbedeutend mit Satz 6.2.1 ist natürlich die Aussage, dass $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ stets eine Untergruppe von $G^{\mathfrak{F}}(A \cap B)_G$ ist.
(b) Die Aussage von Satz 6.2.1 ist im Allgemeinen falsch, wenn die Formation $\mathfrak{F}$ nicht gesättigt ist. Selbst die in Korollar 6.2.2 aufgeführte Vererbungseigenschaft geht dann verloren. Dies zeigen beispielsweise die Formation

$$\mathfrak{F} = (H \mid \text{alle 3-Hauptfaktoren von } H \text{ sind nicht zentral})$$

aus Gegenbeispiel 5.1.3 und ein direktes Produkt zweier Kopien der symmetrischen Gruppe S_3. Letzteres lässt sich als wechselseitig vertauschbares Produkt von zwei zyklischen Untergruppen der Ordnung 6 verstehen, welche sich natürlich trivial schneiden. Anders als die ganze Gruppe gehören aber beide (zyklischen) Faktoren nicht zu $\mathfrak{F}$.
(c) Die Vererbungseigenschaft aus Korollar 6.2.2 (und damit offensichtlich auch die Inklusion $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$ aus Satz 6.2.1) bleibt im Allgemeinen auch dann nicht bestehen, wenn $(A \cap B)_G \neq 1$ ist. Ein Gegenbeispiel findet sich für jede gesättigte Formation $\mathfrak{F}$, welche nicht s_n-abgeschlossen ist (etwa das Klassenprodukt der Klasse $\mathfrak{N}$ aller nilpotenten Gruppen mit der Formation aus (b)). Dann existiert nämlich eine $\mathfrak{F}$-Gruppe G mit einem Normalteiler A, der nicht zu $\mathfrak{F}$ gehört. Diese Gruppe kann als wechselseitig vertauschbares Produkt von A und G verstanden werden.

6.3 Core-freier Schnitt von A und B: $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ für $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{U}$

Untersuchungsobjekte sind wieder wechselseitig vertauschbare Produkte $G = AB$ mit $(A \cap B)_G = 1$. Nach Satz 6.2.1 ist das Produkt $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ der $\mathfrak{F}$-Residuen von A und B eine Untergruppe des $\mathfrak{F}$-Residuums $G^{\mathfrak{F}}$ von G, wenn $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation ist. Der angekündigte Hauptsatz dieses Abschnitts besagt, dass für gesättigte Formationen $\mathfrak{F}$ oberhalb der Klasse $\mathfrak{U}$ aller überauflösbaren Gruppen sogar die Gleichheit $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ gilt.

Satz 6.3.1. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation, welche die Klasse $\mathfrak{U}$ aller überauflösbaren Gruppen enthält.*
Ist $(A \cap B)_G = 1$, dann ist $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$.

Beweis. Angenommen die Behauptung sei falsch. Sei dann $G = AB$ ein wechselseitig vertauschbares Produkt mit $(A \cap B)_G = 1$, mit $G^{\mathfrak{F}} \neq A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ für eine gesättigte Formation $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{U}$ und mit minimaler Ordnung unter allen Gegenbeispielen. In dieser Gruppe G schneiden sich die Untergruppen A und B nicht trivial; sonst wäre $G = AB$ ein total vertauschbares Produkt (vgl. Lemma 2.1.3) und daher [10, Theorem 4] anwendbar, wonach in dieser Situation $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ gelten würde (vgl. dazu auch die einleitende Diskussion in Abschnitt 6.2). Außerdem impliziert $(A \cap B)_G = 1$ nach Lemma 2.3.2, dass $1 \neq A \cap B$ nilpotent ist. Für einen Primteiler p von $|A \cap B|$ ist also $O_p(A \cap B) \neq 1$, was nach Korollar 3.1.3 schon die Existenz eines minimalen p-Normalteilers N von G in A oder B garantiert; o.B.d.A. sei $N \leq B$. Für das betrachtete minimale Gegenbeispiel gilt nun weiter (wobei wieder $T = (AN \cap B)_G$ gesetzt ist):

(1) $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}(T \cap G^{\mathfrak{F}})$:

Die Faktorgruppen AT/T und B/T sind wechselseitig vertauschbar. Ihr Schnitt $(AT/T) \cap (B/T) = (AN \cap B)/T$ ist nach Definition von T Core-frei in G/T. Außerdem ist $|G/T| < |G|$, denn T enthält $N \neq 1$. Die Wahl von G bedingt folglich

$$G^{\mathfrak{F}}T/T = (G/T)^{\mathfrak{F}} = (AT/T)^{\mathfrak{F}}(B/T)^{\mathfrak{F}} = (A^{\mathfrak{F}}T/T)(B^{\mathfrak{F}}T/T),$$

also $G^{\mathfrak{F}}T = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}T$. Weiter ist Satz 6.2.1 zufolge $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ eine Untergruppe von $G^{\mathfrak{F}}$. Insgesamt erhält man die behauptete Gleichheit

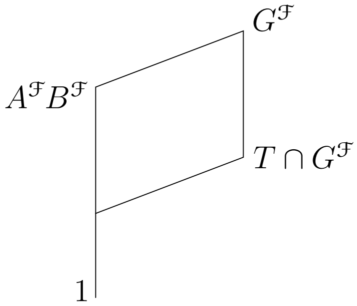
$$G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}T \cap G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}T \cap G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}(T \cap G^{\mathfrak{F}}).$$

