

# Akustik granularer Materie

## **Dissertation**

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Eberhard Karls Universität Tübingen  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von  
Michael Mayer  
aus Tübingen

Tübingen  
2011

Tag der mündlichen Qualifikation:

11.01.2012

Dekan:

Prof. Dr. Wolfgang Rosenstiel

1. Berichterstatter

Prof. Dr. Mario Liu

2. Berichterstatter

Prof. Dr. Nils Schopohl

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einführung</b>  | <b>5</b>  |
| 1.1      | Granulare Materie . . . . .                                  | 5         |
| 1.2      | Granulare Akustik . . . . .                                  | 7         |
| 1.3      | Theoretische Modelle . . . . .                               | 8         |
| 1.4      | Ziele und Aufbau der Arbeit . . . . .                        | 9         |
| <b>2</b> | <b>Hydrodynamische Theorie</b>                               | <b>11</b> |
| 2.1      | Kontinuumshypothese und lokales Gleichgewicht . . . . .      | 11        |
| 2.2      | Hydrodynamische Variablen und Fundamentalrelation . . . . .  | 12        |
| 2.3      | Gleichgewichtsbedingungen . . . . .                          | 13        |
| 2.4      | Bilanzgleichungen und Standardprozedur . . . . .             | 14        |
| 2.5      | Entropieproduktion und Onsager-Relationen . . . . .          | 16        |
| 2.6      | Isotrope Medien und Relaxation der Verzerrungen . . . . .    | 17        |
| 2.7      | Kontinuumsmechanik . . . . .                                 | 19        |
| 2.8      | Zusammenfassung . . . . .                                    | 20        |
| <b>3</b> | <b>Granulare Hydrodynamik</b>                                | <b>23</b> |
| 3.1      | Polymerphysik und granulare Temperatur . . . . .             | 23        |
| 3.2      | Granulare Energiedichte und Transportkoeffizienten . . . . . | 26        |
| <b>4</b> | <b>Granulare Akustik</b>                                     | <b>29</b> |
| 4.1      | Die Zeitentwicklung der granularen Temperatur . . . . .      | 29        |
| 4.2      | Verallgemeinerte Wellengleichung . . . . .                   | 31        |
| 4.2.1    | Numerische Lösungen eines eindimensionalen Falles . . . . .  | 34        |
| 4.3      | Die granulare elastische Energie . . . . .                   | 41        |
| 4.4      | Granular gedämpfte Verzerrungswellen . . . . .               | 43        |
| 4.4.1    | Starke frequenz- und amplitudenabhängige Dämpfung . . . . .  | 43        |
| 4.4.2    | Amplitudenunabhängige Dämpfung . . . . .                     | 50        |
| 4.4.3    | Der Softening-Effekt . . . . .                               | 52        |
| 4.5      | Induzierte Anisotropie . . . . .                             | 53        |
| 4.5.1    | Elastische granulare Schallmoden . . . . .                   | 54        |
| 4.5.2    | Schallmoden bei statischer Scherung . . . . .                | 58        |
| 4.5.2.1  | Statische Lösung . . . . .                                   | 58        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.5.2.2  | Hauptachsen . . . . .   | 59        |
| 4.5.2.3  | Elastische Moden . . . . .  | 60        |
| 4.5.3    | Scherwellenentartung und dritte Invariante . . . . .                  | 61        |
| 4.5.4    | Erreichen der Fließgrenze . . . . .                                   | 63        |
| <b>5</b> | <b>Spannungsrelaxation im Silo</b>                                    | <b>65</b> |
| 5.1      | Theoretische Beschreibung . . . . .                                   | 66        |
| 5.2      | Finite Elemente und verallgemeinerte Janssen-Lösung . . . . .         | 68        |
| 5.3      | Quasi-hydrostatische Lösung und Janssenkonstante . . . . .            | 70        |
| <b>6</b> | <b>Zusammenfassung</b>  | <b>73</b> |
| <b>A</b> | <b>Hydrodynamische Methode</b>  | <b>77</b> |
| A.1      | Gleichgewichtsbedingungen . . . . .                                   | 77        |
| A.1.1    | Isotrope Festkörper . . . . .   | 78        |
| A.1.2    | Relaxierende Medien . . . . .   | 78        |
| A.1.3    | Granulare Materie . . . . .   | 78        |
| A.2      | Materielle Ableitung . . . . .  | 79        |
| A.3      | Standardprozedur für Festkörper . . . . .                             | 79        |
| <b>B</b> | <b>GSH-Standardprozedur</b>   | <b>81</b> |
| <b>C</b> | <b>Analytische Lösungen der <math>T_g</math>-Gleichung</b>            | <b>87</b> |
| C.1      | Stationäre Lösung . . . . .   | 87        |
| C.2      | Allgemeine Lösung der $T_g$ - Gleichung . . . . .                     | 87        |
| <b>D</b> | <b>Elastisches Limit, <math>\gamma</math> und <math>\eta_g</math></b> | <b>91</b> |
|          | <b>Literaturverzeichnis</b>   | <b>95</b> |

# Kapitel 1

## Einführung

Inhalt dieser Arbeit ist die makroskopische Beschreibung von Akustik und Fließverhalten granularer Materie. Zunächst soll einleitend ein Überblick gegeben werden, der die vielfältigen Phänomene granularer Materie darstellt und die Motivation begründet, diese in einer theoretischen Arbeit zu erforschen. Die Besonderheit des Materialverhaltens granularer Materie beruht auf der Fähigkeit den Aggregatzustand ohne merkliche Temperaturänderung zwischen fest und flüssig zu wechseln. Die theoretische Beschreibung erfolgt in dieser Arbeit durch die hydrodynamische, also eine makroskopische Theorie, die ein Fluid als kontinuierliches Medium beschreibt. Obwohl die Fluidteilchen granularer Materie selbst schon makroskopische Körper sind, kann die hydrodynamische Theorie, erfolgreich angewendet werden, sofern die betrachteten Längenskalen viel größer sind als der Korndurchmesser. Die Akustik ist dabei von zentraler Bedeutung, da sie Einsicht in viele wichtige Materialparameter gibt.

### 1.1 Granulare Materie

Granulare Materie besteht aus kleinen Partikeln, die zusammen einen makroskopischen Körper formen. Beispiele sind etwa Sand, Pulverschnee, Geröll oder Glaskugeln. Die Partikel sollen dabei größer als ein Mikrometer sein, da sonst Van-der-Waals Wechselwirkung und Brownsche Bewegung eine Rolle spielen [1]. Medien mit kleinerer Partikelgröße verlieren den typischen kohäsionslosen granularen Charakter.

Granulare Materie lässt sich keinem der drei üblichen Aggregatzustände zuordnen [2, 3]. Sie ist weder gasförmig, fest noch flüssig. Sie zeigt gleichwohl die Eigenschaften einer Flüssigkeit, obwohl die Bestandteile, etwa Mineralkörner aus Quarz bei Sand, klassische Festkörper sind. Man denke etwa an das Rieseln von Sand in einer Sanduhr oder den Abgang einer Lawine.

Ein weiteres Charakteristikum einer Flüssigkeit ist das Bilden einer horizontalen Oberfläche im Schwerfeld. Auch granulare Materie zeigt prinzipiell dieses Merkmal, doch bleibt ihre Oberfläche bei Verkippen bis zu einem bestimmten Winkel

stabil. Das Einsetzen der folgenden Bewegung wird als Überschreiten der Fließgrenze bezeichnet. Wird aber dem Sand etwas Wasser beigemischt, so ändert sich seine Verhaltensweise. Er wird zunächst fester, was einem das Bauen von Sandburgen erlaubt, bevor er bei steigendem Wassergehalt wieder Eigenschaften einer Flüssigkeit annimmt.

Unter statischen Bedingungen ist Sand fest, fast ideal elastisch und so kann man am Strand auf Sand bequem gehen. Zur Aufrechterhaltung des flüssigen Charakters hingegen ist ständige Energiezufuhr etwa durch Schütteln nötig. Granulare Materie ist stark dissipativ, d.h. makroskopische Bewegung geht schnell in innere Energie über und Entropie wird erzeugt.

Ein weiteres Alltagsphänomen ist die Dilatanz. Eine Scherung, eine eigentlich volumenlose Deformation, bedarf unbedingt einer Volumenvergrößerung. Dies zeigt sich etwa beim Gehen auf nassem Sand durch das Entweichen des Wassers unter den Füßen.

Eine Eigenschaft gasförmiger granularer Materie ist die Entmischung, d. h. das Trennen großer und kleiner Bestandteile durch starke äußere Anregung, zu beobachten etwa in einer Müslipackung. Zuletzt sei als eindringlichstes Phänomen das Verstopfen, engl. jamming, erwähnt, das plötzliche Aufhören des Fließens etwa beim Ausschütten von Müsli aus der Verpackung.

Überraschungen erlebt man beim Entleeren von mit Granulat gefüllten Silos, denn es versagt öfterer unerwartet die strukturelle Integrität der Silokonstruktion [4]. Im Baugewerbe werden bei der statischen Auslegung von Maximalspannungen in Böden Fehler gemacht, wie der Einsturz des Kölner Stadtarchivs im März 2009 vermuten lässt [5].

Es sind dies die faszinierenden Besonderheiten eines scheinbar einfachen Materials. Obwohl diese Eigenschaften aber schon seit langem bekannt sind, fehlt bis heute eine allgemein akzeptierte Theorie zur ihrer Beschreibung.

Das Verständnis granularer Materie hat enorme praktische Relevanz, wann immer größere Mengen von Sand und Kiesel verarbeitet, gelagert oder transportiert werden müssen. Wichtiger noch ist ein grundlegendes Verständnis der damit verbundenen Bodenmechanik für die Bauphysik und Geologie. Das Abgehen von Lawinen ist prinzipiell als Überschreiten der Fließgrenze zu verstehen und in einer vor kurzem veröffentlichten experimentellen Arbeit wurde die Entstehung sekundärer Erdbeben auf Eigenschaften granularer Materie zurückgeführt [6]. Die Frage nach der Stabilität von auf Sand errichteten Bauwerken ist sprichwörtlich und historisch und hängt von Fortschritten in der Physik granularer Materie entscheidend ab.

Wie ein Festkörper aus gitterartig angeordneten Atomen besteht, theoretisch aber durch ein kontinuierlich verteiltes Medium beschrieben werden kann, so werden wir zeigen, dass ein kontinuumsmechanischer Zugang ebenfalls den adäquaten Rahmen zur Behandlung granularer Systeme bildet. Im gesamten Anregungsbereich, für feste, flüssige und gasförmige granulare Materie, ist eine hydrodynamische Beschreibung möglich. Die einzelnen Partikel granularer Materie sind makroskopische

Festkörper. Für sie und die granulare Materie, die sie bilden, sind die Gesetze der Thermodynamik und Hydrodynamik anwendbar.

## 1.2 Granulare Akustik

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit Situationen, in denen granulare Materie in Behältern eingeschlossen ist. Sie ist dann überwiegend fest und kann durch akustische Methoden untersucht werden.

Schallwellen stellen ein gängiges Mittel in der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung dar. Auch für granulare Materie ist solch eine Methode wünschenswert, um beispielsweise das Auslösen von Erdbeben oder Lawinen durch Schallwellen zu verstehen oder Einschlüsse im Boden mit Echoloten ausfindig zu machen.

In Abhängigkeit von der Wellenlänge erwarten wir unterschiedliche Mechanismen der Schallausbreitung. Bei im Vergleich zur Korngröße kleinen oder ähnlichen Wellenlängen ist granulare Materie heterogen und Streuung überwiegt. Die unregelmäßige Struktur von Sandkörnern führt zu lokalen Dichteschwankungen als auch zur Ausbildung sogenannter Kraftketten, entlang derer Schall propagiert. Bei im Vergleich zur Korngröße großen Wellenlängen muss aber eine kontinuumsmechanische Beschreibung möglich sein.

Tatsächlich wurde in jüngster Vergangenheit über die prinzipiellen Ausbreitungsmechanismen von Schallwellen in granularer Materie wieder diskutiert, ob diese etwa in einem effektiven Medium stattfinden oder über beobachteten Kraftketten als chaotisch und somit diffusiv zu verstehen sind. Es wurden in Abhängigkeit von der Wellenlänge Beiträge beider Mechanismen experimentell beobachtet [7]. Gestreute Wellen propagieren dabei im Allgemeinen etwas langsamer, da der Pfad, den sie nehmen länger ist.

Neben der Heterogenität granularer Materie wird vermutet, dass auch Rotationsfreiheitsgrade der einzelnen Körner für die Schallausbreitung eine Rolle spielen [8], da sie abhängig vom Reibungskoeffizient und der Feuchtigkeit die Kopplung von Scher- an Transversalmoden und die dabei erzeugte Wärme beeinflussen [9].

Eine Probe granularer Materie kann nie identisch präpariert werden, da die Verteilung der Kontakte sich ändert. Dies führt zum Begriff der Geschichtsabhängigkeit. Aktuelle Eigenschaften, wie etwa die Schallgeschwindigkeit, sind abhängig von vorhergehenden Zuständen, da sich durch die Messung die Struktur des Korngerüsts geändert hat. Jedoch müssen sich solche Änderungen auf makroskopischer Ebene ausgleichen. Wir werden sehen, dass aktuelle Dichte und Spannung für die Ausbreitung elastischer Wellen einen Satz vollständiger Variablen liefern. Die makroskopischen Eigenschaften können durch Dichte und Spannung vollständig beschrieben werden.

Neben Dispersion und linearer viskoser Dämpfung zeigt granulare Materie auch nichtlineares Verhalten verschiedener Art. Neben den sogenannten „clapping contacts“ [10], einem mehrmaligen Öffnen und Schließen eines Kontakts durch Schall,

der zu einer Amplitudenabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit führt, ist die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit vom äußeren Druck [11, 12] die Hauptnichtlinearität granularer Materie. Aber auch die starke nicht-viskose Dämpfung [13] und der sogenannte Softening-Effekt, eine Reduzierung des elastischen Moduls während der Schallanregung, sind Beispiele für nichtlineares Verhalten [6].

Die Messung und das theoretische Verständnis von Schallgeschwindigkeit und Schallabsorption ist ein Werkzeug zur Untersuchung von Struktur und mechanischen Eigenschaften granularer Materie und daher von fundamentalem Interesse.

### 1.3 Theoretische Modelle

Um die makroskopischen Eigenschaften granularer Materie zu verstehen, gibt es verschiedene Ansätze. In der von Ingenieuren sogenannten Bodenmechanik wird versucht, granulares Material durch geeignete konstitutive Gleichungen zu beschreiben, die den Spannungstensor mit den Geschwindigkeitsgradienten verbinden. Durch solche tensorwertige Funktionen ist die Anzahl von Materialparametern relativ hoch. Durch anschließende Anpassung an experimentelle Daten werden diese dann bestimmt. Ein Beispiel eines solchen Modells sind so genannte hypoplastische Bewegungsgleichungen [14]. Statische Probleme hingegen werden so durch die Elastizitätstheorie anhand druckabhängiger „Materialkonstanten“ zu verstehen versucht.

Einen weiteren Zugang bilden Experimente mit Glaskugeln von 0,5 bis 5 mm Größe. Kugeln stellen zwar eine gewisse Idealisierung dar, dennoch handelt es sich um granulare Materie und deren Reaktion auf einen äußeren Spannungszustand kann sowohl mechanisch als auch photoelastisch vermessen werden. Diese Messungen ergeben starke Inhomogenitäten in der Verteilung der Kontaktkräfte einzelner Körner. Es treten so genannte Kraftketten auf, entlang derer Schall bevorzugt propagiert und werden für die heterogenen und nichtlinearen Eigenschaften von Schallwellen verantwortlich gemacht [15].

Diese idealisierte granulare Materie wird dann numerisch in einer Vielteilchenrechnung betrachtet. Dabei werden die Kugeln in eine Kiste mit unnachgiebigen Wänden gefüllt und durch einen Stempel unter Spannung gesetzt. Die Kraftübertragung wird durch das Hertz-Mindlin Gesetz implementiert, wobei auch Reibung zwischen den Kugeln und Dissipation bei Stößen berücksichtigt werden [16].

Im Falle schallartiger Anregungen liefern sowohl Experiment als auch numerische Simulationen folgendes Resultat. Als Reaktion auf eine kurze mechanische Anregung entsteht eine kohärente Wellenfront, gefolgt von chaotischen Oszillationen der vielfach gestreuten Wellen. Die relative Amplitude der beiden Signale hängt dabei stark vom Verhältnis der Kugelgröße zur anregenden Wellenlänge ab. Für große Wellenlängen kann granulares Material tatsächlich durch ein effektives Medium beschrieben werden, bei kleinen Wellenlängen zeigt sich die granulare Struktur.



## 1.4 Ziele und Aufbau der Arbeit

Es bestehen also formulierte Forschungsfragen. Zum einen sind die konkreten experimentellen Daten aus Abschnitt 1.2 theoretisch nachzuvollziehen, zum anderen ist das prinzipielle Verhalten granularer Materie in einen theoretischen Rahmen zu setzen. Das ganze Spektrum verschiedener Phänomene soll durch eine Theorie abgebildet werden. Dies ist das Ziel der durch M. Liu und Y. Jiang in den Arbeiten [17–20] gegebenen hydrodynamischen Theorie.

Hier sollen die akustischen Eigenschaften granularer Materie innerhalb dieser Theorie erklärt werden. Wir bezeichnen sie im Folgenden als GSH für „Granular Solid Hydrodynamics“. Die Bezeichnung soll auf die Beseitigung des scheinbaren Widerspruchs zwischen festem und flüssigem Verhalten granularer Materie verweisen. Die wesentlichen Bestandteile dieser Theorie sind in der festen Phase das Verstehen der Fließgrenze als thermodynamische Instabilität, in der flüssigen Phase das Konzept der granularen Temperatur und die Ähnlichkeit zur Polymerphysik der relaxierenden Verzerrungen.

Die Berechnung statischer Spannungsverteilungen durch diesen Ansatz war erfolgreich [21]. Es kann gezeigt werden, dass die durch Scherung granularer Materials erzeugte Anisotropie sowohl qualitativ als auch quantitativ mit experimentellen Daten übereinstimmt [22]. Die Auswirkungen der induzierten Anisotropie auf die Schallpropagation ist ein wichtiger Teil dieser Arbeit. Die Ergebnisse hierzu sind in Abschnitt 4.5 dargestellt.

Auf Grundlage dieser Ergebnisse ist die Interpretation experimenteller akustischer Eigenschaften möglich. Da wir von einem makroskopischen Standpunkt ausgehen, ist es klar, dass nur durch im Vergleich zur Korngröße großen Wellenlängen verwertbare Ergebnisse erzielt werden können. So tritt etwa eine charakteristische Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit vom umgebenden Druck auf, die durch die herkömmliche lineare Elastizitätstheorie nicht verstanden werden kann [23]. Die Schallgeschwindigkeit skaliert mit dem Umgebungsdruck wie  $P^{\frac{1}{6}}$ . Innerhalb der GSH-Theorie wird dieser Effekt aber wiedergegeben. Ferner werden nichtlineare Effekte, also die Erzeugung von Harmonischen beobachtet [13], die qualitativ durch die hydrodynamische Theorie verstanden werden können.

Daran anschließend diskutieren wir kurz theoretisch, was mit den granularen Schallmoden am Punkt der Fließgrenze passiert. Die Fließgrenze, engl. yield, ist der Verlust an permanenter Stabilität. Granulare Materie kann im Gegensatz zu Flüssigkeiten Scherkräfte aufrechterhalten, aber nur bis zu einem bestimmten Maximalwert. Dort verliert sie ihre elastischen Eigenschaften und plastische Verformung tritt ein. Am Punkt der Fließgrenze bedeutet eine noch so kleine Störung eine enorm anwachsende Reaktion. Da Schallwellen aber elastische Störungen eines Mediums sind, sollte die Schallausbreitung am Punkt der Fließgrenze prinzipiell nicht mehr möglich sein, die Schallgeschwindigkeit verschwinden. Die Berechnungen zeigten jedoch, dass im Rahmen der hier verwendeten Theorie die Ausbreitungsgeschwindigkeit zwar mit

Annäherung an die Fließgrenze sinkt, im Allgemeinen aber endlich bleibt. Diese Ergebnisse sind in Unterabschnitt 4.5.4 dargestellt.

Der zentrale Teil der Arbeit befasst sich mit der Dämpfungscharakteristik, d.h. der Abhängigkeit der Dämpfung von Frequenz und Amplitude einer Schallwelle. Das Konzept der granularen Temperatur führt zu einem völlig neuen nicht-viskosen Dämpfungsmechanismus für Schall. Eine verallgemeinerte Wellengleichung wird in Abschnitt 4.2 aus den makroskopischen granularen Gleichungen abgeleitet und die Ergebnisse in den folgenden Unterabschnitten dargestellt. Als Hauptresultat steht, dass die Dämpfung mit der vierten Potenz der Frequenz und dem Quadrat der Amplitude skaliert.

Für die lineare amplitudenunabhängige Dämpfung bietet die GSH-Theorie einen weiteren, nicht mit der herkömmlichen Viskosität zusammenhängenden Mechanismus. Er hat sein Äquivalent in der Diffusion von Leerstellen oder Zwischengitteratomen der Festkörperphysik. Die Überlegungen hierzu sind in Unterabschnitt 4.4.2 dargestellt.

Ein weiterer interessanter Effekt ist das sogenannte Softening, eine zeitweise Herabsetzung des elastischen Moduls [6]. Dieser Effekt ist in Zusammenhang mit dem Überschreiten der Fließgrenze vermutlich der Auslöseimpuls für Sekundärerdbeben. Eine Interpretation durch die GSH-Theorie bietet Unterabschnitt 4.4.3.

Kapitel 5 erklärt, wie das Phänomen unerwartet platzender Silos durch die GSH-Theorie erstaunlich einfach theoretisch beschrieben werden kann. Die Relaxation der Spannungen spielt dabei die entscheidende Rolle.

Zunächst beginnen wir aber in Kapitel 2 mit den Grundlagen der hydrodynamischen Theorie, wie sie in der theoretischen Physik verstanden wird. Diese Darstellung erlaubt uns die später angegebenen Gleichungen zu verstehen und einzuordnen.

Ein solcher hydrodynamischer Zugang wurde von Y. Jiang und M. Liu vorgeschlagen. Sie behandeln darin granulare Systeme als ein transient elastisches Material durch Angabe eines expliziten Ausdrucks für dessen Energie. Insbesondere wird mit diesem Ansatz das Auftreten der Fließgrenze durch eine thermodynamische Instabilität und damit im weitesten Sinne als Phasenübergang erklärt.

In Kapitel 3 wird der vollständige Satz der GSH-Gleichungen angegeben und kurz erklärt.

Wellenausbreitung in granularer Materie soll hier durch einen hydrodynamischen Zugang ungeachtet mikroskopischer Eigenheiten mit nur wenigen Materialparametern beschrieben werden. Dabei bleibt die Komplexität der zugrunde liegenden Gleichungen überschaubar, sodass die Vorhersagen durch einfache Laborexperimente überprüft werden können.

# Kapitel 2

## Hydrodynamische Theorie

Die Grundlage der hydrodynamischen Theorie bildet die Thermodynamik. Diese beschreibt den Gleichgewichtszustand von Systemen mit vielen inneren Freiheitsgraden, von denen aber nur wenige wie etwa die innere Energie, Dichte oder Magnetisierung ausreichen, den Zustand des Systems zu charakterisieren [24]. Die Dynamik von Systemen, bei denen die Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewichtszustand in einem gewissen, noch zu spezifizierenden Maße klein bleiben, wird in der Physik der kondensierten Materie Hydrodynamik genannt [25, 26]. Ihre Bewegungsgleichungen folgen aus Erhaltungs- und Bilanzgleichungen sowie Symmetrie- und Invarianzprinzipien. Sie ist Teil der klassischen Feldtheorien und wurde mit Erfolg auf gewöhnliche Fluide, Flüssigkristalle [27, 28], Supraflüssigkeiten [25, 29], elastische Festkörper und Polymere [30, 31] angewendet.

Die Kontinuumsmechanik und ihre Teilgebiete dagegen, genannt sei namentlich die Rheologie, verzichten auf die Gleichgewichtsthermodynamik und kleine Abweichungen davon und versuchen durch konstitutive Relationen die Felder der physikalischen Größen miteinander zu verbinden [32–34]. Auf die Struktur solcher Theorien gehen wir im Kontrast zur hydrodynamischen Theorie in Abschnitt 2.7 kurz ein. Zunächst folgen die Grundlagen der hydrodynamischen Theorie, die eine adäquate Erweiterung der Navier-Stokes-Gleichungen darstellt.

### 2.1 Kontinuumshypothese und lokales Gleichgewicht

Im Gegensatz zur Punktmechanik und zur Vielteilchenphysik beschreibt die Hydrodynamik einen Körper nicht über seine mikroskopische Struktur und Einteilchenwechselwirkungen, sondern als kontinuierliches Medium. Die Konstituenten des Mediums bezeichnen wir als Fluidteilchen. Sind diese klein gegenüber den typischen Längenskalen eines Experiments, was wir stets annehmen wollen, so können wir das Fluid als Kontinuum betrachten. Eine solche Längenskala ist etwa die Wellenlänge einer Schallwelle.

Andererseits sollen die Fluidteilchen aber so groß sein, dass wir ihnen makrosko-

pische thermodynamische Eigenschaften wie etwa Druck und Temperatur zuordnen können, die ja nur im Gleichgewicht definiert sind.

Diese beiden Anforderungen an die Größe der Fluidteilchen sind Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der hydrodynamischen Theorie. Um diese Bedingungen zu quantifizieren ordnen wir den Fluidteilchen eine charakteristische Zeit  $\tau$  und eine Länge  $\lambda$  zu. Die Zeit  $\tau$  ist dabei die Zeitdauer zum Erreichen des lokalen Gleichgewichts, die Länge  $\lambda$  die Ausdehnung des Fluidteilchens. Geben wir äußeren Anregungen des Systems die Zeit- und Längenskalen  $\omega^{-1}$ , bzw.  $k^{-1}$ , so können wir die obigen Bedingungen als

$$\omega\tau \ll 1 \quad \text{und} \quad k\lambda \ll 1 \quad (2.1.1)$$

formulieren.

Die Hydrodynamik ist in diesem Sinn die Theorie kleiner Anregungen im langwelligigen Limes [26].

## 2.2 Hydrodynamische Variablen und Fundamentalrelation

Mikroskopisch betrachtet besteht ein Körper aus typischerweise einem Mol Teilchen mit einer entsprechend großen Anzahl von inneren Freiheitsgraden. Es ist experimentelle Tatsache, dass nach einer Störung des Systems die allermeisten dieser Freiheitsgrade sehr schnell ihren Gleichgewichtswert wieder annehmen. Nur wenige kollektive Anregungen, Moden genannt, relaxieren langsam. Für eine makroskopische Beschreibung reicht es, diese langlebigen Moden zu betrachten [28]. Genauer betrachtet stellt man fest, dass diese langlebigen Störungen umso langsamer relaxieren, desto größer ihre Ausdehnung ist, also  $\omega^{-1} \rightarrow \infty$  für  $k^{-1} \rightarrow \infty$ , oder

$$\lim_{k \rightarrow 0} \omega = 0. \quad (2.2.1)$$

Die Existenz solcher Moden kann immer auf Erhaltungsgrößen oder gebrochene kontinuierliche Symmetrien zurückgeführt werden. Letztere sind die sogenannten Goldstone-Moden. Die zu einer Erhaltungsgleichung  $\partial_t E + \nabla \mathbb{S} = 0$  mit Erhaltungsgröße  $E$  und Strom  $\mathbb{S}$  gehörende Lösung in Form der Dispersionsrelation  $\omega = \omega(k)$  erfüllt gerade Gleichung (2.2.1). Wir wollen unter einer hydrodynamischen Variablen ganz allgemein eine solche Größe verstehen, deren Relaxationszeit für langwellige Störungen immer groß ist gegen eine mikroskopische Zeitskala. Diese Definition schließt auch sogenannte langsame Variablen mit ein, für die  $\lim_{k \rightarrow 0} \omega = \text{konst} = \tau_s^{-1}$  gilt. Natürlich muss in diesem Fall  $\tau \ll \tau_s$  gelten, um die mikroskopische Zeitskala von der kollektiven makroskopischen zu trennen. Flüssigkeitsgemische mit chemischer Reaktion in denen sich die Konzentration der Stoffe langsam ändert sind ein einfaches Beispiel einer solchen Variable.

Für den Fall eines gewöhnlichen Fluids sind die drei Erhaltungsgrößen Masse, Impuls und Energie, kurz  $M$ ,  $G_i$  und  $W$ , hydrodynamische Variablen. Für deren

Dichten  $\rho = M/V$ ,  $g_i = G_i/V$  und  $w = W/V$  gilt im lokalen Gleichgewicht eine thermodynamische Fundamentalrelation

$$s = s(\rho, g_i, w). \quad (2.2.2)$$

Auf diese Weise führen wir analog zum Postulat der Entropiefunktion  $S$  für homogene Systeme [24] die Entropiedichte  $s$  ein. Wir wollen aber im Folgenden der Gewohnheit halber die Energie als grundlegende Funktion betrachten, subsumieren alle weiteren auftretenden hydrodynamischen Variablen unter  $x_\alpha$  und erhalten

$$dw = Tds + \mu d\rho + v_i dg_i + F_\alpha dx_\alpha. \quad (2.2.3)$$

Die konjugierten Größen  $T$ ,  $\mu$ ,  $v_i$  und  $F_\alpha$  sind im Allgemeinen Funktionen der Variablen selbst,  $T = \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_{\rho, g_i, x_\alpha} = T(s, \rho, g_i, x_\alpha)$ , usw.

## 2.3 Gleichgewichtsbedingungen

Hydrodynamische Systeme sind zwar nach Annahme lokal, im Allgemeinen aber nicht im globalen Gleichgewicht. Sie streben dieses aber an und, da die Entropie im globalen Gleichgewicht maximal ist, produzieren die dabei auftretenden Ströme selbst Entropie. Aus dieser Extremaleigenschaft können wir die sogenannten Gleichgewichtsbedingungen ableiten.

Im für uns relevanten Falle von Festkörpern ist eine der zusätzlichen hydrodynamischen Variablen  $x_\alpha$  die Deformation, also ein Vektorfeld, das wir mit  $a_\alpha$  bezeichnen. Die Energie ist aber bzgl. homogener Deformationen invariant und so hängt das Entropiefunktional zusätzlich von  $\nabla_i a_\alpha$  ab [26, 28].  $\nabla_i a_\alpha$  wird als Deformationsgradient bezeichnet. Dann gilt

$$dw = Tds + \mu d\rho + v_i dg_i + \psi_{\alpha i} d\nabla_i a_\alpha. \quad (2.3.1)$$

Extremieren wir das Entropiefunktional  $S = \int s dV$  unter den Nebenbedingungen gegebener Energie, Masse, Impuls und Viererdrehimpuls [35, 36], so ergeben die Euler-Lagrange-Gleichungen der Variationsrechnung die Gleichgewichtsbedingungen

$$\nabla_i T = 0, \quad \partial_t v_i + \nabla_i \mu = 0, \quad v_{ij} := \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) = 0, \quad \nabla_i \psi_{\alpha i} = 0, \quad (2.3.2)$$

s. Anhang A.1. Die ersten drei gelten für ein Fluid, die vierte zusätzlich für einen Festkörper. Die Größe  $\psi_{\alpha i}$  ist dabei die konjugierte zum Deformationsgradienten  $\nabla_i a_\alpha$ , den wir im nächsten Abschnitt einführen. Sind diese Ausdrücke ungleich null, so befindet sich das System nicht im Gleichgewicht und dissipative Ströme treten auf. Man nennt die Gradienten  $\nabla_i T$ ,  $v_{ij}$  und  $\nabla_i \psi_{\alpha i}$  daher thermodynamische Kräfte.

## 2.4 Bilanzgleichungen und Standardprozedur

Für jede Erhaltungsgröße  $E$  in einem beliebigen raumfesten Volumen  $\Omega$  gilt eine Kontinuitätsgleichung der Form

$$\int_{\Omega} \partial_t E \, dV = - \oint_{\partial\Omega} \mathbb{S} \, dA \quad \text{oder} \quad \partial_t E + \operatorname{div} \mathbb{S} = 0. \quad (2.4.1)$$

$\mathbb{S}$  ist der zur Größe  $E$  gehörende Strom. Sie besagt, dass die zeitliche Änderung der Größe  $E$  in einem Volumen  $\Omega$  durch einen Fluss durch die Oberfläche  $\partial\Omega$  gegeben sein muss.

Für ein gewöhnliches Fluid schreiben wir für die Erhaltungsgrößen der Massen-, Impuls- und Energiedichte dementsprechend

$$\partial_t \rho + \nabla_i j_i = 0 \quad (2.4.2)$$

$$\partial_i g_i + \nabla_i \sigma_{ij} = 0 \quad (2.4.3)$$

$$\partial_t w + \nabla_i Q_i = 0, \quad (2.4.4)$$

wobei  $j_i$ ,  $\sigma_{ij}$  und  $Q_i$  die noch zu bestimmenden Ströme sind. Für die Erhaltungsgröße (Vierer-)Drehimpuls gibt man in der Regel keine eigene Gleichung an, vielmehr lässt sich zeigen, dass seine Erhaltung auf die Äquivalenz von Massenstrom und Impulsdichte  $j_i = g_i$  und die Symmetrie der Impulsstromdichte  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  führt [35].

Für die Entropiedichte geben wir eine Bilanzgleichung an. Sie enthält zusätzlich zur Struktur der Erhaltungsgleichung einen Produktionsterm  $R$  auf der rechten Seite, den wir als  $R/T$  schreiben

$$\partial_t s + \nabla_i f_i = \frac{R}{T}. \quad (2.4.5)$$

Er muss ebenso wie die Ströme in (2.4.2-2.4.4) noch spezifiziert werden. Das gelingt, wie wir sehen werden durch zwei Forderungen:  $R \geq 0$  und  $R = 0$  genau im thermodynamischen Gleichgewicht.

Systeme mit spontan gebrochener kontinuierlicher Symmetrie, wie etwa Flüssigkristalle, Supraflüssigkeiten oder Festkörper erfordern weitere Variablen und Bewegungsgleichungen [28]. Für Festkörper ist die Translations- und Rotationsymmetrie gebrochen und die Koordinaten  $a_\alpha(r_i)$  der Gitterpunkte am Ort  $r_i$  bzw. deren Gradienten  $\nabla_i a_\alpha$  werden als hydrodynamische Variablen genommen. Anschaulich ist  $a_\alpha(r_i, t)$  die Koordinate des Gitterpunktes am Ort  $r_i$ , der vor einer Deformation am Ort mit den Koordinaten  $a_\alpha$  war. Die Energie eines Festkörpers hängt aber nicht von der absoluten Position  $a_\alpha$  ab, sondern nur von deren Ableitungen höherer Ordnung. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Abhängigkeiten erster Ordnung, also  $\nabla_i a_\alpha$ , vgl. Gleichung (2.3.1). Eine Bewegungsgleichung für rein reaktive Systeme folgte aus der kinematischen Tatsache, dass sich die Anfangskoordinaten mit der Bewegung nicht ändern. Also  $\frac{d}{dt} a_\alpha = 0$ , wobei  $\frac{d}{dt} = \partial_t + v_k \nabla_k$  die sog. materielle

Zeitableitung bezeichnet, s. Anhang A.2. Sie gibt die Änderung einer Feldgröße an, falls man sich mit einem Fluidteilchen in einer Strömung mitbewegt. In Festkörpern bewegen sich Leerstellen und Zwischenatome im Gitter. Um die mit dieser Bewegung verbundene Dissipation beschreiben zu können, betrachtet man allgemeiner [30]

$$\frac{d}{dt}a_\alpha = Y_\alpha, \quad (2.4.6)$$

wobei  $Y_\alpha$  ein dissipativer Strom ist mit entsprechenden Eigenschaften, vgl. Anhang A.3. Damit ist einerseits eine Änderung der Anfangskoordinaten  $\partial_t a_\alpha \neq 0$  ohne Massenstrom  $j_i \sim v_i = 0$  möglich, andererseits ein Massenstrom ohne Änderung der Anfangskoordinaten.

Wir wollen nun die Struktur der hydrodynamischen Gleichungen, d.h. die noch unbekannt Ströme  $j_i$ ,  $\sigma_{ij}$  und  $Q_i$  sowie einen Ausdruck für die Entropieproduktion ableiten. Dazu folgen wir der Standardprozedur [25, 26, 29], wie sie von Landau und Khalatnikov bei der Ableitung der Gleichungen für suprafluides Helium entwickelt wurde. Wir führen die Methode für Festkörper aus, nehmen also neben den Dichten  $s$ ,  $\rho$  und  $g_i$  den Deformationsgradienten  $\nabla_i a_\alpha$  als Variable [30]. Dazu bildet man die materielle Zeitableitung der Fundamentalrelation (2.2.3)

$$\frac{dw}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \mu \frac{d\rho}{dt} + v_i \frac{dg_i}{dt} + \psi_{\alpha i} \frac{d\nabla_i a_\alpha}{dt}, \quad (2.4.7)$$

und setzt darin die Bewegungsgleichungen (2.4.2, 2.4.3), (2.4.5) sowie (2.4.6) ein. Man erhält den Ausdruck

$$\begin{aligned} \partial_t w + \nabla_i (T f_i + \mu \rho v_i - \psi_{\alpha i} Y_\alpha + v_j (\sigma_{ij} - P \delta_{ij})) = \\ R + (f_i - s v_i) \nabla_i T + (\sigma_{ij} - P \delta_{ij} - \rho v_i v_j - \psi_{\alpha j} (\nabla_i a_\alpha)) v_{ij} - Y_\alpha \nabla_i \psi_{\alpha i}, \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

s. Anhang A.3, wobei  $P = Ts + \mu\rho + v_i g_i - w$ . Aus dem Vergleich mit der Energieerhaltung (2.4.4) kann man den Energiestrom  $Q_i$  und die Entropieproduktion  $R$  ablesen. Die Divergenz in (2.4.8) muss die des Energiestroms sein und die rechte Seite muss verschwinden, also

$$Q_i = T f_i + \mu \rho v_i - \psi_{\alpha i} Y_\alpha + v_j (\sigma_{ij} - P \delta_{ij}) \quad (2.4.9)$$

$$R = f_i^D \nabla_i T + \sigma_{ij}^D v_{ij} + Y_\alpha \nabla_i \psi_{\alpha i}. \quad (2.4.10)$$

Sofern die dissipativen Ströme  $f_i^D$ ,  $\sigma_{ij}^D$  und  $Y_\alpha = Y_\alpha^D$  bekannt sind, sind damit die unbekannt  $f_i = s v_i - f_i^D$  und  $\sigma_{ij} = -\sigma_{ij}^D + P \delta_{ij} + \rho v_i v_j + \psi_{\alpha i} \nabla_j a_\alpha$  gefunden.  $Y_\alpha$  ist, wie oben eingeführt, ebenfalls ein dissipativer Strom.

