

Höhenfunktionen auf halbeinfachen algebraischen Gruppen

Dissertation

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard Karls Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von
Susanne Mennecke
aus Berlin

Tübingen
2015

Tag der mündlichen Qualifikation:

24.07.2015

Dekan:

Prof. Dr. Wolfgang Rosenstiel

1. Berichterstatter:

Prof. Dr. Victor V. Batyrev

2. Berichterstatter:

Prof. Dr. Anton Deitmar

Für meine Eltern

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1 Höhenfunktionen auf quasi-projektiven Varietäten	15
1.1 Bewertungen	15
1.2 Höhenfunktionen auf quasi-projektiven Varietäten	18
1.3 Die Batyrev-Manin-Vermutung	24
2 Höhenfunktionen auf halbeinfachen algebraischen Gruppen	27
2.1 Definition	27
2.2 Ein Beispiel: SL_2	29
3 Die spezielle lineare Gruppe	37
3.1 Die archimedischen lokalen Höhen	37
3.2 Die nicht-archimedischen lokalen Höhen	39
3.2.1 Die affine Weyl-Gruppe	39
3.2.2 Gitterklassen und das Bruhat-Tits-Gebäude	45
3.3 Die Endlichkeit von $N_{SL_n(k)}(B)$	51
4 Die Endlichkeit von $N_{G(k)}(B)$	53
4.1 Symmetrische Räume und die archimedischen lokalen Höhen	54
4.2 Bruhat-Tits-Gebäude und die nicht-archimedischen lokalen Höhen	60
4.2.1 Affine Gebäude	60
4.2.2 Bruhat-Tits-Gebäude	65
4.2.3 Die nicht-archimedischen lokalen Höhen	74
4.3 Spaltende halbeinfache algebraische Gruppen	84
5 Das asymptotische Verhalten von $N_{SL_n(k)}(B)$ für $B \rightarrow \infty$	89
5.1 Die Höhenzetafunktion	89
5.2 Die archimedischen lokalen Höhenintegrale	93
5.3 Die nicht-archimedischen lokalen Höhenintegrale	98
5.4 Das globale Höhenintegral	108
Literaturverzeichnis	115
Symbolverzeichnis	119
Sachverzeichnis	123

Einleitung

Algebraische Gruppen spielen in der algebraischen Geometrie eine zentrale Rolle. So sind algebraische Varietäten auf denen eine algebraische Gruppe operiert besonders gut erforscht, da die Gruppenoperation zusätzliche Möglichkeiten liefert wesentliche Strukturen der Varietäten zu beschreiben und zu verstehen.

Gegenstand dieser Arbeit sind halbeinfache algebraische Gruppen. Dies sind zusammenhängende lineare algebraische Gruppen $\mathbf{G} \neq \{e\}$, deren Radikal $R(\mathbf{G})$ trivial ist bzw. die keinen nichttrivialen zusammenhängenden abelschen Normalteiler besitzen. Halbeinfache algebraische Gruppen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sind bis auf Isomorphie durch ihr Wurzelsystem bestimmt. Dies bringt eine reichhaltige Struktur mit sich, die das Studium der Gruppen erleichtert. Wir wollen halbeinfache algebraische Gruppen im Folgenden von einem arithmetischen Standpunkt aus untersuchen.

Sei also \mathbf{G} eine über einem algebraischen Zahlkörper k definierte halbeinfache algebraische Gruppe. Wir wollen die Verteilung der k -rationalen Punkte $\mathbf{G}(k)$ verstehen. Ein natürlicher Ansatz in der diophantischen Geometrie ist es hierfür eine „Höhenfunktion“ $H : \mathbf{G}(k) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ einzuführen und die Punkte beschränkter Höhe zu untersuchen. Ist für jede positive reelle Zahl B die Anzahl $N_{\mathbf{G}(k)}(B) := \#\{g \in \mathbf{G}(k) : H(g) \leq B\}$ endlich, so wird das asymptotische Verhalten der Zählfunktion $N_{\mathbf{G}(k)} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ bestimmt. Hierbei haben zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ das gleiche asymptotische Verhalten, falls

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$$

gilt. Wir schreiben dann $f \sim g$.

Ist \mathbf{X} eine über k definierte quasi-projektive Varietät, so wurde obige Fragestellung bereits vielfach untersucht. Betrachten wir den Fall $\mathbf{X} = \mathbb{P}^m$ etwas genauer. Sei M_k die Menge der Standardbewertungen von k und $x = [x_0 : \dots : x_m] \in \mathbb{P}^m(k)$ mit homogenen Koordinaten $x_i \in k$. Dann ist die Standardhöhe von x bezüglich k definiert als

$$H_k(x) := \prod_{v \in M_k} \max\{|x_i|_v : 0 \leq i \leq m\},$$

wobei M_k die Menge der Standardbewertungen von k ist. Ein Satz von Douglas G. Northcott besagt, dass für jede positive reelle Zahl B die Anzahl $N_{\mathbb{P}^m(k)}(B) := \#\{x \in \mathbb{P}^m(k) : H_k(x) \leq B\}$ endlich ist. Das zugehörige asymptotische Verhalten der Zählfunktion $N_{\mathbb{P}^m(k)}$ wurde von Stephen H. Schnauel bestimmt. Es gilt

$$N_{\mathbb{P}^m(k)}(B) \sim \frac{\lim_{s \rightarrow 1} ((s-1)\zeta_k(s))}{\zeta_k(m+1)} \left(\frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{|D_k|}} \right)^m (m+1)^{r_1+r_2-1} B^{m+1},$$

wobei ζ_k die Dedekindsche Zetafunktion des Körpers k , D_k seine Diskriminante und r_1 bzw. $2r_2$ die Anzahl der reellen bzw. imaginären Einbettungen von k in \mathbb{C} bezeichnet.

Ist \mathbf{X} eine beliebige über k definierte quasi-projektive Varietät und $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{P}^m$ ein über k definierter Morphismus, so kann die Standardhöhe von $\mathbb{P}^m(k)$ auf $\mathbf{X}(k)$ übertragen werden. Wir setzen

$$H_{k,\varphi} : \mathbf{X}(k) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}, x \mapsto H_k(\varphi(x)).$$

Besitzt φ nur endliche Fasern, so ist $N_{\mathbf{X}(k)}(\varphi, B) := \#\{x \in \mathbf{X}(k) : H_{k,\varphi}(x) \leq B\}$ für jedes $B \in \mathbb{R}_{>0}$ endlich und das asymptotische Verhalten der Zählfunktion kann untersucht werden. Die Batyrev-Manin-Vermutung besagt, dass

$$N_{\mathbf{X}(k)}(\varphi, B) \sim \gamma_{\mathbf{X},k}(\varphi) B^{\alpha_{\mathbf{X},k}(\varphi)} (\log B)^{t_{\mathbf{X},k}(\varphi)-1}$$

gilt, wobei $\gamma_{\mathbf{X},k}(\varphi)$, $\alpha_{\mathbf{X},k}(\varphi)$ und $t_{\mathbf{X},k}(\varphi)$ gewisse von der Varietät \mathbf{X} , vom Morphismus φ und vom Zahlkörper k abhängige Konstanten sind. Wir werden in §1 genauer auf Höhenfunktionen auf quasi-projektiven Varietäten und die Batyrev-Manin-Vermutung eingehen.

Kehren wir nun zu unserer halbeinfachen algebraischen Gruppe \mathbf{G} zurück. Ist $\varphi : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{P}^m$ ein über k definierter Morphismus, so kann, wie oben beschrieben, die Verteilung der k -rationalen Punkte $\mathbf{G}(k)$ bezüglich $H_{k,\varphi}$ untersucht werden. Für halbeinfache algebraische Gruppen von adjungiertem Typ wurden derartige Höhenfunktionen in [STBT07] bzw. [GMO08] untersucht und die Batyrev-Manin-Vermutung für die wundervolle Kompaktifizierung von \mathbf{G} bewiesen.

In dieser Arbeit werden wir eine neue Höhenfunktion auf $\mathbf{G}(k)$ einführen. Diese ist nicht durch einen Morphismus in einen projektiven Raum definiert, sondern nutzt Objekte, die auf natürliche Weise aus der Gruppe heraus entstehen. Wir wollen die Definition der Höhenfunktion nun skizzieren. Zunächst definieren wir hierzu für jede Bewertung $v \in M_k$ eine v -adische lokale Höhenfunktion $H_v : \mathbf{G}(k_v) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$, wobei k_v für die Vervollständigung von k bezüglich v steht.

Sei $v \in M_k$ eine Bewertung von k . Ist v archimedisch, so fixieren wir eine maximale kompakte Untergruppe K_v von $\mathbf{G}(k_v)$ und betrachten den homogenen Raum $\mathcal{X}_v := \mathbf{G}(k_v)/K_v$ als riemannschen symmetrischen Raum. Mit $\text{dist}_v : \mathcal{X}_v \times \mathcal{X}_v \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ bezeichnen wir die zugehörige von der riemannschen Struktur induzierte Metrik auf \mathcal{X}_v .

Ist v nicht-archimedisch, so betrachten wir das Bruhat-Tits-Gebäude \mathcal{B}_v von $\mathbf{G}(k_v)$. Dies ist ein (Poly-)Simplizialkomplex, der als Vereinigung gewisser Unterkomplexe, sogenannter Apartments, dargestellt werden kann. Die Apartments sind hierbei euklidisch-affine Räume, deren (poly-)simpliziale Struktur durch das relative Wurzelsystem von \mathbf{G} bezüglich k_v erzeugt wird. Die Gruppe $\mathbf{G}(k_v)$ operiert auf dem Bruhat-Tits-Gebäude \mathcal{B}_v . Wir fixieren auch hier, durch die Wahl einer „speziellen“ Ecke ξ_v in \mathcal{B}_v , eine maximale kompakte Untergruppe $K_v := \text{Stab}_{\mathbf{G}(k_v)}(\xi_v)$ und fassen $\mathbf{G}(k_v)/K_v$ über die Bahnabbildung als Teilmenge von \mathcal{B}_v auf. Für fast alle nicht-archimedischen Bewertungen v wählen wir $K_v = \mathbf{G}(\mathcal{o}_v)$, wobei \mathcal{o}_v den Bewertungsring von k_v bezeichnet.

Die euklidischen Metriken auf den Apartments lassen sich zu einer wohldefinierten Metrik auf dem ganzen Bruhat-Tits-Gebäude fortsetzen. Somit sind sowohl die riemannschen symmetrischen Räume als auch die Bruhat-Tits-Gebäude metrische Räume, auf denen die Gruppe $\mathbf{G}(k_v)$ abstandstreu operiert. Außerdem existieren zahlreiche weitere interessante Parallelen zwischen beiden Räumen, siehe zum Beispiel [Tit75].

Da wir uns nur für Abstände zwischen Ecken des Gebäudes interessieren, werden wir im Gegensatz zu obiger „euklidischer“ Metrik mit einer kombinatorischen Metrik $\text{dist}_v : \mathcal{V}(\mathcal{B}_v) \times \mathcal{V}(\mathcal{B}_v) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf der Menge der Ecken $\mathcal{V}(\mathcal{B}_v)$ des Bruhat-Tits-Gebäudes \mathcal{B}_v arbeiten. Diese ist definiert als die „Weglänge“ auf dem Graphen der Ecken und Kanten des Gebäudes. Motiviert wurde dieser Ansatz durch Arbeiten von Yuri I. Manin [Man91] und Annette Werner [Wer01], [Wer02], in denen diese kombinatorische Metrik verwendet wurde, um lokale Schnittzahlen zu berechnen.

Die v -adischen lokalen Höhenfunktionen sind wie folgt definiert. Wir betrachten für jedes $v \in M_k$ den ausgewählten Punkt K_v auf G_v/K_v und die Abstände zu Elementen in der $\mathbf{G}(k_v)$ -Bahn von K_v . Genauer definieren wir für $g_v \in \mathbf{G}(k_v)$ die v -adische lokale Höhe $H_v(g_v)$ durch

$$\log_v(H_v(g_v)) := \text{dist}_v(K_v, g_v K_v),$$

wobei

$$\log_v := \begin{cases} \log_e, & \text{falls } v \text{ archimedisch,} \\ \log_{q_v}, & \text{falls } v \text{ nicht-archimedisch.} \end{cases}$$

Ist $g \in \mathbf{G}(k)$, so definieren wir die (globale) Höhe von g als

$$H(g) := \prod_{v \in M_k} H_v(g).$$

Bezüglich dieser Höhenfunktion werden wir die k -rationalen Punkte $\mathbf{G}(k)$ untersuchen. Als erstes behandeln wir die spezielle lineare Gruppe SL_2 . Hier können wir den riemannschen symmetrischen Raum mit dem dreidimensionalen hyperbolischen Raum \mathcal{H} identifizieren. Darüber hinaus ist das Bruhat-Tits-Gebäude \mathcal{B}_v ein Baum, auch Bruhat-Tits-Baum genannt. Durch einen Vergleich mit geeigneten Höhenfunktionen auf quasi-projektiven Varietäten erzielen wir unser erstes Resultat:

Satz. Es gilt $N_{\text{SL}_2(k)}(B) < \infty$ für alle $B \in \mathbb{R}_{>0}$. Ferner ist

$$N_{\text{SL}_2(k)}(B) \sim cB^{3/2}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$.

Im weiteren Verlauf der Arbeit beweisen wir die Endlichkeit der Anzahl der Punkte beschränkter Höhe für halbeinfache algebraische Gruppen \mathbf{G} , die über k spalten. Hierfür betrachten wir zunächst die Höhenfunktion $H_{\text{SL}_n(k)}$ für die spezielle lineare Gruppe in beliebiger Dimension und zeigen als wichtigen Schritt:

Satz. Sei $B \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt $N_{\text{SL}_n(k)}(B) := \#\{A \in \text{SL}_n(k) : H_{\text{SL}_n(k)}(A) \leq B\} < \infty$.

Ist \mathfrak{g} die Lie-Algebra von \mathbf{G} und $\text{Ad} : \mathbf{G} \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ die adjungierte Darstellung, so gilt $\text{Ad}(\mathbf{G}) \subseteq \text{SL}(\mathfrak{g})$. Durch diesen Sachverhalt gelingt es uns einen Zusammenhang zwischen den Höhenfunktionen H und $H_{\text{SL}_n(k)}$ herzustellen. Zusammen mit der Cartan-Zerlegung für die nicht-archimedischen Gruppen $\mathbf{G}(k_v)$ erhalten wir damit das gewünschte Ergebnis:

Satz. Sei \mathbf{G} eine über dem Zahlkörper k spaltende halbeinfache algebraische Gruppe und $B \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt $N_{\mathbf{G}(k)}(B) < \infty$.

Zum Abschluss der Arbeit beschäftigen wir uns mit dem asymptotischen Verhalten der Zählfunktion $N_{\text{SL}_n(k)} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Um dieses zu bestimmen, reicht es nach einem Tauberschen Satz von Shikao Ikehara, Norbert Wiener und Hubert Delange das analytische Verhalten der Höhenzetafunktion

$$Z_{\text{SL}_n(k)}(s) := \sum_{A \in \text{SL}_n(k)} H_{\text{SL}_n(k)}(A)^{-s}$$

zu kennen. Die Erfahrung zeigt, dass das analytische Verhalten der Höhenzetafunktion gleich dem des Höhenintegrals ist. Um dieses Integral zu definieren, setzen wir die Höhenfunktion $H_{\text{SL}_n(k)}$ zunächst auf die adewertigen Punkte $\text{SL}_n(\mathbb{A}_k)$ fort. Ist $\mathbf{A} = (A_v) \in \text{SL}_n(\mathbb{A}_k)$, so definieren wir

$$H_{\text{SL}_n(\mathbb{A}_k)}(\mathbf{A}) := \prod_{v \in M_k} H_{\text{SL}_n(k_v)}(A_v).$$

Mit der Wahl eines geeigneten Haarschen Maßes μ auf $\mathbf{G}(\mathbb{A}_k)$ definieren wir das (globale) Höhenintegral von $\text{SL}_n(k)$ als

$$\mathcal{I}_{\text{SL}_n(k)}(s) := \int_{\text{SL}_n(\mathbb{A}_k)} H_{\text{SL}_n(\mathbb{A}_k)}(\mathbf{A})^{-s} d\mu(\mathbf{A}).$$

Dieses ist als Produkt lokaler Höhenintegrale darstellbar. Diese lokalen Höhenintegrale untersuchen wir im archimedischen Fall mit Hilfe der Polarzerlegung und im nicht-archimedischen Fall mit Hilfe der Cartan-Zerlegung. Insgesamt erhalten wir:

Satz. Sei $\alpha_n := \max\{i(n-i) : 1 \leq i \leq n-1\}$. Dann ist das globale Höhenintegral $\mathcal{I}_{\text{SL}_n(k)}(s)$ holomorph für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(s) \geq \alpha_n + \frac{1}{2}$, mit Ausnahme eines einfachen Pols in $s = \alpha_n + \frac{1}{2}$.

Schließlich stellen wir die folgende Vermutung über das asymptotische Verhalten der Zählfunktion $N_{\text{SL}_n(k)}$ auf:

Vermutung. Es gilt

$$N_{\text{SL}_n(k)}(B) \sim cB^{\alpha_n + \frac{1}{2}}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$.

Die vorliegende Arbeit ist in fünf Kapitel unterteilt:

Im *ersten Kapitel* führen wir zunächst die Menge der Standardbewertungen M_k des algebraischen Zahlkörpers k ein und fixieren diesbezüglich einige Bezeichnungen. Im Anschluss daran stellen wir Höhenfunktionen auf quasi-projektiven Varietäten vor. Da wir im Verlauf dieses Textes auf Höhenfunktionen zu metrisierten Geradenbündeln Bezug nehmen werden, gehen wir dabei ausführlich auf deren Konstruktion ein. Im letzten Abschnitt formulieren wir die Batyrev-Manin-Vermutung.

Ab dem *zweiten Kapitel* betrachten wir über dem Zahlkörper k definierte halbeinfache algebraische Gruppen \mathbf{G} . Im ersten Teil des zweiten Kapitels definieren wir unsere neue Höhenfunktion $H : \mathbf{G}(k) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$. Wir besprechen kurz einige fundamentale Eigenschaften von H und illustrieren anschließend, im zweiten Teil, die eingeführten Begriffe an Hand eines ersten Beispiels, der speziellen linearen Gruppe SL_2 . Wir beweisen für jedes $B \in \mathbb{R}_{>0}$ die Endlichkeit von $N_{\mathrm{SL}_2(k)}(B)$ und bestimmen das asymptotische Verhalten von $N_{\mathrm{SL}_2(k)}(B)$ für $B \rightarrow \infty$.

Im *dritten Kapitel* beschäftigen wir uns mit der speziellen linearen Gruppe in beliebiger Dimension. Wir fixieren für jedes $v \in M_k$ die maximale kompakte Untergruppe

$$K_v := \begin{cases} \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), & \text{falls } k_v = \mathbb{R}, \\ \mathrm{SU}_n(\mathbb{C}), & \text{falls } k_v = \mathbb{C}, \\ \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v), & \text{sonst,} \end{cases}$$

und bestimmen diesbezüglich die v -adische lokale Höhenfunktion $H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$. Nach einer kurzen Abhandlung des archimedischen Falls konstruieren wir für nicht-archimedische Bewertungen $v \in M_k$ das Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathrm{SL}_n(k_v)$. Zunächst beschreiben wir hierfür den durch die affine Weyl-Gruppe von SL_n definierten Simplicialkomplex und realisieren anschließend das Bruhat-Tits-Gebäude durch Homothetieklassen von Gittern von vollem Rang in k_v^n . Im letzten Abschnitt des Kapitels beweisen wir für jedes $B \in \mathbb{R}_{>0}$ die Endlichkeit von $N_{\mathrm{SL}_n(k)}(B)$.

Im *vierten Kapitel* widmen wir uns beliebigen über k definierten halbeinfachen algebraischen Gruppen. Ziel der ersten beiden Abschnitte ist es, die v -adischen lokalen Höhenfunktionen H_v mit den v -adischen lokalen Höhenfunktionen $H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ zu vergleichen. Im ersten Abschnitt erreichen wir dies für archimedische Bewertungen, durch eine geeignete Wahl der Metriken, direkt über die Killing-Form. Den zweiten Abschnitt beginnen wir mit der allgemeinen Definition eines affinen Gebäudes und führen anschließend das Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathbf{G}(k_v)$ für nicht-archimedisches $v \in M_k$ ein. Danach stellen wir den gewünschten Zusammenhang zwischen den lokalen Höhenfunktionen H_v und $H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ her und beschäftigen uns darüber hinaus mit der Abhängigkeit der Höhenfunktion von den maximalen kompakten Untergruppen K_v . Im letzten Abschnitt betrachten wir über k spaltende halbeinfache algebraische Gruppen und zeigen die Endlichkeit von $N_{\mathbf{G}(k)}(B)$ für jedes $B \in \mathbb{R}_{>0}$. Dies folgt aufgrund der obigen Zusammenhänge aus der Endlichkeit von $N_{\mathrm{SL}_n(k)}(B)$.

Im *fünften Kapitel* betrachten wir wieder die spezielle lineare Gruppe. Wir beschäftigen uns zunächst mit Höhenzetafunktionen im Allgemeinen und stellen diese als wichtiges

Hilfsmittel zur Bestimmung der Asymptotik der Zählfunktion vor. Anschließend setzen wir unsere Höhenfunktion auf die adewertigen Punkte $SL_n(\mathbb{A}_k)$ fort und führen das globale Höhenintegral ein. Wir erklären, warum wir annehmen, dass das analytische Verhalten des Integrals mit dem der Höhenzetafunktion übereinstimmt und berechnen anschließend die lokalen Höhenintegrale. Im letzten Abschnitt führen wir diese Ergebnisse schließlich zusammen und bestimmen das analytische Verhalten des globalen Höhenintegrals.

Wir setzen im Folgenden Kenntnisse der Theorie der algebraischen Varietäten, insbesondere der algebraischen Gruppen, wie sie zum Beispiel in [Sha74], [Har77], [Bor91], [Hum75] zu finden sind, voraus. Referenzen für die Theorie der Lie-Gruppen sind [Hel78] und [HN12]. Als Nachschlagewerke zur klassischen algebraischen und analytischen Zahlentheorie eignen sich [Neu99] und [Nar04]. Mit fett gedruckten Buchstaben, z.B. \mathbf{X} bzw. \mathbf{G} , bezeichnen wir die Varietäten und Gruppen über \mathbb{C} . Die Lie-Algebra \mathfrak{g} von \mathbf{G} ist daher als \mathbb{C} -Vektorraum zu verstehen. Weiter betten wir sämtlich Vervollständigungen k_v von k in \mathbb{C} ein.

Kapitel 1

Höhenfunktionen auf quasi-projektiven Varietäten

Sei k ein algebraischer Zahlkörper und \mathbf{X} eine über k definierte algebraische Varietät. Eine Höhenfunktion auf den k -rationalen Punkten von \mathbf{X} ist eine Funktion $H : \mathbf{X}(k) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, welche die „arithmetische Größe“¹ eines Punkts $x \in \mathbf{X}(k)$ misst. Um konkrete Höhenfunktionen zu definieren, werden wir zunächst eine geeignete Menge von Bewertungen des Zahlkörpers k wählen. Diese Wahl fixiert gewissermaßen die „Größe“ einer algebraischen Zahl und wird im ersten Abschnitt dieses Kapitels beschrieben. Anschließend werden wir verschiedene bekannte Höhenfunktionen auf algebraischen Varietäten kennenlernen.

1.1 Bewertungen

Eine detaillierte Einführung in die Bewertungstheorie, inklusive folgender Sachverhalte, ist in [Neu99, Kapitel II] und [HS00, Part B, §1] zu finden.

Sei k ein *algebraischer Zahlkörper*, d.h. $n := [k : \mathbb{Q}] < \infty$.

Definition 1.1.1. Eine *Bewertung* von k ist eine Abbildung

$$v : k \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

welche die folgenden Eigenschaften für alle $x, y \in k$ erfüllt:

- (i) $v(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,
- (ii) $v(xy) = v(x)v(y)$,
- (iii) $v(x + y) \leq v(x) + v(y)$.

Erfüllt v zusätzlich die stärkere Bedingung

- (iii)' $v(x + y) \leq \max\{v(x), v(y)\}$ für alle $x, y \in k$,

¹Siehe [HS00, Part B].

so heißt v *nicht-archimedisch*, andernfalls wird v *archimedisch* genannt. Wir schreiben auch $|\cdot|_v$ anstelle von $v(\cdot)$.

Im Folgenden wollen wir spezielle Bewertungen von k betrachten. Sei \mathcal{o} der *Ring der ganzen Zahlen* in k und $x \in k$. Der Ring \mathcal{o} ist ein Dedekindring, insbesondere können gebrochene Ideale eindeutig in ein Produkt von Primidealen in \mathcal{o} zerlegt werden. Für $x \in k^*$ gilt also

$$x\mathcal{o} = \prod_{\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{o} \text{ Primideal}} \mathfrak{p}^{\text{ord}_{\mathfrak{p}}(x)}$$

mit eindeutigen $\text{ord}_{\mathfrak{p}}(x) \in \mathbb{Z}$. Sei \mathfrak{p} ein Primideal ungleich Null in \mathcal{o} . Dann ist die \mathfrak{p} -*adische Bewertung* von k für $x \in k$ definiert durch

$$v_{\mathfrak{p}}(x) := |x|_{\mathfrak{p}} := \begin{cases} (\text{Norm}_{k|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}))^{-\text{ord}_{\mathfrak{p}}(x)}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

wobei $\text{Norm}_{k|\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}) := |\mathcal{o}/\mathfrak{a}|$ die Norm des Ideals $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{o}$ bezeichnet. Es gilt $v_{\mathfrak{p}}(k^*) \cong \mathbb{Z}$, d.h. $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ ist eine nicht-archimedische *diskrete Bewertung* mit *Bewertungsring* $\mathcal{o}_{\mathfrak{p}} := \{x \in k : |x|_{\mathfrak{p}} \leq 1\}$ (der Lokalisierung von \mathcal{o} nach \mathfrak{p}), maximalem Ideal $\mathfrak{p}\mathcal{o}_{\mathfrak{p}} := \{x \in k : |x|_{\mathfrak{p}} < 1\}$ und Einheitengruppe $\mathcal{o}_{\mathfrak{p}}^* := \{x \in k : |x|_{\mathfrak{p}} = 1\}$. Weiter ist $\mathcal{o}_{\mathfrak{p}}$ ein *diskreter Bewertungsring*, also insbesondere ein Hauptidealring. Wir wählen ein Primelement $\pi_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{o}_{\mathfrak{p}}$. Dieses erzeugt das maximale Ideal $\mathfrak{p}\mathcal{o}_{\mathfrak{p}}$ und jedes $x \in k^*$ kann eindeutig als Produkt $x = u\pi_{\mathfrak{p}}^m$ mit einer Einheit $u \in \mathcal{o}_{\mathfrak{p}}^*$ und $m \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden. Es gilt $m = \text{ord}_{\mathfrak{p}}(x)$.

Seien für $1 \leq i \leq n$

$$\varphi_i : k \rightarrow \mathbb{C}$$

die verschiedenen Einbettungen von k in \mathbb{C} . Wir definieren die zugehörigen *archimedischen Bewertungen* für $x \in k$ als

$$v_i(x) := |x|_i := |\varphi_i(x)|,$$

wobei $|\cdot|$ den Standardbetrag auf \mathbb{C} bezeichnet. Die Menge dieser archimedischen und nicht-archimedischen Bewertungen bezeichnen wir mit M_k und nennen sie die Menge der *Standardbewertungen* von k . Die Teilmenge aller archimedischen Bewertungen wird mit M_k^∞ , die aller nicht-archimedischen Bewertungen mit M_k^0 bezeichnet.

Beispiel 1.1.2 (Bewertungen von \mathbb{Q}). Sei p eine Primzahl. Jedes $x \in \mathbb{Q}^*$ kann als $x = p^m \frac{a}{b}$ mit eindeutigen Zahlen $m, a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ und $p \nmid ab$ geschrieben werden. Daher ist $\text{ord}_p(x) := \text{ord}_{(p)}(x) = m$ und die p -*adische Bewertung* von \mathbb{Q} ist gleich

$$|x|_p = p^{-\text{ord}_p(x)}.$$

Da die Inklusionsabbildung die einzige Einbettung von \mathbb{Q} in \mathbb{C} ist, ist die einzige archimedische Bewertung von \mathbb{Q} der Standardbetrag $|\cdot|$. Sei $x = \pm \prod_{p \text{ prim}} p^{\text{ord}_p(x)}$. Dann ist

$$\prod_{v \in M_{\mathbb{Q}}} |x|_v = |x| \prod_{p \text{ prim}} |x|_p = \prod_{p \text{ prim}} p^{\text{ord}_p(x)} \prod_{p \text{ prim}} p^{-\text{ord}_p(x)} = 1.$$

Allgemein gilt die *Produktformel*:

Proposition 1.1.3 ([HS00], Proposition B.1.2). *Sei $x \in k^*$. Dann ist $x \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^*$ für fast alle Primideale $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}$ und*

$$\prod_{v \in M_k} |x|_v = 1.$$

Für jedes $v \in M_k$ sei k_v die *Vervollständigung* von k bezüglich v . Die kanonische Einbettung von k in k_v wollen wir mit φ_v bezeichnen:

$$\varphi_v : k \rightarrow k_v.$$

Wir fassen k über φ_v als Unterkörper von k_v auf. Die Fortsetzung von v bzw. $|\cdot|_v$ auf k_v bezeichnen wir ebenfalls mit v bzw. $|\cdot|_v$.

Ist $v_i \in M_k^\infty$ eine archimedische Bewertung von k und $\varphi_i : k \rightarrow \mathbb{C}$ die zugehörige Einbettung. Dann ist $\varphi_{v_i}(x) = \varphi_i(x)$ für alle $x \in k$.

Sei $v \in M_k^0$ eine nicht-archimedische Bewertung von k und \mathfrak{p} das zugehörige Primideal in \mathcal{O} . Sei weiter $\mathcal{O}_v := \{x \in k_v : |x|_v \leq 1\}$ der Bewertungsring von k_v und \mathfrak{m}_v sein maximales Ideal. Dann ist auch \mathcal{O}_v ein diskreter Bewertungsring und es gilt

$$\mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v \cong \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong \mathcal{O}/\mathfrak{p}.$$

Wir setzen $q_v := |\mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v| = |\mathcal{O}/\mathfrak{p}| = \text{Norm}_{k|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})$. Sei $\pi_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ der obige Erzeuger von $\mathfrak{p}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. Dann erzeugt $\pi_v := \varphi_v(\pi_{\mathfrak{p}})$ das maximale Ideal \mathfrak{m}_v und jedes $x \in k_v^*$ kann als $x = u\pi_v^m$ mit eindeutigem $u \in \mathcal{O}_v^*$ und $m \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden. Darüber hinaus ist

$$|x|_v = q_v^{-\text{ord}_v(x)}$$

mit $\text{ord}_v(x) := m$.

Beispiel 1.1.4 (Vervollständigungen von \mathbb{Q}). Die Vervollständigung von \mathbb{Q} bezüglich seiner archimedischen Bewertung ist der Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen. Für eine Primzahl p ist die Vervollständigung von \mathbb{Q} bezüglich der p -adischen Bewertung der *Körper der p -adischen Zahlen* \mathbb{Q}_p . Sein Bewertungsring ist der *Ring der ganzen p -adischen Zahlen* \mathbb{Z}_p mit maximalem Ideal $p\mathbb{Z}_p$. Es gilt

$$\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

wobei $\mathbb{Z}_{(p)}$ die Lokalisierung von \mathbb{Z} nach dem Primideal $(p) \subseteq \mathbb{Z}$ bezeichnet.

Der Ring der *Adele* \mathbb{A}_k von k ist das eingeschränkte direkte Produkt der Vervollständigungen k_v bezüglich der Unterringe \mathcal{O}_v für $v \in M_k^0$, d.h.

$$\mathbb{A}_k := \prod_{v \in M_k} k_v = \left\{ (x_v) \in \prod_{v \in M_k} k_v : x_v \in \mathcal{O}_v \text{ für fast alle } v \in M_k^0 \right\}.$$

Da für jedes $x \in k^*$ gilt $x \in \mathcal{O}_v^*$ für fast alle $v \in M_k^0$, kann k über die Diagonaleinbettung

$$k \rightarrow \mathbb{A}_k, x \mapsto (x, x, \dots)$$

als diskreter Unterring von \mathbb{A}_k betrachtet werden.

1.2 Höhenfunktionen auf quasi-projektiven Varietäten

In den folgenden beiden Abschnitten werden wir einen kurzen Überblick über Höhenfunktionen auf quasi-projektiven Varietäten geben und Höhenfunktionen zu metrisierten Geradenbündeln einführen. Darüber hinaus werden wir die Batyrev-Manin-Vermutung über die Verteilung k -rationaler Punkte beschränkter Höhe erläutern. Siehe auch [CL10], [Tsc09] und [TB09].

Die elementarste Höhenfunktion ist die Standardhöhe auf der Menge der \mathbb{Q} -rationalen Punkte $\mathbb{P}^m(\mathbb{Q})$ des projektiven Raums. Ist $x \in \mathbb{P}^m(\mathbb{Q})$, so existieren, bis auf Multiplikation mit dem Faktor -1 , eindeutige teilerfremde $x_i \in \mathbb{Z}$ mit $x = [x_0 : \dots : x_m]$. Für diese ist die Standardhöhe von x definiert als

$$H(x) := \max\{|x_i| : 0 \leq i \leq m\},$$

wobei $|\cdot|$ den Standardbetrag auf \mathbb{Q} bezeichnet. Ein Punkt ist hierbei „groß“/„hoch“, wenn er „arithmetisch kompliziert“ ist. So sind sich zum Beispiel die Punkte $x := [1 : 1]$ und $y := [1 : \frac{9999}{10000}]$ im geometrischen Sinne recht ähnlich, jedoch ist y aus arithmetischer Sicht deutlich „komplexer“ als x . Es ist $H(x) = 1$ und $H(y) = 10000$, d.h. die Höhenfunktion spiegelt diesen Unterschied wieder. Für den algebraischen Zahlkörper k lässt sich dieser Höhenbegriff wie folgt verallgemeinern:

Definition 1.2.1. Seien $x \in \mathbb{P}^m(k)$ und $x_i \in k$ homogene Koordinaten mit $x = [x_0 : \dots : x_m]$. Dann ist die *Standardhöhe* von x bezüglich k definiert als

$$H_k(x) := \prod_{v \in M_k} \max\{|x_i|_v : 0 \leq i \leq m\}.$$

Die dadurch definierte Abbildung $H_k : \mathbb{P}^m(k) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$ nennen wir die *Standardhöhenfunktion* auf $\mathbb{P}^m(k)$ bezüglich k .

Bemerkung 1.2.2. Die Standardhöhe ist wohldefiniert. Zum einen gilt für alle homogenen Koordinaten $0 \neq x_i$, dass $x_i \in \mathcal{O}_v^*$ für fast alle $v \in M_k^0$ ist, d.h. nur endlich viele Faktoren in obigem Produkt sind von 1 verschieden. Zum anderen ist die Definition unabhängig von der konkreten Wahl dieser Koordinaten. Dies lässt sich leicht mit der Produktformel, siehe Proposition 1.1.3, überprüfen.

Bemerkung 1.2.3. Ist $v \in M_k$ und $\|\cdot\|_{v,\infty}$ die Maximumsnorm auf dem k_v -Vektorraum k_v^{m+1} , so gilt für die Standardhöhe auf $\mathbb{P}^m(k)$ bezüglich k

$$H_k(x) = \prod_{v \in M_k} \|(x_0, \dots, x_m)\|_{v,\infty}$$

für alle $x = [x_0, \dots, x_m] \in \mathbb{P}^m(k)$.

Beispiel 1.2.4. Sei $k = \mathbb{Q}$ und $x = [x_0 : \dots : x_m] \in \mathbb{P}^m(\mathbb{Q})$ mit homogenen Koordinaten $x_i \in \mathbb{Z}$, für die $\text{ggT}(x_0, \dots, x_m) = 1$ gilt. Dann ist $\max\{|x_i|_p : 0 \leq i \leq m\} = 1$ für jede Primzahl p und daher

$$H_{\mathbb{Q}}(x) = \max\{|x_i| : 0 \leq i \leq m\} \prod_{p \text{ prim}} \max\{|x_i|_p : 0 \leq i \leq m\} = H(x).$$

Weiter gibt es für jedes $B \in \mathbb{R}_{>0}$ nur endlich viele $x \in \mathbb{Z}$ mit $|x| \leq B$. Insbesondere ist

$$N_{\mathbb{P}^m(\mathbb{Q})}(B) := \#\{x \in \mathbb{P}^m(\mathbb{Q}) : H_{\mathbb{Q}}(x) \leq B\} < \infty.$$

Dieser Sachverhalt gilt auch für den Zahlkörper k , wie folgende Proposition zeigt:

Proposition 1.2.5 ([Nor50], Theorem 1). *Sei $B \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt*

$$N_{\mathbb{P}^m(k)}(B) := \#\{x \in \mathbb{P}^m(k) : H_k(x) \leq B\} < \infty.$$

Die Abbildung $N_{\mathbb{P}^m(k)} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ nennen wir die *Zählfunktion* von $\mathbb{P}^m(k)$ bezüglich H_k . Ein natürliches Anliegen ist es nun, das asymptotische Verhalten der Zählfunktion genauer zu bestimmen. Hierbei sagen wir, dass zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ *das gleiche asymptotische Verhalten* haben und schreiben $f \sim g$, falls gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

Proposition 1.2.6 ([Sch79], Corollary). *Es gilt*

$$N_{\mathbb{P}^m(k)}(B) \sim \frac{\lim_{s \rightarrow 1} ((s-1)\zeta_k(s))}{\zeta_k(m+1)} \left(\frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2}}{\sqrt{|D_k|}} \right)^m (m+1)^{r_1+r_2-1} B^{m+1},$$

wobei ζ_k die Dedekindsche Zetafunktion des Körpers k , D_k seine Diskriminante und r_1 bzw. $2r_2$ die Anzahl der reellen bzw. imaginären Einbettungen von k in \mathbb{C} bezeichnet.

Wir wollen nun einen ähnlichen Höhenbegriff für eine beliebige über k definierte normale quasi-projektive Varietät \mathbf{X} einführen und die Zählfunktion untersuchen. Ein naheliegender Ansatz eine Höhenfunktion auf $\mathbf{X}(k)$ zu definieren ist es, einen über k definierten Morphismus $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{P}^m$ zu betrachten und die Standardhöhenfunktion auf $\mathbb{P}^m(k)$ auf $\mathbf{X}(k)$ zurückzuziehen. Wir setzen

$$H_{k,\varphi} : \mathbf{X}(k) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}, x \mapsto H_k(\varphi(x))$$

und nennen $H_{k,\varphi}$ die *Höhenfunktion auf $\mathbf{X}(k)$ bezüglich k und φ* . Morphismen von \mathbf{X} nach \mathbb{P}^m können durch *Geradenbündel* mit hinreichend vielen globalen Schnitten beschrieben werden. Wir werden diese Idee daher in die Sprache der metrisierten Geradenbündel übersetzen.

Sei also \mathbf{X} eine über k definierte normale quasi-projektive Varietät und E ein Geradenbündel über \mathbf{X} . Weiter sei $v \in M_k$. Dann ist für jedes $x \in \mathbf{X}(k_v)$ die Faser E_x ein eindimensionaler k_v -Vektorraum, auf dem wir folgende Normen und Metriken betrachten:

Definition 1.2.7. Sei $v \in M_k$ und V ein k_v -Vektorraum. Eine v -adische Norm auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\|_v : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, welche die folgenden Bedingungen für alle $x, y \in V$ erfüllt:

- (i) $\|x\|_v = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,
- (ii) $\|ax\|_v = |a|_v \|x\|_v$ für alle $a \in k_v$,
- (iii) $\|x + y\|_v \leq \|x\|_v + \|y\|_v$.

Definition 1.2.8. Sei $v \in M_k$, \mathbf{X} eine über k definierte normale quasi-projektive Varietät und E ein Geradenbündel über \mathbf{X} . Eine v -adische Metrik auf E ist eine Familie v -adischer Normen $\{\|\cdot\|_{v,x} : x \in \mathbf{X}(k_v)\}$ auf den Fasern E_x für jedes $x \in \mathbf{X}(k_v)$, so dass für jede offene Teilmenge $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X}$ und jeden Schnitt $s \in \Gamma(\mathbf{U}, E)$ die Abbildung

$$\mathbf{U}(k_v) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \|s(x)\|_{v,x}$$

stetig bezüglich der v -adischen Topologie² auf $\mathbf{U}(k_v)$ ist. Wir schreiben auch kurz $\|\cdot\|_v$ für die Familie $\{\|\cdot\|_{v,x} : x \in \mathbf{X}(k_v)\}$.

Beispiel 1.2.9. Sei E ein sehr amples Geradenbündel über \mathbf{X} und $\mathbf{s} = \{s_0, \dots, s_m\}$ eine über k definierte Basis von $\Gamma(\mathbf{X}, E)$. Ist $x \in \mathbf{X}(k_v)$ und $s \in \Gamma(\mathbf{X}, E)$ mit $s(x) \neq 0$, so setzen wir

$$\|s(x)\|_{v,x}^{\mathbf{s}} := \left(\max_{0 \leq i \leq m} \left| \frac{s_i(x)}{s(x)} \right|_v \right)^{-1},$$

andernfalls gilt $\|s(x)\|_{v,x}^{\mathbf{s}} := 0$. Diese Festsetzung ist unabhängig von der Wahl des Schnitts $s \in \Gamma(\mathbf{X}, E)$ und definiert daher eine wohldefinierte v -adische Metrik $\|\cdot\|_v^{\mathbf{s}} := \{\|\cdot\|_{v,x}^{\mathbf{s}} : x \in \mathbf{X}(k_v)\}$ auf E . Wir nennen $\|\cdot\|_v^{\mathbf{s}}$ die durch die Basis \mathbf{s} definierte v -adische Metrik auf E .

Die v -adischen Metriken sind mit den herkömmlichen Operationen von Geradenbündeln verträglich:

Lemma 1.2.10. Sei $v \in M_k$ und \mathbf{X} eine über k definierte normale quasi-projektive Varietät. Weiter sei E ein Geradenbündel über \mathbf{X} und $\|\cdot\|_v = \{\|\cdot\|_{v,x} : x \in \mathbf{X}(k_v)\}$ eine v -adische Metrik auf E . Dann gilt:

- (a) Ist E' ein Geradenbündel über \mathbf{X} und $\|\cdot\|'_v = \{\|\cdot\|'_{v,x} : x \in \mathbf{X}(k_v)\}$ eine v -adische Metrik auf E' , so definiert die folgende Vorschrift eine v -adische Metrik $\|\cdot\|_v \otimes \|\cdot\|'_v := \{\|\cdot\|_{v,x}^{\otimes} : x \in \mathbf{X}(k_v)\}$ auf dem (inneren) Tensorprodukt $E \otimes E'$. Sei $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X}$ offen mit Rahmen $s \in \Gamma(\mathbf{U}, E)$ und $s' \in \Gamma(\mathbf{U}, E')$. Dann setzen wir für alle $x \in \mathbf{U}(k_v)$

$$\|(s \otimes s')(x)\|_{v,x}^{\otimes} := \|s(x)\|_{v,x} \|s'(x)\|'_{v,x}.$$

²Siehe [PR94, §3.1].

- (b) Ist $E^* = E^{-1}$ das zu E duale Geradenbündel, so definiert die folgende Vorschrift eine v -adische Metrik $\|\cdot\|_v^* := \{\|\cdot\|_{v,x}^* : x \in \mathbf{X}(k_v)\}$ auf $E^* = E^{-1}$. Sei $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X}$ offen mit Rahmen $s \in \Gamma(\mathbf{U}, E)$. Dann setzen wir für alle $x \in \mathbf{U}(k_v)$

$$\|s^*(x)\|_{v,x}^* := \|s(x)\|_{v,x}^{-1}.$$

- (c) Ist E' ein Geradenbündel über einer über k definierten normalen quasi-projektiven Varietät \mathbf{Y} und $\|\cdot\|'_v = \{\|\cdot\|'_{v,y} : y \in \mathbf{Y}(k_v)\}$ eine v -adische Metrik auf E' , so definiert die folgende Vorschrift eine v -adische Metrik $\|\cdot\|_v \boxtimes \|\cdot\|'_v := \{\|\cdot\|_{v,(x,y)}^{\boxtimes} : (x,y) \in \mathbf{X}(k_v) \times \mathbf{Y}(k_v)\}$ auf dem (äußeren) Tensorprodukt $E \boxtimes E'$. Seien $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{U}' \subseteq \mathbf{Y}$ offen mit Rahmen $s \in \Gamma(\mathbf{U}, E)$ und $s' \in \Gamma(\mathbf{U}', E')$. Dann setzen wir für alle $(x,y) \in \mathbf{U}(k_v) \times \mathbf{U}'(k_v)$

$$\|(s \boxtimes s')(x,y)\|_{v,(x,y)}^{\boxtimes} := \|s(x)\|_{v,x} \|s'(y)\|_{v,y}.$$

- (d) Ist \mathbf{Y} eine über k definierte normale quasi-projektive Varietät und $\varphi : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ ein über k definierter Morphismus quasi-projektiver Varietäten, so definiert die folgende Vorschrift eine v -adische Metrik $\|\cdot\|_v^\varphi := \{\|\cdot\|_{v,y}^\varphi : y \in \mathbf{Y}(k_v)\}$ auf dem Rückzug φ^*E von E unter φ . Sei $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X}$ offen mit Rahmen $s \in \Gamma(\mathbf{U}, E)$. Dann setzen wir für alle $y \in \varphi^{-1}(\mathbf{U}(k_v))$

$$\|\varphi^*s(y)\|_{v,y}^\varphi := \|s(\varphi(y))\|_{v,\varphi(y)}.$$

Beweis. Die obigen Definitionen sind unabhängig von der Wahl der offenen Teilmengen und der jeweiligen Rahmen. Mit den Konventionen

$$\|0\|_{v,x}^\otimes := \|0\|_{v,x}^* := \|0\|_{v,(x,y)}^{\boxtimes} := \|0\|_{v,y}^\varphi := 0$$

für alle $x \in \mathbf{X}(k_v)$ und alle $y \in \mathbf{Y}(k_v)$ erhalten wir daher wohldefinierte v -adische Metriken auf den jeweiligen Geradenbündeln. \square

Definition 1.2.11. Sei \mathbf{X} eine über k definierte normale quasi-projektive Varietät.

- (i) Sei E ein sehr amples Geradenbündel über \mathbf{X} und $\|\cdot\|_{M_k} = \{\|\cdot\|_v : v \in M_k\}$ eine Familie v -adischer Metriken auf E . Existiert eine über k definierte Basis $\mathbf{s} = \{s_0, \dots, s_m\}$ von $\Gamma(\mathbf{X}, E)$ und ist $\|\cdot\|_v = \|\cdot\|_v^{\mathbf{s}}$ für fast alle $v \in M_k$, so nennen wir $\|\cdot\|_{M_k}$ eine *adelische Metrik* auf E und $\mathbb{E} := (E, \|\cdot\|_{M_k})$ ein *adelisch metrisiertes Geradenbündel*.
- (ii) Sei E ein beliebiges Geradenbündel über \mathbf{X} und $\|\cdot\|_{M_k} = \{\|\cdot\|_v : v \in M_k\}$ eine Familie v -adischer Metriken auf E . Existieren zwei adelisch metrisierte sehr ample Geradenbündel $\mathbb{E}_1 = (E_1, \{\|\cdot\|_{v,1} : v \in M_k\})$ und $\mathbb{E}_2 = (E_2, \{\|\cdot\|_{v,2} : v \in M_k\})$ über \mathbf{X} mit $E = E_1 \otimes_k E_2^{-1}$ und

$$\|\cdot\|_v = \|\cdot\|_{v,1} \otimes \|\cdot\|_{v,2}^*$$

für fast alle $v \in M_k$, so nennen wir $\|\cdot\|_{M_k}$ eine *adelische Metrik* auf E und $\mathbb{E} := (E, \|\cdot\|_{M_k})$ ein *adelisch metrisiertes Geradenbündel*.