(2) $(G^{\mathfrak{F}})' \leq A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$:

Zunächst wird nachgewiesen, dass $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ normal in $G^{\mathfrak{F}}$ ist. Die Voraussetzung $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$ impliziert $A^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq A'$, wobei $A' \trianglelefteq\trianglelefteq G$ gilt nach Satz 2.3.3. Demnach ist $A^{\mathfrak{F}}$ ein Subnormalteiler von G und wird als solcher nach einem Ergebnis von H. Wielandt (vgl. [19, A Lemma (14.3)]) vom minimalen Normalteiler N normalisiert. Auch $A \cap T$ normalisiert natürlich $A^{\mathfrak{F}}$, so dass

$$T = AN \cap T = (A \cap T)N \leq N_G(A^{\mathfrak{F}})$$

gilt. Wegen $T \leq B$ ist die entsprechende Inklusion $T \leq N_G(B^{\mathfrak{F}})$ trivial. Mit der Gleichheit aus (1) erhält man somit tatsächlich



$$A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}(T \cap G^{\mathfrak{F}}) = G^{\mathfrak{F}}.$$

Desweiteren ist T (wie N) eine elementarabelsche p-Gruppe: Im Fall $T = N$ ist dafür nichts zu zeigen, und für $T \neq N$ ist dies eine Aussage von Satz 3.4.1. Weil (1) zufolge

$$G^{\mathfrak{F}}/A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}(T \cap G^{\mathfrak{F}})/A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \cong (T \cap G^{\mathfrak{F}})/(T \cap A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}})$$

gilt, ist mit T auch $G^{\mathfrak{F}}/A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ abelsch und $(G^{\mathfrak{F}})'$ wie behauptet in $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ enthalten.

(3) Das Gegenbeispiel existiert nicht:

Sei $1 = K_r \trianglelefteq K_{r-1} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_1 = T \cap G^{\mathfrak{F}}$ eine Reihe derart, dass sämtliche K_i/K_{i+1} Hauptfaktoren von G sind. Das Ziel ist es nun, für alle i die Inklusion

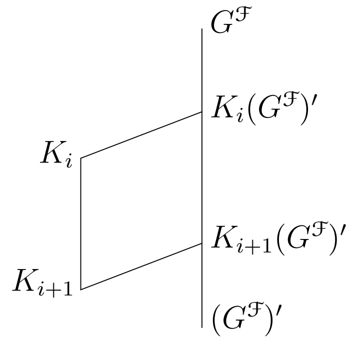
$$K_i \leq A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}K_{i+1}$$

zu beweisen.

Nach (2) ist dafür nichts weiter zu zeigen, wenn $(G^{\mathfrak{F}})'$ den Hauptfaktor K_i/K_{i+1} deckt. Dann ist nämlich $K_i \leq (G^{\mathfrak{F}})'K_{i+1}$ und damit tatsächlich

$$K_i \leq (G^{\mathfrak{F}})'K_{i+1} \overset{(2)}{\leq} A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}K_{i+1}.$$

Im weiteren Beweisverlauf darf also davon ausgegangen werden, dass K_i/K_{i+1} von $(G^{\mathfrak{F}})'$ gemieden wird.



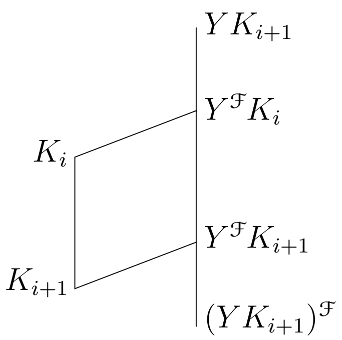
Es gilt dann die $\mathrm{Inn}(G)$-Isomorphie

$$K_i(G^{\mathfrak{F}})'/K_{i+1}(G^{\mathfrak{F}})' \cong K_i/K_{i+1},$$

wonach $K_i(G^{\mathfrak{F}})'/K_{i+1}(G^{\mathfrak{F}})'$ ein G-Hauptfaktor zwischen $(G^{\mathfrak{F}})'$ und $G^{\mathfrak{F}}$ ist. Als abelsches $\mathfrak{F}$-Residuum von $G/(G^{\mathfrak{F}})'$ ist $G^{\mathfrak{F}}/(G^{\mathfrak{F}})'$ dabei Satz 1.2.1 zufolge auch der größte $\mathfrak{F}$-hyperexzentrische Normalteiler von $G/(G^{\mathfrak{F}})'$. Die $\mathrm{Inn}(G)$-isomorphen Hauptfaktoren $K_i(G^{\mathfrak{F}})'/K_{i+1}(G^{\mathfrak{F}})'$ und K_i/K_{i+1} sind daher $\mathfrak{F}$-exzentrisch in G.

Nach Beobachtung 1.1.16 und Beobachtung 1.1.17 ist K_i/K_{i+1} somit insbesondere nicht zyklisch. Außerdem existiert nach Korollar 3.4.3 eine Untergruppe $X \in \{A, B\}$, welche K_i/K_{i+1} zentralisiert. Diese Eigenschaften von K_i/K_{i+1} können nach Satz 2.3.5 nur dann gleichzeitig erfüllt sein, wenn die Untergruppe $Y \in \{A, B\} \setminus \{X\}$ diesen Hauptfaktor deckt.