Wir erkennen, dass die Entropieproduktion (2.4.10) über die Gleichgewichtsbedingungen (2.3.2) gegeben ist. Sie verschwindet aufgrund der hydrodynamischen Konstruktion im globalen Gleichgewicht. Die Größen  $\nabla_i T$ ,  $v_{ij}$  und  $\nabla_i \psi_{\alpha i}$  werden in diesem Zusammenhang als thermodynamische Kräfte bezeichnet, die dadurch hervorgerufenen Ströme  $f_i^D$ ,  $\sigma_{ij}^D$  und  $Y_\alpha$  als dissipative Ströme.

Dass der Ausdruck  $\nabla_i \mu + \partial_t v_i$  aus (2.3.2) nicht als Kraft in  $R$  auftaucht, liegt daran, dass es keinen dissipativen Massenstrom geben kann, denn es gilt  $j_i = g_i$ , und für Systeme wie wir sie hier betrachten  $g_i = \rho v_i$  [37].

Zur vollständigen hydrodynamischen Beschreibung eines Festkörpers fehlen noch Ausdrücke für die dissipativen Ströme. Wir werden sie im folgenden Abschnitt gemäß des Onsagerschen Prinzips konstruieren.

## 2.5 Entropieproduktion und Onsager-Relationen

Der Ausdruck für die Entropieproduktion, als Summe von Produkten aus thermodynamischen Kräften  $F_i$  und dissipativen Strömen  $J_i$  wie in Gleichung (2.4.10) ist direkte Folge der angewandten Standardprozedur. Es ist ferner für viele irreversible Phänomene experimentelle Tatsache, dass dissipative Ströme lineare Funktionen der Kräfte sind [38]. Im Gleichgewicht ist die Entropie maximal, auf dem Weg dorthin gilt gemäß des zweiten Hauptsatzes stets  $R \geq 0$ . Um beide Punkte zu erfüllen, entwickeln wir die dissipativen Ströme nach den Kräften bis zur linearen Ordnung

$$J_i = L_{ij} F_j. \quad (2.5.1)$$

Die Koeffizienten  $L_{ij}$  bezeichnet man als kinetische- oder als Transportkoeffizienten. Die Entropieproduktion  $R = J_i F_i$  ist damit eine quadratische Form  $R = L_{ik} F_i F_k$ , von der wir verlangen, dass sie positiv-semidefinit ist. Die Onsager-Relation verbindet die Koeffizienten miteinander [38]. Aufgrund der Zeitumkehrinvarianz der Entropieproduktion  $R$ , wir schreiben dafür  $\text{zup}(R) = 1$ , für positive Zeitumkehrparität, und definierter Zeitumkehrparitäten der Kräfte, z.B.  $\text{zup}(\nabla_i T) = 1$  und  $\text{zup}(v_{ij}) = -1$ , gilt stets

$$L_{ij} = \text{zup}(F_i \cdot F_j) L_{ji}, \quad (2.5.2)$$

hier ohne Summation und  $\text{zup}(F_i \cdot F_j) = \text{zup}(F_i) \cdot \text{zup}(F_j)$ , s. dazu Referenz [39].

Für die Komponenten der dissipativen Ströme in (2.4.10) erhalten wir

$$\begin{pmatrix} f_i^D \\ \sigma_{ij}^D \\ Y_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_{ij} & \gamma_{ikl} & \delta_{i\gamma} \\ -\gamma_{ikl} & \eta_{ijkl} & \epsilon_{ij\gamma} \\ \delta_{i\gamma} & -\epsilon_{ij\gamma} & \beta_{\alpha\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_j T \\ v_{kl} \\ \nabla_m \psi_{\gamma m} \end{pmatrix}. \quad (2.5.3)$$

Die dissipativen Charakteristika vieler Stoffe lassen sich durch die Diagonaleinträge dieser Onsagermatrix verstehen, obwohl der Peltier- und Seebeckeffekt prominentes Beispiel der Relevanz von Außerdiagonalelementen ist. Für isotrope Medien sind die Transportkoeffizienten isotrop, d. h. zweistufige isotrope Tensoren sind Vielfaches von  $\delta_{ij}$ , vierstufige von der Form  $a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk}$  mit beliebigen Skalaren  $a$ ,  $b$  und  $c$ . Betrachten wir nur Diagonaleinträge und isotrope Medien, so lässt sich die Entropieproduktion (2.4.10) als

$$R = \kappa (\nabla_i T)^2 + \eta (v_{ij}^0)^2 + \zeta v_l^2 + \beta (\nabla_m \psi_{\gamma m})^2 \quad (2.5.4)$$



schreiben. Wir haben einen Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten  $\kappa$ , da  $\kappa_{ij} = \kappa\delta_{ij}$ , einen Leerstellendiffusionskoeffizienten  $\beta$  sowie aufgrund der Symmetrie von  $v_{kl}$  zwei Zähigkeiten  $\eta$  und  $\zeta$ . Hier und im Folgenden bezeichnet  $x_{ij}^0 = x_{ij} - \frac{1}{3}x_{ll}\delta_{ij}$  den spurlosen Anteil eines Tensors. Die Semi-Positivität von  $R$  erfordert in diesem Fall  $\kappa, \eta, \zeta, \beta \geq 0$ .

Die Transportkoeffizienten dürfen von den hydrodynamischen Variablen des Systems und ihren konjugierten, nicht aber von den thermodynamischen Kräften abhängen. Eine solche Abhängigkeit würde der Beschränkung auf die lineare Onsagertheorie widersprechen.

Wir besitzen nun ein vollständiges System von Differenzialgleichungen, um Festkörper und im Grenzfall  $\psi_{i\alpha} \rightarrow 0$  gewöhnliche Fluide zu beschreiben. Um dieses abzuleiten, haben wir die Variablen  $\rho, g_i, w$  und  $\nabla_i a_\alpha$  identifiziert, ihre Bewegungsgleichungen mit der Thermodynamik kombiniert und die lineare Onsagertheorie verwandt. Wir haben uns dabei auf kleine Abweichungen vom Gleichgewicht und im letzten Schritt mit Gleichung (2.5.4) auf ein isotropes Medium beschränkt.

Die Eigenschaften eines konkreten Materials zerlegen sich in zwei Anteile, nämlich in einen dissipativen und einen reaktiven. Die Abhängigkeit der Transportkoeffizienten von den hydrodynamischen Variablen bestimmen die dissipativen Charakteristika, die Abhängigkeit der Energiedichte  $w$  von den hydrodynamischen Variablen hingegen die dissipationsfreien Eigenschaften.

## 2.6 Isotrope Medien und Relaxation der Verzerrungen

Hängen die physikalischen Eigenschaften eines Mediums nicht von der Raumrichtung ab, so bezeichnen wir es als isotrop. Bei fluiddynamischen Systemen denken wir dabei etwa an die Kompressibilität, die im Falle eines isotropen Festkörpers richtungsunabhängig ist. Die Energie eines solchen isotropen Mediums kann neben den Dichten von Entropie, Masse und Impuls nur von den skalaren Invarianten des Verzerrungstensors

$$u_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - (\nabla_i a_k)(\nabla_j a_k)), \quad (2.6.1)$$

abhängen und nicht von allen neun Komponenten des Deformationsgradienten wie in Gleichung (2.4.7) [30, 32]. Der Verzerrungstensor ist symmetrisch und ein Maß für die relative Längenänderung unter einer Deformation. Seine skalaren Invarianten sind die Eigenwerte  $u_1, u_2$  und  $u_3$ . Als Variable können aber beliebige Kombinationen davon verwendet werden. In der linearen Elastizitätstheorie bei isotropen Festkörpern etwa wird für die Dichte der freien Energie  $f = \frac{1}{2}K\Delta^2 + \mu u_s^2$  angesetzt, wobei  $\Delta = -\text{Tr } u_{ij}$  die negative Spur des Verzerrungstensors und  $u_s^2 = u_{ij}^0 u_{ij}^0 = \text{Tr } (u^2)_{ij} - \frac{1}{3}(\text{Tr } u_{ij})^2$  das Quadrat des spurlosen Teils bezeichnet.

Durch Kombination der Bewegungsgleichungen für die Anfangskoordinaten (2.4.6)

mit der Definitionsgleichung für die Verzerrungen (2.6.1) erhalten wir die Zeitentwicklung für  $u_{ij}$ . Beschränken wir uns auf Systeme in denen sowohl  $u_{ij}$  also auch  $\nabla_i Y_\alpha$  klein bleiben, das ist für granulare Systeme wie wir sie später beschreiben wollen quasi immer erfüllt, ist sie durch

$$\frac{d}{dt}u_{ij} - v_{ij} - \left[ \frac{1}{2} \nabla_j Y_i - u_{ik} (\nabla_j v_k) \right] - [i \leftrightarrow j] = 0 \quad (2.6.2)$$

gegeben. Sie verbindet die Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes mit den Verzerrungen des Festkörpers. Um viskoelastische Fluide zu beschreiben, lässt sich diese Bewegungsgleichung verallgemeinern. Bei kleinen Frequenzen äußerer Störungen verhalten sich viskoelastische Fluide wie gewöhnliche Newtonsche Fluide, die durch die Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben werden, bei großen hingegen wie Festkörper, für die zusätzlich Gleichung (2.6.2) gilt. Um nun diese transiente Elastizität wiederzugeben, führt man auf der rechten Seite der Gleichung (2.6.2) einen zusätzlichen Strom  $X_{ij}$  ein [30]. Er ist zusammen mit dem Strom  $Y_\alpha$  von dissipativer Natur und kann durch die Standardprozedur und die Onsagerkonstruktion bestimmt werden. Für isotrope lineare Medien etwa ergibt der Diagonaleintrag der Onsagermatrix  $X_{ij}^0 \sim -u_{ij}^0/\tau$  und  $X_{ll} \sim -u_{ll}/\tau_1$ , mit Materialparametern  $\tau$  und  $\tau_1$ , was auf eine Relaxationsgleichung

$$\partial_t u_{ij} \sim -\frac{1}{\tau} u_{ij} \quad (2.6.3)$$

für die Verzerrungen führt. Damit ist die Beschreibung nicht-newtonscher Strömungseffekte in polymeren Fluiden möglich [30, 31]. Ist die Relaxationszeit  $\tau$  groß gegen die Zeitskala der Störung, ist die rechte Seite der Bewegungsgleichung für die Verzerrungen zu vernachlässigen und das System fest, im umgekehrten Fall kleiner Relaxationszeiten verschwinden eventuell auftretende Verzerrungen unmittelbar, das System bleibt flüssig.

Die Einführung des dissipativen Stroms  $X_{ij}$  hat aber Konsequenzen für die Variablen  $u_{ij}$ . Die Verzerrungen ändern nämlich ihren Variablentyp. Sie gehören jetzt zur Gruppe der langsamen Variablen, da Bedingung (2.2.1) verletzt wird. Zweitens lassen sich die Verzerrungen nicht mehr wie in Gleichung (2.6.1) auf das Koordinatenfeld  $a_\alpha$  zurückführen. Dadurch ist die Definition eines Verschiebungsfeldes  $U_i = r_i - a_i$  nicht mehr sinnvoll. Alle sechs Komponenten  $u_{ij}$  müssen als unabhängige Variable angesehen werden. Wir werden deshalb in den späteren Kapiteln Wellengleichungen für die Verzerrungen anstatt wie in der Elastizitätstheorie üblich für Verschiebungen. Das hat drittens zur Folge, dass sich die Gleichgewichtsbedingungen ändern. Sie lauten nun  $\pi_{ij} = 0$ , siehe Anhang A.1, wobei die Größen  $\pi_{ij}$  die konjugierten Variablen zu  $u_{ij}$  sind,

$$\frac{\partial w}{\partial u_{ij}} = -\pi_{ij} \quad (2.6.4)$$

und als elastische Spannungen bezeichnet werden. Die Spannungen treten als thermodynamische Kraft auf und versuchen das System in den unverzerrten Zustand zu

bringen.

Viertens erzwingt die Einführung von  $X_{ij}$  eine Zerlegung der Verzerrungen. Durch die Relaxation stimmt die Gesamtverzerrung nicht mehr mit  $u_{ij}$  überein. Die Differenz aus geometrischer, also kinematischer Gesamtverzerrung  $\varepsilon_{ij}$  und der elastischen  $u_{ij}$  bezeichnen wir als plastische Verzerrung  $p_{ij}$ , so dass

$$\varepsilon_{ij} = u_{ij} + p_{ij}. \quad (2.6.5)$$

Für  $\varepsilon_{ij}$  gilt bei einer Deformation, die durch das Geschwindigkeitsfeld  $v_i$  gegeben ist  $d_t \varepsilon_{ij} = v_{ij} - \varepsilon_{ik} \nabla_j v_k - \varepsilon_{jk} \nabla_i v_k$ . Die Gesamtverzerrung ist also die Summe aus einem elastischen Anteil  $u_{ij}$  mit dem eine elastische reversible Energie verbunden ist und einem plastischen irreversiblen Anteil  $p_{ij}$ , der zu Wärmeerzeugung führt.

Mit der Bewegungsgleichung (2.6.2) kann entsprechend Abschnitt 2.4 eine Standardprozedur durchgeführt werden, wir verzichten hier aber darauf und behandeln gleich den verallgemeinerten Fall granularer Systeme in Kapitel 3.

## 2.7 Kontinuumsmechanik

Die Beschreibung makroskopischen Materialverhaltens geschieht heutzutage im Ingenieurwesen im Rahmen der Kontinuumsmechanik [32–34], welche die historisch getrennten Gebiete der Elastizitätstheorie und Fluidmechanik vereinheitlicht darstellt. Ihre Grundlagen wurden neben anderen von Euler und Cauchy erarbeitet, der theoretisch mathematische Rahmen wurde durch Truesdell [40] und andere in den 1960er Jahren gegeben.

Im Gegensatz zur hydrodynamischen Theorie, wie sie in diesem Kapitel bisher vorgestellt wurde, verzichtet man in der Kontinuumsmechanik auf das lokale Gleichgewicht und kleine Abweichungen davon. Vielmehr verbindet man die Ströme der Feldgrößen durch konstitutive Relationen miteinander. Die Kontinuumsmechanik ist mathematisch äußerst anspruchsvoll, insbesondere durch Aufstellen tensorwertiger Funktionen und zeitlich nichtlokaler Zusammenhänge. Durch Diskussion der lokalen Beschreibung von Bewegung, Deformation, Kraft, Energie und Entropie erhält man einen Satz von Bewegungsgleichungen für die Felder von Massendichte  $\rho$ , Kraft pro Fläche  $\sigma_{ij}$ , Energiedichte  $w$  usw. Gleichungen, die die Abhängigkeit dieser Felder von den Zustandsvariablen angeben heißen konstitutive Relationen. Im Falle der Impulsstromdichte  $\sigma_{ij}$  müssen also neun Gleichungen für die neun Komponenten gefunden werden. Eine Möglichkeit besteht darin, sie mikroskopisch abzuleiten, eine andere sie durch Molekulardynamiksimulationen zu erhalten. Überwiegend ist jedoch der phänomenologische Zugang. Anhand von Experimenten werden konstitutive Relationen erraten und die erhaltenen mathematischen Beziehungen Invarianzprinzipien, wie z.B. Kausalität und kovarianter Formulierung unterworfen. Beobachtet wird, dass das aktuelle Materialverhalten vom zeitlich vorhergehenden Spannungszustand abhängt. Die mathematische Struktur enthält deswegen Zeitintegrale, die das aktuelle Materialverhalten auf die Vergangenheit zurückführen. Für Polymere [31] setzt

man in sogenannten linear-viskoelastisch Modellen [41] für die Impulsstromdichte

$$\sigma_{ij} = - \int_{-\infty}^t M(t-t') v_{ij}(t') dt' \quad (2.7.1)$$

an.  $M$  ist dabei die Gedächtnisfunktion. In der Bodenmechanik [42] werden u.a. hypoplastische Modelle für granulare Medien verwendet. Sie sind von der generellen nichtlinearen Form

$$\partial_t \sigma_{ij} = L_{ijkl} v_{kl} + N_{ij} |v_{ij}|, \quad (2.7.2)$$

wobei  $|v_{ij}| = \sqrt{v_{ij} v_{ij}}$  [43]. Die Materialtensoren  $L_{ijkl}$  und  $N_{ij}$  hängen dabei vom aktuellen Spannungszustand ab.

Zum späteren Vergleich mit der hydrodynamischen Theorie granularer Materie, der GSH-Theorie, wollen wir die in der Kontinuumsmechanik üblichen Bezeichnung verschiedenen Materialverhaltens kurz einführen. Anhand der konstitutiven Relationen für den Spannungstensor werden verschiedene Materialklassen definiert.

1. Elastisch: Die Spannungen  $\sigma_{ij}$  sind Funktionen der Verzerrungen  $\varepsilon_{ij}$ , d. h.  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}, s, \rho, \dots)$ .
2. Stokessches Fluid: Die Spannungen  $\sigma_{ij}$  sind Funktionen der Geschwindigkeitsgradienten  $\partial_t \varepsilon_{ij}$ , d. h.  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\partial_t \varepsilon_{ij}, s, \rho, \dots)$ .
3. Viskoelastisch: Die Spannungen  $\sigma_{ij}$  sind Funktionen der Verzerrungen  $\varepsilon_{ij}$  sowie der Geschwindigkeitsgradienten  $\partial_t \varepsilon_{ij}$ , d. h.  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}, \partial_t \varepsilon_{ij}, s, \rho, \dots)$ .

Nach der Greenschen Definition kann aus der Impulsstromdichte ein hyperelastischer Anteil extrahiert werden, welcher von einem Potential abgeleitet werden kann. Genauer gesagt definiert die Existenz  $w = w(u_{ij})$  ein hyperelastisches Material [44].

Viskoelastisch sind alle Materialien, deren aktueller Spannungszustand von der Vergangenheit abhängt. Darunter fallen phänomenologische Modelle wie Newton-, Maxwell-, Kelvin-Voigt-, und Zener- Festkörper mit den Verallgemeinerungen  $\dot{\sigma} + p\sigma = k(\dot{u} + qu)$ .

Bleibt nach der Belastung permanente Deformation spricht man von Plastizität.

## 2.8 Zusammenfassung

Wie in diesem Kapitel gezeigt, kann die Struktur der hydrodynamischen Gleichungen, d. h. insbesondere die genaue Form der Stromdichten berechnet werden. Dadurch vereinfacht sich die kontinuumsmechanische Beschreibung. Beispielsweise erzwingt die Einbeziehung der Thermodynamik, d. h. Energieerhaltung in Form des lokalen Gleichgewichts und die linearen Onsager-Theorie etwa die Gleichheit der Viskositäten  $\eta$  in der Impulserhaltung (3.1.15) und in der Entropieproduktion 3.1.24.

Die Ableitung der hydrodynamischen Gleichungen beruht nur auf physikalischen Grundprinzipien und liefert das Gerüst der Gleichungen. Eine einzige skalare Funktion, nämlich die Energiedichte, legt zusammen mit den Transportkoeffizienten, die Physik fest.

Die Kontinuumsmechanik verfügt über keine eigene Bewegungsgleichung für die Verzerrungen, sondern verbindet die Impulsstromdichte direkt mit dem Gesamtverzerrungsfeld  $\varepsilon_{ij}$  bzw. Geschwindigkeitsfeld  $v_{ij} = \partial_t \varepsilon_{ij} + \dots$ . Die relative Einfachheit der Struktur hydrodynamischer Gleichungen wird also durch einen höheren Satz von Variablen erkauft.

Beide Beschreibungen sind aber äquivalent. Die hydrodynamische lässt sich in eine kontinuumsmechanische überführen und vice versa. Dazu kann in der GSH-Theorie etwa das Feld  $u_{ij}$  und seine Zeitableitung  $\partial_t u_{ij}$  durch konsequentes Einsetzen in die Impulserhaltung eliminiert und ein entsprechender Integralkern identifiziert werden.

Hydrodynamische Gleichungen sind immer lokal formuliert. Auf den Wechsel zur Lagrangeschen Notation mit einer Referenzkonfiguration wird verzichtet. Insbesondere sind alle Tensoren vom Eulerschen lokalen Typ.



# Kapitel 3

## Granulare Hydrodynamik

In diesem Kapitel wird die hydrodynamische Theorie granularer Materie, wie sie von M. Liu und Y. Jiang entworfen wurde, vorgestellt [20]. Sie ist eine Erweiterung der in Kapitel 2 diskutierten hydrodynamischen Theorie von Festkörpern und polymeren Fluiden. Befindet sich granulare Materie in Ruhe, so ist sie elastisch wie ein Festkörper, bewegen sich aber ihre Körner, so wird sie wie Polymere transient elastisch. Mit der Bewegung der Körner können wir in Analogie zum klassischen idealen Gas eine granulare Temperatur  $T_g$  verbinden. Diese granulare Temperatur quantifiziert den Übergang. Im ersten Abschnitt 3.1 leiten wir den vollständigen Satz an Bewegungsgleichungen ab und im zweiten Abschnitt 3.2 diskutieren wir die genaue Form der Energiedichte und der Transportkoeffizienten.

### 3.1 Polymerphysik und granulare Temperatur

Die hydrodynamische Theorie granularer Materie, die GSH-Theorie, ist eine Weiterentwicklung der hydrodynamischen Theorie viskoelastischer polymerer Fluide [30, 31]. Diese sind wie auch granulares Material transient elastisch, d.h. sie zeigen abhängig von der Anregungsfrequenz elastisches oder plastisches Verhalten. Im Gegensatz zu Polymeren kann granulare Materie, sofern sie in Ruhe ist, aber Spannungen aufrecht erhalten: Ein Sandhaufen bleibt formstabil. Erst durch äußere Störungen beginnen die Spannungen zu relaxieren, der Sandhaufen zu zerlaufen. Diese durch Klopfen oder Schallwellen hervorgerufenen Störungen führen zum Wackeln und Gleiten der Sandkörner, sie verlieren den gegenseitigen Kontakt und erlauben so den Spannungen sich abzubauen. Diese kleinskalige Bewegung der Körner können wir analog zur kinetischen Gastheorie, mit einer granularen Temperatur  $T_g$  assoziieren [45, 46] und setzen die Relaxationszeit  $\tau$  der elastischen Verzerrungen invers zu dieser Temperatur [19]

$$\tau^{-1} \sim T_g. \quad (3.1.1)$$

Dies hat zur Folge, dass für verschwindende granulare Temperatur die Relaxationszeit divergiert und somit Sand fest wird, für große granulare Temperaturen hingegen

wird die Relaxationszeit so klein, dass die elastischen Verzerrungen vernachlässigbar werden. Wir gehen im Folgenden bei der Ableitung der Gleichungen aber systematisch vor und beginnen mit dem allgemeinen Ausdruck der Energiedichte [20]

$$w = w(s, s_g, \rho, g_i, u_{ij}). \quad (3.1.2)$$

Darin seien die granulare Entropie  $s_g$  und die elastischen Verzerrungen  $u_{ij}$  vom Typ langsamer Variablen, die eben eingeführte Temperatur  $T_g$  die zu  $s_g$  konjugierte. Die Variable  $\rho$  sei die Lagerungs- oder Packungsdichte granularer Materie. Die granulare Entropie  $s_g$  repräsentiert dabei die mesoskopischen Freiheitsgrade der einzelnen Körner, unter  $s$  subsumieren wir alle restlichen mikroskopischen Freiheitsgrade. Das Energiedifferential schreiben wir deshalb, s [20], als

$$dw = Td(s - s_g) + T_g ds_g + \mu d\rho + v_i dg_i - \pi_{ij} du_{ij}, \quad (3.1.3)$$

wodurch die restlichen konjugierten Variablen  $T$ ,  $\mu$ ,  $v_i$  und  $\pi_{ij}$  definiert werden. Im ersten Summand ziehen wir aus der Gesamtzahl der Freiheitsgrade die granularen ab, im zweiten zählen wir sie wieder dazu. Die mikroskopischen Freiheitsgrade überwiegen die granularen bei weitem, deswegen gilt  $s \gg s_g$ . In guter Näherung ist daher  $s - s_g \approx s$ , so dass wir mit

$$dw = Tds + T_g ds_g + \mu d\rho + v_i dg_i - \pi_{ij} du_{ij} \quad (3.1.4)$$

fortfahren. Wegen  $Td(s - s_g) + T_g ds_g = Tds + (T_g - T) ds_g$  muss deswegen auch  $T_g \gg T$  gelten. Dies lässt sich auch mikroskopisch verstehen. Die zur Temperatur proportionale mittlere kinetische Energie granularer Teilchen ist wegen ihrer großen Masse viel größer als die der Gasteilchen. Im Rahmen der GSH-Theorie ist die granulare Entropie und Temperatur aber eine langsame Variable, die nicht unbedingt dieser mesoskopischen Interpretation bedarf.

Die Gleichgewichtsbedingungen sind, siehe Anhang A.1,

$$\nabla_i T = 0, \quad \partial_t v_i + \nabla_i \mu = 0, \quad v_{ij} = 0, \quad T_g = 0, \quad \nabla_i T_g = 0, \quad (3.1.5)$$

sowie

$$\pi_{ij} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla_j \pi_{ij} = 0. \quad (3.1.6)$$

Streng genommen gilt die erste der beiden letzten Bedingungen im Fall  $T_g \neq 0$ , die zweite bei  $T_g = 0$ . Da wir jedoch gerade am Übergang des Mediums von fest,  $T_g = 0$ , nach flüssig,  $T_g \neq 0$ , interessiert sind, berücksichtigen wir beide Gleichgewichtsbedingungen als thermodynamische Kräfte.

Neben den Bewegungsgleichungen für Massen-, Impuls-, Energie- und Entropiedichte in der Form der Gleichungen (2.4.2)-(2.4.5) und der um den Relaxationsterm  $X_{ij}$  erweiterten Bewegungsgleichung für die Verzerrungen (2.6.2)

$$\frac{d}{dt} u_{ij} - v_{ij} - \left[ \frac{1}{2} \nabla_j Y_i - u_{ik} (\nabla_j v_k) \right] - \left[ i \leftrightarrow j \right] = X_{ij}, \quad (3.1.7)$$



geben wir in Analogie und Konsequenz der obigen Zerlegung (3.1.3) für  $s_g$  eine zur normalen Entropiedichte äquivalente Gleichung an

$$\partial_t s_g + \nabla_i F_i = \frac{R_g}{T_g}. \quad (3.1.8)$$

Die Gesamtentropieproduktion ist dann  $R/T + R_g/T_g$ . Die Standardprozedur, s. Anhang B, führt auf das folgende System von Bewegungsgleichungen

$$\partial_t \rho + \nabla_i (\rho v_i) = 0 \quad (3.1.9)$$

$$\partial_t (\rho v_i) + \nabla_j \sigma_{ij} = 0 \quad (3.1.10)$$

$$\partial_t w + \nabla_i Q_i = 0 \quad (3.1.11)$$

$$\partial_t s + \nabla_i (s v_i - f_i^D) = \frac{R}{T} \quad (3.1.12)$$

$$\partial_t s_g + \nabla_i (s_g v_i - F_i^D) = \frac{R_g}{T_g} \quad (3.1.13)$$

$$d_t u_{ij} - v_{ij} + u_{ik} (\nabla_j v_k) + u_{jk} (\nabla_i v_k) = X_{ij} - \frac{1}{2} \nabla_j Y_i - \frac{1}{2} \nabla_i Y_j \quad (3.1.14)$$

mit den Strömen

$$\sigma_{ij} = P_T \delta_{ij} + \rho v_i v_j + \pi_{ij} - \pi_{ik} u_{kj} - \pi_{jk} u_{ki} - \sigma_{ij}^D - \Sigma_{ij}^D \quad (3.1.15)$$

$$Q_i = T f_i + T_g F_i + \mu g_i - Y_i \pi_{ij} + (\sigma_{ij} - P_T \delta_{ij}) v_j, \quad (3.1.16)$$

wobei  $P_T = Ts + T_g s_g + \mu \rho + v_k g_k - w$  und den dissipativen Strömen

$$f_i^D = \kappa \nabla_i T \quad \text{und} \quad F_i^D = \kappa_g \nabla_i T_g \quad (3.1.17)$$

$$Y_i = \beta^P \nabla_l \pi_{il} \quad (3.1.18)$$

$$X_{ij} = \beta \pi_{ij}^0 + \beta_1 \pi_{il} \delta_{ij} - \alpha v_{ij} \quad (3.1.19)$$

$$\sigma_{ij}^D = \eta v_{ij}^0 + \zeta v_{il} \delta_{ij} + \alpha \pi_{ij} \quad (3.1.20)$$

$$\Sigma_{ij}^D = \eta_g v_{ij}^0 + \zeta_g v_{il} \delta_{ij}. \quad (3.1.21)$$

Die Raten  $R$  und  $R_g$  sind

$$R = f_i^D \nabla_i T + \sigma_{ij}^D v_{ij} + Y_i \nabla_j \pi_{ij} + X_{ij} \pi_{ij} + \gamma T_g^2 \quad (3.1.22)$$

$$R_g = F_i^D \nabla_i T_g + \Sigma_{ij}^D v_{ij} - \gamma T_g^2, \quad (3.1.23)$$

sodass

$$R + R_g = f_i^D \nabla_i T + F_i^D \nabla_i T_g + (\sigma_{ij}^D + \Sigma_{ij}^D) v_{ij} + Y_i \nabla_j \pi_{ij} + X_{ij} \pi_{ij}. \quad (3.1.24)$$

Diese Gleichungen bilden die Grundlagen der GSH-Theorie. Es sind zwölf Gleichungen für die zwölf Variablen  $(\rho, g_i, s, s_g, u_{ij})$ . Um mit dieser Theorie konkrete Probleme lösen zu können, fehlen uns aber noch Ausdrücke für die Energiedichte  $w$  und die Transportkoeffizienten  $(\kappa, \kappa_g, \beta^P, \beta, \beta_1, \alpha, \eta, \zeta, \eta_g, \zeta_g)$ , die wir im nächsten Abschnitt geben.

## 3.2 Granulare Energiedichte und Transportkoeffizienten

Wir beginnen mit der Spezifikation der Energiedichte (3.1.2). Für ihre funktionale Abhängigkeit von den Variablen gibt es keinerlei Einschränkungen, wir betrachten aber im Folgenden anstatt der Energiedichte das Potenzial  $\tilde{f} = \tilde{f}(T, T_g, \rho, g_i, u_{ij})$ , bezeichnen es in Analogie zur gewöhnlichen Thermodynamik als freie Energiedichte und machen Ansatz, s. [20],

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= w - Ts - T_g s_g \\ &= \frac{g_i^2}{2\rho} + f_0(T, \rho) + f_1(\rho, u_{ij}) + f_2(\rho, T_g).\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

Diese Summe besteht aus der gewöhnlichen freien Energie  $f_0$ , einem Anteil  $f_1$  der für die Speicherung elastischer Energie verantwortlich ist und einem Teil  $f_2$ , der von der granularen Temperatur abhängt. Für  $f_1$  setzen wir die in den Arbeiten [17, 18] vorgeschlagene Energiedichte

$$f_1 = \mathcal{B}\sqrt{\Delta} \left( \frac{2}{5}\Delta^2 + \frac{1}{\xi}u_s^2 \right) \quad (3.2.2)$$

an. Hierbei ist  $\Delta = -\text{Tr } u_{ij}$  die negative Spur des Verzerrungstensors und  $u_s^2 = u_{ij}^0 u_{ij}^0$  das Quadrat des spurlosen Teils. Die Kompression  $\Delta$  ist ein Maß für die relative Volumenänderung einer Deformation,  $u_s^2$  ein Maß für die Stärke einer volumenlosen Deformation. Kohäsionslose granulare Materie kann nur bei positiver Kompression  $\Delta > 0$  Energie speichern, für negative sei die Energie  $f_1 = 0$ . Der Parameter  $\mathcal{B}$  sei abhängig von der Packungsdichte  $\rho$  gemäß

$$\mathcal{B}(\rho) = \mathcal{B}_0 \left( \frac{\rho - \rho_{lp}^*}{\rho_{cp} - \rho} \right)^{\frac{3}{20}}, \quad (3.2.3)$$

$\rho_{lp}^*$  wiederum durch  $\rho_{lp} = (11\rho_{cp} + 9\rho_{lp}^*)/20$  gegeben [20]. Dabei steht  $\rho_{cp}$  die dichteste granulare Packungsdichte,  $\rho_{lp}$  für die loseste. Die Größen  $\mathcal{B}_0, \xi, \rho_{lp}, \rho_{cp}$  sind Materialparameter. Der Energiebeitrag  $f_2$  ist für die Beschreibung granularer Phänomene reserviert, bei denen die granulare Temperatur die wesentliche Rolle spielt. Für  $f_2$  folgen wir ebenfalls [20] und setzen

$$f_2 = -\rho b T_g^2 / 2 \quad (3.2.4)$$

mit  $b = b_0 (1 - \rho/\rho_{cp})^a$ , so dass für moderate granulare Temperaturen wie sie durch Schallwellen erzeugt werden dieser Beitrag immer quadratisch klein bleibt.  $b_0$  und  $a$  sind weitere Materialparameter.

Aus dem Ausdruck für die freie Energie (3.2.1) erhalten wir die elastischen Spannungen

$$\pi_{ij} = -\frac{\partial f}{\partial u_{ij}} = \frac{\mathcal{B}}{\xi} \Delta^{\frac{3}{2}} \left( \left( \xi + \frac{u_s^2}{2\Delta^2} \right) \delta_{ij} - 2 \frac{u_{ij}^0}{\Delta} \right), \quad (3.2.5)$$

die nicht mit der Impulsstromdichte  $\sigma_{ij}$  zu verwechseln sind. Insbesondere gilt dann  $\pi_{ll} = 3\frac{\mathcal{B}}{\xi}\Delta^{\frac{3}{2}}\left(\xi + \frac{u_s^2}{2\Delta^2}\right)$  und  $\pi_{ij}^0 = -2\frac{\mathcal{B}}{\xi}\Delta^{\frac{1}{2}}u_{ij}^0$ . Die genaue Form von  $f_0$  und  $f_1$  aus (3.2.1) ist für diese Arbeit nicht relevant.

Die Spezifizierung der Transportkoeffizienten beginnen wir mit  $\beta$  und  $\beta_1$  aus Gleichung (3.1.19). Wir machen für sie den Ansatz [19, 20]

$$\beta = \frac{\xi\lambda T_g}{2\mathcal{B}\sqrt{\Delta}} \quad \text{und} \quad \beta_1 = \frac{\xi\lambda_1 T_g}{3\mathcal{B}\sqrt{\Delta}\left(\xi + \frac{u_s^2}{2\Delta^2}\right)}. \quad (3.2.6)$$

Dadurch können wir die am Anfang des Kapitels erwähnten Relaxationszeiten (3.1.1) in der Bewegungsgleichung für die Verzerrungen (3.1.14) identifizieren. Es gilt  $\partial_t u_{ij} \sim X_{ij} \sim \beta\pi_{ij}^0 + \beta_1\pi_{ll}\delta_{ij} = \lambda_1 T_g \Delta \delta_{ij} - \lambda T_g u_{ij}^0 = \frac{1}{\tau_1} \Delta \delta_{ij} - \frac{1}{\tau} u_{ij}^0$  und daher

$$\tau^{-1} = \lambda T_g \quad \text{und} \quad \tau_1^{-1} = \lambda_1 T_g. \quad (3.2.7)$$

Die Wahl (3.2.6) bewirkt also, dass der Spurteil bzw. der spurlose Teil innerhalb typischer Zeiten  $\tau_1$  und  $\tau$  verschwinden, die invers proportional zur granularen Temperatur sind. Für verschwindende granulare Temperatur  $T_g \rightarrow 0$  divergieren die Relaxationszeiten, die Materie wird fest. Diese Variabilität der Relaxationszeiten ist es, die den Unterschied zwischen polymerem und granulearem Verhalten ausmacht.

Wir verlangen ganz allgemein, dass bei verschwindender äußerer Anregung, also im Fall  $T_g \rightarrow 0$ , die Gleichungen der GSH-Theorie in die eines Festkörpers übergehen. Dies ist der Fall, wenn neben  $\beta$  und  $\beta_1$  auch  $\alpha$ ,  $\eta_g$ ,  $\zeta_g$  und  $\kappa_g$  in Gleichung. (3.1.17-3.1.21) mit  $T_g$  verschwinden. Für den Transportkoeffizient  $\alpha$  benutzen wir in dieser Arbeit

$$\alpha = \alpha_0 \frac{\tilde{T}}{1 + \tilde{T}}, \quad (3.2.8)$$

mit  $\tilde{T} = T_g/T_n$ , wobei die Parameter  $T_n$  and  $\alpha_0$  weitere Materialkonstanten sind. Im Limes großer granularer Temperaturen gilt  $\alpha = \alpha_0$ . Wie in der Arbeit [19] setzen wir  $3\zeta_g = \eta_g$  und

$$\eta_g = \eta_1 T_g, \quad (3.2.9)$$

sowie  $11\lambda_1 = \lambda$ , oder  $11\tau = \tau_1$ . Nach Wahl ist also die Relaxationsrate von Scherspannungen elf mal so groß als die von Normalspannungen. Die Abhängigkeit der granularen Scherviskosität von  $T_g$  erfolgte in der Form (3.2.9) bereits in den Arbeiten [45, 47]. Der Transportkoeffizient  $\gamma$  muss nicht notwendigerweise mit  $T_g$  verschwinden, da er zu gleichen Teilen  $\gamma T_g^2$  aber mit unterschiedlichem Vorzeichen in  $R$  und  $R_g$  auftaucht, vgl. (3.1.22,3.1.23) und so auf natürliche Weise verschwindet. Wir setzen, gemäß [20],

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 T_g \quad (3.2.10)$$

mit einem konstanten Term  $\gamma_0$ . Die Koeffizienten  $\beta^P$ ,  $\kappa$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  seien konstant, die granulare Wärmeleitfähigkeit wollen wir in dieser Arbeit vernachlässigen,  $\kappa_g = 0$ .

Damit ist die Spezifikation der Energiedichte und der Transportkoeffizienten abgeschlossen.

Fassen wir die Anzahl der Materialparameter zusammen. In den Ausdruck für die freie Energie (3.2.2) gehen die Gesamtsteifigkeit  $\mathcal{B}_0$  und eine dimensionslose Größe  $\xi$  ein, sowie die Dichten der zufällig dichtesten  $\rho_{cp}$  und losesten  $\rho_{lp}$  Packungen. In die Transportkoeffizienten gehen die zehn Größen  $\gamma_0, \gamma_1, \beta^P, \kappa, \eta, \zeta, \eta_1, \alpha_0, T_n$  und  $\lambda$  ein.

Die Materialparameter in der freien Energie sind für die reaktiven Eigenschaften des Materialverhaltens verantwortlich, die in den Transportkoeffizienten für die dissipativen. Der Transportkoeffizient  $\alpha$  bildet aber eine Ausnahme. Er geht nicht in den Ausdruck für die Gesamtentropieproduktion ein und muss daher als reaktiv bezeichnet werden.

Langsame Variablen wie hier  $T_g$  und  $u_{ij}$  existieren nur im Nichtgleichgewichtszustand. Solange sie aber relevant sind, behandeln wir sie wie echte hydrodynamische bzw. thermodynamische Variablen. Insbesondere sind etwa thermodynamische Stabilitätsbedingungen, die aus der konkreten Form der Energiedichte folgen, zu beachten.