Bemerkung 1.2.12. Ist E ein Geradenbündel über \mathbf{X} , so gibt es immer zwei sehr ample Geradenbündel E_1 und E_2 über \mathbf{X} mit $E = E_1 \otimes_k E_2^{-1}$, siehe [HS00, Theorem A.3.2.3].

Definition 1.2.13. Sei \mathbf{X} eine über k definierte normale quasi-projektive Varietät und $\mathbb{E} = (E, \|\cdot\|_{M_k})$ ein adelisch metrisiertes Geradenbündel über \mathbf{X} mit $\|\cdot\|_{M_k} = \{\|\cdot\|_v : v \in M_k\}$ und $\|\cdot\|_v = \{\|\cdot\|_{v,x} : x \in \mathbf{X}(k_v)\}$ für alle $v \in M_k$. Weiter sei $x \in \mathbf{X}(k)$ und \mathbf{U} eine offene Umgebung von x mit einem Rahmen $s \in \Gamma(\mathbf{U}, E)$. Dann definieren wir die *Höhe* $H_{\mathbb{E}}(x)$ von x bezüglich \mathbb{E} als

$$H_{\mathbb{E}}(x) := \prod_{v \in M_k} \|s(x)\|_{v,x}^{-1}.$$

Die Funktion $H_{\mathbb{E}} : \mathbf{X}(k) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto H_{\mathbb{E}}(x)$ nennen wir die *Höhenfunktion auf $\mathbf{X}(k)$ bezüglich \mathbb{E}* .

Bemerkung 1.2.14. Da das Geradenbündel \mathbb{E} adelisch metrisiert ist, sind nur endlich viele Faktoren in obigem Produkt von 1 verschieden. Darüber hinaus ist die Höhenfunktion dank der Produktformel, siehe Proposition 1.1.3, unabhängig von der Wahl der offenen Umgebung \mathbf{U} und des Rahmens $s \in \Gamma(\mathbf{U}, E)$. Insgesamt ist die Höhenfunktion auf $\mathbf{X}(k)$ bezüglich \mathbb{E} also wohldefiniert.

Beispiel 1.2.15. Wir betrachten das *Hyperebenenbündel* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$ über \mathbb{P}^m mit den zu den Koordinaten x_i gehörenden globalen Schnitten $s_i : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$, für $0 \leq i \leq m$. Dann ist $\mathbf{s} := \{s_0, \dots, s_m\}$ eine über k definierte Basis von $\Gamma(\mathbb{P}^m, E)$ und folglich $\mathbb{E}_{\mathbf{s}} := (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1), \|\cdot\|_{M_k}^{\mathbf{s}})$ mit der adelischen Metrik $\|\cdot\|_{M_k}^{\mathbf{s}} := \{\|\cdot\|_v^{\mathbf{s}} : v \in M_k\}$ ein adelisch metrisiertes Geradenbündel über \mathbb{P}^m . Ist $x = [x_0 : \dots : x_m] \in \mathbb{P}^m(k)$, so ist $x_j \neq 0$ für ein $0 \leq j \leq m$ und daher gilt mit der Produktformel

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{E}_{\mathbf{s}}}(x) &= \prod_{v \in M_k} (\|s_j(x)\|_{v,x}^{\mathbf{s}})^{-1} = \prod_{v \in M_k} \max_{0 \leq i \leq m} \left| \frac{s_i(x)}{s_j(x)} \right|_v = \prod_{v \in M_k} \max_{0 \leq i \leq m} \left| \frac{x_i}{x_j} \right|_v = \prod_{v \in M_k} \max_{0 \leq i \leq m} |x_i|_v \\ &= H_k(x), \end{aligned}$$

d.h. $H_{\mathbb{E}_{\mathbf{s}}}$ ist die Standardhöhenfunktion auf $\mathbb{P}^m(k)$ bezüglich k . Diese wurde lokal für alle $v \in M_k$ durch die Maximumsnorm $\|\cdot\|_{v,\infty}$ auf dem k_v -Vektorraum k_v^{m+1} definiert, d.h. es ist

$$H_k(x) = \prod_{v \in M_k} \|(x_0, \dots, x_m)\|_{v,\infty}$$

für alle $x = [x_0 : \dots : x_m] \in \mathbb{P}^m(k)$. Wählen wir hierbei anstelle der Maximumsnorm für endlich viele $v \in M_k$ eine andere v -adische Norm auf k_v^{m+1} , so erhalten wir ebenfalls wohldefinierte v -adische Metriken auf $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$ und somit eine adelische Metrik auf $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$.

In Lemma 1.2.10 haben wir bereits gesehen, dass die v -adischen Metriken mit den Operationen der Geradenbündel verträglich sind. Das Gleiche gilt folglich auch für die Höhenfunktionen:

Proposition 1.2.16. *Sei \mathbf{X} eine über k definierte normale quasi-projektive Varietät. Weiter sei $\mathbb{E} = (E, \{\|\cdot\|_v : v \in M_k\})$ ein adelisch metrisiertes Geradenbündel über \mathbf{X} . Dann gilt:*

- (a) *Ist $\mathbb{E}' = (E', \{\|\cdot\|'_v : v \in M_k\})$ ein adelisch metrisiertes Geradenbündel über \mathbf{X} , so ist auch $\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}' := (E \otimes E', \{\|\cdot\|_v \otimes \|\cdot\|'_v : v \in M_k\})$ ein adelisch metrisiertes Geradenbündel über \mathbf{X} und es gilt*

$$H_{\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}'}(x) = H_{\mathbb{E}}(x)H_{\mathbb{E}'}(x)$$

für alle $x \in \mathbf{X}(k)$.

- (b) *Auch das zu \mathbb{E} duale Geradenbündel $\mathbb{E}^* := (E^*, \{\|\cdot\|_v^* : v \in M_k\})$ ist ein adelisch metrisiertes Geradenbündel über \mathbf{X} und es gilt*

$$H_{\mathbb{E}^*}(x) = H_{\mathbb{E}}(x)^{-1}$$

für alle $x \in \mathbf{X}(k)$.

- (c) *Ist $\mathbb{E}' = (E', \{\|\cdot\|'_v : v \in M_k\})$ ein adelisch metrisiertes Geradenbündel über einer über k definierten normalen quasi-projektiven Varietät \mathbf{Y} , so ist auch $\mathbb{E} \boxtimes \mathbb{E}' := (E \boxtimes E', \{\|\cdot\|_v \boxtimes \|\cdot\|'_v : v \in M_k\})$ ein adelisch metrisiertes Geradenbündel über $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ und es gilt*

$$H_{\mathbb{E} \boxtimes \mathbb{E}'}(x, y) = H_{\mathbb{E}}(x)H_{\mathbb{E}'}(y)$$

für alle $(x, y) \in \mathbf{X}(k) \times \mathbf{Y}(k)$.

- (d) *Ist \mathbf{Y} eine über k definierte normale quasi-projektive Varietät und $\varphi : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ ein über k definierter Morphismus quasi-projektiver Varietäten, so ist der Rückzug $\varphi^*\mathbb{E} := (\varphi^*E, \{\|\cdot\|_v^\varphi : v \in M_k\})$ ein adelisch metrisiertes Geradenbündel über \mathbf{Y} und es gilt*

$$H_{\varphi^*\mathbb{E}}(y) = H_{\mathbb{E}}(\varphi(y))$$

für alle $y \in \mathbf{Y}(k)$.

Beweis. Folgt sofort aus Lemma 1.2.10. □

Beispiel 1.2.17. Sei \mathbf{X} eine über k definierte normale quasi-projektive Varietät und

$$\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{P}^m,$$

ein über k definierter Morphismus quasi-projektiver Varietäten. Weiter sei die Basis \mathbf{s} von $\Gamma(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1))$ und $\mathbb{E}_{\mathbf{s}} = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1), \|\cdot\|_{M_k}^{\mathbf{s}})$ wie in Beispiel 1.2.15 gewählt. Dann ist $\varphi^*\mathbb{E}_{\mathbf{s}}$ ein adelisch metrisiertes Geradenbündel und

$$H_{\varphi^*\mathbb{E}_{\mathbf{s}}}(x) = H_{\mathbb{E}_{\mathbf{s}}}(\varphi(x)) = H_k(\varphi(x)) = H_{k, \varphi}(x)$$

für alle $x \in \mathbf{X}(k)$. Wir erhalten also gerade die Höhenfunktion auf $\mathbf{X}(k)$ bezüglich k und φ .

Die Höhenfunktionen zu verschiedenen adelischen Metriken eines Geradenbündels über einer projektiven Varietät unterscheiden sich nur geringfügig:

Proposition 1.2.18 (Siehe zum Beispiel [CL10], §2.4.6). *Sei \mathbf{X} eine über k definierte normale projektive Varietät und E ein Geradenbündel über \mathbf{X} . Weiter seien $\|\cdot\|_{M_k}$ und $\|\cdot\|'_{M_k}$ zwei adelische Metriken auf E und $\mathbb{E} := (E, \|\cdot\|_{M_k})$ bzw. $\mathbb{E}' := (E, \|\cdot\|'_{M_k})$. Dann gibt es eine positive reelle Konstante $\mathfrak{c} \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass*

$$\mathfrak{c}^{-1} \leq \frac{H_{\mathbb{E}}(x)}{H_{\mathbb{E}'}(x)} \leq \mathfrak{c}$$

für alle $x \in \mathbf{X}(k)$ gilt.

Hiermit lässt sich die Endlichkeit der Anzahl der Punkte beschränkter Höhe zu ample Geradenbündeln auf die Endlichkeit der Anzahl der Punkte beschränkter Standardhöhe im projektiven Raum zurückführen:

Proposition 1.2.19 (Siehe zum Beispiel [CL10], §2.4.8). *Sei \mathbf{X} eine über k definierte normale projektive Varietät und $\mathbb{E} = (E, \|\cdot\|_{M_k})$ ein adelisch metrisiertes amples Geradenbündel über \mathbf{X} . Sei weiter $B \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt*

$$N_{\mathbf{X}(k)}(\mathbb{E}, B) := \#\{x \in \mathbf{X}(k) : H_{\mathbb{E}}(x) \leq B\} < \infty.$$

1.3 Die Batyrev-Manin-Vermutung

Die *Batyrev-Manin-Vermutung* stellt für glatte projektive Varietäten einen Zusammenhang zwischen dem asymptotischen Verhalten der Zählfunktion $N_{\mathbf{X}(k)}(\mathbb{E}, \cdot) : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und der Geometrie der Varietät her. Diesen werden wir nun genauer beschreiben:

Sei \mathbf{X} eine über k definierte glatte projektive Varietät und $\text{Pic}(\mathbf{X})$ die *Picard-Gruppe* von \mathbf{X} . Wir fassen $\text{Pic}(\mathbf{X})$, je nach Situation, als Gruppe der Divisorenklassen auf \mathbf{X} modulo linearer Äquivalenz „ \equiv_{lin} “ oder als Gruppe der Isomorphieklassen von Geradenbündeln über \mathbf{X} auf. Für einen Divisor D auf \mathbf{X} bzw. ein Geradenbündel E über \mathbf{X} schreiben wir $[D]$ bzw. $[E]$ für die jeweilige Klasse in $\text{Pic}(\mathbf{X})$. Weiter sei $\text{Pic}(\mathbf{X})_{\mathbb{R}} := \text{Pic}(\mathbf{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ der \mathbb{R} -Vektorraum über $\text{Pic}(\mathbf{X})$ und $\Lambda_{\text{eff}}(\mathbf{X}) \subseteq \text{Pic}(\mathbf{X})_{\mathbb{R}}$ der *Kegel der effektiven Divisoren/Geradenbündel* auf/über \mathbf{X} . Man beachte, dass $\text{Pic}(\mathbf{X})_{\mathbb{R}}$ ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum ist.

Sei $\omega_{\mathbf{X}}$ das *kanonische Geradenbündel* über \mathbf{X} . Wir fordern nun, dass $\omega_{\mathbf{X}}$ nicht effektiv ist, d.h. $[\omega_{\mathbf{X}}] \notin \Lambda_{\text{eff}}(\mathbf{X})$ gilt. Dies ist zum Beispiel für *Fano-Varietäten*, d.h. glatten projektiven Varietäten mit amplem *anti-kanonischem Geradenbündel* $\omega_{\mathbf{X}}^{-1}$, automatisch erfüllt. Für ein Geradenbündel E , dessen Isomorphieklasse $[E]$ im Inneren des Kegels $\Lambda_{\text{eff}}(\mathbf{X}) \subseteq \text{Pic}(\mathbf{X})_{\mathbb{R}}$ liegt, setzen wir

$$\alpha_{\mathbf{X},k}(E) := \min\{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma[E] + [\omega_{\mathbf{X}}] \in \Lambda_{\text{eff}}(\mathbf{X})\}.$$

Gilt darüber hinaus, dass $\Lambda_{\text{eff}}(\mathbf{X})$ in einer Umgebung von $\alpha_{\mathbf{X},k}(E)[E] + [\omega_{\mathbf{X}}]$ polyedrisch ist, so definieren wir ferner

$$t_{\mathbf{X},k}(E) := \max\{\text{codim}(\sigma) : \sigma \text{ ist eine Seite von } \Lambda_{\text{eff}}(\mathbf{X}) \text{ mit } \alpha_{\mathbf{X},k}(E)[E] + [\omega_{\mathbf{X}}] \in \sigma\}.$$

Geometrisch lassen sich diese Konstanten wie folgt veranschaulichen:

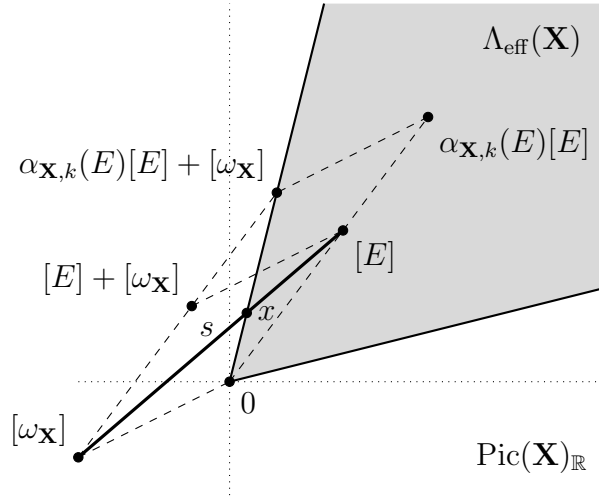


Abbildung 1.1: Geometrische Interpretation von $\alpha_{\mathbf{X},k}(E)$ und $t_{\mathbf{X},k}(E)$.

Ist s die Verbindungsstrecke zwischen $[\omega_{\mathbf{X}}]$ und $[E]$ in $\text{Pic}(\mathbf{X})_{\mathbb{R}}$, so schneidet s den Rand des Kegels $\Lambda_{\text{eff}}(\mathbf{X})$ in genau einem Punkt x . Dieser Punkt teilt die Strecke s im Verhältnis $\alpha_{\mathbf{X},k}(E) : 1$ und es gilt

$$t_{\mathbf{X},k}(E) = \max\{\text{codim}(\sigma) : \sigma \text{ ist eine Seite von } \Lambda_{\text{eff}}(\mathbf{X}) \text{ mit } x \in \sigma\}.$$

Mit den Konstanten $\alpha_{\mathbf{X},k}(E)$ und $t_{\mathbf{X},k}(E)$ haben Victor Batyrev und Yuri I. Manin in [BM90] die folgende Vermutung aufgestellt:

Vermutung. Sei \mathbf{X} eine über k definierte glatte projektive Varietät und $\mathbb{E} = (E, \|\cdot\|_{M_k})$ ein adelisch metrisiertes Geradenbündel über \mathbf{X} , dessen Klasse $[E]$ im Inneren des Kegels $\Lambda_{\text{eff}}(\mathbf{X}) \subseteq \text{Pic}(\mathbf{X})_{\mathbb{R}}$ liegt. Weiter liege $[\omega_{\mathbf{X}}]$ nicht in $\Lambda_{\text{eff}}(\mathbf{X})$ und $\Lambda_{\text{eff}}(\mathbf{X})$ sei in einer Umgebung von $\alpha_{\mathbf{X},k}(E)[E] + [\omega_{\mathbf{X}}]$ polyedrisch. Dann gibt es für jede hinreichend große endliche Erweiterung $k'|k$ und jede hinreichend kleine dichte offene Teilmenge $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X}$ eine Konstante $\gamma_{\mathbf{U},k'}(\mathbb{E}) \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$N_{\mathbf{U}(k')}(\mathbb{E}, B) \sim \gamma_{\mathbf{U},k'}(\mathbb{E}) B^{\alpha_{\mathbf{X},k}(E)} (\log B)^{t_{\mathbf{X},k}(E)-1}.$$

Bemerkung 1.3.1. Die Batyrev-Manin-Vermutung stellt eine Verallgemeinerung einer von Manin in [FMT89] für Fano-Varietäten formulierten Vermutung dar. Genauer wird dort eine Asymptotik der obigen Art mit $\alpha_{\mathbf{X},k}(E) = 1$ und $t_{\mathbf{X},k}(E) = \text{rk}(\text{Pic}(\mathbf{X}))$ erwartet.

Bemerkung 1.3.2. Die Wahl der adelischen Metrik auf dem Geradenbündel fließt nur in die Konstante $\gamma_{\mathbf{U},k'}(\mathbb{E})$ ein. Emmanuel Peyre hat in [Pey95] eine Verfeinerung der Batyrev-Manin-Vermutung formuliert und eine genaue Form der Konstanten $\gamma_{\mathbf{U},k'}(\mathbb{E})$ angegeben.

Bemerkung 1.3.3. Die Batyrev-Manin-Vermutung wurde bereits für zahlreiche Klassen von Varietäten bewiesen. Siehe zum Beispiel [CL10, §4] für eine umfangreiche Auflistung. Dennoch ist sie in ihrer völligen Allgemeinheit leider falsch. Ein Gegenbeispiel ist zum Beispiel in [BT96b] zu finden.

Im Zentrum unseres Interesses stehen in dieser Arbeit algebraische Gruppen, genauer gesagt halbeinfache algebraische Gruppen. Viele Varietäten, für die die Batyrev-Manin-Vermutung bewiesen wurde, sind projektive Varietäten \mathbf{X} , auf denen eine algebraische Gruppe \mathbf{G} operiert und die \mathbf{G} als dichte offenen Bahn enthalten, siehe auch §5.1.1. Die auf $\mathbf{X}(k)$ betrachteten Höhenfunktionen H induzieren durch die Bahnabbildung eine Höhenfunktion auf $\mathbf{G}(k)$ und es wird das asymptotische Verhalten von

$$N_{\mathbf{G}(k)}(B) := \#\{g \in \mathbf{G}(k) : H(g) \leq B\}$$

für $B \rightarrow \infty$ bestimmt. Wir werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit eine neue Höhenfunktion auf halbeinfachen algebraischen Gruppen untersuchen, die nicht durch eine Einbettung in einen projektiven Raum definiert ist.

Kapitel 2

Höhenfunktionen auf halbeinfachen algebraischen Gruppen

Im Folgenden sei k ein algebraischer Zahlkörper und M_k die Menge der Standardbewertungen von k . Wir übernehmen die Notationen aus §1.1. Weiter sei \mathbf{G} eine über k definierte *halbeinfache algebraische Gruppe*. Wir wollen nun auf eine natürliche Weise eine neue Höhenfunktion auf $\mathbf{G}(k)$ einführen, die nicht, wie in §1.2, durch einen Morphismus in einen projektiven Raum definiert ist.

2.1 Definition

Die lineare algebraische Gruppe \mathbf{G} kann als abgeschlossene Untergruppe von GL_n realisiert werden, die über k definiert ist. Wir fixieren im Folgenden eine solche Realisierung und schreiben $\mathbf{G}(\mathfrak{o}) := \mathbf{G} \cap \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})$ und $\mathbf{G}(\mathfrak{o}_v) := \mathbf{G} \cap \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_v)$ für alle $v \in M_k^0$. Ist $v \in M_k$, so setzen wir $G_v := \mathbf{G}(k_v)$.

Sei zunächst $v \in M_k^\infty$ eine archimedische Bewertung. Dann können wir G_v als reelle Lie-Gruppe betrachten. Da G_v nur endlich viele Zusammenhangskomponenten hat, gibt es eine echte maximale kompakte Untergruppe K_v von G_v und alle maximalen kompakten Untergruppen von G_v sind konjugiert zueinander, siehe [PR94, Theorem 3.5/3.6] und [HN12, Theorem 14.1.3]. Wir fixieren im Folgenden eine *maximale kompakte Untergruppen* K_v von G_v . Weiter ist G_v° eine zusammenhängende halbeinfache Lie-Gruppe mit zusammenhängender maximaler kompakter Untergruppe $K_v^\circ = G_v^\circ \cap K_v$. Daher gibt es einen analytischen involutiven Automorphismus $\sigma_v : G_v^\circ \rightarrow G_v^\circ$ mit Fixpunktmenge $(G_v^\circ)^{\sigma_v} = K_v^\circ$, d.h. $G_v^\circ/K_v^\circ \cong G_v/K_v$ ist ein *riemannscher symmetrischer Raum*, siehe [Hel78, VI, Theorem 1.1] und [Hel78, IV, Proposition 3.4].

Sei nun $v \in M_k^0$ eine nicht-archimedische Bewertung. Dann operiert G_v auf dem *Bruhat-Tits-Gebäude* $\mathcal{B}_v := \mathcal{B}(\mathbf{G}, k_v)$ von G_v . Näheres zur Konstruktion des Bruhat-Tits-Gebäudes ist in §4.2 zu finden. Wir wählen eine *spezielle*¹ Ecke $\xi_v \in \mathcal{B}_v$ und setzen

$$K_v := \mathrm{Stab}_{G_v}(\xi_v).$$

¹Siehe Definition 4.2.43.

Dann ist nach [Tit79, §3.2] K_v eine maximale kompakte Untergruppe von G_v und wir können G_v/K_v mit der Bahn von ξ_v unter der G_v -Wirkung in \mathcal{B}_v identifizieren. Weiter wählen wir eine endliche Menge $S_k \subseteq M_k^0$, so dass für alle $v \in M_k^0 \setminus S_k$ die Ecke ξ_v *hyperspeziell*² ist und $K_v = \mathbf{G}(\mathfrak{o}_v)$ gilt. Nach [Tit79, §3.9.1] gibt es eine solche Menge $S_k \subseteq M_k^0$, vergleiche auch §4.2.3.

In beiden Fällen kann G_v/K_v als metrischer Raum realisiert werden. Weitere Details hierfür sind in §4 zu finden. Mit $\text{dist}_v : G_v/K_v \times G_v/K_v \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir die zugehörige Metrik auf G_v/K_v . G_v operiert auf natürliche Weise transitiv und abstandstreu von links auf G_v/K_v :

$$G_v \times G_v/K_v \rightarrow G_v/K_v, (g_v, h_v K_v) \mapsto g_v(h_v K_v) := (g_v h_v) K_v.$$

Definition 2.1.1. (i) Sei $v \in M_k$. Für $g_v \in G_v$ definieren wir die *v-adische lokale Höhe* $H_v(g_v)$ von g_v durch

$$\log_v(H_v(g_v)) := \text{dist}_v(K_v, g_v K_v),$$

wobei

$$\log_v := \begin{cases} \log_e, & \text{falls } v \in M_k^\infty, \\ \log_{q_v}, & \text{falls } v \in M_k^0. \end{cases}$$

(ii) Sei $g \in \mathbf{G}(k)$. Dann ist die (*globale*) *Höhe* von g definiert als

$$H(g) := \prod_{v \in M_k} H_v(g).$$

Bemerkung 2.1.2. In obiger Definition fassen wir $\mathbf{G}(k)$ über die Einbettungen $\varphi_v : k \rightarrow k_v$ aus §1.1 für alle $v \in M_k$ als Teilmenge von G_v auf.

Bemerkung 2.1.3. Die *Höhenfunktion* $H : \mathbf{G}(k) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$ ist wohldefiniert, d.h. für jedes $g \in \mathbf{G}(k)$ ist $H_v(g) = 1$ für fast alle $v \in M_k$.

Beweis. Sei $g \in \mathbf{G}(k)$. Da der Abstand $\text{dist}_v(K_v, gK_v)$ für alle $v \in M_k$ nichtnegativ ist, gilt $H_v(g) \geq 1$ für alle $v \in M_k$ und daher $H(g) \geq 1$. Weiter ist $g \in \mathbf{G}(\mathfrak{o}_v) = \mathbf{G}(k_v) \cap \text{GL}_n(\mathfrak{o}_v)$ für alle bis auf endlich viele $v \in M_k^0$ und folglich $gK_v = K_v$. Wir erhalten

$$H_v(g) = q_v^{\text{dist}_v(K_v, gK_v)} = 1$$

für alle bis auf endlich viele $v \in M_k$. □

Bemerkung 2.1.4. Die Definition der Höhenfunktion hängt lokal von der Wahl der maximalen kompakten Untergruppen K_v und den Metriken auf G_v/K_v ab. Unterschiedliche Wahlen können die Höhe beeinflussen. Wir werden uns mit diesen Abhängigkeiten genauer am Ende der Abschnitte §4.1 und §4.2 beschäftigen.

²Siehe Definition 4.2.46.

Bemerkung 2.1.5. Sei $v \in M_k$. Nach Konstruktion ist die v -adische lokale Höhenfunktion $H_v : G_v \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$ für alle $g_v \in G_v$ konstant auf den *Doppelnebenklassen* $K_v g_v K_v$. Denn sind $x_v, x'_v \in K_v$, so gilt wegen der G_v -Invarianz der Metrik

$$\mathrm{dist}_v(K_v, x_v g_v x'_v K_v) = \mathrm{dist}_v(x_v^{-1} K_v, g_v x'_v K_v) = \mathrm{dist}_v(K_v, g_v K_v),$$

d.h. $H_v(g_v) = H_v(x_v g_v x'_v)$.

Ziel dieser Arbeit ist es, analog zu den in §1 betrachteten Objekten, für k -spaltende halbeinfache algebraische Gruppen die Endlichkeit der Anzahl der Punkte beschränkter Höhe

$$N_{\mathbf{G}(k)}(B) := \#\{g \in \mathbf{G}(k) : H(g) \leq B\}$$

für jedes $B \in \mathbb{R}_{>0}$ zu zeigen. Eine algebraische Gruppe heißt hierbei *k -spaltend*, bzw. *über k spaltend*, falls sie einen maximalen Torus \mathbf{T} besitzt, der *über k spaltet*, d.h. \mathbf{T} ist über k definiert und es gibt einen über k definierten Isomorphismus $\mathbf{T} \cong \mathbb{G}_m^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$. Für die Gruppe SL_n werden wir darüber hinaus auch die Asymptotik von $N_{\mathrm{SL}_n(k)}(B)$ für $B \rightarrow \infty$ untersuchen.

2.2 Ein Beispiel: SL_2

Wir wollen obige Begriffe nun am Beispiel $\mathbf{G} := \mathrm{SL}_2$ illustrieren. Hierfür werden wir für jede Bewertung $v \in M_k$ eine maximale kompakte Untergruppe K_v wählen, den metrischen Raum G_v/K_v genauer beschreiben und die lokalen Höhen $H_{\mathrm{SL}_2(k_v)}$ bestimmen.

Sei $v \in M_k^\infty$ eine archimedische Bewertung von k , d.h. $k_v \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ist $k_v = \mathbb{C}$, so betrachten wir den *dreidimensionalen hyperbolischen Raum* \mathcal{H} , siehe auch [EGM98, §1,1]. Dieser kann als folgende Teilmenge des Schiefkörpers der *Quaternionen* \mathbb{H} , mit \mathbb{R} -Standardbasis $\{1, i, j, k\}$, aufgefasst werden

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \{x + yi + rj : x, y \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{>0}\} \\ &= \{z + rj : z \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_{>0}\}. \end{aligned}$$

Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ operiert auf \mathcal{H} durch *Möbiustransformation*

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z + rj \right) \mapsto (a(z + rj) + b)(c(z + rj) + d)^{-1} = z^* + r^*j$$

mit

$$z^* := \frac{(az + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) + a\bar{c}r^2}{|cz + d|^2 + |c|^2r^2} \quad \text{und} \quad r^* := \frac{r}{|cz + d|^2 + |c|^2r^2}.$$

Diese Wirkung ist transitiv und der Stabilisator von j ist die (maximale kompakte) Untergruppe $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ der unitären Matrizen in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Mit der Bahnformel erhalten wir eine Bijektion

$$\mathcal{H} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) / \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}).$$

Ist $k_v = \mathbb{R}$, so betrachten wir die *hyperbolische Ebene* \mathcal{H}' als zweidimensionale Teilmenge von \mathcal{H} :

$$\mathcal{H}' := \{x + rj : x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{>0}\}.$$

Die Untergruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ operiert transitiv auf \mathcal{H}' und der Stabilisator von j ist $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, die Gruppe der orthogonalen Matrizen in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Zusammen erhalten wir auch hier eine Bijektion

$$\mathcal{H}' \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}).$$

Die Gruppe $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ ist die Fixpunktmenge der analytischen Involution

$$\sigma : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), A \mapsto ({}^t\overline{A})^{-1},$$

d.h. \mathcal{H} kann als *riemannscher symmetrischer Raum* beschrieben werden, vergleiche auch [EGM98, §1.6]. Da $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, ist $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ die Fixpunktmenge von $\sigma|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$, d.h. auch \mathcal{H}' ist ein *riemannscher symmetrischer Raum*.

Wir betrachten auf \mathcal{H} bzw. \mathcal{H}' die zur quadratischen Form

$$ds^2 := \frac{dx^2 + dy^2 + dr^2}{r^2}$$

gehörende *riemannsche Struktur*. Den durch die induzierte Metrik definierten Abstand zwischen zwei Punkten $p, q \in \mathcal{H}$ nennen wir *hyperbolischen Abstand* und bezeichnen ihn mit $\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(p, q)$. Der hyperbolische Abstand zweier Punkte ist invariant unter der $\mathrm{SL}_2(k_v)$ Wirkung, siehe [EGM98, Proposition 1.3]. Weiter gilt:

Lemma 2.2.1 ([EGM98], Proposition 1.6 und 1.7). *Für $p = z + rj$, $q = z' + r'j \in \mathcal{H}$ ist*

$$\cosh(\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(p, q)) = \delta(p, q)$$

mit

$$\delta(p, q) := \frac{|z - z'|^2 + r^2 + r'^2}{2rr'}.$$

Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ gilt insbesondere

$$\delta(j, Aj) = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2).$$

Damit lässt sich die archimedische v -adische lokale Höhe einer Matrix $A_v \in \mathrm{SL}_2(k_v)$ nun leicht bestimmen:

Proposition 2.2.2. *Sei $v \in M_k^\infty$ und $A_v \in \mathrm{SL}_2(k_v)$. Dann gilt für die (archimedische) v -adische lokale Höhe*

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(A_v) &:= e^{\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(j, A_v j)} \\ &= \text{der maximale Eigenwert von } {}^t\overline{A}_v A_v \\ &= \|A_v\|_{v,2}^2, \end{aligned}$$

wobei $\|A_v\|_{v,2} := \max_{\|x\|_{v,2}=1} \|A_v x\|_{v,2}$ die *Matrixnorm* von A_v bezüglich der euklidischen/hermiteschen Standardnorm $\|\cdot\|_{v,2}$ auf k_v^2 ist.

Bemerkung 2.2.3. Da $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ der Stabilisator von j in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ist, kann $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ mit dem Punkt $j \in \mathcal{H}$ identifiziert werden. Selbiges gilt für $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ und $j \in \mathcal{H}'$. Somit entspricht obige Höhe der Höhe aus Definition 2.1.1(i).

Beweis. Sei $A_v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(k_v)$. Dann gilt, nach Lemma 2.2.1,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2) &= \delta(j, A_v j) \\ &= \cosh(\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(j, A_v j)) \\ &= \frac{1}{2}(e^{\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(j, A_v j)} + e^{-\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(j, A_v j)}) \\ &= \frac{1}{2}(H_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(A_v) + H_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(A_v)^{-1}), \end{aligned}$$

d.h. $H_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(A_v)$ ist eine Nullstelle von

$$X^2 - (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)X + 1 = X^2 - \mathrm{Tr}({}^t\overline{A}_v A_v)X + \det({}^t\overline{A}_v A_v) = p_{\mathrm{char}}({}^t\overline{A}_v A_v),$$

dem charakteristischen Polynom $p_{\mathrm{char}}({}^t\overline{A}_v A_v) \in k_v[X]$ von ${}^t\overline{A}_v A_v$. Da der Abstand von j und $A_v j$ nichtnegativ ist, gilt $H_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(A_v) \geq 1$ und daher ist $H_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(A_v)$ der maximale Eigenwert von ${}^t\overline{A}_v A_v$. \square

Sei nun $v \in M_k^0$ eine nicht-archimedische Bewertung von k , d.h. k_v eine endliche Erweiterung von \mathbb{Q}_p für eine Primzahl p . Wir betrachten die Menge \mathcal{L}_v aller \mathcal{O}_v -Gitter von vollem Rang in k_v^2 , d.h.

$$\mathcal{L}_v := \{\mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(v_1, v_2) : \{v_1, v_2\} \subseteq k_v^2 \text{ ist } k_v\text{-Basis}\}.$$

$\mathrm{GL}_2(k_v)$ wirkt auf \mathcal{L}_v transitiv via

$$\mathrm{GL}_2(k_v) \times \mathcal{L}_v \rightarrow \mathcal{L}_v, (A, \mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(v_1, v_2)) \mapsto \mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(Av_1, Av_2).$$

Sei $L_v := \mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Dann ist $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_v)$ der Stabilisator des *Standardgitters* L_v und es gilt die Bijektion

$$\mathcal{L}_v \cong \mathrm{GL}_2(k_v) / \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_v).$$

Wir betrachten \mathcal{L}_v nun modulo *Homothetie*. Seien $L, M \in \mathcal{L}_v$. Dann ist

$$L \sim M :\Leftrightarrow \exists \lambda \in k_v^* : M = \lambda L.$$

Die Menge der *Homothetieklassen* $\{L\}$, $L \in \mathcal{L}_v$, bezeichnen wir mit \mathcal{L}_v^* . Offensichtlich induziert die Wirkung von $\mathrm{GL}_2(k_v)$ auf \mathcal{L}_v auch eine Wirkung von $\mathrm{GL}_2(k_v)$ auf \mathcal{L}_v^* und, auf natürliche Weise, auch eine wohldefinierte transitive Wirkung von $\mathrm{PGL}_2(k_v)$ auf \mathcal{L}_v^* :

$$\mathrm{PGL}_2(k_v) \times \mathcal{L}_v^* \rightarrow \mathcal{L}_v^*, ([A], \{L\}) \mapsto \{AL\}.$$

Setzen wir $u_v := \{L_v\}$, so ist $\mathrm{PGL}_2(\mathcal{O}_v)$ der Stabilisator von u_v und daher

$$\mathcal{L}_v^* \cong \mathrm{PGL}_2(k_v) / \mathrm{PGL}_2(\mathcal{O}_v).$$

Wir nennen zwei verschiedene Klassen $x, x' \in \mathcal{L}_v^*$ *benachbart*, wenn es Vertreter $L, L' \in \mathcal{L}_v$ von x, x' gibt, so dass gilt

$$\pi_v L \subsetneq L' \subsetneq L.$$

Diese Relation definiert einen ungerichteten Graphen $(\mathcal{L}_v^*, \mathcal{E}_v)$ mit Eckenmenge \mathcal{L}_v^* und Kantenmenge

$$\mathcal{E}_v := \{\{x, x'\} \subseteq \mathcal{L}_v^* : x \text{ und } x' \text{ sind benachbart}\}.$$

$(\mathcal{L}_v^*, \mathcal{E}_v)$ ist ein Baum, genauer gesagt der *Bruhat-Tits-Baum* von $\mathrm{SL}_2(k_v)$, siehe [Ser03, I, §2, II, §1] und [AB08, §6,9]. Jede Ecke $\{\mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(v_1, v_2)\}$ hat genau $q_v + 1$ viele Nachbarn, nämlich $\{\mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v v_1, v_2)\}$ und $\{\mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(v_1 + a_i v_2, \pi_v v_2)\}$, für ein Vertretersystem $\{a_i : 1 \leq i \leq q_v\}$ von $\mathcal{O}_v / \mathfrak{m}_v$, siehe auch Abbildung 2.1.

Wir definieren auf $(\mathcal{L}_v^*, \mathcal{E}_v)$ einen Abstandsbegriff. Seien $x, x' \in \mathcal{L}_v^*$. Dann ist der *kombinatorische Abstand* $\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(x, x')$ zwischen x und x' definiert als

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(x, x') := \min\{m \in \mathbb{N} : \text{es gibt Ecken } x = x_0, x_1, \dots, x_m = x', \text{ so dass } x_i \text{ und } x_{i+1} \text{ benachbart sind für alle } 0 \leq i \leq m-1\},$$

falls $x \neq x'$, und $\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(x, x') := 0$, falls $x = x'$.

Da die Wirkung von $\mathrm{GL}_2(k_v)$ die Nachbarschafts-Relation erhält, ist auch der kombinatorische Abstand invariant unter dieser Wirkung. Explizit lässt sich der Abstand zweier Gitterklassen wie folgt berechnen:

Lemma 2.2.4 ([Wer01], Lemma 4.2). *Seien $x := \{L\}, x' := \{L'\} \in \mathcal{L}_v^*$ und*

$$s := \min\{l : \pi_v^l L' \subseteq L\}, r := \max\{l : L \subseteq \pi_v^l L'\},$$

dann ist

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(x, x') = s - r.$$

Betrachten wir nun die durch $\mathrm{GL}_2(k_v)$ induzierte Wirkung von $\mathrm{SL}_2(k_v)$ auf \mathcal{L}_v^* :

Proposition 2.2.5. *Sei L_v das Standardgitter in k_v^2 und $u_v := \{L_v\}$. Weiter sei*

$$\widehat{\mathcal{L}}_v^* := \{x \in \mathcal{L}_v^* : \mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(u_v, x) \in 2\mathbb{Z}\}.$$

Dann ist $\widehat{\mathcal{L}}_v^$ die Bahn von u_v unter der Wirkung von $\mathrm{SL}_2(k_v)$ auf \mathcal{L}_v^* und die maximale kompakte Untergruppe $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_v)$ ist der Stabilisator von u_v . Insbesondere gibt es eine Bijektion*

$$\mathrm{SL}_2(k_v) / \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_v) \cong \widehat{\mathcal{L}}_v^*.$$

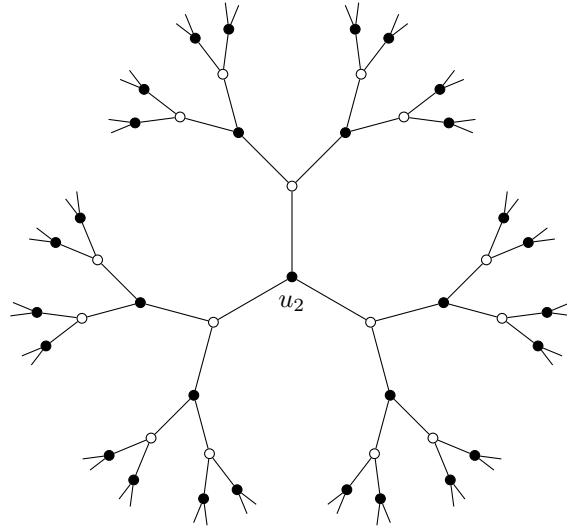


Abbildung 2.1: Der Bruhat-Tits-Baum von $SL_2(\mathbb{Q}_2)$. Die $SL_2(\mathbb{Q}_2)$ -Bahn der Homothetieklasse u_2 des Standardgitters $L_2 \subseteq \mathbb{Q}_2^2$ ist durch schwarze Punkte gekennzeichnet.

Beweis. Es ist nur der erste Teil der Aussage zu zeigen. Der Rest der Behauptung ist klar. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(k_v)$ und $m := \min\{\text{ord}_v(a), \text{ord}_v(b), \text{ord}_v(c), \text{ord}_v(d)\}$. Dann ist $B := \pi_v^{-m}A$ eine Matrix mit Koeffizienten in \mathcal{o}_v , d.h. insbesondere $BL_v \subseteq L_v$. Weiter sind die Koeffizienten von B teilerfremd, $\det(B) = \pi_v^{-2m}$ und $m \leq 0$. Nach dem *Elementarteilersatz* gibt es eine \mathcal{o}_v -Basis $\{v_1, v_2\}$ von L_v , so dass $BL_v = \text{Span}_{\mathcal{o}_v}(v_1, \pi_v^{-2m}v_2)$ gilt. Insbesondere ist dann

$$AL_v = \pi_v^m BL_v = \text{Span}_{\mathcal{o}_v}(\pi_v^m v_1, \pi_v^{-m} v_2).$$

Es folgt

$$\min\{l : \pi_v^l AL_v \subseteq L_v\} = -m, \quad \max\{l : L_v \subseteq \pi_v^l AL_v\} = m.$$

Mit Lemma 2.2.4 gilt $\text{dist}_{SL_2(k_v)}(u_v, Au_v) = -m - m = -2m$, d.h. $Au_v \in \widehat{\mathcal{L}}_v^*$.

Sei nun $x \in \widehat{\mathcal{L}}_v^*$, $L \in \mathcal{L}_v$ mit $x = \{L\}$ und $A \in GL_2(k_v)$ mit $L = AL_v$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\det(A) = \pi_v^l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$ gilt. Denn ist $\det(A) = \pi_v^l u$ mit $l \in \mathbb{Z}$ und $1 \neq u \in \mathcal{o}_v^*$, so ist $B := \text{diag}(u^{-1}, 1) \in GL_2(\mathcal{o}_v)$, $\det(AB) = \pi_v^l$ und $L = ABL_v$.

Es reicht zu zeigen, dass $\det(A) = \lambda^2$ für ein $\lambda \in k_v$ ist, denn dann ist $B := \lambda^{-1}A \in SL_2(k_v)$ und $Bu_v = \{AL_v\} = x$.

Seien $a, b, c, d \in k_v$ mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $m := \min\{\text{ord}_v(a), \text{ord}_v(b), \text{ord}_v(c), \text{ord}_v(d)\}$.

Analog zu obiger Argumentation gibt es mit dem Elementarteilersatz eine \mathcal{o}_v -Basis $\{v_1, v_2\}$ von L_v , so dass

$$AL_v = \text{Span}_{\mathcal{o}_v}(\pi_v^m v_1, \pi_v^{-m+l} v_2)$$

gilt. Folglich ist

$$\min\{l : \pi_v^l AL_v \subseteq L_v\} = -m, \quad \max\{l : L_v \subseteq \pi_v^l AL_v\} = m - l$$

und daher $\text{dist}_{\text{SL}_2(k_v)}(u_v, x) = \text{dist}_{\text{SL}_2(k_v)}(u_v, \{AL_v\}) = -m - (m - l) = -2m + l \in 2\mathbb{Z}$ nach Voraussetzung. Wir erhalten $l \in 2\mathbb{Z}$ und somit $\det(A) = \lambda^2$ für ein $\lambda \in k_v$. \square

Die nicht-archimedische v -adische lokale Höhe sieht nun wie folgt aus:

Proposition 2.2.6. *Sei L_v das Standardgitter in k_v^2 und $u_v := \{L_v\}$. Weiter sei $A_v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(k_v)$. Dann gilt für die (nicht-archimedische) v -adische lokale Höhe*

$$\begin{aligned} H_{\text{SL}_2(k_v)}(A_v) &:= q_v^{\text{dist}_{\text{SL}_2(k_v)}(u_v, A_v u_v)} \\ &= \max\{|a|_v, |b|_v, |c|_v, |d|_v\}^2 \\ &= \|A_v\|_{v, \infty}^2, \end{aligned}$$

wobei $\|A_v\|_{v, \infty} := \max_{\|x\|_{v, \infty}=1} \|A_v x\|_{v, \infty}$ die Matrixnorm von A_v bezüglich der Maximumnorm $\|\cdot\|_{v, \infty}$ auf k_v^2 ist.

Bemerkung 2.2.7. Da $\text{SL}_2(\mathcal{O}_v)$ der Stabilisator von u_v in $\text{SL}_2(k_v)$ ist, kann $\text{SL}_2(\mathcal{O}_v)$ mit dem Punkt $u_v \in \widehat{\mathcal{L}}_v^*$ identifiziert werden. Somit entspricht auch die nicht-archimedische lokale Höhe auf $\text{SL}_2(k_v)$ der Höhe aus Definition 2.1.1(i).

Beweis. Sei $m := \min\{\text{ord}_v(a), \text{ord}_v(b), \text{ord}_v(c), \text{ord}_v(d)\}$ wie im Beweis von Proposition 2.2.5. Dort wurde gezeigt, dass $\text{dist}_{\text{SL}_2(k_v)}(u_v, A_v u_v) = -2m$ ist. Folglich gilt

$$\begin{aligned} H_{\text{SL}_2(k_v)}(A_v) &= q_v^{\text{dist}_{\text{SL}_2(k_v)}(u_v, A_v u_v)} \\ &= (q_v^{\min\{\text{ord}_v(a), \text{ord}_v(b), \text{ord}_v(c), \text{ord}_v(d)\}})^{-2} \\ &= \min\{q_v^{\text{ord}_v(a)}, q_v^{\text{ord}_v(b)}, q_v^{\text{ord}_v(c)}, q_v^{\text{ord}_v(d)}\}^{-2} \\ &= \max\{q_v^{-\text{ord}_v(a)}, q_v^{-\text{ord}_v(b)}, q_v^{-\text{ord}_v(c)}, q_v^{-\text{ord}_v(d)}\}^2 \\ &= \max\{|a|_v, |b|_v, |c|_v, |d|_v\}^2. \end{aligned}$$

\square

Sei nun $A \in \text{SL}_2(k)$. Wir wollen die Höhe $H_{\text{SL}_2(k)}(A) := \prod_{v \in M_k} H_{\text{SL}_2(k_v)}(A)$ mit der Höhe zu einem metrisierten Geradenbündel über einer algebraischen Varietät wie in §1.2 vergleichen. Dazu betrachten wir den Morphismus

$$\varphi : \text{SL}_2 \rightarrow \mathbb{P}^3, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto [a : b : c : d]$$

und die folgende Familie v -adischer Normen $\{\|\cdot\|_v : v \in M_k\}$ auf den k_v -Vektorräumen $\text{Mat}_2(k_v) = k_v^4$. Ist $M_v \in \text{Mat}_2(k_v)$, so setzen wir

$$\|M_v\|_v := \begin{cases} \|M_v\|_{v, 2}, & \text{falls } v \text{ archimedisch,} \\ \|M_v\|_{v, \infty}, & \text{falls } v \text{ nicht-archimedisch.} \end{cases}$$

Für archimedische Bewertungen $v \in M_k^\infty$ bezeichne hierbei $\|\cdot\|_{v,2}$ die von der euklidischen/hermiteschen Standardnorm auf k_v^2 induzierte Matrixnorm. Für nicht-archimedische Bewertungen $v \in M_k^\infty$ bezeichne $\|\cdot\|_{v,\infty}$ die Matrixnorm bezüglich Maximumsnorm auf k_v^2 . Dies definiert nach Beispiel 1.2.15 eine adelische Metrik auf dem Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ und somit insbesondere auf $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$, siehe Proposition 1.2.16. Wir nennen diese adelische Metrik $\|\cdot\|_{M_k}^{\otimes 2}$ und schreiben $\mathbb{E}_2 := (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2), \|\cdot\|_{M_k}^{\otimes 2})$ für das adelisch metrisierte Geradenbündel. Insbesondere gilt nach Proposition 1.2.16

$$H_{\mathrm{SL}_2(k)}(A) = H_{\mathbb{E}_2}(\varphi(A)) = H_{\varphi^*\mathbb{E}_2}(A).$$

Da φ nur endliche Fasern hat, folgt die Endlichkeit von $N_{\mathrm{SL}_2(k)}(B)$ für alle $B \in \mathbb{R}_{>0}$ aus der Endlichkeit von $N_{\mathbb{P}^3(k)}(\mathbb{E}_2, B)$, siehe Proposition 1.2.19. Wir erhalten also die folgende Aussage:

Proposition 2.2.8. *Sei $B \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt*

$$N_{\mathrm{SL}_2(k)}(B) := \#\{A \in \mathrm{SL}_2(k) : H_{\mathrm{SL}_2(k)}(A) \leq B\} < \infty.$$

Wir können SL_2 auch als offene Teilmenge der projektiven Quadrik $\mathbf{X} := V_{\mathbb{P}^4}(q)$ mit der quadratischen Form $q := t_0t_3 - t_1t_2 - t_4^2 \in k[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4]$ auffassen. Sei $\mathbf{U}_4 := \mathbf{X} \setminus V_{\mathbf{X}}(t_4)$. Dann ist die Abbildung

$$\alpha : \mathrm{SL}_2 \rightarrow \mathbf{U}_4, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto [a : b : c : d : 1]$$

ein Isomorphismus algebraischer Varietäten. Wir werden im Folgenden SL_2 und \mathbf{U}_4 miteinander identifizieren. Sei B die Matrix von q in einer Basis e_0, \dots, e_4 von k^5 . Dann ist nach [PR94, Proposition 2.14] $\mathrm{SO}_5(q) := \{A \in \mathrm{SL}_5 : {}^tABA = B\}$ eine halbeinfache algebraische Gruppe. Diese operiert nach dem Theorem von Witt, siehe zum Beispiel [Lan02, XV, Theorem 10.2], transitiv auf \mathbf{X} via

$$\mathrm{SO}_5(q) \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}, (A, [x]) \mapsto [Ax].$$

Bezeichnen wir mit P den Stabilisator von $[1 : 0 : 0 : 0 : 0] \in \mathbf{X}$, so erhalten wir eine Bijektion

$$\mathbf{X} \cong \mathrm{SO}_5(q)/P,$$

über die wir \mathbf{X} als *verallgemeinerte Fahnenvarietät* auffassen können. Um das asymptotische Verhalten von $N_{\mathrm{SL}_2(k)}(B)$ für $B \rightarrow \infty$ genauer zu bestimmen, wollen wir nun die Ergebnisse von Jens Franke, Yuri I. Manin und Yuri Tschinkel aus [FMT89] anwenden.