Desweiteren hat $X \leq C_G(K_i/K_{i+1})$ zur Folge, dass G und Y bei der Konjugation auf K_i/K_{i+1} dieselbe Automorphismengruppe induzieren. Insbesondere ist K_i/K_{i+1} ein minimaler Normalteiler sowohl von G/K_{i+1} als auch von YK_{i+1}/K_{i+1} und wird als solcher von $Y^{\mathfrak{F}}$ gemieden oder gedeckt.



Im ersten Fall gilt die $\mathrm{Inn}(Y)$-Isomorphie

$$Y^{\mathfrak{F}}K_i/Y^{\mathfrak{F}}K_{i+1} \cong K_i/K_{i+1}.$$

Bei $Y^{\mathfrak{F}}K_i/Y^{\mathfrak{F}}K_{i+1}$ handelt es sich dann um einen Hauptfaktor von YK_{i+1} oberhalb von $(YK_{i+1})^{\mathfrak{F}}$. Folglich sind $Y^{\mathfrak{F}}K_i/Y^{\mathfrak{F}}K_{i+1}$ und der dazu $\mathrm{Inn}(Y)$-isomorphe Hauptfaktor K_i/K_{i+1} $\mathfrak{F}$-zentral in YK_{i+1}. Wegen $\mathrm{Aut}_G(K_i/K_{i+1}) =$

$\mathrm{Aut}_Y(K_i/K_{i+1})$ bedeutet dies die $\mathfrak{F}$-Zentralität von K_i/K_{i+1} als Hauptfaktor von G, der Tatsache widersprechend, dass K_i/K_{i+1} wie oben gezeigt $\mathfrak{F}$-exzentrisch in G ist. Also wird K_i/K_{i+1} von $Y^{\mathfrak{F}}$ nicht gemieden, sondern gedeckt. Insbesondere gilt somit die zu beweisende Inklusion

$$K_i \leq A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}} K_{i+1}.$$

Mit $K_i \leq A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}} K_{i+1}$ ist nun für alle i auch die Gleichheit

$$A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}} K_i = A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}} K_{i+1}$$

gezeigt. Unter Berücksichtigung der Darstellung $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}}(T \cap G^{\mathfrak{F}})$ von $G^{\mathfrak{F}}$ aus (1) erhält man damit sukzessive

$$\begin{aligned} G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}}(T \cap G^{\mathfrak{F}}) &= A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}} K_1 \\ &= A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}} K_2 = \ldots = A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}} K_r = A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}}. \end{aligned}$$

Das stellt den endgültigen Widerspruch zur Wahl von G dar.

Ein Gegenbeispiel kann daher nicht existieren, und somit ist die Behauptung bewiesen. □

Ein Korollar zu Satz 6.3.1 ist wie schon erwähnt die folgende Vererbungseigenschaft.

Korollar 6.3.2. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation, welche die Klasse $\mathfrak{U}$ aller überauflösbaren Gruppen enthält.*
Im Fall $(A \cap B)_G = 1$ gehört die Gruppe G genau dann zu $\mathfrak{F}$, wenn dies für die Faktoren A und B gilt.

Bemerkungen. Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation mit $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$.
(a) Unter Betrachtung der wechselseitig vertauschbaren Faktorgruppen $A/(A \cap B)_G$ und $B/(A \cap B)_G$ erhält man sofort die zu Satz 6.3.1 äquivalente Gleichheit

$$G^{\mathfrak{F}}(A \cap B)_G = A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}}(A \cap B)_G.$$

(b) Nach Satz 6.2.1 ist im Fall $(A \cap B)_G = 1$ das Produkt $A^{\mathcal{F}}B^{\mathcal{F}}$ auch dann eine Untergruppe von $G^{\mathcal{F}}$, wenn nicht jede überauflösbare Gruppe zur gesättigten Formation $\mathcal{F}$ gehört. Die Gleichheit $G^{\mathcal{F}} = A^{\mathcal{F}}B^{\mathcal{F}}$ aus Satz 6.3.1 ist dann aber im Allgemeinen falsch, und sogar die in Korollar 6.3.2 aufgeführte Vererbungseigenschaft geht verloren. Dies zeigen etwa die gesättigte Formation $\mathcal{N}$ aller nilpotenten Gruppen und die Gruppe G aus Beispiel 2.2.2. Letztere ist wechselseitig vertauschbares Produkt zweier nilpotenter Untergruppen A und B mit $(A \cap B)_G = 1$, aber selbst nicht nilpotent. Genauer ist wie gesehen $G^{\mathcal{N}}$ nicht einmal abelsch. Das verdeutlicht auch, dass die Inklusion $(G^{\mathcal{F}})' \leq A^{\mathcal{F}}B^{\mathcal{F}}$ aus Beweisschritt (2) zu Satz 6.3.1 (für die von der gesättigten Formation $\mathcal{F}$ nur $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}$ genutzt wurde) lediglich in dieser speziellen Situation gilt (und nicht etwa allgemein für wechselseitig vertauschbare Produkte $G = AB$ mit $(A \cap B)_G = 1$ und gesättigte Formationen $\mathcal{F}$ mit $\mathrm{Char}(\mathcal{F}) = \mathbb{P}$ bewiesen werden kann).
(c) Die Aussage von Satz 6.3.1 und selbst die Vererbungseigenschaft aus Korollar 6.3.2 gelten im Allgemeinen auch dann nicht mehr, wenn $(A \cap B)_G$ nicht trivial ist (vgl. dazu die Ergebnisse des folgenden Abschnitts 6.4). Im kommenden Korollar 6.3.3 findet sich aber eine Erweiterung von Satz 6.3.1, die auch im Fall $(A \cap B)_G \neq 1$ anwendbar ist.