# Kapitel 4

## Granulare Akustik

Die im letzten Kapitel vorgestellte hydrodynamische Theorie granularer Materie soll nun auf deren akustische Eigenschaften angewendet werden. Wir werden sehen, dass aus der Aufspaltung der Verzerrung in einen elastischen und plastischen Anteil, aus der mit dem elastischen verbundene Energie, sowie aus dem Konzept der Spannungsrelaxation und der granularen Temperatur, wichtige Merkmale der granularen Akustik folgen. Dazu gehören die spannungsinduzierte Anisotropie, die extrem starke Dämpfung und der sogenannte Softening-Effekt.

Aus der Bilanzgleichung der granularen Entropie lässt sich eine Gleichung für die Zeitentwicklung der granularen Temperatur ableiten. Diese ist für die Physik granularer Materie fundamental und soll als erstes in Abschnitt 4.1 separat betrachtet werden. Wir leiten dann in Abschnitt 4.2 aus dem Gleichungssystem (3.1.9-3.1.14) eine verallgemeinerte Wellengleichung ab. Diese verwenden wir, um experimentelle Befunde des elastischen und des einsetzenden plastischen Verhaltens granularer Materie zu interpretieren. Insbesondere zeigen wir in Abschnitt 4.5, dass die starke Anisotropie spannungsinduziert ist und in Abschnitt 4.4, dass der starken Dämpfung ein nicht-viskoser, mit der granularen Temperatur verbundener, Mechanismus zugrunde liegt.

### 4.1 Die Zeitentwicklung der granularen Temperatur

Beginnen wir mit der Bilanzgleichung der granularen Entropie (3.1.13) in der Form

$$T_g (\partial_t s_g + \nabla_i (s_g v_i - \kappa_g \nabla_i T_g)) = R_g = -\gamma T_g^2 + \zeta_g v_{ll}^2 + \eta_g v_s^2 + \kappa_g (\nabla_i T_g)^2, \quad (4.1.1)$$

wobei  $v_s^2 = v_{ij}^0 v_{ij}^0$  wiederum das Quadrat des spurlosen Teils sein soll. Wir vernachlässigen die Diffusion granularer Temperatur  $\kappa_g = 0$  als einen gegenüber der Schallausbreitung langsamen Prozess und konzentrieren uns auf sinusförmige Scherwellen der Form  $v_x = v_x(y)$ , für die Ableitungen der Form  $v_i \nabla_i \equiv 0$  verschwinden, so dass sich obige Gleichung auf die gewöhnliche Differentialgleichung  $\rho T_g \partial_t \sigma_g = -\gamma T_g^2 + \eta_g v_s^2$  für die Entropie pro Masseneinheit  $\sigma_g = s_g / \rho = b T_g$  reduziert. Die letzte Gleichheit

folgt aus der expliziten Form der Energie  $f_2$  in (3.2.4). Verwenden wir nun noch die Abhängigkeit der Transportkoeffizienten  $\eta_g$  und  $\gamma$  von  $T_g$  wie durch (3.2.9) und (3.2.10) gegeben, so erhalten wir für die Zeitentwicklung der granularen Temperatur eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung, die die Zeitentwicklung der granularen Temperatur bei Schallanregung beschreibt,

$$\partial_t T_g = \frac{1}{\rho b} \left( -(\gamma_0 + \gamma_1 T_g) T_g + \eta_1 v_s^2 \right). \quad (4.1.2)$$

Wir betrachten als einfaches Beispiel eine in y-Richtung laufende elastische Scherwelle der Frequenz  $\omega$ , wie wir sie in Abschnitt 4.5.1 betrachten. Sie hat den Geschwindigkeitsgradienten  $v_{xy} = A \sin(\omega t + ky_0 + \phi)$ , alle anderen Komponenten verschwinden  $v_{ij} = 0$ , für  $i, j \neq x, y$ . Für die Amplitude  $A$  gilt  $A = U_0 \omega k = U_0 \omega^2 / c$ , wobei  $U_0$  die Anregungsamplitude gemessen in Metern, sowie  $c$  die Schallgeschwindigkeit ist.  $A$  ist dabei eine Scherrate der Dimension  $s^{-1}$ . Der Skalar  $v_s^2$  ist in diesem Fall

$$v_s^2 = 2v_{xy}^2 = 2A^2 \sin^2 \omega t = A^2 (1 - \cos 2\omega t),$$

für ein geeignetes  $\phi$  und der volumetrische Anteil  $v_{ll} = 0$  verschwindet. Unter diesen Voraussetzungen ergibt die Lösung von Gleichung (4.1.2) die Zeitentwicklung der granularen Temperatur beim Durchgang einer Schallwelle durch ein granulares Medium. Sie ist in Anhang C.2 explizit dargestellt und durch eine Kombination von Mathieu-Funktionen gegeben (C.2.3). Wir erhalten folgendes Verhalten. Ist das Medium anfangs mit  $T_g(0) = 0$  in Ruhe, so steigt die granulare Temperatur innerhalb der Zeit  $z = \frac{2\tau_T}{\sqrt{1+(2A\tau_A)^2}}$  auf den Saturationswert  $T_g^{sat} = \frac{1}{2} \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \left( \sqrt{1 + (2A\tau_A)^2} - 1 \right)$ , wie in Abbildung C.2.1 dargestellt, an.  $\tau_T = \frac{\rho b}{\gamma_0}$  und  $\tau_A = \frac{\sqrt{\gamma_1 \eta_1}}{\gamma_0}$  sind charakteristische Zeiten, deren Bedeutung i.F. klar wird.

Die granulare Temperatur  $T_g$  quantifiziert die Abweichung vom thermodynamischen Gleichgewicht. Sind die Scherraten klein, was wir mittels

$$A \ll \frac{1}{2\tau_A} \quad (4.1.3)$$

annehmen, bleibt auch die Abweichung vom Gleichgewicht und somit die Temperatur  $T_g$  klein. Wir können dann den Term  $\sim \gamma_1 T_g^2$  in Gleichung (4.1.2) in guter Näherung vernachlässigen, s. Anhang C.2. Die Gleichung wird dadurch linear und somit analytisch lösbar. Gehen wir wieder von einem ruhenden Medium  $T_g(0) = 0$  aus, so ist die Lösung durch

$$T_g = T_{sat} \frac{1}{1 + 4(\omega\tau_T)^2} \left( 1 - \cos 2\omega t - 2\omega\tau_T \sin 2\omega t + 4(\omega\tau_T)^2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_T}} \right) \right) \quad (4.1.4)$$

mit  $T_{sat} = \frac{\eta_1}{\gamma_0} \cdot A^2$  gegeben. Den zeitlichen Verlauf für die normierte granulare Temperatur zeigt Abbildung 4.1.1 für die für Schallwellen typischen Frequenzen

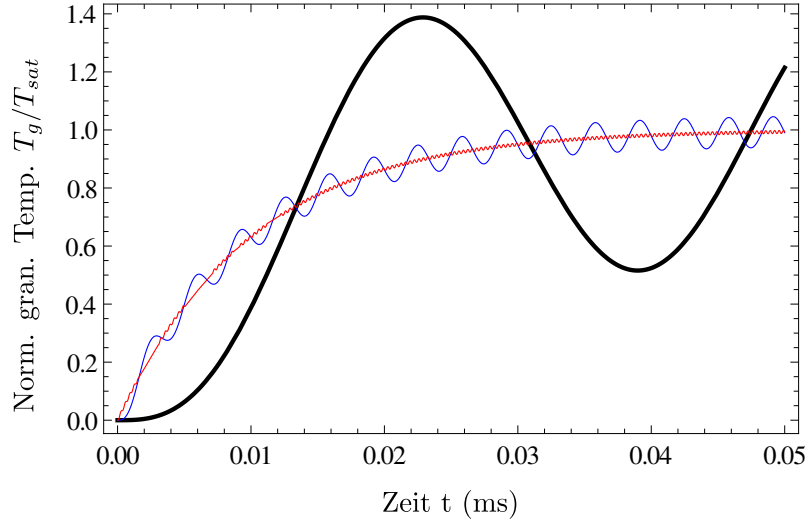


Abbildung 4.1.1: Zeitentwicklung der granularen Temperatur Gleichung. (4.1.4) mit  $T_g(0) = 0$  für drei verschiedene äußere Frequenzen,  $\omega = \frac{1}{10}2\pi 150$  kHz,  $\omega = 2\pi 150$  kHz,  $\omega = 10 \cdot 2\pi 150$  kHz und  $\tau_T = 10^{-5}$  s, sodass  $\omega\tau_T \approx 1$  (schwarz),  $\omega\tau_T \approx 10$  (blau) und  $\omega\tau_T \approx 100$  (rot).

$\omega \in \{\frac{1}{10}, 1, 10\} \cdot 2\pi 150$  kHz, sowie  $\tau_T = 10^{-5}$  s. Für kleine Frequenzen folgt die granuläre Temperatur in Amplitude und Phase der angelegten äußeren Frequenz, für große hingegen ist ein exponentieller Anstieg innerhalb der Zeit  $\tau_T$  zu beobachten und für moderate Frequenzen sehen wir einen sinusförmig modulierten Anstieg. Dasselbe prinzipielle Verhalten zeigt auch die Lösung der nichtlinearen Gleichung (4.1.2), vgl. Abbildung C.2.1. Wir wollen in dieser Arbeit aber den Übergang vom elastischen zum teilweise plastischen Verhalten granularer Materie beschreiben. Für kleine Scherraten im oben definierten Sinn dürfen wir uns also auf die lineare  $T_g$ -Gleichung und ihre analytische Lösung beschränken. Der Übergang in den voll plastischen Bereich erfordert dann die Behandlung der nichtlinearen  $T_g$ -Gleichung.

## 4.2 Verallgemeinerte Wellengleichung

In der gewöhnlichen Fluiddynamik wird die Wellengleichung aus der Kombination von Massen- und Impulserhaltung abgeleitet [25], in elastischen Festkörpern aus der Impulserhaltung und einer Bewegungsgleichung für das Verschiebungsfeld [26, 48]. Wir beschreiten aber einen dritten Weg, da sich in relaxierenden Medien, zu denen auch granulare Materie gehört, das Verzerrungsfeld nicht mehr auf Verschiebungen zurückführen lässt, vgl. Abschnitt 2.6. Da wir außerdem die Variable  $\rho$  für die Packungsdichte reservieren wollen, die sich bei Wellenausbreitung in granularer Materie nur langsam ändert, kombinieren wir die Bewegungsgleichung der Verzerrungen mit der Impulserhaltung und der Gleichung für die granuläre Temperatur.

Unser Ziel ist die Beschreibung der Ausbreitung von Schallwellen im oder nahe am elastischen, dissipationslosen Bereich. Um Materialkennwerte für granulares Material mit akustischen Methoden zu erhalten, wird das Material üblicherweise in einem Gefäß und Druck gesetzt und anschließend beschallt. Typische Werte für die statischen Verzerrungen in solchen Experimenten sind  $u_{0,ij} \approx 10^{-4}$ , die dynamische Anregung findet dann bei  $u_{ij} \lesssim 10^{-4}$  statt, Frequenzen sind von der Größenordnung einiger hundert kHz, die Ausbreitungsgeschwindigkeit variiert zwischen  $400 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $800 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . In diesem Wertebereich sind die relevanten reaktiven Terme in der Impulsstromdichte  $\sigma_{ij}$  (3.1.15) die elastischen Spannungen  $\pi_{ij}$ , die anderen sind um mindestens einen Faktor zehn kleiner und wir dürfen sie vernachlässigen. In gleicher Näherung vernachlässigen wir auch die konvektiven Anteile  $\sim v_k \nabla_k u_{ij}$  und  $u_{ik} \nabla_j v_k$  in der Bewegungsgleichung für die Verzerrungen (3.1.14) in den folgenden Kapiteln.

Verzichten wir im Moment auf die Einbeziehung der linear dissipativen Anteile der Impulsstromdichte, Terme mit  $\sim \eta, \zeta$ , sowie die Leerstellendiffusion  $\sim \beta^P$ , führt die Kombination der Impulserhaltung (3.1.10) mit der Bewegungsgleichung für die Verzerrungen (3.1.14) zusammen mit den Transportkoeffizienten (3.2.6) auf die verallgemeinerte Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_{ih} + \lambda \partial_t \left( T_g \left( u_{ih}^0 - \frac{\tau}{\tau_1} \Delta \delta_{ih} \right) \right) \\ + \left[ \frac{(1-\alpha)^2}{2\rho_0} (N_{ijklmn} (\partial_j u_{kl}) \partial_h u_{mn} + M_{ijkl} \partial_h \partial_j u_{kl}) \right] + [i \leftrightarrow h] = 0 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

für das Verzerrungsfeld  $u_{ih}$ , wobei  $M_{ijkl} = \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial u_{kl}}$  und  $N_{ijklmn} = \frac{\partial^2 \pi_{ij}}{\partial u_{kl} \partial u_{mn}}$ . Die Schreibweise  $[i \leftrightarrow h]$  bedeutet die Wiederholung des vorangehenden Terms mit vertauschten freien Indizes  $i, h$ . Die reaktiven Eigenschaften werden durch die Tensoren  $M$  und  $N$  bestimmt, das Dämpfungsverhalten folgt aus dem Term  $\sim T_g$ . Die granulare Temperatur wiederum koppelt an die Geschwindigkeitsgradienten  $v_{ij}$  und somit an das Verzerrungsfeld  $u_{ij}$ . Es existiert also eine Kopplung, so dass die Zeitentwicklung der granularen Temperatur simultan gelöst werden muss. Für kleine Geschwindigkeitsgradienten im Sinne von Abschnitt 4.1, also unter Vernachlässigung des Terms  $\sim \gamma_1$ , wäre das

$$\partial_t T_g = -\frac{1}{\rho b} \left( \gamma_0 T_g - \eta_1 \left( v_s^2 + \frac{\zeta_1}{\eta_1} v_u^2 \right) \right), \quad (4.2.2)$$

wobei

$$v_s^2 = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \left( (\partial_t u_{ij}^0)^2 + \lambda^2 T_g^2 u_s^2 + \lambda T_g \partial_t u_s^2 \right) \quad (4.2.3)$$

$$v_u = -\frac{1}{(1-\alpha)} \left( \partial_t \Delta + 3\lambda \frac{\tau}{\tau_1} T_g \Delta \right), \quad (4.2.4)$$

mit  $v_{ij}^0 = \frac{1}{(1-\alpha)} (\partial_t u_{ij}^0 + \lambda T_g u_{ij}^0)$ . Die Gleichungen (4.2.1) und (4.2.2) bilden dann ein gekoppeltes partielles Differentialgleichungssystem in den Variable  $T_g$  und  $u_{ij}$ .



Bevor wir diesen Satz von Gleichungen lösen, geben wir aber ein Kriterium für die Existenz von Schall. Propagation ist möglich, solange der reaktive Teil der Bewegungsgleichung für die Verzerrungen viel größer ist als der dissipative. Aus (3.1.14) und (3.2.7) lesen wir dafür die Bedingung  $|\partial_t u_{ij}| \gg |\lambda T_g u_{ij}|$  ab. Bei kleinen Scherraten, s. Gleichung (4.1.3),  $\frac{U_0 \omega^2}{c} = A \ll \frac{1}{2\tau_A}$  erreicht die granulare Temperatur höchstens den Sättigungswert  $T_{sat} = \frac{\eta_1}{\gamma_0} \cdot A^2$ , so dass wir für die Existenz von Schall daraus die Bedingung

$$X := \frac{\lambda \eta_1 U_0^2 \omega^3}{\gamma_0 c^2} \ll 1 \quad (4.2.5)$$

ableiten können. Je kleiner also die Amplitude  $U_0$  und Frequenz  $\omega$  der Schallwelle, desto leichter propagiert diese.

Wir versuchen nun einen Störungsansatz für kleine, aber endliche Schallamplituden und folgen Nayfeh und Mook [49], indem wir der Übersichtlichkeit halber einen kleinen Parameter  $\epsilon$  einführen und die Verzerrungen in der Form

$$u_{ij} = u_{0,ij} + \epsilon u_{1,ij} + \epsilon^2 u_{2,ij} + O(\epsilon^3)$$

entwickelt darstellen, analog für  $T_g$ . Wir denken hier beim Term nullter Ordnung in  $\epsilon$  an das statische Verzerrungsfeld in akustischen Experimenten, mit dem das granulare Material vorkomprimiert wird. In erster Ordnung erhalten wir aus der verallgemeinerten die vollelastische lineare Wellengleichung

$$\partial_t^2 u_{1,ih} + \left[ \frac{(1-\alpha)^2}{2\rho_0} (M_{0,ijkl} \partial_h \partial_j u_{1,kl}) \right] + \left[ i \leftrightarrow h \right] = 0 \quad (4.2.6)$$

Der Tensor  $M_{0,ijkl}$  bestimmt dabei die Symmetrieeigenschaften bei Schallausbreitung. Dies wird in Abschnitt 4.5 genauer diskutiert. Die  $T_g$ - Gleichung liefert erst in zweiter Ordnung den physikalisch relevanten Beitrag

$$\partial_t T_{g2} = -\frac{1}{\rho b} \left( \gamma_0 T_{g2} - \frac{\eta_1}{(1-\alpha)^2} \left( (\partial_t u_{1,ij}^0)^2 + \frac{\zeta_1}{\eta_1} (\partial_t \Delta_1)^2 \right) \right). \quad (4.2.7)$$

$u_{1,ij}^0$  und  $\Delta_1$  sind die Lösungen der Wellengleichung erster Ordnung (4.2.6), die die Zeitentwicklung von  $T_{g2}$  in zweiter Ordnung bestimmen. Für die Wellengleichung zweiter Ordnung wiederum erhalten wir

$$2\rho_0 \partial_t^2 u_{2,ih} + \left[ N_{0,ijklmn} (\partial_h u_{1,mn}) (\partial_j u_{1,kl}) + M_{1,ijkl} \partial_h \partial_j u_{1,kl} + M_{0,ijkl} \partial_h \partial_j u_{2,kl} \right] + \left[ i \leftrightarrow h \right] + 2\rho_0 \lambda \left[ \left( u_{0,im} + \left( \frac{1}{3} - \frac{\tau}{\tau_1} \right) \Delta_0 \delta_{im} \right) \partial_t T_{g2} \right] = 0. \quad (4.2.8)$$

Darin sind die Tensoren  $N_0$  und  $M_1$  Terme der entsprechenden Entwicklung  $M = M_0 + \epsilon M_1 + \epsilon^2 M_2$ , bzw.  $N = N_0 + \epsilon N_1 + \epsilon^2 N_2$ . Sie sind nichtlineare elastische Korrekturen die die Berechnung von Harmonischen erlauben, wie sie tatsächlich in der Arbeit

[13] beobachtet wurden. Unser Hauptanliegen ist aber die Interpretation der extrem starken Dämpfung von Schall in granularer Materie. Diese sollte im Prinzip über den Term  $\sim \partial_t T_{g2}$  möglich sein, der via (4.2.7) gegeben ist. Zusammen mit Gleichung (4.2.7) ist (4.2.8) eine inhomogene Wellengleichung mit periodischer Inhomogenität, da die Lösung erster Ordnung beispielsweise stehende Wellen  $\sim \sin(\omega t) \cos(kx)$  sind, die zu einem periodischen  $T_g$  führen. Die Lösung der Wellengleichung zweiter Ordnung ist ebenfalls periodisch, wenn auch gestört, zeigt aber keine Dämpfung.

Der reguläre Störungsansatz lieferte zwar die linearen elastischen Gleichungen, kann aber die Dämpfung nicht abbilden. Wir gehen deshalb einen anderen Weg und lösen die nichtlineare Wellengleichung numerisch. Der Einfachheit halber vernachlässigen wir alle nichtlinearen elastischen Korrekturen der Ordnung  $\epsilon$ . Sie führen wie bereits erwähnt zur Erzeugung von Harmonischen. Wir lösen also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_{ih} + \lambda \partial_t \left( T_g \left( u_{ih}^0 - \frac{\tau}{\tau_1} \Delta \delta_{ih} \right) \right) + \left[ \frac{(1-\alpha)^2}{2\rho_0} (M_{0,ijkl} \partial_h \partial_j u_{kl}) \right] + \left[ i \leftrightarrow h \right] &= 0 \\ \partial_t T_g &= -\frac{1}{\rho_0 b} \left( \gamma_0 T_g - \eta_1 \left( v_s^2 + \frac{\zeta_1}{\eta_1} v_u^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

zusammen mit (4.2.3,4.2.4). Die Steifigkeiten  $M_{0,ijkl}$  sind um den Faktor  $(1-\alpha)^2$  reduziert. Damit können wir den in der Bodenmechanik bekannten Softening-Effekt erklären. Dieser wird in Abschnitt 4.4.3 behandelt, vernachlässigen  $\alpha$  zum jetzigen Zeitpunkt aber.

### 4.2.1 Numerische Lösungen eines eindimensionalen Falles

Im eindimensionalen Fall einer Kompressionsmode  $u_{xx}(x) \equiv u$  entlang  $x$  reduziert sich das Gleichungssystem auf

$$0 = \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u + \lambda c_6 \partial_t (T_g u) \quad (4.2.10)$$

$$\partial_t T_g = -\frac{1}{\rho_0 b} \left( \gamma_0 T_g - c_9 \eta_1 (\partial_t u)^2 - c_7 \eta_1 \lambda^2 T_g^2 u^2 - c_8 \eta_1 \lambda T_g \partial_t u^2 \right). \quad (4.2.11)$$

Dabei werden zur Abkürzung  $c^2 = \frac{|M_{0,xxxx}|}{\rho_0}$ ,  $c_6 = \frac{2}{3} + \frac{\tau}{\tau_1}$ ,  $c_9 = \frac{2}{3} + \frac{\zeta_1}{\eta_1}$ ,  $c_7 = \frac{2}{3} + 9 \frac{\zeta_1}{\eta_1} \frac{\tau^2}{\tau_1^2}$  und  $c_8 = \frac{2}{3} + 3 \frac{\zeta_1}{\eta_1} \frac{\tau}{\tau_1}$  eingeführt. Wir normieren das Gleichungssystem mittels

$$\bar{u} = \frac{u}{\psi}, \quad \bar{T} = \frac{T_g}{T_{sat}}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\nu}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\mu}, \quad (4.2.12)$$

wobei  $\psi = \frac{U_0 \omega}{c}$ ,  $T_{sat} = A^2 \frac{\eta_1}{\gamma_0}$ ,  $\nu = \frac{1}{\omega}$  und  $\mu = \frac{c}{\omega}$  und erhalten

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{t}}^2 \bar{u} - \partial_{\bar{x}}^2 \bar{u} + c_6 X \partial_{\bar{t}} (\bar{T} \bar{u}) &= 0 \\ \partial_{\bar{t}} \bar{T} + \frac{1}{\rho_0 b} \frac{\gamma_0}{\omega} \left( \bar{T} - c_9 (\partial_{\bar{t}} \bar{u})^2 - c_8 X \bar{T} \partial_{\bar{t}} \bar{u}^2 - c_7 X^2 \bar{T}^2 \bar{u}^2 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Der Parameter  $X$  ist der Kleinheitsparameter aus (4.2.5),  $X = \frac{\lambda \eta_1}{\gamma_0} \frac{U_0^2 \omega^3}{c^2}$ . Im Grenzfall  $X \rightarrow 0$  reduziert sich obiges Gleichungssystem auf das entkoppelte

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{t}}^2 \bar{u} - \partial_{\bar{x}}^2 \bar{u} &= 0 \\ \partial_{\bar{t}} \bar{T} + \frac{1}{\rho_0 b} \frac{\gamma_0}{\omega} (\bar{T} - c_9 (\partial_{\bar{t}} \bar{u})^2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Die erste Gleichung ist die gewöhnliche Wellengleichung, die zweite die granulare Temperatur die durch die periodischen Lösungen der ersten erzeugt wird. Im Grenzfall sehr kleiner Anregungsamplituden  $U_0$ , also  $X \rightarrow 0$ , ist elastische ungedämpfte Schallausbreitung möglich, da die erzeugte Temperatur nicht mehr an die elastische Wellengleichung koppelt. Dies ist letztlich ein Resultat der genauen Abhängigkeit der Transportkoeffizienten von  $T_g$ , vgl. dazu Anhang D. Nahe am elastischen Limit können wir sicherlich den Term  $\sim X^2$  vernachlässigen. Mit  $\tau_T = \rho b / \gamma_0$  haben wir also

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{t}}^2 \bar{u} - \partial_{\bar{x}}^2 \bar{u} + c_6 X \partial_{\bar{t}} (\bar{T} \bar{u}) &= 0 \\ \partial_{\bar{t}} \bar{T} + \frac{1}{\omega \tau_T} (\bar{T} - c_9 (\partial_{\bar{t}} \bar{u})^2 - c_8 X \bar{T} \partial_{\bar{t}} \bar{u}^2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Wir wollen nun das abgeleitete Wellengleichungssystem (4.2.15) für zwei unterschiedliche experimentelle Situationen lösen, nämlich stehende Wellen und propagierende Schallpulse. Da wir es mit einer nichtlinearen Wellengleichung zu tun haben, wird die Dämpfung von Amplitude und Frequenz der Schallwelle abhängen. Uns interessiert dabei das genaue Skalierungsverhalten.

Wir beginnen mit stehenden Wellen. Steifigkeit und Dämpfung von granularer Materie kann in sogenannten Resonanzsäulenexperimenten bestimmt werden [50–52]. Üblicherweise sind es erzwungene oder frei zerfallende Torsionsschwingungen. Im ersten Fall wird ein Amplituden-Frequenz-Spektrum aufgenommen und aus der Breite der Resonanzkurve die Dämpfung ermittelt, im zweiten Fall aus dem Verhältnis aufeinander folgender Amplituden. In beiden Fällen können sowohl Umgebungsdruck also auch Amplitude variiert werden. Frequenz und Amplitude gehen in unsere Theorie über die Parameter  $\omega$ ,  $\tau_T$  und  $X$  ein.

Für die stehende Welle benutzen wir die Randbedingungen  $\bar{u}(0, \bar{t}) = \bar{u}(2\pi, \bar{t}) = 0$  und  $\bar{T}(0, \bar{t}) = \bar{T}(2\pi, \bar{t}) = 0$ . Die Anfangsbedingungen seien  $\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}_0) = \sin \bar{x}$ ,  $\partial_{\bar{t}} \bar{u}(\bar{x}, \bar{t}_0) = 0$  und  $\bar{T}(\bar{x}, \bar{t}_0) = 0$ . Sie stehen für das Loslassen eines anfangs in der Grundschwingung gespannten Materials mit offenen Enden. Eine verschwindende Verzerrung an den Rändern entspricht dabei über die Spannungs-Verzerrungs-Relation (3.2.5) einer verschwindenden Spannung. Dies entspricht der Situation in Resonanzsäulenexperimenten.

Abbildung 4.2.1 zeigt die Maximalamplitude dieser stehenden Welle als Funktion der Zeit für  $\omega \in \{50, 100, 150, 200, 250\} \cdot 2\pi 10^3$  kHz von oben links nach unten links. Das letzte Bild unten rechts zeigt für die fünf vorhergehenden Frequenzen die Anzahl der Perioden, nach denen die Amplitude auf die Hälfte abgefallen ist. Wir

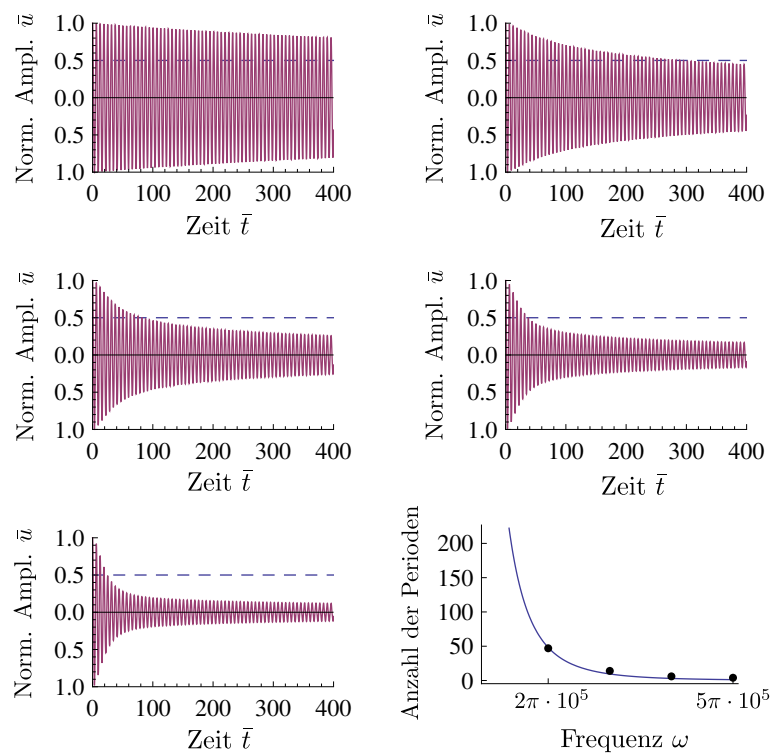


Abbildung 4.2.1: Amplitude einer stehenden Wellen als Funktion der Zeit für unterschiedliche Frequenzen  $\omega$ . Genauer  $50, 100, 150, 200$  und  $250 \cdot 2\pi 10^3$  kHz von oben links nach unten links. Unten rechts ist die Anzahl der Perioden für diese Frequenzen aufgetragen, nach denen die Amplitude auf die Hälfte abgefallen ist. Sie folgt einer  $\omega^{-4}$ - Abhängigkeit. Die Dämpfung skaliert also mit der vierten Potenz der Frequenz.

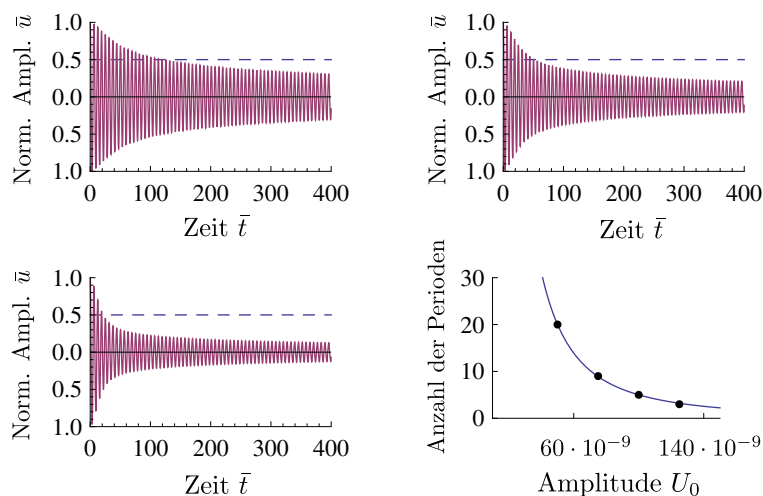


Abbildung 4.2.2: Amplitude einer stehenden Wellen als Funktion der Zeit für unterschiedliche Anfangsamplituden  $U_0$ . Genauer 50, 75 und 125 nm von oben links nach unten links. Unten rechts ist die Anzahl der Perioden aufgetragen, nach denen die Amplitude auf die Hälfte abgefallen ist. Sie folgt einer  $U_0^{-2}$ - Abhängigkeit. Die Dämpfung skaliert also quadratisch mit der Anfangsamplitude.

erkennen in der durchgezogenen Kurve eine  $\omega^{-4}$  Abhängigkeit. Die Halbwertszeit für die Anfangsamplitude ist ein direktes Maß für die Dämpfung. Sie skaliert offenbar mit der vierten Potenz der Frequenz.

Entsprechend zeigt Abbildung 4.2.2 den Zerfall der Amplitude als Funktion der Anfangsamplitude für 50, 75 und 125 nm von oben links nach unten links. Das letzte Bild unten rechts zeigt wiederum die Anzahl der Perioden, nach denen die Amplitude auf die Hälfte abgefallen ist. Die durchgezogene Kurve zeigt eine  $U_0^{-2}$ - Abhängigkeit, die Dämpfung skaliert also offenbar quadratisch in der Amplitude  $U_0$ .

Zu bemerken ist, dass die Amplitude nicht exponentiell sondern algebraisch  $\sim 1/(1 + \bar{t})$  zerfällt. Dies beeinflusst jedoch nicht das gefundene Skalierungsverhalten der Dämpfung mit  $\omega^4$  und  $U_0^2$ .

In Bezug auf die Resonanzsäulenexperimente würde dies bedeuten, dass die Spitzenamplituden der höheren Harmonischen entsprechend  $\omega^4$  schneller zerfallen müssten. Es wäre interessant dies experimentell zu überprüfen.

Kommen wir nun zu den Schallpulsen. Sie werden zur Bestimmung der Materialeigenschaften von granularer Materie häufig eingesetzt. Dabei wird das Frequenzspektrum eines Wellenzugs vor dem Durchgang durch granulare Materie mit dem aufgezeichneten verglichen [13]. Auffällig ist die extrem starke Dämpfung. Ein anfangs um 500 kHz zentrierter Puls resultiert bereits nach wenigen Zentimetern in einem um 50 kHz zentrierten [53]. Wir betrachten nun das aus den GSH- Gleichun-

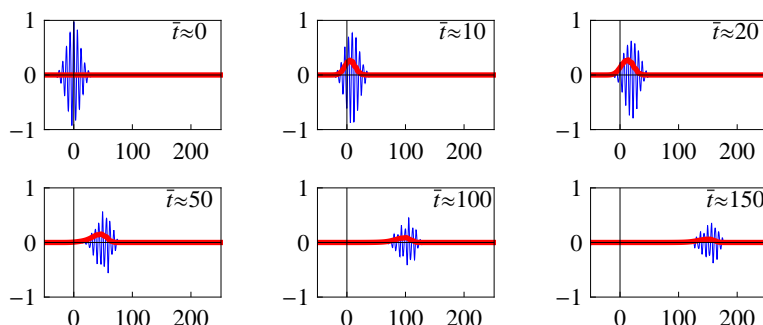


Abbildung 4.2.3: Wellenpaket in blau und induzierte granulare Temperatur  $T_g$  in rot zu verschiedenen Zeiten mit  $w_0 = 1$ ,  $\tilde{w} = \frac{1}{8}$ ,  $X = 0.12$  und  $\omega\tau_T = 10$ . Aufgetragen sind die normierten Amplituden  $\bar{u}$  und  $\bar{T}$ . Die Breite des Paketes entspricht ca.  $60 \mu\text{s}$ . Nach  $100 \mu\text{s}$  ist das Paket auf die Hälfte der Anfangsamplitude abgefallen.

gen abgeleitete Wellengleichungssystem (4.2.15) unter der Anfangsbedingung

$$u(\bar{x}, \bar{t}_0 = 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tilde{w}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{w-w_0}{\tilde{w}}\right)^2} e^{iw(\bar{x}-\bar{t})} dw \quad (4.2.16)$$

und  $\bar{T}(\bar{x}, t_0) = 0$ . Dabei ist  $w_0$  die Zentralfrequenz und  $\tilde{w}$  ein Maß für die Breite des Gaußschen Pulses. Die Abbildungen 4.2.3 bis 4.2.7 zeigen das Wellenpaket in blau wie es nach rechts propagiert und die induzierte granulare Temperatur in rot für unterschiedliche Materialparameter und Anfangsfrequenzen. Alle Kurven sind wie oben normiert,  $w_0 = 1$  entspricht der Frequenz  $\omega = 2\pi 150 \text{ kHz}$ . Die Zeit ist auf  $\omega$  normiert, sodass  $\bar{t} = 1$  etwa  $1 \mu\text{s}$  entspricht. Der Raum ist auf die Wellenzahl normiert, sodass  $\bar{x} = 1$  etwa einem Zentimeter entspricht. Abbildung 4.2.3 zeigt ein Referenzwellenpaket mit  $w_0 = 1$ ,  $\tilde{w} = \frac{1}{8}$ ,  $X = 0.12$  und  $\omega\tau_T = 10$ . Die normierte Schallgeschwindigkeit ist eins, sodass das Maximum des Pakets der verstrichenen Zeit in  $\mu\text{s}$  entspricht. Das Paket hat eine Breite von  $60 \mu\text{s}$  und fällt nach ca.  $100 \mu\text{s}$  auf die Hälfte der Ursprünglichen Stärke ab.

Die Abbildungen 4.2.4 und 4.2.5 zeigen Wellenpakete der halben und der doppelten Frequenz. Die Dämpfung des ersten ist sehr viel schwächer als die des Referenzpakets 4.2.3, die des zweiten mit der doppelten Frequenz sehr viel stärker. Die Dämpfung wird verursacht und begleitet von einem starken Anstieg der granularen Temperatur.

Als letztes untersuchen wir die Rolle des Parameters  $\tau_T$ . Wie uns aus Abschnitt 4.1 bekannt ist, bestimmt er die Zeit, die vergeht, ehe  $T_g$  bei einer schallartigen Anregung den Sättigungswert  $T_{sat}$  erreicht. Wir wählen  $\tau_T$  so, dass  $\omega\tau_T = 100$ , also zehn mal größer als im Referenzfall. Die Folge ist, dass das Wellenpaket nicht genug granulare Temperatur erzeugen kann um gedämpft zu werden. Dies ist in den Abbildungen 4.2.6 und 4.2.7 zu sehen. Obwohl der Dämpfungsparameter  $X$  in Abbildung 4.2.7 doppelt so groß ist wie in 4.2.6, beeinflusst das die Dämpfung kaum.

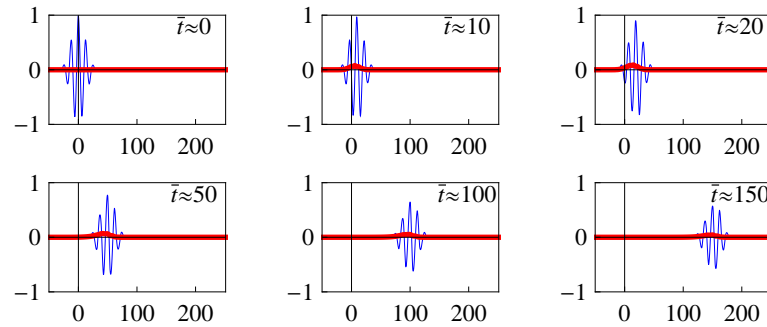


Abbildung 4.2.4: Wellenpaket in blau und induzierte granulare Temperatur  $T_g$  in rot zu verschiedenen Zeiten mit  $w_0 = \frac{1}{2}$ ,  $\tilde{w} = \frac{1}{8}$ ,  $X = 0.12$  und  $\omega\tau_T = 10$ . Aufgetragen sind die normierten Amplituden  $\bar{u}$  und  $\bar{T}$ . Die Breite des Paketes entspricht ca.  $60 \mu\text{s}$ , die Frequenz ist im Vergleich zum Referenzwellenpaket 4.2.3 um die Hälfte reduziert.