Sei H ein Hyperebenen divisor in \mathbb{P}^4 . Dann ist \mathbf{X} ein glatter, zu $2H$ linear äquivalenter, Divisor. Für den kanonischen Divisor auf \mathbb{P}^4 gilt $K_{\mathbb{P}^4} \equiv_{\mathrm{lin}} -5H$, somit gilt mit der Adjunktionsformel für den kanonischen Divisor $K_{\mathbf{X}}$ auf \mathbf{X}

$$K_{\mathbf{X}} \equiv_{\mathrm{lin}} (K_{\mathbb{P}^4} + \mathbf{X})|_{\mathbf{X}} \equiv_{\mathrm{lin}} -5H + 2H|_{\mathbf{X}} \equiv_{\mathrm{lin}} -3H|_{\mathbf{X}}.$$

Insbesondere gilt dann für das anti-kanonische Geradenbündel $\omega_{\mathbf{X}}^{-1} = \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(3)$, wobei $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(3) = \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(1)^{\otimes 3}$ mit dem Hyperebenen divisor $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(1)$ über \mathbf{X} ist. Weiter ist nach dem

Grothendieck-Lefschetz-Theorem für Picard-Gruppen, siehe [Har70, IV, Corollary 3.3], $\text{Pic}(\mathbf{X}) \cong \text{Pic}(\mathbb{P}^4) \cong \mathbb{Z}$, d.h. $\text{rk}(\text{Pic}(\mathbf{X})) = 1$. Wir betrachten den Morphismus

$$\psi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{P}^3, [x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \mapsto [x_0 : x_1 : x_2 : x_3].$$

Dann ist $\varphi = \psi|_{\text{SL}_2}$ und $H_{\text{SL}_2(k)}(A) = H_{\psi^*\mathbb{E}_2}(A)$ für alle $A \in \text{SL}_2(k)$. Der Morphismus ψ induziert einen Homomorphismus

$$\psi^* : \text{Pic}(\mathbb{P}^3) \rightarrow \text{Pic}(\mathbf{X}), [E] \mapsto [\psi^* E]$$

mit $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(1) = \psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ und $\omega_{\mathbf{X}}^{-1} = \psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))$.

Sei $\mathbb{E}_3 := (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3), \|\cdot\|_{M_k}^{\otimes 3})$ analog zu \mathbb{E}_2 durch obige Metriken auf k_v^4 adельsch metrisiert. In [FMT89, §2.5, Corollary] wurde gezeigt, dass $N_{\mathbf{X}(k)}(\psi^*(\mathbb{E}_3), B) \sim c' B$ für eine Konstante $c' \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt. Da $(H_{\psi^*(\mathbb{E}_3)})^{2/3} = H_{\psi^*(\mathbb{E}_2)}$, siehe Proposition 1.2.16, folgt

$$N_{\mathbf{X}(k)}(\psi^*(\mathbb{E}_2), B) \sim c'' B^{3/2}$$

für eine Konstante $c'' \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei $\mathbf{Y} := V_{\mathbf{X}}(t_4) = \mathbf{X} \setminus \text{SL}_2$. Wir betrachten die Segre-Einbettung

$$\sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3, ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \mapsto [x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_1 y_1]$$

und den induzierten Morphismus

$$\sigma^* : \text{Pic}(\mathbb{P}^3) \rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1), [E] \mapsto [\sigma^* E].$$

Dann ist $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) = \sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ und $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) = \sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$. Weiter ist

$$\beta := \sigma^{-1} \circ \psi|_{\mathbf{Y}} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

ein Isomorphismus und für alle $y \in \mathbf{Y}(k)$ gilt

$$H_{\psi^*(\mathbb{E}_2)}(y) = H_{\mathbb{E}_2}(\psi(y)) = H_{\mathbb{E}_2}(\sigma \circ \beta(y)) = H_{\sigma^*(\mathbb{E}_2)}(\beta(y)),$$

d.h. für alle $B \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $N_{\mathbf{Y}(k)}(\psi^*(\mathbb{E}_2), B) = N_{(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)(k)}(\sigma^*(\mathbb{E}_2), B)$. Da \mathbb{P}^1 eine verallgemeinerte Fahnenvarietät mit $\text{rk}(\text{Pic}(\mathbb{P}^1)) = 1$ und $\omega_{\mathbb{P}^1}^{-1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ ist, folgt mit [FMT89, §1.2, Proposition]

$$N_{\mathbf{Y}(k)}(\psi^*(\mathbb{E}_2), B) = N_{(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)(k)}(\sigma^*(\mathbb{E}_2), B) \sim c''' B \log(B)$$

für eine Konstante $c''' \in \mathbb{R}_{>0}$. Da $\lim_{B \rightarrow \infty} \frac{B \log(B)}{B^{3/2}} = 0$ trägt das Komplement $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \setminus \text{SL}_2$ also nicht wesentlich zur Asymptotik bei und es folgt $N_{\text{SL}_2(k)}(\psi^*(\mathbb{E}_2), B) \sim c B^{3/2}$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir erhalten daher:

Satz 2.2.9. *Es gilt*

$$N_{\text{SL}_2(k)}(B) \sim c B^{3/2}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$.

Kapitel 3

Die spezielle lineare Gruppe

Sei $\mathbf{G} := \mathrm{SL}_n$, k ein algebraischer Zahlkörper und M_k die Menge der Standardbewertungen von k . Wir übernehmen die Bezeichnungen aus §1.1 und §2.1. In diesem Kapitel werden wir die Ergebnisse des vorhergehenden Beispiels für $n > 2$ verallgemeinern. Zunächst berechnen wir dafür in den nächsten beiden Abschnitten die v -adische lokale Höhe $H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A_v)$ einer Matrix $A_v \in \mathrm{SL}_n(k_v)$ für $v \in M_k$. Anschließend werden wir die globale Höhenfunktion $H_{\mathrm{SL}_n(k)} : \mathrm{SL}_n(k) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$ untersuchen und zeigen, dass $N_{\mathrm{SL}_n(k)}(B) := \#\{A \in \mathrm{SL}_n(k) : H_{\mathrm{SL}_n(k)}(A) \leq B\}$ für alle $B \in \mathbb{R}_{>0}$ endlich ist.

3.1 Die archimedischen lokalen Höhen

Sei $v \in M_k^\infty$ eine archimedische Bewertung, d.h. $k_v \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Wir werden zunächst, in Verallgemeinerung von §2.2, einen geeigneten *riemannschen symmetrischen Raum* G_v/K_v konstruieren, auf dem $G_v := \mathrm{SL}_n(k_v)$ transitiv operiert und anschließend die v -adischen lokalen Höhen berechnen. Vergleiche auch [Hel78, IV, Proposition 3.4] und [Wer02, §4].

Wir betrachten die zusammenhängende reelle Lie-Gruppe G_v mit der maximalen kompakten Untergruppe

$$K_v := \begin{cases} \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), & \text{falls } k_v = \mathbb{R}, \\ \mathrm{SU}_n(\mathbb{C}), & \text{falls } k_v = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Die Lie-Algebra \mathfrak{g}_v von G_v kann als reelle Lie-Algebra aufgefasst werden. Um dies hervorzuheben schreiben wir $\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$. Ist $k_v = \mathbb{R}$, so stimmen die reellen Lie-Algebren \mathfrak{g}_v und $\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$ überein. Sei weiter \mathfrak{k}_v die zu K_v gehörende Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$. K_v ist die Fixpunktmenge der Involution

$$\sigma_v : G_v \rightarrow G_v, A \mapsto ({}^t\bar{A})^{-1}$$

mit Differential in $e_v := E_n \in \mathrm{SL}_n(k_v)$

$$d\sigma_v := (d\sigma_v)_{e_v} : \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}, X \mapsto -{}^t\bar{X}$$

in $e_v := E_n \in \mathrm{SL}_n(k_v)$. Darüber hinaus ist \mathfrak{k}_v der Eigenraum zum Eigenwert 1 von $d\sigma_v$, d.h. $\mathfrak{k}_v = \{X \in \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} : X = -{}^t\bar{X}\}$ und $\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} = \mathfrak{k}_v \oplus \mathfrak{p}_v$, wobei $\mathfrak{p}_v := \{X \in \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} : X = {}^t\bar{X}\}$ den Eigenraum zum Eigenwert -1 von $d\sigma_v$ bezeichnet.

Sei $\mathrm{pr} : G_v \rightarrow G_v/K_v$ die kanonische Projektion. Das Differential $d\mathrm{pr} := (d\mathrm{pr})_{e_v} : \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} \rightarrow (G_v/K_v)_{K_v}$ ist surjektiv mit Kern \mathfrak{k}_v . Folglich ist $d\mathrm{pr}|_{\mathfrak{p}_v} : \mathfrak{p}_v \rightarrow (G_v/K_v)_{K_v}$ ein Isomorphismus.

Sei weiter $\mathrm{Ad}_v^{\mathbb{R}} : G_v \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}})$ die adjungierte Darstellung mit Differential $\mathrm{ad}_v^{\mathbb{R}} := (d\mathrm{Ad}_v^{\mathbb{R}})_{e_v} : \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}})$. Dann ist die *Killing-Form* auf $\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$,

$$B_v^{\mathbb{R}} : \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} \times \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_v^{\mathbb{R}} X \mathrm{ad}_v^{\mathbb{R}} Y) = \begin{cases} 2n \mathrm{Tr}(XY), & \text{falls } k_v = \mathbb{R}, \\ 4n \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(XY)), & \text{falls } k_v = \mathbb{C}, \end{cases}$$

eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform, siehe [Hel78, III, §8 und Lemma 6.1] und positiv definit auf \mathfrak{p}_v . Folglich ist auch die *skalierte Killing-Form*

$$B_{\mathrm{sl}_n(k_v)} : \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} \times \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} B_v^{\mathbb{R}}(X, Y) = n \mathrm{Tr}(XY), & \text{falls } k_v = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4} B_v^{\mathbb{R}}(X, Y) = n \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(XY)), & \text{falls } k_v = \mathbb{C} \end{cases}$$

eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform und positiv definit auf \mathfrak{p}_v . Durch obigen Isomorphismus $d\mathrm{pr}|_{\mathfrak{p}_v} : \mathfrak{p}_v \rightarrow (G_v/K_v)_{K_v}$ induziert $B_{\mathrm{sl}_n(k_v)}$ auch eine positiv definite nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf $(G_v/K_v)_{K_v}$. Diese kann durch die natürliche G_v -Wirkung von links auf G_v/K_v in alle Tangentialräume $(G_v/K_v)_{p_v}$, $p_v \in G_v/K_v$, verschoben werden und wir erhalten eine wohldefinierte G_v -invariante riemannsche Struktur auf G_v/K_v , siehe auch §4.1. Den zugehörigen G_v -invarianten *riemannschen Abstand* zwischen zwei Punkten $p, q \in G_v/K_v$ bezeichnen wir mit $\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(p, q)$. Folgendes Lemma ist eine leichte Folgerung aus [Wer02, Lemma 4.1]:

Lemma 3.1.1. *Sei $A_v \in G_v = \mathrm{SL}_n(k_v)$. Dann ist*

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(K_v, A_v K_v) = \sqrt{n \sum_{i=1}^n \log(\sqrt{\theta_{v,i}})^2},$$

wobei die $\theta_{v,i}$, $1 \leq i \leq n$, die (positiven reellen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms von ${}^t\bar{A}_v A_v$ bezeichnen.

Beweis. Sei $A_v \in G_v$ und $A_v = K \sqrt{{}^t\bar{A}_v A_v}$, mit geeignetem $K \in K_v$, die Polarzerlegung der Matrix A_v . Dann gibt es ein $T \in K_v$, so dass $T \sqrt{{}^t\bar{A}_v A_v} T^{-1} = \mathrm{diag}(\sqrt{\theta_{v,1}}, \dots, \sqrt{\theta_{v,n}})$ und folglich $A_v = K T^{-1} \mathrm{diag}(\sqrt{\theta_{v,1}}, \dots, \sqrt{\theta_{v,n}}) T$ ist. Wegen der G_v -Invarianz des Abstands ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(K_v, A_v K_v) &= \mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(K_v, K T^{-1} \mathrm{diag}(\sqrt{\theta_{v,1}}, \dots, \sqrt{\theta_{v,n}}) T K_v) \\ &= \mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(K_v, \mathrm{diag}(\sqrt{\theta_{v,1}}, \dots, \sqrt{\theta_{v,n}}) K_v). \end{aligned}$$

Die Aussage folgt nun direkt aus [Wer02, Lemma 4.1]. \square

Aus obigem Lemma ergibt sich sofort:

Proposition 3.1.2. *Sei $v \in M_k^\infty$ eine archimedische Bewertung und $A_v \in G_v = \mathrm{SL}_n(k_v)$. Dann ist die v -adische lokale Höhe von A_v gleich*

$$H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A_v) := e^{\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(K_v, A_v K_v)} = e^{\sqrt{n \sum_{i=1}^n \log(\sqrt{\theta_{v,i}})^2}},$$

wobei die $\theta_{v,i}$, $1 \leq i \leq n$, die (positiven reellen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms von ${}^t A_v A_v$ bezeichnen.

3.2 Die nicht-archimedischen lokalen Höhen

Sei nun $v \in M_k^0$ eine nicht-archimedische Bewertung von k . Wir betrachten die maximale kompakte Untergruppe $K_v := \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v)$ von $G_v := \mathrm{SL}_n(k_v)$. In diesem Abschnitt werden wir das Bruhat-Tits-Gebäude $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ von $\mathrm{SL}_n(k_v)$ geeignet konstruieren und anschließend die nicht-archimedische lokale Höhe auf $\mathrm{SL}_n(k_v)$ bezüglich K_v bestimmen. Die Ecken des Bruhat-Tits-Gebäudes $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ werden wir hierbei als Homothetieklassen von Gittern in k_v^n beschreiben. Auf diesen Klassen wirkt $\mathrm{SL}_n(k_v)$ auf natürliche Weise. Darüber hinaus kann der Simplizialkomplex $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ als Vereinigung von zueinander isomorphen Unterkomplexen dargestellt werden. Diese Unterkomplexe sind isomorph zum Simplizialkomplex $\Sigma(W_{aff})$ der durch die affine Weyl-Gruppe W_{aff} von $\mathrm{SL}_n(k_v)$ bestimmt ist. Auf diese wollen wir nun zunächst genauer eingehen.

3.2.1 Die affine Weyl-Gruppe

Um die affine Weyl-Gruppe von $\mathrm{SL}_n(k_v)$ zu definieren, reicht es einen maximalen Torus in $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_n$ zu wählen, der über k_v spaltet. Die folgenden Aussagen sind wohlbekannt und in diversen Lehrbüchern zu finden, siehe zum Beispiel [Bor91] und [Bou02]. Wir haben sie hier noch einmal in einer für uns geeigneten Zusammenstellung niedergeschrieben.

Sei zunächst \mathbf{S} der maximale Torus der Diagonalmatrizen in GL_n , $\mathbb{X}^*(\mathbf{S})$ seine Charaktergruppe und $\mathbb{X}_*(\mathbf{S})$ seine Kocharaktergruppe. Wir werden $\mathbb{X}^*(\mathbf{S})$ und $\mathbb{X}_*(\mathbf{S})$ über die folgenden Isomorphismen mit \mathbb{Z}^n identifizieren:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{X}^*(\mathbf{S}), (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \left[\chi_{(x_1, \dots, x_n)} : \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{G}_m, \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \mapsto \prod_{i=1}^n a_i^{x_i} \right], \\ \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{X}_*(\mathbf{S}), (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \left[\lambda_{(x_1, \dots, x_n)} : \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbf{S}, a \mapsto \begin{pmatrix} a^{x_1} & & \\ & \ddots & \\ & & a^{x_n} \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Der maximale Torus $\mathbf{T} := \mathbf{S} \cap \mathbf{G}$ von \mathbf{G} spaltet über k , folglich ist \mathbf{T} auch ein über k_v spaltender Torus und die folgende Konstruktion ist unabhängig von der Wahl der Bewertung $v \in M_k^0$.

Für $\lambda \in \mathbb{X}_*(\mathbf{T})$ und $\chi \in \mathbb{X}^*(\mathbf{T})$ sei $\langle \lambda, \chi \rangle \in \mathbb{Z}$ die ganze Zahl mit $(\chi \circ \lambda)(t) = t^{\langle \lambda, \chi \rangle}$ für alle $t \in \mathbb{G}_m$. Dies definiert eine *duale Paarung*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{X}_*(\mathbf{T}) \times \mathbb{X}^*(\mathbf{T}) \rightarrow \mathbb{Z}, (\lambda, \chi) \mapsto \langle \lambda, \chi \rangle,$$

siehe [Bor91, Proposition 8.6]. Wir setzen $V := \mathbb{X}_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ und identifizieren über die obige Paarung $\mathbb{X}^*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ mit dem dualen Vektorraum V^* . Die \mathbb{R} -bilineare Fortsetzung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $V \times V^*$ bezeichnen wir ebenfalls mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Da $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{S}$, erhalten wir durch Einschränkung der Charaktere von \mathbf{S} einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathbb{X}^*(\mathbf{T}) \cong \mathbb{Z}^n / (1, \dots, 1)\mathbb{Z}.$$

Die zugehörige duale Abbildung liefert die Isomorphie

$$\mathbb{X}_*(\mathbf{T}) \cong \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}.$$

Auch hier werden wir die jeweiligen Gruppen durch die obigen Isomorphismen identifizieren. Es gilt $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$, $V^* = \mathbb{R}^n / \mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{D} := (1, \dots, 1)\mathbb{R}$ und

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) + \mathfrak{D}) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Sei weiter $\mathbf{N} := N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ der Normalisator von \mathbf{T} in \mathbf{G} und $\mathbf{Z} := Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ der Zentralisator von \mathbf{T} in \mathbf{G} . Dann ist $\mathbf{Z} = \mathbf{T}$ und \mathbf{N} ist die Untergruppe der Monomialmatrizen in \mathbf{G} . Die Gruppe \mathbf{N} operiert auf natürliche Weise durch Automorphismen auf $\mathbb{X}^*(\mathbf{T})$ und $\mathbb{X}_*(\mathbf{T})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \times \mathbb{X}^*(\mathbf{T}) &\rightarrow \mathbb{X}^*(\mathbf{T}), & (m, \chi) &\mapsto m\chi := \chi \circ \text{Inn}(m^{-1}), \\ \mathbf{N} \times \mathbb{X}_*(\mathbf{T}) &\rightarrow \mathbb{X}_*(\mathbf{T}), & (m, \lambda) &\mapsto m\lambda := \text{Inn}(m) \circ \lambda, \end{aligned}$$

wobei $\text{Inn}(g) : G \rightarrow G$, $x \mapsto gxg^{-1}$ die Konjugation mit einem Element $g \in G$ in einer Gruppe G bezeichnet. Die Wirkung des Torus \mathbf{T} ist hierbei trivial, d.h. auch die *Weyl-Gruppe* $W := \mathbf{N}/\mathbf{T}$ von \mathbf{G} bezüglich \mathbf{T} operiert auf $\mathbb{X}^*(\mathbf{T})$ bzw. $\mathbb{X}_*(\mathbf{T})$. Insbesondere werden durch \mathbb{R} -lineare Fortsetzung treue Wirkungen durch Automorphismen von W auf V^* und V induziert. Wir identifizieren W auf diese Weise mit einer Untergruppe von $\text{GL}(V)$ bzw. $\text{GL}(V^*)$.

Da jede Monomialmatrix eindeutig als Produkt einer Permutationsmatrix mit einer Diagonalmatrix geschrieben werden kann, ist die Weyl-Gruppe W isomorph zur symmetrischen Gruppe S_n via

$$S_n \rightarrow W, \sigma \mapsto w_\sigma := \text{pr}(\text{diag}(1, \dots, 1, \text{sgn}(\sigma))P_\sigma),$$

wobei $P_\sigma \in \mathrm{GL}_n$ die Permutationsmatrix zu $\sigma \in S_n$ und $\mathrm{pr} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}/\mathbf{T} = W$ die kanonische Projektion bezeichnet. Für die Wirkungen von W auf V und V^* ergibt sich somit

$$W \times V \rightarrow V, (w_\sigma, (x_1, \dots, x_n)) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

und

$$W \times V^* \rightarrow V^*, (w_\sigma, (x_1, \dots, x_n) + \mathfrak{D}) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) + \mathfrak{D}.$$

Sei nun $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ die Lie-Algebra von \mathbf{G} und $\Phi := \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{G})$ die Menge der *Wurzeln* von \mathbf{G} bezüglich \mathbf{T} , d.h.

$$\Phi = \{\alpha \in \mathbb{X}^*(\mathbf{T}) \setminus \{0\} : \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\},$$

wobei $\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{Ad}(t)(X) = \alpha(t)X \text{ für alle } t \in \mathbf{T}\}$ und $\mathrm{Ad} : \mathbf{G} \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ die adjungierte Darstellung von \mathbf{G} bezeichnet. Φ ist ein reduziertes irreduzibles Wurzelsystem vom Typ A_{n-1} . Mit der Standardbasis $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ von \mathbb{R}^n berechnet man leicht

$$\Phi = \{\chi_{ij} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$$

mit $\chi_{ij} := \varepsilon_i - \varepsilon_j + \mathfrak{D}$. Es gilt

$$W \times \Phi \rightarrow \Phi, (w_\sigma, \chi_{ij}) \mapsto \chi_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)},$$

d.h. W permutiert die Wurzeln von \mathbf{G} . Betrachten wir auf V^* das W -invariante Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, \dots, x_n) + \mathfrak{D}, (y_1, \dots, y_n) + \mathfrak{D}) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

so entspricht das zur Transposition $(ij) \in S_n$ gehörende Element $w_{(ij)} \in W$ gerade der *linearen orthogonalen Spiegelung*¹ an der Hyperebene $\{x \in V^* : \langle x, \chi_{ij} \rangle = 0\}$ senkrecht zu χ_{ij} . Folglich ist W die Weyl-Gruppe des Wurzelsystems Φ .

Wir fixieren die *Basis*

$$\Delta_\Phi := \{\chi_{i,i+1} : 1 \leq i < n\}$$

von Φ . Dies definiert die Menge der *positiven Wurzeln* als $\Phi^+ := \{\chi_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ und die der *negativen Wurzeln* als $\Phi^- := \{\chi_{ij} : 1 \leq j < i \leq n\}$. Die *höchste Wurzel* in Φ bezüglich Δ_Φ ist $\tilde{\chi} := \sum_{i=1}^n \chi_{i,i+1} = \chi_{1,n}$.

Sei nun $\check{\Phi}$ die Menge der *Kowurzeln* von Φ . Dann ist $\check{\Phi} = \{\check{\chi}_{ij} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$ wobei $\check{\chi}_{ij} := \varepsilon_i - \varepsilon_j \in V$ die Kowurzeln von χ_{ij} bezeichnet. Die Weyl-Gruppe, aufgefasst als Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$, permutiert die Kowurzeln analog zu den Wurzeln durch

$$W \times \check{\Phi} \rightarrow \check{\Phi}, (w_\sigma, \check{\chi}_{ij}) \mapsto \check{\chi}_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)}.$$

Mit dem W -invarianten Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

¹Siehe [Bou02, V, §3.3].

kann $w_{(ij)}$ als lineare orthogonale Spiegelung an der Hyperebene H_{ij} , senkrecht zu $\check{\chi}_{ij}$, mit

$$H_{ij} := \{x \in V : \langle x, \check{\chi}_{ij} \rangle = \langle x, \chi_{ij} \rangle = 0\}$$

betrachtet werden, d.h. $w_{(ij)}(x) = x - \langle x, \chi_{ij} \rangle \check{\chi}_{ij}$ für alle $x \in V$. Folglich bilden die Kowurzeln ein reduziertes irreduzibles Wurzelsystem in V vom Typ A_{n-1} mit Weyl-Gruppe W .

Wir interessieren uns für zwei Gitter in V . Zum einen $Q := \text{Span}_{\mathbb{Z}}(\check{\chi}_{i,i+1} : 1 \leq i < n)$, das *Kowurzelgitter*, für das hier $Q = \mathbb{X}_*(\mathbf{T})$ gilt. Und zum anderen das *Kogewichtsgitter* $P := \text{Span}_{\mathbb{Z}}(\lambda_i : 1 \leq i < n)$ mit der zu Δ_{Φ} bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dualen Basis $\{\lambda_i : 1 \leq i < n\}$ (auch *fundamentale Kogewichte* genannt). Mit $P^+ := \text{Span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}(\lambda_i : 1 \leq i < n)$ bezeichnen wir das Monoid der *dominanten Kogewichte*. Es gilt

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^i \varepsilon_k - \frac{i}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$$

und folglich $Q \subseteq \text{Span}_{\mathbb{Z}}(Q, \lambda_1) = P$ und $P/Q \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ via

$$P \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \lambda \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \langle \lambda, \chi_{i,i+1} \rangle + n\mathbb{Z}. \quad (\circ)$$

Sei \mathcal{A} der *euklidisch-affine Raum*² über V , der aus V durch Vergessen des „Null-Punkts“ entsteht und ξ ein beliebiger Punkt in \mathcal{A} mit $\langle \xi - 0, \chi_{i,i+1} \rangle \in \mathbb{Z}$ für alle $1 \leq i < n$. Offensichtlich erfüllt 0 diese Bedingung, um die freie Wahl des „Ursprungs“ zu betonen schreiben wir jedoch ξ anstatt 0.

Sei $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ und $l \in \mathbb{Z}$. Eine *affine Funktion* $\theta_{ij;l} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\theta_{ij;l}(x) = \langle x - \xi, \chi_{ij} \rangle - l$$

für alle $x \in \mathcal{A}$, wird *affine Wurzel* auf \mathcal{A} zum Charakter χ_{ij} und $l \in \mathbb{Z}$ genannt. Die Menge aller affinen Wurzeln auf \mathcal{A} zu Φ bezeichnen wir mit Φ_{aff} . Für eine affine Wurzel $\theta_{ij;l}$ sei $H_{ij;l} := \{x \in \mathcal{A} : \langle x - \xi, \chi_{ij} \rangle = l\}$ die zugehörige Verschwindungshyperebene und $s_{ij;l}$ die *affine orthogonale Spiegelung*³ an $H_{ij;l}$. Es gilt für alle $x \in \mathcal{A}$

$$s_{ij;l}(x) = x - (\langle x - \xi, \chi_{ij} \rangle - l) \check{\chi}_{ij} = w_{(ij)}(x - \xi) + l \check{\chi}_{ij} + \xi.$$

Wir setzen $\mathcal{H} := \{H_{ij;l} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j, l \in \mathbb{Z}\}$ und bezeichnen mit W_{aff} die *affine Weyl-Gruppe* von Φ auf \mathcal{A} , d.h. die Untergruppe von $\text{Aff}(\mathcal{A})$, die von den Spiegelungen $s_{ij;l}$ erzeugt wird. Es gilt:

- (i) $w(H) \in \mathcal{H}$ für alle $w \in W_{aff}$ und alle $H \in \mathcal{H}$.
- (ii) Jeder Punkt in \mathcal{A} besitzt eine Umgebung, die nur endlich viele Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$ schneidet.

²Siehe auch §4.2.1.

³Siehe [Bou02, V, §2.4].

Aus der konkreten Darstellung der Spiegelungen $s_{ij;l}$ kann man leicht ablesen, dass

$$W_{aff} \cong W \ltimes Q$$

gilt. Wir fassen Q über die Einbettung $Q \rightarrow W_{aff}$, $\lambda \mapsto \tau_\lambda$ mit $\tau_\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $x \mapsto x + \lambda$ als Untergruppe von W_{aff} auf.

Die Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$ partitionieren \mathcal{A} . Genauer betrachten wir für jedes $H_{ij;l} \in \mathcal{H}$ die offenen Halbräume $H_{ij;l}^+ := \{x \in \mathcal{A} : \langle x - \xi, \chi_{ij} \rangle > l\}$ und $H_{ij;l}^- := \{x \in \mathcal{A} : \langle x - \xi, \chi_{ij} \rangle < l\}$ und nennen eine Teilmenge $A \subseteq \mathcal{A}$ der Form $A = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} U_H(A)$ mit $U_H(A) \in \{H, H^+, H^-\}$ eine *Zelle* in \mathcal{A} bezüglich W_{aff} . Die nichtleeren Zellen in \mathcal{A} bezüglich W_{aff} bilden eine Partition von \mathcal{A} .

Wir schreiben $\Sigma(W_{aff})$ für die Menge der Zellen in \mathcal{A} bezüglich W_{aff} und definieren eine partielle Ordnung „ \leq “ auf $\Sigma(W_{aff})$. Sind A und B zwei Zellen in \mathcal{A} bezüglich W_{aff} , so schreiben wir $B \leq A$ und sagen, dass B eine *Seite* von A ist, falls $U_H(B) \in \{H, U_H(A)\}$ für alle $H \in \mathcal{H}$ gilt. $\Sigma(W_{aff})$ mit der Relation „ \leq “ definiert einen *gefärbten Simplicialkomplex*⁴ den wir im Folgenden näher beschreiben werden:

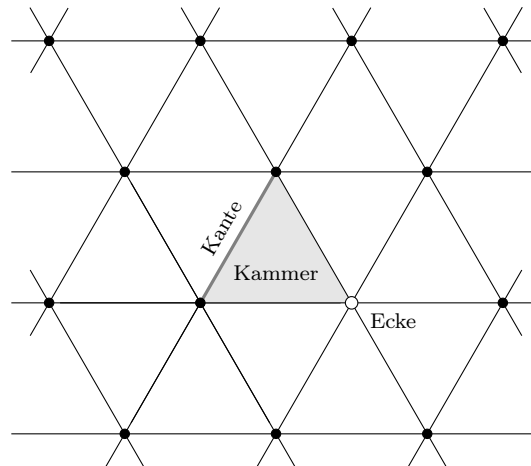


Abbildung 3.1: Der Simplicialkomplex der affinen Weyl-Gruppe von SL_3 . Es wurde exemplarisch je eine Kammer, Kante und Ecke markiert.

Ist $A = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} U_H(A)$ eine Zelle in \mathcal{A} bezüglich W_{aff} , so definieren wir den *Träger* von A als $\text{Supp}(A) := \bigcap_{H \in \mathcal{H}: U_H(A)=H} H$. Die Dimension von $\text{Supp}(A)$ nennen wir auch *Dimension* von A . 0-dimensionale (bzw. 1-dimensionale) Zellen in \mathcal{A} heißen *Ecken* (bzw. *Kanten*) in \mathcal{A} bezüglich W_{aff} . Die Menge der Ecken in \mathcal{A} bezüglich W_{aff} bezeichnen wir mit $\mathcal{V}(W_{aff})$. Es gilt $\mathcal{V}(W_{aff}) = P + \xi$.

Die Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{A} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ werden *Kammern* in \mathcal{A} bezüglich W_{aff} genannt. Sie sind die Zellen maximaler Dimension $n - 1$. Jede Kammer hat genau

⁴Die folgenden Begrifflichkeiten im Zusammenhang mit Simplicialkomplexen sind zum Beispiel in [AB08, §A.1] zu finden. Siehe auch [Bou02, V, §3 und VI, §2] und §4.2.1.

n Ecken. Die Menge der Kammern in \mathcal{A} bezüglich W_{aff} bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(W_{aff})$.

Jede Ecke $\lambda + \xi$ mit $\lambda \in P$ ist Ecke von genau $n!$ -vielen Kammern. Diese können durch Elemente der Gruppe S_n indiziert werden, genauer korrespondiert zu jedem $\sigma \in S_n$ die Kammer

$$C_\lambda^\sigma := \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} H_{\sigma(i),\sigma(i+1);0}^+ \cap H_{\sigma(1),\sigma(n);1}^- \right) + \lambda.$$

Weiter lassen sich die Seiten $(C_\lambda^\sigma)_I$ von C_λ^σ wie folgt durch Teilmengen $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ parametrisieren:

$$(C_\lambda^\sigma)_I := \begin{cases} \left(\bigcap_{i \in I, i \neq n} H_{\sigma(i),\sigma(i+1);0}^+ \cap H_{\sigma(1),\sigma(n);1}^- \cap \bigcap_{i \notin I} H_{\sigma(i),\sigma(i+1);0} \right) + \lambda, & \text{falls } n \in I, \\ \left(\bigcap_{i \in I} H_{\sigma(i),\sigma(i+1);0}^+ \cap \bigcap_{i \notin I, i \neq n} H_{\sigma(i),\sigma(i+1);0} \cap H_{\sigma(1),\sigma(n);1} \right) + \lambda, & \text{falls } n \notin I. \end{cases}$$

Da jede Kammer eine Ecke hat und jede Zelle Seite einer Kammer ist, haben wir somit sämtliche Zellen in \mathcal{A} bezüglich W_{aff} beschrieben. Wir setzen $C_\xi := C_0^{id}$ und bezeichnen die Menge der Ecken von C_ξ mit $\mathcal{V}_\xi := \{\xi, \lambda_i + \xi : 1 \leq i \leq n-1\}$, vergleiche auch Abbildung 3.2.

Der Simplicialkomplex $\Sigma(W_{aff})$ kann *gefärbt* werden, d.h. es gibt eine Funktion $\varphi : \mathcal{V}(W_{aff}) \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$, so dass für jede Kammer $C \in \mathcal{C}(W_{aff})$ die Einschränkung auf die Menge der Ecken von C eine Bijektion ist. Der Wert $\varphi(x)$ einer Ecke $x \in \mathcal{V}(W_{aff})$ wird auch *Typ* von x genannt.

Eine *Färbung* ist nach [Car97, Lemma 1.5] eindeutig durch das Bild von \mathcal{V}_ξ bestimmt. Wir wollen im Folgenden die Färbung $\tau : \mathcal{V}(W_{aff}) \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$ mit $\tau(\xi) := 0$ und $\tau(\lambda_i + \xi) := n-i$ für alle $1 \leq i \leq n-1$ betrachten.

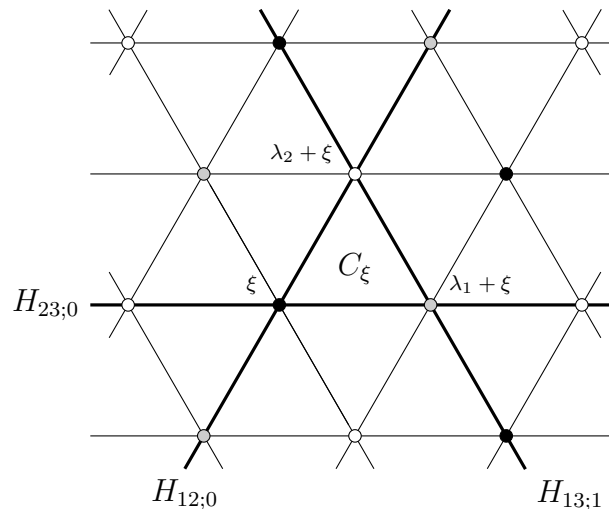


Abbildung 3.2: Der gefärbte Simplicialkomplex der affinen Weyl-Gruppe von SL_3 . Es gilt „schwarz = Typ 0“, „weiß = Typ 1“ und „grau = Typ 2“.

Lemma 3.2.1. Sei $\lambda + \xi \in \mathcal{V}(W_{aff})$ eine beliebige Ecke in \mathcal{A} bezüglich W_{aff} . Dann gilt

$$\tau(\lambda + \xi) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \langle \lambda, \chi_{i,i+1} \rangle \right) \bmod n,$$

wobei $(x) \bmod n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ den eindeutigen Rest r mit $0 \leq r < n$ bei der euklidischen Division einer Zahl $x \in \mathbb{Z}$ durch n bezeichnet.

Beweis. Mit (o) folgt die Behauptung sofort aus [Bou02, VI, §2.3, Corollary]. \square

3.2.2 Gitterklassen und das Bruhat-Tits-Gebäude

Wir werden nun für jedes $v \in M_k^0$ das Bruhat-Tits-Gebäude von $G_v = \mathrm{SL}_n(k_v)$ konstruieren. Vergleiche auch [Gar97, §19] und [AB08, §6.9].

Definition 3.2.2. Sei

$$\mathcal{L}_v := \{ \mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(v_1, \dots, v_n) : \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq k_v^n \text{ ist } k_v\text{-Basis} \}$$

die Menge der \mathcal{O}_v -Gitter von vollem Rang in k_v^n . Wir betrachten \mathcal{L}_v modulo *Homothetie*, d.h. wir nennen zwei Gitter $L, M \in \mathcal{L}_v$ äquivalent, wenn es ein $\lambda \in k_v^*$ mit $M = \lambda L$ gibt. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf \mathcal{L}_v . Die Menge der *Homothetieklassen* $\{L\}$, $L \in \mathcal{L}_v$, bezeichnen wir mit \mathcal{L}_v^* . Für äquivalente Gitter $L, M \in \mathcal{L}_v$ schreiben wir auch $L \sim M$.

Bemerkung 3.2.3. $\mathrm{GL}_n(k_v)$ wirkt auf \mathcal{L}_v transitiv via

$$\mathrm{GL}_n(k_v) \times \mathcal{L}_v \rightarrow \mathcal{L}_v, (A, \mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(v_1, \dots, v_n)) \mapsto \mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(Av_1, \dots, Av_n).$$

Weiter ist $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_v)$ der Stabilisator des *Standardgitters* $L_v := \mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(e_1, \dots, e_n)$ mit der Standardbasis $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq k_v^n$. Wir erhalten somit eine Bijektion

$$\mathrm{GL}_n(k_v) / \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_v) \cong \mathcal{L}_v.$$

Offensichtlich induziert die Wirkung von $\mathrm{GL}_n(k_v)$ auf \mathcal{L}_v auch eine Wirkung von $\mathrm{GL}_n(k_v)$ auf \mathcal{L}_v^* und, auf natürliche Weise, auch eine wohldefinierte transitive Wirkung von $\mathrm{PGL}_n(k_v)$ auf \mathcal{L}_v^*

$$\mathrm{PGL}_n(k_v) \times \mathcal{L}_v^* \rightarrow \mathcal{L}_v^*, ([A], \{L\}) \mapsto \{AL\}.$$

Folglich ist $\mathrm{PGL}_n(\mathcal{O}_v)$ der Stabilisator von $u_v := \{L_v\}$ und wir können

$$\mathrm{PGL}_n(k_v) / \mathrm{PGL}_n(\mathcal{O}_v) \cong \mathcal{L}_v^*$$

identifizieren.

Proposition 3.2.4. Sei L_v das Standardgitter in k_v^n und

$$\widehat{\mathcal{L}}_v^* := \{ \{ \text{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1} v_1, \dots, \pi_v^{a_n} v_n) \} \in \mathcal{L}_v^* : \{v_1, \dots, v_n\} \text{ ist } \mathcal{O}_v\text{-Basis von } L_v, \\ a_i \in \mathbb{Z}, a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \text{ und } \sum_{i=1}^n a_i = 0 \}.$$

Dann ist $\widehat{\mathcal{L}}_v^*$ die Bahn von $u_v = \{L_v\}$ in \mathcal{L}_v^* unter der von $\text{GL}_n(k_v)$ induzierten $\text{SL}_n(k_v)$ -Wirkung. Weiter ist $\text{SL}_n(\mathcal{O}_v)$ der Stabilisator von u_v und wir erhalten eine Bijektion

$$\text{SL}_n(k_v) / \text{SL}_n(\mathcal{O}_v) \cong \widehat{\mathcal{L}}_v^*.$$

Beweis. Sei $A = (a_{ij}) \in \text{SL}_n(k_v)$ und $m := \min\{\text{ord}_v(a_{ij}) : 1 \leq i, j \leq n\}$. Dann ist $B := \pi_v^{-m} A$ eine Matrix mit Koeffizienten in \mathcal{O}_v , d.h. insbesondere $BL_v \subseteq L_v$. Nach dem Elementarteilersatz gibt es eine \mathcal{O}_v -Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von L_v und geeignete $a_i \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ und $\sum_{i=1}^n a_i = \text{ord}_v(\det(B)) = -nm$, so dass $BL_v = \text{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1} v_1, \dots, \pi_v^{a_n} v_n)$ gilt. Insbesondere ist dann

$$AL_v = \pi_v^m BL_v = \text{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{m+a_1} v_1, \dots, \pi_v^{m+a_n} v_n),$$

d.h. $Au_v \in \widehat{\mathcal{L}}_v^*$.

Sei nun $L = \text{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1} v_1, \dots, \pi_v^{a_n} v_n)$ für eine \mathcal{O}_v -Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von L_v und $a_i \in \mathbb{Z}$ mit $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ und $\sum_{i=1}^n a_i = 0$. Dann ist $AL_v = L$ für die Matrix $A \in \text{GL}_n(k_v)$ deren i -te Spalte gerade dem Vektor $\pi_v^{a_i} v_i$ entspricht und es gilt $\det(A) = u \prod_{i=1}^n \pi_v^{a_i} = u$ für eine Einheit $u \in \mathcal{O}_v^*$. Mit $B := \text{diag}(u^{-1}, 1, \dots, 1) \in \text{GL}_n(\mathcal{O}_v)$ ist $\det(AB) = 1$ und $ABL_0 = L$. Folglich liegt $\{L\}$ in der $\text{SL}_n(k_v)$ -Bahn von u_v . \square

Definition 3.2.5. Wir nennen zwei verschiedene Klassen $x, x' \in \mathcal{L}_v^*$ *benachbart*, wenn es Vertreter $L, L' \in \mathcal{L}_v$ von x, x' gibt, so dass

$$\pi_v L \subsetneq L' \subsetneq L$$

gilt.

Bemerkung 3.2.6. (a) Sind $L, L' \in \mathcal{L}_v$ Gitter mit $\pi_v L \subsetneq L' \subsetneq L$, so gilt auch $\pi_v L' \subsetneq \pi_v L \subsetneq L'$. Insbesondere ist obige Relation symmetrisch.

(b) Sind zwei Klassen $x, x' \in \mathcal{L}_v^*$ benachbart, so gilt für zwei beliebige Vertreter $L, L' \in \mathcal{L}_v$ von x, x' stets entweder $L \subsetneq L'$ oder $L' \subsetneq L$, siehe [Gar97, §19.1].

(c) Die $\text{SL}_n(k_v)$ -Wirkung auf \mathcal{L}_v^* erhält die Nachbarschafts-Relation der Gitterklassen.

(d) Die Nachbarschafts-Relation definiert einen *Simplizialkomplex* $\mathcal{B}_{\text{SL}_n(k_v)}$, dessen Simplexes gerade die Teilmengen von \mathcal{L}_v^* bestehend aus paarweise benachbarten Gitterklassen sind. Genauer ist $\mathcal{B}_{\text{SL}_n(k_v)}$ der *Fahnenkomplex*⁵ mit Eckenmenge \mathcal{L}_v^* .

⁵Siehe auch [AB08, §A.1.2].

Es gilt:

Proposition 3.2.7. *Sei $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ der Simplicialkomplex aus Bemerkung 3.2.6(d) und $\Sigma(W_{\mathrm{aff}})$ der Simplicialkomplex bezüglich der affinen Weyl-Gruppe W_{aff} von $\mathrm{SL}_n(k_v)$ aus §3.2.1. Es gilt:*

(a) *Eine nichtleere Teilmenge $\{x_0, \dots, x_d\} \subseteq \mathcal{L}_v^*$ ist genau dann ein d -Simplex in $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$, wenn es für jedes $0 \leq i \leq d$ Vertreter $L_i \in x_i$ gibt, so dass*

$$\pi_v L_0 \subsetneq L_d \subsetneq \dots \subsetneq L_1 \subsetneq L_0$$

gilt. Insbesondere bestehen maximale Simplexe in $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ genau aus n Ecken und jeder Simplex liegt in einem maximalen Simplex.

(b) *Ist $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von k_v^n , so ist die Menge \mathcal{A}_v^B aller Simplexe in $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$, deren Ecken in $\mathcal{V}_v^B := \{\{\mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1} v_1, \dots, \pi_v^{a_n} v_n)\} : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$ liegen, ein Unterkomplex von $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$, der isomorph zu $\Sigma(W_{\mathrm{aff}})$ ist. Unterkomplexe von $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ der Form \mathcal{A}_v^B für eine Basis B von k_v^n werden Apartments in $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ genannt.*

(c) *Es gilt*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)} = \bigcup_{B \subseteq k_v^n \text{ Basis}} \mathcal{A}_v^B.$$

Ferner gibt es für je zwei Simplexe $A, A' \in \mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ ein Apartment \mathcal{A} in $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$, so dass $A, A' \in \mathcal{A}$ gilt. Sind \mathcal{A} und \mathcal{A}' Apartments in $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ und A und A' Simplexe in $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ mit $A, A' \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$, so gibt es einen Isomorphismus von Simplicialkomplexen $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$, der A und A' punktweise fest lässt.

Beweis. Die Aussagen aus (a) und (c) werden in [Gar97, §19.1, 19.2] gezeigt oder sind klar. Wir werden also nur (b) beweisen. Sei $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von k_v^n . Offensichtlich ist \mathcal{A}_v^B ein Simplicialkomplex mit Eckenmenge \mathcal{V}_v^B . Es bleibt also nur die Isomorphie $\mathcal{A}_v^B \cong \Sigma(W_{\mathrm{aff}})$ zu beweisen. Hierfür werden wir zunächst die Simplexe in \mathcal{A}_v^B genauer beschreiben.

Wegen (a) sind die maximalen Simplexe in \mathcal{A}_v^B genau von der Form $C_a^\sigma = \{\{L_{a,0}^\sigma\}, \dots, \{L_{a,n-1}^\sigma\}\}$ wobei $L_{a,0}^\sigma := \mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1} v_1, \dots, \pi_v^{a_n} v_n)$ und für alle $1 \leq i \leq n-1$

$$L_{a,i}^\sigma := \mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_{\sigma(1)}} v_{\sigma(1)}, \dots, \pi_v^{a_{\sigma(i)}} v_{\sigma(i)}, \pi_v^{a_{\sigma(i+1)}+1} v_{\sigma(i+1)} \dots, \pi_v^{a_{\sigma(n)}+1} v_{\sigma(n)})$$

für geeignete $\sigma \in S_n$ und $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ ist. Die Seiten von C_a^σ sind dann genau die Teilmengen $(A_a^\sigma)_I := \{\{L_{a,i}^\sigma\} : i \in I\}$, wobei I alle Teilmengen von $\{0, \dots, n-1\}$ durchläuft.