M. J. Alejandre, A. Ballester-Bolinches und J. Cossey 2004 sowie J. C. Beidleman und H. Heineken 2005 wiesen die Vererbungseigenschaft aus Korollar 6.3.2 für manche Spezialfälle von gesättigten Formationen $\mathcal{F}$ nach, welche die Klasse $\mathcal{U}$ aller überauflösbaren Gruppen enthalten. So ist Korollar 6.3.2 für den Fall $\mathcal{F} = \mathcal{U}$ gerade der Hauptsatz aus [1] und für die gesättigte Formation $\mathcal{F}$ aller p-überauflösbaren Gruppen ($p \in \mathbb{P}$) das Theorem 6 aus [13]. Desweiteren beinhaltet Korollar 6.3.2 auch das Theorem 5 aus [13]. Hier untersuchen J. C. Beidleman und H. Heineken Typen von gesättigten Formationen der Form $\mathcal{F}(\mathcal{X}_\pi) = \mathcal{E}_{p'}\mathcal{S}_p\mathcal{X}_\pi$. Dabei ist p eine Primzahl, π eine bestimmte Primzahlmenge (deren Definition von p abhängt) und $\mathcal{X}_\pi$ eine Formation mit $\mathcal{A}(p-1) \subseteq \mathcal{X}_\pi \subseteq \mathcal{E}_\pi$ (wo $\mathcal{A}(p-1)$ die Klasse aller abelschen Gruppen bezeichnet, deren Exponent $p-1$ teilt). Mit $\mathcal{F}(\mathcal{A}(p-1))$ gewinnt man so gerade die Klasse aller p-überauflösbaren Gruppen. Für diese Typen von gesättigten Formationen beweisen die Autoren in [13, Theorem 5], dass ein wechselseitig vertauschbares Produkt $G = AB$ mit $(A \cap B)_G = 1$

zu $\mathcal{F}(\mathfrak{X}_\pi)$ gehört, wenn A und B in $\mathcal{F}(\mathfrak{X}_\pi)$ enthalten sind. Diese Aussage (und die Rückrichtung) ergibt sich nun auch aus Korollar 6.3.2.

Tatsächlich lässt sich sogar noch eine Verallgemeinerung von Satz 6.3.1 aufzeigen, welche eine Aussage über beliebige wechselseitig vertauschbare Produkte $G = AB$ mit einem auflösbaren Schnitt der Faktoren A und B enthält. Diese Erweiterung ist Inhalt des folgenden Korollars. Letzteres beleuchtet die Situation, dass $(A \cap B)_G$ in der Klasse $\mathcal{N}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) aller auflösbaren Gruppen von nilpotenter Länge höchstens k enthalten ist, und liefert für den Fall $k = 0$ gerade die Aussage von Satz 6.3.1.

Korollar 6.3.3. *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathcal{F}$ eine gesättigte Formation, welche die Klasse $\mathcal{U}$ aller überauflösbaren Gruppen enthält.*
Gilt $(A \cap B)_G \in \mathcal{N}^k$ ($k \in \mathbb{N}$), dann ist $G^{\mathcal{N}^k\mathcal{F}} = A^{\mathcal{N}^k\mathcal{F}} B^{\mathcal{N}^k\mathcal{F}}$.

Beweis. Nach Satz 6.3.1 ist zunächst

$$G^{\mathcal{F}}(A \cap B)_G = A^{\mathcal{F}} B^{\mathcal{F}} (A \cap B)_G.$$

Dabei sind $A^{\mathcal{F}}$ und $B^{\mathcal{F}}$ Subnormalteiler von G, wie aus $A^{\mathcal{F}} \trianglelefteq A' \trianglelefteq\trianglelefteq G$ und $B^{\mathcal{F}} \trianglelefteq B' \trianglelefteq\trianglelefteq G$ (man beachte $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ und Satz 2.3.3) folgt. Eine mehrfache Anwendung von Lemma 1.1.9 mit der Fittingformation $\mathcal{N}^k$ führt nun auf die behauptete Gleichheit

$$\begin{aligned} G^{\mathcal{N}^k\mathcal{F}} &= (G^{\mathcal{F}})^{\mathcal{N}^k} ((A \cap B)_G)^{\mathcal{N}^k} = (G^{\mathcal{F}}(A \cap B)_G)^{\mathcal{N}^k} = (A^{\mathcal{F}} B^{\mathcal{F}} (A \cap B)_G)^{\mathcal{N}^k} \\ &= (A^{\mathcal{F}} B^{\mathcal{F}})^{\mathcal{N}^k} ((A \cap B)_G)^{\mathcal{N}^k} = (A^{\mathcal{F}})^{\mathcal{N}^k} (B^{\mathcal{F}})^{\mathcal{N}^k} = A^{\mathcal{N}^k\mathcal{F}} B^{\mathcal{N}^k\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

□

Bemerkungen. (a) In der Situation von Korollar 6.3.3 gehört insbesondere also die Gruppe $G = AB$ genau dann zu $\mathcal{N}^k\mathcal{F}$, wenn dies für die Faktoren A und B gilt. Für alle $k \in \mathbb{N}$ existieren aber Beispiele (vgl. das kommende Gegenbeispiel 6.4.2), wonach diese Aussage im Allgemeinen falsch ist, wenn $(A \cap B)_G$ statt in $\mathcal{N}^k$ lediglich in $\mathcal{N}^{k+1}$ enthalten ist.
(b) Allgemeiner lässt sich die Aussage von Korollar 6.3.3 (auf identische Weise) natürlich auch für eine beliebige Fittingformation anstelle von $\mathcal{N}^k$ beweisen.