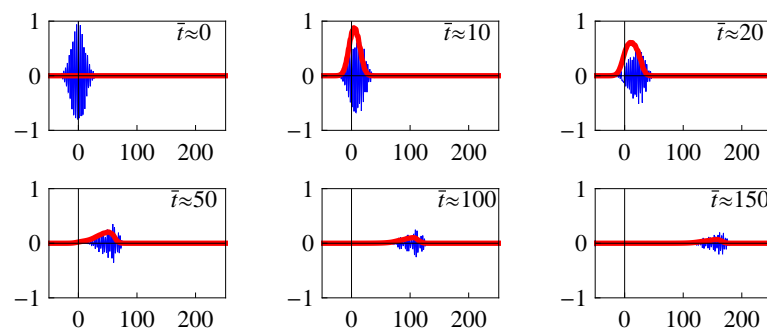


Abbildung 4.2.5: Wellenpaket in blau und induzierte granulare Temperatur  $T_g$  in rot zu verschiedenen Zeiten mit  $w_0 = 2$ ,  $\tilde{w} = \frac{1}{8}$ ,  $X = 0.12$  und  $\omega\tau_T = 10$ . Aufgetragen sind die normierten Amplituden  $\bar{u}$  und  $\bar{T}$ . Die Breite des Paketes entspricht ca.  $60 \mu\text{s}$ , die Frequenz ist im Vergleich zum Referenzwellenpaket 4.2.3 doppelt so groß.

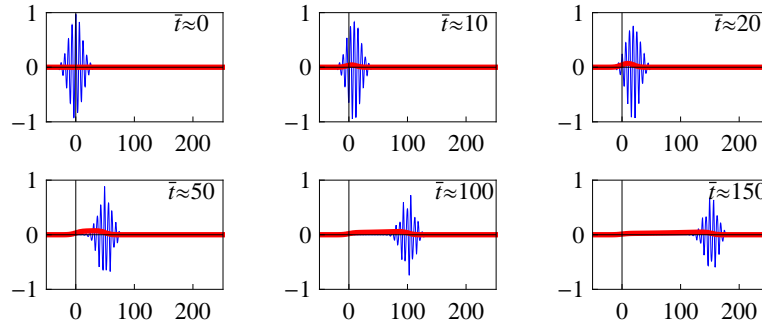


Abbildung 4.2.6: Wellenpaket in blau und induzierte granulare Temperatur  $T_g$  in rot zu verschiedenen Zeiten mit  $w_0 = 1$ ,  $\tilde{w} = \frac{1}{8}$ ,  $X = 0.12$  und  $\omega\tau_T = 100$ . Aufgetragen sind die normierten Amplituden  $\bar{u}$  und  $\bar{T}$ . Die Breite des Paketes entspricht ca.  $60 \mu\text{s}$ , die Anstiegszeit für  $T_g$  auf den Saturationswert  $T_{sat}$  ist im Vergleich zum Referenzwellenpaket 4.2.3 zehn mal so groß. Die Dämpfung bleibt auf niedrigem Niveau, da das Paket schneller durch das Medium propagiert als  $T_g$  angeregt werden kann.

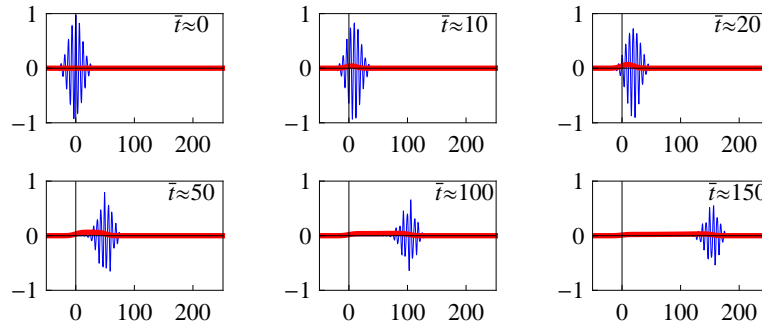


Abbildung 4.2.7: Wellenpaket in blau und induzierte granulare Temperatur  $T_g$  in rot zu verschiedenen Zeiten mit  $w_0 = 1$ ,  $\tilde{w} = \frac{1}{8}$ ,  $X = 0.24$  und  $\omega\tau_T = 100$ . Aufgetragen sind die normierten Amplituden  $\bar{u}$  und  $\bar{T}$ . Die Breite des Paketes entspricht ca.  $60 \mu\text{s}$ , die Anstiegszeit für  $T_g$  auf den Saturationswert  $T_{sat}$  ist im Vergleich zum Referenzwellenpaket 4.2.3 zehn mal so groß. Obwohl der Dämpfungsparameter  $X$  doppelt so groß ist wie für das Paket 4.2.6, bleibt die Dämpfung niedrig.



Selbst wenn Bedingung (4.2.5) für  $X$  verletzt wird, können Pulse genügend kurzer Zeitdauer dennoch propagieren. Ihre Dauer muss nur unter der Anstiegszeit  $\tau_T$  liegen. Der nichtlineare Term  $\sim X \partial_t (\bar{T}\bar{u})$  in (4.2.15) bleibt in diesem Fall klein, da  $\bar{T}$  es tut. Zu beachten ist, dass der Term  $\sim X^2$  in (4.2.13) nun nicht mehr vernachlässigt werden darf.

Wir haben in diesem Abschnitt eine verallgemeinerte nichtlineare Wellengleichung abgeleitet und numerisch behandelt. Wir beschränkten uns auf den eindimensionalen Fall und vernachlässigten reaktive Nichtlinearitäten. Wie wir in den folgenden Kapiteln sehen werden, kommt es in dreidimensionalen Systemen zu reaktiver und dissipativer Kopplung von Moden. Schallenergie kann also beispielsweise von Kompressions- in Schermoden übergehen, wodurch das Dämpfungsverhalten modifiziert wird. Die Erzeugung von Harmonischen führt dazu, dass Schallenergie außerdem in höhere Frequenzen transferiert wird. Als letztes sei daran erinnert, dass die anfangs des Kapitels vernachlässigten linearen Terme  $\sim \eta$  und  $\sim \beta^P$  natürlich zusätzlich zu Dispersion und damit zu einem Zerfließen des Wellenpakets führen.

Dies alles sind jedoch Korrekturen, die vom starken Dämpfungsmechanismus via  $T_g$  überlagert werden. Dieser führt dazu, dass die Dämpfung mit der vierten Potenz der Frequenz und quadratisch in der Amplitude skaliert.

### 4.3 Die granulare elastische Energie

Wir wollen in diesem Kapitel einige Eigenschaften der granularen Energiedichte  $\tilde{f}$  diskutieren, bevor wir mit der Schallpropagation fortfahren. Für moderate granulare Temperaturen dominiert der  $f_1$ - Term in der Energiedichte (3.2.2)

$$f_1 = \mathcal{B}\sqrt{\Delta} \left( \frac{2}{5}\Delta^2 + \frac{u_s^2}{\xi} \right). \quad (4.3.1)$$

Er ist eine Funktion der Verzerrungen und für die Speicherung elastischer Energie verantwortlich. Bei isotropen Systemen mit elastischer Energie darf der Energieausdruck eine beliebige Funktion der skalaren Invarianten des Verzerrungstensors  $u_{ij}$  sein. Diese sind [34]

$$I_u = \text{Tr } u_{ij} = u_1 + u_2 + u_3 = -\Delta \quad (4.3.2)$$

$$II_u = \frac{1}{2} ((\text{Tr } u_{ij})^2 - \text{Tr } u_{ij}^2) = u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = \frac{1}{3}\Delta^2 - \frac{1}{2}u_s^2 \quad (4.3.3)$$

$$III_u = \frac{1}{6} ((\text{Tr } u_{ij})^3 - 3\text{Tr } u_{ij}\text{Tr } u_{ij}^2 + 2\text{Tr } u_{ij}^3) = \det u = u_1u_2u_3. \quad (4.3.4)$$

Hierbei sind  $u_1$ ,  $u_2$  und  $u_3$  die Eigenwerte des Verzerrungstensors,  $\Delta$  die negative Spur  $\Delta = -\text{Tr } u_{ij}$  und  $u_s^2$  das Quadrat des spurlosen Teils  $u_s^2 = u_{ij}^0 u_{ij}^0$ . Skalare der Ordnung größer drei in  $u_{ij}$  können immer durch die drei Invarianten ausgedrückt werden. So ist etwa  $\text{Tr } (u_{ij})^4 = \frac{5}{9}\Delta^4 + \frac{3}{2}u_s^4 + 2\Delta^2\text{Tr } u^2 + \frac{4}{3}\Delta u_{III}^3 - \frac{4}{3}\text{Tr } u^2\Delta^2 + \frac{8}{27}\Delta^4$ .

Die Energie (4.3.1) hängt aber nur von den ersten beiden Invarianten, bzw. von  $\Delta$  und  $u_s$  ab, allerdings in nichtlinearer Form mit der Potenz  $\frac{5}{2}$ . Für kleine Verzerrungen, wie sie bei Granulaten aus Quarz immer vorliegen, ist  $\Delta$  ein Maß für die relative Volumenänderung einer Deformation und wird als Kompression bezeichnet,  $u_s^2$  ein Maß für die Stärke einer volumenlosen Deformation [48]. Der erste Summand  $\sim \Delta^{\frac{5}{2}}$  in der Energie ist auf die Hertzsche Pressung zurückzuführen [54]. Die Energie, die notwendig ist, um zwei sich in einem Punkt berührende Körper weiter anzunähern, skaliert mit der Potenz  $\frac{5}{2}$  in der zugehörigen Verschiebung  $U_i$ . Da Verzerrungen relative Verschiebungen sind und granulare Materie aus sich berührenden Körnern besteht, haben wir so eine gute mesoskopische Begründung für die Potenz  $\frac{5}{2}$ . Der zweite Summand  $\sim \sqrt{\Delta}u_s^2$  in (4.3.1) ist für die Speicherung von Energie bei volumenlosen Deformationen verantwortlich, allerdings nur bei von null verschiedener Kompression  $\Delta$ . Er hat zur Konsequenz, dass granulare Systeme bei Scherung immer expandieren [55].

Wie jede thermodynamische Energie muss auch die granulare Energie (4.3.1) eine konvexe Funktion ihrer Variablen sein [24]. Die Bedingung dafür ist die positive Definitheit der zugehörigen Hesse-Matrix. Sie führt auf die sogenannten thermodynamischen Stabilitätsbedingungen. Die Variablen sind im allgemeinen Fall anisotroper Systeme zunächst die Komponenten des Verzerrungstensors. Es genügt aber die Konvexität bzgl. der Eigenwerte zu fordern, da man immer o. B. d. A. in das lokale Hauptachsensystem transformieren kann. Stabilitätsbedingungen sind ja lokale Bedingungen. Für die Energie (4.3.1) führt das auf

$$\mathcal{B} > 0, \quad \xi > 0 \quad \text{und} \quad \frac{u_s^2}{\Delta^2} < 2\xi. \quad (4.3.5)$$

Interessanterweise können wir aber auch die Energie direkt als Funktion der Variablen  $\Delta$  und  $u_s$  ansehen, Stabilität bezüglich dieser Variablen führt auf die gleichen Bedingungen [18].

Durch die Energie (4.3.1) besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den elastischen Verzerrungen  $u_{ij}$  und den Spannungen  $\pi_{ij}$ , wie wir ihn bereits in Gleichung (3.2.5) angegeben haben. Innerhalb der Stabilitätsgrenzen (4.3.5) kann diese Spannungs-Verzerrungs-Relation umgekehrt werden [55]. Wir erhalten

$$u_{ij}^0 = -\frac{\pi_{ij}^0}{2\mu}, \quad \mu = \frac{\mathcal{B}}{\xi} \left( \frac{LP}{\mathcal{B}} \right)^{\frac{1}{3}} := -M_0, \quad 2L = 1 + \sqrt{1 - \frac{\xi}{2} \frac{\pi_s^2}{P^2}} \quad (4.3.6)$$

Durch die nichtlineare Form der Energie sind die Steifigkeiten  $M_{ijkl} = \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial u_{kl}} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial u_{ij} \partial u_{kl}}$  selbst vom momentanen Verzerrungszustand, bzw. von den äußeren Spannungen abhängig. Es gilt im Allgemeinen [55]

$$M_{ijkl} = \frac{\mathcal{B}}{\xi} \sqrt{\Delta} \left( \left( \frac{u_s^2}{4\Delta^2} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\xi \right) \delta_{ij}\delta_{kl} - (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{1}{\Delta} (u_{ij}\delta_{kl} + u_{kl}\delta_{ij}) \right). \quad (4.3.7)$$

Wechseln wir aber in das System in dem der Verzerrungstensor diagonal ist, können wir  $u_{ij} = u_{(i)}\delta_{ij}$  schreiben. Die Größen  $u_i$  sind die Eigenwerte. Die runden Klammern sollen hier und im Folgenden bedeuten, dass nicht über den doppelt auftretenden Index summiert wird. Der Steifigkeitstensor erhält dadurch die isotrope Form

$$M_{ijkl} = \frac{\mathcal{B}}{\xi} \sqrt{\Delta} \left( \left( \left( \frac{u_s^2}{4\Delta^2} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\xi \right) + \frac{1}{\Delta} (u_{(i)} + u_{(k)}) \right) \delta_{ij}\delta_{kl} - (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \right). \quad (4.3.8)$$

Drücken wir gemäß (4.3.6) die Verzerrungen durch ihre entsprechenden Spannungen aus, erhalten wir daraus [21]

$$M_{ijkl} = -M_0 (a_{(ik)}\delta_{ij}\delta_{kl} - (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})) \quad (4.3.9)$$

wobei  $a_{ik} = \left( \frac{\xi\pi_s}{4LP} \right)^2 + \frac{4-9\xi}{6} - \frac{\xi(\pi_i^0 + \pi_k^0)}{2LP}$  und  $\pi_i^0 = \pi_i - P\delta_{ij}$ . Die Größen  $\pi_i$  sind dabei die Hauptspannungen gemäß  $\pi_{ij} = \pi_{(i)}\delta_{ij}$ .

## 4.4 Granular gedämpfte Verzerrungswellen

Kehren wir nun zur Betrachtung des Wellengleichungssystems (4.2.9) zurück. Für den eindimensionalen Fall (4.2.15) hatten wir herausgearbeitet, dass die Dämpfung mit der vierten Potenz der Frequenz, sowie quadratisch in der Amplitude der Schallwelle skaliert. In diesem Abschnitt geben wir dreidimensionale analytische Lösungen der Wellengleichung (4.2.9) unter Verwendung einer effektiven granularen Temperatur. Wir finden dabei das gleiche Skalierungsverhalten.

### 4.4.1 Starke frequenz- und amplitudenabhängige Dämpfung

Wie wir in Abschnitt 4.1 diskutiert hatten, folgt die granuläre Temperatur  $T_g$  bei schallartigen Anregungen für kleine Frequenzen in Amplitude und Phase der Schallwelle und variiert dabei um den Wert  $T_{sat}$ . Für große aber folgt sie einem sinusförmig modulierten Anstieg auf denselben Wert  $T_{sat}$ , vgl. Abbildung 4.1.1. Ist  $\omega\tau_T \approx 10$ , so ist der Saturationswert nach nur zwei bis drei Schwingungen erreicht. Der Rest eines langen Wellenzugs oder eine kontinuierliche Schallwelle erfährt dann das Medium bei einer effektive granularen Temperatur  $T_{sat}$ . Wir können daher  $T_g$  im Wellengleichungssystem (4.2.9) als Parameter betrachten, dessen Stärke von Amplitude und Frequenz der erzeugenden Schallwelle abhängt. Wir setzen also  $T_g = T_{sat}$  und erhalten aus (4.2.9) die lineare Wellengleichung

$$\partial_t^2 u_{ih} + \frac{(1-\alpha)^2}{2\rho_0} (M_{0,ijkl}\partial_h\partial_j u_{kl} + M_{0,hjkl}\partial_i\partial_j u_{kl}) + \Lambda\partial_t \left( u_{ih}^0 - \frac{\tau}{\tau_1}\Delta\delta_{ih} \right) = 0, \quad (4.4.1)$$

wobei  $\Lambda = \lambda T_{sat}$ . Dies sind sechs Gleichungen für die sechs unbekanntenen Komponenten  $u_{ij}$ , die wir von nun an in einem Vektor zusammenfassen

$$u_{ij} = (u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{23}, u_{13}, u_{12}). \quad (4.4.2)$$

Die akustischen Eigenschaften granularer Materie werden in sog. Triaxialzellen vermessen. Dort wird sie komprimiert und der Druck in den drei Raumrichtungen nach Belieben eingestellt. Der Spannungszustand ist in diesen Versuchen homogen und so wählen wir der Einfachheit halber das Koordinatensystem derart, dass der zugehörige Spannungstensor diagonal ist  $\pi_{ij} = \pi_{(i)}\delta_{ij}$ . Die Komponenten  $M_{0,ijkl}$  des Steifigkeitstensors sind dann durch (4.3.9) gegeben.

Vernachlässigen wir  $\alpha$  für den Augenblick, erhalten wir für eine ebene Welle die entlang  $x$  propagiert zwei reine Schermoden  $u_{xz} = \bar{u}_{xz}(0, 0, 0, 0, 1, 0)$  und  $u_{xy} = \bar{u}_{xy}(0, 0, 0, 0, 0, 1)$  mit Dispersionsrelation  $k^2 = \frac{\rho\omega}{M_0}(i\Lambda - \omega)$ , wobei  $M_0 = -\frac{\mathcal{B}}{\xi} \left(\frac{LP}{\mathcal{B}}\right)^{\frac{1}{3}}$  und eine gekoppelte Kompressionsmode der Gestalt

$$u_{ij} = (u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{23}, u_{13}, u_{12}) e^{i(\omega t + kx)} = \bar{u}(\bar{z}, 1, 1, 0, 0, 0) e^{i(\omega t + kx)} \quad (4.4.3)$$

mit einer komplexen Amplitude  $\bar{z}$ , die zu einer Phasenverschiebung zwischen der  $u_{11}$ -Komponente und den Komponenten  $u_{22}$  und  $u_{33}$  führt. Diese letztere Mode wird im elastischen Bereich zur normalen Kompressionsmode für Verschiebungswellen, s. Kapitel 4.5. Die zugehörige Dispersionsrelation lautet

$$k^2 = \frac{3i\rho_0\omega(\Lambda + i\omega)\left(3\frac{\tau}{\tau_1}\Lambda + i\omega\right)}{M\Lambda + 3iM_{0,1111}\omega}, \quad (4.4.4)$$

wobei  $M = \left(1 + 6\frac{\tau}{\tau_1}\right)M_{0,1111} + \left(1 - 3\frac{\tau}{\tau_1}\right)(M_{0,1122} + M_{0,1133})$ . Solange die Dämpfung klein bleibt, gilt wie in Abschnitt 4.2  $X = \frac{U_0^2\omega^3}{c^2} \frac{\lambda\eta_1}{\gamma_0} \ll 1$ . Wir können in diesem Fall die Wellenzahl (4.4.4) nach Potenzen von  $X$  entwickeln. Für den Real- und Imaginärteil von  $k$  erhalten wir

$$\text{Re } k = \frac{\omega}{c} \left(1 + M_1 X^2 + O(X^4)\right) \quad (4.4.5)$$

$$\text{Im } k = \frac{\omega}{c} \left(M_2 X + O(X^3)\right), \quad (4.4.6)$$

wobei  $c = \sqrt{\frac{|M_{0,1111}|}{\rho_0}}$  und  $M_1 = \frac{1}{24} \left(3 \left(1 - 3\frac{\tau}{\tau_1}\right)^2 + 2 \left(1 + 3\frac{\tau}{\tau_1}\right) \frac{M}{M_{0,1111}} - \frac{M^2}{M_{0,1111}^2}\right)$ , sowie  $M_2 = -\frac{1}{6} \left(3 \left(1 + 3\frac{\tau}{\tau_1}\right) - \frac{M}{M_{0,1111}}\right)$ . Im elastischen, d. h. dissipationslosen Limit  $X \rightarrow 0$ , verschwindet der Imaginärteil und somit die Dämpfung, der Realteil reduziert sich auf die elastische Lösung  $\text{Re } k = \omega/c$ . Ferner erkennen wir, wenn wir  $X$  einsetzen, dass der Imaginärteil, d. h. die Dämpfung mit  $\omega^4$  und  $U_0^2$  skaliert. Wir erhalten also bzgl. Frequenz und Amplitude das gleiche Skalierungsverhalten wie in den numerischen Lösungen der nichtlinearen Wellengleichung aus Abschnitt 4.2.1.

Je kleiner Amplitude und Frequenz einer Schallwelle sind, desto mehr nähern wir uns dem elastischen Bereich. In diesem Grenzfall werden die bisher vernachlässigten newtonschen Viskositäten  $\eta$  und  $\zeta$  aus der Impulserhaltung (3.1.10) wichtig. Wir wollen ihren Einfluss hier zum späteren Abgleich mit experimentellen Daten

angeben. Anstatt der Wellengleichung (4.4.1) erhalten wir jetzt unter weiterer Vernachlässigung von  $\alpha$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_{ih} + \frac{1}{2\rho_0} \left( M_{0,ijkl} \partial_h \partial_j u_{kl} \right. \\ \left. - \eta \partial_h \partial_j \left( \partial_t u_{ij} + \Lambda u_{ij} + \left( \left( \frac{1}{3} - \frac{\zeta}{\eta} \right) \partial_t \Delta + \left( \frac{1}{3} - 3 \frac{\tau \zeta}{\tau_1 \eta} \right) \Lambda \Delta \right) \delta_{ij} \right) \right) \\ \left( i \leftrightarrow h \right) + \Lambda \partial_t \left( u_{ih}^0 - \frac{\tau}{\tau_1} \Delta \delta_{ih} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Für eine ebene Welle entlang  $x$  können wir in der Dispersionsrelation  $k = k(\omega)$  der Kompressionsmode  $u_{ij} \sim (\tilde{z}, 1, 1, 0, 0, 0)$  zwei kleine Parameter identifizieren, wie oben  $X$  und  $Y = \frac{1}{3} \left( 2 + 3 \frac{\zeta}{\eta} \right) \frac{\omega}{|M_{0,1111}|} \eta$ , nach denen wir die Wellenzahl entwickeln.  $Y$  skaliert linear mit der Frequenz  $\omega$ . Wir erhalten

$$\operatorname{Re} k = \frac{\omega}{c} \left( 1 - \frac{3}{8} Y^2 + \bar{M} X Y \right) + O(\omega^7) \quad (4.4.8)$$

$$\operatorname{Im} k = \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{2} Y - \frac{5}{16} Y^3 + M_2 X \right) + O(\omega^5), \quad (4.4.9)$$

mit  $\bar{M} = \frac{1}{4} \left( \frac{M}{M_{0,1111}} - 3 \left( \frac{\tau}{\tau_1} + 1 \right) - 6 \frac{\tau(2+\frac{\zeta}{\eta})}{2+3\frac{\zeta}{\eta}} \right)$ . Nur solange  $X$  und  $Y$  klein bleiben, bleibt es der Imaginärteil und Schallausbreitung ist möglich.

Wir wenden nun die gewonnenen Ergebnisse auf experimentelle Daten an, um die noch unbekanntes GSH-Parameter zu bestimmen. Es ist klar, dass wir experimentelle Resultate, bei denen Streuung überwiegt, nicht durch unsere Kontinuums- theorie interpretieren können. Wir achten darauf, dass die Wellenlänge den Korn- durchmesser um mindestens einen Faktor zehn übersteigt. In der Arbeit [13] wurde nichtlineare und dissipative Schallausbreitung an unter isotropem Druck stehenden Glaskugeln beobachtet. Die experimentellen Parameter waren wie folgt. Glaskugeln von 0,6 - 0,8 mm Größe wurden in einem Zylinder von 25-60 mm Durchmesser und 60 mm Höhe unter einen Druck von 720 kPa gesetzt. Der Volumenanteil der Glasku- geln betrug  $\varphi = 63\%$ , die Schallgeschwindigkeit wurde zu  $c = 900 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  bestimmt. Bei Frequenzen  $f$  zwischen 50 und 100 kHz betrug die Wellenlänge zwischen 6 und 18 mm, war dabei also stets um mindestens einen Faktor 10 größer als die Kugeldurch- messer, sodass wir unsere Kontinuumstheorie anwenden dürfen. Die Schallamplitude betrug  $U_0 = 60$  nm, was einer Verzerrung von  $2 \cdot 10^{-5}$  entspricht. Im Bereich zwi- schen 100-150 kHz stellten die Autoren nun tatsächlich fest, dass die Dämpfung mit  $\omega^4$  skaliert. Wie üblich ist  $\omega = 2\pi f$ . Darunter im Bereich 50-100 kHz fanden sie eine schwächere nahezu quadratische Abhängigkeit des Dämpfungskoeffizienten. Die quadratische Abhängigkeit können wir der normalen newtonschen Viskosität, also dem führenden Term in (4.4.9) zuschreiben, die starke  $\omega^4$ - Abhängigkeit dem granularen Dämpfungsmechanismus.

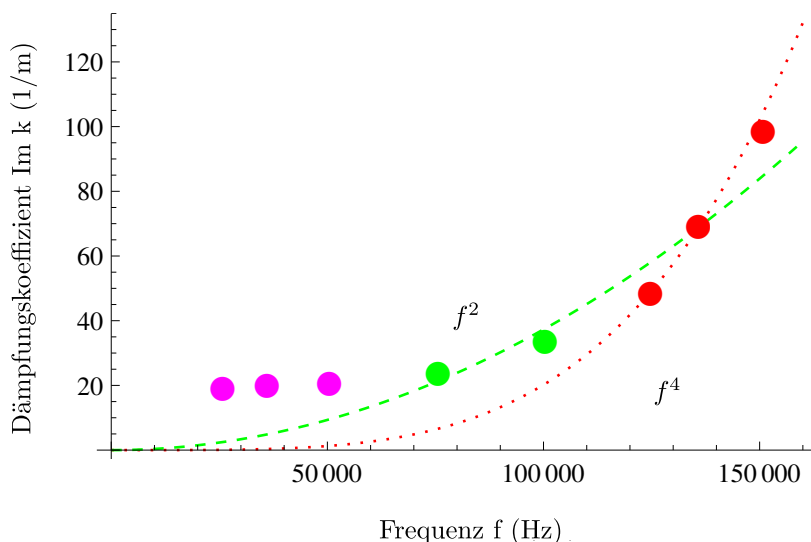


Abbildung 4.4.1: Dämpfungskoeffizient  $\alpha = \text{Im } k$  als Funktion der Frequenz. Punkte repräsentieren die experimentellen Daten der Arbeit [13]. Im Bereich von 120-150 kHz skaliert die Dämpfung mit  $f^4$  (rot), bei niedrigeren Frequenzen quadratisch in  $f$  (grün). Dämpfung muss eigentlich mit der Frequenz  $f$  verschwinden, die rosa Punkte wurden deswegen nicht berücksichtigt. Aus der roten Kurve erhalten wir durch Anpassung an die GSH- Theorie  $\frac{\gamma_0}{\lambda\eta_1} = \frac{1}{80}$ .

Wir setzen nun  $\tau_T = \frac{1}{3\pi} 10^{-4} \text{s}$ , sodass bei einer Frequenz von  $\omega = 2\pi \cdot 150 \text{ kHz}$

$$\omega\tau_T = 10. \quad (4.4.10)$$

Drei Schwingungen des Wellenzugs aus dem obigen Experiment genügen dann, um das Medium auf eine granulare Temperatur von  $T_{sat}$  anzuheben. In der Ableitung der Wellengleichung, bzw. für die  $T_{sat}$ - Approximation, verlangten wir kleine Geschwindigkeitsgradienten, d.h. mit den obigen Werten

$$A = \frac{U_0\omega^2}{c} = 6\pi^2 \frac{1}{\text{s}} \ll \frac{1}{2\tau_A} = \frac{\gamma_0}{2\sqrt{\gamma_1\eta_1}}, \quad (4.4.11)$$

sowie für die Existenz von Schall  $X \ll 1$ ,

$$\frac{U_0^2\omega^3}{c^2} = \frac{3\pi^3}{25} 10^{-3} \frac{1}{\text{s}} \approx 3,7 \cdot 10^{-3} \ll \frac{\gamma_0}{\lambda\eta_1}. \quad (4.4.12)$$

Der Imaginärteil der Wellenzahl ist die inverse charakteristische Zerfallslänge, die in Abbildung 3 der Arbeit [13] als Funktion der Frequenz aufgetragen ist. Die experimentellen Daten sind in Abbildung 4.4.1 reproduziert. Die letzten drei Messpunkte zeigen die  $\omega^4$ - Abhängigkeit. Eine Anpassung der GSH-Theorie an sie liefert  $\frac{\gamma_0}{\lambda\eta_1} = \frac{1}{80}$ , so dass Bedingung (4.4.12) erfüllt ist. Die elastischen Module wurden dabei über die

angegebene Schallgeschwindigkeit und Dichte bestimmt. Das genau Vorgehen dazu ist in Abschnitt 4.5 beschrieben. Auf eine Anpassung der ebenfalls abgeleiteten quadratischen Abhängigkeit der Dämpfung über die normale Viskosität verzichten wir an dieser Stelle, da die Messung offenbar einen systematischen Fehler enthält. Natürlich muss die Dämpfung mit der Frequenz verschwinden. In Abbildung 4.4.1 sehen wir, dass dies aber nicht so ist.

Zum Vergleich geben wir experimentelle Daten einer Messung an Sand. Die Autoren der Arbeit [56, 57] führten entsprechende Messungen mit  $\omega = 2\pi 4$  kHz,  $c = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $U_0 = 2 \cdot 10^{-6}$  m durch. Daraus ergeben sich die Werte

$$\frac{U_0^2 \omega^3}{c^2} \approx 10^{-3} \frac{1}{\text{s}} \quad (4.4.13)$$

$$\frac{U_0 \omega^2}{c} \approx 1 \frac{1}{\text{s}}. \quad (4.4.14)$$

Sie sind fast von der gleichen Größenordnung wie die obigen Werte (4.4.11, 4.4.12). Das bestärkt die Bedingungen (4.4.11) und (4.4.12) für die Existenz von Schall. In den Messungen wurde eine starke Dämpfung festgestellt. Das empfangene Signal hatte nur noch eine Stärke von  $U_0 = 8 \cdot 10^{-9}$  m. Dies deutet auf eine starke  $U_0$ -Abhängigkeit der Dämpfung hin, wie sie in der GSH-Theorie enthalten ist.

Für lineare Wellengleichungen wird der Qualitätsfaktor  $Q = \frac{\text{Re } k}{2\text{Im } k}$  als Maß für die Dämpfung definiert [58, 59]. Je größer der Imaginärteil von  $k$ , desto größer ist die Dämpfung und desto kleiner ist die Qualität. Definieren wir das Verschwinden eines Schallsignals bei einem Prozent seines anfänglichen Wertes, dann erlaubt ein Qualitätsfaktor von zehn in etwa zehn Schwingungen. Für die experimentellen Werte der Arbeit [13] mit Frequenz  $\omega = 2\pi 150$  kHz ist die Schallamplitude von  $U_0 = 60$  nm dann bereits kritisch. Bei  $\omega = 2\pi 50$  kHz dagegen wäre eine Amplitude von  $U_0 = 2 \cdot 10^{-7}$  m möglich.

Wir wenden uns nun einer zweiten Klasse von Experimenten zu, den sog. Resonanzsäulenexperimenten, wie sie in den Arbeiten [50–52] durchgeführt wurden. Eine zylindrische Säule aus Sand wird dabei bis zur Resonanz in Torsionsschwingungen versetzt. Aus der Eigenfrequenz und der Breite der Resonanzkurve können die elastischen und anelastischen Eigenschaften von Sand gewonnen werden. Die Abhängigkeit vom isotropen Umgebungsdruck  $P$ , der Packungsdichte  $\rho$  und der Anregungsamplitude  $U_0$  war dabei von Interesse. Die Drücke variierten zwischen 200 und 800 kPa, die Dichte zwischen  $1458 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  und  $1670 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , was beinahe den Werten für die experimentell herstellbare loseste und dichteste Packung entspricht.

Die elastischen GSH-Parameter  $\mathcal{B}_0$ ,  $\xi$ ,  $\rho_{lp}$  und  $\rho_{cp}$  des in diesen Experimenten verwendeten Sandes können mit den Methoden, wie sie in Kapitel 4.5, bzw. in der Arbeit [60] beschrieben sind, bestimmt werden. Für sehr kleine Anregungsamplituden sind die dissipativen Effekte die mit der granularen Temperatur  $T_g$  der GSH-Theorie zusammenhängen vernachlässigbar klein. Für die Torsionsschwingungen hier ist das der Fall, wenn die Verzerrungsamplitude  $|u_{ij}| := \gamma_{\text{ampl}} \lesssim 10^{-6}$ . Die Abbildung 4.4.2

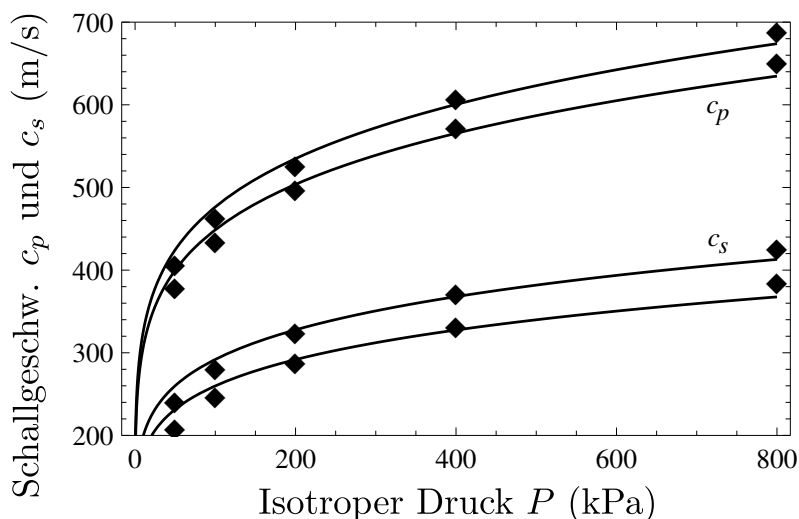


Abbildung 4.4.2: Elastische Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeiten  $c_p$  und  $c_s$  als Funktion des äußeren Drucks. Symbole repräsentieren Messdaten aus der Arbeit [50], die durchgezogene Linie die GSH-Theorie. Daraus lassen sich die elastischen Parameter (4.4.15) bestimmen.

zeigt die elastischen Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeiten als Funktion des äußeren Drucks für zwei verschiedene Dichten. Daraus bestimmen wir

$$\mathcal{B}_0 = 2,9 \text{ GPa}, \quad \xi = 1, \quad \rho_{lp} = 0.54\rho_G, \quad \text{und} \quad \rho_{cp} = 0.63\rho_G. \quad (4.4.15)$$

Dabei ist  $\rho_G = 2650 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  die Materialdichte des Quarzes aus dem der Sand besteht.

Für Verzerrungsamplituden  $\gamma_{ampl} \gtrsim 10^{-6}$  beobachten die Autoren der Arbeiten [50–52] nun eine amplitudenabhängige Dämpfung. Die Daten der Abbildung 10 b) aus [50] sind in Abbildung 4.4.3 reproduziert. Die Messpunkte zeigen das Dämpfungsverhältnis  $D = \text{Im } k / \text{Re } k$  als Funktion der Verzerrungsamplitude  $\gamma_{ampl}$  bei verschiedenen Drücken. Für Verzerrungsamplituden  $\gamma_{ampl} > 2 \cdot 10^{-5}$  steigt das Dämpfungsverhältnis  $D$  von  $D = 0.5\%$  auf  $D = 3\%$  bei  $\gamma_{ampl} = 10^{-4}$  an. Die Abhängigkeit vom Druck ist dabei eher gering.

Da wir den Parameter  $\tau_T$  auf  $\tau_T = 10^{-5}$  festgelegt haben sind die Resonanzsäulenfrequenzen von etwa 60 Hz ziemlich klein. Wir befinden uns also im Bereich  $\omega\tau_T \ll 1$ , sodass mit Sicherheit die granulare Temperatur in Amplitude und Phase der äußeren Anregung folgt und um den Mittelwert  $T_{sat}$  variiert. Wir legen die Zylinderachse der Resonanzsäule in z-Richtung und gehen von isotropen äußeren Spannungen aus. Benutzen wir dann die  $T_{sat}$ - Näherung, die zur Wellengleichung (4.4.1) führte, können wir aus der Dispersionsrelation für die Schermoden  $k^2 = \frac{\rho\omega}{M_0} (i\Lambda - \omega)$  das Dämpfungsverhältnis  $D = \text{Im } k / \text{Re } k = \frac{1}{2}X$  ableiten. Benutzen wir außerdem  $\omega = \sqrt{\frac{\tilde{M}}{\rho_0}} \text{Re } k = \sqrt{\frac{\tilde{M}}{\rho_0}} \frac{\pi}{L}$ , wobei  $\tilde{M} = \frac{\mathcal{B}}{\xi} \left(\frac{P}{\mathcal{B}}\right)^{\frac{1}{3}}$  das dem isotropen Druck entsprechende



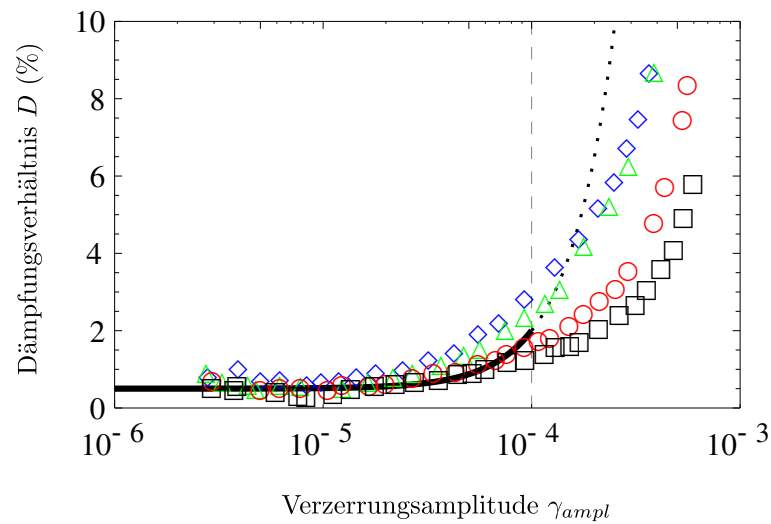


Abbildung 4.4.3: Dämpfungsverhältnis  $D$  als Funktion der Verzerrungsamplitude  $\gamma_{ampl}$ . Symbole repräsentieren Messdaten aus der Arbeit [50] für die Drücke 200 (Rauten), 400 (Dreiecke), 600 (Kreise) und 800 kPa (Quadrate), die durchgezogene Linie die GSH-Theorie. Bis  $\gamma_{ampl} = 2 \cdot 10^{-5}$  bleibt die Dämpfung amplitudenunabhängig. Die newtonsche Viskosität  $\eta$  und die Leerstellendiffusion  $\beta^P$  sind dafür verantwortlich. Die amplitudenabhängige Dämpfung für  $\gamma_{ampl} > 2 \cdot 10^{-5}$  wird durch den  $T_g$ -Dämpfungsmechanismus erklärt. Bei Amplituden von  $10^{-4}$  erreicht die Verzerrung Werte die mit der Vorspannung vergleichbar sind, Linearisierung wie wir sie verwendet haben ist dann nicht mehr gültig.