Wir betrachten die wohldefinierte Abbildung

$$\varphi_v^B : \mathcal{A}_v^B \rightarrow \Sigma(W_{\mathrm{aff}})$$

mit

$$\varphi_v^B(\{L\}) := \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\lambda_i + \xi$$

für jede Ecke $\{L\} = \{\text{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1}v_1, \dots, \pi_v^{a_n}v_n)\} \in \mathcal{V}_v^B$ und

$$\varphi_v^B(\{\{L_0\}, \dots, \{L_d\}\}) := \left\{ \left(\sum_{i=0}^d c_i (\varphi_v^B(\{L_i\}) - \xi) \right) + \xi : c_i \in \mathbb{R}_{>0} \text{ und } \sum_{i=0}^d c_i = 1 \right\}$$

für jeden d -Simplex $\{\{L_0\}, \dots, \{L_d\}\}$ in \mathcal{A}_v^B . Wir werden zeigen, dass φ_v^B ein Isomorphismus von Simplizialkomplexen ist.

Sei A ein Simplex in \mathcal{A}_v^B . Mit obigen Überlegungen gibt es ein n -Tupel $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, eine Permutation $\sigma \in S_n$ und eine Teilmenge $I \subseteq \{0, \dots, n-1\}$, so dass $A = (A_a^\sigma)_I$ ist. Daher gilt mit der Notation vom Ende von §3.2.1

$$\begin{aligned} \varphi_v^B(A) &= \left\{ \left(\sum_{i \in I} c_i (\varphi_v^B(\{L_{a,i}^\sigma\}) - \xi) \right) + \xi : c_i \in \mathbb{R}_{>0} \text{ für alle } i \in I \text{ und } \sum_{i \in I} c_i = 1 \right\} \\ &= (C_{x_a}^\sigma)_{\tilde{I}}, \end{aligned}$$

wobei $x_a := \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\lambda_i$ und $\tilde{I} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit

$$\tilde{I} := \begin{cases} I, & \text{falls } 0 \notin I, \\ I \setminus \{0\} \cup \{n\}, & \text{falls } 0 \in I \end{cases}$$

gesetzt wird und φ_v^B ist eine surjektive simpliziale Abbildung. Folglich ist φ_v^B bijektiv auf den Eckenmengen \mathcal{V}_v^B und $\mathcal{V}(W_{aff})$ und somit insgesamt ein Isomorphismus von Simplizialkomplexen. \square

Definition 3.2.8. Der Simplizialkomplex $\mathcal{B}_{\text{SL}_n(k_v)}$ wird *Bruhat-Tits-Gebäude* der speziellen linearen Gruppe genannt. In §4.2.2 werden wir das Bruhat-Tits-Gebäude einer beliebigen über k_v definierten halbeinfachen algebraischen Gruppe konstruieren.

Bemerkung 3.2.9. Für $n = 2$ haben wir das Bruhat-Tits-Gebäude in §2.2 konstruiert. Die Apartments von $\mathcal{B}_{\text{SL}_2(k_v)}$ sind die zweiseitigen unendlichen Wege in $\mathcal{B}_{\text{SL}_2(k_v)}$, siehe auch Abbildung 3.3.

Korollar 3.2.10. (a) Das Gebäude $\mathcal{B}_{\text{SL}_n(k_v)}$ besitzt eine wohldefinierte Färbung

$$\tau_v : \mathcal{L}_v^* \rightarrow \{0, \dots, n-1\}, \{\text{Span}_{\mathcal{O}_v}(v_1, \dots, v_n)\} \mapsto (\text{ord}_v(\det(v_1, \dots, v_n))) \bmod n.$$

Hierbei bezeichnet $\det(v_1, \dots, v_n)$ die Determinante der Matrix $M(v_1, \dots, v_n)$, deren i -te Spalte gleich v_i ist, und $(x) \bmod n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ den eindeutigen Rest r mit $0 \leq r < n$ bei der euklidischen Division einer Zahl $x \in \mathbb{Z}$ durch n .

(b) Es gilt $\widehat{\mathcal{L}}_v^* = \{x \in \mathcal{L}_v^* : \tau_v(x) = 0\}$, wobei $\widehat{\mathcal{L}}_v^*$ die Bahn von $u_v = \{L_v\}$ unter der $\text{SL}_n(k_v)$ -Wirkung bezeichnet, vergleiche Proposition 3.2.4.

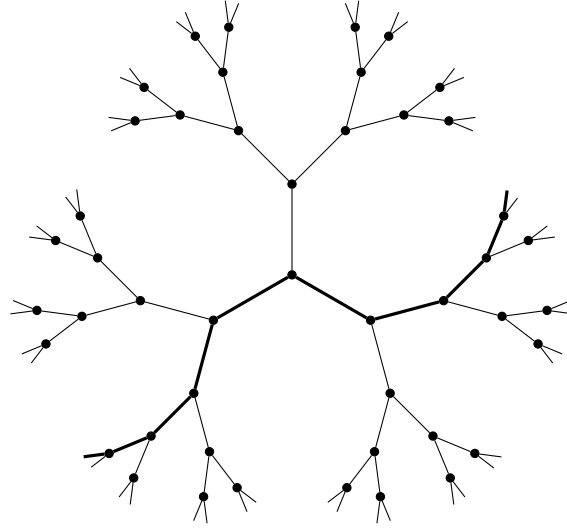


Abbildung 3.3: Der Bruhat-Tits-Baum von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_2)$. Es wurde exemplarisch ein Apartment markiert.

Beweis. (a) folgt direkt aus der konkreten Beschreibung der maximalen Simplex im Beweis von Proposition 3.2.7. Da $\det(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{O}_v^*$ für jede \mathcal{O}_v -Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von L_v gilt, folgt in (b) die Inklusion $\widehat{\mathcal{L}}_v^* \subseteq \{x \in \mathcal{L}_v^* : \tau_v(x) = 0\}$ direkt aus Proposition 3.2.4. Ist $x = \{\mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(v_1, \dots, v_n)\} \in \mathcal{L}_v^*$ für eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von k_v^n mit $\tau_v(x) = 0$, so ist $\det(v_1, \dots, v_n) = u\pi_v^{kn}$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{Z}$ und $u \in \mathcal{O}_v^*$. Folglich ist $A := M(\pi_v^{-k}u^{-1}v_1, \dots, \pi_v^{-k}v_n) \in \mathrm{SL}_n(k_v)$ mit $AL_v = \pi_v^{-k}\mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(v_1, \dots, v_n)$ und somit $x = Au_v \in \widehat{\mathcal{L}}_v^*$. \square

Wir definieren eine *kombinatorische Metrik* auf der Eckenmenge \mathcal{L}_v^* :

Definition 3.2.11. Seien $x, x' \in \mathcal{L}_v^*$. Dann ist der *kombinatorische Abstand* zwischen x und x' definiert als

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(x, x') := \min\{m \in \mathbb{N} : \text{es gibt Ecken } x = x_0, x_1, \dots, x_m = x', \text{ so dass } x_i \text{ und } x_{i+1} \text{ benachbart sind für alle } 0 \leq i \leq m-1\},$$

falls $x \neq x'$, und $\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(x, x') := 0$, falls $x = x'$.

Bemerkung 3.2.12. Da die $\mathrm{SL}_n(k_v)$ -Wirkung die Nachbarschafts-Relation erhält, ist die kombinatorische Metrik invariant unter der $\mathrm{SL}_n(k_v)$ -Wirkung.

Der kombinatorische Abstand zweier Ecken lässt sich wie folgt berechnen:

Lemma 3.2.13 ([Wer01], Lemma 4.2). Seien $x = \{L\}, x' = \{L'\} \in \mathcal{L}_v^*$,

$$s := \min\{l : \pi_v^l L' \subseteq L\} \quad \text{und} \quad r := \max\{l : L \subseteq \pi_v^l L'\}.$$

Dann ist

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(x, x') = s - r.$$

Bemerkung 3.2.14. Für $n = 2$ haben wir nun drei zueinander äquivalente Beschreibungen der Bahn $\widehat{\mathcal{L}}_v^*$ von u_v , vergleiche Proposition 3.2.4, Korollar 3.2.10 und Proposition 2.2.5.

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{L}}_v^* &= \{ \{ \text{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{-a}v_1, \pi_v^a v_2) \} \in \mathcal{L}_v^* : \{v_1, v_2\} \text{ ist } \mathcal{O}_v\text{-Basis von } L_v, a \in \mathbb{Z} \} \\ &= \{ x \in \mathcal{L}_v^* : \tau_v(x) = 0 \} \\ &= \{ x \in \mathcal{L}_v^* : \text{dist}_{\text{SL}_2(k_v)}(u_v, x) \in 2\mathbb{Z} \}.\end{aligned}$$

Proposition 3.2.15. Sei $A_v = (a_{ij}) \in \text{SL}_n(k_v)$ und $A_v^{-1} = (b_{ij})$ die zu A_v inverse Matrix. Dann ist

$$\text{dist}_{\text{SL}_n(k_v)}(u_v, A_v u_v) = -\min\{\text{ord}_v(a_{ij}) : 1 \leq i, j \leq n\} - \min\{\text{ord}_v(b_{ij}) : 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Beweis. Sei $A_v = (a_{ij}) \in \text{SL}_n(k_v)$ und $A_v^{-1} = (b_{ij})$. Mit Proposition 3.2.4 gibt es eine \mathcal{O}_v -Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von L_v und $a_i \in \mathbb{Z}$ mit $a_1 \leq \dots \leq a_n$ und $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, so dass $A_v u_v = \{ \text{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1}v_1, \dots, \pi_v^{a_n}v_n) \}$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}\min\{l : \pi_v^l \text{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1}v_1, \dots, \pi_v^{a_n}v_n) \subseteq L_v\} &= -a_1, \\ \max\{l : L_v \subseteq \pi_v^l \text{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1}v_1, \dots, \pi_v^{a_n}v_n)\} &= -a_n\end{aligned}$$

und mit Lemma 3.2.13 folgt $\text{dist}_{\text{SL}_n(k_v)}(u_v, A_v u_v) = a_n - a_1$. Wir müssen also die Exponenten a_1 und a_n genauer bestimmen. Im Beweis von Proposition 3.2.4 wurden diese wie folgt gebildet:

Sei $m := \min\{\text{ord}_v(a_{ij}) : 1 \leq i, j \leq n\}$. Dann ist $a_1 = m + l_1$ und $a_n = m + l_n$, wobei $\pi_v^{l_1}$ der erste und $\pi_v^{l_n}$ der n -te Elementarteiler der Matrix $\pi_v^{-m}A_v$ ist. Der erste Elementarteiler von $\pi_v^{-m}A_v$ ist gleich dem größten gemeinsamen Teiler der Einträge der Matrix $\pi_v^{-m}A_v$. Da die Einträge von $\pi_v^{-m}A_v$ nach Konstruktion teilerfremd sind, ist folglich $l_1 = 0$ und $a_1 = m$.

Der n -te Elementarteiler von $\pi_v^{-m}A_v$ entspricht dem Quotienten aus der Determinante von $\pi_v^{-m}A_v$ und dem größten gemeinsamen Teiler der $(n-1)$ -Minoren der Matrix $\pi_v^{-m}A_v$. Es gilt $\det(\pi_v^{-m}A_v) = \pi_v^{-nm}$ und die Menge der $(n-1)$ -Minoren der Matrix $\pi_v^{-m}A_v$ ist gleich der Menge der $(n-1)$ -Minoren der Matrix A_v , multipliziert mit $\pi_v^{-(n-1)m}$. Da $\det(A_v) = 1$, entspricht die Menge der $(n-1)$ -Minoren von A_v wiederum der Menge der Einträge von A_v^{-1} . Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}l_n &= -nm - \text{ord}_v(\text{ggT}\{\pi_v^{-(n-1)m}b_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}) \\ &= -nm - \min\{\text{ord}_v(\pi_v^{-(n-1)m}b_{ij}) : 1 \leq i, j \leq n\} \\ &= -nm - (-(n-1)m + \min\{\text{ord}_v(b_{ij}) : 1 \leq i, j \leq n\}) \\ &= -m - \min\{\text{ord}_v(b_{ij}) : 1 \leq i, j \leq n\},\end{aligned}$$

d.h. $a_n = -\min\{\text{ord}_v(b_{ij}) : 1 \leq i, j \leq n\}$, und damit die Behauptung. \square

Mit obiger Proposition folgt nun sofort:

Proposition 3.2.16. *Sei $v \in M_k^0$ eine nicht-archimedische Bewertung, $A_v \in \mathrm{SL}_n(k_v)$ und A_v^{-1} die zu A_v inverse Matrix. Dann ist die v -adische lokale Höhe von A_v gleich*

$$H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A_v) := q_v^{\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(u_v, A_v u_v)} = \|A_v\|_{v, \infty} \|A_v^{-1}\|_{v, \infty}.$$

wobei $\|A_v\|_{v, \infty} := \max_{\|x\|_{v, \infty}=1} \|A_v x\|_{v, \infty}$ die Matrixnorm von $A_v \in \mathrm{SL}_n(k_v)$ bezüglich der Maximumsnorm $\|\cdot\|_{v, \infty}$ auf k_v^n ist.

Bemerkung 3.2.17. Da $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v)$ der Stabilisator von u_v in $\mathrm{SL}_n(k_v)$ ist, identifizieren wir $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v)$ mit dem Punkt $u_v \in \widehat{\mathcal{L}}_v^*$. Somit entspricht obige v -adische lokale Höhe auf $\mathrm{SL}_n(k_v)$ der lokalen Höhe aus Definition 2.1.1(i) bezüglich der maximalen kompakten Untergruppe $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v)$.

3.3 Die Endlichkeit von $N_{\mathrm{SL}_n(k)}(B)$

Nachdem wir nun die v -adischen lokalen Höhenfunktionen $H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ auf $\mathrm{SL}_n(k_v)$ für alle $v \in M_k$ bestimmt haben, werden wir nun die zugehörige globale Höhe einer Matrix $A \in \mathrm{SL}_n(k)$ betrachten. Diese ist, wie in §2.1, definiert als

$$H_{\mathrm{SL}_n(k)}(A) := \prod_{v \in M_k} H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A).$$

Hierbei fassen wir $\mathrm{SL}_n(k)$ auf natürliche Weise durch die Einbettungen $\varphi_v : k \rightarrow k_v$ aus §1.1 als Teilmenge von $\mathrm{SL}_n(k_v)$ auf. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es für alle $B \in \mathbb{R}_{>0}$ die Endlichkeit von

$$N_{\mathrm{SL}_n(k)}(B) = \#\{A \in \mathrm{SL}_n(k) : H_{\mathrm{SL}_n(k)}(A) \leq B\}$$

zu zeigen:

Satz 3.3.1. *Sei $B \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt $N_{\mathrm{SL}_n(k)}(B) < \infty$.*

Beweis von Satz 3.3.1. Um die Anzahl der Matrizen beschränkter Höhe in $\mathrm{SL}_n(k)$ abzuschätzen, wollen wir unsere Höhe mit einer Höhe zu einem adelisch metrisierten Geradenbündel auf einer projektiven Varietät vergleichen, siehe §1.2. Hierzu definieren wir zunächst eine Familie v -adischer Normen $\{\|\cdot\|_v : v \in M_k\}$ auf den k_v -Vektorräumen $\mathrm{Mat}_n(k_v) = k_v^{n^2}$. Sei $v \in M_k$. Dann setzen wir für $M \in \mathrm{Mat}_n(k_v)$

$$\|M\|_v := \begin{cases} \|M\|_{v,2}, & \text{falls } v \text{ archimedisch,} \\ \|M\|_{v,\infty}, & \text{falls } v \text{ nicht-archimedisch.} \end{cases}$$

Für archimedische Bewertungen $v \in M_k^\infty$ bezeichne hierbei $\|\cdot\|_{v,2}$ die von der euklidischen/hermiteschen Standardnorm auf k_v^n induzierte Matrixnorm. Für nicht-archimedische Bewertungen $v \in M_k^0$ bezeichne $\|\cdot\|_{v,\infty}$ die Matrixnorm bezüglich Maximumsnorm auf k_v^n . Dies definiert nach Beispiel 1.2.15 eine adelische Metrik auf dem Hyperebenenbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{(n^2-1)}}(1)$. Wir nennen diese adelische Metrik $\|\cdot\|_{M_k}$ und schreiben $\mathbb{E} := (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{(n^2-1)}}(1), \|\cdot\|_{M_k})$ für das zugehörige adelisch metrisierte Geradenbündel.

Sei $A \in \mathrm{SL}_n(k)$. Zunächst betrachten wir die archimedischen Bewertungen $v \in M_k^\infty$. Nach Proposition 3.1.2 gilt

$$H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A) = e^{\sqrt{n \sum_{i=1}^n \log(\sqrt{\theta_{v,i}})^2}},$$

wobei die $\theta_{v,i}$, $1 \leq i \leq n$, die (positiven reellen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms von ${}^t\varphi_v(A)\varphi_v(A)$ bezeichnen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\theta_{v,1} \leq \dots \leq \theta_{v,n}$. Dann ist $\theta_{v,n}$ der maximale Eigenwert von ${}^t\varphi_v(A)\varphi_v(A)$, $\theta_{v,1}^{-1}$ der maximale Eigenwert von ${}^t\varphi_v(A^{-1})\varphi_v(A^{-1})$ und wir erhalten

$$\|A\|_v \|A^{-1}\|_v = e^{\log(\sqrt{\theta_{v,n}}) - \log(\sqrt{\theta_{v,1}})} \leq e^{\sqrt{n \sum_{i=1}^n \log(\sqrt{\theta_{v,i}})^2}} = H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A).$$

Hierbei haben wir für die mittlere Ungleichung verwendet, dass $(a-b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt.

Da für nicht-archimedische Bewertungen $v \in M_k^0$ nach Proposition 3.2.16

$$H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A) = \|A\|_v \|A^{-1}\|_v$$

gilt, folgt insgesamt

$$H_{\mathrm{SL}_n(k)}(A) = \prod_{v \in M_k} H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A) \geq \prod_{v \in M_k} \|A\|_v \|A^{-1}\|_v$$

und daher für alle $B \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{SL}_n(k)}(B) &= \#\{A \in \mathrm{SL}_n(k) : H_{\mathrm{SL}_n(k)}(A) \leq B\} \\ &\leq \#\{A \in \mathrm{SL}_n(k) : \prod_{v \in M_k} \|A\|_v \|A^{-1}\|_v \leq B\}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Morphismus

$$\varphi : \mathrm{SL}_n \rightarrow \mathbb{P}^{(n^2-1)} \times \mathbb{P}^{(n^2-1)}, \quad A \mapsto ([A], [A^{-1}]).$$

Da \mathbb{E} ein adelisch metrisiertes Geradenbündel auf $\mathbb{P}^{(n^2-1)}$ ist, ist auch $\mathbb{E} \boxtimes \mathbb{E}$ ein adelisch metrisiertes Geradenbündel auf $\mathbb{P}^{(n^2-1)} \times \mathbb{P}^{(n^2-1)}$, siehe Proposition 1.2.16, und es gilt

$$H_{\mathbb{E} \boxtimes \mathbb{E}}(\varphi(A)) = \prod_{v \in M_k} \|A\|_v \|A^{-1}\|_v$$

für alle $A \in \mathrm{SL}_n(k)$. Da φ nur endliche Fasern hat, folgt die Endlichkeit von $N_{\mathrm{SL}_n(k)}(B)$ für alle $B \in \mathbb{R}_{>0}$ aus der Endlichkeit von $N_{(\mathbb{P}^{(n^2-1)} \times \mathbb{P}^{(n^2-1)})}(k)}(\mathbb{E} \boxtimes \mathbb{E}, B)$, siehe Proposition 1.2.19. \square

Kapitel 4

Die Endlichkeit von $N_{\mathbf{G}(k)}(B)$

Sei nun $\mathbf{G} \subseteq \mathrm{GL}_n$ wieder eine beliebige über einem algebraischen Zahlkörper k definierte halbeinfache algebraische Gruppe. Wir behalten die Bezeichnungen aus §1.1 und §2.1 bei und schreiben \mathfrak{g} bzw. \mathfrak{g}_k bzw. \mathfrak{g}_v für die Lie-Algebren von \mathbf{G} bzw. $\mathbf{G}(k)$ bzw. $G_v = \mathbf{G}(k_v)$ für $v \in M_k$. Weiter setzen wir $n := \dim(\mathbf{G}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}) = \dim_k(\mathfrak{g}_k) = \dim_{k_v}(\mathfrak{g}_v)$.

Das Ziel der ersten beiden Abschnitte dieses Kapitels ist es, einen Zusammenhang zwischen den v -adischen lokalen Höhenfunktionen $H_v : G_v \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$ und den v -adischen lokalen Höhenfunktionen $H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ auf $\mathrm{SL}_n(k_v)$ aus §3.1 und §3.2 herzustellen. Hierfür werden wir noch einmal allgemein auf die Konstruktion der v -adischen lokalen Höhenfunktionen, inklusive der metrischen Räume G_v/K_v eingehen.

Im letzten Abschnitt werden wir zeigen, dass für k -spaltende Gruppen \mathbf{G} die Anzahl

$$N_{\mathbf{G}(k)}(B) = \#\{g \in \mathbf{G}(k) : H(g) \leq B\},$$

der Punkte beschränkter (globaler) Höhe H , für alle $B \in \mathbb{R}_{>0}$ endlich ist. Dazu werden wir auf die in §3.3 bewiesene Endlichkeit von $N_{\mathrm{SL}_n(k)}(B)$ zurückgreifen. Folgende Beobachtung ist dabei zentral:

Lemma 4.0.2. *Sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum und $\varphi : \mathbf{G} \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ ein Morphismus algebraischer Gruppen. Dann ist $\varphi(\mathbf{G}) \subseteq \mathrm{SL}(V)$.*

Beweis. Sei $\det : \mathrm{GL}(V) \rightarrow \mathbb{G}_m$ die Determinantenabbildung. Dann ist $\det \circ \varphi$ ein Charakter von \mathbf{G} . Da $\mathbf{G} = [\mathbf{G}, \mathbf{G}]$ gilt, besitzt \mathbf{G} keine nichttrivialen Charaktere und es folgt $\det(\varphi(g)) = 1$ für alle $g \in \mathbf{G}$. \square

Bemerkung 4.0.3. Seien $\mathrm{Ad} : \mathbf{G} \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ bzw. $\mathrm{Ad}_k : \mathbf{G}(k) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_k)$ bzw. $\mathrm{Ad}_v : G_v \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}_v)$ die adjungierten Darstellungen der Gruppen \mathbf{G} bzw. $\mathbf{G}(k)$ bzw. G_v . Nach Lemma 4.0.2 ist $\mathrm{Ad}(\mathbf{G}) \subseteq \mathrm{SL}(\mathfrak{g})$ und daher mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_k \otimes_k \mathbb{C} = \mathfrak{g}_{k_v} \otimes_{k_v} \mathbb{C}$ auch $\mathrm{Ad}_k(\mathbf{G}(k)) \subseteq \mathrm{SL}(\mathfrak{g}_k)$ und $\mathrm{Ad}_v(G_v) \subseteq \mathrm{SL}(\mathfrak{g}_v)$ für alle $v \in M_k$. Im Folgenden werden wir daher

$$\mathrm{Ad} : \mathbf{G} \rightarrow \mathrm{SL}(\mathfrak{g}) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Ad}_k : \mathbf{G}(k) \rightarrow \mathrm{SL}(\mathfrak{g}_k) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Ad}_v : G_v \rightarrow \mathrm{SL}(\mathfrak{g}_v)$$

schreiben.

4.1 Symmetrische Räume und die archimedischen lokalen Höhen

Sei $v \in M_k^\infty$ eine archimedische Bewertung und K_v eine maximale kompakte Untergruppe von G_v . In diesem Abschnitt wollen wir zunächst unsere Wahl der Metrik des symmetrischen Raums G_v/K_v genauer beschreiben und anschließend die dadurch induzierte v -adische lokale Höhenfunktion H_v untersuchen. Eine gute Einführung in die Theorie der symmetrischen Räume, inklusive folgender Begriffe, ist in [Hel78] zu finden.

Wir betrachten G_v als reelle Lie-Gruppe und bezeichnen mit G_v° die Zusammenhangskomponente von G_v . Diese ist eine zusammenhängende halbeinfache Lie-Gruppe mit zusammenhängender maximaler kompakter Untergruppe $K_v^\circ = G_v^\circ \cap K_v$. Nach [Hel78, VI, Theorem 1.1] gibt es einen analytischen involutiven Automorphismus $\sigma_v : G_v^\circ \rightarrow G_v^\circ$ mit Fixpunktmenge $(G_v^\circ)^{\sigma_v} = K_v^\circ$ und G_v°/K_v° ist ein *riemannscher symmetrischer Raum*, siehe [Hel78, IV, Proposition 3.4].

Als Metriken auf G_v/K_v betrachten wir geeignete durch den Diffeomorphismus

$$\psi_v : G_v^\circ/K_v^\circ \rightarrow G_v/K_v, \quad g_v^\circ K_v^\circ \mapsto g_v^\circ K_v \quad (\dagger)$$

von G_v°/K_v° auf G_v/K_v induzierte Metriken. Unsere Wahl der Metriken auf G_v°/K_v° wollen wir nun genauer beschreiben, siehe auch [Hel78, IV, Proposition 3.4]. Um die Notation zu vereinfachen, werden wir $\underline{G}_v = G_v^\circ$ annehmen.

Sei zunächst $k_v = \mathbb{R}$. Sei weiter $\mathfrak{sl}(\mathfrak{g}_v)$ die Lie-Algebra von $\mathrm{SL}(\mathfrak{g}_v)$ und $\mathrm{ad}_v : \mathfrak{g}_v \rightarrow \mathfrak{sl}(\mathfrak{g}_v)$ das Differential der adjungierten Darstellung $\mathrm{Ad}_v : G_v \rightarrow \mathrm{SL}(\mathfrak{g}_v)$ in e_v , dem neutralen Element in G_v . Da \mathfrak{g}_v eine halbeinfache reelle Lie-Algebra ist, ist die *Killing-Form*

$$B_v : \mathfrak{g}_v \times \mathfrak{g}_v \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_v(X) \mathrm{ad}_v(Y))$$

eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform mit $B_v(\alpha(X), \alpha(Y)) = B_v(X, Y)$ für alle $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_v)$ und alle $X, Y \in \mathfrak{g}_v$. Insbesondere ist B_v invariant unter $\mathrm{Ad}_v(K_v)$.

Weiter ist $\mathfrak{g}_v = \mathfrak{k}_v \oplus \mathfrak{p}_v$, wobei $\mathfrak{k}_v = \{X \in \mathfrak{g}_v : (\mathrm{d}\sigma_v)_{e_v}(X) = X\}$ die Lie-Algebra von K_v bezeichnet und $\mathfrak{p}_v := \{X \in \mathfrak{g}_v : (\mathrm{d}\sigma_v)_{e_v}(X) = -X\}$ ist, siehe [Hel78, VI, Theorem 1.1]. Diese direkte Summe ist eine *Cartan-Zerlegung* und $(\mathrm{d}\sigma_v)_{e_v}$ eine Cartan-Involution von \mathfrak{g}_v . Insbesondere ist die symmetrische Bilinearform

$$B_{\mathrm{d}\sigma_v} : \mathfrak{g}_v \times \mathfrak{g}_v \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto -B_v(X, (\mathrm{d}\sigma_v)_{e_v}(Y))$$

positiv definit, d.h. B_v ist auf \mathfrak{k}_v negativ definit und auf \mathfrak{p}_v positiv definit, siehe [Hel78, III, Proposition 7.4].

Sei $\mathrm{pr} : G_v \rightarrow G_v/K_v$ die kanonische Projektion. Mit $\tau(g_v)$ bezeichnen wir für jedes $g_v \in G_v$ den Diffeomorphismus $\tau(g_v) : G_v/K_v \rightarrow G_v/K_v, xK_v \mapsto g_v xK_v$.

Das Differential $(d \operatorname{pr})_{e_v} : \mathfrak{g}_v \rightarrow (G_v/K_v)_{K_v}$ ist surjektiv mit Kern \mathfrak{k}_v . Folglich erhalten wir einen Isomorphismus $(d \operatorname{pr})_{e_v}|_{\mathfrak{p}_v} : \mathfrak{p}_v \rightarrow (G_v/K_v)_{K_v}$ und können, wie folgt, eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf $(G_v/K_v)_{K_v}$ definieren

$$Q_{K_v} : (G_v/K_v)_{K_v} \times (G_v/K_v)_{K_v} \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto B_v((d \operatorname{pr})_{e_v}|_{\mathfrak{p}_v}^{-1}(X), (d \operatorname{pr})_{e_v}|_{\mathfrak{p}_v}^{-1}(Y)).$$

Allgemein setzen wir für $p_v = g_v K_v \in G_v/K_v$

$$Q_{p_v} : (G_v/K_v)_{p_v} \times (G_v/K_v)_{p_v} \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto Q_{K_v}((d\tau(g_v^{-1}))_{p_v}(X), (d\tau(g_v^{-1}))_{p_v}(Y)).$$

Da B_v unter $\operatorname{Ad}_v(K_v)$ invariant ist und

$$(d \operatorname{pr})_{e_v}|_{\mathfrak{p}_v}^{-1} \circ (d\tau(x_v))_{K_v} = \operatorname{Ad}_v(x_v) \circ (d \operatorname{pr})_{e_v}|_{\mathfrak{p}_v}^{-1}$$

für alle $x_v \in K_v$ gilt, erhalten wir für jedes $p_v \in G_v/K_v$ eine wohldefinierte positiv definite symmetrische Bilinearform und die Abbildung $p_v \mapsto Q_{p_v}$ ist eine G_v -invariante riemannsche Struktur auf G_v/K_v . Insbesondere induziert diese Struktur eine G_v -invariante Metrik auf G_v/K_v .

Sei nun $k_v = \mathbb{C}$. Die Lie-Algebra \mathfrak{g}_v von G_v kann sowohl als komplexe, als auch als reelle halbeinfache Lie-Algebra aufgefasst werden. Wir betrachten parallel beide Strukturen. Wenn wir \mathfrak{g}_v als reelle Algebra betrachten, schreiben wir $\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$ anstatt \mathfrak{g}_v .

Sei $\mathfrak{sl}(\mathfrak{g}_v)$ die Lie-Algebra von $\operatorname{SL}(\mathfrak{g}_v)$ und $\operatorname{ad}_v : \mathfrak{g}_v \rightarrow \mathfrak{sl}(\mathfrak{g}_v)$ das Differential der adjungierten Darstellung $\operatorname{Ad}_v : G_v \rightarrow \operatorname{SL}(\mathfrak{g}_v)$ in e_v . Da \mathfrak{g}_v halbeinfach ist, ist die Killing-Form

$$B_v : \mathfrak{g}_v \times \mathfrak{g}_v \rightarrow \mathbb{C}, (X, Y) \mapsto \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_v(X) \operatorname{ad}_v(Y))$$

eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform mit $B_v(\alpha(X), \alpha(Y)) = B_v(X, Y)$ für alle $\alpha \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}_v)$ und alle $X, Y \in \mathfrak{g}_v$. Mit $\operatorname{SL}(\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}})$, $\mathfrak{sl}(\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}})$, $\operatorname{Ad}_v^{\mathbb{R}}$, $\operatorname{ad}_v^{\mathbb{R}}$ und $B_v^{\mathbb{R}}$ bezeichnen wir analog die zu $\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$ korrespondierenden Objekte. Es gilt nach [Hel78, III, Lemma 6.1]

$$B_v^{\mathbb{R}}(X, Y) = 2 \operatorname{Re}(B_v(X, Y))$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$. Auch $B_v^{\mathbb{R}}$ ist eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform mit $B_v^{\mathbb{R}}(\alpha(X), \alpha(Y)) = B_v^{\mathbb{R}}(X, Y)$ für alle $\alpha \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}})$ und alle $X, Y \in \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$. Insbesondere ist $B_v^{\mathbb{R}}$ invariant unter $\operatorname{Ad}_v^{\mathbb{R}}(K_v)$.

Sei \mathfrak{k}_v die zu K_v gehörende Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$. Dann kann σ_v so gewählt werden, dass \mathfrak{k}_v eine kompakte reelle Form von \mathfrak{g}_v und $(d\sigma_v)_{e_v}$ die zugehörige Konjugation von \mathfrak{g}_v bezüglich \mathfrak{k}_v ist. Insbesondere ist $\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} = \mathfrak{k}_v \oplus i\mathfrak{k}_v$ eine Cartan-Zerlegung, $(d\sigma_v)_{e_v}$ eine Cartan-Involution von $\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{k}_v = \{X \in \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} : (d\sigma_v)_{e_v}(X) = X\}$ und $\mathfrak{p}_v := i\mathfrak{k}_v = \{X \in \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} : (d\sigma_v)_{e_v}(X) = -X\}$, siehe [Hel78, III, Theorem 6.3 und VI, Theorem 1.1] und [HN12, Lemma 13.2.3, Lemma 13.2.8 und Theorem 14.1.3].

Man beachte, dass $(d\sigma_v)_{e_v}$ ein Automorphismus von $\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$, jedoch keiner von \mathfrak{g}_v ist. Dies liefert uns eine hermitesche Sesquilinearform

$$B_{d\sigma_v} : \mathfrak{g}_v \times \mathfrak{g}_v \rightarrow \mathbb{C}, (X, Y) \mapsto -B_v(X, (d\sigma_v)_{e_v}(Y))$$

und eine symmetrische Bilinearform

$$B_{d\sigma_v}^{\mathbb{R}} : \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} \times \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto -B_v^{\mathbb{R}}(X, (d\sigma_v)_{e_v}(Y)) = 2 \operatorname{Re}(B_{d\sigma_v}(X, Y)).$$

Beide sind positiv definit, d.h. B_v bzw. $B_v^{\mathbb{R}}$ ist auf \mathfrak{k}_v negativ definit und auf \mathfrak{p}_v positiv definit, siehe [Hel78, III, Proposition 7.4].

Analog zur Konstruktion für $k_v = \mathbb{R}$ definieren wir auch in diesem Fall eine G_v -invariante Metrik auf G_v/K_v . Hierfür ersetzen wir in obiger Beschreibung lediglich alle zu \mathfrak{g}_v korrespondierenden Objekte durch die jeweiligen zu $\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$ gehörenden reellen Objekte.

Wir wollen nun wieder zwischen G_v und G_v° unterscheiden. Offensichtlich können wir in obiger Konstruktion (für G_v°) die Killing-Form B_v bzw. $B_v^{\mathbb{R}}$ auch durch eine *Skalierung*

$$\begin{aligned} B_{\kappa_v} &: \mathfrak{g}_v \times \mathfrak{g}_v \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto \kappa_v B_v(X, Y), \quad \text{falls } k_v = \mathbb{R}, \\ B_{\kappa_v}^{\mathbb{R}} &: \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} \times \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto \kappa_v B_v^{\mathbb{R}}(X, Y), \quad \text{falls } k_v = \mathbb{C}, \end{aligned}$$

für ein $\kappa_v \in \mathbb{R}_{>0}$ ersetzen und erhalten ebenso wohldefinierte G_v° -invariante Metriken auf G_v°/K_v° . Diese übertragen wir durch den Diffeomorphismus ψ_v auf G_v/K_v und erhalten auch dort G_v -invariante Metriken, siehe (i). Wir wollen im Folgenden nur derartig konstruierte Metriken auf G_v/K_v betrachten. Die zur Skalierungskonstanten κ_v gehörende Metrik auf G_v/K_v bezeichnen wir mit $\operatorname{dist}_v^{\kappa_v} : G_v/K_v \times G_v/K_v \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die dazu gehörende v -adische lokale Höhenfunktion mit $H_v^{\kappa_v}$.

Bevor wir uns nun der Abschätzung der v -adischen lokalen Höhe H_v zuwenden, heben wir noch die folgenden zwei Aussagen hervor.

Lemma 4.1.1 ([Hel78], VI, Exercise A.3). *Für den Normalisator $N_{G_v^{\circ}}(K_v^{\circ})$ von K_v° in G_v° gilt $N_{G_v^{\circ}}(K_v^{\circ}) = K_v^{\circ}$.*

Lemma 4.1.2. *Die adjungierte Darstellung $\operatorname{Ad}_v : G_v \rightarrow \operatorname{SL}(\mathfrak{g}_v)$ ist eine eigentliche Abbildung, d.h. Urbilder kompakter Mengen sind kompakt.*

Beweis. Da \mathbf{G} eine halbeinfache algebraische Gruppe ist, ist der Kern der adjungierten Darstellung $\operatorname{Ad} : \mathbf{G} \rightarrow \operatorname{SL}(\mathfrak{g})$ gleich dem Zentrum $Z(\mathbf{G})$ und daher endlich. Folglich ist, wegen $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_v \otimes_{k_v} \mathbb{C}$, auch $\operatorname{Ker}(\operatorname{Ad}_v)$ endlich und somit $\operatorname{Ad}_v : G_v \rightarrow \operatorname{Ad}_v(G_v) \cap \operatorname{SL}(\mathfrak{g}_v)$ eine Überlagerung von $\operatorname{Ad}_v(G_v) \cap \operatorname{SL}(\mathfrak{g}_v)$ mit endlichen Fasern, siehe zum Beispiel [OV93, 1, §4.3]. Man sieht nun leicht, dass Urbilder kompakter Teilmengen in $\operatorname{Ad}_v(G_v) \cap \operatorname{SL}(\mathfrak{g}_v)$ kompakt in G_v sind. Da $\operatorname{Ad}_v(G_v) \cap \operatorname{SL}(\mathfrak{g}_v)$ eine topologische Lie-Untergruppe in $\operatorname{SL}(\mathfrak{g}_v)$ ist, gilt dies auch für kompakte Teilmengen in $\operatorname{SL}(\mathfrak{g}_v)$. \square

Satz 4.1.3. *Sei $v \in M_k^{\infty}$ eine archimedische Bewertung und $\operatorname{Ad}_v : G_v \rightarrow \operatorname{SL}(\mathfrak{g}_v)$ die adjungierte Darstellung von G_v . Weiter sei \mathfrak{B}_v eine bezüglich $B_{d\sigma_v}$ orthonormale Basis von \mathfrak{g}_v und $\iota_v : \operatorname{SL}(\mathfrak{g}_v) \rightarrow \operatorname{SL}_n(k_v)$ der durch diese Basiswahl induzierte Isomorphismus. Mit $H_{\operatorname{SL}_n(k_v)} : \operatorname{SL}_n(k_v) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ bezeichnen wir die v -adische lokale Höhenfunktion auf $\operatorname{SL}_n(k_v)$ aus §3.1. Dann gilt für alle $g_v \in G_v$*

$$H_v^{\kappa_v}(g_v) = e^{\operatorname{dist}_v^{\kappa_v}(K_v, g_v K_v)} = H_{\operatorname{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\operatorname{Ad}_v(g_v)))^{\gamma_v}$$

für ein geeignetes $\gamma_v \in \mathbb{R}_{>0}$, das nur von der Skalierungskonstanten κ_v der Metrik auf G_v/K_v abhängt.

Beweis. Sei I_v die Untergruppe der Isometrien in $\mathrm{SL}(\mathfrak{g}_v)$ bezüglich $B_{d\sigma_v}$. Dann gilt $\iota_v(I_v) = C_v$ mit

$$C_v := \begin{cases} \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), & \text{falls } k_v = \mathbb{R}, \\ \mathrm{SU}_n(\mathbb{C}), & \text{falls } k_v = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Sei zunächst $G_v = G_v^\circ$ zusammenhängend. Dann ist $K_v = (G_v)^{\sigma_v}$ und daher $(d\sigma_v)_{e_v} \circ \mathrm{Ad}_v(x_v) = \mathrm{Ad}_v(x_v) \circ (d\sigma_v)_{e_v}$ für alle $x_v \in K_v$. Folglich ist $\mathrm{Ad}_v(x_v)$ für alle $x_v \in K_v$ eine Isometrie bezüglich $B_{d\sigma_v}$ und somit $\iota_v(\mathrm{Ad}_v(K_v)) \subseteq C_v$. Weiter ist für alle $X \in \mathfrak{p}_v$ und alle $Y, Z \in \mathfrak{g}_v$

$$\begin{aligned} B_{d\sigma_v}(\mathrm{ad}_v(X)(Y), Z) &= -B_v([X, Y], (d\sigma_v)_{e_v}(Z)) &&= -B_v(Y, [(d\sigma_v)_{e_v}(Z), X]) \\ &= B_v(Y, [(d\sigma_v)_{e_v}(Z), (d\sigma_v)_{e_v}(X)]) &&= -B_v(Y, (d\sigma_v)_{e_v}([X, Z])) \\ &= B_{d\sigma_v}(Y, \mathrm{ad}_v(X)(Z)), \end{aligned}$$

d.h. $\mathrm{ad}_v(X)$ ist selbstadjungiert bezüglich $B_{d\sigma_v}$ und daher $d\iota_v(\mathrm{ad}_v(\mathfrak{p}_v)) \subseteq \{X \in \mathfrak{sl}_n(k_v) : X = {}^t\bar{X}\}$, wobei $d\iota_v := (d\iota_v)_{\mathrm{id}} : \mathfrak{sl}(\mathfrak{g}_v) \rightarrow \mathfrak{sl}_n(k_v)$ das Differential von ι_v in $\mathrm{id} \in \mathrm{SL}(\mathfrak{g}_v)$ bezeichnet.

Nach Lemma 4.1.2 ist Ad_v und somit auch $\iota_v \circ \mathrm{Ad}_v$ eine eigentliche Abbildung. Insbesondere ist das Urbild der maximalen kompakten Untergruppe C_v eine maximale kompakte Untergruppe in G_v . Wegen $K_v \subseteq (\iota_v \circ \mathrm{Ad}_v)^{-1}(C_v)$ folgt $K_v = (\iota_v \circ \mathrm{Ad}_v)^{-1}(C_v)$ und $\iota_v \circ \mathrm{Ad}_v$ induziert eine wohldefinierte Einbettung

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_v : G_v/K_v \rightarrow \mathrm{SL}_n(k_v)/C_v, \quad g_v K_v \mapsto \iota_v(\mathrm{Ad}_v(g_v))C_v.$$

Diese ermöglicht uns nun, die Metrik auf G_v/K_v mit der in §3.1 untersuchten Metrik auf $\mathrm{SL}_n(k_v)/C_v$ zu vergleichen. Sei dazu zunächst $k_v = \mathbb{R}$. Dann wird die Metrik auf G_v/K_v durch die symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} B_{\kappa_v} : \mathfrak{g}_v \times \mathfrak{g}_v &\rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \kappa_v B_v(X, Y) = \kappa_v \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_v(X) \mathrm{ad}_v(Y)) \\ &= \kappa_v \mathrm{Tr}(d\iota_v(\mathrm{ad}_v(X)) d\iota_v(\mathrm{ad}_v(Y))) \end{aligned}$$

induziert. Weiter sei $B_{\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})}$ die skalierte Killing-Form auf $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ aus §3.1 und $\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})}$ die zugehörige Metrik auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Es gilt

$$B_{\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})} : \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto n \mathrm{Tr}(XY)$$

und somit für alle $X, Y \in \mathfrak{g}_v$

$$B_{\kappa_v}(X, Y) = \frac{\kappa_v}{n} B_{\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})}(d\iota_v(\mathrm{ad}_v(X)), d\iota_v(\mathrm{ad}_v(Y))).$$

Ist $k_v = \mathbb{C}$, so sei die Metrik auf G_v/K_v durch die symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} B_{\kappa_v}^{\mathbb{R}} : \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} \times \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \kappa_v B_v^{\mathbb{R}}(X, Y) = 2\kappa_v \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_v(X) \mathrm{ad}_v(Y))) \\ &= 2\kappa_v \mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(d\iota_v(\mathrm{ad}_v(X)) d\iota_v(\mathrm{ad}_v(Y)))) \end{aligned}$$

induziert. Weiter sei $B_{\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})}$ die skalierte Killing-Form auf $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ aus §3.1 und $\text{dist}_{\text{SL}_n(\mathbb{C})}$ die zugehörige Metrik auf $\text{SL}_n(\mathbb{C})/\text{SU}_n(\mathbb{C})$. Es gilt

$$B_{\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})} : \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{R}} \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto n \operatorname{Re}(\operatorname{Tr}(XY))$$

und somit für alle $X, Y \in \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$

$$B_{\kappa_v}^{\mathbb{R}}(X, Y) = \frac{2\kappa_v}{n} B_{\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})}(\operatorname{d}\iota_v(\operatorname{ad}_v(X)), \operatorname{d}\iota_v(\operatorname{ad}_v(Y))).$$

Wir setzen

$$\gamma_v := \begin{cases} \sqrt{\frac{\kappa_v}{n}}, & \text{falls } k_v = \mathbb{R}, \\ \sqrt{\frac{2\kappa_v}{n}}, & \text{falls } k_v = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Da $\operatorname{d}\iota_v(\operatorname{ad}_v(\mathfrak{p}_v)) \subseteq \{X \in \mathfrak{sl}_n(k_v) : X = {}^t\bar{X}\}$ gilt, ergibt sich die zu B_{κ_v} bzw. $B_{\kappa_v}^{\mathbb{R}}$ gehörende riemannsche Struktur auf G_v/K_v , bis auf den Faktor γ_v^2 , gerade als der Rückzug unter $\widetilde{\operatorname{Ad}}_v$ der Struktur bezüglich $B_{\mathfrak{sl}_n(k_v)}$ auf $\text{SL}_n(k_v)/C_v$. Für den zugehörigen Abstand erhalten wir für alle $g_v, g'_v \in G_v$

$$\operatorname{dist}_v^{\kappa_v}(g_v K_v, g'_v K_v) = \gamma_v \operatorname{dist}_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\operatorname{Ad}_v(g_v))C_v, \iota_v(\operatorname{Ad}_v(g'_v))C_v).$$

Sei nun $G_v \neq G_v^\circ$. Mit Lemma 4.1.2 ist auch in diesem Fall das Urbild von C_v unter $\iota_v \circ \operatorname{Ad}_v$ eine maximale kompakte Untergruppe K'_v von G_v . Diese enthält nach Konstruktion K_v° und es gibt ein $g_v \in G_v^\circ$ mit $K'_v = g_v K_v g_v^{-1}$, siehe [HN12, Theorem 14.1.3]. Folglich gilt

$$g_v K_v^\circ g_v^{-1} \subseteq K'_v \cap G_v^\circ \quad \text{und} \quad K_v^\circ \subseteq K'_v \cap G_v^\circ.$$

Da alle drei Untergruppen maximal kompakt in G_v° sind, erhalten wir

$$g_v K_v^\circ g_v^{-1} = K'_v \cap G_v^\circ = K_v^\circ,$$

d.h. $g_v \in N_{G_v^\circ}(K_v^\circ)$. Mit Lemma 4.1.1 gilt somit $g_v \in K_v^\circ$ und daher $K_v = g_v K_v g_v^{-1} = K'_v$, d.h. $\iota_v(\operatorname{Ad}_v(K_v)) \subseteq C_v$.

Die Metrik auf G_v/K_v wird durch den Diffeomorphismus

$$\psi_v : G_v^\circ/K_v^\circ \rightarrow G_v/K_v, g_v^\circ K_v^\circ \mapsto g_v^\circ K_v$$

von der Metrik auf G_v°/K_v° induziert. Seien also $g_v, g'_v \in G_v$ beliebig und $g_v^\circ, g_v^{\circ'} \in G_v^\circ$ geeignet mit $\psi_v(g_v^\circ K_v^\circ) = g_v K_v$ bzw. $\psi_v(g_v^{\circ'} K_v^\circ) = g'_v K_v$. Dann gibt es $x_v, x'_v \in K_v$ mit $g_v x_v = g_v^\circ$ bzw. $g'_v x'_v = g_v^{\circ'}$ und es gilt mit $\iota_v(\operatorname{Ad}_v(K_v)) \subseteq C_v$

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}_v^{\kappa_v}(g_v K_v, g'_v K_v) &= \gamma_v \operatorname{dist}_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\operatorname{Ad}_v(g_v^\circ))C_v, \iota_v(\operatorname{Ad}_v(g_v^{\circ'}))C_v) \\ &= \gamma_v \operatorname{dist}_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\operatorname{Ad}_v(g_v x_v))C_v, \iota_v(\operatorname{Ad}_v(g'_v x'_v))C_v) \\ &= \gamma_v \operatorname{dist}_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\operatorname{Ad}_v(g_v))C_v, \iota_v(\operatorname{Ad}_v(g'_v))C_v). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt für alle $g_v \in G_v$

$$\operatorname{dist}_v^{\kappa_v}(K_v, g_v K_v) = \gamma_v \operatorname{dist}_{\text{SL}_n(k_v)}(C_v, \iota_v(\operatorname{Ad}_v(g_v))C_v)$$

und daher

$$H_v^{\kappa_v}(g_v) = e^{\operatorname{dist}_v^{\kappa_v}(K_v, g_v K_v)} = e^{\gamma_v \operatorname{dist}_{\text{SL}_n(k_v)}(C_v, \iota_v(\operatorname{Ad}_v(g_v))C_v)} = H_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\operatorname{Ad}_v(g_v)))^{\gamma_v}.$$

□

Die archimedischen lokalen Höhenfunktionen $H_v^{\kappa_v}$ hängen von der Wahl der maximalen kompakten Untergruppen K_v von G_v und der Metrik auf G_v/K_v , genauer der Skalierungskonstanten κ_v der Killing-Form auf \mathfrak{g}_v bzw. $\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$, ab. Wählen wir jedoch für verschiedene maximale kompakte Untergruppen die gleiche Skalierungskonstante, so weichen die Höhen nur geringfügig voneinander ab. Es gilt:

Korollar 4.1.4. *Seien $K_{v,1}$ und $K_{v,2}$ zwei maximale kompakte Untergruppen von G_v und $\text{dist}_{v,1} : (G_v/K_{v,1}) \times (G_v/K_{v,1}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ bzw. $\text{dist}_{v,2} : (G_v/K_{v,2}) \times (G_v/K_{v,2}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ zwei zur selben Skalierungskonstanten gehörende Metriken auf $G_v/K_{v,1}$ bzw. $G_v/K_{v,2}$. Weiter seien $H_{v,1}$ bzw. $H_{v,2}$ die zu $\text{dist}_{v,1}$ bzw. $\text{dist}_{v,2}$ gehörenden v -adischen lokalen Höhenfunktionen auf G_v . Dann gibt es eine Konstante $\mathfrak{c}_v \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass*

$$\mathfrak{c}_v^{-1} \leq \frac{H_{v,1}(g_v)}{H_{v,2}(g_v)} \leq \mathfrak{c}_v$$

für alle $g_v \in G_v$ gilt.