Als weitere Anwendung der Resultate aus Kapitel 6 lassen sich außerdem einige der bekannten Beweise von früheren Ergebnissen zu wechselseitig vertauschbaren Produkten wesentlich vereinfachen. Im Folgenden wird beispielhaft vorgestellt, wie mit Hilfe von Korollar 6.1.2 und Korollar 6.3.2 die Arbeit [9] deutlich verkürzt werden kann. In dieser Arbeit beweisen A. Ballester-Bolinches und M. C. Pedraza-Aguilera die nachstehende Aussage.

Satz ([9, Theorem A])**.** *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation, welche die Klasse $\mathfrak{U}$ aller überauflösbaren Gruppen enthält.*
Ist G' nilpotent, dann ist $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$.

Den Beweis dieses Satzes führen die Autoren in fünf Schritten aus. In den ersten drei Schritten werden die gleich folgenden Lemmata 1, 2 und 3 gezeigt. Einen ebenso großen Teil der Arbeit bilden dann die letzten beiden Schritte: Die Vorstellung eines vierten Lemmas und schließlich der eigentliche Beweis des obigen Satzes.

Diese letzten beiden Schritte können durch die Anwendung von Korollar 6.1.2 komplett entfallen: In Lemma 3 wird gezeigt, dass unter den gegebenen Voraussetzungen $G^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}} \rangle$ gilt, und nach Korollar 6.1.2 ist $\langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}} \rangle = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$. Auch der Umfang der Schritte eins bis drei lässt sich erheblich reduzieren.

Lemma 1 ([9, Lemma 1])**.** *Sei $G = AB$ ein (beliebiges) Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation.*
Ist G' nilpotent und G in $\mathfrak{F}$ enthalten, dann gehören auch A und B zu $\mathfrak{F}$.

Beweis. Eine metanilpotente gesättigte Formation ist S-abgeschlossen (vgl. [19, IV Theorem (3.18)]), also nichts weiter zu zeigen (nach Voraussetzung ist $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$, so dass sich anstelle von $\mathfrak{F}$ auch $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}\mathcal{A}$ betrachten lässt). $\square$

Unter Anwendung von Korollar 6.3.2 wird auch der Beweis von Lemma 2 sehr einfach.

Lemma 2 ([9, Lemma 2]). *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathcal{F}$ eine gesättigte Formation, welche die Klasse $\mathcal{U}$ aller überauflösbaren Gruppen enthält.*
Ist G' nilpotent und gehören A und B zu $\mathcal{F}$, dann ist auch G in $\mathcal{F}$ enthalten.

Beweis. Angenommen die Behauptung sei falsch. Sei dann $G = AB$ ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung. Da sich die Voraussetzungen des Lemmas auf Faktorgruppen von G übertragen und $\mathcal{F}$ gesättigt ist, stellt G natürlich eine auflösbare primitive Gruppe dar. Somit ist

$$\mathrm{Fit}(G) = O_p(G) \ (p \in \mathbb{P})$$

der einzige minimale Normalteiler von G. Wäre dabei $(A \cap B)_G = 1$, dann würde sich Korollar 6.3.2 anwenden lassen und $G \in \mathcal{F}$ liefern, ein Widerspruch. Folglich gilt

$$G' \leq \mathrm{Fit}(G) \leq A \cap B,$$

und A und B sind normal in G. Bezeichnet F die kanonische lokale Definition von $\mathcal{F} = LF(F)$, so erhält man mit [19, IV Theorem (3.2)] und nach Voraussetzung

$$A, B \in \mathcal{F} = LF(F) \subseteq \mathcal{E}_{p'}\mathcal{S}_pF(p) = \mathcal{E}_{p'}F(p).$$

Also sind $A^{F(p)}$ und $B^{F(p)}$ normale p'-Untergruppen von G und somit trivial. Demzufolge ist G/G' als zentrales Produkt der $F(p)$-Gruppen A/G' und B/G' selbst in $F(p)$ enthalten, was den endgültigen Widerspruch

$$G \in \mathcal{S}_pF(p) = F(p) \subseteq \mathcal{F}$$

bedeutet.

Ein Gegenbeispiel kann also nicht existieren, und damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Um schließlich den obigen Satz zu erhalten, muss nur noch Lemma 3 bewiesen werden.

Lemma 3 ([9, Lemma 3]). *Sei $G = AB$ wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B und $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation, welche die Klasse $\mathfrak{U}$ aller überauflösbaren Gruppen enthält.*
Ist G' nilpotent, dann ist $G^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}} \rangle$.

Der Beweis dieses Lemmas in [9] verwendet elementare Methoden, es gehen natürlich die Lemmata 1 und 2 dabei ein. Wie schon erwähnt ist damit unter Anwendung von Korollar 6.1.2 das Ergebnis der Arbeit [9] bereits vollständig bewiesen.