Schermodul ist und  $L$  die Höhe Resonanzsäule, so ergibt sich

$$D = \sqrt{\frac{\tilde{M}}{\rho} \frac{\pi}{2L} \frac{\lambda\eta_1}{\gamma_0}} \cdot \gamma_{ampl}^2. \quad (4.4.16)$$

Das Dämpfungsverhältnis skaliert also mit dem Quadrat der Anregungsamplitude  $\gamma_{ampl}$ . Verwenden wir die elastischen Parameter (4.4.15), sowie  $P = 200$  kPa und  $L = 30$  cm, so ergibt

$$\frac{\lambda\eta_1}{\gamma_0} = 10^3 \quad (4.4.17)$$

den amplitudenabhängigen Teil von Abbildung 4.4.3 zwischen  $10^{-5} \leq \gamma_{ampl} \leq 10^{-4}$ . Rechts der gestrichelten senkrechten Linie werden die Anregungsamplituden mit den statischen Verzerrungen vergleichbar. Die hier verwendete Linearisierung ist dann nicht mehr in Ordnung. Diese Bereich müssten voll nichtlineare Rechnungen abdecken. Der Wert (4.4.17) übersteigt den aus den Messungen [13],  $\frac{\lambda\eta_1}{\gamma_0} = 80$  um etwa eine Größenordnung. Es ist aber zu beachten, dass dort erstens Glaskugeln und nicht Sand vermessen wurde und zweitens die Messmethode eine andere war. Dort erhielten wir den Wert für  $\frac{\lambda\eta_1}{\gamma_0}$  aus der Anpassung an das  $\omega^4$ - Gesetz der Dämpfung, hier aus dem  $U_0^2$ - Gesetz.

#### 4.4.2 Amplitudenunabhängige Dämpfung

Die experimentellen Daten [50–52] zeigen, dass die Dämpfung bis zu Verzerrungen von  $2 \cdot 10^{-5}$  amplitudenunabhängig bleibt, vgl. Abbildung 4.4.3. Die granulare Temperatur scheidet also als Dämpfungsmechanismus aus. Die verbleibenden dissipativen Terme in den GSH-Gleichungen sind diejenigen, die die newtonschen Viskositäten  $\eta$  und  $\zeta$  sowie den Term  $\beta^P$  enthalten, der in klassischen Festkörpern zur Erklärung der Diffusion von Leerstellen und Zwischengitteratomen herangezogen wird. Wir wollen beide Effekte mitnehmen, belassen  $\eta$  und  $\beta^P$  konstant, setzen  $\frac{\zeta}{\eta} = \frac{1}{3}$  und kombinieren die Impulserhaltung (3.1.10) mit der Bewegungsgleichung der Verzerrungen (3.1.14). Wir erhalten die Wellengleichung

$$\begin{aligned} 2\rho_0\partial_t^2 u_{ij} + & \left( \rho_0\beta^P M_{0,jklm}\partial_t\partial_i\partial_k u_{lm} + M_{0,iklm}\partial_j\partial_k u_{lm} \right. \\ & - \eta\partial_j\partial_k \left( \left( \partial_t u_{ik}^0 + \left( \frac{\beta^P}{2} M_{0,knlm}\partial_i\partial_n u_{lm} \right) + (i \leftrightarrow k) - \frac{\beta^P}{3} M_{0,nolm}\partial_n\partial_o u_{lm}\delta_{ik} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{\zeta}{\eta} (\partial_t u_{nn} + \beta^P M_{0,nolm}\partial_n\partial_o u_{lm}) \delta_{ik} \right) \right) + (i \leftrightarrow j) = 0, \quad (4.4.18) \end{aligned}$$

wobei  $\rho_0$  die gegebene Dichte und der Tensor  $M_{0,ijkl}$  durch den von außen angelegten Druck gemäß (4.3.9) bestimmt ist. Die Lösungen dieser Wellengleichung ergeben amplitudenunabhängige Dämpfung. Für ebene Scherwellen, die entlang der z-Richtung

propagieren, kann das gemessene Dämpfungsverhältnis  $D$  aus dem Quotienten von Imaginär- zu Realteil der Wellenzahl  $k = k(\omega)$  bestimmt werden. Wir erhalten

$$D = \frac{\pi c_s \eta + 2\tilde{M}\rho_0\beta^P}{4L\tilde{M}}, \quad (4.4.19)$$

wobei  $L$  die Höhe der Resonanzsäule,  $c_s = \sqrt{\frac{\tilde{M}}{\rho_0}}$  die Scherwellengeschwindigkeit und  $\tilde{M} = \frac{E}{\xi} \left(\frac{P}{B}\right)^{\frac{1}{3}}$  das GSH-Scherwellenmodul bei isotropem Druck ist. Würden wir  $\beta^P$  vernachlässigen und die gemessene Dämpfung von  $D = 0,5\%$  allein der Viskosität  $\eta$  zuschreiben, erhielten wir  $\eta = 55 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Das ist sehr groß, wenn wir es mit der Viskosität von Honig  $\sim 10 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  vergleichen. Wir vertreten daher die Auffassung, dass der Term  $\beta^P$  wichtig ist für granulare Materie, dass er sogar für einen Großteil der beobachteten amplitudenunabhängigen Dämpfung verantwortlich ist.

In gewöhnlichen Festkörpern wird er wie erwähnt mit der Diffusion von Leerstellen verbunden [30]. Wir hatten darüber bereits in Abschnitt 2.4 gesprochen. In granularer Materie existieren sog. Kraftketten, wie sie durch die Arbeit [61] beschrieben werden. Diese sind Aneinanderreihungen von Körnern in direktem Kontakt, die ein Gerüst bilden und den Hauptteil der äußeren Spannung aufnehmen. Partikel die nicht teilnehmen können sich aber dazwischen frei bewegen. Wir haben so, ähnlich zur Leerstellendiffusion in Festkörpern, einen Massenstrom ohne Änderung des elastischen Verzerrungsfeldes. Dieser mesoskopische Mechanismus erklärt, warum  $\beta^P$  in der granularen Physik wichtig ist. Schreiben wir die gemessene Dämpfung vollständig  $\beta^P$  zu, ergibt Gleichung (4.4.19)  $\beta^P = 9 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^2}{\text{Pa} \cdot \text{s}}$ . Für gewöhnliche Festkörper gibt Referenz [58] für die Dislokation- und Zwischengitteratomdämpfung, die ebenfalls über  $\beta^P$  beschrieben werden, einen Wert von  $D = 10^{-4}$ , d. h. zwei Größenordnungen unter dem granularen Wert.

Um nun zwischen den Effekten der newtonschen Viskosität und der Leerstellendiffusion zu unterscheiden, müssen wir auf akkumulierte plastische Deformationen  $p_{ij}$  achten. Der Term  $\beta^P$  steht nur in der Bewegungsgleichung für die Verzerrungen,  $\eta$  hingegen nur in der Impulserhaltung und führt deswegen nicht zu plastischer Akkumulation. Wird also bei amplitudenunabhängiger Dämpfung Plastizität beobachtet, müssen wir sie der Leerstellendiffusion zuschreiben. Zur Berechnung von  $p_{ij}$  für die Resonanzsäulenversuche schauen wir uns die Lösung von stehenden Wellen der Form  $u_{13} = u_0 e^{-(\text{Im } \omega)t} \cos(\text{Re } \omega)t \sin kz$  mit  $\text{Re } \omega = \pm k_z \sqrt{\frac{\tilde{M}}{\rho_0}}$  und  $\text{Im } \omega = \frac{1}{2} k_z^2 \tilde{M} \beta^P$  an und berechnen in niedrigster Ordnung in den Verzerrungen die akkumulierte Verzerrung  $p_{ij} = \varepsilon_{ij} - u_{ij}$ , vgl. Gleichung 2.6.5. Für eine frei zerfallende Schwingung erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$p_{13} = \int_0^\infty \partial_t p_{13} dt = -u_0 W \sin kz, \quad (4.4.20)$$

mit  $W = \frac{1}{4} \rho_0 \tilde{M} (k_z \beta^P)^2$ , sobald das System wieder zur Ruhe gekommen ist. Für die experimentellen Werte der Arbeit [50] und  $\beta^P$  wie oben abgeschätzt  $\beta^P = 9 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^2}{\text{Pa} \cdot \text{s}}$

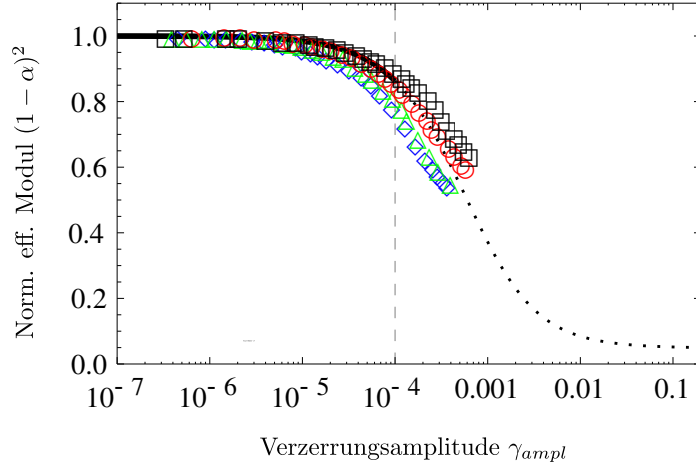


Abbildung 4.4.4: Softening-Effekt. Normiertes effektives Schermodul  $G/G_0 = (1 - \alpha)^2$  als Funktion der Verzerrungsamplitude  $\gamma_{ampl}$ . Symbole repräsentieren Messdaten aus der Arbeit [50] für die Drücke 200 (Rauten), 400 (Dreiecke), 600 (Kreise) und 800 kPa (Quadrate), die durchgezogene Linie die GSH-Theorie mit dem Softening-Parameter  $\alpha = \alpha(T_g)$ . Bei Amplituden von  $10^{-4}$  erreicht die Verzerrung Werte die mit der Vorspannung vergleichbar sind, Linearisierung wie wir sie verwendet haben ist dann nicht mehr gültig.

erhalten wir  $W = 5 \cdot 10^{-5}$ . Das ist ziemlich klein, sodass  $p_{ij}$  kaum zu beobachten ist. Für getriebene Schwingungen allerdings, sagen wir wie hier bei  $f = 50$  Hz und einer Messzeit von 20s haben wir 1000 Schwingungen, sodass sich die plastische Verzerrung zu beobachtbaren Werten akkumuliert. Es wäre interessant dies experimentell zu überprüfen.

Die Behauptung, dass die Viskosität für Festkörper sehr groß sein muss, da die Scherkraft zur Aufrechterhaltung einer stationären Scherströmung divergiert, ist nicht richtig. Vielmehr ist der Grund für diese Divergenz, bei festkörperähnlichem Verhalten wie bei Sand, die auftretende Elastizität, die durch die eigene Bewegungsgleichung für die Verzerrungen (3.1.14) repräsentiert wird [30, 62]. Umgekehrt verschwindet diese Bewegungsgleichung wieder für verschwindende Relaxationsrate  $\tau$ . Die Viskosität hingegen ist ein Maß für innere Reibung oder dissipativen Impulstransport, der für ideale, d. h. dissipationslose Festkörper verschwindet.

### 4.4.3 Der Softening-Effekt

Die Resonanzsäulenversuche [50–52] zeigen weiterhin, dass gleichzeitig zur Dämpfung das effektive Schermodul  $G = \rho c_s^2$  sich mit steigender Anregungsamplitude reduziert. Diese Eigenschaft wird Softening-Effekt genannt und für die Auslösung von Sekundärerdbeben verantwortlich gemacht [6]. Wie wir bereits in Abschnitt

4.2 diskutiert hatten, liefert der Term  $(1 - \alpha)^2$  in Gleichung (4.2.9) die passende Interpretation durch die GSH-Theorie. Dieser Term ist ein Außerdiagonalelement der Onsager-Matrix und somit wesentlicher und prinzipieller Bestandteil der GSH-Theorie. Die experimentellen Daten aus der Arbeit [50] sind in Abbildung 4.4.4 wiedergegeben, wobei das relative Modul  $G/G_0$  und  $G_0$  das rein elastische Modul ist. Für Verzerrungen, die  $\gamma_{ampl} = 2 \cdot 10^{-6}$  überschreiten, wird das Softening sichtbar und erreicht 10 – 20% bei Amplituden von  $10^{-4}$ , die mit der Vorspannung vergleichbar sind. Benutzen wir nun wieder die  $T_{sat}$ - Näherung und lösen Gleichung (4.4.1) für die gegebene Geometrie und  $\alpha$  wie in (3.2.8) angegeben, ist das relative Modul  $G/G_0$  gerade durch

$$(1 - \alpha)^2 = \left( \frac{1 + (1 - \alpha_0) \frac{T_{sat}}{T_n}}{1 + \frac{T_{sat}}{T_n}} \right)^2 \quad (4.4.21)$$

gegeben. Dabei ist hier  $T_{sat} = \frac{\tilde{M}}{\rho_0} \frac{\pi^2}{L^2} \frac{\eta_1}{\gamma_0} \gamma_{ampl}^2$  mit  $\tilde{M}$ ,  $\rho_0$  und  $L$  wie oben. Für  $\alpha_0$  verwenden wir den hypoplastischen Wert  $\alpha_0 = 0.78$  um das korrekte Limit im Fall von sehr großen Scherraten  $\gamma_1 T_g \gg \gamma_0$  sicherzustellen, s [19]. Der Wert

$$\frac{T_n \gamma_0}{\eta_1} = 0.86 \frac{1}{s^2} \quad (4.4.22)$$

erzeugt dann die durchgezogene Linie in Abbildung 4.4.4. Bei einer Verzerrungsamplitude von  $10^{-4}$  erreicht das Softening einen Wert von  $\alpha = 0,08$ . Gleichung (4.4.21) ähnelt einer empirischen Formel von Hardin und Drnevich [63]  $G/G_0 = (1 + \gamma_{ampl}/\gamma_r)^{-1}$  mit einer Referenzverzerrung  $\gamma_r$ .

Wir wollen den Wert für  $\alpha$  noch mit dem vergleichen den Jia und Johnson für Glaskugeln, die auch das Softening zeigen, gefunden haben [6]. Bei Drücken von 100 kPa und vergleichbaren Amplituden finden sie ein Softening von  $(1 - \alpha)^2 = 0.95$ , was  $\alpha = 0,03$  entspricht. Obwohl von gleicher Größenordnung, zeigen Glaskugeln offenbar ein geringeres Softening.

Wir haben in diesem Abschnitt die amplitudenunabhängige und amplitudenabhängige Dämpfung sowie das zeitweise Herabsetzen des elastischen Moduls, das Softening, von Schallwellen in granularer Materie durch die GSH-Theorie beschrieben. Wir kommen nun zu den rein elastischen, d. h. dissipationslosen Eigenschaften granularer Materie.

## 4.5 Induzierte Anisotropie

In diesem Abschnitt geben wir eine Interpretation der elastischen Eigenschaften granularer Materie. Dazu gehört die spannungsinduzierte Anisotropie. Obwohl granulare Materie durch ihren statistischen Charakter auf Längenskalen die die Korngröße überschreiten als isotropes Medium anzusehen ist, zeigt sie dennoch anisotrope Eigenschaften wenn sie unter Druck gesetzt wird [7]. Wir sagen, die Anisotropie sei

spannungsinduziert. Wie wir sehen werden, können wir durch den recht einfachen Ausdruck für die elastische granulare Energie (3.2.2) experimentelle Befunde erstaunlich gut wiedergeben. Die elastischen Eigenschaften hängen außerdem von der Packungsdichte  $\rho$  ab, die durch den dichteabhängigen Koeffizienten (3.2.3) beschrieben werden. Die Ergebnisse des folgenden Unterabschnitts sind in der Arbeit [60] erschienen.

### 4.5.1 Elastische granulare Schallmoden

Wir wenden die folgenden Ergebnisse auf Schallgeschwindigkeitsmessungen an. Granulare Materie wird dazu unter äußeren anisotropen aber homogenen Druck gesetzt. Piezoerreger und -empfänger erlauben dann die Messung von Schallgeschwindigkeiten verschiedener Polarisation und Ausbreitungsrichtung.

Die elastischen Eigenschaften der GSH-Theorie erhalten wir, wenn wir sämtliche dissipativen Terme aus dem Satz der GSH-Gleichungen streichen. Insbesondere bedeutet das  $T_g = 0$  und daher  $\alpha, \tau^{-1}, \tau_1^{-1}, \eta_g, \zeta_g = 0$ , sowie  $\eta, \zeta, \beta^P = 0$ . Wir können dann die Impulserhaltung (3.1.10) mit der Bewegungsgleichung für die Verzerrungen (3.1.14) zu einer Wellengleichung für die Verschiebungen  $U_i$  kombinieren

$$\rho_0 \partial_t^2 U_i + M_{0,ijkl} \partial_{jk}^2 U_l = 0. \quad (4.5.1)$$

Die Verzerrungen hängen dabei über  $u_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i U_j + \partial_j U_i)$  mit den Verschiebungen  $U_i$  zusammen. Die Dichte  $\rho_0$  und die Steifigkeiten  $M_{0,ijkl}$  sind die des statischen Hintergrunds. Wir wählen das Koordinatensystem derart, das  $u_{ij}$  darin diagonal ist. Der Tensor  $M_{0,ijkl}$  ist dann durch den Ausdruck (4.3.9) gegeben. Ein Ebene-Welle-Ansatz liefert das Eigenwertproblem  $(K_{il} - \bar{\lambda} \delta_{il}) U_l = 0$  für den akustischen Tensor  $K_{il}$ , wobei

$$K_{il} = \frac{1}{2} (\bar{\beta}_{(i)} + \bar{\beta}_{(l)}) n_i n_l - \delta_{il} \quad (4.5.2)$$

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = -\bar{\lambda} \frac{M_0}{\rho_0} \quad (4.5.3)$$

$$\beta_i = 1 - Q - \frac{\xi \pi_i^0}{LP}, \quad Q = \frac{3\xi}{2} + \frac{4}{3} - \left( \frac{\xi \pi_s}{4LP} \right)^2 \quad (4.5.4)$$

und  $n_i = k_i/k$  mit  $k = |\vec{k}|$  den sog. Richtungskosinus bezeichnet. Bei gegebenem äußeren Druck und gegebener Dichte liefern die Eigenwerte  $\bar{\lambda}$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit, die dazugehörigen Eigenvektoren  $U_i$  die Polarisation. Die allgemeine Lösung ist durch die Eigenwerte

$$\bar{\lambda}_1 = -1 \quad \text{und} \quad \bar{\lambda}_{2,3} = \frac{1}{2} \left( \bar{\eta} \mp \sqrt{\bar{\zeta} - 2} \right) \quad (4.5.5)$$

mit  $\bar{\eta} = \sum_{i=1}^3 \bar{\beta}_i n_i^2$  und  $\bar{\zeta} = \sum_{i=1}^3 \bar{\beta}_i^2 n_i^2$  sowie die Eigenvektoren

$$U_1 = \begin{pmatrix} n_2 n_3 (\bar{\beta}_2 - \bar{\beta}_3) \\ n_3 n_1 (\bar{\beta}_3 - \bar{\beta}_1) \\ n_1 n_2 (\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2) \end{pmatrix} \quad (4.5.6)$$

$$U_{2,3} = \begin{pmatrix} n_1 \left( \bar{\zeta} \mp \sqrt{\bar{\zeta}} (\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_1) + \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_1 \right) \\ n_2 \left( \bar{\zeta} \mp \sqrt{\bar{\zeta}} (\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2) + \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \right) \\ n_3 \left( \bar{\zeta} \mp \sqrt{\bar{\zeta}} (\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_3) + \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_3 \right) \end{pmatrix}, \quad (4.5.7)$$

gegeben, solange  $\bar{\beta}_1 \neq \bar{\beta}_2 \neq \bar{\beta}_3$  und der Wellenvektor nicht entlang einer der Hauptachsen der statischen Verzerrung  $u_{ij}$ , bzw. der Spannungen  $\pi_{ij}$  zeigt. Im Fall von Propagation entlang der Hauptachsenrichtungen ist der akustische Tensor bereits diagonal und die Eigenwerte können direkt abgelesen werden.

Für Propagation entlang der x-Richtung ist  $n_1 = 1$  und damit  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\beta}_1 - 1$  sowie  $\bar{\lambda}_{2,3} = -1$  mit entsprechenden Polarisierungen  $U_1 = (1, 0, 0)$ ,  $U_2 = (0, 1, 0)$  und  $U_3 = (0, 0, 1)$ . Die Moden sind also rein longitudinal oder rein transversal. Wir können verallgemeinern und sagen, dass ebene Wellen, die entlang der Hauptachsen des statischen Spannungsfeldes propagieren immer reine Moden sind. Man kann sich mit der Methode der Extrema unter Nebenbedingungen davon überzeugen, dass die Schallgeschwindigkeit in diesem Fall extremal ist, vgl. dazu Abbildung 4.5.4.

Diskutieren wir nun die Abhängigkeiten vom äußeren Spannungszustand. Ist dieser isotrop, so gilt  $\pi_i^0 = 0$ , daher  $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \bar{\beta}_3$  und die Kompressions- bzw. Schermode hat die Geschwindigkeit

$$c_p = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\xi + \frac{4}{3}\right) \frac{\mathcal{B}}{\xi\rho} \sqrt[6]{\frac{P}{\mathcal{B}}}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mathcal{B}}{\xi\rho} \sqrt[6]{\frac{P}{\mathcal{B}}}}. \quad (4.5.8)$$

Beide zeigen die für granulare Materie typische Hertz-Skalierung, nämlich  $c \sim P^{\frac{1}{6}}$ . Für einen uniaxialen und damit anisotropen Spannungszustand in dem die z-Richtung ausgezeichnet sein soll gilt  $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2$  sowie  $\bar{\lambda}_1 = -1$  und  $\bar{\lambda}_{2,3} = \frac{1}{2} (\bar{\eta} \mp \sqrt{\bar{\zeta}} - 2)$  mit  $\bar{\eta} = (\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_3) n_1^2 + \bar{\beta}_3$  und  $\bar{\zeta} = (\bar{\beta}_1^2 - \bar{\beta}_3^2) n_1^2 + \bar{\beta}_3^2$ . Die Eigenwerte und damit die Geschwindigkeiten hängen nur von der Projektion  $n_1$  von  $k$  auf die x-Richtung ab. Sie sind deswegen rotationssymmetrisch. Die Kompressionswellengeschwindigkeit entlang der z-Richtung,  $n_1 = 0$  hat die Gestalt

$$c_v = \sqrt{\left(Q + \frac{\pi_3^0}{LP}\right) \frac{\mathcal{B}}{\xi\rho} \sqrt[6]{\frac{LP}{\mathcal{B}}}}, \quad (4.5.9)$$

die der horizontalen Kompressionswelle,  $n_1 = 1$ ,

$$c_h = \sqrt{\left(Q + \frac{\pi_1^0}{LP}\right) \frac{\mathcal{B}}{\xi\rho} \sqrt[6]{\frac{LP}{\mathcal{B}}}}. \quad (4.5.10)$$

Nur für verschwindende Scherung, d. h.  $\pi_i^0, \pi_s \rightarrow 0$ ,  $L \rightarrow 1$  gehen diese in die erste der Geschwindigkeiten (4.5.8) über. Anderenfalls ist die Hertz-Skalierung gestört. Alle Schermoden, unabhängig von Ausbreitungsrichtung und Polarisation, haben in uniaxialen Systemen die Geschwindigkeit

$$c_s = \sqrt{\frac{\mathcal{B}}{\xi\rho}} \sqrt[6]{\frac{LP}{\mathcal{B}}}. \quad (4.5.11)$$

Wir können diese Resultate nun auf die Daten aus der Messung [64] anwenden. Dort wurden Glaskugeln unter uniaxiale Spannung gesetzt und die Kompressions- sowie die Scherwellengeschwindigkeiten bei horizontaler und vertikaler Propagation gemessen. Es wurden zwei Proben untersucht, von denen die eine durch „rain deposition“, d. h. durch einfaches Schütten der Kugeln in den Behälter, die andere durch eine „decompaction“-Prozedur hergestellt wurden. Im zweiten Fall wurde ein Gitter nach der Befüllung langsam durch die Glaskugeln nach oben gezogen. Es entstanden so Proben unterschiedlicher Packungsdichte  $\rho$ , wobei die zweite weniger dicht war.

Da die gemessene Geschwindigkeit von der Präparationsmethode abhängt, wird eine intrinsische mit dem Korngerüst verbundene Anisotropie (engl. fabric anisotropy) vermutet und häufig zur Erklärung herangezogen. Abbildung 4.5.1 zeigt nun die gemessenen Schallgeschwindigkeiten als Funktion des angelegten vertikalen Drucks  $\pi_{zz}$ . Symbole repräsentieren gemessene Geschwindigkeiten, oben für die weniger dichte Probe  $\phi = \frac{\rho}{\rho_G} = 0.606$  und unten für die dichtere  $\phi = 0.643$ . Genauer bedeuten Rauten vertikale Kompressionsmoden  $c_v$ , Kreise sind horizontale Kompressionsmoden  $c_h$ . Die restlichen drei sind Schermoden  $c_s$ , eine davon propagiert vertikal (Quadrat), die anderen zwei horizontal, wovon eine vertikal polarisiert (Dreieck nach unten) ist und die andere horizontal (Dreieck nach oben). Die durchgezogenen Kurven repräsentieren die GSH-Theorie durch die Formeln (4.5.9, 4.5.10, 4.5.11). Dazu verwenden wir die GSH-Werte

$$\xi = \frac{3}{4}, \quad \mathcal{B}_0 = 5,1 \text{ GPa}, \quad \phi_{lp} = \frac{\rho_{lp}}{\rho_G} = 0.555 \quad \text{und} \quad \phi_{cp} = \frac{\rho_{cp}}{\rho_G} = 0,664. \quad (4.5.12)$$

Diese reichen aus um das Spektrum elastischer Wellen in uniaxialen Systemen zu beschreiben. Eine intrinsische Anisotropie ist nicht nötig um experimentelle Befunde zu interpretieren. Für die verbleibende Diskrepanz gibt es unterschiedliche Möglichkeiten. Am wahrscheinlichsten sind entweder experimentelle Abweichungen vom ideal uniaxialen Spannungszustand, d. h.  $\pi_{xx} \neq \pi_{yy}$ , oder die Schallgeschwindigkeiten wurden nicht exakt entlang der Hauptachsenrichtungen gemessen. In einem solchen Fall wären die allgemeinen Formeln (4.5.5-4.5.7) anzuwenden. Von theoretischer Seite müsste die dritte Invariante in den Ausdruck für die elastische Energie mit aufgenommen werden um die Entartung der Scherwellengeschwindigkeiten aufzuheben. Das wollen wir uns in Abschnitt 4.5.3 genauer anschauen. Zuvor wenden wir die gewonnenen Resultate aber noch auf die statische Scherung an.



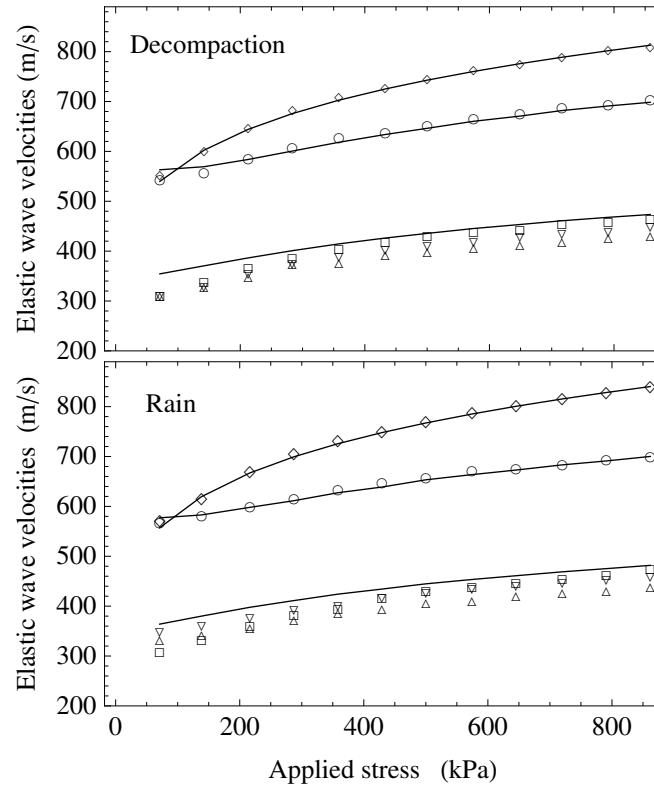


Abbildung 4.5.1: Schallgeschwindigkeiten als Funktion des angelegten Drucks, entnommen aus [7, 60]. Symbole repräsentieren gemessene Geschwindigkeiten als Funktion des angelegten Drucks  $\pi_{33}$  für zwei unterschiedliche Präparationsmethoden, „decompaction“ und „rain“. Sie entsprechen unterschiedlichen Packungsdichten  $\phi = \frac{\rho}{\rho_G}$  von  $\phi = 0.606$  und  $\phi = 0.643$ . Genauer bedeuten Rauten vertikalen Kompressionsmoden  $c_v$ , Kreise sind horizontale Kompressionsmoden  $c_h$ . Die restlichen drei sind Schermoden verschiedener Polarisation und Ausbreitungsrichtung, s. [7]. Durchgezogene Linien sind Resultate der GSH-Theorie. Für die gegebene granulare Energie (3.2.2) gibt es bei uniaxialen Spannungsverhältnissen nur eine Scherwellengeschwindigkeit  $c_s$ .

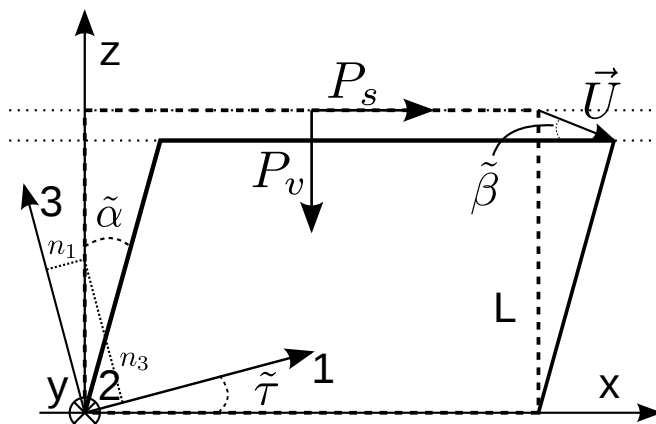


Abbildung 4.5.2: Statische Scherung. Eine vertikale und horizontale Last deformiert eine in x-Richtung unendliche Schicht der Höhe  $L$ . Im 1-2-3 Koordinatensystem ist der Spannungstensor diagonal. Es ist um den Winkel  $\tilde{\tau}$  gegen das x-y-z Koordinatensystem verdreht.

## 4.5.2 Schallmoden bei statischer Scherung

Wir betrachten eine statische Scherung wie in Abbildung 4.5.2 und berechnen die Geschwindigkeiten elastischer Wellen die senkrecht zur Richtung der Scherung propagieren. Wir wenden dazu die konkreten Ergebnisse aus Abschnitt 4.5.1 an.

### 4.5.2.1 Statische Lösung

Eine Schicht granularen Materials soll in x- und y-Richtung unendlich ausgedehnt sein. In z-Richtung habe sie die Höhe  $L$ . In x-Richtung wird eine Scherkraft der Stärke  $P_s > 0$  pro Flächeneinheit angelegt in y-Richtung eine solche der Stärke  $P_v > 0$ . An der Oberfläche  $z = L$  haben wir dann die Randbedingungen  $\pi_{xz}(z = L) = -P_s$  und  $\pi_{zz}(z = L) = P_v$ . Am Boden  $z = 0$  nehmen wir verschwindende Verschiebungsfelder an  $U_i(z = 0) = 0$ . Ferner setzen wir aus Symmetriegründen  $U_y \equiv 0$  und lassen die übrigen Felder nur von  $z$  abhängen. Das mechanische Gleichgewicht verlangt bei Vernachlässigung der Gravitation  $\nabla_j \pi_{ij} = 0$ , sodass die Spannungen  $\pi_{ij}$  konstant sein müssen. Aus den Randbedingungen schließen wir, dass  $\pi_{xz} = -P_s$  and  $\pi_{zz} = P_v$ . Die einzigen nicht verschwindenden Verzerrungskomponenten sind  $u_{xz} = \frac{1}{2} \partial_z U_x$  und  $u_{zz} = \partial_z U_z$  so dass  $\Delta = -u_{zz}$  and  $u_s^2 = \frac{2}{3} u_{zz}^2 + 2u_{xz}^2$ . Das mechanische Gleichgewicht liefert dann die Lösungen

$$u_{zz} = \partial_z U_z = -\Delta = - \left( \frac{\xi}{\mathcal{B}} \frac{3P_v + q}{2(5 + 3\xi)} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$u_{xz} = \frac{1}{2} \partial_z U_x = \frac{\xi P_s}{2\mathcal{B}} \Delta^{-\frac{1}{2}}.$$

wobei  $q = P_v \sqrt{9 - 3(5 + 3\xi) \left(\frac{P_s}{P_v}\right)^2}$ . Integration ergibt die Verschiebungsfelder

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{\xi P_s}{\mathcal{B}\sqrt{\Delta}} \cdot z > 0 \\ U_z &= -\Delta \cdot z < 0, \end{aligned}$$

mit  $\Delta^{\frac{3}{2}} = \frac{\xi}{\mathcal{B}} \frac{3P_v \pm q}{2(5+3\xi)}$ , in Übereinstimmung mit den gegebenen Randbedingungen. Die Scherwinkel  $\tilde{\alpha}$  und  $\tilde{\beta}$ , s. Abbildung 4.5.2 sind durch  $\tan \tilde{\alpha} = \frac{\xi P_s}{\mathcal{B}\sqrt{\Delta}(1-\Delta)}$  und  $\tan \tilde{\beta} = \frac{\mathcal{B}\Delta^{\frac{3}{2}}}{\xi P_s}$  gegeben. Thermodynamische Stabilität, s. (4.3.5), verlangt  $\frac{u_s^2}{\Delta^2} \leq 2\xi$  was auf die Bedingung

$$\frac{P_s}{P_v} \leq \frac{\sqrt{3(3\xi - 1)}}{2 + 3\xi} \approx 0.5 \quad \text{für } \xi = \frac{5}{3} \quad (4.5.13)$$

führt. Für einen gegebenen vertikalen Druck von  $P_v = 100$  kPa and  $\xi = \frac{5}{3}$ ,  $\mathcal{B} = 5$  GPa entspricht dies einem Winkel von  $\tilde{\alpha}_{max} = 0.05^\circ$  und einer Verschiebung von maximal  $U_x^{max}(z = 10 \text{ cm}) \approx \frac{1}{10}$  mm.

#### 4.5.2.2 Hauptachsen

Zur Anwendung der Formeln (4.5.5-4.5.7) müssen wir in das Hauptachsensystem des Spannungstensors transformieren. Im xyz-Koordinatensystem hat der Spannungstensor die Gestalt

$$\hat{\pi}_{xyz} = \begin{pmatrix} \frac{(3\xi+2)P_v - q}{3\xi+5} & 0 & -P_s \\ 0 & \frac{(3\xi+2)P_v - q}{3\xi+5} & 0 \\ -P_s & 0 & P_v \end{pmatrix}.$$

Wir rotieren nun dieses System um einen Winkel  $\tilde{\tau}$  bis  $\pi_{ij}$  diagonal ist mit

$$R = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\tau} & 0 & \sin \tilde{\tau} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \tilde{\tau} & 0 & \cos \tilde{\tau} \end{pmatrix}.$$

Die Komponenten von  $\hat{\pi}$  im rotierten System erhalten wir durch  $\hat{\pi}_{jl}^{123} = (R\hat{\pi}R^{-1})_{jl}$ . Die Eigenwerte sind dann

$$\begin{aligned} \pi_2 &= \frac{(3\xi + 2) P_v - q}{5 + 3\xi} \\ \pi_{1,3} &= \frac{(6\xi + 7) P_v - q \mp r}{6\xi + 10}, \end{aligned}$$

mit  $r = \sqrt{(3P_v + q)^2 + 4(5 + 3\xi)^2 P_s^2}$ . Der Winkel ist durch  $\tilde{\tau} = \arccos\left(\sqrt{\frac{3P_v + q + r}{2r}}\right)$  gegeben. Am Punkt der Fließgrenze, vgl. (4.5.13) ist  $\tilde{\tau} \approx 33^\circ$ .

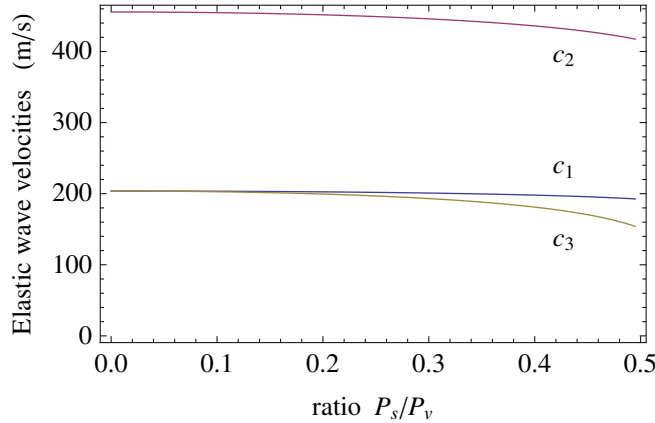


Abbildung 4.5.3: Elastische Schallgeschwindigkeiten in der statischen Scherung mit Propagationsrichtung entlang  $z$  als Funktion des Verhältnisses  $P_s/P_v$  bei festgehaltenem  $P_v = 100$  kPa.  $c_1$  ist eine reine Schermode in  $y$ -Richtung polarisiert,  $c_2$  und  $c_3$  sind gemischte Moden mit Polarisation in der  $xz$ -Ebene. Bei  $P_s = 0$  gehen die Moden in die des uniaxialen Falls über, wo wir zwei Schermoden gleicher Geschwindigkeit und eine Kompressionsmode haben.

#### 4.5.2.3 Elastische Moden

Wir können nun die Ergebnisse aus Abschnitt 4.5.1 anwenden. Abhängig von der Scherkraft hat der  $\vec{k}$ -Vektor von entlang  $z$  propagierenden Wellen unterschiedliche Projektionen  $n_1 = \sin \tilde{\tau}$  und  $n_3 = \cos \tilde{\tau}$  auf die Hauptachsen ( $n_2 = 0$ ), s. Abbildung 4.5.2.

Entsprechend den Formeln (4.5.5-4.5.7) erhalten wir eine reine Schermode mit Polarisation in  $y$ -Richtung und zwei gemischte Moden mit Polarisationen in der  $xz$ -Ebene. Diese haben Geschwindigkeiten  $c^2 = \bar{\lambda} \frac{M_0}{\rho_0}$  mit  $\bar{\lambda}_1 = -1$  und

$$\bar{\lambda}_{2,3} = \frac{1}{2} \left( \bar{\eta} \mp \sqrt{\bar{\zeta} - 2} \right). \quad (4.5.14)$$

Der Druck ist durch  $P = \frac{9(1+\xi)P_v - 2q}{15+9\xi}$  und die Scherung durch  $\pi_s^2 = \frac{2(3P_v+q)^2}{3(5+3\xi)^2} + 2P_s^2$  gegeben. Abbildung 4.5.3 zeigt diese Moden für physikalische Werte des Verhältnisses  $P_s/P_v$  bis zur Fließgrenze, s. Gleichung (4.5.13), für einen gegebenen Druck  $P_v = 100$  kPa.  $c_1$  ist die reine Schermode,  $c_3$  eine gemischte Moden mit Polarisation in der  $xz$ -Ebene und hauptsächlich entlang  $x$  und  $c_2$  ist die gemischte Mode in der  $xz$ -Ebene mit Polarisation hauptsächlich entlang der  $z$ . Letztere ähnelt daher einer Kompressionsmode. Bei verschwindender Scherung  $P_s = 0$  erhalten wir den uniaxialen Fall aus Abschnitt 4.5.1 mit zwei reinen Moden. Bei maximaler Scherung beträgt der Geschwindigkeitsunterschied 5% für  $c_1$ , 8% für  $c_2$  und 24% für  $c_3$ .