Beweis. Sei $i \in \{1, 2\}$, $\sigma_{v,i} : G_v^\circ \rightarrow G_v^\circ$ der analytische involutive Automorphismus mit Fixpunktmenge $K_{v,i}^\circ$ und $\mathfrak{B}_{v,i}$ eine bezüglich $B_{d\sigma_{v,i}}$ orthonormale Basis von \mathfrak{g}_v . Diese Basis definiert einen Isomorphismus $\iota_{v,i} : \text{SL}(\mathfrak{g}_v) \rightarrow \text{SL}_n(k_v)$ über den wir $\text{SL}(\mathfrak{g}_v)$ mit $\text{SL}_n(k_v)$ identifizieren. Mit Satz 4.1.3 gilt für alle $g_v \in G_v$

$$H_{v,i}(g_v) = H_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_{v,i}(\text{Ad}_v(g_v)))^{\gamma_v},$$

wobei $H_{\text{SL}_n(k_v)}$ die v -adische lokale Höhenfunktion auf $\text{SL}_n(k_v)$ aus §3.1 bezeichnet. Weiter gibt es eine von g_v unabhängige Matrix $M_v \in \text{GL}_n(k_v)$ (Basiswechsel) mit

$$\iota_{v,1}(\text{Ad}_v(g_v)) = M_v \iota_{v,2}(\text{Ad}_v(g_v)) M_v^{-1}.$$

Ist $k_v = \mathbb{C}$, so kann durch Multiplikation mit einem geeigneten Skalar $M_v \in \text{SL}_n(k_v)$ angenommen werden. Ist $k_v = \mathbb{R}$, so betrachten wir die Polarzerlegung von M_v , d.h. wir schreiben $M_v = O_v S_v$ mit einer orthogonalen Matrix $O_v \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und einer positiven symmetrischen Matrix $S_v \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Da Konjugation mit O_v die Eigenwerte von ${}^t S_v \iota_{v,2}(\text{Ad}_v(g_v)) S_v^{-1} \iota_{v,2}(\text{Ad}_v(g_v)) S_v^{-1}$ nicht ändert, gilt

$$H_{\text{SL}_n(k_v)}(M_v \iota_{v,2}(\text{Ad}_v(g_v)) M_v^{-1})^{\gamma_v} = H_{\text{SL}_n(k_v)}(S_v \iota_{v,2}(\text{Ad}_v(g_v)) S_v^{-1})^{\gamma_v}$$

und auch S_v kann durch Multiplikation mit einem geeigneten Skalar als in $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ liegend angenommen werden. Folglich gibt es insgesamt eine Matrix $M'_v \in \text{SL}_n(k_v)$ mit

$$H_{v,1}(g_v) = H_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_{v,1}(\text{Ad}_v(g_v)))^{\gamma_v} = H_{\text{SL}_n(k_v)}(M'_v \iota_{v,2}(\text{Ad}_v(g_v)) M_v'^{-1})^{\gamma_v}.$$

Sei nun

$$C_v := \begin{cases} \text{SO}_n(\mathbb{R}), & \text{falls } k_v = \mathbb{R}, \\ \text{SU}_n(\mathbb{C}), & \text{falls } k_v = \mathbb{C}, \end{cases}$$

und $\text{dist}_{\text{SL}_n(k_v)}$ die zu $H_{\text{SL}_n(k_v)}$ korrespondierende Metrik auf $\text{SL}_n(k_v)/C_v$. Dann gilt wegen der $\text{SL}_n(k_v)$ -Invarianz der Metrik und der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} & \text{dist}_{\text{SL}_n(k_v)}(C_v, M'_v \iota_{v,2}(\text{Ad}_v(g_v)) M_v'^{-1} C_v) \\ & \leq \text{dist}_{\text{SL}_n(k_v)}(C_v, M'_v C_v) + \text{dist}_{\text{SL}_n(k_v)}(M'_v C_v, M'_v \iota_{v,2}(\text{Ad}_v(g_v)) C_v) \\ & \quad + \text{dist}_{\text{SL}_n(k_v)}(M'_v \iota_{v,2}(\text{Ad}_v(g_v)) C_v, M'_v \iota_{v,2}(\text{Ad}_v(g_v)) M_v'^{-1} C_v) \\ & = 2 \text{dist}_{\text{SL}_n(k_v)}(C_v, M'_v C_v) + \text{dist}_{\text{SL}_n(k_v)}(C_v, \iota_{v,2}(\text{Ad}_v(g_v)) C_v) \end{aligned}$$

und folglich

$$H_{\text{SL}_n(k_v)}(M'_v \iota_{v,2}(\text{Ad}_v(g_v)) M_v'^{-1})^{\gamma_v} \leq \mathbf{c}_v H_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_{v,2}(\text{Ad}_v(g_v)))^{\gamma_v}$$

mit $\mathbf{c}_v := H_{\text{SL}_n(k_v)}(M'_v)^{2\gamma_v}$. Wir erhalten

$$H_{v,1}(g_v) \leq \mathbf{c}_v H_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_{v,2}(\text{Ad}_v(g_v)))^{\gamma_v} = \mathbf{c}_v H_{v,2}(g_v).$$

Ähnlich gilt auch

$$H_{v,2}(g_v) \leq \mathbf{c}_v H_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_{v,1}(\text{Ad}_v(g_v)))^{\gamma_v} = \mathbf{c}_v H_{v,1}(g_v)$$

und somit insgesamt

$$\mathbf{c}_v^{-1} \leq \frac{H_{v,1}(g_v)}{H_{v,2}(g_v)} \leq \mathbf{c}_v.$$

□

4.2 Bruhat-Tits-Gebäude und die nicht-archimedischen lokalen Höhen

Sei nun $v \in M_k^0$ eine nicht-archimedische Bewertung. Auch hier wollen wir die v -adische lokale Höhenfunktion H_v über die adjungierte Darstellung $\text{Ad}_v : G_v \rightarrow \text{SL}(\mathfrak{g}_v)$ mit der v -adischen lokalen Höhenfunktion $H_{\text{SL}_n(k_v)}$ für $n = \dim(\mathbf{G}) = \dim_{k_v}(\mathfrak{g}_v)$ in Verbindung setzen. Um dies zu erreichen, werden wir im Folgenden genauer auf die Definition des Bruhat-Tits-Gebäudes $\mathcal{B}_v = \mathcal{B}(\mathbf{G}, k_v)$ eingehen.

4.2.1 Affine Gebäude

Bruhat-Tits-Gebäude sind affine Gebäude. In diesem Abschnitt werden wir uns daher zunächst allgemein mit der Definition eines affinen Gebäudes beschäftigen. Eine ausführliche Einführung in die Theorie affiner Gebäude, inklusive der meisten der folgenden Begriffe, ist zum Beispiel in [AB08, §10, §11]¹ zu finden.

¹Hier werden affine Gebäude „euklidisch“ genannt. Darüber hinaus werden nur Gebäude deren Apartments Simplicialkomplexe sind betrachtet. Wir werden auch Polysimplicialkomplexe zulassen.

Im Folgenden sei \mathbb{A} ein *euklidisch-affiner Raum*, d.h. ein affiner Raum über einem endlichdimensionalen euklidischen Vektorraum V und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das zugehörige euklidische Skalarprodukt auf V . Weiter sei $\text{Aff}(\mathbb{A})$ die *Automorphismengruppe* von \mathbb{A} . Durch die Wahl eines „Null-Punkts“ $\xi \in \mathbb{A}$ können wir $\text{GL}(V)$ und V als Untergruppen von $\text{Aff}(\mathbb{A})$ auffassen und $\text{Aff}(\mathbb{A}) = \text{GL}(V) \rtimes V$ identifizieren:

$$\begin{aligned} \text{GL}(V) &\hookrightarrow \text{Aff}(\mathbb{A}), & \varphi &\mapsto [\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}, x \mapsto \varphi(x - \xi) + \xi], \\ V &\hookrightarrow \text{Aff}(\mathbb{A}), & u &\mapsto [\tau_u : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}, x \mapsto x + u], \\ \text{GL}(V) \rtimes V &\xrightarrow{\sim} \text{Aff}(\mathbb{A}), & (\varphi, u) &\mapsto [\tau_u \circ \varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}, x \mapsto \varphi(x - \xi) + u + \xi]. \end{aligned}$$

Sei $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$. Ist $f = \tau_u \circ \varphi$ für ein $\varphi \in \text{GL}(V)$ und ein $u \in V$, so nennen wir φ den *linearen Anteil* und τ_u den *Verschiebungsanteil* von f . Der lineare Anteil von f ist unabhängig von der Wahl des „Null-Punkts“ $\xi \in \mathbb{A}$. Ist W_{aff} eine Untergruppe von $\text{Aff}(\mathbb{A})$, so schreiben wir $\overline{W_{\text{aff}}}$ für die *Gruppe der linearen Anteile* von W_{aff} , d.h. $\overline{W_{\text{aff}}}$ ist das Bild der Projektion $W_{\text{aff}} \rightarrow \text{GL}(V)$, $(\varphi, u) \mapsto \varphi$. Unter der obigen Identifikation ist die Untergruppe der *affinen Isometrien* von \mathbb{A} gleich $\text{O}(V) \rtimes V$.

Die Menge der *affinen Funktionen* $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ können wir mit dem semidirekten Produkt $V^* \rtimes \mathbb{R}$ identifizieren. Für jede affine Funktion f gibt es eine eindeutige Linearform $\varphi \in V^*$ und ein eindeutiges $l \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \varphi(x - \xi) + l$ für alle $x \in \mathbb{A}$. Auch hier nennen wir φ den *linearen Anteil* von f .

Definition 4.2.1. Eine *affine Spiegelungsgruppe* auf einem euklidisch-affinen Raum \mathbb{A} ist eine Gruppe W_{aff} bestehend aus Isometrien von \mathbb{A} , so dass es eine Menge \mathcal{H} von Hyperebenen in \mathbb{A} mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (i) W_{aff} wird von den affinen orthogonalen Spiegelungen s_H an H , für alle $H \in \mathcal{H}$, erzeugt.
- (ii) \mathcal{H} ist W_{aff} -invariant, d.h. $w(H) \in \mathcal{H}$ für alle $w \in W_{\text{aff}}$ und alle $H \in \mathcal{H}$.
- (iii) \mathcal{H} ist lokal endlich, d.h. jeder Punkt in \mathbb{A} hat eine Umgebung, die nur endlich viele Hyperebenen $H \in \mathcal{H}$ schneidet.

Proposition 4.2.2 ([Bou02], V, §3, Theorem 1). *Sei W_{aff} eine affine Spiegelungsgruppe auf einem euklidisch-affinen Raum \mathbb{A} und \mathcal{H} die zugehörige Menge von Hyperebenen in \mathbb{A} . Dann gilt*

$$\mathcal{H} = \{H \text{ Hyperebene in } \mathbb{A} : s_H \in W_{\text{aff}}\}.$$

Dies liefert uns die Wohldefiniertheit folgender Begriffe:

Definition 4.2.3. Sei W_{aff} eine affine Spiegelungsgruppe auf einem euklidisch-affinen Raum \mathbb{A} und \mathcal{H} die zugehörige Menge von Hyperebenen in \mathbb{A} . Für jedes $H \in \mathcal{H}$ sei H^+ der positive und H^- der negative, durch H beschränkte, offene Halbraum. Genauer ist $H^+ = \{x \in \mathbb{A} : f(x) > 0\}$ und $H^- = \{x \in \mathbb{A} : f(x) < 0\}$ falls $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ eine affine Funktion mit $H = \{x \in \mathbb{A} : f(x) = 0\}$ ist.

Eine *Zelle* in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} ist eine Teilmenge $A = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} U_H(A)$ von \mathbb{A} mit $U_H(A) \in \{H, H^+, H^-\}$ für alle $H \in \mathcal{H}$. Eine nichtleere Zelle in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} mit $U_H(A) \neq H$

für alle $H \in \mathcal{H}$ heißt *Kammer* in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} . Ist $U_H(A) = H$ für genau ein $H \in \mathcal{H}$, so nennen wir A ein *Paneel* in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} . Wir schreiben $\Sigma(W_{aff})$ für die Menge der Zellen in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} .

Auf $\Sigma(W_{aff})$ kann eine partielle Ordnung definiert werden. Sind $A, B \in \Sigma(W_{aff})$, $A = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} U_H(A)$ und $B = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} U_H(B)$, so nennen wir B eine *Seite* von A und schreiben $B \leq A$, wenn $U_H(B) \in \{H, U_H(A)\}$ für alle $H \in \mathcal{H}$ gilt. Der *Abschluss* einer Zelle A in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} ist definiert als $\bar{A} := \{B \in \Sigma(W_{aff}) : B \leq A\}$.

Ist $A = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} U_H(A)$ eine Zelle in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} , so nennen wir den affinen Unterraum $\text{Supp}(A) := \bigcap_{H \in \mathcal{H}: U_H(A)=H} H$ den *Träger* von A . Die Träger der Paneele einer Kammer $C \in \Sigma(W_{aff})$ werden *Wände* von C genannt. Die *Dimension* von A ist definiert als die Dimension von $\text{Supp}(A)$. 0-dimensionale (bzw. 1-dimensionale) Zellen in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} heißen auch *Ecken* in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} (bzw. *Kanten* in \mathbb{A} bezüglich W_{aff}).

Bemerkung 4.2.4. Die nichtleeren Zellen in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} bilden eine Partition von \mathbb{A} . Die Kammern sind nichtleere konvexe Mengen, die das Komplement $\mathbb{A} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ partitionieren. Sie sind die Zusammenhangskomponenten dieses Komplements und die Zellen in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} von maximaler Dimension $m := \dim(\mathbb{A})$. Die Zellen in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} der Dimension $m - 1$ sind genau die Paneele in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} .

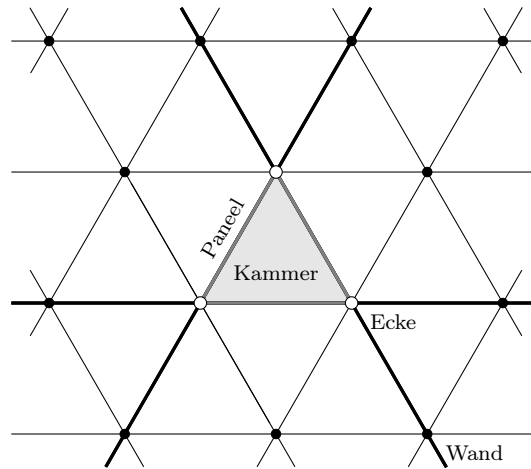


Abbildung 4.1: Der Simplicialkomplex der affinen Weyl-Gruppe eines Wurzelsystems vom Typ A_2 (entspricht SL_3). Es wurde exemplarisch eine Kammer inklusive ihrer Wände, Paneele (=Kanten) und Ecken markiert.

Definition 4.2.5. Sei W_{aff} eine affine Spiegelungsgruppe auf einem euklidisch-affinen Raum \mathbb{A} und \mathcal{H} die zugehörige Menge von Hyperebenen in \mathbb{A} . Ein Punkt $x \in \mathbb{A}$ heißt *speziell* bezüglich W_{aff} , falls es zu jeder Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ eine zu H parallele Hyperebene $H' \in \mathcal{H}$ mit $x \in H'$ gibt.

Proposition 4.2.6 ([Bou02], V, §3, Proposition 10). *Ist W_{aff} eine affine Spiegelungsgruppe auf einem euklidisch-affinen Raum \mathbb{A} , so gibt es einen speziellen Punkt bezüglich W_{aff} .*

Bemerkung 4.2.7. Nach Konstruktion ist jeder bezüglich W_{aff} spezielle Punkt in \mathbb{A} auch schon eine Ecke in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} , siehe auch [Bou02, V, §3.10, Corollary]. Wir sagen daher auch *spezielle Ecke* anstatt spezieller Punkt. Nicht jede Ecke ist speziell, siehe Abbildung 4.2.

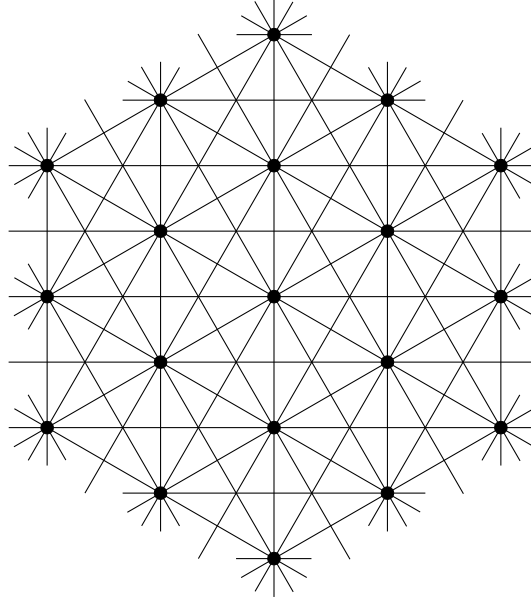


Abbildung 4.2: Der Simplicialkomplex der affinen Weyl-Gruppe eines Wurzelsystems vom Typ G_2 . Alle Schnittpunkte der Geraden sind Ecken, jedoch sind nur die markierten Ecken speziell.

Definition 4.2.8. Sei W_{aff} eine affine Spiegelungsgruppe auf einem euklidisch-affinen Raum \mathbb{A} und \mathcal{H} die zugehörige Menge von Hyperebenen in \mathbb{A} . Weiter sei $\xi \in \mathbb{A}$ ein fester „Null-Punkt“. Ist

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Phi) := \{H_{\alpha,l} : \alpha \in \Phi, l \in \mathbb{Z}\}$$

für ein *reduziertes Wurzelsystem*² $\Phi \subseteq V^*$ mit $H_{\alpha,l} := \{x \in \mathbb{A} : \langle x - \xi, \alpha \rangle = l\}$ für alle $\alpha \in \Phi$ und $l \in \mathbb{Z}$, so nennen wir W_{aff} eine *affine Weyl-Gruppe*³ (von Φ) auf \mathbb{A} .

Proposition 4.2.9. Sei W_{aff} eine affine Weyl-Gruppe auf einem euklidisch-affinen Raum \mathbb{A} und $\Sigma(W_{aff})$ die Menge aller Zellen in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} . Dann sind die Kammern in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} offene Polysimplizes⁴, d.h. Produkte von offenen Simplizes. Insbesondere ist \mathbb{A} , zusammen mit der Menge $\Sigma(W_{aff})$ und der Seitenrelation „ \leq “, ein Polysimplizialkomplex⁴.

Beweis. Siehe [Bou02, VI, §2.1] und [BT72, §1.3.3]. □

²Näheres zu (abstrakten) Wurzelsystemen ist zum Beispiel in [Bou02, VI, §1] zu finden.

³Vergleiche auch [Bou02, VI, §2].

⁴Im Sinne von [BT72, §1.1].

Bemerkung 4.2.10. Jeder Polysimplex ist ein direktes Produkt von Simplizes. Sind die Kammern in obiger Proposition Simplizes, so wird \mathbb{A} , zusammen mit der Menge $\Sigma(W_{aff})$ und der Seitenrelation „ \leq “, Simplicialkomplex genannt. $\Sigma(W_{aff})$ ist dann auch ein Simplicialkomplex im herkömmlichen Sinne.

Definition 4.2.11. Sei W_{aff} eine affine Weyl-Gruppe auf einem euklidisch-affinen Raum \mathbb{A} und $\Sigma(W_{aff})$ die Menge aller Zellen in \mathbb{A} bezüglich W_{aff} . Ein *affines Gebäude* vom Typ W_{aff} ist ein Polysimplizialkomplex \mathcal{B} zusammen mit einer Menge \mathfrak{A} von Unterkomplexen von \mathcal{B} , für die folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) Jeder Polysimplizialkomplex $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ ist isomorph zu \mathbb{A} , zusammen mit der Menge aller Zellen $\Sigma(W_{aff})$ und der Seitenrelation „ \leq “.
- (ii) Für je zwei Polysimplizes $A, B \subseteq \mathcal{B}$ gibt es ein $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$, so dass $A, B \subseteq \mathcal{A}$ gilt. Insbesondere gilt $\mathcal{B} = \bigcup_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}} \mathcal{A}$.
- (iii) Sind $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in \mathfrak{A}$ und $A, B \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ Polysimplizes, so gibt es einen Isomorphismus von Polysimplizialkomplexen $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$, der A und B punktweise fest lässt.

\mathfrak{A} heißt *Apartmentsystem* von \mathcal{B} und die Elemente $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ heißen *Apartments* in \mathcal{B} . Die Gruppe W_{aff} wird auch *affine Weyl-Gruppe des Gebäudes* \mathcal{B} genannt.

Bemerkung 4.2.12. Auf einem affinen Gebäude können verschiedene *Metriken* eingeführt werden. Da jedes Apartment \mathcal{A} eines affinen Gebäudes \mathcal{B} einer Partition eines euklidisch-affinen Raums \mathbb{A} entspricht kann auf \mathcal{B} eine, durch die zugehörige euklidische Metrik induzierte Metrik eingeführt werden. In der Literatur werden affine Gebäude daher auch euklidische Gebäude genannt. Darüber hinaus ist ein affines Gebäude ein Kammerkomplex, der vollständig durch sein zugrunde liegendes Kammersystem bestimmt ist. Auf diesem kann eine kombinatorische Metrik eingeführt werden. Auf beide Begriffe wollen wir hier jedoch nicht weiter eingehen. Näheres dazu siehe zum Beispiel in [AB08, §5, §11].

Wir betrachten eine *kombinatorische Metrik* auf der Eckenmenge des affinen Gebäudes:

Definition 4.2.13. Sei \mathcal{B} ein affines Gebäude, $\mathcal{V}(\mathcal{B})$ die Eckenmenge und $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ die Kantenmenge von \mathcal{B} . Wir nennen zwei verschiedene Ecken $x, y \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$ *benachbart*, falls es eine Kante $\sigma \in \mathcal{E}(\mathcal{B})$ mit $x, y \in \bar{\sigma}$ gibt. Diese Relation definiert einen zusammenhängenden ungerichteten Graphen $\Gamma(\mathcal{B})$. Der *kombinatorische Abstand* $\text{dist}(x, y)$ zwischen zwei Ecken $x, y \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$ ist definiert als

$$\text{dist}(x, y) := \min\{m \in \mathbb{N} : \text{es gibt Ecken } x = x_0, x_1, \dots, x_m = y \text{ in } \mathcal{B}, \text{ so dass } x_i \text{ und } x_{i+1} \text{ benachbart sind für alle } i = 0, \dots, m-1\},$$

falls $x \neq y$, und $\text{dist}(x, y) := 0$, falls $x = y$.

Bemerkung 4.2.14. Der kombinatorische Abstand zweier Ecken eines affinen Gebäudes ist also die Länge des kürzesten Weges, der die Ecken auf dem zugrunde liegenden Graphen verbindet. Es gelten die üblichen Eigenschaften für $x, y, z \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$:

- (a) $\text{dist}(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
- (b) $\text{dist}(x, y) = \text{dist}(y, x)$,
- (c) $\text{dist}(x, y) \leq \text{dist}(x, z) + \text{dist}(z, y)$.

Insbesondere ist $\text{dist} : \mathcal{V}(\mathcal{B}) \times \mathcal{V}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Metrik auf der Eckenmenge des affinen Gebäudes \mathcal{B} .

Lemma 4.2.15. *Sei \mathcal{B} ein affines Gebäude mit Eckenmenge $\mathcal{V}(\mathcal{B})$. Liegen zwei verschiedene Ecken $x, y \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$ in einem Apartment \mathcal{A} von \mathcal{B} , so gilt*

$$\text{dist}(x, y) = \min\{m \in \mathbb{N} : \text{es gibt Ecken } x = x_0, x_1, \dots, x_m = y \text{ in } \mathcal{A}, \text{ so dass } x_i \text{ und } x_{i+1} \text{ benachbart sind für alle } i = 0, \dots, m-1\}.$$

Beweis. Seien $x \neq y \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$ und \mathcal{A} ein Apartment mit $x, y \in \mathcal{A}$. Offensichtlich ist jeder Weg in \mathcal{A} auch ein Weg in \mathcal{B} , d.h.

$$\text{dist}(x, y) \leq \min\{m \in \mathbb{N} : \text{es gibt Ecken } x = x_0, x_1, \dots, x_m = y \text{ in } \mathcal{A}, \text{ so dass } x_i \text{ und } x_{i+1} \text{ benachbart sind für alle } i = 0, \dots, m-1\}.$$

Betrachten wir einen minimalen Weg von x nach y in \mathcal{B} , so ist das Bild unter jeder Retraktion⁵ $\rho : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Weg von x nach y in \mathcal{A} von gleicher oder kleinerer Länge. Die Behauptung folgt. □

4.2.2 Bruhat-Tits-Gebäude

Sei weiterhin $v \in M_k^0$. Im kommenden Abschnitt werden wir eine Zusammenfassung der Konstruktion des Bruhat-Tits-Gebäudes $\mathcal{B}_v = \mathcal{B}(\mathbf{G}, k_v)$ der Gruppe G_v wiedergeben und die für uns wichtigen Punkte hervorheben. Um das affine Gebäude \mathcal{B}_v zu beschreiben, werden wir zunächst ein geeignetes „Modell“ für die Apartments, d.h. einen euklidisch-affinen Raum mit einer affinen Weyl-Gruppe, einführen und anschließend Kopien von diesem geeignet miteinander verkleben. Folgende Konstruktion geht auf François Bruhat und Jacques Tits zurück, siehe [BT72], [BT84]. Eine gute Übersicht findet sich in [Tit79] und [SS97, I, §1]. Wir werden uns im Folgenden weitestgehend an [Lan96, §1, §11-§13] orientieren. Sämtliche in diesem Abschnitt eingeführten Begriffe hängen vom Körper k_v , d.h. von der nicht-archimedischen Bewertung v , ab. Um die Schreibweise zu vereinfachen, werden wir diese Abhängigkeit jedoch in der Notation unterdrücken.

Sei $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{G}$ ein maximaler k_v -spaltender Torus, d.h. \mathbf{T} ist über k_v definiert, $\mathbf{T} \cong \mathbb{G}_m^d$ über k_v für ein $d \in \mathbb{N}$ und \mathbf{T} ist maximal mit dieser Eigenschaft. Man beachte, dass \mathbf{T} im Allgemeinen kein maximaler Torus von \mathbf{G} ist. Enthält \mathbf{G} einen über k_v definierten

⁵Siehe [AB08, Text nach Definition A.12. und Proposition 4.33] für eine Definition für Simplicialkomplexe. Diese kann analog auf Polysimplizialkomplex erweitert werden.

maximalen Torus der über k_v spaltet, so wird \mathbf{G} spaltend über k_v genannt. Wir setzen $T := \mathbf{T}(k_v)$.

Für $\lambda \in \mathbb{X}_*(\mathbf{T})$ und $\chi \in \mathbb{X}^*(\mathbf{T})$ sei $\langle \lambda, \chi \rangle \in \mathbb{Z}$ die ganze Zahl mit $(\chi \circ \lambda)(t) = t^{\langle \lambda, \chi \rangle}$ für alle $t \in \mathbb{G}_m$. Dies definiert eine duale Paarung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{X}_*(\mathbf{T}) \times \mathbb{X}^*(\mathbf{T}) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (\lambda, \chi) \mapsto \langle \lambda, \chi \rangle,$$

siehe [Bor91, Proposition 8.6]. Wir setzen $V := \mathbb{X}_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ und identifizieren über die obige Paarung $\mathbb{X}^*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ mit dem dualen Vektorraum V^* . Die \mathbb{R} -bilineare Fortsetzung der obigen Paarung auf $V \times V^*$ bezeichnen wir ebenfalls mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Weiter sei $\mathbf{N} := N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ der Normalisator von \mathbf{T} in \mathbf{G} und $\mathbf{Z} := Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ der Zentralisator von \mathbf{T} in \mathbf{G} . Die Gruppe \mathbf{N} operiert auf natürliche Weise durch Automorphismen auf $\mathbb{X}^*(\mathbf{T})$ und $\mathbb{X}_*(\mathbf{T})$. Die Wirkung des Normalteilers \mathbf{Z} ist hierbei trivial, d.h. auch die Weyl-Gruppe von \mathbf{G} bezüglich k_v

$$W := \mathbf{N}/\mathbf{Z} \cong N/Z,$$

mit $N := \mathbf{N}(k_v)$ und $Z := \mathbf{Z}(k_v)$, operiert auf $\mathbb{X}^*(\mathbf{T})$ bzw. $\mathbb{X}_*(\mathbf{T})$. Insbesondere werden durch \mathbb{R} -lineare Fortsetzung treue Wirkungen durch Automorphismen von W auf V^* und V induziert. Wir identifizieren W auf diese Weise mit einer Untergruppe von $\mathrm{GL}(V^*)$ bzw. $\mathrm{GL}(V)$.

Mit $\Phi := \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{G})$ bezeichnen wir die Menge der k_v -Wurzeln⁶ von \mathbf{G} bezüglich \mathbf{T} , d.h.

$$\Phi = \{\alpha \in \mathbb{X}^*(\mathbf{T}) \setminus \{0\} : \mathfrak{g}_{\alpha} \neq \{0\}\},$$

wobei $\mathfrak{g}_{\alpha} := \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{Ad}(t)(X) = \alpha(t)X \text{ für alle } t \in \mathbf{T}\}$. Offensichtlich definiert jede k_v -Wurzel α eine Linearform auf V und somit einen Untervektorraum $H_{\alpha} := \{x \in V : \langle x, \alpha \rangle = 0\}$ von Kodimension 1. Die lineare orthogonale Spiegelung $s_{H_{\alpha}} \in \mathrm{GL}(V)$ auf V an H_{α} bezeichnen wir mit s_{α} . Es gilt:

Proposition 4.2.16. (a) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein unter W invariantes Skalarprodukt auf V^* .

Dann ist Φ ein (abstaktes) Wurzelsystem in V^* , dessen Weyl-Gruppe gleich W ist. Insbesondere gibt es für jedes $\alpha \in \Phi$ eine (eindeutige) k_v -Kowurzel $\check{\alpha} \in V$ mit $\langle \check{\alpha}, \alpha \rangle = 2$ und $W \subseteq \mathrm{GL}(V^*)$ wird von den Spiegelungen $r_{\alpha} \in \mathrm{GL}(V^*)$, $\alpha \in \Phi$, mit $r_{\alpha}(x) := x - \langle \check{\alpha}, x \rangle \alpha$ für alle $x \in V^*$, erzeugt.

(b) Sei $\check{\Phi} := \check{\Phi}(\mathbf{T}, \mathbf{G}) = \{\check{\alpha} : \alpha \in \Phi\} \subseteq V$ die Menge der k_v -Kowurzeln von \mathbf{G} bezüglich \mathbf{T} und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein unter W invariantes Skalarprodukt auf V . Dann ist $\check{\Phi}$ ein (abstaktes) Wurzelsystem in V , dessen Weyl-Gruppe gleich W ist. Insbesondere wird $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$ von den Spiegelungen s_{α} , $\alpha \in \Phi$, erzeugt und es gilt $s_{\alpha}(x) = x - \langle x, \alpha \rangle \check{\alpha}$ für alle $x \in V$.

Beweis. Siehe [Bor91, Theorem 21.2 und Theorem 21.6] und [Bou02, V, §2 und VI, §1]. \square

⁶Siehe auch [Bor91, §21.1].

Im Folgenden fixieren wir ein W invariantes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V .

Da $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{Z}$, kann jeder Charakter von \mathbf{Z} durch Einschränkung auch als Charakter von \mathbf{T} betrachtet werden. Genauer kann $\mathbb{X}^*(\mathbf{Z})$ als Untergruppe von endlichem Index in $\mathbb{X}^*(\mathbf{T})$ aufgefasst werden und es gilt $V^* = \mathbb{X}^*(\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Darüber hinaus gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\nu_0 : Z \rightarrow V$, so dass

$$\langle \nu_0(z), \chi \rangle = -\text{ord}_v(\chi(z))$$

für alle $z \in Z$ und alle $\chi \in \mathbb{X}^*(\mathbf{Z})$ ist, siehe [Lan96, Lemma 1.1].

Beispiel 4.2.17 (SL_n , Teil 1). Sei $\mathbf{G} = \text{SL}_n$ und \mathbf{T} der Torus der Diagonalmatrizen in \mathbf{G} , Notation siehe §3.2.1. Dann ist $\mathbf{T} = \mathbf{Z}$ und

$$\nu_0 : T \rightarrow V, t \mapsto -\sum_{i=1}^{n-1} \text{ord}_v(\chi_{i,i+1}(t))\lambda_i = -\sum_{i=1}^{n-1} (\text{ord}_v(x_i) - \text{ord}_v(x_{i+1}))\lambda_i = \sum_{i=1}^n \text{ord}_v(x_i)\varepsilon_i,$$

falls $t = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$.

Proposition 4.2.18. *Es gilt:*

- (a) *Der Kern $Z_c := \text{Ker}(\nu_0)$ ist die (eindeutige) maximale kompakte Untergruppe von Z .*
- (b) *$T_c := T \cap \text{Ker}(\nu_0) = \{t \in T : \text{ord}_v(\chi(t)) = 0 \text{ für alle } \chi \in \mathbb{X}^*(\mathbf{T})\}$ ist die (eindeutige) maximale kompakte Untergruppe von T .*
- (c) *Das Bild $\nu_0(Z) \cong Z/Z_c$ ist eine freie abelsche Gruppe vom Rang $\dim_{\mathbb{R}}(V)$.*
- (d) *$\nu_0(T) \cong T/T_c$ ist eine Untergruppe von endlichem Index in $\nu_0(Z)$.*

Beweis. Für (a) und (c) siehe [Lan96, Proposition 1.2 und Lemma 1.3]. Da $\mathbb{X}^*(\mathbf{Z})$ eine Untergruppe von endlichem Index in $\mathbb{X}^*(\mathbf{T})$ ist, gilt $T_c = \{t \in T : \text{ord}_v(\chi(t)) = 0 \text{ für alle } \chi \in \mathbb{X}^*(\mathbf{T})\}$ und mit (a) folgt (b). Der Beweis von (d) läuft ähnlich zu [PR94, S. 155 oben]: Da $T \cong (k_v^*)^d \cong \mathbb{Z}^d \times (\mathcal{O}_v^*)^d$ für $d := \dim_{\mathbb{R}}(V)$ ist und $(\mathcal{O}_v^*)^d$ die eindeutige maximale kompakte Untergruppe von k_v^d darstellt, folgt $T_c \cong (\mathcal{O}_v^*)^d$. Weiter ist dann $\nu_0(T) \cong T/T_c \cong \mathbb{Z}^d$ und mit (c) folgt die Behauptung. \square

Mit \mathcal{A} bzw. $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{T}, k_v)$ bezeichnen wir den affinen Raum über V , der aus V durch Vergessen des „Null-Punkts“ entsteht und erhalten einen Gruppenhomomorphismus

$$\nu : Z \rightarrow \text{Aff}(\mathcal{A}), z \mapsto [\tau_{\nu_0(z)} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, x \mapsto x + \nu_0(z)]. \quad (*)$$

Proposition 4.2.19 ([Lan96], Proposition 1.8). *Es gibt einen, bis auf einen eindeutigen Isomorphismus von $\text{Aff}(\mathcal{A}) = \text{GL}(V) \ltimes V$ eindeutigen, Gruppenhomomorphismus*

$$\nu : N \rightarrow \text{Aff}(\mathcal{A}),$$

der $\nu : Z \rightarrow \text{Aff}(\mathcal{A})$ aus (*) fortsetzt. Für diesen gilt $\text{pr}_1(\nu(m)) = \text{pr}(m) \in W$ für alle $m \in N$, wobei $\text{pr}_1 : \text{Aff}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{GL}(V)$, $(\varphi, x) \mapsto \varphi$ die Projektion auf die erste Komponente und $\text{pr} : N \rightarrow N/Z = W$ die kanonische Projektion bezeichnet. Insbesondere ist $\overline{\nu(N)} = W$.

Beispiel 4.2.20 (SL_n , Teil 2). Sei $\mathbf{G} = SL_n$ und \mathbf{T} wie in Beispiel 4.2.17. Dann ist $\mathbf{N} = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ die Gruppe der Monomialmatrizen in \mathbf{G} und jedes $m \in N$ kann eindeutig als Produkt einer Matrix $\text{diag}(1, \dots, 1, \text{sgn}(\sigma))P_\sigma$ für ein $\sigma \in S_n$ mit einer Diagonalmatrix $d(m)$ in \mathbf{G} geschrieben werden. Hierbei bezeichnet $P_\sigma \in GL_n$ die Permutationsmatrix zu $\sigma \in S_n$ und der Rest der Notation ist in §3.2.1 zu finden. Weiter gilt

$$\nu : N \rightarrow \text{Aff}(\mathcal{A}), m \mapsto (w_\sigma, \nu_0(d(m))).$$

Wir wollen nun eine geeignete Untergruppe von $\nu(N)$ als affine Weyl-Gruppe auf \mathcal{A} realisieren. Hierfür betrachten wir für jedes $\alpha \in \Phi$ die *Wurzelgruppe* U_α , d.h. U_α ist die eindeutig bestimmte über k_v definierte abgeschlossene zusammenhängende unipotente Untergruppe von \mathbf{G} , die von \mathbf{Z} normalisiert wird und Lie-Algebra $\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{2\alpha}$ hat, wobei $\mathfrak{g}_{2\alpha} = \{0\}$, falls $2\alpha \notin \Phi$ ist, siehe [Bor91, Proposition 21.9].

Sei $\alpha \in \Phi$ und $U_\alpha := U_\alpha(k_v)$. Für alle $u \in U_\alpha$ besteht der Schnitt $N \cap U_{-\alpha}uU_{-\alpha}$ aus genau einem Element $m(u) \in N$, siehe [BT65, §5] oder [Lan96, Lemma 0.19]. Ist e das neutrale Element in G_v und $e \neq u \in U_\alpha$, so ist $\text{pr}(m(u)) = s_\alpha$. Genauer ist $\nu(m(u))$ eine affine orthogonale Spiegelung mit $\text{pr}_1(\nu(m(u))) = s_\alpha$, siehe [Lan96, Lemma 10.25 und Proposition 10.28] und Proposition 4.2.19.

Wir wählen nun einen „Null-Punkt“ $\xi \in \mathcal{A}$, so dass wir \mathcal{A} mit V identifizieren können. Hierfür fixieren wir eine Basis $\Delta \subseteq \Phi$. Den Punkt $\xi \in \mathcal{A}$ wählen wir dann derart, dass für alle $\alpha \in \Delta$ ein Element $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$ existiert, so dass $\nu(m(u))(\xi) = \xi$ gilt.

Proposition 4.2.21. *Sei $\alpha \in \Phi$ und $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$. Dann gilt:*

(a) *Es gibt ein $\varphi_\alpha(u) \in \mathbb{R}$, so dass $\nu(m(u))(x) = s_\alpha(x - \xi) - \varphi_\alpha(u)\check{\alpha} + \xi$ für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt. Insbesondere ist $\nu(m(u))$ die affine orthogonale Spiegelung an der Hyperebene*

$$H_{\alpha,u} := \{x \in \mathcal{A} : \langle x - \xi, \alpha \rangle = -\varphi_\alpha(u)\}.$$

Wir setzen $\varphi_\alpha : U_\alpha \setminus \{e\} \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto \varphi_\alpha(u)$.

(b) *Für $r \in \mathbb{R}$ ist*

$$U_{\alpha,r} := \{u \in U_\alpha \setminus \{e\} : \varphi_\alpha(u) \geq r\} \cup \{e\}$$

eine kompakte, offene Untergruppe von U_α und es gilt

$$\varphi_\alpha(u) = \sup\{r \in \mathbb{R} : u \in U_{\alpha,r}\}.$$

(c) *Sei $\Gamma_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ das Bild von φ_α . Die Teilmenge*

$$\Gamma'_\alpha := \{\varphi_\alpha(u) : u \in U_\alpha \setminus \{e\} \text{ und } \varphi_\alpha(u) = \sup\{\varphi_\alpha(x) : x \in uU_{2\alpha} \setminus \{e\}\}\}$$

mit $U_{2\alpha} := \{e\}$, falls $2\alpha \notin \Phi$, stellt eine diskrete Teilmenge von \mathbb{R} dar. Ist $\alpha \in \Phi$ mit $2\alpha \notin \Phi$, so gilt $0 \in \Gamma_\alpha = \Gamma'_\alpha$.

Beweis. Siehe [Lan96, Corollary 11.6] für (a), [Lan96, 10.19, Lemma 10.20, Proposition 11.5 und Proposition 12.11] für (b) und [Lan96, 4.8, Proposition 4.19 und Proposition 10.24] für (c). □

Beispiel 4.2.22 (SL_n , Teil 3). Sei $\Phi = \{\chi_{ij} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$ die Menge der Wurzeln von $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_n$ bezüglich \mathbf{T} wie in §3.2.1. Die zu einer Wurzel $\chi_{ij} \in \Phi$ korrespondierenden Objekte werden wir durch den Index ij kennzeichnen. Sei also \mathbf{U}_{ij} die zu χ_{ij} gehörende Wurzelgruppe. Dann gilt $U_{ij} = \mathbf{U}_{ij}(k_v) = \{u_{ij}(a) : a \in k_v\}$ mit $u_{ij}(a) = ((u_{ij}(a))_{st}) \in \mathrm{Mat}_n(k_v)$ und

$$(u_{ij}(a))_{st} := \begin{cases} 1, & \text{falls } s = t, \\ a, & \text{falls } s = i \text{ und } t = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter gilt $N \cap U_{ji}u_{ij}(a)U_{ji} = \{m_{ij}(a)\}$ für alle $a \in k_v$ mit $m_{ij}(0) := E_n$ und für $a \neq 0$

$$(m_{ij}(a))_{st} := \begin{cases} 1, & \text{falls } s = t, s \neq i, s \neq j, \\ a, & \text{falls } s = i \text{ und } t = j, \\ -a^{-1}, & \text{falls } s = j \text{ und } t = i, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für alle $x \in \mathcal{A}$ erhalten wir

$$\nu(m_{ij}(a))(x) = w_{(ij)}(x - \xi) - \mathrm{ord}_v(a)\check{\chi}_{ij} + \xi = s_{ij; -\mathrm{ord}_v(a)}(x),$$

d.h. $\nu(m_{ij}(a))$ ist die Spiegelung an der Hyperebene $H_{ij; -\mathrm{ord}_v(a)}$ und

$$\varphi_{ij} : U_{ij} \setminus \{e\} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad u_{ij}(a) \mapsto \mathrm{ord}_v(a).$$

Folglich ist $\Gamma_{ij} = \Gamma'_{ij} = \mathbb{Z}$ und für $r \in \mathbb{R}$

$$U_{ij,r} = \{u_{ij}(a) : \mathrm{ord}_v(a) \geq r\} \cup \{E_n\}.$$

Definition 4.2.23. Eine affine Funktion $\theta : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ für die es ein $\alpha \in \Phi$ und ein $l \in \Gamma'_\alpha$ gibt mit $\theta(x) = \langle x - \xi, \alpha \rangle + l$ für alle $x \in \mathcal{A}$, wird *affine Wurzel* von \mathcal{A} genannt. Die Menge aller affinen Wurzeln von \mathcal{A} bezeichnen wir mit Φ_{aff} .

Definition 4.2.24. Für eine affine Wurzel $\theta \in \Phi_{aff}$ sei $H_\theta := \{x \in \mathcal{A} : \theta(x) = 0\}$ die Verschwindungshyperebene. Wir setzen $\mathcal{H} := \{H_\theta : \theta \in \Phi_{aff}\}$ und bezeichnen mit W_{aff} die Untergruppe von $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$, die von den affinen orthogonalen Spiegelungen s_H an H mit $H \in \mathcal{H}$ erzeugt wird, d.h.

$$W_{aff} := \langle s_H : H \in \mathcal{H} \rangle.$$

Beispiel 4.2.25 (SL_n , Teil 4). Mit Beispiel 4.2.22 sehen wir sofort, dass für $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_n$ die hier eingeführten affinen Wurzeln genau denen aus §3.2.1 entsprechen. Insbesondere ist W_{aff} die affine Weyl-Gruppe von Φ auf \mathcal{A} .

Bemerkung 4.2.26. Φ_{aff} , \mathcal{H} und W_{aff} sind unabhängig von der Wahl des „Nullpunkts“ $\xi \in \mathcal{A}$. Ist Φ reduziert, d.h. $2\alpha \notin \Phi$ für alle $\alpha \in \Phi$, so gilt:

$$\begin{aligned}\Phi_{aff} &= \{\langle \cdot - \xi, \alpha \rangle + \varphi_\alpha(u) : \alpha \in \Phi, u \in U_\alpha \setminus \{e\}\}, \\ \mathcal{H} &= \{H_{\alpha,u} : \alpha \in \Phi, u \in U_\alpha \setminus \{e\}\}, \\ W_{aff} &= \langle \nu(m(u)) : \alpha \in \Phi, u \in U_\alpha \setminus \{e\} \rangle.\end{aligned}$$

Proposition 4.2.27. *Es gilt:*

- (a) W_{aff} ist eine Normalteiler von endlichem Index in $\nu(N)$.
- (b) $w(H) \in \mathcal{H}$ für alle $w \in \nu(N)$ und alle $H \in \mathcal{H}$.
- (c) W_{aff} ist die affine Weyl-Gruppe eines eindeutigen reduzierten Wurzelsystems Ψ auf \mathcal{A} , so dass $\mathcal{H} = \{H_{\alpha,l} : \alpha \in \Psi, l \in \mathbb{Z}\}$ mit $H_{\alpha,l} := \{x \in \mathcal{A} : \langle x - \xi, \alpha \rangle = l\}$ für alle $\alpha \in \Psi$ und $l \in \mathbb{Z}$ gilt. Insbesondere ist \mathcal{A} zusammen mit der Menge der Zellen $\Sigma(W_{aff})$ in \mathcal{A} bezüglich W_{aff} und der Seitenrelation „ \leq “ ein Polysimplizialkomplex, siehe Proposition 4.2.9.