6.4 Gegenbeispiele: Klassenzugehörigkeiten

Als M. J. Alejandre, A. Ballester-Bolinches und J. Cossey [1] die Vererbungseigenschaft aus Korollar 6.3.2 für den Fall $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ bewiesen hatten, erhielten sie als Konsequenzen die folgenden beiden Aussagen über ein Produkt $G = AB$ der wechselseitig vertauschbaren Untergruppen A und B (dabei wurde Konsequenz 1 ursprünglich von M. Asaad und A. Shaalan [3] gezeigt).

Konsequenz 1 ([1, Corollary 1]). *Gehört A zu $\mathfrak{U}$ und B zu $\mathfrak{N}$, dann ist G in $\mathfrak{U}$ enthalten.*

Konsequenz 2 ([1, Theorem 2]). *Sind A und B in $\mathfrak{U}$ enthalten, dann gehört G zu $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$.*

Weil die in [1] für den Fall $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ gezeigte Vererbungseigenschaft nach Korollar 6.3.2 nun für alle gesättigten Formationen $\mathfrak{F}$ gilt, welche die Klasse $\mathfrak{U}$ enthalten, ist es eine naheliegende Frage, ob sich entsprechend auch Konsequenz 1 und Konsequenz 2 auf den Fall einer (beliebigen) gesättigten Formation $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{U}$ verallgemeinern lassen. Für beide Konsequenzen ist diese Frage aber zu verneinen, wie die folgenden Gegenbeispiele belegen.

Gegenbeispiel 6.4.1. *Für die gesättigte Formation $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^2 \supseteq \mathfrak{U}$ existiert ein wechselseitig vertauschbares Produkt $G = AB$ der Untergruppen A und B derart, dass A zu $\mathfrak{F}$ und B zu $\mathfrak{N}$ gehört, aber G nicht in $\mathfrak{F}$ enthalten ist.*

Beweis. Sei $G = S_4$ die symmetrische Gruppe vom Grad 4, $A = A_4$ die zugehörige alternierende Gruppe und B eine zur Diedergruppe der Ordnung 8 isomorphe 2-Sylowuntergruppe von G. Dann ist natürlich $G = AB$, und die Untergruppen A und B sind wechselseitig vertauschbar.

A gehört zu $\mathfrak{F}$ und B zu $\mathfrak{N}$, aber G hat nilpotente Länge 3 und ist nicht in $\mathfrak{F}$ enthalten. $\square$

Bemerkung. Ist in der diskutierten Situation ($G = AB$ ein wechselseitig vertauschbares Produkt der Untergruppen A und B, B nilpotent) aber A in $\mathfrak{N}^k$ enthalten mit $k \in \mathbb{N}$ und $k \geq 3$, dann gehört auch G zu $\mathfrak{N}^k$. Genauer gilt sogar $G^{\mathfrak{NF}} = A^{\mathfrak{NF}}$ für jede gesättigte Formation $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{U}$ (vgl. Korollar 6.3.3). In diesem Sinne erhält man also auch eine positive Antwort auf die obige Frage, wie sich Konsequenz 1 auf den Fall einer beliebigen gesättigten Formation $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{U}$ übertragen lässt.

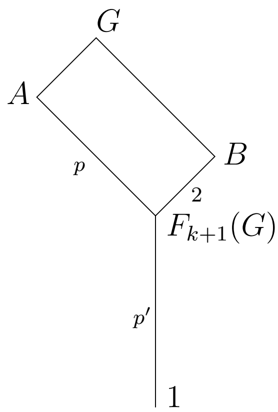
Gegenbeispiel 6.4.2. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein wechselseitig vertauschbares Produkt $G = AB$ der Untergruppen A und B und eine gesättigte Formation $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{U}$ derart, dass A und B in $\mathfrak{F}$ enthalten sind, aber G nicht zu $\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}$ gehört.*

Beweis. Sei p eine ungerade Primzahl und

$$D_{2p} = \langle x, y \mid x^p = y^2 = 1, x^y = x^{-1} \rangle$$

die Diedergruppe der Ordnung $2p$. Für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ sei weiter G eine Gruppe, in der D_{2p} als Komplement zu $F_{k+1}(G)$ auftritt und p kein Teiler von $|F_{k+1}(G)|$ ist. Dabei bezeichne $F_{k+1}(G)$ den größten Normalteiler von G mit nilpotenter Länge $k+1$ (vgl. [19, VII Definitions (6.9)]). Solch eine Gruppe lässt sich nach [19, B Theorem (10.9)] konstruieren, indem man (mit D_{2p} beginnend) $k+1$ zerfallende Erweiterungen mit treuen und irreduziblen Moduln über geeigneten Körpern mit q_i Elementen bildet (q_i von p verschiedene Primzahlen für alle $i \in \{1, \ldots, k+1\}$).

Setze nun



$$A = \langle x \rangle F_{k+1}(G)$$
$$\text{und} \quad B = \langle y \rangle F_{k+1}(G).$$

Dann ist natürlich $G = AB$, und die Untergruppen A und B sind wechselseitig vertauschbar.

Schließlich sei

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_p$$

die Klasse aller auflösbaren Gruppen H, bei denen $H/\operatorname{Fit}(H)$ p-nilpotent ist. Es lässt sich leicht sehen, dass $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation ist, welche alle überauflösbaren Gruppen enthält.