### 4.5.3 Scherwellenentartung und dritte Invariante

Wir kommen in diesem Abschnitt zurück zu den elastischen Schallmoden in uniaxialen Systemen. Wie wir am Ende des Abschnitts 4.5.1 gesehen hatten liefert die GSH-Theorie mit der elastischen Energie (4.3.1) eine Scherwellenentartung. Unabhängig von Ausbreitungsrichtung und Polarisation haben Scherwellen immer die gleiche Geschwindigkeit. Aus den experimentellen Daten [64], wie sie in Abbildung 4.5.1 gegeben sind entnehmen wir aber, dass die Scherwellengeschwindigkeiten geringfügig voneinander abweichen.

Wir zeigen nun, dass nur wenn wir die dritte Invariante des Verzerrungstensors  $u_{ij}$  (4.3.4) in die granulare elastische Energie mitaufnehmen diese Entartung aufgehoben wird. Selbst dann gibt es nur zwei unterschiedliche Geschwindigkeiten.

Jede isotrope Energie kann als Funktion der drei Invarianten ausgedrückt werden. Wir wählen der Anschaulichkeit und der Kontinuität zum bisherigen Energieausdruck halber aber die Skalare  $\Delta$ ,  $u_s$  and  $u_{III} = \det u_{ij}$ . Das Differential einer solchen Energie  $\tilde{w}$  ist dann eine Summe der Form

$$d\tilde{w} = \dots d\Delta + \dots du_s + \dots du_{III} \quad (4.5.15)$$

mit den Differentialen

$$d\Delta = -\delta_{ij} du_{ij} \quad (4.5.16)$$

$$du_s = \frac{1}{u_s} u_{ij}^0 du_{ij} \quad (4.5.17)$$

$$du_{III} = \frac{1}{3u_{III}^2} \left( 3u_{im}u_{mj} + 2\Delta u_{ij} + \left( \frac{2}{3}\Delta^2 - \text{Tr } u^2 \right) \delta_{ij} \right) du_{ij}. \quad (4.5.18)$$

Deswegen können wir die Spannungen  $\tilde{\pi}_{ij} = -\frac{\partial \tilde{w}}{\partial u_{ij}}$  ganz allgemein als

$$\tilde{\pi}_{ij} = \tilde{f}_1(\Delta, u_s, u_{III})\delta_{ij} + \tilde{f}_2(\Delta, u_s, u_{III})u_{ij} + \tilde{f}_3(\Delta, u_s, u_{III})u_{im}u_{mj} \quad (4.5.19)$$

mit nicht genauer bestimmten Funktionen  $\tilde{f}_i$  angeben. Genauso liefert das Differential der Spannungen den Steifigkeitstensor  $\tilde{M}_{ijkl} = \frac{\partial \tilde{\pi}_{ij}}{\partial u_{kl}}$  in seiner allgemeinsten Form

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{ijkl} = & g_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + g_2 (u_{ij} \delta_{kl} + u_{kl} \delta_{ij}) + g_3 (u_{im} u_{mj} \delta_{kl} + u_{km} u_{ml} \delta_{ij}) \\ & + g_4 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + g_5 u_{ij} u_{kl} + g_6 (u_{ij} u_{km} u_{ml} + u_{kl} u_{im} u_{mj}) \\ & + g_7 u_{im} u_{mj} u_{km} u_{ml} + g_8 (u_{ki} \delta_{lj} + u_{kj} \delta_{li} + u_{li} \delta_{jk} + u_{lj} \delta_{ik}) \end{aligned} \quad (4.5.20)$$

mit nicht näher bestimmten Funktionen  $g_i = g_i(\Delta, u_s, u_{III})$ . Wechseln wir nun wiederum in das Hauptachsensystem des Verzerrungstensors  $u_{ij} = u_{(i)} \delta_{ij}$ , lässt sich der

Steifigkeitstensor in isotroper Form angeben

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_{ijkl} &= \left[ g_1 + g_2 (u_{(i)} + u_{(k)}) + g_5 u_{(i)} u_{(k)} + g_3 (u_{(i)}^2 + u_{(k)}^2) \right. \\
&\quad \left. + g_6 (u_{(k)}^2 u_{(i)} + u_{(i)}^2 u_{(k)}) \delta_{ij} + g_7 u_{(i)}^2 u_{(k)}^2 \right] \delta_{ij} \delta_{kl} \\
&\quad \left[ g_4 + g_8 (u_{(i)} + u_{(j)}) \right] (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\
&:= g(i, k) \delta_{ij} \delta_{kl} + h(i, j) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \tag{4.5.21}
\end{aligned}$$

Der akustische Tensor  $\tilde{K}_{il} \sim \tilde{M}_{ijkl} n_j n_k$  lässt sich damit als

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{il} &\sim (g(i, l) + h(i, l)) n_i n_l \\
&\quad + (g_4 + g_8 (u_{(i)} + [u_2 + (u_1 - u_2) n_1^2 + (u_3 - u_2) n_3^2])) \delta_{il} \\
&= H(i, l) n_i n_l + (g_4 + g_8 (u_{(i)} + u_{dev})) \delta_{il}
\end{aligned}$$

schreiben, mit  $H(i, l) = g(i, l) + h(i, l)$  und  $u_{dev}(\vec{n}) = u_2 + (u_1 - u_2) n_1^2 + (u_3 - u_2) n_3^2$ . Für den uniaxialen Fall mit  $z$  als bevorzugter Richtung  $u_1 = u_2 \neq u_3$  gilt  $H(1, 1) = H(2, 2) = H(1, 2)$  und  $u_{dev} = u_1 + (u_3 - u_1) n_3^2$ . Legen wir den Wellenvektor entlang  $z$ ,  $n_3 = 1$ ,  $n_1 = n_2 = 0$ , ist  $\hat{K}_{ij}$  gleich

$$\hat{K}_z = \begin{pmatrix} g_4 + g_8 (u_1 + u_3) & 0 & 0 \\ 0 & g_4 + g_8 (u_1 + u_3) & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} + g_4 + 2g_8 u_3 \end{pmatrix}, \tag{4.5.22}$$

legen wir ihn entlang  $x$ ,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = n_3 = 0$ , gilt

$$\hat{K}_x = \begin{pmatrix} H_{11} + g_4 + 2g_8 u_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_4 + 2g_8 u_1 & 0 \\ 0 & 0 & g_4 + g_8 (u_3 + u_1) \end{pmatrix}, \tag{4.5.23}$$

und legen wir ihn entlang  $y$ ,  $n_2 = 1$ ,  $n_1 = n_3 = 0$ , haben wir

$$\hat{K}_y = \begin{pmatrix} g_4 + 2g_8 u_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_{11} + g_4 + 2g_8 u_1 & 0 \\ 0 & 0 & g_4 + g_8 (u_3 + u_1) \end{pmatrix}. \tag{4.5.24}$$

Wir erinnern uns, dass die Eigenwerte des akustischen Tensors proportional zur Schallgeschwindigkeit sind. Bei Propagation entlang  $z$  (4.5.22), haben wir, wie aufgrund der Symmetrie zu erwarten, zwei identische Schermoden mit  $x$ - und  $y$ -Polarisation sowie eine Kompressionsmode. Bei Propagation entlang  $x$  (4.5.23) und entlang  $y$  (4.5.24) haben wir jeweils Schermoden unterschiedlicher Geschwindigkeit. Wir stellen fest, dass es zwei unterschiedliche Scherwellengeschwindigkeiten gibt, denn

$$\hat{K}_{z,11} = \hat{K}_{z,22} = \hat{K}_{x,33} = \hat{K}_{y,33} \neq \hat{K}_{x,22} = \hat{K}_{y,11}. \tag{4.5.25}$$

Dies ist ein ganz allgemeines Resultat in das nur die Isotropie der Energie sowie die Uniaxialität der äußeren Spannungen eingeht.

Der Term  $g_8$  stammt aus dem Differential der dritten Invarianten. Ohne ihn, das heißt ohne die dritte Invariante mit in die Energie aufzunehmen, erhalten wir die Scherwellenentartung zurück.

Da die bisherige Energie recht gute Übereinstimmung mit dem Experiment liefert, sollte ein Term zur Aufhebung der Scherwellenentartung eine Korrektur sein, etwa

$$w = \sqrt{\Delta} \left( \Delta^2 + u_s^2 + \epsilon \frac{u_{III}^3}{\Delta} \right) \quad (4.5.26)$$

mit einem kleinen  $\epsilon$ . Alle Terme in der Klammer sind dann von der Ordnung  $\sim u^2$  und bei festem  $\epsilon$  bleibt die Korrektur unabhängig von der Stärke von  $u_{ij}$  immer klein.

#### 4.5.4 Erreichen der Fließgrenze

Wir kommen noch einmal zu den uniaxialen Schallmoden zurück und diskutieren kurz was passiert, wenn das statische Spannungsfeld den Punkt der Fließgrenze erreicht. Das ist dann der Fall, wenn die Komponente  $\pi_1$  der Spannung von der  $\pi_3$ -Komponente soweit abweicht, dass  $\frac{\pi_1^2}{P^2} = \frac{2}{\xi}$ . Letztere Formel erhalten wir durch Umkehrung von (4.3.5) mit Hilfe von (4.3.6). Am Punkt der Fließgrenze sind keine weiteren elastischen Störungen und damit keine Schallwellen mehr möglich. Wir erwarten  $c = 0$ .

Die Schallgeschwindigkeiten verringern sich an diesem Punkt, bleiben entgegen der Erwartung aber endlich. Dies zeigt Abbildung 4.5.4, in der in jedem der acht Bilder die drei Geschwindigkeiten  $c_i$  gezeigt sind, die für den uniaxialen Fall den Eigenwerten (4.5.5) entsprechen. Die z-Richtung sei dabei wiederum die ausgezeichnete. Die verschiedenen Bilder zeigen unterschiedliche Propagationsrichtungen, angezeigt durch den Winkel  $\delta$  zur xy-Ebene. Im ersten Bild oben links für  $\delta = 0$  findet die Propagation also in der xy-Ebene statt, unten rechts in Richtung der z-Achse.  $\pi_1$  ist konstant 100 kPa,  $\pi_3$  wird variiert. Die elastischen Parameter betragen  $\mathcal{B} = 9$  GPa,  $\xi = \frac{5}{3}$  und  $\rho = 1566 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Der jeweils obere Zweig gilt für  $\pi_1/\pi_3 < 1$ , der untere für  $\pi_1/\pi_3 > 1$ . Die Kurve enden auf der linken Seite bei  $\pi_s = 0$  und auf der rechten Seite bei der Fließgrenze  $\pi_s^2/P^2 = \frac{2}{\xi} = \frac{6}{5}$ , angezeigt durch die vertikalen Linien. Die Schallgeschwindigkeit bleibt also für alle Moden und Winkel selbst am Punkt der Fließgrenze endlich.

Das ist möglich, da die Stabilitätsbedingungen (4.3.5) bzgl. der Verzerrungen definiert sind und nicht bzgl. der Verschiebungen. Man kann zeigen, dass keine Superposition ebener Verschiebungswellen, wie wir sie hier betrachten, einen Verzerungszustand erreichen, der die Fließgrenze überschreiten würde.

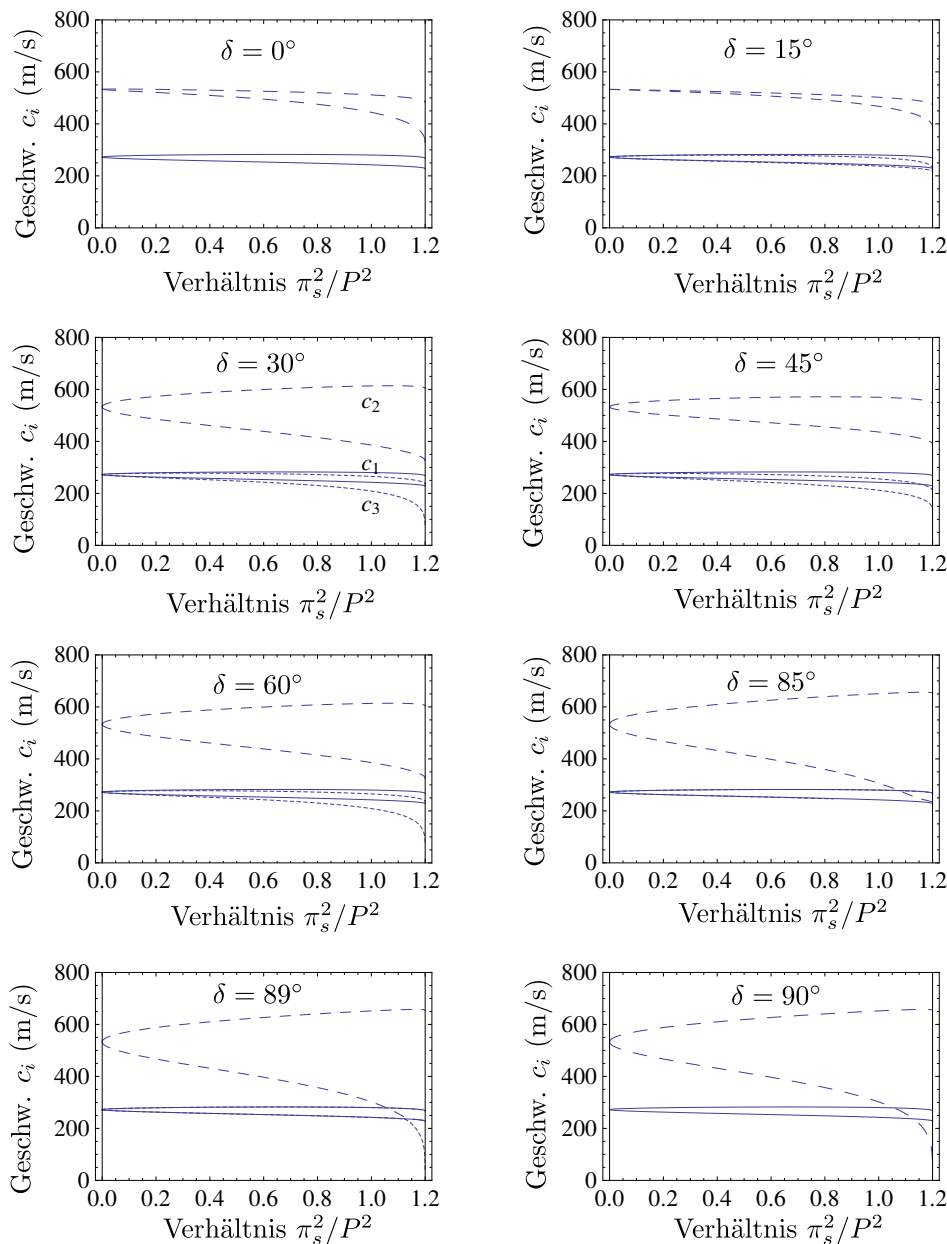


Abbildung 4.5.4: Geschwindigkeiten der uniaxialen Schallmoden  $c_i$  als Funktion des Verhältnisses  $\pi_s^2/P^2$  für verschieden ausgewählte Richtungen des Wellenvektors gegeben als Winkel  $\delta$  zur  $xy$ -Ebene.  $\pi_1$  ist konstant 100 kPa. Der jeweils obere Zweig gilt für  $\pi_1/\pi_3 < 1$ , der untere für  $\pi_1/\pi_3 > 1$ . Die Kurve enden auf der linken Seite bei  $\pi_s = 0$  und auf der rechten Seite bei der Fließgrenze  $\pi_s^2/P^2 = \frac{2}{\xi} = \frac{6}{5}$  angezeigt durch die vertikalen Linien. Die Schallgeschwindigkeit bleibt selbst am Punkt der Fließgrenze endlich. Die elastischen Parameter betragen  $\mathcal{B} = 9$  GPa,  $\xi = \frac{5}{3}$  und  $\rho = 1566 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .



# Kapitel 5

## Spannungsrelaxation im Silo

In diesem Kapitel verlassen wir die granulare Akustik. Die transiente Elastizität granularer Materie, die die akustischen Eigenschaften maßgeblich bestimmt, zeigt sich aber auch in anderen Anregungsbereichen. Wir wenden uns dem Phänomen der platzenden Silos zu. Beim Entleeren von mit Granulat gefüllten Silos versagt des öfteren die strukturelle Integrität der Silokonstruktion [4]. Neben einfachem Überladen und Druckanstieg aufgrund von Gasentwicklung, wird der Missbrauch des Silos für die Lagerung von Flüssigkeiten anstatt von granularer Materie für das Versagen verantwortlich gemacht [65, 66]. In der DIN-Norm zur Auslegung von Silos werden statische Spannungen mit der Janssen-Formel abgeschätzt, dynamische durch einen zusätzlichen Faktor von 1.15 [67, 68]. Wir zeigen in diesem Kapitel, dass der beim Entladen aufgrund der Relaxation der Spannungen zustande kommende Druckanstieg für das Versagen verantwortlich gemacht werden kann. Der Relaxationsprozess selbst ist eine Konsequenz der granularen Temperatur  $T_g$ , die durch das Entladen angeregt wird.

Im statischen Fall kann der Druck am Boden eines Silos einen bestimmten Sättigungswert nicht überschreiten. Es tritt der sog. Janssen-Effekt auf [22, 68]. Durch den festen Zustand granularer Materie können Scherkräfte aufrecht erhalten und so das Gewicht über die Seitenwänden getragen werden. Das Aufstellen des Kräftegleichgewichts für eine Schicht granularer Materie innerhalb des Silos führt zu einem exponentiellen Sättigungsverhalten für den Gesamtdruck am Boden [1]. Verflüssigt sich aber der Zustand der Materie, wird der Druck hydrostatisch, d.h. proportional zu Füllhöhe, was zu einem enormen Druckanstieg und damit zum Platzen des Silos führen kann.

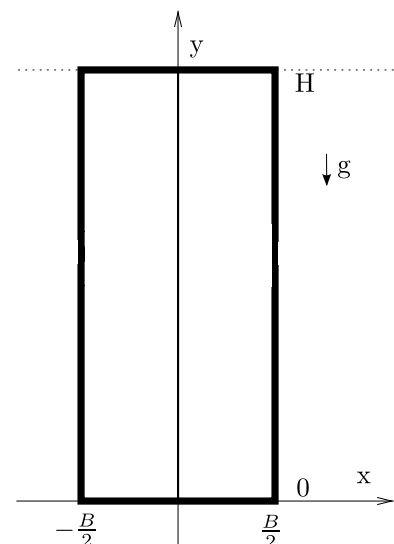


Abbildung 5.0.1: 2D-Silos der Breite  $B$  und der Höhe  $H$ .

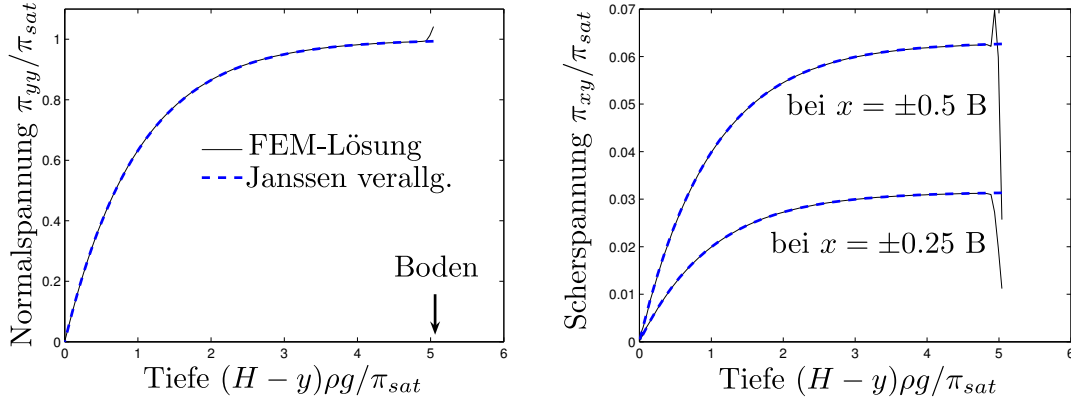


Abbildung 5.1.1: Normierte vertikale Spannung  $\pi_{yy}$  der verallgemeinerten Janssen-Lösung (gestrichelt) und der numerischen FEM-Lösung (durchgezogen) als Funktion der normierten Tiefe im Silo in der Mitte bei  $x = 0$ , links, sowie entsprechend die normierte Scherspannung  $\pi_{xy}$  rechts. Normal- und Scherspannung sättigen mit zunehmender Tiefe. Numerische und verallgemeinerte Janssen-Lösung stimmen gut überein.

## 5.1 Theoretische Beschreibung

Die physikalisch relevanten Gleichungen in der GSH-Theorie zur Beschreibung dieses Phänomens sind die für die Relaxation der Verzerrungen (3.1.14) und die Impulserhaltung (3.1.10). Die auftretenden Geschwindigkeiten für die Relaxationsprozesse in Silos dürfen wir als klein annehmen, so dass zu jeder Zeit quasi-statische Bedingungen herrschen, die zeitliche Änderung der Impulsdichte  $\partial_t g_i$  ist zu vernachlässigen. Tatsächlich beobachten die Autoren [69], dass der Janssen-Effekt auch in dynamischen Situationen bestehen bleibt. Ein mit Granulat gefüllter Glaszylinder wurde mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aufwärts bewegt, während das Granulat zurück blieb. Die gemessene Gesamtmasse zeigte die typische Janssen-Sättigung. Vernachlässigen wir ferner die Terme der Leerstellendiffusion und Terme höherer Ordnung in  $u_{ij}$  und  $T_g$ , so erhalten wir

$$\partial_t u_{ij} - v_{ij} = -\frac{1}{\tau} \left( u_{ij}^0 + \frac{\tau}{\tau_1} u_{ll} \delta_{ij} \right) \quad (5.1.1)$$

$$\nabla_j \pi_{ij} = \rho G_i. \quad (5.1.2)$$

Gleichung (5.1.2) heißt mechanisches Gleichgewicht,  $G_i$  bezeichnet die Gravitationskonstante. Zerlegen wir Gleichung (5.1.1) in den Spuranteil und den spurlosen

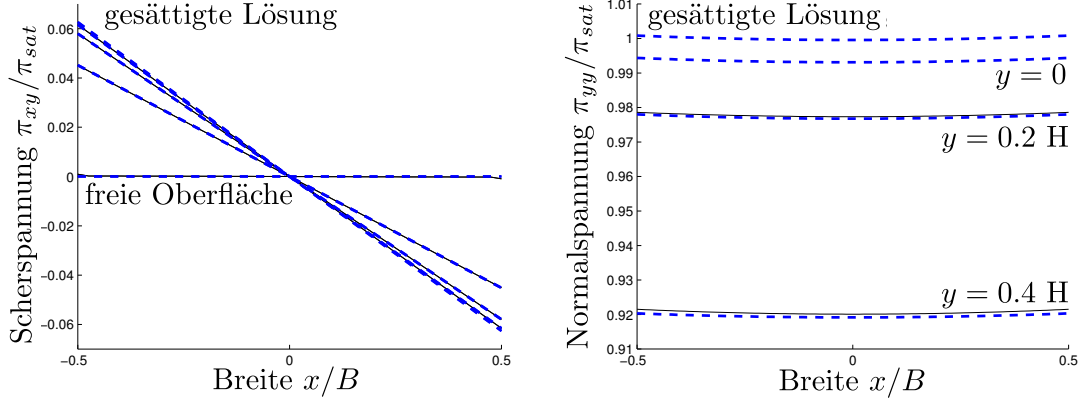


Abbildung 5.1.2: Normierte Scherspannung  $\pi_{xy}$  der verallgemeinerten Janssen-Lösung (gestrichelt) und der numerischen FEM-Lösung (durchgezogen) als Funktion der normierten Breite des Silos bei verschiedenen Höhen  $y$ , links, sowie entsprechend die normierte vertikale Spannung  $\pi_{yy}$  rechts.  $\pi_{xy}$  hat einen nahezu linearen Verlauf,  $\pi_{yy}$  einen quadratischen. Numerische und verallgemeinerte Janssen-Lösung stimmen gut überein.

Anteil, ergeben sich die Relaxationsgleichungen

$$\partial_t \Delta = -v_{ll} - \frac{3}{\tau_1} \Delta \quad (5.1.3)$$

$$\partial_t u_{ij}^0 = v_{ij}^0 - \frac{1}{\tau} u_{ij}^0. \quad (5.1.4)$$

Eine Scherung  $\sim u_{ij}^0$  relaxiert also innerhalb der Zeit  $\tau$ , eine Kompression  $\Delta$  innerhalb von  $\tau_1$ . Aus der Arbeit [19] wissen wir, dass  $\tau_1$  ca. elf mal so groß ist wie  $\tau$  und deshalb Scherungen sehr viel schneller relaxieren. Für einen Sandhaufen würde die vollständige Relaxation ein Zerfließen bis auf eine Einkornschicht bedeuten. In unserem Fall des Silos verhindern aber die festen Wände dieses Zerfließen. Eine auftretende Relaxation der Kompression in (5.1.3) wird sofort durch einen Massenstrom  $\sim v_{ll}$  kompensiert. Die Stärke der Kompression wird im Silo allein durch das über einem Punkt liegende Gewicht bestimmt. Dieses wiederum hängt von der Stärke des Janssen-Effekts ab, die wie wir sehen werden durch die Relaxation des spurfreien Anteils (5.1.4) bestimmt wird.

Wir setzen unsere Betrachtungen also nur noch mit Gleichung (5.1.4) fort. Bei einem starken Ausfluss sind die erzeugten Geschwindigkeitsgradienten und die granulare Temperatur  $T_g$  groß, so dass die Relaxationszeit  $\tau$  sehr klein wird. Wir sehen, dass der Term  $v_{ij}^0$  in (5.1.4) vernachlässigbar klein wird und erhalten die reine Relaxationsgleichung  $\partial_t u_{ij}^0 + \frac{1}{\tau} u_{ij}^0 = 0$ , deren Lösung der exponentielle Zerfall

$$u_{ij}^0 = u_{0ij}^0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5.1.5)$$

ist.  $u_{0ij}^0$  sei dabei die statische Verzerrung zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Für den Skalar  $u_s^2$  gilt dann  $u_s^2 = u_{0s}^2 e^{-2\frac{t}{\tau}}$ . Aus der Spannungs-Verzerrungs-Relation (3.2.5) können wir die entsprechenden Spannungen berechnen. Sind sämtliche Scherspannungen  $\sim u_{ij}^0$ ,  $u_s$  wegrelaxiert nimmt das Medium den hydrostatischen Druck

$$\pi_{ij} = \mathcal{B}\Delta^{\frac{3}{2}}\delta_{ij} \quad (5.1.6)$$

an. Wir sehen ganz allgemein, dass die Relaxation der elastischen Verzerrungen  $u_{ij}$  zur Relaxation der entsprechenden Spannungen  $\pi_{ij}$  führt. Dies ist unmittelbare Konsequenz der Bewegungsgleichung (3.1.14) für die Verzerrungen. Ferner gilt für die Verhältnisse  $\kappa = \pi_{xx}/\pi_{yy}$  und  $m = \pi_{xy}/\pi_{xx}$  die Zeitentwicklung

$$\kappa(t) = \frac{2\xi\Delta^2 + u_{0s}^2 e^{-2\frac{t}{\tau}} - 4\Delta u_{0xx}^0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{2\xi\Delta^2 + u_{0s}^2 e^{-2\frac{t}{\tau}} - 4\Delta u_{0yy}^0 e^{-\frac{t}{\tau}}} \rightarrow 1 \quad \text{für } t \rightarrow \infty \quad (5.1.7)$$

$$m(t) = \frac{-4\Delta u_{0xy}^0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{2\xi\Delta^2 + u_{0s}^2 e^{-2\frac{t}{\tau}} - 4\Delta u_{0xx}^0 e^{-\frac{t}{\tau}}} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty. \quad (5.1.8)$$

## 5.2 Finite Elemente und verallgemeinerte Janssen-Lösung

Wir betrachten nun eine 2D-Silo-Geometrie wie in Abbildung 5.0.1. Das Kräftegleichgewicht (5.1.2) ist dann

$$\partial_x \pi_{xx} + \partial_y \pi_{xy} = 0 \quad (5.2.1)$$

$$\partial_x \pi_{xy} + \partial_y \pi_{yy} = -\rho g \quad (5.2.2)$$

und stellt zusammen mit der Spannungs-Verzerrungs-Relation ein geschlossenes Gleichungssystem für das Verschiebungsfeld  $U_x \equiv U$  in x-Richtung und  $U_y \equiv V$  in y-Richtung dar, wobei  $u_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i U_j + \partial_j U_i)$  gilt. Unter den Randbedingungen einer freien Oberfläche am oberen Rand des Silos  $\pi_{yy} = 0$ , des Amontons-Gesetzes  $\pi_{xy} = \mu_f \pi_{xx}$  and den Seitenwänden, sowie verschwindender vertikaler Verschiebung  $V$  am Boden und horizontaler Verschiebung  $U$  an den Seitenwänden, erhalten wir mit Hilfe der Methode der finiten Elemente numerische Lösungen für den relaxationsfreien Fall. Die zugehörigen Spannungsfelder sind in den Abbildungen 5.1.1 und 5.1.2 in durchgezogener Linie dargestellt. Wir erkennen das anfangs des Kapitels erwähnte Sättigungsverhalten in vertikaler Richtung in Abbildung 5.1.1.

Um nun zu verstehen welchen Einfluss die Spannungsrelaxation auf diese statischen Lösungen hat, müsste eigentlich das Gleichungssystem aus Massen- und Impulserhaltung zusammen mit der Bewegungsgleichung für die Verzerrungen numerisch gelöst werden. Wir gehen aber einen einfacheren Weg und verallgemeinern die phänomenologische Janssen-Lösung für das Silo und sehen uns dann die Zeitentwicklung der Spannungen an, die aus (5.1.5) resultiert.

Janssen hat unter der Annahme  $\pi_{xx} = k_J \pi_{yy}$  und des Amontons-Gesetzes  $\pi_{xy} = \mu_f \pi_{xx}$  für die vertikale Spannung die Beziehung

$$\pi_{yy} = \lambda \rho g \left( 1 - e^{-\frac{y-H}{\lambda}} \right) \quad (5.2.3)$$

abgeleitet [1, 68]. Darin ist  $\lambda = B/2\mu_f k_J$ , die Größe  $k_J$  die sog. Janssen-Konstante,  $\mu_f$  der Amontons-Reibungskoeffizient und  $B$  die Breite des Silos. Die Sättigungsspannung ist offenbar  $\pi_{sat} = \lambda \rho g$ . Die Janssen-Vermutung wurde innerhalb der GSH-Theorie bestätigt [21]. Die Janssen-Lösung beschreibt das Sättigungsverhalten für die  $\pi_{yy}$ -Komponente, lässt die anderen aber unbestimmt.

Aus Abbildung 5.1.1 rechts der numerischen Lösungen entnehmen wir, dass auch die  $\pi_{xy}$ -Komponente Sättigungscharakter hat. Ferner zeigt Abbildung 5.1.2 für  $\pi_{xy}$  eine lineare und  $\pi_{yy}$  eine quadratische Abhängigkeit in x-Richtung. Wir verallgemeinern deshalb die Janssen-Lösung wie folgt

$$\pi_{yy} = \lambda \rho g \left( 1 - e^{-\frac{y-H}{\lambda}} \right) \frac{1}{n} (1 + \bar{\alpha} x^2) \quad (5.2.4)$$

$$\pi_{xx} = k_J \pi_{yy} \quad (5.2.5)$$

$$\pi_{xy} = -\lambda \rho g \left( 1 - e^{-\frac{y-H}{\lambda}} \right) \bar{\beta} x. \quad (5.2.6)$$

Dabei sei  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 \frac{\mu_f}{\mu_f^0}$  und  $n = \frac{1}{B} \int_{-B/2}^{B/2} (1 + \bar{\alpha} x^2) dx = 1 + \bar{\alpha} B^2/12$  ein Normierungsfaktor, so dass die gesamte y-Kraft  $f_y = \int_{-B/2}^{B/2} \pi_{yy} dx$  der der Janssen-Lösung (5.2.3) entspricht. Der Parameter  $\bar{\beta}$  kann aus der Amontons-Randbedingung über  $\pi_{xy}(x = \pm B/2) = \mp \mu_f \pi_{xx}(x = \pm B/2) = \mp \mu_f k_J \pi_{yy}(x = \pm B/2)$  bestimmt werden,  $\bar{\beta} = \frac{k_J \mu_f}{2Bn} (4 + B^2 \bar{\alpha})$ . Durch Anpassung an die numerischen FEM-Lösungen erhalten wir  $\bar{\alpha}_0 = 1.26 \cdot 10^{-3}$ . Für die numerischen Lösungen verwendeten wir die typischen Werte  $\rho = 1560 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ,  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ,  $B = 2\text{m}$ ,  $H = 40\text{m}$ ,  $\mu_f = \mu_f^0 = 0,2$  und  $\xi = 5/3$ . Die Abbildungen 5.1.1 und 5.1.2 zeigen die gute Übereinstimmung der verallgemeinerten Janssen-Lösung (5.2.4-5.2.6) mit den numerischen Lösungen.

Wir sind nun in der Lage den transienten Bereich der Spannungsrelaxation zu beschreiben. Wie anfangs des Kapitels argumentiert, bleibt die verallgemeinerte Janssen-Lösung bestehen. Der exponentielle Zerfall der Scherverzerrung (5.1.5) erzwingt aber den der Scherspannung  $\pi_{xy} \sim u_{xy} = u_{0xy} e^{-\frac{t}{\tau}}$ . Aus den Gleichungen (5.1.7) und (5.1.8) sehen wir, dass die Konstanten  $k_J$  und  $\mu_f$  sich nun entsprechend  $\kappa$  und  $m$  zeitlich ändern, also  $k_J \rightarrow \kappa$  und  $\mu_f \rightarrow m$ . Dies ergibt ein effektives Amontons-Gesetz  $\pi_{xy} = \mu_{eff} \pi_{xx} = \mu_f^0 e^{-\frac{t}{\tau_{eff}}} \pi_{xx}$ , wobei  $\mu_f^0 = 0,2$  der Amontons-Koeffizient zur Zeit  $t = 0$  sei, sowie  $\tau_{eff} \approx 0,73\tau$  und entsprechend ein effektives Janssen-Verhältnis.

Die Parameter  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  und  $m$  verschwinden für  $t \rightarrow \infty$ ,  $n$  und  $\kappa$  werden eins. Für die y-Abhängigkeit der vertikalen Spannungskomponente gilt etwa

$$\pi_{yy} \sim \lambda_t \rho g \left( 1 - e^{-\frac{y-H}{\lambda_t}} \right), \quad (5.2.7)$$

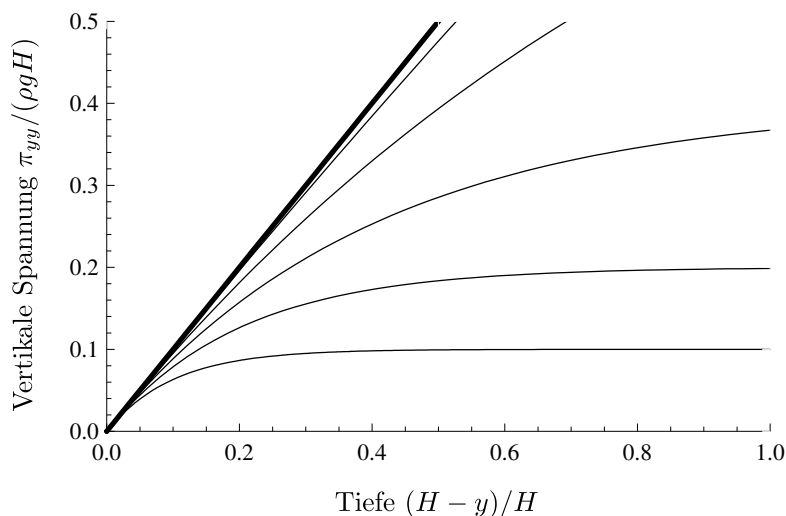


Abbildung 5.2.1: Normierte vertikale Spannung als Funktion der normierten Tiefe im Silo zu verschiedenen ansteigenden Zeiten. Die unterste Kurve zeigt das Sättigungsverhalten bei  $t = 0$ , die oberste dick gezeichnete die hydrostatische Spannung. Ein Druckanstieg um ein Vielfaches ist bei Relaxationsprozessen im Silo möglich.

mit einer zeitabhängigen effektiven Länge  $\lambda_t = B/(2m\kappa)$ . Für sehr große Zeiten ist dann

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_{yy} = \rho g (H - y). \quad (5.2.8)$$

Dies ist der hydrostatische Druck einer Flüssigkeit. Abbildung 5.2.1 zeigt diesen Verlauf von der Sättigungslösung (unterste Kurve) bis zur fett gezeichneten hydrostatischen Lösung. Entsprechend gilt in diesem Limes  $\pi_{xx} = \pi_{yy}$  und  $\pi_{xy} = 0$ . Das Granulat liegt also in vollständig verflüssigter Form vor, wie sie etwa in der Arbeit [70] beobachtet wurde. Für die hier verwendeten realistischen Werte kann der Druck also auf ein Vielfaches seines Sättigungswertes ansteigen, siehe Abbildung 5.2.1. Die Abschätzung der DIN-Norm für den Druckanstieg mit dem Faktor 1,15 kann leicht übertroffen werden.