Beweis. Siehe [Lan96, Proposition 11.8] für (a) und (b). (c) wird in [Tit79, §1.7] erwähnt, wir werden dies hier etwas genauer erläutern:

Nach [Rou77, Lemme 2.1.9] gibt es eine endliche Untergruppe N_0 von N , so dass $\text{pr}(N_0) = W$ und $\nu(N) = \nu(N_0) \rtimes \nu(Z)$ gilt. Die Gruppe $\nu(Z) \cong \nu_0(Z)$ ist eine freie abelsche Gruppe vom Rang $\dim(\mathcal{A})$, siehe Proposition 4.2.18(c), d.h. insbesondere eine diskrete Untergruppe von $\nu(N)$ und operiert daher eigentlich auf \mathcal{A} , siehe [Bou98, III, §4.4]. Da $\nu(N_0)$ endlich ist, operiert auch $\nu(N) = \nu(N_0) \rtimes \nu(Z)$ und damit auch die Untergruppe W_{aff} eigentlich auf \mathcal{A} . Nach Proposition 4.2.21(c) ist $0 \in \Gamma'_\alpha$ für alle $\alpha \in \Phi$ mit $2\alpha \notin \Phi$. Folglich gibt es für jede Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ eine parallele Hyperebene $H' \in \mathcal{H}$, die ξ enthält und ξ ist ein spezieller Punkt bezüglich W_{aff} . Wegen (b) liegen mit jeder Hyperebene $H \in \mathcal{H}$ auch die Hyperebenen $H + \nu_0(z)$ für alle $z \in Z$ in \mathcal{H} , insbesondere gibt es in jeder Richtung $\check{\alpha}$ für $\alpha \in \Phi$ Verschiebungen in W_{aff} und die Untergruppe der Verschiebungen in W_{aff} hat Rang $\dim(\mathcal{A})$. Mit (b) sind somit alle Voraussetzungen von [Bou02, VI, §2, Proposition 8] erfüllt und die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 4.2.28. Jedes Element des Wurzelsystems Ψ aus Proposition 4.2.27 ist proportional zu einem Element in Φ und es gilt $\overline{W_{aff}} = W$, siehe [BT72, §1.4.1]. Spaltet die Gruppe \mathbf{G} über k_v , so ist Φ reduziert und es gilt sogar $\Phi = \Psi$, siehe auch [Tit79, §1.1]. Dennoch ist Ψ im Allgemeinen nicht proportional zu Φ , siehe [Tit79, §1.7] (auch nicht, wenn Φ reduziert ist).

Den Polysimplizialkomplex \mathcal{A} wählen wir als Prototyp der Apartments des Bruhat-Tits-Gebäudes. Um das gesamte Gebäude für G_v zu definieren, werden wir Kopien von diesem geeignet miteinander verkleben. Hierfür betrachten wir die folgenden Untergruppen von G_v :

Sei $x \in \mathcal{A}$. Wir setzen

$$U_x := \langle U_{\alpha, -\langle x - \xi, \alpha \rangle} : \alpha \in \Phi \rangle \subseteq G_v.$$

Man beachte, dass U_x unabhängig von der Wahl des „Null-Punkts“ $\xi \in \mathcal{A}$ ist.

Definition 4.2.29. Wir definieren die folgende Relation „ \sim “ auf $G_v \times \mathcal{A}$. Seien $(g, x), (h, y) \in G_v \times \mathcal{A}$. Dann ist $(g, x) \sim (h, y)$, wenn es ein $m \in N$ gibt, so dass $\nu(m)(x) = y$ und $g^{-1}hm \in U_x$ gilt.

Proposition 4.2.30 ([Lan96], Lemma 13.1). *Die Relation „ \sim “ ist eine Äquivalenzrelation auf $G_v \times \mathcal{A}$.*

Definition 4.2.31. Wir schreiben $\mathcal{B}_v := \mathcal{B}(\mathbf{G}, k_v) := G_v \times \mathcal{A} / \sim$ für die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich „ \sim “. Die Äquivalenzklasse von $(g, x) \in G_v \times \mathcal{A}$ wird mit $\overline{(g, x)}$ bezeichnet.

Proposition 4.2.32 ([Lan96], Lemma 13.2). *Sei e das neutrale Element in G_v . Es gilt:*

(a) G_v operiert auf \mathcal{B}_v via

$$G_v \times \mathcal{B}_v \rightarrow \mathcal{B}_v, (g, \overline{(h, y)}) \mapsto \overline{g(h, y)} := \overline{(gh, y)}.$$

(b) Die Abbildung

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_v, x \mapsto \overline{(e, x)}$$

ist injektiv.

Bemerkung 4.2.33. Wir identifizieren \mathcal{A} über obige Abbildung als Teilmenge von \mathcal{B}_v und schreiben auch gx für die Äquivalenzklasse von $(g, x) \in G_v \times \mathcal{A}$ in \mathcal{B}_v . Es gilt $mx = \nu(m)(x)$ für alle $m \in N$ und $x \in \mathcal{A}$, d.h. die Wirkung von G_v auf \mathcal{A} setzt die Wirkung von N auf \mathcal{A} fort, siehe Proposition 4.2.19.

Proposition 4.2.34 ([Lan96], Proposition 13.6 und Corollary 13.8). *Es gilt:*

(a) Für alle $g \in G_v$ gibt es ein $m \in N$ mit $gx = mx$ für alle $x \in \mathcal{A} \cap g^{-1}\mathcal{A}$.

(b) N ist der Stabilisator von \mathcal{A} in G_v , d.h. $N = \{g \in G_v : g\mathcal{A} = \mathcal{A}\}$.

(c) $\text{Ker}(\nu) = \{g \in G_v : gx = x \text{ für alle } x \in \mathcal{A}\}$.

Wir übertragen die Zellstruktur des Polysimplizialkomplexes \mathcal{A} durch die G_v -Wirkung auf ganz \mathcal{B}_v :

Definition 4.2.35. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathcal{B}_v$ heißt *Zelle/Kammer/Paneel/Kante/Ecke* in \mathcal{B}_v , wenn es ein $g \in G_v$ gibt, so dass $gA \subseteq \mathcal{A}$ Zelle/Kammer/Paneel/Kante/Ecke bezüglich W_{aff} ist. Wir schreiben $\Sigma(\mathcal{B}_v)$ für die Menge der Zellen in \mathcal{B}_v und $\mathcal{V}(\mathcal{B}_v)$ für die Menge der Ecken in \mathcal{B}_v .

Sind $A, B \in \Sigma(\mathcal{B}_v)$, so ist B eine *Seite* von A , bzw. $B \leq A$, wenn es ein $g \in G_v$ gibt mit $gA, gB \subseteq \mathcal{A}$, so dass gA und gB Zellen in \mathcal{A} bezüglich W_{aff} sind und gB eine Seite von gA ist.

Ist $A \in \Sigma(\mathcal{B}_v)$ und $A \subseteq g\mathcal{A}$ für ein $g \in G_v$, so nennen wir A auch eine *Zelle* in $g\mathcal{A}$. Ist A *Kammer/Paneel/Kante/Ecke* in \mathcal{B}_v , so sagen wir auch *Kammer/Paneel/Kante/Ecke* in $g\mathcal{A}$. Die Menge der Zellen in $g\mathcal{A}$ notieren wir mit $\Sigma(g\mathcal{A})$. Die Einschränkung der Seitenrelation „ \leq “ auf $\Sigma(g\mathcal{A})$ bezeichnen wir ebenfalls mit „ \leq “.

Bemerkung 4.2.36. Nach Proposition 4.2.34(a) und Proposition 4.2.27(b) sind obige Begriffe wohldefiniert. Ebenso folgt $\Sigma(\mathcal{A}) = \Sigma(W_{aff})$ und die Seitenrelationen aus obiger Definition und Definition 4.2.3 stimmen überein.

Proposition 4.2.37 ([Lan96], Proposition 13.10). *Sei $A \in \Sigma(\mathcal{B}_v)$ eine Zelle in \mathcal{B}_v und $g \in G_v$ mit $A \cap g\mathcal{A} \neq \emptyset$. Dann gibt es eine Zelle $A' \in \Sigma(W_{aff})$ in \mathcal{A} mit $A = gA'$. Insbesondere ist $A \in \Sigma(g\mathcal{A})$ und $\Sigma(\mathcal{B}_v) = \bigcup_{g \in G_v} \Sigma(g\mathcal{A})$.*

Proposition 4.2.38. *Sei $\mathcal{B}_v = \mathcal{B}(\mathbf{G}, k_v)$. Es gilt:*

- (a) *Für alle $g \in G_v$ ist $g\mathcal{A}$ zusammen mit $\Sigma(g\mathcal{A})$ und der obigen Seitenrelation ein Polysimplizialkomplex, der isomorph zu \mathcal{A} zusammen mit $\Sigma(W_{aff})$ und der Seitenrelation aus Definition 4.2.3 ist.*
- (b) *Für $A, B \in \Sigma(\mathcal{B}_v)$ gibt es ein $g \in G_v$ mit $A, B \in \Sigma(g\mathcal{A})$.*
- (c) *Sind $g, g' \in G_v$ und $A, B \in \Sigma(g\mathcal{A}) \cap \Sigma(g'\mathcal{A})$, so gibt es einen Isomorphismus von Polysimplizialkomplexen $\varphi : g\mathcal{A} \rightarrow g'\mathcal{A}$, der A und B punktweise fest lässt.*

Insbesondere ist \mathcal{B}_v zusammen mit $\Sigma(\mathcal{B}_v)$ und der obigen Seitenrelation ein affines Gebäude mit Weyl-Gruppe W_{aff} und Apartmentsystem $\mathfrak{A} := \{g\mathcal{A} : g \in G_v\}$. Das Apartment $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{T}, k_v)$ heißt Standardapartment in \mathcal{B}_v (bezüglich \mathbf{T}). Wir nennen \mathcal{B}_v das Bruhat-Tits-Gebäude von G_v .

Beweis. Für $g \in G_v$ folgt (a) direkt aus den Definitionen von $\Sigma(g\mathcal{A})$ und der Seitenrelation. (b) folgt aus [Lan96, Proposition 13.12 (i)]. Zu (c): Seien $g, g' \in G_v$ und $A, B \in \Sigma(g\mathcal{A}) \cap \Sigma(g'\mathcal{A})$. Dann ist $g^{-1}A, g^{-1}B \subseteq \mathcal{A} \cap h\mathcal{A}$ mit $h := g^{-1}g'$. Nach Proposition 4.2.34(a) gibt es somit ein $m \in N$ mit $h^{-1}x = mx$ für alle $x \in g^{-1}A$ bzw. $x \in g^{-1}B$. Die Abbildung $\varphi : g\mathcal{A} \rightarrow g'\mathcal{A}$, $x \mapsto ghmg^{-1}x = g'mg^{-1}x$ liefert den gesuchten Isomorphismus. \square

Beispiel 4.2.39 (SL_n , Teil 5). Sei $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ das Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathrm{SL}_n(k_v)$ aus §3.2.2. Mit \mathcal{B}_v bezeichnen wir das in diesem Abschnitt eingeführte Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathrm{SL}_n(k_v)$. Beide Begriffe sind äquivalent, wie der folgende wohldefinierte $\mathrm{SL}_n(k_v)$ -invariante Isomorphismus von Simplicialkomplexen zeigt:

Sei $B := \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq k_v^n$ die Standardbasis und

$$\mathcal{A}_v^B = \left\{ \left\{ \mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1} e_1, \dots, \pi_v^{a_n} e_n) \right\} : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \right\}$$

das zu B gehörende Apartment in $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$. Wir betrachten den Isomorphismus φ_v^B aus dem Beweis von Proposition 3.2.7

$$\varphi_v^B : \mathcal{A}_v^B \rightarrow \Sigma(W_{aff})$$

mit

$$\varphi_v^B(\{L\}) = \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \lambda_i + \xi$$

für jede Ecke $\{L\} = \{\text{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1} e_1, \dots, \pi_v^{a_n} e_n)\}$ in \mathcal{A}_v^B und

$$\varphi_v^B(\{\{L_0\}, \dots, \{L_d\}\}) = \left\{ \left(\sum_{i=0}^d c_i (\varphi_v^B(\{L_i\}) - \xi) \right) + \xi : c_i \in \mathbb{R}_{>0} \text{ und } \sum_{i=0}^d c_i = 1 \right\}$$

für jeden d -Simplex $\{\{L_0\}, \dots, \{L_d\}\}$ in \mathcal{A}_v^B .

Ist $\sigma = \{\{L_0\}, \dots, \{L_d\}\}$ nun ein beliebiger d -Simplex in $\mathcal{B}_{\text{SL}_n(k_v)}$, so liegt σ in einem Apartment $\mathcal{A}_v^{B'}$ für eine Basis $B' = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq k_v^n$. Wir setzen $M(\sigma) := M(\det(v_1, \dots, v_n)^{-1} v_1, \dots, v_n) \in \text{SL}_n(k_v)$. Dann gilt

$$M(\sigma)^{-1} \sigma = \{M(\sigma)^{-1} \{L_0\}, \dots, M(\sigma)^{-1} \{L_d\}\} \in \mathcal{A}_v^B$$

und der gesuchte Isomorphismus ist wie folgt definiert:

$$\varphi : \mathcal{B}_{\text{SL}_n(k_v)} \rightarrow \Sigma(\mathcal{B}_v), \sigma \mapsto \left\{ \overline{(M(\sigma), x)} : x \in \varphi_v^B(M(\sigma)^{-1} \sigma) \right\}.$$

Bemerkung 4.2.40. Für die Konstruktion des Bruhat-Tits-Gebäudes von G_v haben wir einen maximalen k_v -spaltenden Torus \mathbf{T} , ein W -invariantes Skalarprodukt auf V und eine Fortsetzung $\nu : N \rightarrow \text{Aff}(\mathcal{A})$ von $\nu : Z \rightarrow \text{Aff}(\mathcal{A})$ aus (*) gewählt. Im Wesentlichen ist die Konstruktion jedoch unabhängig von dieser Wahl, denn ist \mathcal{B}'_v ein weiteres Bruhat-Tits-Gebäude von G_v , so gibt es einen G_v -invarianten Isomorphismus von Polysimplizialkomplexen $\mathcal{B}_v \rightarrow \mathcal{B}'_v$, der den kombinatorischen Abstand fest lässt, siehe [Lan96, Proposition 13.18]. Insbesondere gibt es eine Bijektion zwischen dem Apartmentsystem \mathfrak{A} des Bruhat-Tits-Gebäudes von G_v und der Menge

$$\{\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{S}, k_v) : \mathbf{S} \subseteq \mathbf{G} \text{ maximaler } k_v\text{-spaltender Torus}\},$$

siehe [Tit79, §2.1].

Das Standardapartment $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{T}, k_v)$ kann dabei fast immer wie folgt beschrieben werden:

Lemma 4.2.41 ([Tit79], §3.6.1). *Sei $\mathcal{B}_v = \mathcal{B}(\mathbf{G}, k_v)$ und $q_v = |\mathfrak{o}_v/\mathfrak{m}_v| \geq 4$. Dann gilt $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{B}_v : tx = x \text{ für alle } t \in T_c\}$.*

Bemerkung 4.2.42. Da die G_v -Wirkung auf \mathcal{B}_v per Definition die Zellstruktur erhält, werden insbesondere Ecken auf Ecken und Kanten auf Kanten abgebildet. Folglich bleibt auch der kombinatorische Abstand $\text{dist}(x, y)$ zweier Ecken $x, y \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_v)$ erhalten, d.h.

$$\text{dist}(x, y) = \text{dist}(gx, gy)$$

für alle $g \in G_v$.

Definition 4.2.43. Ein Punkt $x \in \mathcal{B}_v$ heißt *speziell*, falls es ein $g \in G_v$ gibt, so dass $gx \in \mathcal{A}$ liegt und gx speziell bezüglich W_{aff} ist, siehe Definition 4.2.5. Ist $x \in \mathcal{B}_v$ speziell und gilt $x \in g\mathcal{A}$ für eine $g \in G_v$, so wird x auch *speziell* in $g\mathcal{A}$ genannt.

Bemerkung 4.2.44. Nach Proposition 4.2.34(a) und Proposition 4.2.27(b) ist obiger Begriff wohldefiniert. Ferner ist jeder spezielle Punkt in \mathcal{B}_v eine Ecke in \mathcal{B}_v , vergleiche Bemerkung 4.2.7. Wir sagen daher auch *spezielle Ecke* anstatt spezieller Punkt.

Bemerkung 4.2.45. Nach Proposition 4.2.6 besitzt \mathcal{B}_v spezielle Ecken. Ist $x \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_v)$ eine spezielle Ecke, so ist $\text{Stab}_{G_v}(x)$ eine maximale kompakte Untergruppe von G_v , siehe [Tit79, §3.2].

Zum Ende dieses Abschnitts wollen wir nun noch eine weitere „besondere“ Art von Ecken des Gebäudes \mathcal{B}_v hervorheben. Hierfür betrachten wir eine endliche Galois-Erweiterung $k'_v|k_v$ mit Galois-Gruppe $\Gamma := \text{Gal}(k'_v|k_v)$ und einen maximalen k'_v -spaltenden Torus \mathbf{T}' in \mathbf{G} , der über k_v definiert ist und \mathbf{T} enthält. Weiter sei $\mathcal{A}' := \mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{T}', k'_v)$ das Standardapartment bezüglich \mathbf{T}' des Bruhat-Tits-Gebäudes $\mathcal{B}'_v := \mathcal{B}(\mathbf{G}, k'_v)$ und W'_{aff} die zugehörige affine Weyl-Gruppe. Dann operiert die Galois-Gruppe Γ auf \mathcal{A}' und \mathcal{A} kann mit der Fixpunktmenge in \mathcal{A}' unter dieser Wirkung identifiziert werden, siehe [Tit79, §1.10].

Definition 4.2.46. Ein Punkt $x \in \mathcal{B}_v$ heißt *hyperspeziell*, falls es ein $g \in G_v$ mit $gx \in \mathcal{A}$, eine endliche unverzweigte Galois-Erweiterung $k'_v|k_v$ und einen über k'_v spaltenden maximalen Torus \mathbf{T}' in \mathbf{G} mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (i) \mathbf{T}' ist über k_v definiert,
- (ii) \mathbf{T}' enthält \mathbf{T} ,
- (iii) gx ist speziell in $\mathcal{A}' = \mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{T}', k'_v)$ bezüglich W'_{aff} .

Bemerkung 4.2.47. Hyperspezielle Punkte in \mathcal{B}_v sind speziell, siehe [Tit79, §1.10.2], und somit insbesondere Ecken in \mathcal{B}_v . Wir sagen daher auch *hyperspezielle Ecke* in \mathcal{B}_v . Spaltet die Gruppe \mathbf{G} über k_v , so sind alle speziellen Ecken auch hyperspeziell.

Proposition 4.2.48 ([Tit79], §3.9.1). *Für fast alle $v \in M_k^0$ gibt es eine hyperspezielle Ecke $a \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_v)$ mit $\mathbf{G}(\mathfrak{o}_v) = \text{Stab}_{G_v}(a)$.*

4.2.3 Die nicht-archimedischen lokalen Höhen

In diesem Abschnitt werden wir nun einen Zusammenhang zwischen der nicht-archimedischen v -adischen lokalen Höhenfunktion H_v auf G_v und der v -adischen lokalen Höhenfunktion $H_{\text{SL}_n(k_v)}$ für $n = \dim_{k_v}(\mathfrak{g}_v)$ herstellen.

Sei $\mathcal{B}_v = \mathcal{B}(\mathbf{G}, k_v)$ das Bruhat-Tits-Gebäude von G_v , $\xi_v \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_v)$ eine spezielle Ecke und $K_v := \text{Stab}_{G_v}(\xi_v)$. Die maximale kompakte Untergruppe K_v erlaubt eine Zerlegung der Gruppe G_v in Doppelnebenklassen, die Cartan-Zerlegung von G_v bezüglich K_v , die eine gute Kontrolle des kombinatorischen Abstands $\text{dist}_v(x, y)$ zweier Ecken $x, y \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_v)$ ermöglicht. Diese Zerlegung werden wir im Folgenden beschreiben.

Da wir in diesem Abschnitt zwischen verschiedenen nicht-archimedischen Bewertungen unterscheiden wollen, werden wir zunächst noch einmal einige Notationen in Abhängigkeit von v fixieren, siehe auch §4.2.2.

Sei also $v \in M_k^0$ beliebig. Wir wählen einen maximalen k_v -spaltenden Torus \mathbf{T}_v von \mathbf{G} , so dass $\xi_v \in \mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{T}_v, k_v)$ gilt, siehe Bemerkung 4.2.40, und betrachten $\mathcal{A}_v := \mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{T}_v, k_v)$ als das Standardapartment von \mathcal{B}_v . Weiter sei $\mathbf{N}_v := N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_v)$ der Normalisator von \mathbf{T}_v in \mathbf{G} und $\mathbf{Z}_v := Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_v)$ der Zentralisator von \mathbf{T}_v in \mathbf{G} . Für die Mengen der k_v -rationalen Punkte schreiben wir $T_v := \mathbf{T}_v(k_v)$, $N_v := \mathbf{N}_v(k_v)$ und $Z_v := \mathbf{Z}_v(k_v)$. Die Weyl-Gruppe von \mathbf{G} bezüglich k_v bezeichnen wir mit W_v .

Weiter sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Fortsetzung der dualen Paarung von $\mathbb{X}_*(\mathbf{T}_v) \times \mathbb{X}^*(\mathbf{T}_v)$ auf $V_v \times V_v^*$ für $V_v := \mathbb{X}_*(\mathbf{T}_v) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ und $V_v^* := \mathbb{X}^*(\mathbf{T}_v) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Mit $\nu_{v,0} : Z_v \rightarrow V_v$ bezeichnen wir den eindeutigen Gruppenhomomorphismus mit

$$\langle \nu_{v,0}(z), \chi \rangle = -\text{ord}_v(\chi(z))$$

für alle $z \in Z_v$ und alle $\chi \in \mathbb{X}^*(\mathbf{Z}_v)$ und

$$\nu_v : N_v \rightarrow \text{Aff}(\mathcal{A}_v)$$

sei eine Fortsetzung von

$$Z_v \rightarrow \text{Aff}(\mathcal{A}_v), z \mapsto [\tau_{\nu_{v,0}(z)} : \mathcal{A}_v \rightarrow \mathcal{A}_v, x \mapsto x + \nu_{v,0}(z)].$$

Sei $\Phi_v := \Phi(\mathbf{T}_v, \mathbf{G}) \subseteq V_v^*$ die Menge der k_v -Wurzeln von \mathbf{G} bezüglich \mathbf{T}_v . Für die in Definition 4.2.23 eingeführte affine Wurzelmenge von \mathcal{A}_v schreiben wir Φ_{aff}^v , für die dadurch definierte affine Hyperebenenmenge \mathcal{H}_v und für die zugehörige affine Spiegelungsgruppe W_{aff}^v .

Um \mathcal{A}_v mit V_v identifizieren zu können, setzen wir ξ_v als „Null-Punkt“ von \mathcal{A}_v .

Wir werden nun einige Objekte bezüglich Φ_v einführen, die für das Verständnis der Zellstruktur auf \mathcal{A}_v und die Formulierung der Cartan-Zerlegung von Bedeutung sind, siehe auch [Bou02, VI, §1].

Wir fixieren eine *Basis* $\Delta_{\Phi_v} := \{\alpha_{v,1}, \dots, \alpha_{v,n_v}\}$ von Φ_v mit $n_v := \dim_{\mathbb{R}}(V_v) = \dim_{\mathbb{R}}(V_v^*)$ und schreiben Φ_v^+ (bzw. Φ_v^-) für die Menge der *positiven* (bzw. *negativen*) Wurzeln von Φ_v bezüglich Δ_{Φ_v} . Ist Φ_v irreduzibel, so bezeichne $\tilde{\alpha}_v$ die *höchste Wurzel* von Φ_v bezüglich Δ_{Φ_v} . Ist $\Phi_v = \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_r$ reduzibel, so ist $\Delta_{\Phi_v} = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_r$, wobei Δ_i eine Basis der i -ten irreduziblen Komponente Φ_i ist. Mit $\tilde{\alpha}_v$ bezeichnen wir in diesem Fall die Summe über die höchsten Wurzeln von Φ_i bezüglich Δ_i . Man beachte, dass $\tilde{\alpha}_v$ dann keine Wurzel mehr ist. In beiden Fällen gibt es eindeutige $m_{v,i} \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit $\text{widetilde}\alpha_v = \sum_{i=1}^{n_v} m_{v,i} \alpha_{v,i}$.

Mit $\Psi_v \subseteq V_v^*$ bezeichnen wir das eindeutige *reduzierte Wurzelsystem* aus Proposition 4.2.27 mit affiner Weyl-Gruppe W_{aff}^v . Da jedes Element in Ψ_v proportional zu einem Element in Φ_v ist, gibt es eine eindeutige *Basis* $\Delta_{\Psi_v} := \{\beta_{v,1}, \dots, \beta_{v,n_v}\}$ von Ψ_v und

eindeutige $c_{v,i} \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\alpha_{v,i} = c_{v,i}\beta_{v,i}$ für alle $1 \leq i \leq n_v$, siehe [Bou02, VI, §1.5, Theorem 2].

Sei $\{\mu_{v,1}, \dots, \mu_{v,n_v}\}$ die zu Δ_{Φ_v} und $\{\lambda_{v,1}, \dots, \lambda_{v,n_v}\}$ die zu Δ_{Ψ_v} bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *duale Basis* in V_v , d.h. $\langle \mu_{v,i}, \alpha_{v,j} \rangle = \langle \lambda_{v,i}, \beta_{v,j} \rangle = \delta_{ij}$, wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta bezeichnet. Das *Kogewichtsgitter* von Ψ_v bezüglich Δ_{Ψ_v} nennen wir $P_v := \text{Span}_{\mathbb{Z}}(\lambda_{v,1}, \dots, \lambda_{v,n_v})$.

Mit $P_v^+ := \text{Span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}(\lambda_{v,1}, \dots, \lambda_{v,n_v})$ bezeichnen wir das Monoid der *dominanten Kogewichte* von Ψ_v bezüglich Δ_{Ψ_v} . Es gilt $P_v^+ = P_v \cap \overline{S_v}$ für den durch Δ_{Φ_v} bzw. Δ_{Ψ_v} definierten Sektor S_v (= *Weyl-Kammer*) in V_v

$$\begin{aligned} S_v &:= \{x \in V_v : \langle x, \alpha_{v,i} \rangle > 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n_v\} \\ &= \{x \in V_v : \langle x, \beta_{v,i} \rangle > 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n_v\}. \end{aligned}$$

Nach [Bou02, VI, §2, Proposition 3] ist $P_v + \xi_v$ gleich der Menge der speziellen Ecken in \mathcal{A}_v bezüglich W_{aff}^v . Da $w(H) \in \mathcal{H}_v$ für alle $H \in \mathcal{H}_v$ und alle $w \in \nu_v(N_v)$ gilt, siehe Proposition 4.2.27, ist insbesondere $H + \nu_{v,0}(z) \in \mathcal{H}_v$ für alle $H \in \mathcal{H}_v$ und alle $z \in Z_v$. Da ξ_v speziell ist, ist folglich auch $\xi_v + \nu_{v,0}(z)$ für alle $z \in Z_v$ speziell in \mathcal{A}_v bezüglich W_{aff}^v , d.h. $\nu_{v,0}(Z_v) \subseteq P_v$.

Wir setzen nun $Y_v := \nu_{v,0}(Z_v)$, $Y_v^+ := Y_v \cap P_v^+$ und $Z_v^+ := \nu_{v,0}^{-1}(Y_v^+)$. Analog gilt für T_v , $X_v := \nu_{v,0}(T_v)$, $X_v^+ := X_v \cap P_v^+$ und $T_v^+ := \nu_{v,0}^{-1}(X_v^+) \cap T_v = Z_v^+ \cap T_v$. Man beachte, dass Y_v^+ und X_v^+ Monoide sind und $\text{Ker}(\nu_{v,0}) \subseteq Z_v^+$ gilt.

Folgende Darstellung wird als *Cartan-Zerlegung* von G_v bezüglich K_v bezeichnet:

Proposition 4.2.49 (Cartan-Zerlegung, [Tit79], §3.3.3). *Es gilt*

$$G_v = K_v Z_v^+ K_v,$$

wobei die Abbildung

$$K_v \backslash G_v / K_v \rightarrow Y_v^+, K_v z^+ K_v \mapsto \nu_{v,0}(z^+)$$

mit $z^+ \in Z_v^+$ eine wohldefinierte Bijektion ist.

Beispiel 4.2.50 (SL_n , Teil 6). Sei $\mathbf{G} = \text{SL}_n$. Weiter sei, wie in Beispiel 4.2.17, \mathbf{T} der Torus der Diagonalmatrizen in \mathbf{G} und \mathbf{Z} sein Zentralisator in \mathbf{G} . Dann ist $Z_v = \mathbf{Z}(k_v) = \mathbf{T}(k_v) = T_v$,

$$\nu_{v,0} : T_v \rightarrow V_v, \text{diag}(x_1, \dots, x_n) \mapsto - \sum_{i=1}^{n-1} (\text{ord}_v(x_i) - \text{ord}_v(x_{i+1})) \lambda_{v,i}$$

und wir erhalten

$$T_v^+ = \left\{ \text{diag}(x_1, \dots, x_n) : x_i \in k_v, \text{ord}_v(x_1) \leq \dots \leq \text{ord}_v(x_n), \prod_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

Setzen wir

$$\widehat{T}_v^+ := \left\{ \text{diag}(\pi_v^{a_1}, \dots, \pi_v^{a_n}) : a_i \in \mathbb{Z}, a_1 \leq \dots \leq a_n \text{ und } \sum_{i=1}^n a_i = 0 \right\},$$

so gibt es für jede Matrix $A_v \in G_v$ genau ein $t_v^+ \in \widehat{T}_v^+$, so dass $A = x_v t_v^+ x'_v$ für geeignete $x_v, x'_v \in K_v$ gilt (Elementarteilersatz).

Proposition 4.2.49 lässt sich verfeinern zu:

Korollar 4.2.51. *Es gilt*

$$G_v = K_v E_v^+ T_v^+ K_v$$

für eine endliche Teilmenge $E_v^+ \subseteq Z_v^+$.

Beweis. Vergleiche auch [PR94, S. 155 Mitte]. Nach Proposition 4.2.18 ist Y_v eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe vom Rang n_v , außerdem ist $i_v := [Y_v : X_v]$ endlich. Daraus ergeben sich mehrere Sachverhalte. Zum einen ist nach Gordans Lemma, siehe [Ful93, §1.2, Proposition 1], $Y_v^+ = Y_v \cap P_v^+ = Y_v \cap \overline{S}_v$ ein endlich erzeugtes Monoid, zum anderen ist $i_v Y_v \subseteq X_v$ und daher

$$i_v Y_v^+ = i_v(Y_v \cap P_v^+) \subseteq i_v Y_v \cap P_v^+ \subseteq X_v \cap P_v^+ = X_v^+ \subseteq Y_v^+.$$

Folglich gibt es eine endliche Menge $F_v^+ \subseteq Y_v^+ = \nu_{v,0}(Z_v^+)$ mit

$$Y_v^+ = F_v^+ + i_v Y_v^+ = F_v^+ + X_v^+.$$

Ist $E_v^+ \subseteq Z_v^+$ eine endliche Menge mit $\nu_{v,0}(E_v^+) = F_v^+$, so ist

$$\nu_{v,0}(E_v^+ T_v^+) = \nu_{v,0}(E_v^+) + \nu_{v,0}(T_v^+) = F_v^+ + X_v^+ = Y_v^+ = \nu_{v,0}(Z_v^+)$$

und daher

$$Z_v^+ = \text{Ker}(\nu_{v,0}) E_v^+ T_v^+.$$

Da $z \xi_v = \xi_v + \nu_{v,0}(z)$ für alle $z \in Z_v$ gilt, ist $\text{Ker}(\nu_{v,0}) \subseteq \text{Stab}_{G_v}(\xi_v) = K_v$ und die Behauptung folgt aus Proposition 4.2.49. □

Die Cartan-Zerlegung hilft nun den Abstand $\text{dist}_v(\xi_v, g_v \xi_v)$ für ein Element $g_v \in G_v$ zu bestimmen. Nach obiger Aussage gibt es für jedes $g_v \in G_v$ ein $z_v^+ \in Z_v^+$ mit $\nu_{v,0}(z_v^+) \in P_v^+$ und

$$\text{dist}_v(\xi_v, g_v \xi_v) = \text{dist}_v(\xi_v, z_v^+ \xi_v) = \text{dist}_v(\xi_v, \nu_{v,0}(z_v^+) + \xi_v).$$

Diese Abstände können nach Lemma 4.2.15 direkt im Apartment \mathcal{A}_v bestimmt und gut kontrolliert werden, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 4.2.52. *Sei $\lambda \in P_v^+$. Dann gilt*

$$\text{dist}_v(\xi_v, \lambda + \xi_v) \geq \sum_{i=1}^{n_v} \langle \lambda, \beta_{v,i} \rangle.$$

Sind alle Ecken in \mathcal{A}_v speziell, so gilt sogar $\text{dist}_v(\xi_v, \lambda + \xi_v) = \sum_{i=1}^{n_v} \langle \lambda, \beta_{v,i} \rangle$.

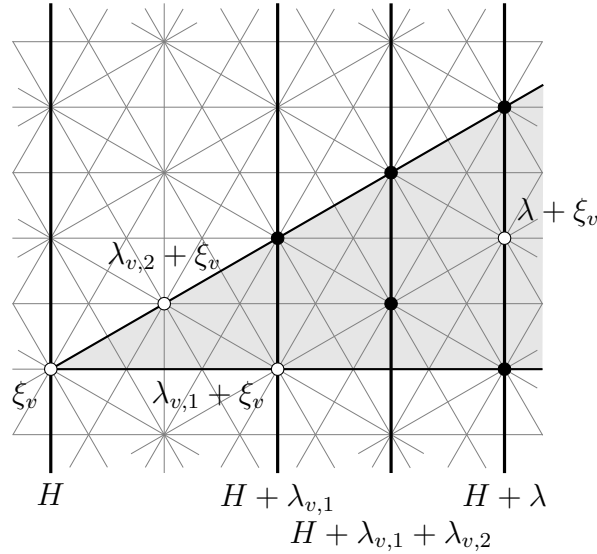


Abbildung 4.3: Der Simplicialkomplex der affinen Weyl-Gruppe eines Wurzelsystems vom Typ G_2 . Die Hyperebenen $H + \lambda_{v,1}$, $H + \lambda_{v,1} + \lambda_{v,2}$ und $H + \lambda$ kreuzen jeden Weg von ξ_v nach $\lambda + \xi_v$.

Beweis. Sei $\lambda \in P_v^+$. Ist Ψ_v reduzibel, d.h. ein direktes Produkt irreduzibler Wurzelsysteme, so kann jeder Weg von ξ_v nach $\lambda + \xi_v$ durch einen gleichlangen Weg ersetzt werden, der nacheinander die jeweiligen irreduziblen Komponenten abläuft. Wir nehmen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass das Wurzelsystem Ψ_v irreduzibel ist. Da die Aussage für $n_v = 1$ offensichtlich ist, sei darüber hinaus $n_v > 1$.

Die simpliciale Struktur auf \mathcal{A}_v ist durch Schnitte der Hyperebenen $H \in \mathcal{H}_v$ bestimmt. Jede Hyperebene in \mathcal{H}_v , die zwischen ξ_v und $\lambda + \xi_v$ verläuft, kreuzt jeden Weg von ξ_v nach $\lambda + \xi_v$, d.h. sie enthält mindestens eine Ecke des Weges. Insbesondere lässt sich die Länge des kürzesten Weges zwischen den Ecken ξ_v und $\lambda + \xi_v$ durch die Anzahl paralleler Hyperebenen in \mathcal{H}_v , die die Punkte voneinander trennen, abschätzen.

Sei H eine Hyperebene, die ξ_v jedoch keine (weitere) Seite des polyedrischen Kegels $\overline{S_v + \xi_v}$, d.h. kein $\lambda_{v,i}$ für $1 \leq i \leq n_v$, enthält. Eine derartige Ebene existiert, da Ψ_v irreduzibel und $n_v > 1$ ist. Da $\lambda \in P_v^+$ ist, ist $\langle \lambda, \beta_{v,i} \rangle \geq 0$ für alle $1 \leq i \leq n_v$ und die folgenden Hyperebenen liegen zwischen ξ_v und $\lambda + \xi_v$:

$$H^{ij} := H + \sum_{l=1}^{i-1} \langle \lambda, \beta_{v,l} \rangle \lambda_{v,l} + j \lambda_{v,i},$$

wobei $1 \leq i \leq n_v$ und $0 \leq j \leq \langle \lambda, \beta_{v,i} \rangle$ gilt. Dies sind $(\sum_{i=1}^{n_v} \langle \lambda, \beta_{v,i} \rangle + 1)$ -viele parallele Hyperebenen. Da $H^{1,0} = H$ und $H^{n_v, \langle \lambda, \beta_{v,n_v} \rangle} = H + \lambda$ ist, muss jeder Weg von ξ_v nach $\lambda + \xi_v$ mindestens die Länge $\sum_{i=1}^{n_v} \langle \lambda, \beta_{v,i} \rangle$ haben und es folgt $\text{dist}_v(\xi_v, \lambda + \xi_v) \geq \sum_{i=1}^{n_v} \langle \lambda, \beta_{v,i} \rangle$.

Sind alle Ecken in \mathcal{A}_v speziell, so gibt es keine Hyperebene, die echt zwischen ξ_v und $\lambda_{v,i} + \xi_v$ liegt. Folglich bilden die Ecken $\{\lambda^{ij} : 1 \leq i \leq n_v \text{ und } 0 \leq j \leq \langle \lambda, \beta_{v,i} \rangle\}$ mit

$\lambda^{ij} := \xi_v + \sum_{l=1}^{i-1} \langle \lambda, \beta_{v,l} \rangle \lambda_{v,l} + j \lambda_{v,i}$ einen Weg von ξ_v nach $\lambda + \xi_v$ und die Behauptung folgt. \square

Bevor wir nun zur Hauptaussage dieses Abschnitts übergehen, benötigen wir noch folgende Aussagen:

Lemma 4.2.53. *Es gilt für alle $t \in T_v$*

$$\nu_{v,0}(t) = - \sum_{i=1}^{n_v} \text{ord}_v(\alpha_{v,i}(t)) \mu_{v,i}.$$

Darüber hinaus ist $|\alpha(t^+)|_v \geq 1$ für alle $t^+ \in T_v^+$ und alle $\alpha \in \Phi_v^+$.

Beweis. Sei $t \in T_v$. Dann ist für alle $\chi \in \mathbb{X}^*(\mathbf{T}_v)$

$$\left\langle - \sum_{i=1}^{n_v} \text{ord}_v(\alpha_{v,i}(t)) \mu_{v,i}, \chi \right\rangle = - \text{ord}_v \left(\prod_{i=1}^{n_v} \alpha_{v,i}(t)^{\langle \mu_{v,i}, \chi \rangle} \right) = - \text{ord}_v(\chi(t)).$$

Da $\mathbb{X}^*(\mathbf{Z}_v)$ als Untergruppe von endlichem Index in $\mathbb{X}^*(\mathbf{T}_v)$ aufgefasst werden kann, gilt insbesondere

$$\left\langle - \sum_{i=1}^{n_v} \text{ord}_v(\alpha_{v,i}(t)) \mu_{v,i}, \chi \right\rangle = - \text{ord}_v(\chi(t)) = \langle \nu_{v,0}(t), \chi \rangle.$$

für alle $\chi \in \mathbb{X}^*(\mathbf{Z}_v)$ und der erste Teil der Behauptung folgt.

Sei nun $t^+ \in T_v^+$. Dann ist $\nu_{v,0}(t^+) \in \overline{S}_v$, d.h. $-\text{ord}_v(\alpha_{v,i}(t^+)) = \langle \nu_{v,0}(t^+), \alpha_{v,i} \rangle \geq 0$ für alle $1 \leq i \leq n_v$. Es folgt $|\alpha_{v,i}(t^+)|_v \geq 1$ für alle $1 \leq i \leq n_v$ und somit auch die zweite Behauptung. \square

Korollar 4.2.54. *Es gilt für alle $t^+ \in T_v^+$*

$$\max\{|\alpha(t^+)|_v : \alpha \in \Phi_v\} = \max\{|\alpha(t^+)^{-1}|_v : \alpha \in \Phi_v\} \leq |\tilde{\alpha}_v(t^+)|_v.$$

Ist Φ_v irreduzibel, so gilt sogar Gleichheit.

Beweis. Da $\Phi_v = -\Phi_v$ gilt, ist die erste Gleichung offensichtlich. Sei $t^+ \in T_v^+$, $\alpha \in \Phi_v^+$ und $r_i \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha = \sum_{i=1}^{n_v} r_i \alpha_{v,i}$. Dann gilt $0 \leq r_i \leq m_{v,i}$ und mit Lemma 4.2.53

$$|\alpha(t^+)|_v^{-1} \leq |\alpha(t^+)|_v = \prod_{i=1}^{n_v} |\alpha_{v,i}(t^+)|_v^{r_i} \leq \prod_{i=1}^{n_v} |\alpha_{v,i}(t^+)|_v^{m_{v,i}} = |\tilde{\alpha}_v(t^+)|_v.$$

Da $-\Phi_v^+ = \Phi_v^-$ und $\Phi_v = \Phi_v^+ \cup \Phi_v^-$ folgt die Behauptung. Ist Φ_v irreduzibel, so ist $\tilde{\alpha}_v \in \Phi_v$ und wir erhalten Gleichheit. \square

Da \mathbf{T}_v ein maximaler k_v -spaltender Torus ist, gilt

$$\mathfrak{g}_v = (\mathfrak{g}_v)_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_v} (\mathfrak{g}_v)_\alpha,$$

wobei $(\mathfrak{g}_v)_0 := \{X \in \mathfrak{g}_v : \text{Ad}_v(t)(X) = X \text{ für alle } t \in T_v\}$ und $(\mathfrak{g}_v)_\alpha := \{X \in \mathfrak{g}_v : \text{Ad}_v(t)(X) = \alpha(t)X \text{ für alle } t \in T_v\}$ für alle $\alpha \in \Phi_v$ ist, vergleiche [PR94, §2.1.14].

Wir wählen eine k_v -Basis \mathfrak{B}_0 von $(\mathfrak{g}_v)_0$ und für jedes $\alpha \in \Phi_v$ eine k_v -Basis \mathfrak{B}_α von $(\mathfrak{g}_v)_\alpha$. Dann ist $\mathfrak{B}_v := \mathfrak{B}_0 \cup \bigcup_{\alpha \in \Phi_v} \mathfrak{B}_\alpha$ eine k_v -Basis von \mathfrak{g}_v und es gibt einen Isomorphismus $\iota_v : \text{SL}(\mathfrak{g}_v) \rightarrow \text{SL}_n(k_v)$.

Satz 4.2.55. *Sei $v \in M_k^0$ eine nicht-archimedische Bewertung und $\text{Ad}_v : G_v \rightarrow \text{SL}(\mathfrak{g}_v)$ die adjungierte Darstellung von G_v . Weiter sei \mathfrak{B}_v eine wie oben gewählte Basis von \mathfrak{g}_v und $\iota_v : \text{SL}(\mathfrak{g}_v) \rightarrow \text{SL}_n(k_v)$ der durch diese Basiswahl induzierte Isomorphismus. Mit $H_{\text{SL}_n(k_v)} : \text{SL}_n(k_v) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ bezeichnen wir die v -adische lokale Höhenfunktion auf $\text{SL}_n(k_v)$ aus §3.2. Wir setzen*

$$\gamma_v := \frac{1}{2c_v m_v}$$

mit $c_v := \max\{c_{v,i} : 1 \leq i \leq n_v\}$ und $m_v := \max\{m_{v,i} : 1 \leq i \leq n_v\}$. Dann gibt es ein $\eta_v \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$H_v(g_v) = q_v^{\text{dist}_v(K_v, g_v K_v)} \geq \eta_v H_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\text{Ad}_v(g_v)))^{\gamma_v}$$

für alle $g_v \in G_v$ gilt.

Beweis. Sei $g_v \in G_v$. Nach Korollar 4.2.51 gibt es eine endliche Menge $E_v^+ \subseteq Z_v^+$, so dass $G_v = K_v E_v^+ T_v^+ K_v$ gilt. Folglich können wir $x_v, x'_v \in K_v$, $z_v^+ \in E_v^+$ und $t_v^+ \in T_v^+$ mit $g_v = x_v z_v^+ t_v^+ x'_v$ wählen.

Sei $\|\cdot\|_{v,\infty}$ die Matrixnorm bezüglich Maximumsnorm auf k_v^n . Da K_v eine kompakte Untergruppe von G_v ist, ist auch $\iota_v(\text{Ad}_v(K_v)) \subseteq \text{SL}_n(k_v)$ kompakt und es gibt ein, von g_v unabhängiges, $a_v \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\|\iota_v(\text{Ad}_v(x))\|_{v,\infty}, \|\iota_v(\text{Ad}_v(x^{-1}))\|_{v,\infty} \leq a_v$$

für alle $x \in K_v$. Da E_v^+ endlich ist, können wir darüber hinaus annehmen, dass

$$\|\iota_v(\text{Ad}_v(z^+))\|_{v,\infty}, \|\iota_v(\text{Ad}_v((z^+)^{-1}))\|_{v,\infty} \leq a_v$$

für alle $z^+ \in E_v^+$ gilt. Mit Proposition 3.2.16 folgt somit

$$\begin{aligned} H_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\text{Ad}_v(g_v))) &= \|\iota_v(\text{Ad}_v(g_v))\|_{v,\infty} \|\iota_v(\text{Ad}_v(g_v^{-1}))\|_{v,\infty} \\ &= \|\iota_v(\text{Ad}_v(x_v z_v^+ t_v^+ x'_v))\|_{v,\infty} \|\iota_v(\text{Ad}_v((x'_v)^{-1} (t_v^+)^{-1} (z_v^+)^{-1} x_v^{-1}))\|_{v,\infty} \\ &\leq a_v^6 \|\iota_v(\text{Ad}_v(t_v^+))\|_{v,\infty} \|\iota_v(\text{Ad}_v((t_v^+)^{-1}))\|_{v,\infty} \\ &= a_v^6 H_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\text{Ad}_v(t_v^+))). \end{aligned} \quad (\dagger)$$

Durch die oben gewählte Basis entspricht $\iota_v(\text{Ad}_v(t_v^+))$ einer Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\alpha(t_v^+)$, $\alpha \in \Phi_v$, und $\dim_{k_v}((\mathfrak{g}_v)_0)$ vielen Einsen. Da die Summe über alle Wurzeln gleich 0 ist, erhalten wir $\|\iota_v(\text{Ad}_v(t_v^+))\|_{v,\infty} = \max\{|\alpha(t_v^+)|_v : \alpha \in \Phi_v\}$ und $\|\iota_v(\text{Ad}_v((t_v^+)^{-1}))\|_{v,\infty} = \max\{|\alpha(t_v^+)^{-1}|_v : \alpha \in \Phi_v\}$. Es folgt mit Korollar 4.2.54, $m_v = \max\{m_{v,i} : 1 \leq i \leq n_v\}$ und Lemma 4.2.53

$$\begin{aligned} H_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\text{Ad}_v(t_v^+))) &\leq |\tilde{\alpha}_v(t_v^+)|_v^2 = \prod_{i=1}^{n_v} |\alpha_{v,i}(t_v^+)|_v^{2m_{v,i}} \\ &\leq \prod_{i=1}^{n_v} |\alpha_{v,i}(t_v^+)|_v^{2m_v} = q_v^{-2m_v \sum_{i=1}^{n_v} \text{ord}_v(\alpha_{v,i}(t_v^+))}. \end{aligned} \quad (\dagger)$$

Weiter gilt nach Lemma 4.2.53 mit $\alpha_{v,i} = c_{v,i}\beta_{v,i}$ und $c_v = \max\{c_{v,i} : 1 \leq i \leq n_v\}$

$$-\sum_{i=1}^{n_v} \text{ord}_v(\alpha_{v,i}(t_v^+)) = \sum_{i=1}^{n_v} \langle \nu_{v,0}(t_v^+), \alpha_{v,i} \rangle = \sum_{i=1}^{n_v} \langle \nu_{v,0}(t_v^+), c_{v,i}\beta_{v,i} \rangle \leq c_v \sum_{i=1}^{n_v} \langle \nu_{v,0}(t_v^+), \beta_{v,i} \rangle.$$

Mit Lemma 4.2.52, (\dagger) , (\ddagger) und $t_v^+\xi_v = \nu_{v,0}(t_v^+) + \xi_v$ erhalten wir

$$H_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\text{Ad}_v(g_v))) \leq a_v^6 q_v^{2m_v c_v \text{dist}_v(\xi_v, t_v^+\xi_v)}. \quad (\S)$$

Bleibt also nur noch der Abstand $\text{dist}_v(\xi_v, t_v^+\xi_v)$ abzuschätzen. Mit der G_v -Invarianz der kombinatorischen Metrik, der Dreiecksungleichung, $d_v := \max\{\text{dist}_v(z_v^+\xi_v, \xi_v) : z_v^+ \in E_v^+\}$ und $K_v = \text{Stab}_{G_v}(\xi_v)$ gilt

$$\begin{aligned} \text{dist}_v(\xi_v, t_v^+\xi_v) &= \text{dist}_v(z_v^+\xi_v, z_v^+t_v^+\xi_v) \leq \text{dist}_v(z_v^+\xi_v, \xi_v) + \text{dist}_v(\xi_v, z_v^+t_v^+\xi_v) \\ &\leq d_v + \text{dist}_v(x_v^{-1}\xi_v, z_v^+t_v^+x_v'\xi_v) = d_v + \text{dist}_v(\xi_v, x_v z_v^+ t_v^+ x_v' \xi_v) \\ &= d_v + \text{dist}_v(\xi_v, g_v \xi_v). \end{aligned}$$

Schließlich folgt mit (\S) und der Identifizierung $K_v = \xi_v$

$$H_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\text{Ad}_v(g_v))) \leq a_v^6 q_v^{2m_v c_v (d_v + \text{dist}_v(\xi_v, g_v \xi_v))} = a_v^6 q_v^{2m_v c_v d_v} H_v(g_v)^{2m_v c_v}$$

und daher

$$H_v(g_v) \geq \eta_v H_{\text{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\text{Ad}_v(g_v)))^{\frac{1}{2m_v c_v}}$$

für ein geeignetes $\eta_v \in \mathbb{R}_{>0}$. □

Die nicht-archimedischen lokalen Höhenfunktionen H_v hängen von der Wahl der maximalen kompakten Untergruppen K_v von G_v , genauer der speziellen Ecken ξ_v des Bruhat-Tits-Gebäudes \mathcal{B}_v mit $K_v = \text{Stab}_{G_v}(\xi_v)$ ab. Diese Abhängigkeit wollen wir nun untersuchen. Es gilt:

Proposition 4.2.56. *Sei $v \in M_k^0$ und seien $\xi_{v,1}$ und $\xi_{v,2}$ zwei spezielle Ecken des Bruhat-Tits-Gebäudes $\mathcal{B}_v = \mathcal{B}(\mathbf{G}, k_v)$. Seien weiter $H_{v,1}$ bzw. $H_{v,2}$ die zu $K_{v,1} := \text{Stab}_{G_v}(\xi_{v,1})$ bzw. $K_{v,2} := \text{Stab}_{G_v}(\xi_{v,2})$ gehörenden v -adischen lokalen Höhenfunktionen auf G_v . Dann gibt es eine Konstante $\mathfrak{c}_v \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass*

$$\mathfrak{c}_v^{-1} \leq \frac{H_{v,1}(g_v)}{H_{v,2}(g_v)} \leq \mathfrak{c}_v$$

für alle $g_v \in G_v$ gilt. Ist $K_{v,1} = K_{v,2}$, so gilt $H_{v,1}(g_v) = H_{v,2}(g_v)$ für alle $g_v \in G_v$.