Die Untergruppen A und B sind in $\mathcal{S}_{p'}\mathcal{S}_p \subseteq \mathcal{F}$ enthalten. Ihr wechselseitig vertauschbares Produkt G gehört aber nicht zu $\mathcal{N}^k\mathcal{F}$; sonst wäre $G/F_{k+1}(G) \cong D_{2p} \in \mathcal{S}_{p'}\mathcal{S}_p$, also der p-Hauptfaktor $\langle x \rangle$ von D_{2p} zentral, was aber natürlich nur für $p = 2$ der Fall ist. □

Bemerkung. Bei der in Gegenbeispiel 6.4.2 für ein bestimmtes $k \in \mathbb{N}$ konstruierten Gruppe $G = AB$ gilt offensichtlich $(A \cap B)_G = A \cap B \in \mathcal{N}^{k+1}$, so dass wie bereits erwähnt die Forderung $(A \cap B)_G \in \mathcal{N}^k$ in Korollar 6.3.3 diesbezüglich nicht abgeschwächt werden kann.

Wie gesehen impliziert also die Zugehörigkeit von A und B zu $\mathcal{F}$ im Allgemeinen nicht, dass G in $\mathcal{N}\mathcal{F}$ enthalten ist ($G = AB$ ein wechselseitig vertauschbares Produkt, $\mathcal{F}$ eine gesättigte Formation oberhalb der Klasse $\mathcal{U}$). Naheliegend ist nun die Frage, ob in diesem Fall aber G zur Formation $\mathcal{F} \circ \mathcal{N}$ (oder $\mathcal{F} \circ \mathcal{A}$) gehört. Diese Frage erscheint auch deshalb interessant, weil sie wie in Kapitel 5 dargestellt für eine Fittingformation $\mathcal{F}$ positiv zu beantworten ist (in dieser Situation ist nach Satz 5.3.1 sogar $G^{\mathcal{F}\circ\mathcal{N}} \leq G^{\mathcal{F}\circ\mathcal{A}} \leq A^{\mathcal{F}}B^{\mathcal{F}}$). Das abschließende Gegenbeispiel zeigt allerdings, dass die Antwort im Zusammenhang mit gesättigten Formationen im Allgemeinen negativ ausfällt.

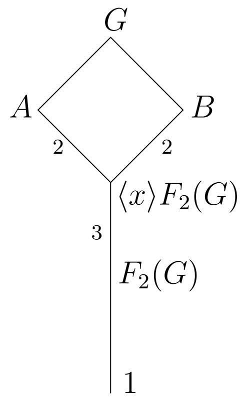
Gegenbeispiel 6.4.3. *Es existiert ein wechselseitig vertauschbares Produkt $G = AB$ der Untergruppen A und B und eine gesättigte Formation $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{U}$ derart, dass A und B zu $\mathcal{F}$ gehören, aber G weder in $\mathcal{F} \circ \mathcal{N}$ noch in $\mathcal{F} \circ \mathcal{A}$ enthalten ist.*

Beweis. Sei

$$\tilde{G} = S_3 \times \langle z \rangle$$

die Gruppe aus Bemerkung (a) zu Satz 3.1.1 ($\langle z \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 2, $S_3 = \langle x, y \mid x^3 = y^2 = 1, x^y = x^{-1} \rangle$ die symmetrische Gruppe vom Grad 3) mit den beiden zueinander isomorphen Normalteilern $\tilde{A} = S_3$ und $\tilde{B} = \langle x \rangle \langle yz \rangle$. Weiter sei G eine Gruppe, in der $\tilde{G}$ als Komplement zu $F_2(G)$ auftritt. Dabei bezeichne $F_2(G)$ wieder den größten Normalteiler von G mit nilpotenter Länge 2. (Zur Konstruktion einer solchen Gruppe vgl. Gegenbeispiel 6.4.2.)

Setze nun



$$\begin{aligned} A &= \tilde{A}F_2(G) \\ \text{und} \quad B &= \tilde{B}F_2(G). \end{aligned}$$

Dann ist natürlich $G = AB$, und A und B sind Normalteiler von G (also insbesondere wechselseitig vertauschbar).

Schließlich sei

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^2\tilde{\mathfrak{F}},$$

mit der bereits in Gegenbeispiel 5.1.3 betrachteten Formation

$$\tilde{\mathfrak{F}} = (H \mid \text{alle 3-Hauptfaktoren von } H \text{ sind nicht zentral}).$$

Das Klassenprodukt $\mathfrak{F}$ ist eine gesättigte Formation und enthält alle überauflösbaren Gruppen.

Aus der Zugehörigkeit von $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ zu $\tilde{\mathfrak{F}}$ folgt sofort, dass die Normalteiler A und B in $\mathfrak{F}$ enthalten sind. Ihr Produkt G ist aber weder eine $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{N}$- noch eine $\mathfrak{F} \circ \mathcal{A}$-Gruppe; sonst würde $G/F_2(G) \cong \tilde{G}$ zu $\tilde{\mathfrak{F}} \circ \mathfrak{N}$ oder $\tilde{\mathfrak{F}} \circ \mathcal{A}$ gehören, doch $\tilde{G}^{\mathfrak{N}} = \tilde{G}'$ ist als nichttriviale 3-Gruppe natürlich kein Element von $\tilde{\mathfrak{F}}$. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] M. J. Alejandre, A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, *Permutable products of supersoluble groups*, J. Algebra 276 (2004), 453-461.

[2] B. Amberg, S. Franciosi, F. de Giovanni, *Products of Groups*, Clarendon, Oxford, 1992.