### 5.3 Quasi-hydrostatische Lösung und Janssenkonstante

Wir wollen zum Abschluss des Kapitels eine besondere exakte Lösung der GSH-Gleichungen für den statischen Fall im Silo geben. Nachdem der Entleerungsvorgang gestoppt wurde, die granulare Temperatur  $T_g$  null und das System wieder statisch ist, nimmt es vielleicht wiederum die Janssen-Lösung an. Es gibt dazu aber eine

Alternative. Die Verschiebungsfelder  $U \equiv 0$  und

$$V = \frac{3}{5} \frac{\mathcal{B}}{\rho g} \left( \left( \frac{\rho g}{\mathcal{B}} (H - y) \right)^{\frac{5}{3}} - \left( \frac{\rho g}{\mathcal{B}} H \right)^{\frac{5}{3}} \right) \quad (5.3.1)$$

mit den daraus berechneten Spannungen

$$\pi_{yy} = \frac{\mathcal{B}}{\xi} \left( \xi + \frac{5}{2} \left( 1 - \frac{1}{d} \right) \right) \Delta^{\frac{3}{2}} = \rho g (H - y) \quad (5.3.2)$$

$$\pi_{xx} = \left( 1 + \frac{4d}{5 - 5d - 2d\xi} \right) \pi_{yy} \quad (5.3.3)$$

$$\pi_{xy} = 0 \quad (5.3.4)$$

lösen das mechanische Gleichgewicht (5.1.2). Der Parameter  $d$  bezeichnet dabei die Dimension, also  $d = 2, 3$ . Wir nennen diese Lösung quasi-hydrostatisch, da die vertikale Spannung  $\pi_{yy}$  wie bei Flüssigkeiten linear mit der Tiefe wächst. Im Gegensatz zu Flüssigkeiten gibt es aber einen Scheranteil  $\pi_s \neq 0$ , da Normalspannungsdifferenzen  $\pi_{xx} \neq \pi_{yy}$  vorhanden sind. Diese Lösung kann als das  $\mu_f \rightarrow 0$  Limit der Janssen-Lösung gesehen werden. Beim Annehmen dieser Lösung nach der vollständigen Verflüssigung bliebe die vertikale Spannung unverändert. Es wäre interessant experimentell zu überprüfen, ob diese oder die Janssen-Lösung angenommen wird. Es ist aber zu beachten, dass die Verschiebungsfelder  $U = 0$  und (5.3.1) die elastische Deformation im Gravitationsfeld repräsentieren und sich von der plastischen Gesamtverschiebung während der Relaxation unterscheiden.

Das Janssen-Verhältnis dieser Lösung für den 2D-Fall  $d = 2$  und  $\xi = 5/3$  ist

$$k_J = \frac{\pi_{xx}}{\pi_{yy}} = 1 + \frac{4d}{5 - 5d - 2d\xi} = \frac{11}{35} \approx 0,31. \quad (5.3.5)$$

Dies entspricht ziemlich genau dem Wert, den man aus den numerischen FEM-Berechnungen über die Mittlung

$$k_J = \frac{1}{A} \int_A \frac{\pi_{xx}}{\pi_{yy}} dA \approx 0,31 \quad (5.3.6)$$

erhält. Hier ist  $A = BH$  das 2D-Volumen. Für den zylindersymmetrischen 3D-Fall liefern entsprechende FEM-Berechnungen einen Wert von  $k_J = 0,4$ , was ebenfalls mit der  $k_J$ -Formel (5.3.5) übereinstimmt. Es scheint also so, als ob das Janssen-Verhältnis  $k_J$  universell ist, solange granulare Materie in Behältern eingesperrt ist und nicht von der genauen Geometrie und der Form der Lösung abhängt.

Wir haben in diesem Kapitel gesehen, dass die in der GSH-Theorie enthaltene Bewegungsgleichung für die Verzerrungen zur Spannungsrelaxation führt. Für ein mit Granulat gefülltes Silo hat dies zur Konsequenz, dass die Janssen-Lösung mit ihrem Sättigungscharakter für den Druck beim Entleeren in eine hydrostatische übergeht. Der damit verbundene Druckanstieg ist eine plausible Erklärung für das oft unerwartete Zusammenbrechen von Silos.





# Kapitel 6

## Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Anwendung der hydrodynamischen Theorie auf granulare Systeme. M. Liu und Y. Jiang haben eine solche, GSH genannte, hydrodynamische Theorie entwickelt [19, 20]. Sie wird in dieser Arbeit auf akustische Eigenschaften und Relaxationsphänomene granularer Systeme angewendet. Ziel ist es die unterschiedlichen akustischen Eigenschaften, zu denen die spannungsinduzierte Anisotropie, der Softening-Effekt und die starke nichtlineare Dämpfung gehören, innerhalb dieser Theorie zu beschreiben. Dazu leiten wir aus dem Satz von GSH-Gleichungen eine Wellengleichung ab und interpretieren damit aktuelle experimentelle Befunde. Außerdem geben wir eine erstaunlich einfache Erklärung für das Phänomen der unerwartet platzenden Silos.

Das Konzept der granularen Temperatur und die durch sie gesteuerte Relaxation der Spannungen ist zentraler Bestandteil der Theorie und dieser Arbeit. Wir leiten aus den GSH-Gleichungen einen neuen nicht-viskosen Dämpfungsmechanismus ab, der es erlaubt die gemessene nichtlineare Dämpfung granularer Materie zu verstehen.

Eine Einführung in die vielfältigen Phänomene granularer Materie ist in Kapitel 1 gegeben, ebenfalls ein Überblick über aktuelle Forschungsfragen im Bereich der granularen Akustik. Die Besonderheit granularer Materie ist die Fähigkeit den Aggregatzustand ohne merkliche Temperaturänderung von fest nach flüssig zu wechseln. Die Akustik ist zum Verständnis dieser Phänomene von zentraler Bedeutung, das sie Einsicht in viele wichtigen Materialparameter gibt.

In Kapitel 2 stellen wir die hydrodynamische Theorie anhand des Beispiels von newtonschen Fluiden, Festkörpern und Polymeren vor. Die hydrodynamische Theorie ist eine makroskopische Theorie zur Beschreibung kondensierter Systeme im Grenzfall kleiner Wellenlängen und Frequenzen. Die Standardprozedur, die wir anwenden und die zu einer expliziten Form der Bewegungsgleichungen führt, verwendet lediglich Erhaltungssätze, Symmetrieargumente, die irreversible Thermodynamik und das Konzept der langsamen Variablen.

Im folgenden Kapitel 3 leiten wir die GSH-Theorie explizit ab. Sie ist eine Erweiterung der in Kapitel 2 diskutierten hydrodynamischen Theorie polymerer Fluide. Der zentrale Bestandteil ist die Einführung der granularen Entropie als langsame

Variable mit einer entsprechenden Bewegungsgleichung, sowie die durch sie gesteuerte Relaxationsrate für die elastischen Spannungen. Wir sind damit in der Lage die transienten Eigenschaften granularer Materie zu beschreiben.

Kapitel 4 und 5 beinhalten die eigentlichen Ergebnisse dieser Arbeit. Wir wenden die vorgestellte GSH-Theorie auf akustische Fragestellungen an. Dazu gehören die starke frequenz- und amplitudenabhängige Dämpfung, der sog. Softening-Effekt und die spannungsinduzierte Anisotropie.

Aus der Bewegungsgleichung für die granulare Entropie leiten wir in Abschnitt 4.1 eine für die granulare Temperatur  $T_g$  ab. Diese Temperatur ist ein Maß für die Energie der mesoskopischen Freiheitsgrade der Sandkörner. Wir können damit zeigen, dass  $T_g$  beim Durchgang einer Schallwelle durch ein granulares Medium entweder einem sinusförmig modulierten Anstieg auf eine Temperatur  $T_{sat}$  folgt oder aber in Amplitude und Phase der äußeren Störung folgt und dabei um denselben Wert  $T_{sat}$  fluktuiert. In Abschnitt 4.2 geben wir das aus den GSH-Gleichungen folgende nichtlineare Wellengleichungssystem an. Anhand von numerischen Lösungen eines eindimensionalen Falles in Unterabschnitt 4.2.1 erkennen wir, dass gemäß der GSH-Theorie die Dämpfung mit der vierten Potenz der Frequenz und quadratisch in der Amplitude skaliert. Des weiteren sagen aber voraus, dass trotz hoher Frequenz Schallpulse genügend kurzer Dauer dennoch nur schwach gedämpft propagieren können. Das liegt an der endlichen Anstiegszeit von ca.  $10^{-5}$  s der granularen Temperatur auf ihren Sättigungswert. Ein kurzer Puls hat nicht die Zeit eine relevante granulare Temperatur zu erzeugen. Numerische Lösungen veranschaulichen diesen Sachverhalt.

Wir geben dann, in Abschnitt 4.4 analytische Lösungen der GSH-Wellengleichung für dreidimensionale akustische Fragestellungen. Das ist durch eine Näherung möglich, in der wir die granulare Temperatur durch ihren Sättigungswert  $T_{sat}$  ersetzen. Wir finden bzgl. Frequenz und Amplitude das gleiche Skalierungsverhalten wie für den eindimensionalen Fall. Die abgeleiteten Ergebnisse werden mit aktuellen experimentellen Daten verglichen, wobei gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment gefunden wird.

Das Softening, ein durch die Schallwelle verursachtes Herabsetzen des elastischen Moduls, behandeln wir in Unterabschnitt 4.4.3. In der GSH-Theorie ist es direkte Folge des Außerdiagonalelements  $\alpha$  der Onsager-Matrix. Durch die in diesem Abschnitt gegebene Abhängigkeit von  $\alpha$  von der granularen Temperatur erzielen wir ebenfalls gute Übereinstimmung mit dem Experiment.

Experimentelle Beobachtungen in Resonanzsäulenversuchen zeigen, dass unterhalb einer bestimmten Anregungsamplitude die Dämpfung amplitudenunabhängig bleibt. Diesen Bereich schauen wir uns in Unterabschnitt 4.4.2 an. In der GSH-Theorie gibt es dafür zwei mögliche Ursachen. Eine davon ist die herkömmliche newtonsche Viskosität, die andere hängt mit dem Transportkoeffizienten für die Leerstellendiffusion zusammen. Durch ihn ist in klassischen Festkörpern ein Massenstrom ohne Änderung des elastischen Gitters möglich. In granularer Materie erlaubt

das Vorhandensein von Kraftketten, das sind Aneinanderreihungen von Körnern in direktem Kontakt, dass die übrigen, sich nicht in dieser Kette befindlichen Körner, sich ähnlich den Leerstellen frei bewegen können. Beide Terme führen zu amplitudenabhängiger Dämpfung, aber nur der Mechanismus über die Leerstellendiffusion führt zu Plastizität. Beide Interpretationen stehen offen und könnten durch zukünftige Experimente widerlegt oder bestätigt werden.

In Abschnitt 4.5 diskutieren wir die rein elastischen Eigenschaften granularer Materie. Dazu gehört die spannungsinduzierte Anisotropie und ihre Abhängigkeit von der Packungsdichte. Wir können zeigen, dass die durch die GSH-Theorie gegebenen Schallmoden experimentelle Befunde gut wiedergeben, ohne dass wir auf das Konzept der „fabric anisotropy“, einer mit dem Korngerüst und durch die genaue Präparationsmethode verbundenen Anisotropie, zurückgreifen müssen. Die Resultate dieses Abschnitts sind teilweise in der Arbeit [60] erschienen, werden hier aber ausführlicher dargestellt.

Im Unterabschnitt 4.5.2 wenden wir die abgeleitete Darstellung elastischer Schallmoden auf ein statische Scherung granularer Materials an. Die Ergebnisse sind analytisch dargestellt und könnten experimentell überprüft werden.

Der folgende Unterabschnitt 4.5.3 enthält eine spezifische Diskussion über Scherwellen. Mit der in der GSH-Theorie bisher verwendeten Form der elastischen Energie haben, bei uniaxialen Druckverhältnissen, alle elastischen Schermoden unabhängig von ihrer Ausbreitungsrichtung die gleiche Geschwindigkeit. Experimentell beobachtet man aber Unterschiede in der Scherwellengeschwindigkeit, abhängig von Polarisation und Ausbreitungsrichtung. Wir können nun ganz allgemein zeigen, dass nur wenn die dritte Invariante des Verzerrungstensors in den Energieausdruck aufgenommen wird, diese Entartung verschwindet, wobei aber selbst in diesem Fall sind maximal zwei unterschiedliche Geschwindigkeiten möglich sind.

Im letzten Unterabschnitt 4.5.4 diskutieren wir was mit den elastischen Schallmoden passiert, wenn das statische Spannungsfeld den Punkt der thermodynamischen Instabilität erreicht. Entgegen der Erwartung bleibt die Schallgeschwindigkeit beim Erreichen endlich.

In Kapitel 5 verlassen wir die granulare Akustik und wenden uns dem Phänomen der unerwartet platzenden Silos zu. Dies geschieht beim Entleeren. Durch den Entleerungsvorgang und die dabei auftretenden Scherströmungen wird granulare Temperatur erzeugt. Diese führt wiederum laut GSH-Theorie zur Relaxation der Spannungen. Im statischen Fall kann der Druck am Boden eines Silos unabhängig von der Füllhöhe einen bestimmten Wert nicht überschreiten, da der Janssen-Effekt einsetzt. Scherkräfte mit den Wänden fangen einen Teil des Gewichts ab. Durch die Relaxation verflüssigt sich aber der Materialzustand und infolge dessen wird der Druck hydrostatisch und kann den Sättigungsdruck um ein Vielfaches übersteigen.

Zusammenfassend können wir feststellen, dass die GSH-Theorie in der Lage ist die unterschiedlichsten Phänomene granularer Materie zu fassen. Der hier beschriebene Dämpfungsmechanismus über die granulare Temperatur ist direkte Folge der

Bewegungsgleichungen und damit der Struktur der Theorie. Genauso fundamental ist die Erklärung des Softening-Effekts, welcher auf einen nicht diagonalen Onsagerkoeffizienten zurückzuführen ist. Die spannungsinduzierte Anisotropie ist direkte Konsequenz der nichtlinearen elastischen Energie.

# Anhang A

## Hydrodynamische Methode

### A.1 Gleichgewichtsbedingungen

Wir bedienen uns der Maximaleigenschaft der Entropie und maximieren das Entropiefunktional  $S = \int s \, dV$  unter den Nebenbedingungen gegebener Energie  $W = \int w \, dV$ , Masse  $M = \int \rho \, dV$ , Impuls  $G_i = \int g_i \, dV$ , Drehimpuls  $L_i = \int \varepsilon_{ijk} r_j g_k \, dV$  und Booster  $B_i = \int (\rho r_i - g_i t) \, dV$ , vgl. [35]. Durch Einführung eines neuen Funktionals  $H = S - \lambda_1 W - \lambda_2 M - \lambda_{3i} G_i - \lambda_{4i} L_i - \lambda_{5i} B_i$  erhalten wir die Lösung aus  $\delta H = 0$  [36] oder äquivalenterweise mit  $h = s - \lambda_1 w - \lambda_2 \rho - \lambda_{3i} g_i - \lambda_{4i} l_i - \lambda_{5i} b_i$ , wobei  $l_i = \varepsilon_{ijk} r_j g_k$  und  $b_i = \rho r_i - g_i t$

$$\delta \int_{\Omega} (s - \lambda_1 w - \lambda_2 \rho - \lambda_{3i} g_i - \lambda_{4i} l_i - \lambda_{5i} b_i) \, dV = 0. \quad (\text{A.1.1})$$

Dabei sind die  $\lambda_i$  Lagrangeparameter. Bezeichnen wir mit  $\phi_i$  die thermodynamischen Variablen  $\phi_i = (w, \rho, g_i, a_i)$  und ist die Entropie wie im Falle eines Festkörpers durch eine Beziehung der Form  $s = s(w, \rho, g_i, \nabla_i a_\alpha)$  gegeben, ergeben die Euler-Lagrange Gleichungen  $\frac{\partial h}{\partial \phi_i} - \text{div} \left( \frac{\partial h}{\partial \nabla \phi_i} \right) = 0$  das System

$$\frac{\partial h}{\partial \phi_1} - \text{div} \left( \frac{\partial h}{\partial \nabla \phi_1} \right) = \frac{1}{T} - \lambda_1 = 0 \quad (\text{A.1.2})$$

$$\frac{\partial h}{\partial \phi_2} - \text{div} \left( \frac{\partial h}{\partial \nabla \phi_2} \right) = -\frac{\mu}{T} - \lambda_2 - \lambda_{5i} r_i = 0 \quad (\text{A.1.3})$$

$$\frac{\partial h}{\partial \phi_{3i}} - \text{div} \left( \frac{\partial h}{\partial \nabla \phi_{3i}} \right) = -\frac{v_i}{T} - \lambda_{3i} - \varepsilon_{ijk} \lambda_{4j} r_k + \lambda_{5i} t = 0 \quad (\text{A.1.4})$$

$$\frac{\partial h}{\partial \phi_{4i}} - \text{div} \left( \frac{\partial h}{\partial \nabla \phi_{4i}} \right) = -\nabla_j \left( \frac{1}{T} \psi_{ij} \right) = 0. \quad (\text{A.1.5})$$

Durch das Bilden von zeitlichen und räumlichen Ableitungen ergeben sich daraus die lokalen Gleichgewichtsbedingungen

$$\nabla_i T = 0, \quad \partial_t v_i + \nabla_i \mu = 0, \quad v_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) = 0, \quad \nabla_i \psi_{\alpha i} = 0. \quad (\text{A.1.6})$$

### A.1.1 Isotrope Festkörper

Für isotrope Medien vereinfacht sich die letzte dieser Bedingungen. Die Energiedichte ist in diesem Fall nur eine Funktion des Eulerschen Verzerrungstensors  $u_{ij}$ , der über die Beziehung

$$u_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - (\nabla_i a_k) (\nabla_j a_k)) \quad (\text{A.1.7})$$

definiert ist [30, 40]. Das Entropiedifferential lässt sich dann als  $ds = \dots + \frac{1}{T} \pi_{ij} du_{ij} = 2\pi_{jk} (\nabla_k a_i) d(\nabla_j a_i)$  schreiben, was auf die Gleichgewichtsbedingung  $-\text{div} \left( \frac{\partial h}{\partial \nabla a_i} \right) = \frac{1}{T} \nabla_j (\pi_{jk} (\nabla_k a_i)) = 0$  führt. Wir benutzen nun die polare Zerlegung des Deformationsgradienten  $\nabla_i a_\alpha$  in einen orthogonalen und symmetrischen Anteil  $\nabla_i a_\alpha = R_{\alpha i} \Xi_{ij}$ , wobei  $R_{\alpha i}$  orthogonal,  $\Xi_{ij}$  symmetrisch und über  $\delta_{ij} - 2u_{ij} = \Xi_{ik} \Xi_{kj}$  mit den Verzerrungen  $u_{ij}$  verbunden ist. Die Rotationsmatrix  $R_{\alpha i}$  transformiert dabei i.A. die lokal bevorzugten Richtungen zurück in diejenigen des undeformierten Anfangszustandes. Für isotrope Medien gibt es aber keine bevorzugten Richtungen, so dass wir  $R_{\alpha i} = \delta_{\alpha i}$  wählen dürfen. Für die Gleichgewichtsbedingung erhalten wir

$$\nabla_j (\pi_{jk} \Xi_{ki}) = 0. \quad (\text{A.1.8})$$

Für  $\Xi_{ij}$  kann eine Potenzreihe in  $u_{ij}$  angegeben werden,  $\Xi_{ij} = \sqrt{\delta_{ij} - 2u_{ij}} = \delta_{ij} - u_{ij} - \frac{1}{2} u_{ik} u_{kj} \dots$ , so dass sich in niedrigster Ordnung die Gleichgewichtsbedingung auf

$$\nabla_j \pi_{ij} = 0 \quad (\text{A.1.9})$$

reduziert.

### A.1.2 Relaxierende Medien

Relaxieren die elastischen Verzerrungen  $u_{ij}$ , so können sie nicht mehr auf das Koordinatenfeld  $a_\alpha$  zurückgeführt werden und die Entropie hat die Form  $s = s(\dots, u_{ij})$  mit sechs unabhängigen Komponenten  $u_{ij}$ . Gleichung (A.1.5) ergibt dann entsprechend

$$\frac{\partial h}{\partial u_{ij}} \sim \pi_{ij} = 0. \quad (\text{A.1.10})$$

Sie gilt für Polymere, aber auch für granulare Fluide im Fall  $T_g \neq 0$ .

### A.1.3 Granulare Materie

Im Fall granularer Medien hat die Energiedichte die Form (3.1.2), woraus die Darstellung  $s = s(\dots, s_g)$  folgt. Da mit  $s_g$  kein Erhaltungssatz verbunden ist, muss wie im Fall der Verzerrungen (A.1.10) im globalen Gleichgewicht die konjugierte Variable selbst verschwinden

$$T_g = 0. \quad (\text{A.1.11})$$

Ferner verwenden wir aus Analogie zur absoluten Temperatur die Gleichgewichtsbedingung  $\nabla_i T_g = 0$ . Sie steht nicht im Widerspruch zu (A.1.11) und es ist plausibel, mit einem Gradienten in  $T_g$  einen dissipativen Strom zu verbinden.

## A.2 Materielle Ableitung

In der Kontinuumsmechanik gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten eine Feldgröße  $\Phi$  zu beschreiben. Entweder gibt man die Größen als Funktion eines bestimmten Ortes zu einer bestimmten Zeit an, etwa  $\Phi = \Phi(r_i, t)$ , oder man fragt, wie groß  $\Phi$  für ein Fluidteilchen  $a_i$  während einer Bewegung  $\Phi = \Phi(a_i, t)$  ist. Das Fluidteilchen wird dabei durch seine Anfangskoordinate  $a_i$  identifiziert. Entsprechend können zwei Zeitableitungen definiert werden [34]. Die materielle Zeitableitung  $\frac{d}{dt}\Phi(a_i, t) = \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_a$  bei festgehaltenem Teilchen  $a_i$  und die lokale Zeitableitung  $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(r_i, t) = \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{r_i}$ . Wir schreiben nun  $\Phi = \Phi(r_i, t) = \Phi(r_i(a_k, t), t)$  und meinen mit  $r_i = r_i(a_k, t)$  den Ort  $r_i$ , an dem sich zur Zeit  $t$  das Teilchen  $a_i$  befindet, welches zur Zeit  $t = 0$  am Ort  $a_i$  war. Da  $\Phi$  in dieser Darstellung von  $a_i$  abhängt, kann die materielle Ableitung mit Hilfe der Kettenregel in lokaler Form dargestellt werden

$$\frac{d}{dt}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{a_k} = \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{r_i} + \frac{\partial\Phi}{\partial r_i}\Big|_t \frac{\partial r_i}{\partial t}\Big|_{a_k} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + v_i \frac{\partial\Phi}{\partial r_i} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_i \nabla_i \right) \Phi.$$

## A.3 Standardprozedur für Festkörper

Für Festkörper schreiben wir das Differential der Energiedichte  $w$  als

$$dw = T ds + \mu d\rho + v_i dg_i + \psi_{\alpha i} d\nabla_i a_\alpha \quad (\text{A.3.1})$$

und die Bewegungsgleichungen für die Energiedichte, die Entropiedichte  $s$ , die Massendichte  $\rho$ , die Impulsdichte  $g_i$  sowie für die Koordinaten  $a_\alpha$  in der Form

$$\begin{aligned} \partial_t w + \nabla_i Q_i &= 0 & \partial_t s + \nabla_i f_i &= \frac{R}{T} \\ \partial_t \rho + \nabla_i j_i &= 0 & \partial_t g_i + \nabla_j \sigma_{ij} &= 0 \\ \partial_t \nabla_i a_\alpha &= -(\nabla_i v_k)(\nabla_k a_\alpha) - v_k \nabla_k (\nabla_i a_\alpha) + \nabla_i Y_\alpha, \end{aligned} \quad (\text{A.3.2})$$

wobei letztere aus  $d_t a_\alpha = Y_\alpha$  folgt [30]. Man beachte die dortige umgekehrte Vorzeichendefinition. Ferner benutzen wir die Gleichheit von Massenstrom- und Impulsdichte  $j_i = g_i$  sowie die Symmetrie der Impulsstromdichte  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Die materielle Zeitableitung  $d_t = \partial_t + v_k \nabla_k$  der Energiedichte folgt aus (A.3.1) und ergibt  $d_t w = T d_t s + \mu d_t \rho + v_i d_t g_i + \psi_{\alpha i} d_t \nabla_i a_\alpha$ , oder

$$\begin{aligned} \partial_t w + v_k \nabla_k w &= T \partial_t s + \mu \partial_t \rho + v_i \partial_t g_i + \psi_{\alpha i} \partial_t \nabla_i a_\alpha + \\ & T v_k \nabla_k s + \mu v_k \nabla_k \rho + v_i v_k \nabla_k g_i + \psi_{\alpha i} v_k \nabla_k \nabla_i a_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

Setzen wir die Bewegungsgleichungen (A.3.2) darin ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_t w &= R - T \nabla_i f_i - \mu \nabla_i g_i - v_i \nabla_j \sigma_{ij} - \psi_{\alpha i} (\nabla_k a_\alpha) (\nabla_i v_k) + \psi_{\alpha i} \nabla_i Y_\alpha \\ &\quad + T v_k \nabla_k s + \mu v_k \nabla_k \rho + v_i v_k \nabla_k g_i - v_k \nabla_k w. \end{aligned}$$

Die Produktregel rückwärts angewendet liefert

$$\begin{aligned} \partial_t w &= R - \nabla_i (T f_i) + f_i \nabla_i T - \nabla_i (\mu g_i) + g_i \nabla_i \mu - \nabla_j (v_i \sigma_{ij}) + \sigma_{ij} \nabla_j v_i \\ &\quad - \psi_{\alpha i} (\nabla_k a_\alpha) (\nabla_i v_k) + \nabla_i (\psi_{\alpha i} Y_\alpha) - Y_\alpha \nabla_i \psi_{\alpha i} + \nabla_k (v_k T s) - s \nabla_k (T v_k) \\ &\quad + \nabla_k (v_k \mu \rho) - \rho \nabla_k (\mu v_k) + \nabla_k (v_k v_i g_i) - g_i \nabla_k (v_i v_k) - \nabla_k (v_k w) + w \nabla_k v_k \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \partial_t w &= -\nabla_i (T f_i + \mu g_i + v_j \sigma_{ji} - \psi_{\alpha i} Y_\alpha - v_i (T s + \mu \rho + v_k g_k - w)) \\ &\quad + R + (f_i - s v_i) \nabla_i T + (\sigma_{ij} - v_j g_i - \psi_{\alpha j} (\nabla_i a_\alpha)) \nabla_j v_i + (g_i - \rho v_i) \nabla_i \mu \\ &\quad - (T s + \mu \rho + v_i g_i - w) \nabla_k v_k - Y_\alpha \nabla_i \psi_{\alpha i}. \end{aligned}$$

Benutzen wir die Symmetrie von  $\psi_{\alpha j} \nabla_i a_\alpha$ , s. [30], sowie  $g_i = \rho v_i$  und bezeichnen wir, wie in der Hydrodynamik gewöhnlicher Fluide üblich, den Ausdruck  $T s + \mu \rho + v_k g_k - w$  mit  $P$ , so können wir schreiben

$$\begin{aligned} \partial_t w + \nabla_i (T f_i + \mu \rho v_i - \psi_{\alpha i} Y_\alpha + v_j (\sigma_{ij} - P \delta_{ij})) &= \\ R + (f_i - s v_i) \nabla_i T + (\sigma_{ij} - P \delta_{ij} - \rho v_i v_j - \psi_{\alpha j} (\nabla_i a_\alpha)) v_{ij} &- Y_\alpha \nabla_i \psi_{\alpha i}. \end{aligned}$$

Vergleichen wir das mit dem Ausdruck für die Energieerhaltung in (A.3.2), können wir den Energiestrom  $Q_i$  und die Entropieproduktion  $R$  identifizieren

$$Q_i = T f_i + \mu \rho v_i - \psi_{\alpha i} Y_\alpha + v_j (\sigma_{ij} - P \delta_{ij}) \quad (\text{A.3.4})$$

$$R = - (f_i - s v_i) \nabla_i T - (\sigma_{ij} - P \delta_{ij} - \rho v_i v_j - \psi_{\alpha i} \nabla_j a_\alpha) v_{ij} + Y_\alpha \nabla_i \psi_{\alpha i}. \quad (\text{A.3.5})$$

Die Entropieproduktion ist eine Summe von Produkten aus thermodynamischen Kräften und ihren zugeordneten Strömen. Da wir die Kräfte bereits kennen, vgl. (A.1.6), schreiben wir

$$f_i^D = - (f_i - s v_i) \quad (\text{A.3.6})$$

$$\sigma_{ij}^D = - (\sigma_{ij} - P \delta_{ij} - \rho v_i v_j - \psi_{\alpha i} \nabla_j a_\alpha), \quad (\text{A.3.7})$$

wobei der Superskript  $D$  für dissipativ steht und bestätigen  $Y_\alpha$  als dissipativen Strom. Bei bekannten dissipativen Strömen sind dann alle unbekanntes Stromdichten in (A.3.2) bestimmt.

**Anmerkung** Die Abhängigkeit der Energiedichte von  $g_i$  ist aufgrund der Galilei-Invarianz immer durch  $w = w_0(s, \rho, \nabla_i a_\alpha) + \frac{g_i^2}{(2\rho)}$  gegeben. Wegen  $g_i = \rho v_i$  gilt deswegen  $\mu = \left. \frac{\partial w}{\partial \rho} \right|_{s, g_i, \nabla_i a_\alpha} = \left. \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right|_{s, g_i, \nabla_i a_\alpha} - \frac{v_i^2}{2} = \mu_0 - \frac{v_i^2}{2}$  und daher  $P = T s + \mu_0 \rho - w_0$ . Der Ausdruck  $P$  ist unabhängig von der Impulsdichte.



# Anhang B

## GSH-Standardprozedur

Die granulare Energiedichte ist  $w = w(s, s_g, \rho, g_i, u_{ij})$ , die granulare Entropie  $s_g$  und die Verzerrungen  $u_{ij}$  sind langsame Variablen,  $u_{ij}$  ist symmetrisch. Für das Energiedifferential folgt

$$dw = Tds + T_g ds_g + \mu d\rho + v_i dg_i - \pi_{ij} du_{ij}. \quad (\text{B.0.1})$$

Man beachte die Vorzeichenkonvention für  $\pi_{ij}$ , die sich gegenüber den Arbeiten [30, 31] geändert hat. Die granularen Gleichgewichtsbedingungen sind, s. Abschnitt A.1,

$$\nabla_i T = 0, \quad \partial_t v_i + \nabla_i \mu = 0, \quad v_{ij} = 0, \quad (\text{B.0.2})$$

$$T_g = 0, \quad \nabla_i T_g = 0, \quad \pi_{ij} = 0, \quad \nabla_i \pi_{ij} = 0. \quad (\text{B.0.3})$$

Es gelten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t w + \nabla_i Q_i &= 0, & \partial_t s + \nabla_i f_i &= \frac{R}{T}, \\ \partial_t \rho + \nabla_i j_i &= 0, & \partial_t g_i + \nabla_j \sigma_{ij} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.0.4})$$

mit  $g_i = j_i = \rho v_i$  sowie

$$\partial_t s_g + \nabla_i F_i = \frac{R_g}{T_g} \quad (\text{B.0.5})$$

und die Bewegungsgleichung für die Verzerrungen, Gleichung (12) in [30]

$$\partial_t u_{ij} = -v_k \nabla_k u_{ij} + v_{ij} + X_{ij} - \left[ \frac{1}{2} \nabla_j Y_i + u_{ik} (\nabla_j v_k) \right] - \left[ i \leftrightarrow j \right] \quad (\text{B.0.6})$$

mit  $R_{\alpha i} = \delta_{\alpha i}$ , da wir ein isotropes Medium betrachten. Außerdem verwenden wir hier gegenüber [30] für  $Y_\alpha$  die entgegengesetzte Vorzeichenkonvention. Die materielle Zeitableitung der Energie (B.0.1) ergibt

$$\frac{dw}{dt} = T \frac{ds}{dt} + T_g \frac{ds_g}{dt} + \mu \frac{d\rho}{dt} + v_i \frac{dg_i}{dt} - \pi_{ij} \frac{du_{ij}}{dt} \quad (\text{B.0.7})$$

mit  $\frac{d}{dt} = \partial_t + v_k \nabla_k$ . Mit den Bewegungsgleichungen (B.0.4) bis (B.0.6) folgt

$$\begin{aligned} \partial_t w = & T \left( \frac{R}{T} - \nabla_i f_i \right) + T_g \left( \frac{R_g}{T_g} - \nabla_i F_i \right) - \mu \nabla_i g_i - v_i \nabla_j \sigma_{ij} \\ & - \pi_{ij} \left( -v_k \nabla_k u_{ij} + v_{ij} + X_{ij} - \left[ \frac{1}{2} \nabla_j Y_i + u_{ik} (\nabla_j v_k) \right] - \left[ i \leftrightarrow j \right] \right) \\ & + T v_k \nabla_k s + T_g v_k \nabla_k s_g + \mu v_k \nabla_k \rho + v_i v_k \nabla_k g_i \\ & - \pi_{ij} v_k \nabla_k u_{ij} - v_k \nabla_k w. \end{aligned} \quad (\text{B.0.8})$$

Mehrmaliges Anwenden der Produktregel und Ausnutzen der Symmetrien von  $\sigma_{ij}$ ,  $\pi_{ij}$ ,  $u_{ij}$  und aufgrund der Rotationsinvarianz der Energie  $\pi_{ik} u_{jk} + \pi_{ki} u_{kj} = (i \leftrightarrow j)$  wie in [30], ergibt

$$\begin{aligned} \partial_t w = & -\nabla_i (T f_i + T_g F_i + \mu g_i - Y_i \pi_{ij} + v_j \sigma_{ij} - v_i (T s + T_g s_g + \mu \rho + v_k g_k - w)) \\ & + (\pi_{ki} u_{kj} + \pi_{jk} u_{ki}) v_{ij} + (g_i - \rho v_i) \nabla_i \mu \\ & + R + (f_i - s v_i) \nabla_i T + \sigma_{ij} v_{ij} - \pi_{ij} v_{ij} - \pi_{ij} X_{ij} \\ & + R_g + (F_i - s_g v_i) \nabla_i T_g - Y_i \nabla_j \pi_{ij} \\ & - (T s + T_g s_g + \rho \mu - w) \nabla_k v_k - g_i v_i \nabla_k v_k - g_i v_k \nabla_k v_i. \end{aligned} \quad (\text{B.0.9})$$

Führen wir zur Abkürzung  $P_T = T s + T_g s_g + \mu \rho + v_k g_k - w$  ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_t w = & -\nabla_i (T f_i + T_g F_i + \mu g_i - Y_i \pi_{ij} + (\sigma_{ij} - P_T \delta_{ij}) v_j) \\ & + (\pi_{ki} u_{kj} + \pi_{jk} u_{ki} + \sigma_{ij} - \pi_{ij} - g_i v_j - P_T \delta_{ij}) v_{ij} \\ & + R + (f_i - s v_i) \nabla_i T - Y_i \nabla_j \pi_{ij} - \pi_{ij} X_{ij} + R_g + (F_i - s_g v_i) \nabla_i T_g. \end{aligned} \quad (\text{B.0.10})$$

Im Vergleich zu  $\partial_t w + \nabla_i Q_i = 0$  identifizieren wir den Energiestrom

$$Q_i = T f_i + T_g F_i + \mu g_i - Y_i \pi_{ij} + (\sigma_{ij} - P_T \delta_{ij}) v_j \quad (\text{B.0.11})$$

und die Gesamtentropieproduktion

$$\begin{aligned} R_{ges} = R + R_g = & -(\pi_{ki} u_{kj} + \pi_{jk} u_{ki} + \sigma_{ij} - \pi_{ij} - g_i v_j - P_T \delta_{ij}) v_{ij} \\ & - (f_i - s v_i) \nabla_i T + Y_i \nabla_j \pi_{ij} + X_{ij} \pi_{ij} - (F_i - s_g v_i) \nabla_i T_g. \end{aligned} \quad (\text{B.0.12})$$

Zur Entropieproduktion sollen nur die dissipativen Anteile der Stromdichten beitragen. Wir definieren daher

$$f_i^D := -(f_i - s v_i) \quad (\text{B.0.13})$$

$$F_i^D := -(F_i - s_g v_i) \quad (\text{B.0.14})$$

$$\sigma_{ij}^{D,ges} := \sigma_{ij}^D + \Sigma_{ij}^D := -(\sigma_{ij} - P_T \delta_{ij} - g_i v_j - \pi_{ij} + \pi_{ki} u_{kj} + \pi_{jk} u_{ki}). \quad (\text{B.0.15})$$

Die Ströme  $X_{ij}$  und  $Y_i$  sind per definitionem von dissipativer Natur. Um einen Wärmeaustausch zwischen den Entropien  $s_g$  und  $s$  zu ermöglichen, führen wir im Ausdruck für  $R_{ges}$  eine Null der Form  $-\gamma T_g^2 + \gamma T_g^2$  ein [19, 20]. Wir können damit folgende Aufteilung vornehmen

$$R = f_i^D \nabla_i T + \sigma_{ij}^D v_{ij} + Y_i \nabla_j \pi_{ij} + X_{ij} \pi_{ij} + \gamma T_g^2 \quad (\text{B.0.16})$$

$$R_g = F_i^D \nabla_i T_g + \Sigma_{ij}^D v_{ij} - \gamma T_g^2, \quad (\text{B.0.17})$$

die in einem gewissen Maße willkürlich ist, jedoch eine zulässige Wahl innerhalb der linearen Onsagertheorie darstellt. Die Wärme der ungerichteten granularen Bewegung kann durch die Terme  $\gamma T_g^2$  in innere Freiheitsgrade übergehen. Die Terme sind quadratisch, da sie einerseits als Produkt der Gleichgewichtsgröße  $T_g$  mit der Kraft  $T_g$  verstanden werden können, zum anderen entsteht so mit  $s_g \sim T_g$  für die granuläre Temperatur aus (B.0.5) die gewünschte Relaxationsgleichung  $\partial_t T_g \sim -T_g$  für die langsame Variable  $T_g$ .