Beweis. Sei $g_v \in G_v$. Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung und der G_v -Invarianz der kombinatorischen Metrik

$$\begin{aligned} \text{dist}_v(\xi_{v,1}, g_v \xi_{v,1}) &\leq \text{dist}_v(\xi_{v,1}, \xi_{v,2}) + \text{dist}_v(\xi_{v,2}, g_v \xi_{v,2}) + \text{dist}_v(g_v \xi_{v,2}, g_v \xi_{v,1}) \\ &= 2 \text{dist}_v(\xi_{v,1}, \xi_{v,2}) + \text{dist}_v(\xi_{v,2}, g_v \xi_{v,2}) \end{aligned}$$

und daher mit den Identifizierungen $K_{v,1} = \xi_{v,1}$ und $K_{v,2} = \xi_{v,2}$

$$H_{v,1}(g_v) \leq \mathbf{c}_v H_{v,2}(g_v),$$

wobei $\mathbf{c}_v := q_v^{2 \text{dist}_v(\xi_{v,1}, \xi_{v,2})}$ ist. Analog gilt

$$H_{v,2}(g_v) \leq \mathbf{c}_v H_{v,1}(g_v)$$

und somit

$$\mathbf{c}_v^{-1} \leq \frac{H_{v,1}(g_v)}{H_{v,2}(g_v)} \leq \mathbf{c}_v.$$

Sei nun $K_v := K_{v,1} = K_{v,2}$ und \mathbf{T}_v ein maximaler k_v -spaltender Torus von \mathbf{G} mit $\xi_{v,1}, \xi_{v,2} \in \mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{T}_v, k_v)$. So ein Torus existiert nach Proposition 4.2.38(b) und wir betrachten alle in diesem Abschnitt eingeführten Bezeichnungen bezüglich \mathbf{T}_v .

Sei $g_v = x_v z_v^+ x'_v$ mit $x_v, x'_v \in K_v$ und $z_v^+ \in Z_v^+$ eine Cartan-Zerlegung von g_v bezüglich K_v . Dann gilt wegen der G_v -Invarianz der kombinatorischen Metrik

$$\text{dist}_v(\xi_{v,1}, g_v \xi_{v,1}) = \text{dist}_v(\xi_{v,1}, z_v^+ \xi_{v,1}) = \text{dist}_v(\xi_{v,1}, \nu_{v,0}(z_v^+) + \xi_{v,1})$$

und

$$\text{dist}_v(\xi_{v,2}, g_v \xi_{v,2}) = \text{dist}_v(\xi_{v,2}, z_v^+ \xi_{v,2}) = \text{dist}_v(\xi_{v,2}, \nu_{v,0}(z_v^+) + \xi_{v,2}).$$

Da $\xi_{v,1}$ und $\xi_{v,2}$ spezielle Punkte des Apartments $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{T}_v, k_v)$ sind, gibt es ein $\lambda \in P_v$ mit $\xi_{v,1} = \xi_{v,2} + \lambda$ und es folgt

$$\text{dist}_v(\xi_{v,1}, g_v \xi_{v,1}) = \text{dist}_v(\xi_{v,2} + \lambda, \nu_{v,0}(z_v^+) + \xi_{v,2} + \lambda) = \text{dist}_v(\xi_{v,2} + \lambda, g_v \xi_{v,2} + \lambda).$$

Da $\mathcal{H}_v = \mathcal{H}_v + \lambda$ gilt, ändert eine Verschiebung um λ den kombinatorischen Abstand nicht und wir erhalten $\text{dist}_v(\xi_{v,1}, g_v \xi_{v,1}) = \text{dist}_v(\xi_{v,2}, g_v \xi_{v,2})$, d.h.

$$H_{v,1}(g_v) = H_{v,2}(g_v).$$

□

Um die lokalen Höhenfunktionen zu einer globalen Höhenfunktion zusammensetzen, wählen wir nun, in Übereinstimmung mit Proposition 4.2.48, eine endliche Teilmenge $S_k \subseteq M_k^0$, so dass für alle $v \in M_k^0 \setminus S_k$ die Ecke $\xi_v \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_v)$ hyperspeziell ist und $K_v = \text{Stab}_{G_v}(\xi_v) = \mathbf{G}(\mathcal{o}_v)$ gilt. Diese Bedingung ermöglicht es uns einen besseren Zusammenhang zwischen den Wurzelsystemen Φ_v und Ψ_v für $v \in M_k^0 \setminus S_k$ herzustellen:

Lemma 4.2.57. *Für alle $v \in M_k^0 \setminus S_k$ gilt $\Psi_v = \Phi_v^{nm} := \{\alpha \in \Phi_v : 2\alpha \notin \Phi_v\}$. Insbesondere ist $c_v := \max\{c_{v,i} : 1 \leq i \leq n_v\} \leq 1$.*

Beweis. Sei $v \in M_k^0 \setminus S_k$. Es ist leicht zu sehen, dass Φ_v^{nm} ein reduziertes Wurzelsystem in V_v^* ist. Mit Proposition 4.2.27(c) reicht es also zu zeigen, dass

$$\mathcal{H}_v = \{H_{\alpha,l}^v : \alpha \in \Phi_v^{nm}, l \in \mathbb{Z}\}$$

gilt, wobei $H_{\alpha,l}^v := \{x \in \mathcal{A}_v : \langle x - \xi_v, \alpha \rangle = l\}$ ist.

Da $v \in M_k^0 \setminus S_k$ ist, gibt es eine endliche unverzweigte Galois-Erweiterung $k'_v|k_v$ und einen k'_v -spaltenden maximalen Torus \mathbf{T}'_v in \mathbf{G} , der über k_v definiert ist und \mathbf{T}_v enthält. Sei $V'_v := \mathbb{X}_*(\mathbf{T}'_v) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}'_v := \mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{T}'_v, k'_v)$ das Standardapartment bezüglich \mathbf{T}'_v des Bruhat-Tits-Gebäudes $\mathcal{B}'_v := \mathcal{B}(\mathbf{G}, k'_v)$. Weiter sei $\Phi'_v := \Phi(\mathbf{T}'_v, \mathbf{G}) \subseteq (V'_v)^*$ die Menge der k'_v -Wurzeln von \mathbf{G} bezüglich \mathbf{T}'_v , $(\Phi_{aff}^v)'$ die Menge der affinen Wurzeln von \mathcal{A}'_v und $(W_{aff}^v)'$ die dadurch definierte affine Spiegelungsgruppe auf \mathcal{A}'_v . Dann ist der „Null-Punkt“ ξ_v ein spezieller Punkt in \mathcal{A}'_v bezüglich $(W_{aff}^v)'$ und

$$(\Phi_{aff}^v)' = \{\langle \cdot - \xi_v, \alpha \rangle + l : \alpha \in \Phi'_v, l \in \mathbb{Z}\},$$

siehe [Tit79, §1.1]. Weiter ist mit [Bor91, §21.8]

$$\Phi_v = \{\alpha|_{V_v^*} : \alpha \in \Phi'_v\} \setminus \{0\}$$

und daher wegen [Tit79, §1.10.1]

$$\Phi_{aff}^v = \{\langle \cdot - \xi_v, \alpha \rangle + l : \alpha \in \Phi_v, l \in \mathbb{Z}\}.$$

Für die Hyperebenenmenge \mathcal{H}_v gilt also $\mathcal{H}_v = \{H_{\alpha,l}^v : \alpha \in \Phi_v, l \in \mathbb{Z}\}$. Ist $\alpha \in \Phi_v \setminus \Phi_v^{nm}$, d.h. $2\alpha \in \Phi_v$ und $l \in \mathbb{Z}$, so ist $2\alpha \in \Phi_v^{nm}$ und

$$H_{\alpha,l}^v = \{x \in \mathcal{A}_v : \langle x - \xi_v, \alpha \rangle = l\} = \{x \in \mathcal{A}_v : 2\langle x - \xi_v, \alpha \rangle = 2l\} = H_{2\alpha,2l}^v.$$

Wir erhalten $H_{\alpha,l}^v \in \{H_{\alpha,l}^v : \alpha \in \Phi_v^{nm}, l \in \mathbb{Z}\}$ und die Behauptung folgt. □

Die Wahl der endlichen Teilmenge $S_k \subseteq M_k^0$ fixiert für fast alle $v \in M_k^0$ die maximalen kompakten Untergruppen K_v . Dies liefert, bei geeigneter Wahl der archimedischen Höhenfunktionen H_v , $v \in M_k^\infty$, eine gewisse „Eindeutigkeit“ der globalen Höhe $H(g) = \prod_{v \in M_k} H_v(g)$ für $g \in \mathbf{G}(k)$:

Proposition 4.2.58. *Sei $K_i := \{K_{v,i} \subseteq G_v : v \in M_k\}$ für jedes $i \in \{1, 2\}$ eine Familie maximaler kompakter Untergruppen, so dass für alle $v \in M_k^0$ eine spezielle Ecke $\xi_{v,i}$ des Bruhat-Tits-Gebäudes $\mathcal{B}_v = \mathcal{B}(\mathbf{G}, k_v)$ mit $K_{v,i} = \text{Stab}_{G_v}(\xi_{v,i})$ existiert. Weiter sei $S_{k,i}$ eine endliche Teilmenge von M_k^0 und $K_{v,i} = \mathbf{G}(\mathfrak{o}_v)$ für alle $v \in M_k^0 \setminus S_{k,i}$. Für jedes $v \in M_k^\infty$ sei darüber hinaus ein $\kappa_v \in \mathbb{R}_{>0}$ fixiert, so dass die durch die Killing-Form induzierte Metrik auf $G_v/K_{v,i}$ durch κ_v skaliert ist. Mit $H_{v,i}$ bezeichnen wir für jedes $v \in M_k$ die zu $K_{v,i}$ und den jeweiligen Metriken auf $G_v/K_{v,i}$ gehörenden lokalen*

Höhenfunktionen auf G_v und mit H_i die zu $\{H_{v,i} : v \in M_k\}$ korrespondierende globale Höhenfunktion auf $\mathbf{G}(k)$. Dann gibt es eine Konstante $\mathfrak{c} \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$\mathfrak{c}^{-1} \leq \frac{H_1(g)}{H_2(g)} \leq \mathfrak{c}$$

für alle $g \in \mathbf{G}(k)$ gilt.

Beweis. Setzen wir $S_k = S_{k,1} \cup S_{k,2}$, so ist $S_k \subseteq M_k^0$ endlich und für alle nicht-archimedischen $v \in M_k^0 \setminus S_k$ gilt $K_{v,1} = \mathbf{G}(\mathfrak{o}_v) = K_{v,2}$. Die Behauptung folgt nun direkt aus Korollar 4.1.4 und Proposition 4.2.56. \square

Bemerkung 4.2.59. Obige Proposition zeigt, dass die für uns interessanten Fragestellungen, wie etwa die Endlichkeit der Anzahl der Punkte beschränkter Höhe $N_{\mathbf{G}(k)}(B)$, im Wesentlichen unabhängig von den obigen Abhängigkeiten beantwortet werden können. Lediglich die Wahl der Metriken auf G_v/K_v für $v \in M_k^\infty$ muss hierbei berücksichtigt werden. Eine eindeutige Wahl der Metriken auf G_v/K_v könnte durch die Bedingung $\kappa_v = 1$ für alle $v \in M_k^\infty$ erreicht werden, d.h. wir könnten für alle $v \in M_k^\infty$ die durch die Killing-Form induzierte Metrik auf G_v/K_v wählen. Für die spezielle lineare Gruppe hat sich jedoch herausgestellt, dass durch eine Skalierung der Killing-Form eine bessere Vergleichbarkeit unserer Höhe mit bekannten Höhenfunktionen erzielt werden kann, siehe zum Beispiel §2.2. Daher haben wir die Freiheit der Skalierung für die archimedischen Bewertungen beibehalten.

4.3 Spaltende halbeinfache algebraische Gruppen

Dank der Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte können wir nun für k -spaltende halbeinfache algebraische Gruppen \mathbf{G} die Endlichkeit der Anzahl der Punkte beschränkter Höhe

$$N_{\mathbf{G}(k)}(B) = \#\{g \in \mathbf{G}(k) : H(g) \leq B\}$$

für alle $B \in \mathbb{R}_{>0}$ beweisen:

Satz 4.3.1. *Sei \mathbf{G} eine über k spaltende halbeinfache algebraische Gruppe. Dann gilt $N_{\mathbf{G}(k)}(B) < \infty$ für alle $B \in \mathbb{R}_{>0}$.*

Beweis. Sei $\{K_v \subseteq G_v : v \in M_k\}$ eine Familie maximaler kompakter Untergruppen, so dass für alle $v \in M_k^0$ eine (hyper-)spezielle Ecke ξ_v des Bruhat-Tits-Gebäudes $\mathcal{B}_v = \mathcal{B}(\mathbf{G}, k_v)$ mit $K_v = \text{Stab}_{G_v}(\xi_v)$ existiert. Mit $\text{dist}_v : \mathcal{V}(\mathcal{B}_v) \times \mathcal{V}(\mathcal{B}_v) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ bezeichnen wir die kombinatorische Metrik auf der Eckenmenge von \mathcal{B}_v . Weiter sei $S_k \subseteq M_k^0$ eine endliche Teilmenge, so dass für alle nicht-archimedischen Bewertungen $v \notin S_k$ gilt $K_v = \mathbf{G}(\mathfrak{o}_v)$. Für jedes $v \in M_k^\infty$ bezeichnen wir mit $\text{dist}_v : G_v/K_v \times G_v/K_v \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ die durch eine beliebige Skalierung der Killing-Form von \mathfrak{g}_v bzw. $\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$ induzierte Metrik auf G_v/K_v . Darüber hinaus sei H_v für jedes $v \in M_k$ die zu dist_v gehörende v -adische lokale Höhenfunktion auf G_v und H die zu $\{H_v : v \in M_k\}$ korrespondierende globale

Höhenfunktion auf $\mathbf{G}(k)$. Schließlich sei $H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ für jedes $v \in M_k$ die v -adische lokale Höhenfunktion auf $\mathrm{SL}_n(k_v)$ aus §3, $\mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ die jeweilige Metrik auf den dort betrachteten metrischen Räumen und $H_{\mathrm{SL}_n(k)}$ die zu $\{H_{\mathrm{SL}_n(k_v)} : v \in M_k\}$ gehörende globale Höhenfunktion auf $\mathrm{SL}_n(k)$.

Wir wollen nun die Ergebnisse aus Satz 4.1.3 und Satz 4.2.55 verwenden, um die Endlichkeit von $N_{\mathbf{G}(k)}(B)$ für $B \in \mathbb{R}_{>0}$ zu zeigen. Hierfür fixieren wir zunächst eine geeignete Identifizierung von $\mathrm{SL}(\mathfrak{g}_k) = \mathrm{SL}_n(k)$:

Sei \mathbf{T} ein maximaler Torus von \mathbf{G} , der über k spaltet und Φ_k die Menge der k -Wurzeln von \mathbf{G} bezüglich \mathbf{T} . Dann gilt für die Lie-Algebra \mathfrak{g}_k von $\mathbf{G}(k)$

$$\mathfrak{g}_k = (\mathfrak{g}_k)_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_k} (\mathfrak{g}_k)_\alpha,$$

wobei $(\mathfrak{g}_k)_0 := \{X \in \mathfrak{g}_k : \mathrm{Ad}_k(t)(X) = X \text{ für alle } t \in \mathbf{T}(k)\}$ und $(\mathfrak{g}_k)_\alpha := \{X \in \mathfrak{g}_k : \mathrm{Ad}_k(t)(X) = \alpha(t)X \text{ für alle } t \in \mathbf{T}(k)\}$ für alle $\alpha \in \Phi_k$ ist, siehe [PR94, §2.1.14]. Wir wählen eine mit dieser Zerlegung verträgliche Basis \mathfrak{B}_k von \mathfrak{g}_k , d.h. $\mathfrak{B}_k = \mathfrak{B}_0 \cup \bigcup_{\alpha \in \Phi_k} \mathfrak{B}_\alpha$, wobei \mathfrak{B}_0 ein k -Basis von $(\mathfrak{g}_k)_0$ und \mathfrak{B}_α , für jedes $\alpha \in \Phi_k$, eine k -Basis von $(\mathfrak{g}_k)_\alpha$ ist. Diese Basiswahl liefert einen Isomorphismus $\iota_k : \mathrm{SL}(\mathfrak{g}_k) \rightarrow \mathrm{SL}_n(k)$, der durch Erweiterung der Skalare für jedes $v \in M_k$ einen Isomorphismus $\iota_v : \mathrm{SL}(\mathfrak{g}_v) \rightarrow \mathrm{SL}_n(k_v)$ induziert.

Da \mathbf{G} über k definiert ist, ist die adjungierte Darstellung $\mathrm{Ad}_v : G_v \rightarrow \mathrm{SL}(\mathfrak{g}_v)$ gleich der Erweiterung der Skalare der adjungierten Darstellung $\mathrm{Ad}_k : \mathbf{G}(k) \rightarrow \mathrm{SL}(\mathfrak{g}_k)$. Folglich ist $\iota_k(\mathrm{Ad}_k(g)) = \iota_v(\mathrm{Ad}_v(g))$ für alle $g \in \mathbf{G}(k)$ und $\iota_v(\mathrm{Ad}_v(K_v)) \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v)$ für fast alle $v \in M_k^0$. Vergrößern wir die Ausnahmemenge S_k gegebenenfalls, so können wir daher $\iota_v(\mathrm{Ad}_v(K_v)) \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v)$ für alle $v \in M_k^0 \setminus S_k$ annehmen.

Da \mathbf{T} über k spaltet, gibt es ein $d \in \mathbb{N}$ und einen über k definierten Isomorphismus $\varphi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{G}_{\mathbb{R}^d}^d$. Dieser Isomorphismus ist für alle $v \in M_k$ über k_v und für fast alle $v \in M_k^0$ auch über \mathcal{O}_v definiert. Durch eine geeignete Vergrößerung der Ausnahmemenge S_k können wir somit annehmen, dass φ und φ^{-1} für alle $v \in M_k^0 \setminus S_k$ über \mathcal{O}_v definiert sind. Folglich ist $\mathbf{T}(\mathcal{O}_v) = \varphi^{-1}((\mathcal{O}_v^*)^d) = \mathbf{T}(k_v)_c$ für alle $v \in M_k^0 \setminus S_k$, wobei $\mathbf{T}(k_v)_c$ die maximale kompakte Untergruppe von $\mathbf{T}(k_v)$ bezeichnet. Insbesondere gilt

$$\mathbf{T}(k_v)_c = \mathbf{T}(\mathcal{O}_v) \subseteq \mathbf{G}(\mathcal{O}_v) = \mathrm{Stab}_{G_v}(\xi_v).$$

Mit Lemma 4.2.41 ist daher $\xi_v \in \mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{T}, k_v)$ für alle $v \in M_k^0 \setminus S_k$.

Sei $v \in M_k^0 \setminus S_k$ und $g \in \mathbf{G}(k)$. Wir werden nun $H_v(g)$ geeignet nach unten abschätzen. Die Notation für den Rest dieses Beweises ist in §4.2.3 zu finden. Da \mathbf{T} ein maximaler Torus von \mathbf{G} ist, ist $\mathbf{T} = Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ und es gibt nach Proposition 4.2.49 (Cartan-Zerlegung) $x_v, x'_v \in K_v = \mathbf{G}(\mathcal{O}_v)$ und $t_v^+ \in \mathbf{T}(k_v)^+$ mit $g = x_v t_v^+ x'_v$. Wegen $\iota_v(\mathrm{Ad}_v(K_v)) \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v)$ gilt daher mit Bemerkung 2.1.5

$$H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\mathrm{Ad}_v(g))) = H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\mathrm{Ad}_v(x_v t_v^+ x'_v))) = H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\mathrm{Ad}_v(t_v^+))).$$

Weiter zeigt man analog zum Beweis von Satz 4.2.55

$$H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\mathrm{Ad}_v(t_v^+))) \leq H_v(g)^{2c_v m_v},$$

wobei c_v und m_v wie in Satz 4.2.55 definiert sind, und wir erhalten insgesamt

$$H_v(g) \geq H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\mathrm{Ad}_v(g)))^{\gamma_v}$$

mit $\gamma_v := \frac{1}{2c_v m_v}$.

Für alle $v \in S_k$ existiert ein k_v -spaltender maximaler Torus \mathbf{T}_v mit $\xi_v \in \mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{T}_v, k_v)$. Daher gibt es nach Satz 4.2.55 eine Matrix $M_v \in \mathrm{GL}_n(k_v)$ (Basiswechsel!) und ein $\eta_v \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$H_v(g) \geq \eta_v H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(M_v \iota_v(\mathrm{Ad}_v(g)) M_v^{-1})^{\gamma_v},$$

wobei $\gamma_v := \frac{1}{2c_v m_v}$ gesetzt ist und c_v und m_v bezüglich \mathbf{T}_v gewählt sind. Da auch $\mathrm{GL}_n(k_v)$ auf dem Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathrm{SL}_n(k_v)$ operiert und die kombinatorische Metrik invariant lässt, gilt

$$\begin{aligned} & \mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(\mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v), \iota_v(\mathrm{Ad}_v(g)) \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v)) \\ & \leq 2 \mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(\mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v), M_v \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v)) + \mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(\mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v), M_v \iota_v(\mathrm{Ad}_v(g)) M_v^{-1} \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v)) \end{aligned}$$

und daher

$$H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\mathrm{Ad}_v(g))) \leq q_v^{2 \mathrm{dist}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(\mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v), M_v \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v))} H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(M_v \iota_v(\mathrm{Ad}_v(g)) M_v^{-1}).$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$H_v(g) \geq \eta'_v H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\mathrm{Ad}_v(g)))^{\gamma_v}$$

für ein geeignetes $\eta'_v \in \mathbb{R}_{>0}$.

Ebenso gibt es für $v \in M_k^\infty$ nach Satz 4.1.3 eine Matrix $M_v \in \mathrm{GL}_n(k_v)$ und ein $\gamma_v \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$H_v(g) = H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(M_v \iota_v(\mathrm{Ad}_v(g)) M_v^{-1})^{\gamma_v}.$$

Analog zum Beweis von Korollar 4.1.4 kann die Matrix $M_v \in \mathrm{GL}_n(k_v)$ durch eine Matrix $M_v \in \mathrm{SL}_n(k_v)$ ersetzt werden und es gilt wie für $v \in S_k$

$$H_v(g) \geq \eta'_v H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\mathrm{Ad}_v(g)))^{\gamma_v}$$

für ein geeignetes $\eta'_v \in \mathbb{R}_{>0}$. Insgesamt erhalten wir somit für die globale Höhe $H(g)$

$$\begin{aligned} H(g) &= \prod_{v \in M_k} H_v(g) \\ &\geq \prod_{v \notin S_k} H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\mathrm{Ad}_v(g)))^{\gamma_v} \prod_{v \in S_k} \eta'_v H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\mathrm{Ad}_v(g)))^{\gamma_v} \prod_{v \in M_k^\infty} \eta'_v H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\mathrm{Ad}_v(g)))^{\gamma_v}. \end{aligned}$$

Da die Wurzelsysteme der maximalen Tori \mathbf{T} und \mathbf{T}_v für alle $v \in S_k$ isomorph sind, sind die Konstanten γ_v für alle nicht-archimedischen Bewertungen $v \in M_k^0$ gleich. Setzen wir $\eta := \prod_{v \in S_k \cup M_k^\infty} \eta'_v$ und $\gamma := \max_{v \in M_k} \gamma_v$, so folgt

$$H(g) \geq \eta \prod_{v \in M_k} H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(\iota_v(\mathrm{Ad}_v(g)))^\gamma = \eta H_{\mathrm{SL}_n(k)}(\iota_k(\mathrm{Ad}_k(g)))^\gamma.$$

Da $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_k \otimes_k \mathbb{C}$ und \mathbf{G} halbeinfach ist, gilt

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}_k) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = Z(\mathbf{G}).$$

Ferner ist das Zentrum von \mathbf{G} und somit auch der Kern von Ad_k endlich. Die Endlichkeit von $N_{\mathbf{G}(k)}(B)$ folgt nun direkt aus Satz 3.3.1. \square

Bemerkung 4.3.2. Spaltet die Gruppe \mathbf{G} über dem Grundkörper k nicht, so gibt es eine endliche Galois-Erweiterung $l|k$, siehe [Hum75, §34.4, Theorem], über der \mathbf{G} spaltet. Um die Endlichkeit von $N_{\mathbf{G}(k)}(B)$ auch in diesem Fall zu beweisen, scheint es vielversprechend zu sein, eine geeignete Höhenfunktion auf $\mathbf{G}(l)$ zu betrachten und deren Einschränkung auf $\mathbf{G}(k)$ mit der Höhenfunktion auf $\mathbf{G}(k)$ zu vergleichen.

Kapitel 5

Das asymptotische Verhalten von $N_{\mathrm{SL}_n(k)}(B)$ für $B \rightarrow \infty$

Wir haben in §3.3 die Endlichkeit von $N_{\mathrm{SL}_n(k)}(B) = \#\{A \in \mathrm{SL}_n(k) : H_{\mathrm{SL}_n(k)}(A) \leq B\}$ für alle $B \in \mathbb{R}_{>0}$ gezeigt. In diesem Kapitel wollen wir nun das asymptotische Verhalten der *Zählfunktion* $N_{\mathrm{SL}_n(k)} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $B \mapsto N_{\mathrm{SL}_n(k)}(B)$ untersuchen. Die Bezeichnungen übernehmen wir aus §1 und §3.

5.1 Die Höhenzetafunktion

Ein wichtiges Hilfsmittel um das asymptotische Verhalten der Zählfunktion zu bestimmen, ist die Höhenzetafunktion:

Definition 5.1.1. Sei X eine abzählbar unendliche Menge und $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$ eine (Höhen-)Funktion, so dass für alle $B \in \mathbb{R}_{>0}$ die Anzahl

$$N_{X,f}(B) := \#\{x \in X : f(x) \leq B\}$$

endlich ist. Dann wird die durch die Reihe

$$Z_{X,f}(s) := \sum_{x \in X} f(x)^{-s}$$

erklärte Funktion $Z_{X,f}(s)$ *Höhenzetafunktion* von X bezüglich f genannt. Sie ist definiert für jede komplexe Zahl $s \in \mathbb{C}$, für die die Reihe konvergiert.

Bemerkung 5.1.2. $Z_{X,f}(s)$ kann als allgemeine *Dirichlet-Reihe* mit positiven Koeffizienten dargestellt werden. Insbesondere konvergiert $Z_{X,f}(s)$ in jeder Halbebene $\mathrm{Re}(s) > b$, $b \in \mathbb{R}$, in der $Z_{X,f}(s)$ konvergiert, auch schon absolut. Existiert ein $s_0 \in \mathbb{C}$, so dass $Z_{X,f}(s_0)$ konvergiert, so ist $Z_{X,f}(s)$ entweder für alle $s \in \mathbb{C}$ konvergent, oder es gibt eine *Konvergenzabzisse* a . Diese ist definiert als die kleinste reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$, so dass $Z_{X,f}(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > a$ konvergiert und für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) < a$ divergiert, siehe [Apo90, §8].

Ist das Verhalten der Höhenzetafunktion für $\mathrm{Re}(s) = a$ bekannt, so kann das asymptotische Verhalten von $N_{X,f}(B)$ für $B \rightarrow \infty$ mit Hilfe des folgenden Tauberschen Satzes bestimmt werden. Für „ $a = 1$ “ und „ $r = 1$ “ wurde dieser von Shikao Ikehara und Norbert Wiener, siehe [Ike31], [Wie32], bewiesen und anschließend von Hubert Delange verallgemeinert:

Satz 5.1.3 ([Del54], Théorème III). *Sei r eine positive ganze Zahl und a eine positive reelle Zahl. Ist $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nicht-abnehmende Funktion und konvergiert das Integral*

$$f(s) := \int_0^\infty \alpha(t)e^{-st} dt$$

in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > a$, so dass dort

$$f(s) = g(s)(s - a)^{-r} + h(s)$$

gilt, mit zwei für $\mathrm{Re}(s) \geq a$ holomorphen Funktionen g, h und $g(a) \neq 0$, so ist

$$\alpha(t) \sim \frac{g(a)}{(r-1)!} e^{at} t^{r-1}.$$

Für die Höhenzetafunktion folgt daraus:

Korollar 5.1.4. *Sei X eine abzählbar unendliche Menge und $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$ eine Funktion, so dass $N_{X,f}(B) < \infty$ für alle $B \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt. Weiter sei r eine positive ganze Zahl und a eine positive reelle Zahl. Ist $Z_{X,f}(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > a$ absolut konvergent und*

$$Z_{X,f}(s) = g(s)(s - a)^{-r} + h(s)$$

mit zwei für $\mathrm{Re}(s) \geq a$ holomorphen Funktionen g, h und $g(a) \neq 0$, so ist

$$N_{X,f}(B) \sim \frac{g(a)}{a(r-1)!} B^a (\log(B))^{r-1}.$$

Beweis. Es ist leicht zu zeigen, dass

$$Z_{X,f}(s) = s \int_1^\infty N_{X,f}(B) B^{-s-1} dB$$

für $\mathrm{Re}(s) \geq a$ gilt. Setzen wir nun $B := e^t$, so folgt die Behauptung direkt aus Satz 5.1.3. \square

In vielen Beweisen der *Batyrev-Manin-Vermutung*, vergleiche §1.3, wurde dieser Zusammenhang genutzt. Man hat das analytische Verhalten der Höhenzetafunktion bestimmt, um das asymptotische Verhalten der Zählfunktion zu erhalten. Es gibt unterschiedliche Ansätze, um das Konvergenzverhalten der Höhenzetafunktion zu untersuchen. Wir wollen hier einen Ansatz aus der *harmonischen Analysis* skizzieren. Dieser wurde unter anderem verwendet um die Batyrev-Manin-Vermutung für die folgenden Varietäten \mathbf{X} zu beweisen:

- Torische Varietäten; siehe [BT98] und [BT96a]
- Äquivariante Kompaktifizierungen von Vektorgruppen; siehe [CLT02]
- Äquivariante Kompaktifizierungen der Heisenberg Gruppe; siehe [ST04]
- Wundervolle Kompaktifizierungen von halbeinfachen Gruppen von adjungiertem Typ; siehe [STBT07] und [GMO08]
- Äquivariante Kompaktifizierungen von unipotenten Gruppen; siehe [ST15]

In all diesen Fällen ist \mathbf{X} eine über k definierte *äquivariante Kompaktifizierung* einer über k definierten algebraischen Gruppe \mathbf{G} , d.h. \mathbf{X} ist eine projektive Varietät, die \mathbf{G} als dichte offene Teilmenge enthält und die natürliche Wirkung von \mathbf{G} auf sich selbst ist zu einer Wirkung von \mathbf{G} auf \mathbf{X} fortsetzbar. Ist $H_{\mathbb{E}} : \mathbf{X}(k) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ die Höhenfunktion zu einem adelisch metrisierten Geradenbündel $\mathbb{E} = (E, \|\cdot\|_v)$ über \mathbf{X} , dessen Klasse $[E]$ in der Picard-Gruppe $\text{Pic}(\mathbf{X})$ von \mathbf{X} im Inneren des Kegels der effektiven Geradenbündel $\Lambda_{\text{eff}}(\mathbf{X}) \subseteq \text{Pic}(\mathbf{X})_{\mathbb{R}}$ liegt, so wird gezeigt, dass die Zählfunktion $N_{\mathbf{G}(k)}(\mathbb{E}, \cdot) = N_{\mathbf{G}(k), H_{\mathbb{E}}}(\cdot)$ das von Victor Batyrev, Yuri I. Manin und Emmanuel Peyre vermutete asymptotische Verhalten hat.

Um dies zu erreichen werden die *adelewertigen Punkte* $\mathbf{G}(\mathbb{A}_k)$ von \mathbf{G} , d.h. das eingeschränkte Produkt der Gruppen G_v , mit $v \in M_k$, bezüglich der Untergruppen $\mathbf{G}(\mathcal{O}_v)$ für $v \in M_k^0$, betrachtet und $\mathbf{G}(k)$ durch die Diagonaleinbettung $k \rightarrow \mathbb{A}_k$ als eine diskrete Untergruppe von $\mathbf{G}(\mathbb{A}_k)$ aufgefasst. Die Höhenfunktion $H_{\mathbb{E}}$ kann dann auf natürliche Weise zu einer Funktion auf $\mathbf{G}(\mathbb{A}_k)$ fortgesetzt werden. Die Fortsetzung wird ebenfalls mit $H_{\mathbb{E}}$ bezeichnet. Als wichtigstes Werkzeug wird die Reihe $\mathcal{Z}(\mathbb{E}, s, \mathbf{g})$ eingeführt. Sie ist definiert als

$$\mathcal{Z}(\mathbb{E}, s, \mathbf{g}) := \sum_{\gamma \in \mathbf{G}(k)} H_{\mathbb{E}}(\gamma \mathbf{g})^{-s}$$

für $\mathbf{g} \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_k)$ und alle $s \in \mathbb{C}$, für die die Reihe konvergiert. Setzen wir \mathbf{g} gleich dem neutralen Element \mathbf{e} in $\mathbf{G}(\mathbb{A}_k)$, so ergibt sich die herkömmliche Höhenzetafunktion $Z_{\mathbf{G}(k)}(\mathbb{E}, s) := Z_{\mathbf{G}(k), H_{\mathbb{E}}}(s)$ auf $\mathbf{G}(k)$ bezüglich $H_{\mathbb{E}}$. Die Reihe $\mathcal{Z}(\mathbb{E}, s, \mathbf{g})$ wird nun mit Methoden der harmonischen Analysis untersucht und eine Spektralzerlegung betrachtet. Insbesondere gilt für die Höhenzetafunktion

$$Z_{\mathbf{G}(k)}(\mathbb{E}, s) = \mathcal{Z}(\mathbb{E}, s, \mathbf{e}) = \int_{\mathbf{G}(\mathbb{A}_k)} H_{\mathbb{E}}(\mathbf{g})^{-s} d\mu(\mathbf{g}) + \text{weitere Terme},$$

wobei μ ein geeignet normiertes Haarsches Maß auf $\mathbf{G}(\mathbb{A}_k)$ bezeichnet. Weiter stellt sich heraus, dass das analytische Verhalten von $Z_{\mathbf{G}(k)}(\mathbb{E}, s)$ im Wesentlichen gleich dem des *Höhenintegrals* $\mathcal{I}_{\mathbf{G}(k)}(\mathbb{E}, s) := \int_{\mathbf{G}(\mathbb{A}_k)} H_{\mathbb{E}}(\mathbf{g})^{-s} d\mu(\mathbf{g})$ ist. Genauer gilt für jede positive ganze Zahl r und jede positive reelle Zahl a :

Ist das Höhenintegral $\mathcal{I}_{\mathbf{G}(k)}(\mathbb{E}, s)$ holomorph für $\text{Re}(s) \geq a$, mit Ausnahme eines r -fachen Pols bei $s = a$, so ist auch die Höhenzetafunktion $Z_{\mathbf{G}(k)}(\mathbb{E}, s)$ (*) holomorph für $\text{Re}(s) \geq a$, mit Ausnahme eines r -fachen Pols bei $s = a$.

Im Allgemeinen können auch noch weitere Terme der obigen Darstellung von $Z_{\mathbf{G}(k)}(\mathbb{E}, s)$ Einfluss auf den Pol in $s = a$ haben. Diese beeinflussen aber lediglich die Konstante in der Asymptotik von $N_{\mathbf{G}(k)}(\mathbb{E}, B)$ für $B \rightarrow \infty$ und werden daher hier nicht weiter betrachtet.

Kehren wir nun zur Situation $\mathbf{G} := \mathrm{SL}_n$ zurück. Wir fixieren für jedes $v \in M_k$ ein Haarsches Maß μ_v auf $\mathrm{SL}_n(k_v)$. Für $v \in M_k^0$ fordern wir

$$\mathrm{vol}(K_v) = \int_{K_v} d\mu_v(x_v) = 1.$$

Diese Wahl induziert ein wohldefiniertes Haarsches Maß μ auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_k)$, siehe [PR94, §3.5]. Weiter setzen wir die Höhenfunktion $H_{\mathrm{SL}_n(k)}$ wie folgt auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_k)$ fort. Ist $\mathbf{A} = (A_v) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_k)$, so definieren wir

$$H_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_k)}(\mathbf{A}) := \prod_{v \in M_k} H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A_v).$$

Dies ist wohldefiniert, da $A_v \in \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v)$ und somit $H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A_v) = 1$ für fast alle $v \in M_k^0$ gilt. Das Integral

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k)}(s) := \int_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_k)} H_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_k)}(\mathbf{A})^{-s} d\mu(\mathbf{A})$$

nennen wir das *globale Höhenintegral* von $\mathrm{SL}_n(k)$. Es ist definiert für alle $s \in \mathbb{C}$ für die es konvergiert und es gilt, wie wir später sehen werden,

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k)}(s) = \prod_{v \in M_k} \mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s),$$

wobei die Integrale

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s) := \int_{\mathrm{SL}_n(k_v)} H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A_v)^{-s} d\mu_v(A_v)$$

v-adische lokale Höhenintegrale genannt werden. Die *Höhenzetafunktion* von $\mathrm{SL}_n(k)$ bezüglich $H_{\mathrm{SL}_n(k)}$ ist definiert durch die Reihe

$$Z_{\mathrm{SL}_n(k)}(s) := \sum_{A \in \mathrm{SL}_n(k)} H_{\mathrm{SL}_n(k)}(A)^{-s}.$$

Im Hinblick auf die obigen Beobachtungen scheint es vielversprechend zu sein, dass auch in diesem Fall das analytische Verhalten der Höhenzetafunktion $Z_{\mathrm{SL}_n(k)}(s)$ mit dem des Höhenintegrals $\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k)}(s)$ übereinstimmt. Dies lässt sich vermutlich analog zu den in [STBT07] bewiesenen Aussagen zeigen. Wir werden daher im Folgenden das Höhenintegral genauer untersuchen um mit Satz 5.1.3 einen geeigneten Kandidaten für das asymptotische Verhalten von $N_{\mathrm{SL}_n(k)}(B)$ für $B \rightarrow \infty$ zu erhalten. Dafür betrachten wir die *v-adischen lokalen Höhenintegrale* zunächst separat.

5.2 Die archimedischen lokalen Höhenintegrale

Sei $v \in M_k^\infty$ eine archimedische Bewertung. In diesem Abschnitt werden wir das analytische Verhalten des archimedischen lokalen Höhenintegrals

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s) = \int_{\mathrm{SL}_n(k_v)} H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A_v)^{-s} d\mu_v(A_v)$$

bestimmen. Dazu betrachten wir die folgende, durch die Cartan-Zerlegung der reellen Lie-Algebra induzierte, Zerlegung von $\mathrm{SL}_n(k_v)$. Sie ist leicht aus der Polarzerlegung von $\mathrm{SL}_n(k_v)$ herleitbar und wird auch oft selbst *Polarzerlegung* genannt. Es gilt

$$\mathrm{SL}_n(k_v) = \bigsqcup_{t_v^+ \in \widehat{T}_v^+} K_v t_v^+ K_v$$

mit

$$K_v = \begin{cases} \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), & \text{falls } k_v = \mathbb{R}, \\ \mathrm{SU}_n(\mathbb{C}), & \text{falls } k_v = \mathbb{C}, \end{cases}$$

und

$$\widehat{T}_v^+ := \left\{ \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}_{>0}, x_1 \leq \dots \leq x_n \text{ und } \prod_{i=1}^n x_i = 1 \right\},$$

vergleiche [GV88, Lemma 2.2.3]. Hierbei ist \widehat{T}_v^+ ein Untermonoid der Gruppe T_v^+ der Diagonalmatrizen in $\mathrm{SL}_n(k_v)$ mit positiven reellen Einträgen:

$$T_v^+ := \left\{ \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}_{>0} \text{ und } \prod_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

Weiter fixieren wir auf K_v das Haarsche Maß $\mu_{v,1}$ mit

$$\mathrm{vol}(K_v) = \int_{K_v} d\mu_{v,1}(x_v) = 1.$$

Mit Hilfe einer geeigneten Zerlegung der Eins über $\mathrm{SL}_n(k_v)$ gilt nach [GV88, Proposition 2.4.6]

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s) = \int_{K_v \times \widehat{T}_v^+ \times K_v} H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(x_v t_v^+ x'_v)^{-s} J(t_v^+) d\mu_{v,1}(x_v) d\mu_{v,2}(t_v^+) d\mu_{v,1}(x'_v), \quad (\clubsuit)$$

für ein passend normiertes Haarsches Maß $\mu_{v,2}$ auf T_v^+ und

$$J(\mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n)) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{x_j}{x_i} - \frac{x_i}{x_j} \right)$$

für alle $\mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n) \in T_v^+$. Diese Darstellung ermöglicht uns nun die konkrete Berechnung des Integrals:

Proposition 5.2.1. *Es gilt*

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s) = a_v \int_D F(x_1, \dots, x_{n-1}) e^{-s \sqrt{n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \log(x_i)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \log(x_i) \right)^2 \right)}} dx_{n-1} \dots dx_1$$

für eine Konstante $a_v \in \mathbb{R}_{>0}$,

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}) := \prod_{1 \leq i < j < n} \left(\frac{x_j}{x_i} - \frac{x_i}{x_j} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i^2 \prod_{l=1}^{n-1} x_l} - \prod_{l=1}^{n-1} x_l \right),$$

und

$$D := \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : 0 < x_1 \leq 1 \text{ und } x_{i-1} \leq x_i \leq \left(\prod_{l=1}^{i-1} x_l \right)^{-1/(n-i+1)} \right. \\ \left. \text{für alle } 2 \leq i \leq n-1 \right\}.$$

Beweis. Da die v -adische Höhenfunktion $H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ nach Bemerkung 2.1.5 auf den Doppelnebenklassen $K_v t_v^+ K_v$ für alle $t_v^+ \in T_v^+$ konstant ist und das Haarsche Maß auf K_v mit $\mathrm{vol}(K_v) = 1$ gewählt wurde, folgt aus (♣) sofort

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s) = \int_{\widehat{T}_v^+} H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(t_v^+)^{-s} J(t_v^+) d\mu_{v,2}(t_v^+).$$

Darüber hinaus gilt

$$T_v^+ = \left\{ \mathrm{diag} \left(x_1, \dots, x_{n-1}, \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{-1} \right) : x_i \in \mathbb{R}_{>0} \right\},$$

d.h. T_v^+ kann durch Projektion auf die ersten $n-1$ Einträge als Teilmenge des \mathbb{R}^{n-1} aufgefasst werden. Außerdem gibt es eine Konstante $a_v \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $X \subseteq T_v^+$

$$\mu_{v,2}(X) = a_v \int_X \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{-1} dx_{n-1} \dots dx_1$$

ist. Mit Proposition 3.1.2 und

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}) = J \left(\mathrm{diag} \left(x_1, \dots, x_{n-1}, \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{-1} \right) \right) \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{-1}$$

erhalten wir daher

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s) = a_v \int_{D'} e^{-s \sqrt{n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \log(x_i)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \log(x_i) \right)^2 \right)}} F(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_{n-1} \dots dx_1,$$

wobei

$$D' := \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : 0 < x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{-1} \right\}$$

gesetzt wird. Da $D' = D$ ist, folgt die Behauptung. \square

Sei nun

$$\alpha_n := \max\{i(n-i) : 1 \leq i \leq n-1\} = \begin{cases} \frac{n^2}{4}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{(n-1)(n+1)}{4}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Man beachte, mit der Notation aus §3.2.1, dass $\alpha_n = \max\{\langle \lambda_i, 2\rho \rangle : 1 \leq i \leq n-1\}$ ist, wobei $2\rho = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)\chi_{i,i+1}$ die *Summe der positiven Wurzeln* Φ^+ bezeichnet. Wir werden in §5.4 zeigen, dass das Produkt über alle v -adischen lokalen Höhenintegrale

$$\prod_{v \in M_k} \mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s)$$

für $\mathrm{Re}(s) \geq \alpha_n + \frac{1}{2}$ holomorph ist, mit Ausnahme eines einfachen Pols in $s = \alpha_n + \frac{1}{2}$, vergleiche Satz 5.4.2. Der folgende Satz zeigt, dass die archimedischen lokalen Höhenintegrale keinen Einfluss auf diesen Pol haben:

Satz 5.2.2. *Sei $v \in M_k^\infty$ eine archimedische Bewertung von k . Dann ist das v -adische lokale Höhenintegral $\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > \alpha_n + \frac{1}{4}$ eine holomorphe Funktion.*

Beweis. Sei $\beta_n := \alpha_n + \frac{1}{4}$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) \geq \beta_n$. Wir übernehmen die Notation aus der vorhergehenden Proposition. Dann gilt für alle $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$

$$\begin{aligned} & \left| F(x_1, \dots, x_{n-1}) e^{-s \sqrt{n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \log(x_i)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \log(x_i) \right)^2 \right)}} \right| \\ & \leq F(x_1, \dots, x_{n-1}) e^{-\beta_n \sqrt{n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \log(x_i)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \log(x_i) \right)^2 \right)}}. \end{aligned}$$

Folglich reicht es nach [Els05, IV, Satz 5.8] zu zeigen, dass

$$\int_D F(x_1, \dots, x_{n-1}) e^{-\beta_n \sqrt{n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \log(x_i)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \log(x_i) \right)^2 \right)}} dx_{n-1} \dots dx_1 \quad (\spadesuit)$$

endlich ist. Dies folgt direkt aus den folgenden Aussagen. □

Wir behalten weiterhin die Notation aus Proposition 5.2.1 bei. Um das Integral (\spadesuit) geeignet abzuschätzen, werden wir als ersten Schritt den Integrationsbereich D in Teilbereiche D_i unterteilen. Anschließend werden wir die Endlichkeit der dadurch definierten Teilintegrale zeigen.