[3] M. Asaad, A. Shaalan, *On the supersolvability of finite groups*, Arch. Math. 53 (1989), 318-326.

[4] A. Ballester-Bolinches, J. C. Beidleman, J. Cossey, H. Heineken, M. C. Pedraza-Aguilera, *Mutually permutable products of two nilpotent groups*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 115 (2006), 273-279.

[5] A. Ballester-Bolinches, J. C. Beidleman, H. Heineken, M. C. Pedraza-Aguilera, *On pairwise mutually permutable products*, Forum Math., in press.

[6] A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, R. Esteban-Romero, *On totally permutable products of finite groups*, J. Algebra 293 (2005), 269-278.

[7] A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, M. C. Pedraza-Aguilera, *On mutually permutable products of finite groups*, J. Algebra 294 (2005), 127-135.

[8] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, *Classes of Finite Groups*, Springer, 2006.

[9] A. Ballester-Bolinches, M. C. Pedraza-Aguilera, *Mutually permutable products of finite groups II*, J. Algebra 218 (1999), 563-572.

[10] A. Ballester-Bolinches, M. C. Pedraza-Aguilera, M. D. Pérez-Ramos, *Finite groups which are products of pairwise totally permutable subgroups*, Proc. Edinb. Math. Soc. 41 (1998), 567-572.

[11] A. Ballester-Bolinches, M. C. Pedraza-Aguilera, M. D. Pérez-Ramos, *Totally and mutually permutable products of finite groups*, in: Proc. of Groups St. Andrews 1997 in Bath, Vol. 1, in: London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 260, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, pp. 65-68.

[12] J. C. Beidleman, H. Heineken, *Group classes and mutually permutable products*, J. Algebra 297 (2006), 409-416.

[13] J. C. Beidleman, H. Heineken, *Mutually permutable subgroups and group classes*, Arch. Math. 85 (2005), 18-30.

[14] J. C. Beidleman, H. Heineken, *Totally permutable torsion subgroups*, J. Group Theory 2 (1999), 377-392.

[15] J. Bochtler, P. Hauck, *Mutually permutable subgroups and Fitting classes*, Arch. Math. 88 (2007), 385-388.

[16] J. Bochtler, *Radicals in mutually permutable products of finite groups*, J. Algebra 321 (2009), 353-360.

[17] A. Carocca, *p-supersolvability of factorized finite groups*, Hokkaido Math. J. 21 (1992), 395-403.

[18] C. Cooper, *Power automorphisms of a group*, Math. Z. 107 (1968), 335-356.

[19] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, Walter De Gruyter, Berlin-New York, 1992.

[20] P. Hauck, A. Martínez-Pastor, M. D. Pérez-Ramos, *Fitting classes and products of totally permutable groups*, J. Algebra 252 (2002), 114-126.

[21] P. Hauck, A. Martínez-Pastor, M. D. Pérez-Ramos, *Injectors and Radicals in Products of Totally Permutable Groups*, Comm. Algebra 31 (2003), 6135-6147.

[22] O. H. Kegel, *Produkte nilpotenter Gruppen*, Arch. Math. 12 (1961), 90-93.

[23] J. C. Lennox, S. E. Stonehewer, *Subnormal Subgroups of Groups*, Clarendon, Oxford, 1987.

[24] R. Maier, *A completeness property of certain formations*, Bull. London Math. Soc. 24 (1992), 540-544.

[25] R. Maier, P. Schmid, *The embedding of quasinormal subgroups in finite groups*, Math. Z. 131 (1973), 269-272.

[26] L. Rédei, *Das schiefe Produkt in der Gruppentheorie*, Comment. Math. Helvet. 20 (1947), 225-267.

[27] E. Shult, *A note on splitting in solvable groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 318-320.

Lebenslauf

Jonas Bochtler
Eberhardstr. 49
72072 Tübingen

30.04.1980	geboren in Tübingen
1986-1990	Besuch der Gottlieb-Rühle-Grundschule Mössingen
1990-1999	Besuch des Quenstedt-Gymnasiums Mössingen Abschluss: Abitur
1999-2000	Zivildienst
2000-2006	Studium an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen Studienfächer: Mathematik und Physik Abschluss: 1. Staatsexamen Zulassungsarbeit: „Produkte endlicher Gruppen und Fittingklassen“ Betreuer: Prof. Dr. P. Hauck
2000	Aufnahme in die Studienstiftung des deutschen Volkes
2002-2007 2008-2009	mehrfach wissenschaftl. Hilfskraft am Math., Physik. und Wilhelm-Schickard-Institut für Informatik
Nov. 2006	Promotion an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen Dissertationsfach: Mathematik Arbeitstitel: „Wechselseitig vertauschbare Produkte endlicher Gruppen“ Betreuer: Prof. Dr. P. Hauck
2007	Eheschließung mit Frau Stephanie Wiedmann
2008	Aufnahme in die Promotionsförderung der Studienstiftung des deutschen Volkes

Meine akademischen Lehrer in Mathematik waren:

Prof. Dr. V. Batyrev, Prof. Dr. P. Hauck, Prof. Dr. W. Knapp, Dr. P. Leinen, Prof. Dr. C. Lubich, Prof. Dr. M. Möhle, Prof. Dr. R. Nagel, Dr. U. Riese, Prof. Dr. H. Salzmann, Prof. Dr. P. Schmid.