Wir nehmen granuläre Systeme als intrinsisch isotrop an und beschränken uns deshalb bei der Konstruktion der Onsager-Matrix auf isotrope Tensoren. Der isotrope Tensor zweiter Stufe ist  $\delta_{ij}$ , der dritter Stufe  $\varepsilon_{ijk}$  und der vierter Stufe  $\sim \mu_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_3 \delta_{il} \delta_{jk}$ , s. [71]. Die Kräfte  $v_{ij}$  und  $\pi_{ij}$  und die entsprechenden Ströme  $\sigma_{ij}^D$  und  $X_{ij}$  sind symmetrisch. Wegen der Antisymmetrie von  $\varepsilon_{ijk}$  ist etwa  $\varepsilon_{ikl} v_{kl} = 0$ . Deswegen kann es keine Kopplungen durch Tensoren dritter Stufe geben. Die Ströme  $(f_i^D, F_i^D, \sigma_{ij}^{D,ges}, X_{ij}, Y_i)$  sind mit den Kräften  $(\nabla_i T, \nabla_i T_g, v_{ij}, \pi_{ij}, \nabla_j \pi_{ij})$  über die Onsager-Matrix verbunden

$$\begin{pmatrix} f_i^D \\ F_j^D \\ \sigma_{kl}^{D,ges} \\ X_{mn} \\ Y_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_{ip} & \tilde{K}_{iq} & 0 & 0 & \tilde{N}_{iv} \\ K_{jp} & \kappa_{jq}^g & 0 & 0 & \tilde{M}_{jv} \\ 0 & 0 & \eta_{klrs} & \tilde{\alpha}_{kltu} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{mnrs} & \beta_{mntu} & 0 \\ N_{op} & M_{oq} & 0 & 0 & \beta_{ov}^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_p T \\ \nabla_q T_g \\ v_{rs} \\ \pi_{tu} \\ \nabla_w \pi_{vw} \end{pmatrix},$$

wobei  $\kappa_{ip} = \kappa \delta_{ip}$ ,  $\kappa_{ip}^g = \kappa_g \delta_{ip}$  usw. Bis auf  $v_{kl}$  sind alle Kräfte positiv unter Zeitumkehr und da  $\pi_{ij}$  und  $v_{ij}$  unterschiedliche Zeitumkehrparität haben folgern wir

$$\tilde{\alpha}_{tukl} = -\alpha_{kltu}. \quad (\text{B.0.18})$$

Aufgrund der Symmetrie von  $\sigma_{ij}^D$  und  $X_{ij}$  gilt für die isotropen Tensoren vierter Stufe  $\eta_{klrs}$ ,  $\alpha_{kltu}$  und  $\beta_{mntu}$  eine der Form  $\mu_{ijkl} = \mu^{(1)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^{(2)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$  entsprechende Darstellung. Die normale Temperatur  $T$  hat vernachlässigbaren Einfluss auf die Transporteigenschaften, die durch die dissipativen Ströme quantifiziert werden. Daher nehmen wir  $K_{ij} = N_{ij} = 0$  an. Ein endliches  $K_{ij}$  würde zudem der Trennung von mikroskopischen und mesoskopischen Freiheitsgraden widersprechen. Eigentlich müsste  $M_{ij}$ , eine Kopplung von  $\nabla_i T_g$  und  $\nabla_j \pi_{ij}$ , durchaus beobachtbar sein, wir setzen  $M_{ij}$  aber bis auf weiteres gleich Null, setzen außerdem  $\eta^{(1)} = \frac{\eta'}{2}$ ,  $\eta^{(2)} = (\zeta' - \frac{1}{3}\eta')$ , sowie  $\alpha^{(1)} = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\alpha^{(2)} = 0$  und  $\beta^{(1)} = \frac{\beta}{2}$ ,  $\beta^{(2)} = \beta_1 - \frac{1}{3}\beta$  und erhalten

$$\begin{aligned}\eta_{klrs} &= \frac{\eta'}{2}(\delta_{kr}\delta_{ls} + \delta_{ks}\delta_{rl}) + \left(\zeta' - \frac{1}{3}\eta'\right)\delta_{kl}\delta_{rs} \\ \alpha_{mnr s} &= \frac{\alpha}{2}(\delta_{mr}\delta_{ns} + \delta_{ms}\delta_{nr}) \\ \beta_{mntu} &= \frac{\beta}{2}(\delta_{mt}\delta_{nu} + \delta_{mu}\delta_{nt}) + \left(\beta_1 - \frac{1}{3}\beta\right)\delta_{mn}\delta_{tu}.\end{aligned}$$

Für den dissipativen Impulsstrom  $\sigma_{kl}^{D,ges}$  ergibt sich somit

$$\sigma_{kl}^{D,ges} = \eta'v_{kl}^0 + \zeta'v_{rr}\delta_{kl} + \alpha\pi_{kl},$$

der dissipative Verzerrungsstrom wird

$$X_{mn} = -\alpha v_{mn} + \beta\pi_{mn}^0 + \beta_1\delta_{mn}\pi_{uu}.$$

Damit ist die Gesamtentropieproduktion gegeben durch

$$R_{ges} = \eta'v_{kl}^0v_{kl}^0 + \zeta'v_{rr}^2 + \kappa(\nabla_i T)^2 + \beta^P(\nabla_j\pi_{oj})^2 + \beta\pi_{mn}^0\pi_{mn}^0 + \beta_1\pi_{uu}^2 + \kappa_g(\nabla_p T_g)^2.$$

Der Außerdiagonalterm mit  $\alpha_{ijkl}$  verschwindet nach Konstruktion, weshalb wir ihn als reaktiv bezeichnen müssen. Wir teilen den dissipativen Impulsstrom genauso wie die Rate  $R_{ges}$  in zwei Anteile  $\sigma_{kl}^{D,ges} = \sigma_{ij}^D + \Sigma_{ij}^D$  auf, so dass wir den dissipativen Impulstransport den Größen  $R$  und  $R_g$  zuordnen können. Wir machen dazu den Ansatz  $\eta' = \eta + \eta_g(T_g)$  und  $\zeta' = \zeta + \zeta_g(T_g)$ , so dass

$$R_{ges} = R + R_g = \dots + \eta v_{kl}^0 v_{kl}^0 + \zeta v_{rr}^2 + \eta_g v_{kl}^0 v_{kl}^0 + \zeta_g v_{rr}^2 + \dots \quad (\text{B.0.19})$$

So kann  $s_g$  separat von  $s$  wachsen, je nach Verhältnis von  $\eta$  zu  $\eta_g$ . Der Einfachheit halber teilen wir die anderen dissipative Ströme  $f_i^D$ ,  $F_i^D$ ,  $X_{ij}$  und  $Y_i$  nicht granulare und normale Anteile auf. Die Transportkoeffizienten  $\eta$ ,  $\eta_g$ ,  $\zeta$ ,  $\zeta_g$ ,  $\kappa$ ,  $\kappa_g$ ,  $\beta^P$ ,  $\beta$  und  $\beta_1$  müssen positiv sein, über das Vorzeichen von  $\alpha$  können wir keine Aussage machen.

## Anmerkungen

- Obwohl  $R + R_g = 0$  bzgl.  $\gamma T_g^2$ , steigt dennoch  $\partial_t s + \partial_t s_g$ , da die eigentliche Entropieproduktion  $\frac{R}{T} + \frac{R_g}{T_g}$  ist.  $R + R_g$  ist gerade  $T\partial_t s + T_g\partial_t s_g = \partial_t w$ . Energie wird also nicht erzeugt, sie wechselt nur von der granularen Wärme in die eigentliche Wärme.
- $\nabla_j\pi_{ij}$  ist nur im Falle  $T_g = 0$  eine Gleichgewichtsbedingung, für endliches  $T_g$  jedoch nicht. In dem Maße aber, wie  $T_g$  verschwindet wird die Gleichgewichtsbedingung  $\nabla_j\pi_{ij}$  wichtiger. Wir wollen gerade diesen Übergang von fest nach flüssig beschreiben und nehmen deswegen beide Gleichgewichtsbedingungen

$\nabla_j \pi_{ij} = 0$  und  $\pi_{ij} = 0$  in der Standardprozedur mit. Der Strom  $Y_i = \beta^P \nabla_j \pi_{ij}$  sollte für kleine  $T_g$  präsent sein, für große aber verschwinden, damit er in der Gesamtentropieproduktion keine Rolle mehr spielt. Das sollte über  $\beta^P$  möglich sein

$$\beta^P = \beta_0^P \frac{1+c}{1+ce^{\tilde{T}}} \quad \text{mit } \tilde{T} = \frac{T_g}{T_n} \text{ und } c \ll 1 \quad (\text{B.0.20})$$

In dieser Arbeit setzen wir aber  $\beta^P$  konstant.



# Anhang C

## Analytische Lösungen der $T_g$ -Gleichung

Wir geben in diesem Anhang Lösungen der  $T_g$ - Gleichung (4.1.2)

$$\partial_t T_g = \frac{1}{\rho b} \left( -(\gamma_0 + \gamma_1 T_g) T_g + \eta_1 v_s^2 \right). \quad (\text{C.0.1})$$

### C.1 Stationäre Lösung

Die stationäre Lösung erhalten wir aus  $R_g = 0$  oder  $\partial_t T_g = 0$ . Es gilt  $\gamma T_g^2 = \eta_1 v_s^2$  mit konstantem  $v_s$ , also

$$T_g = \frac{1}{2} \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \left( \sqrt{1 + (2\tau_A v_s)^2} - 1 \right) \quad (\text{C.1.1})$$

mit der charakteristischen Zeit  $\tau_A = \frac{\sqrt{\gamma_1 \eta_1}}{\gamma_0}$ .

### C.2 Allgemeine Lösung der $T_g$ - Gleichung

Im Allgemeinen ist  $v_s$  zeitabhängig, so dass die Zeitentwicklung der granularen Temperatur durch Gleichung (4.1.2)

$$\partial_t T_g(t) = \frac{1}{\rho b} \left( -(\gamma_0 + \gamma_1 T_g(t)) T_g(t) + \eta_1 v_s^2(t) \right). \quad (\text{C.2.1})$$

bestimmt wird. Wir nehmen hier ein zeitlich fluktuierendes Feld  $v_s^2 = A^2 (1 - \cos 2\omega t)$  an, wobei  $A = U_0 \omega k = U_0 \omega^2 / c$ . Gleichung (C.2.1) ist eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung vom Riccati-Typ, die analytisch behandelbar ist [72]. Durch die Transformation  $T_g(t) = \frac{\rho b \dot{U}(t)}{\gamma_1 U(t)}$  haben wir  $\dot{T}_g = \frac{\rho b}{\gamma_1} \left( \frac{\ddot{U}}{U} - \frac{\dot{U}^2}{U^2} \right)$ . Einsetzen in (C.2.1) liefert die lineare Differentialgleichung  $\ddot{U} + \frac{1}{\tau_T} \dot{U} - \left( \frac{\tau_A}{\tau_T} \right)^2 v_s^2 U = 0$ ,

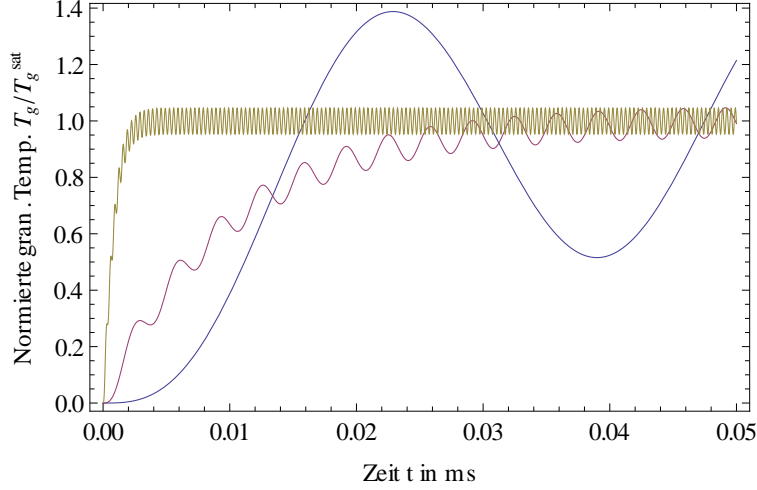


Abbildung C.2.1: Allgemeine Lösung der Zeitentwicklung von  $T_g$  gemäß Gleichung (C.2.4) mit  $T_g(0) = 0$  sowie den Parametern  $\tau_T = 10^{-5}\text{s}$ ,  $\tau_A = 10^{-3}\text{s}$ ,  $U_0 = 65\text{ nm}$  und  $c = 700 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Je nach äußerer Frequenz  $\omega$ , zeigt  $T_g$  entweder einen exponentiellen Anstieg  $\omega = 10 \cdot 2\pi \cdot 150\text{ kHz}$ , einen sinusförmig modulierten Anstieg  $\omega = 2\pi \cdot 150\text{ kHz}$  oder ein Folgen von  $T_g$  mit der äußeren Frequenz für  $\omega = \frac{1}{10}2\pi \cdot 150\text{ kHz}$ .

wobei  $\tau_T = \frac{\rho b}{\gamma_0}$  und wie oben  $\tau_A = \frac{\sqrt{\eta_1 \gamma_1}}{\gamma_0}$ . Die erneuten Transformation  $U(t) = V(t)e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{1}{\tau_T} dt'} = V(t)e^{-\frac{1}{2} \frac{t-t_0}{\tau_T}}$  und  $X(x = \omega t) = V(t)$  liefern die Mathieu-Gleichung [73]

$$X''(x) + (\delta - 2\varepsilon \cos 2x) X(x) = 0 \quad (\text{C.2.2})$$

mit

$$\delta = -\frac{1}{4(\omega\tau_T)^2} - \left(\frac{\tau_A A}{\tau_T \omega}\right)^2 \quad \text{und} \quad \varepsilon = -\frac{1}{2} \left(\frac{\tau_A A}{\tau_T \omega}\right)^2.$$

Die allgemeine Lösung der Mathieu-Gleichung schreibt man als  $X = K_1 C(\delta, \varepsilon, x) + K_2 S(\delta, \varepsilon, x)$  wobei  $K_1$  und  $K_2$  Konstanten und  $C$  die gerade, sowie  $S$  die ungerade Mathieufunktion bezeichnet. Mit der Anfangsbedingung  $T(t=0) = T_0$  und durch Zurückrechnen der obigen Transformationen erhalten wir dann die Lösung für die granulare Temperatur

$$T_g = \frac{\gamma_0 (\omega\tau_T)^2 S'_0 C' + \omega\tau_T (\vartheta C_0 S' - \frac{1}{2} S'_0 C) - \frac{1}{2} \vartheta C_0 S}{\gamma_1 \omega\tau_T S'_0 C + \vartheta C_0 S}. \quad (\text{C.2.3})$$

Hierbei ist  $S' = \frac{\partial S}{\partial x}$ ,  $C' = \frac{\partial C}{\partial x}$ , sowie  $S'_0 = S'(\delta, \varepsilon, 0)$ ,  $C_0 = C(\delta, \varepsilon, 0)$  und  $\vartheta = \frac{1}{2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_0} T_0$ . Für  $T_g(0) = T_0 = 0$  erhalten wir insbesondere

$$T_g = \frac{\gamma_0 \omega\tau_T S'_0 \left(2C' - \frac{1}{\omega\tau_T} C\right) + \frac{1}{2} C_0 \left(2S' - \frac{1}{\omega\tau_T} S\right)}{\gamma_1 \frac{1}{\omega\tau_T} C_0 S + 2S'_0 C}. \quad (\text{C.2.4})$$



Für genügend kleine Anregungsfrequenzen  $\omega$  kann man  $v_s^2$  in Gleichung (C.2.1) als konstant betrachten:  $v_s^2 = A^2 = \text{konstant}$ . Für die Anfangsbedingung  $T_g(0) = 0$  bekommen wir mit den obigen Transformationen bei konstanten  $v_s$  die Lösung

$$T_g = \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \frac{2 \left(\frac{\tau_T}{z}\right)^2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \frac{\tau_T}{z} \coth \frac{t}{z}}, \quad (\text{C.2.5})$$

wobei  $z = \frac{2\tau_T}{\sqrt{1+(2A\tau_A)^2}}$ . Mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} \coth \frac{t}{z} = 1$  erkennen wird, dass das ein zeitlicher Anstieg auf den stationären Saturationswert (C.1.1)

$$T_g^{sat} = \frac{1}{2} \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \frac{(2A\tau_A)^2}{1 + \sqrt{1 + (2A\tau_A)^2}} = \frac{1}{2} \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \left( \sqrt{1 + (2A\tau_A)^2} - 1 \right) \quad (\text{C.2.6})$$

ist. Denselben Saturationswert erhält man natürlich im Limes kleiner Frequenzen aus der allgemeinen Lösung (C.2.4), was wir hier aber nicht explizit zeigen.

Für den Saturationswert  $T_g^{sat}$  existieren zwei Limites. Für Scherraten  $A \ll \frac{1}{2\tau_A}$  erhalten wir aus (C.2.6)

$$T_{sat}^s = T_{sat} = \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \tau_A^2 \cdot A^2 = \frac{\eta_1}{\gamma_0} \cdot A^2. \quad (\text{C.2.7})$$

Der Saturationswert skaliert quadratisch mit der Scherratenamplitude  $A$ . Im entgegengesetzten Fall großer Scherraten  $A \gg \frac{1}{2\tau_A}$  skaliert er linear mit der Scherratenamplitude

$$T_{sat}^l = \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \tau_A \cdot A = \sqrt{\frac{\eta_1}{\gamma_1}} \cdot A. \quad (\text{C.2.8})$$

Schätzen wir die granulare Temperatur durch ihren Saturationswert ab, gilt für das Verhältnis  $\frac{\gamma_1 T_g^2}{\gamma_0 T_g}$  im Fall kleiner Scherraten  $\frac{\gamma_1 T_g^2}{\gamma_0 T_g} = \tau_A^2 \cdot A^2 \ll 1$ , so dass wir in guter Näherung den Term  $\gamma_1 T_g^2$  in Gleichung (4.1.2) vernachlässigen können. Diese reduziert sich auf  $\partial_t T_g = \frac{1}{\rho b} (-\gamma_0 T_g + \eta_1 v_s^2)$  und wird analytisch lösbar. Mit der Anfangsbedingung  $T_g(0) = 0$  und  $v_s^2 = A^2 (1 - \cos 2\omega t)$  wie oben erhalten wir

$$T_g = T_{sat} \frac{1}{1 + 4(\omega\tau_T)^2} \left( 1 - \cos 2\omega t - 2\omega\tau_T \sin 2\omega t + 4(\omega\tau_T)^2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_T}} \right) \right). \quad (\text{C.2.9})$$

Diese Lösung sehen wir in Abbildung 4.1.1 für  $\omega = 2\pi \cdot 150$  kHz für  $\omega\tau = \frac{1}{10}$ ,  $\omega\tau = 1$  und  $\omega\tau = 10$  als sinusförmig modulierten Anstieg auf den Sättigungswert  $T_{sat}$  innerhalb der charakteristischen Zeit  $\tau_T$ . Für kleine Frequenzen, die wir durch  $\omega\tau_T \ll 1$  definieren folgt die Lösung eher  $T_g = T_{sat} (1 - \cos 2\omega t)$  für große Frequenzen  $\omega\tau_T \gg 1$  eher  $T_g = T_{sat} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_T}} \right)$ .



# Anhang D

## Elastisches Limit, $\gamma$ und $\eta_g$

Die GSH-Gleichungen sollen bei verschwindender Anregungsamplitude in die der gewöhnlichen Elastizitätstheorie übergehen um elastische Schallausbreitung und statische Spannungen zu ermöglichen. Die Geschwindigkeitsgradienten elastischer Wellen sind aber über die Bewegungsgleichung der granulare Entropie direkt an ein  $T_g$  gekoppelt und so scheint es auf den ersten Blick schwierig Relaxation  $\sim T_g$  bei endlichen Geschwindigkeitsgradienten zu unterbinden. Die Abhängigkeit der Transportkoeffizienten  $\eta_g$  und  $\gamma$  von der granularen Temperatur, wie durch (3.2.9,3.2.10) gegeben, ohne einen möglichen  $\eta_0$  aber mit dem  $\gamma_0$ -Term, führt aber zum gewünschten Resultat.

Um das zu sehen, schauen wir uns die Bewegungsgleichungen der Verzerrungen im Limes verschwindender Scherraten an. Wir verzichten i. F. auf die geometrischen Terme höherer Ordnung  $\sim u_{ik}\nabla_j v_k$  und auf die Tensornotation. Im elastischen Fall gilt für die Verzerrungen  $u$  und die Geschwindigkeitsgradienten  $v$  einfach  $\partial_t u = v$ . Für gegebenes, der Einfachheit halber konstantes,  $v$  liefert eine direkte Integration mit  $u(t=0) = u_0$  das Ergebnis

$$u = u_0 + v \cdot t. \quad (\text{D.0.1})$$

Die Verzerrung wächst linear mit der Zeit. In den GSH-Gleichungen  $\partial_t u = v - \frac{1}{\tau}u$  relaxiert die Verzerrung aber mit der Rate  $\frac{1}{\tau} = \lambda T_g$ . Durch die Wahl der Transportkoeffizienten als  $\eta_g = \eta_1 T_g$  und  $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 T_g$  gilt für kleine  $v$

$$T_g = \frac{\eta_1}{\gamma_0} v^2 \sim v^2, \quad (\text{D.0.2})$$

vgl. Abschnitt C.2, wohingegen mit einem  $\eta_0$ , d.h. mit dem Ansatz  $\eta_g = \eta_0 + \eta_1 T_g$ , die Temperatur linear mit  $v$  skalieren würde  $T_g = \sqrt{\frac{\eta_0}{\gamma_0}} v \sim v$ . Entsprechend hätten wir  $T_g = \sqrt{\frac{\eta_1}{\gamma_1}} v \sim v$  beim Ansatz  $\eta_g = \eta_1 T_g$  und  $\gamma = \gamma_1 T_g$ . Abhängig von der Wahl von  $\eta_g$  und  $\gamma$  skaliert die granulare Temperatur also entweder linear oder quadratisch mit den Geschwindigkeitsgradienten. Setzen wir den letzteren Ansatz für  $T_g$  in die

Bewegungsgleichung der Verzerrungen ein, gilt  $\partial_t u = v - \lambda \sqrt{\frac{\eta_1}{\gamma_1}} v u$ , deren Lösung mit der gleichen Anfangsbedingung  $u = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\gamma_1}{\eta_1}} \left( 1 - \left( 1 - \lambda \sqrt{\frac{\eta_1}{\gamma_1}} u_0 \right) e^{-\lambda \sqrt{\frac{\eta_1}{\gamma_1}} v t} \right)$  ist. Im Limes kleiner Geschwindigkeitsamplituden gilt  $e^{-\lambda \sqrt{\frac{\eta_1}{\gamma_1}} v t} = 1 - \lambda \sqrt{\frac{\eta_1}{\gamma_1}} v t + \dots$  also

$$u = u_0 + \left( 1 - u_0 \lambda \sqrt{\frac{\eta_1}{\gamma_1}} \right) v t + O(v^2),$$

was von (D.0.1) abweicht. Verwenden wir stattdessen Gleichung (D.0.2) gilt  $\partial_t u = v - \lambda \frac{\eta_1}{\gamma_0} v^2 u$  mit der korrekten Lösung (D.0.1)

$$u = u_0 + v t + O(v)^2.$$

Wir müssen die Transportkoeffizienten also so wählen, dass die granulare Temperatur für kleine Geschwindigkeitsgradienten quadratisch mit diesen skaliert. Da wir einen Term  $\eta_0$  bereits ausgeschlossen haben, brauchen wir unbedingt den Term  $\gamma_0$  in der Entwicklung von  $\gamma$ .

# Index

## A

Akustischer Tensor, 54  
Amontons-Gesetz, 68  
Amplitudenabhängige Dämpfung, 43  
amplitudenunabhängige Dämpfung, 50

## B

Bilanzgleichungen, 14

## D

Deformationsgradient, 13, 78  
Dispersionsrelation, 44

## E

Elastische Spannungen, 18, 26  
Elastische Verzerrung, 19  
Elastisches Limit, 44, 91  
Entropieproduktion, 16  
Eulerscher Verzerrungstensor, 78

## F

Finite Elemente, 68  
Fließgrenze, 6  
Fluidteilchen, 11

## G

Gesamtverzerrung, 19  
Gleichgewichtsbedingungen, 13, 77  
Granulare Entropie, 24  
Granulare Temperatur, 23  
GSH, 9, 23

## H

Hydrodynamische Methode, 77  
Hydrodynamische Theorie, 11  
Hydrodynamische Variable, 12

## I

Impulsstromdichte, 14, 27  
Induzierte Anisotropie, 53

## J

Janssen-Effekt, 65

## K

Kinematische Verzerrung, 19  
Kontinuitätsgleichung, 14  
Kontinuum, 11  
Kontinuumsmechanik, 19

## L

Leerstellen, 15  
Leerstellendiffusion, 50  
Lineare Wellengleichung, 43

## M

Materielle Ableitung, 79  
Materielle Zeitableitung, 14

## O

Onsager-Matrix, 83  
Onsager-Relationen, 16

## P

Plastische Deformation, 51  
Plastische Verzerrung, 19  
Polare Zerlegung, 78

## R

Relaxation, 17  
Relaxationsgleichung, 18, 83  
Runde Klammern, 43

## S

Saturationswert, 30

Schallpuls, 37  
Schernoden, 44  
Scherrate, 30  
Scherung, statische, 58  
Silo, 65  
Softening-Effekt, 34, 52  
Spannungsrelaxation, 65  
Spannungs-Verzerrungs-Relation, 42  
Spurlos, 17  
Stabilitätsbedingung, 42  
Standardprozedur, 14, 15  
Statische Verzerrung, 32  
Stehende Welle, 35  
Steifigkeitstensor, 42

**T**

Transiente Elastizität, 65  
Transportkoeffizienten, 16  
Triaxialzelle, 44

**V**

Verschiebungsfeld, 18  
Viskosität für Festkörper, 52

**W**

Wellengleichung für Verschiebungen, 54  
Wellengleichung verallgemeinert, 32  
Wellenpaket, 38

# Abbildungsverzeichnis

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 4.1.1 | Zeitentwicklung der granularen Temperatur . . . . .  | 31 |
| 4.2.1 | Dämpfung einer stehenden Welle bei verschiedenen Frequenzen . . . .  | 36 |
| 4.2.2 | Dämpfung einer stehenden Welle bei verschiedener Anfangsamplitude  | 37 |
| 4.2.3 | Referenzwellenpaket und granulare Temperatur mit $w_0 = 1$ , $\tilde{w} = \frac{1}{8}$ ,<br>$X = 0.12$ und $\omega\tau_T = 10$ . . . . .   | 38 |
| 4.2.4 | Wellenpaket und granulare Temperatur mit $w_0 = \frac{1}{2}$ , $\tilde{w} = \frac{1}{8}$ , $X = 0.12$<br>und $\omega\tau_T = 10$ . . . . . | 39 |
| 4.2.5 | Referenzwellenpaket und granulare Temperatur mit $w_0 = 2$ , $\tilde{w} = \frac{1}{8}$ ,<br>$X = 0.12$ und $\omega\tau_T = 10$ . . . . .   | 39 |
| 4.2.6 | Wellenpaket und granulare Temperatur mit $w_0 = 1$ , $\tilde{w} = \frac{1}{8}$ , $X = 0.12$<br>und $\omega\tau_T = 100$ . . . . .          | 40 |
| 4.2.7 | Wellenpaket und granulare Temperatur mit $w_0 = 1$ , $\tilde{w} = \frac{1}{8}$ , $X = 0.24$<br>und $\omega\tau_T = 100$ . . . . .          | 40 |
| 4.4.1 | Dämpfungskoeffizient bei hoher Frequenz . . . . .  | 46 |
| 4.4.2 | Elastische Schallwellengeschwindigkeiten aus den Resonanzsäulenver-<br>suchen. . . . .   | 48 |
| 4.4.3 | Dämpfungsverhältnis als Funktion der Verzerrungsamplitude in Re-<br>sonanzsäulen . . . . .   | 49 |
| 4.4.4 | Softening-Effekt in Resonanzsäulen . . . . .   | 52 |
| 4.5.1 | Elastische Schallgeschwindigkeiten, induzierte Anisotropie . . . . .   | 57 |
| 4.5.2 | Statische Scherung . . . . .   | 58 |
| 4.5.3 | Elastische Schallgeschwindigkeiten in der statischen Scherung . . . . .  | 60 |
| 4.5.4 | Uniaxiale Schallmoden an der Fließgrenze . . . . .   | 64 |
| 5.0.1 | Geometrie eines zweidimensionalen Silos . . . . .  | 65 |
| 5.1.1 | Janssen- und numerische FEM-Lösung für $\pi_{yy}$ und $\pi_{xy}$ vertikal . . . .  | 66 |
| 5.1.2 | Janssen- und numerische FEM-Lösung für $\pi_{xy}$ und $\pi_{yy}$ horizontal . .  | 67 |
| 5.2.1 | Relaxation der vertikalen Spannung im Silo . . . . .   | 70 |
| C.2.1 | Zeitentwicklung der granularen Temperatur für die allgemeine Lösung  | 88 |





# Literaturverzeichnis

- [1] J. Duran, P. G. de Gennes und A. Reisinger, *Sands, Powders, and Grains: An Introduction to the Physics of Granular Materials (Partially Ordered Systems)* (Springer, 1999).
- [2] H. M. Jaeger und S. R. Nagel, *Physics of the granular state*, Science **255** (5051), 1523 (1992).
- [3] H. M. Jaeger, S. R. Nagel und R. P. Behringer, *Granular solids, liquids, and gases*, Rev. Mod. Phys. **68**, 1259 (1996).
- [4] R. T. Jenkyn und D. J. Goodwill, *Silo failures: Lessons to be learned*, Engineering Digest S. 17 (1987).
- [5] Wikipedia, *Historisches Archiv der Stadt Köln — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie* (2011), [Online; Stand 27. September 2011].
- [6] P. A. Johnson und X. Jia, *Nonlinear dynamics, granular media and dynamic earthquake triggering*, Nature **437**, 871 (2005).
- [7] X. Jia, C. Caroli und B. Velicky, *Ultrasound propagation in externally stressed granular media*, Phys. Rev. Lett. **82**, 1863 (1999).
- [8] L. M. Schwartz, D. L. Johnson und S. Feng, *Vibrational modes in granular materials*, Phys. Rev. Lett. **52**, 831 (1984).
- [9] T. Brunet, X. Jia und P. Mills, *Mechanisms for acoustic absorption in dry and weakly wet granular media*, Physical Review Letters **101**, 138001 (2008).
- [10] V. Tournat, V. Zaitsev, V. Gusev, V. Nazarov, P. Béquin und B. Castagnède, *Probing weak forces in granular media through nonlinear dynamic dilatancy: Clapping contacts and polarization anisotropy*, Phys. Rev. Lett. **92**, 085502 (2004).
- [11] J. D. Goddard, *Nonlinear elasticity and pressure-dependent wave speeds in granular media*, Proc. R. Soc. Lond. A **430**, 105 (1990).

- [12] X. Jia, *Codalike multiple scattering of elastic waves in dense granular media*, Phys. Rev. Lett. **93**, 154303 (2004).
- [13] T. Brunet, X. Jia und P. A. Johnson, *Transitional nonlinear elastic behaviour in dense granular media*, Geophys. Res. Lett. **35**, L19308 (2008).
- [14] D. Kolymbas und G. Viggiani, Hg., *Mechanics of Natural Solids* (Springer, 2009).
- [15] S. R. Hostler und C. E. Brennen, *Pressure wave propagation in a granular bed*, Phys. Rev. E **72**, 031303 (2005).
- [16] S. Herminghaus, *Dynamics of wet granular matter*, Advances in Physics **54**, 221 (2005).
- [17] Y. Jiang und M. Liu, *Granular elasticity without the coulomb condition*, Phys. Rev. Lett. **91**, 144301 (2003).
- [18] Y. Jiang und M. Liu, *Energetic instability unjams sand and suspension*, Phys. Rev. Lett. **93**, 148001 (2004).
- [19] Y. Jiang und M. Liu, *From elasticity to hypoplasticity: Dynamics of granular solids*, Physical Review Letters **99**, 105501 (2007).
- [20] M. Liu und Y. Jiang, *Granular solid hydrodynamics*, Granular Matter **11**, 139 (2009).
- [21] D. O. Krimer, M. Pfitzner, K. Bräuer, Y. Jiang und M. Liu, *Granular elasticity: General considerations and the stress dip in sand piles*, Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics) **74**, 061310 (2006).
- [22] K. Bräuer, M. Pfitzner, D. O. Krimer, M. Mayer, Y. Jiang und M. Liu, *Granular elasticity: Stress distributions in silos and under point loads*, Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics) **74**, 061311 (2006).
- [23] H. A. Makse, N. Gland, D. L. Johnson und L. Schwartz, *Granular packings: Nonlinear elasticity, sound propagation, and collective relaxation dynamics*, Phys. Rev. E **70**, 061302 (2004).
- [24] H. B. Callen, *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics* (John Wiley & Sons, 1985).
- [25] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Bd. 6: Hydrodynamik (Akademie Verlag, 1991).
- [26] P. M. Chaikin und T. C. Lubensky, *Principles of condensed matter physics* (Cambridge University Press, 2006).

- [27] P. G. de Gennes und J. Prost, *The physics of liquid crystals* (Clarendon Press, Oxford, 1993).
- [28] P. C. Martin, O. Parodi und P. S. Pershan, *Unified hydrodynamic theory for crystals, liquid crystals, and normal fluids*, Phys. Rev. A **6**, 2401 (1972).
- [29] I. M. Khalatnikov, *An Introduction to the Theory of Superfluidity* (Westview Press, 2000).
- [30] H. Temmen, H. Pleiner, M. Liu und H. R. Brand, *Convective nonlinearity in non-newtonian fluids*, Phys. Rev. Lett. **84**, 3228 (2000).
- [31] O. Müller, Dissertation, Universität Tübingen (2006).
- [32] I. Liu, *Continuum Mechanics* (Springer, 2002).
- [33] R. Greve, *Kontinuumsmechanik* (Springer, 2003).
- [34] D. S. Chandrasekharaiah und L. Debnath, *Continuum Mechanics* (Academic Press, 1994).
- [35] P. Kostädt und M. Liu, *Three ignored densities, frame-independent thermodynamics, and broken galilean symmetry*, Phys. Rev. E **58**, 5535 (1998).
- [36] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik* (Verlag Harri Deutsch, 2000).
- [37] H. C. Öttinger, H. Struchtrup und M. Liu, *Inconsistency of a dissipative contribution to the mass flux in hydrodynamics*, Phys. Rev. E **80**, 056303 (2009).
- [38] S. R. de Groot und P. Mazur, *Non-equilibrium thermodynamics* (Dover Publications, New York, 1984).
- [39] M. Liu, *The onsager symmetry relation and the time inversion invariance of the entropy production*, ArXiv Condensed Matter e-prints **arXiv:cond-mat/9806318v1**, 4 (1998).
- [40] C. Truesdell und W. Noll, *The non-linear field theories of mechanics* (Springer, 2004).
- [41] R. Bird, R. Armstrong und O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 1: Fluid Mechanics* (John Wiley & Sons, 1987).
- [42] G. Gudehus, *Physical Soil Mechanics* (Springer, 2011).
- [43] D. Kolymbas, *Introduction to hypoplasticity* (A. A. Balkema, 2000).

- [44] S. Nair, *Introduction to Continuum Mechanics* (Cambridge University Press, 2009).
- [45] P. K. Haff, *Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon*, Journal of Fluid Mechanics **134**, 401 (1983).
- [46] J. T. Jenkins und S. B. Savage, *A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles*, Journal of Fluid Mechanics **130**, 187 (1983).
- [47] L. Bocquet, W. Losert, D. Schalk, T. C. Lubensky und J. P. Gollub, *Granular shear flow dynamics and forces: Experiment and continuum theory*, Phys. Rev. E **65**, 011307 (2001).
- [48] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Bd. 7: Elastizitätstheorie (Akademie Verlag, 1991).
- [49] A. H. Nayfeh und D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations* (John Wiley & Sons, 1979).
- [50] T. Wichtmann und T. Triantafyllidis, *Dynamische Steifigkeit und Dämpfung von Sand bei kleinen Dehnungen*, Bautechnik, Ernst und Sohn Verlag, Wiley-VCH **4**, 236 (2005).
- [51] T. Wichtmann und T. Triantafyllidis, *Influence of a cyclic and dynamic loading history on dynamic properties of dry sand, part I: cyclic and dynamic torsional prestraining*, Soil dynamics and earthquake engineering **24**, 127 (2004).
- [52] T. Wichtmann und T. Triantafyllidis, *Influence of a cyclic and dynamic loading history on dynamic properties of dry sand, part II: cyclic axial preloading*, Soil dynamics and earthquake engineering **24**, 789 (2004).
- [53] D. Ruiz, Dissertation, Departement of Geophysics of Stanford University (2004).
- [54] H. Hertz, *Über die Berührung fester elastischer Körper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **92** (1826).
- [55] Y. Jiang und M. Liu, *Incremental stress-strain relation from granular elasticity: Comparison to experiments*, Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics) **77**, 021306 (2008).
- [56] R. Kuwano und R. J. Jardine, *On the applicability of cross-anisotropic elasticity to granular materials at very small strains*, Geotechnique **52**, 727 (2002), ISSN 0016-8505.

- [57] R. Kuwano und R. J. Jardine, *On the applicability of cross-anisotropic elasticity to granular materials at very small strains*, Geotechnique **54**, 75 (2004), ISSN 0016-8505.
- [58] H. F. Pollard, *Sound waves in solids* (Pion Limited, 1977).
- [59] O. Mouraille, Dissertation, University of Twente, Enschede (2009).
- [60] M. Mayer und M. Liu, *Propagation of elastic waves in granular solid hydrodynamics*, Phys. Rev. E **82**, 042301 (2010).
- [61] M. E. Cates, J. P. Wittmer, J.-P. Bouchaud und P. Claudin, *Jamming, force chains, and fragile matter*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1841 (1998).
- [62] H. Temmen, H. Pleiner, M. Liu und H. R. Brand, *Temmen et al. reply.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 745 (2001).
- [63] B. O. Hardin und V. P. Drnevich, *Shear modulus and damping in soils: design equations and curves*, Journal of Soil Mechanics & Foundations Division **98** (1972).
- [64] Y. Khidas und X. Jia, *Anisotropic nonlinear elasticity in a spherical-bead pack: Influence of the fabric anisotropy*, Phys. Rev. E **81**, 021303 (2010).
- [65] R. Kieselbach, *Bursting of a silo*, Engineering Failure Analysis **4**, 49 (1997).
- [66] S. M. G. Piskoty und M. Zraggen, *Bursting of a corn silo - an interdisciplinary failure analysis*, Engineering Failure Analysis **12**, 915 (2005).
- [67] D. 1055-6:2005-03, *Einwirkungen auf Tragwerke - Teil 6: Einwirkungen auf Silos und Flüssigkeitsbehälter, Actions on structures - Part 6: Design loads for buildings and loads in silo bins*, Beuth, Norm (2005).
- [68] H. A. Janssen, *Versuch über Getreidedruck in Silozellen*, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure **39**, 1045 (1895).
- [69] Y. Bertho, F. Giorgiutti-Dauphiné und J. Hulin, *Dynamical janssen effect on granular packing with moving walls*, Phys. Rev. Lett. **90**, 144301 (2003).
- [70] H. Pacheco-Martinez, H. Jan van Gerner und J. C. Ruiz-Suárez, *Storage and discharge of a granular fluid*, Physical Review E **77**, 021303 (2008).
- [71] A. M. Goodbody, *Cartesian Tensors, with applications to mechanics, fluid mechanics and elasticity* (Ellis Horwood Limited, 1982).
- [72] A. D. Polyanin und V. E. Zaitsev, *Handbook of exact solutions for ordinary differential equations* (CRC Press, 1995).

- [73] M. Abramowitz und I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th printing (Dover Publications, 1972).

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich denjenigen danken, die zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben, zuerst Herrn Prof. Dr. Mario Liu für seine Betreuung, für seine ständige Erreichbarkeit und Diskussionsfreude, sowie für seine wertvollen Hinweise. Besonders interessant fand ich die Möglichkeit bei der theoretischen Beschreibung eines Alltagsgegenstandes völlig neue Wege zu gehen.

Ein besonderer Dank geht an Herrn Prof. Dr. Nils Schopohl, der es mir ermöglicht hat als Systemadministrator am Lehrstuhl zu arbeiten, dabei wertvolle Erfahrungen zu sammeln und meine Doktorarbeit fortzuführen.

Des Weiteren gilt mein Dank meinen langjährigen Kollegen Stefan Mahle, Dr. Dmitry Krimer und Andreas Länge für spannenden Diskussionen über komplexe und manchmal scheinbar einfache Fragen. Meinem Bruder Martin Mayer danke ich für das, auch stilistische, Korrekturlesen meiner Arbeit.

Allen namentlich erwähnten, sowie den Mitgliedern der Arbeitsgruppe Schopohl, danke ich für die gute Atmosphäre und das freundschaftliche Miteinander.