Lemma 5.2.3. *Es ist*

$$D = \bigsqcup_{i=1}^{n-1} D_i,$$

wobei

$$D_{n-1} := \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : 0 < x_1 \leq 1, x_{j-1} \leq x_j \leq 1 \text{ für alle } 2 \leq j \leq n-1 \right\}$$

und für alle $1 \leq i \leq n-2$

$$D_i := \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : 0 < x_1 \leq 1, x_{j-1} \leq x_j \leq 1 \text{ für alle } 2 \leq j \leq i, \right. \\ \left. 1 < x_{i+1} \leq \left(\prod_{l=1}^i x_l \right)^{-1/(n-i)} \text{ und } x_{j-1} \leq x_j \leq \left(\prod_{l=1}^{j-1} x_l \right)^{-1/(n-j+1)} \right. \\ \left. \text{für alle } i+2 \leq j \leq n-1 \right\}.$$

Beweis. Nach Konstruktion sind die Mengen D_i für alle $1 \leq i \leq n-1$ disjunkt. Ferner lässt sich per Induktion leicht zeigen, dass

$$\bigsqcup_{i=m}^{n-1} D_i = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : 0 < x_1 \leq 1, x_{j-1} \leq x_j \leq 1 \text{ für alle } 2 \leq j \leq m, \right. \\ \left. \text{und } x_{j-1} \leq x_j \leq \left(\prod_{l=1}^{j-1} x_l \right)^{-1/(n-j+1)} \text{ für alle } m+1 \leq j \leq n-1 \right\}$$

für alle $1 \leq m \leq n-1$ gilt, woraus die Behauptung folgt. \square

Auf den Teilbereichen D_i erhalten wir die folgenden Abschätzungen:

Lemma 5.2.4. *Sei $1 \leq i \leq n-1$ und $\beta_n = \alpha_n + \frac{1}{4}$. Dann gilt für alle $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D_i$*

$$e^{-\beta_n \sqrt{n \left(\sum_{l=1}^{n-1} \log(x_l)^2 + \left(\sum_{l=1}^{n-1} \log(x_l) \right)^2 \right)}} \leq \prod_{l=1}^i x_l^{2n-1}.$$

Beweis. Sei $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D_i$. Dann gilt $0 < x_1 \leq \dots \leq x_i \leq 1$ und daher

$$\prod_{l=1}^i x_l^{2n-1} = e^{-(2n-1) \sqrt{\left(\sum_{l=1}^i \log(x_l) \right)^2}}.$$

Folglich reicht es zu zeigen, dass

$$\frac{n\beta_n^2}{(2n-1)^2} \left(\sum_{l=1}^{n-1} \log(x_l)^2 + \left(\sum_{l=1}^{n-1} \log(x_l) \right)^2 \right) \geq \left(\sum_{l=1}^i \log(x_l) \right)^2$$

ist. Ist $n \geq 7$, so gilt $\frac{n\beta_n^2}{(2n-1)^2} \geq n-1$ und somit

$$\frac{n\beta_n^2}{(2n-1)^2} \left(\sum_{l=1}^{n-1} \log(x_l)^2 + \left(\sum_{l=1}^{n-1} \log(x_l) \right)^2 \right) \geq (n-1) \sum_{l=1}^i \log(x_l)^2 \\ \geq i \sum_{l=1}^i \log(x_l)^2 - \sum_{1 \leq j < m \leq i} (\log(x_j) - \log(x_m))^2 = \left(\sum_{l=1}^i \log(x_l) \right)^2.$$

Ist $n \leq 6$, so kann die Ungleichung fallweise durch ähnliche quadratische Ergänzungen überprüft werden. \square

Lemma 5.2.5. *Für alle $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$ gilt*

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{-(2n-2i+1)}.$$

Beweis. Sei $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$. Dann ist $0 < x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{-1}$ und daher

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_{n-1}) &= \prod_{1 \leq i < j < n} \left(\frac{x_j}{x_i} - \frac{x_i}{x_j} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i^2 \prod_{l=1}^{n-1} x_l} - \prod_{l=1}^{n-1} x_l \right) \\ &\leq \prod_{1 \leq i < j < n} \left(\frac{x_j}{x_i} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i^2 \prod_{l=1}^{n-1} x_l} \right) = \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{-(n-2i)} \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{-(n+1)} \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{-(2n-2i+1)}. \end{aligned}$$

\square

Satz 5.2.2 ergibt sich nun direkt aus der Endlichkeit der folgenden Integrale:

Proposition 5.2.6. *Sei $\beta_n = \alpha_n + \frac{1}{4}$. Dann gilt für alle $1 \leq i \leq n-1$*

$$\int_{D_i} F(x_1, \dots, x_{n-1}) e^{-\beta_n \sqrt{n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \log(x_i)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \log(x_i) \right)^2 \right)}} dx_{n-1} \dots dx_1 < \infty.$$

Beweis. Mit Lemma 5.2.4 und Lemma 5.2.5 gilt

$$\begin{aligned} &\int_{D_i} F(x_1, \dots, x_{n-1}) e^{-\beta_n \sqrt{n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \log(x_i)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \log(x_i) \right)^2 \right)}} dx_{n-1} \dots dx_1 \\ &\leq \int_{D_i} \prod_{l=1}^{n-1} x_l^{-(2n-2l+1)} \prod_{l=1}^i x_l^{2n-1} dx_{n-1} \dots dx_1 \\ &= \int_{D_i} \prod_{l=1}^i x_l^{2l-2} \prod_{l=i+1}^{n-1} x_l^{-(2n-2l+1)} dx_{n-1} \dots dx_1 \\ &= \int_0^1 \int_{x_1}^1 \dots \int_{x_{i-1}}^1 \prod_{l=1}^i x_l^{2l-2} f(x_1, \dots, x_i) dx_i \dots dx_1, \end{aligned}$$

wobei $f(x_1, \dots, x_i) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_i]$ geeignet gewählt wurde. Da der Integrand nun nur noch ein Polynom ist, ist das Integral endlich und die Behauptung folgt. \square

5.3 Die nicht-archimedischen lokalen Höhenintegrale

Sei nun $v \in M_k^0$ eine nicht-archimedische Bewertung von k . Wir erinnern uns daran, dass die folgenden Bezeichnungen für das Bruhat-Tits-Gebäude $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ von $\mathrm{SL}_n(k_v)$ in §3.2 und den Beispielen in §4.2 eingeführt wurden. In diesem Abschnitt werden wir das nicht-archimedische lokale Höhenintegral

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s) = \int_{\mathrm{SL}_n(k_v)} H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A_v)^{-s} d\mu_v(A_v)$$

genauer bestimmen. Hierfür betrachten wir, wie in Beispiel 4.2.50, die Cartan-Zerlegung von $\mathrm{SL}_n(k_v)$ bezüglich $K_v = \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v)$. Es gilt

$$\mathrm{SL}_n(k_v) = \bigsqcup_{t_v^+ \in \widehat{T}_v^+} K_v t_v^+ K_v,$$

wobei

$$\widehat{T}_v^+ := \left\{ \mathrm{diag}(\pi_v^{a_1}, \dots, \pi_v^{a_n}) : a_i \in \mathbb{Z}, a_1 \leq \dots \leq a_n \text{ und } \sum_{i=1}^n a_i = 0 \right\}$$

ist. Da die v -adische lokale Höhenfunktion $H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ auf den Doppelnebenklassen $K_v t_v^+ K_v$ für alle $t_v^+ \in \widehat{T}_v^+$ konstant ist, vergleiche Bemerkung 2.1.5, ergibt sich für das lokale Höhenintegral

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s) = \int_{\mathrm{SL}_n(k_v)} H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A_v)^{-s} d\mu_v(A_v) = \sum_{t_v^+ \in \widehat{T}_v^+} H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(t_v^+)^{-s} \mathrm{vol}(K_v t_v^+ K_v). \quad (\diamond)$$

Als ersten Schritt werden wir daher das Volumen $\mathrm{vol}(K_v t_v^+ K_v)$ für jedes $t_v^+ \in \widehat{T}_v^+$ bestimmen. Da $\mathrm{vol}(K_v) = \mathrm{vol}(A_v K_v) = 1$ für alle $A_v \in \mathrm{SL}_n(k_v)$ gilt, ist

$$\mathrm{vol}(K_v t_v^+ K_v) = \#\{A_v K_v : A_v \in \mathrm{SL}_n(k_v) \text{ und } A_v K_v \subseteq K_v t_v^+ K_v\},$$

d.h. $\mathrm{vol}(K_v t_v^+ K_v)$ ist gleich der Anzahl der Linksnebenklassen von K_v in der Doppelnebenklasse $K_v t_v^+ K_v$. Diese Anzahl wurde von Nagayoshi Iwahori in [Iwa66] berechnet. Um die genaue Formel anzugeben, werden wir zunächst noch ein paar Begriffe einführen:

Die affine Weyl-Gruppe W_{aff} von SL_n bezüglich des Torus der Diagonalmatrizen \mathbf{T} ist eine *Coxeter-Gruppe*¹ mit Erzeugendensystem $S := \{s_i : 0 \leq i \leq n-1\}$, wobei $s_0 := s_{1,n;1}$ und $s_i := s_{i,i+1;0} = w_{(i,i+1)}$ für $1 \leq i \leq n-1$ gilt, vergleiche §3.2.1. Die Weyl-Gruppe W wird von $S_0 := S \setminus \{s_0\}$ erzeugt. Für ein $\mathrm{id} \neq w \in W_{aff}$ wird die kleinste Zahl $r \in \mathbb{N}$ mit $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ für geeignete $i_1, \dots, i_r \in \{0, \dots, n-1\}$ *Länge* von w bezüglich S genannt und mit $l(w)$ bezeichnet. Weiter ist $l(\mathrm{id}) := 0$. Analog kann auch ein Längenbegriff für W bezüglich S_0 eingeführt werden. Dieser entspricht der Einschränkung der Länge von

¹Näheres zu Coxeter-Gruppen ist zum Beispiel in [Bou02, Chapter IV, §1] zu finden.

W_{aff} auf W . Für eine Teilmenge $X \subseteq W_{aff}$ definieren wir das *Poincaré-Polynom* von X in der Unbestimmten t als

$$X(t) := \sum_{x \in X} t^{l(x)}.$$

Sei $t_v^+ = \text{diag}(\pi_v^{a_1}, \dots, \pi_v^{a_n}) \in \widehat{T}_v^+$. Dann ist

$$\lambda_{t_v^+} := \nu_{v,0}(t_v^+) = \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \in P^+$$

eine Kowurzel, d.h. insbesondere ein Element von W_{aff} . Weiter ist $\lambda_{t_v^+}(\pi_v) = t_v^+$ und $\lambda_{t_v^+} \neq \lambda_{t_v^{+'}}$ falls $t_v^+ \neq t_v^{+'}$. Nach [Bou02, IV, §1, Exercise 3] existiert ein eindeutiger Repräsentant kleinster Länge $w_{t_v^+} \in W_{aff}$ der Doppelnebenklasse $W\lambda_{t_v^+}W$. Darüber hinaus schreiben wir $W_{t_v^+}$ für den Stabilisator von $\lambda_{t_v^+}$ in W . Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Lemma 5.3.1. *Sei $t_v^+ \in \widehat{T}_v^+$. Dann gilt*

$$W(t) = W_{t_v^+}(t)W^{t_v^+}(t)$$

mit $W^{t_v^+} := \{w \in W : l(wx) \geq l(w) \text{ für alle } x \in W_{t_v^+}\}$.

Beweis. Sei $t_v^+ \in \widehat{T}_v^+$. Nach [Hum90, §1.12, Theorem] gibt es eine Teilmenge $I_{t_v^+} \subseteq S_0$, so dass

$$W_{t_v^+} = W_{I_{t_v^+}}$$

gilt, wobei $W_{I_{t_v^+}}$ die von $I_{t_v^+}$ erzeugte Untergruppe von W bezeichnet. Folglich ist nach [Hum90, §1.11]

$$W(t) = W_{t_v^+}(t)U^{t_v^+}(t)$$

mit $U^{t_v^+} := \{w \in W : l(ws) > l(w) \text{ für alle } s \in I_{t_v^+}\}$. Die Behauptung folgt nun aus [Hum90, §1.10, Proposition]. \square

Proposition 5.3.2. *Sei $t_v^+ \in \widehat{T}_v^+$. Dann gilt*

$$\text{vol}(K_v t_v^+ K_v) = W^{t_v^+}(q_v) q_v^{l(w_{t_v^+})} = \frac{W(q_v)}{W_{t_v^+}(q_v)} q_v^{l(w_{t_v^+})}.$$

Beweis. Da das Volumen gleich der Anzahl der Linksnebenklassen von K_v in der Doppelnebenklasse $K_v t_v^+ K_v$ ist, folgt die Aussage mit Lemma 5.3.1 direkt aus [Iwa66, §5, Example 1]. \square

Da die Anzahl der Linksnebenklassen von K_v in $K_v t_v^+ K_v$ gleich der Mächtigkeit der Bahn von $t_v^+ K_v$ unter der Wirkung von K_v auf $\text{SL}_n(k_v)/K_v$ ist, können wir das Volumen $\text{vol}(K_v t_v^+ K_v)$ noch auf eine weitere, Gebäude-theoretische, Weise interpretieren. Diese

wird uns die Berechnung des Höhenintegrals erleichtern. Sei dazu $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ das Bruhat-Tits-Gebäude von $\mathrm{SL}_n(k_v)$, \mathcal{L}_v^* seine Eckenmenge, τ_v die Färbung aus Korollar 3.2.10 und

$$\widehat{\mathcal{L}}_v^* = \left\{ \left\{ \mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1} v_1, \dots, \pi_v^{a_n} v_n) \right\} \in \mathcal{L}_v^* : \{v_1, \dots, v_n\} \text{ ist } \mathcal{O}_v\text{-Basis von } L_v, a_i \in \mathbb{Z}, \right. \\ \left. a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \text{ und } \sum_{i=1}^n a_i = 0 \right\} = \{x \in \mathcal{L}_v^* : \tau_v(x) = 0\} \subseteq \mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}.$$

Die Menge $\widehat{\mathcal{L}}_v^*$ ist nach Proposition 3.2.4 die Bahn von $u_v = \{L_v\}$ unter der Wirkung von $\mathrm{SL}_n(k_v)$ auf $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$, wobei $L_v \subseteq k_v^n$ das Standardgitter bezeichnet. Da K_v unter dieser Wirkung der Stabilisator von u_v ist, können wir $\mathrm{SL}_n(k_v)/K_v$ mit $\widehat{\mathcal{L}}_v^*$ identifizieren. Diese Identifizierung ist mit den jeweiligen Wirkungen von $\mathrm{SL}_n(k_v)$ verträglich. Insbesondere erhalten wir $\mathrm{vol}(K_v t_v^+ K_v)$ als die Mächtigkeit der K_v -Bahn von $t_v^+ u_v$ in $\widehat{\mathcal{L}}_v^*$.

Diese Bahn wollen wir nun mit Hilfe einiger Ergebnisse aus James Parkinsons Arbeit [Par06a] beschreiben. In dieser Arbeit untersucht Parkinson Beziehungen zwischen Gebäuden und *Hecke-Algebren*. Der für uns relevante Teil des Artikels ist eine Verallgemeinerung einiger Resultate seines Doktorvaters Donald Cartwright aus [Car01]. Es werden reguläre Gebäude im Allgemeinen betrachtet, die nicht zwangsläufig als Bruhat-Tits-Gebäude einer algebraischen Gruppe realisierbar sein müssen. Genauer werden gewisse Operatoren auf den Mengen der Kammern bzw. der Ecken des Gebäudes definiert, die davon erzeugten Algebren untersucht und als Hecke-Algebren bzw. Zentren von Hecke-Algebren realisiert. In diesem Zusammenhang hat Parkinson die folgenden Objekte eingeführt, die wir nun für den Spezialfall des Bruhat-Tits-Gebäudes von $\mathrm{SL}_n(k_v)$ betrachten werden:

Definition 5.3.3. Sei \mathcal{A} ein Apartment in $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$. Weiter sei τ_v die Färbung von $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$ aus Korollar 3.2.10 und τ die Färbung von $\Sigma(W_{aff})$ aus Lemma 3.2.1. Ein Isomorphismus von Simplizialkomplexen $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \Sigma(W_{aff})$ heißt *Typ-rotierend*, falls es eine Zahl $l \in \mathbb{Z}$ mit $\tau(\varphi(x)) = (\tau_v(x) + l) \bmod n$ für jede Ecke x in \mathcal{A} gibt. Ist $l = 0$, d.h. gilt $\tau(\varphi(x)) = \tau_v(x)$ für jede Ecke x in \mathcal{A} , so heißt φ *Typ-erhaltend*.

Bemerkung 5.3.4. Man kann leicht überprüfen, dass diese Definition mit Definition 5.1 in [Par06a] übereinstimmt.

Bemerkung 5.3.5. Bezeichnet $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine k_v -Basis von k_v^n und \mathcal{A}_v^B das zugehörige Apartment in $\mathcal{B}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}$, so ist $\varphi_v^B : \mathcal{A}_v^B \rightarrow \Sigma(W_{aff})$ aus dem Beweis von Proposition 3.2.7 ein Typ-rotierender Isomorphismus. Denn ist $x = \left\{ \mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1} v_1, \dots, \pi_v^{a_n} v_n) \right\} \in \mathcal{A}_v^B$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$\begin{aligned} \tau(\varphi_v^B(x)) &= \tau\left(\sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \lambda_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(a_{i+1} - a_i)\right) \bmod n \\ &= \left(\sum_{i=2}^n (n-i+1)a_i - \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)a_i\right) \bmod n = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \bmod n \\ &= (\tau_v(x) - \mathrm{ord}_v(\det(v_1, \dots, v_n))) \bmod n. \end{aligned}$$

Ist B eine \mathcal{O}_v -Basis von L_v , so ist $\det(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{O}_v^*$ und der Isomorphismus φ_v^B sogar Typ-erhaltend.

Wir betrachten die folgenden Mengen, wobei $\xi \in \mathcal{A}$, wie immer, ein ausgewählter Punkt mit $\langle \xi - 0, \chi_{i,i+1} \rangle \in \mathbb{Z}$ für alle $1 \leq i < n$ ist:

Definition 5.3.6. Sei $x \in \mathcal{L}_v^*$ und $\lambda \in P^+$. Wir setzen

$V_\lambda(x) := \{y \in \mathcal{L}_v^* : \text{es gibt ein Apartment } \mathcal{A} \text{ in } \mathcal{B}_{\text{SL}_n(k_v)} \text{ und einen Typ-rotierenden Isomorphismus } \varphi : \mathcal{A} \rightarrow \Sigma(W_{\text{aff}}), \text{ so dass } x, y \in \mathcal{A}, \varphi(x) = \xi \text{ und } \varphi(y) = \lambda + \xi \text{ gilt}\}.$

Es gilt:

Proposition 5.3.7 ([Par06a], Proposition 5.6 und Lemma 5.9). (a) Für je zwei Ecken $x, y \in \mathcal{L}_v^*$ gibt es ein $\lambda \in P^+$ mit $y \in V_\lambda(x)$.

(b) Ist $x \in \mathcal{L}_v^*$, $\lambda, \lambda' \in P^+$ und existiert ein $y \in V_\lambda(x) \cap V_{\lambda'}(x)$, so ist $\lambda = \lambda'$.

(c) Sei $x \in \mathcal{L}_v^*$, $\lambda \in P^+$ und $y \in V_\lambda(x)$. Ist weiter \mathcal{A} ein Apartment in $\mathcal{B}_{\text{SL}_n(k_v)}$ mit $x, y \in \mathcal{A}$, so gibt es einen Typ-rotierenden Isomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \Sigma(W_{\text{aff}})$ mit $\varphi(x) = \xi$ und $\varphi(y) = \lambda + \xi$.

(d) Sei $x \in \mathcal{L}_v^*$, $\lambda \in P^+$ und $y, y' \in V_\lambda(x)$. Dann gilt $\tau_v(y) = \tau_v(y')$.

Bemerkung 5.3.8. Aus den Punkten (a) und (b) der obigen Proposition folgt insbesondere für jede Ecke $x \in \mathcal{L}_v^*$

$$\mathcal{L}_v^* = \bigsqcup_{\lambda \in P^+} V_\lambda(x).$$

Die $\text{SL}_n(k_v)$ -Bahn $\widehat{\mathcal{L}_v^*}$ von u_v in \mathcal{L}_v^* lässt sich analog beschreiben, siehe Korollar 5.3.11.

Wie wir schon in Proposition 5.3.2 gesehen haben, hängt das Volumen $\text{vol}(K_v t_v^+ K_v)$ für ein $t_v^+ \in \widehat{T}_v^+$ eng mit dem dominanten Kogewicht $\lambda_{t_v^+}$ zusammen. Daher werden wir die Menge der dominanten Kogewichte genauer untersuchen:

Lemma 5.3.9. Es gilt $\{\lambda_{t_v^+} : t_v^+ \in \widehat{T}_v^+\} = \{\lambda \in P^+ : \tau(\lambda + \xi) = 0\}$.

Beweis. Sei $t_v^+ \in \widehat{T}_v^+$. Dann ist $\lambda_{t_v^+} = \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \lambda_i$ für geeignete $a_i \in \mathbb{Z}$ mit $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ und $\sum_{i=1}^n a_i = 0$. Folglich ist $\lambda_{t_v^+} \in P^+$ und

$$\tau(\lambda_{t_v^+} + \xi) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(a_{i+1} - a_i) \right) \bmod n = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \bmod n = 0.$$

Weiter gibt es für jedes $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} b_i \lambda_i \in P^+$ mit $\tau(\lambda + \xi) = 0$ ein $l \in \mathbb{Z}$ mit $\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)b_i = nl$. Wir setzen $a_i := \left(\sum_{j=1}^{i-1} b_j \right) - l$ für $1 \leq i \leq n$. Dann ist $a_i \in \mathbb{Z}$ mit $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ und

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{j=1}^{i-1} b_j \right) - l \right) = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)b_i - nl = 0,$$

d.h. $t := \mathrm{diag}(\pi_v^{a_1}, \dots, \pi_v^{a_n}) \in \widehat{T}_v^+$ und $\lambda = \lambda_t$. \square

Lemma 5.3.10. *Sei $\lambda \in P^+$ mit $\tau(\lambda + \xi) = 0$. Dann ist*

$$V_\lambda(u_v) = \{x = \{\mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1} v_1, \dots, \pi_v^{a_n} v_n)\} : B = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ ist } \mathcal{O}_v\text{-Basis von } L_v, \\ a_i \in \mathbb{Z} \text{ und } \varphi_v^B(x) = \lambda + \xi\} \subseteq \widehat{\mathcal{L}}_v^*.$$

Beweis. Sei $\lambda \in P^+$ mit $\tau(\lambda + \xi) = 0$. Sei weiter $x = \{\mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1} v_1, \dots, \pi_v^{a_n} v_n)\} \in \widehat{\mathcal{L}}_v^*$ mit einer \mathcal{O}_v -Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ von L_v , $a_i \in \mathbb{Z}$ und $\varphi_v^B(x) = \lambda + \xi$. Nach Bemerkung 5.3.5 ist φ_v^B Typ-erhaltend. Weiter ist nach Konstruktion $\varphi_v^B(u_v) = \xi$ und somit $x \in V_\lambda(u_v)$.

Sei nun $x \in V_\lambda(u_v)$ und $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} b_i \lambda_i$ für geeignete $b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Weiter sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine beliebige \mathcal{O}_v -Basis von L_v . Dann setzen wir $a_1 := 0$ und $a_i := \sum_{j=1}^{i-1} b_j$ für $2 \leq i \leq n$. Folglich gilt $\varphi_v^B(u_v) = \xi$ und $\varphi_v^B(y) = \lambda + \xi$ für $y := \{\mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1} v_1, \dots, \pi_v^{a_n} v_n)\}$, d.h. auch $y \in V_\lambda(u_v)$. Da φ_v^B nach Bemerkung 5.3.5 Typ-erhaltend ist, folgt $\tau_v(y) = \tau(\lambda + \xi) = 0$. Mit Proposition 5.3.7(d) erhalten wir insbesondere $\tau_v(x) = 0$, d.h. $x \in \widehat{\mathcal{L}}_v^*$ und es gibt eine \mathcal{O}_v -Basis $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ von L_v und $c_i \in \mathbb{Z}$ mit $x = \{\mathrm{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{c_1} w_1, \dots, \pi_v^{c_n} w_n)\}$, $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$ und $\sum_{i=1}^n c_i = 0$. Nach Konstruktion in $\varphi_v^{B'}(u_v) = \xi$ und $\varphi_v^{B'}(x) = \lambda' + \xi$ für ein $\lambda' \in P^+$, d.h. $x \in V_{\lambda'}(u_v)$. Mit Proposition 5.3.7(b) folgt $\lambda = \lambda'$ und daher auch die Behauptung. \square

Korollar 5.3.11. *Es gilt*

$$\widehat{\mathcal{L}}_v^* = \bigsqcup_{\substack{\lambda \in P^+, \\ \tau(\lambda + \xi) = 0}} V_\lambda(u_v).$$

Beweis. Eine Inklusion ist mit obigem Lemma offensichtlich. Für die andere Inklusion sei $x \in \widehat{\mathcal{L}}_v^*$. Dann ist $\tau_v(x) = 0$ und es gibt eine \mathcal{O}_v -Basis B von L_v und ein $\lambda \in P^+$ mit $x \in \mathcal{A}_v^B$, $\varphi_v^B(u_v) = \xi$ und $\varphi_v^B(x) = \lambda + \xi$. Da φ_v^B nach Bemerkung 5.3.5 ein Typ-erhaltender Isomorphismus ist, folgt $x \in V_\lambda(u_v)$ und $\tau(\lambda + \xi) = \tau_v(x) = 0$. Die Disjunktheit der Vereinigung folgt aus Proposition 5.3.7(b). \square

Mit diesen Beobachtungen ergibt sich für die K_v -Bahn von $t_v^+ u_v$:

Proposition 5.3.12. *Sei $t_v^+ \in \widehat{T}_v^+$. Dann gilt $K_v(t_v^+ u_v) = V_{\lambda_{t_v^+}}(u_v)$. Insbesondere ist $\mathrm{vol}(K_v t_v^+ K_v) = |V_{\lambda_{t_v^+}}(u_v)|$.*

Beweis. Sei $t_v^+ \in \widehat{T}_v^+$ und seien $a_i \in \mathbb{Z}$ geeignet mit $t_v^+ = \text{diag}(\pi_v^{a_1}, \dots, \pi_v^{a_n})$. Weiter sei $A_v \in K_v = \text{SL}_n(\mathcal{O}_v)$. Dann ist $A_v t_v^+ u_v = \{\text{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{a_1} v_1, \dots, \pi_v^{a_n} v_n)\}$, wobei v_i die i -te Spalte von A_v bezeichnet. Weiter ist $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ eine \mathcal{O}_v -Basis von L_v und $\varphi_v^B(A_v t_v^+ u_v) = \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \lambda_i + \xi = \lambda_{t_v^+} + \xi$, d.h. $A_v t_v^+ u_v \in V_{\lambda_{t_v^+}}(u_v)$ nach Lemma 5.3.9 und Lemma 5.3.10.

Ist umgekehrt $x \in V_{\lambda_{t_v^+}}(u_v)$, so gibt es nach Lemma 5.3.9 und Lemma 5.3.10 eine \mathcal{O}_v -Basis $B := \{v_1, \dots, v_n\}$ und $b_i \in \mathbb{Z}$ mit $x = \{\text{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{b_1} v_1, \dots, \pi_v^{b_n} v_n)\}$ und $\varphi_v^B(x) = \lambda_{t_v^+} + \xi$. Insbesondere ist $a_{i+1} - a_i = b_{i+1} - b_i$ für alle $1 \leq i \leq n-1$. Folglich gilt $x_v := M(v_1, \dots, v_n) \in K_v$ und

$$x = x_v \{\text{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{b_1} e_1, \dots, \pi_v^{b_n} e_n)\} = x_v \{\pi_v^{a_1 - b_1} \text{Span}_{\mathcal{O}_v}(\pi_v^{b_1} e_1, \dots, \pi_v^{b_n} e_n)\} = x_v t_v^+ u_v,$$

d.h. x liegt in der K_v -Bahn von $t_v^+ u_v$. \square

Mit den Ergebnissen von Parkinson ergibt sich damit eine weitere Darstellung von $\text{vol}(K_v t_v^+ K_v)$:

Korollar 5.3.13. *Sei $t_v^+ \in \widehat{T}_v^+$. Dann gilt*

$$\text{vol}(K_v t_v^+ K_v) = \frac{W(q_v^{-1})}{W_{t_v^+}(q_v^{-1})} q_v^{\langle \lambda_{t_v^+}, 2\rho \rangle},$$

wobei 2ρ die Summe der positiven Wurzeln Φ^+ bezeichnet.

Beweis. Sei $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ ein beliebiger $(n-2)$ -Simplex (Paneel) in $\mathcal{B}_{\text{SL}_n(k_v)}$. Wir müssen zeigen, dass die Anzahl der Ecken $x_0 \in \mathcal{L}_v^*$ für die $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ ein $(n-1)$ -Simplex (Kammer) in $\mathcal{B}_{\text{SL}_n(k_v)}$ ist, gleich $q_v + 1$ ist. Die Aussage folgt dann direkt aus [Par06b, Proposition 1.5 und Proposition A.1]. Nach Proposition 3.2.7(a) gibt es für jedes $1 \leq i \leq n-1$ einen Vertreter $L_i \in x_i$ mit

$$\pi_v L_1 \subsetneq L_{n-1} \subsetneq \dots \subsetneq L_2 \subsetneq L_1.$$

Setzen wir $L_n := \pi_v L_1$, so existiert aus Dimensionsgründen ein $1 \leq j \leq n-1$, für das $L_j/L_{j+1} \cong (\mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v)^2$ und $L_i/L_{i+1} \cong \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$ für alle $i \neq j$ ist. Insbesondere gibt es genau $\frac{q_v^2-1}{q_v-1} = q_v + 1$ viele paarweise verschiedene Gitter $L \subseteq k_v^n$ mit $L_{j+1} \subsetneq L \subsetneq L_j$ und kein echtes Gitter zwischen L_{i+1} und L_i falls $i \neq j$. Daher erhalten wir genau $q_v + 1$ viele verschiedene Möglichkeiten die Folge $\pi_v L_1 \subsetneq L_{n-1} \subsetneq \dots \subsetneq L_1$ zu einer maximalen Folge zu erweitern. Mit Proposition 3.2.7(a) und Bemerkung 3.2.6(b) folgt die Behauptung. \square

Wenden wir uns nun der lokalen Höhe von t_v^+ zu:

Lemma 5.3.14. *Sei $t_v^+ \in \widehat{T}_v^+$. Dann ist*

$$H_{\text{SL}_n(k_v)}(t_v^+) = q_v^{\sum_{i=1}^{n-1} \langle \lambda_{t_v^+}, \chi_{i,i+1} \rangle}.$$

Beweis. Sei $t_v^+ = \mathrm{diag}(\pi_v^{a_1}, \dots, \pi_v^{a_n})$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ und $\sum_{i=1}^n a_i = 0$. Dann ist nach Proposition 3.2.16

$$H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(t_v^+) = q_v^{a_n - a_1} = q_v^{\sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)} = q_v^{\sum_{i=1}^{n-1} \langle \lambda_{t_v^+}, \chi_{i,i+1} \rangle}.$$

□

Zusammengefasst erhalten wir für die nicht-archimedischen lokalen Höhenintegrale die folgende Form:

Satz 5.3.15. *Sei $v \in M_k^0$ eine nicht-archimedische Bewertung von k . Dann gilt*

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s) = \sum_{\substack{\lambda \in P^+, \\ \tau(\lambda + \xi) = 0}} \frac{W(q_v^{-1})}{W_\lambda(q_v^{-1})} q_v^{\langle \lambda, 2\rho \rangle - (\sum_{i=1}^{n-1} \langle \lambda, \chi_{i,i+1} \rangle) s},$$

wobei W_λ den Stabilisator von λ in W und $2\rho = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)\chi_{i,i+1}$ die Summe der positiven Wurzeln Φ^+ bezeichnet.

Beweis. Die Behauptung folgt mit (\diamond) sofort aus Lemma 5.3.9, Korollar 5.3.13 und Lemma 5.3.14. □

Die Menge der dominanten Kogewichte vom Typ 0 lässt sich weiter wie folgt beschreiben:

Lemma 5.3.16. *Es gilt*

$$\{\lambda \in P^+ : \tau(\lambda + \xi) = 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} a_i \lambda_i : (a_1, \dots, a_{n-1}) \in M \right\},$$

wobei

$$M := \left\{ \left(m_1, \dots, m_{n-2}, nm_{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n-2} im_i \right) \bmod n \right) : m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ für alle } 1 \leq i \leq n-1 \right\}$$

und $(x) \bmod n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ den eindeutigen Rest r mit $0 \leq r < n$ bei der euklidischen Division einer Zahl $x \in \mathbb{Z}$ durch n bezeichnet.

Beweis. Wir zeigen beide Inklusionen. Sei $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \lambda_i$ mit $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in M$. Dann gibt es $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $(a_1, \dots, a_{n-1}) = (m_1, \dots, m_{n-2}, nm_{n-1} + (\sum_{i=1}^{n-2} im_i) \bmod n)$. Es folgt $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ für alle $1 \leq i \leq n-1$ und

$$\tau(\lambda + \xi) = \left(\sum_{i=1}^{n-2} (n-i)m_i + nm_{n-1} + \left(\sum_{i=1}^{n-2} im_i \right) \bmod n \right) \bmod n = 0.$$

Sei nun $\lambda \in P^+$ mit $\tau(\lambda + \xi) = 0$. Weiter seien $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \lambda_i$. Dann existiert ein $l \in \mathbb{Z}$ mit $\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)a_i = nl$ und folglich gilt

$$a_{n-1} = nl - \sum_{i=1}^{n-2} (n-i)a_i = nl - \sum_{i=1}^{n-2} (n-i)a_i - \left(\sum_{i=1}^{n-2} ia_i \right) \bmod n + \left(\sum_{i=1}^{n-2} ia_i \right) \bmod n.$$

Sei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundungsfunktion (Gauß-Klammer) und $\lceil \cdot \rceil$ die Aufrundungsfunktion. Dann gilt $(x) \bmod n = x - n \lfloor \frac{x}{n} \rfloor$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ und $-\lfloor -y \rfloor = \lceil y \rceil$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Mit diesen Rechenregeln erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n-2} ia_i \right) \bmod n &= \left(- \sum_{i=1}^{n-2} (n-i)a_i \right) \bmod n = - \sum_{i=1}^{n-2} (n-i)a_i - n \left\lfloor \frac{- \sum_{i=1}^{n-2} (n-i)a_i}{n} \right\rfloor \\ &= - \sum_{i=1}^{n-2} (n-i)a_i + n \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^{n-2} (n-i)a_i}{n} \right\rceil \end{aligned}$$

und folglich

$$nl - \sum_{i=1}^{n-2} (n-i)a_i - \left(\sum_{i=1}^{n-2} ia_i \right) \bmod n = nl - n \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^{n-2} (n-i)a_i}{n} \right\rceil \in n\mathbb{Z}_{\geq 0},$$

d.h. $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in M$. □

Dies ermöglicht uns eine weitere Darstellung der nicht-archimedischen lokalen Höhenintegrale:

Satz 5.3.17. *Sei $v \in M_k^0$ eine nicht-archimedische Bewertung von k . Dann existiert ein $F \in \mathbb{Z}[t, u]$ mit $F(t, 0) = 1$, so dass für $\operatorname{Re}(s) > \alpha_n := \max\{i(n-i) : 1 \leq i \leq n-1\}$ gilt*

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s) = F(q_v, q_v^{-s}) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - q_v^{-n(s-i(n-i))}}.$$

Insbesondere ist $\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s)$ für $\operatorname{Re}(s) > \alpha_n$ eine holomorphe Funktion.

Beweis. Mit Satz 5.3.15 und Lemma 5.3.16 gilt für alle $s \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s) = \sum_{\substack{m_i=0, \\ 1 \leq i \leq n-1}}^{\infty} \frac{W(q_v^{-1})}{W_{(\sum_{i=1}^{n-2} m_i \lambda_i + (nm_{n-1} + (\sum_{i=1}^{n-2} im_i) \bmod n) \lambda_{n-1})}(q_v^{-1})} \cdot q_v^{-\left(\sum_{i=1}^{n-2} (s-i(n-i))m_i + (s-(n-1))nm_{n-1} + (s-(n-1))(\sum_{i=1}^{n-2} im_i) \bmod n\right)}.$$

Um $\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s)$ in ein Produkt von geometrischen Reihen umzuformen, spalten wir die Summation über die Parameter m_i für $1 \leq i \leq n-2$ in Restklassen modulo n auf.

Dadurch wird der Rest $(\sum_{i=1}^{n-2} im_i) \bmod n$ von den m_i unabhängig und wir erhalten

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s) = \sum_{\substack{k_i=0, \\ 1 \leq i \leq n-2}}^{n-1} \sum_{\substack{m_i=0, \\ 1 \leq i \leq n-1}}^{\infty} \frac{W(q_v^{-1})q_v^{-\left(\sum_{i=1}^{n-2}(s-i(n-i))k_i+(s-(n-1))\left(\sum_{i=1}^{n-2}ik_i\right) \bmod n\right)}}{W\left(\sum_{i=1}^{n-2}(nm_i+k_i)\lambda_i+(nm_{n-1}+\left(\sum_{i=1}^{n-2}ik_i\right) \bmod n)\lambda_{n-1}\right)(q_v^{-1})} \cdot q_v^{-\left(\sum_{i=1}^{n-1}n(s-i(n-i))m_i\right)}.$$

Die Poincaré-Polynome im Nenner sind von den Parametern m_i mit $1 \leq i \leq n-1$ abhängig. Auch diese Abhängigkeit wollen wir eliminieren, um die geometrischen Reihen zu identifizieren. Wir werden daher die Stabilisatoren W_λ mit $\lambda \in P^+$ genauer bestimmen:

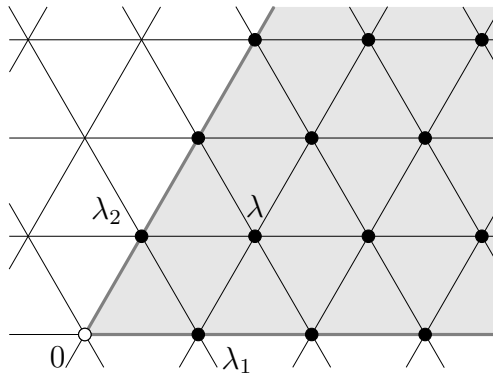


Abbildung 5.1: Die Weyl-Kammer mit den dominanten Kogewichten von SL_3 . Es gibt genau vier Untergruppen von W , die als Stabilisatoren von dominanten Kogewichten auftreten können: $W_0 = W$, W_{λ_1} , W_{λ_2} und $W_\lambda = \{\mathrm{id}\}$.

Sei $S := \{x \in V : \langle x, \chi_{i,i+1} \rangle > 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n-1\}$ die durch $\Delta_\Phi = \{\chi_{i,i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$ definierte Weyl-Kammer in V . Dann ist der Abschluss $\bar{S} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}$ ein polyedrischer Kegel in V und $P^+ = \bar{S} \cap P$. Die Weyl-Gruppe W operiert auf V durch Spiegelungen an den Hyperebenen $H_{ij} = \{x \in V : \langle x, \chi_{ij} \rangle = 0\}$ mit $1 \leq i, j \leq n$ und $i \neq j$. Insbesondere besitzen nur Punkte, die auf diesen Hyperebenen liegen, nichttriviale Stabilisatoren. Darüber hinaus sind Stabilisatoren W_λ von Punkten $0 \neq \lambda \in P^+$, die im relativen Inneren der selben Seite des polyedrischen Kegels \bar{S} liegen, gleich, vergleiche auch Abbildung 5.1. Die Seiten σ des Kegels \bar{S} sind genau von der Form $\sigma = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}\{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}\}$ für Teilmengen $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, n-1\}$. Daher ist $\mathrm{Relint}(\sigma) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}_{> 0}}\{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}\}$ für $\sigma \neq \{0\}$ und es gilt $W_\lambda = W_{\lambda'}$ für $\lambda, \lambda' \in P^+$ genau dann, wenn

$$\{1 \leq i \leq n-1 : \langle \lambda, \chi_{i,i+1} \rangle \neq 0\} = \{1 \leq i \leq n-1 : \langle \lambda', \chi_{i,i+1} \rangle \neq 0\}$$

ist. Folglich lässt sich für jedes Tupel $(0, \dots, 0) \neq (k_1, \dots, k_{n-2}) \in \{0, \dots, n-1\}^{n-2}$ die Reihe

$$\sum_{\substack{m_i=0, \\ 1 \leq i \leq n-1}}^{\infty} \frac{W(q_v^{-1})q_v^{-\left(\sum_{i=1}^{n-2}(s-i(n-i))k_i+(s-(n-1))\left(\sum_{i=1}^{n-2}ik_i\right) \bmod n\right)}}{W\left(\sum_{i=1}^{n-2}(nm_i+k_i)\lambda_i+(nm_{n-1}+\left(\sum_{i=1}^{n-2}ik_i\right) \bmod n)\lambda_{n-1}\right)(q_v^{-1})} q_v^{-\left(\sum_{i=1}^{n-1}n(s-i(n-i))m_i\right)}$$

in eine endliche Summe aus Summanden der Form

$$\frac{W(q_v^{-1})q_v^{-\left(\sum_{i=1}^{n-2}(s-i(n-i))k_i+(s-(n-1))\left(\sum_{i=1}^{n-2}ik_i\right) \bmod n\right)}}{W_\lambda(q_v^{-1})} \sum_{\substack{m_i=1, \\ i \in \{i_1, \dots, i_r\}}}^{\infty} q_v^{-\left(\sum_{i=1}^{n-1}n(s-i(n-i))m_i\right)}$$

für geeignet gewählte nichtleere Teilmengen $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ und $\lambda \in \text{Span}_{\mathbb{Z}_{>0}}\{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}\}$ umformen. Ist $(k_1, \dots, k_{n-2}) = (0, \dots, 0)$, so taucht außerdem 1 genau einmal als Summand auf.

Für $\text{Re}(s) > \alpha_n = \max\{i(n-i) : 1 \leq i \leq n-1\}$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m_i=1, \\ i \in \{i_1, \dots, i_r\}}}^{\infty} q_v^{-\left(\sum_{i=1}^{n-1}n(s-i(n-i))m_i\right)} &= \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_r\}} \frac{q_v^{-n(s-i(n-i))}}{1 - q_v^{-n(s-i(n-i))}} \\ &= \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_r\}} q_v^{-n(s-i(n-i))} \prod_{i \notin \{i_1, \dots, i_r\}} (1 - q_v^{-n(s-i(n-i))}) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - q_v^{-n(s-i(n-i))}}. \end{aligned}$$

Ferner gibt es nach [Bou02, VI, §1, Proposition 17, Corollary 3] ein eindeutiges längstes Element w_0 in W , wobei $l(w_0)$ gleich der Anzahl der positiven Wurzeln in Φ ist. Es folgt $l(w_0) = \frac{n(n-1)}{2}$ und $-l(w_0)$ ist der kleinste Exponent von q_v im Laurent-Polynom $W(q_v^{-1})$. Nach Lemma 5.3.1 ist auch $\frac{W(q_v^{-1})}{W_\lambda(q_v^{-1})}$ ein Laurent-Polynom in der Variable q_v mit ganzzahligen Koeffizienten. Insbesondere ist der kleinste Exponent von q_v in $\frac{W(q_v^{-1})}{W_\lambda(q_v^{-1})}$ größer oder gleich $-l(w_0) = -\frac{n(n-1)}{2}$ und $-\frac{n(n-1)}{2} + n(i_1(n-i_1)) \geq 0$. Wir erhalten

$$\frac{W(q_v^{-1})}{W_\lambda(q_v^{-1})} \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_r\}} q_v^{-n(s-i(n-i))} = f(q_v, q_v^{-s})$$

für ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[t, u]$ mit $f(t, 0) = 0$ und folglich gibt es insgesamt ein $F \in \mathbb{Z}[t, u]$ mit

$$\mathcal{I}_{\text{SL}_n(k_v)}(s) = F(q_v, q_v^{-s}) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - q_v^{-n(s-i(n-i))}}.$$

Da in obigen Termen nur für den Fall $(k_1, \dots, k_{n-2}) = (0, \dots, 0)$ und $\lambda = 0$ ein konstanter Term auftaucht und dann der gesamte Ausdruck gleich 1 ist, gilt $F(t, 0) = 1$. \square

In folgendem Abschnitt werden wir nun das analytische Verhalten des globalen Höhenintegrals bestimmen. Dazu werden wir das Euler-Produkt über die nicht-archimedischen lokalen Höhenintegrale untersuchen. Euler-Produkte dieser Art wurden allgemein in [SW08] betrachtet. Sie stellen eine Verallgemeinerung der Euler-Produkte von Theodor Estermann in [Est28] dar. Siehe auch [Kur84] und [Kur86].

5.4 Das globale Höhenintegral

Zum Abschluss dieser Arbeit werden wir nun das analytische Verhalten des globalen Höhenintegrals

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k)}(s) := \int_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_k)} H_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_k)}(\mathbf{A})^{-s} d\mu(\mathbf{A})$$

bestimmen. Sei dazu wieder 2ρ die Summe der positiven Wurzeln $\Phi^+ = \{\chi_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ und

$$\begin{aligned} \alpha_n &:= \max\{\langle \lambda_i, 2\rho \rangle : 1 \leq i \leq n-1\} \\ &= \max\{i(n-i) : 1 \leq i \leq n-1\} \\ &= \begin{cases} \frac{n^2}{4}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{(n-1)(n+1)}{4}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zunächst betrachten wir das *Euler-Produkt* über die nicht-archimedischen lokalen Höhenintegrale:

Satz 5.4.1. *Das Euler-Produkt*

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k)}^0(s) := \prod_{v \in M_k^0} \mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s)$$

ist holomorph für $\mathrm{Re}(s) \geq \alpha_n + \frac{1}{2}$, mit Ausnahme eines einfachen Pols in $s = \alpha_n + \frac{1}{2}$. Genauer ist

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k)}^0(s) \zeta_k(2(s - \alpha_n))^{-1}$$

für $\mathrm{Re}(s) \geq \alpha_n + \frac{1}{2}$ holomorph fortsetzbar, wobei ζ_k die Dedekindsche Zetafunktion von k bezeichnet.

Beweis. Zuerst werden wir die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ gesondert betrachten. Sei $v \in M_k^0$. Dann gilt für $\mathrm{Re}(s) > \alpha_2 = 1$

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_2(k_v)}(s) = \frac{1 + q_v^{1-2s}}{1 - q_v^{-2(s-1)}}$$

und daher für $\mathrm{Re}(s) > 1 + \frac{1}{2}$

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_2(k)}^0(s) \zeta_k(2(s-1))^{-1} = \prod_{v \in M_k^0} \frac{(1 + q_v^{1-2s})(1 - q_v^{-2(s-1)})}{1 - q_v^{-2(s-1)}} = \prod_{v \in M_k^0} (1 + q_v^{1-2s}).$$

Da nach [SW08, Lemma 5.4] das Euler-Produkt $\prod_{v \in M_k^0} (1 + q_v^{1-2s})$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ eine holomorphe Funktion ist, folgt die Behauptung. Ist $v \in M_k^0$ und $\mathrm{Re}(s) > \alpha_3 = 2$, so erhalten wir

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_3(k_v)}(s) = \frac{f(q_v, q_v^{-s})}{(1 - q_v^{-3(s-2)})^2}$$

mit $f(t, u) := 1 + (t + 2t^2 + 2t^3 + t^4)u^2 + (2t^4 + 2t^5)u^3 + (t^5 + 2t^6 + 2t^7 + t^8)u^4 + t^9u^6$.
Folglich ist für $\operatorname{Re}(s) > 2 + \frac{1}{2}$

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_3(k)}^0(s)\zeta_k(2(s-2))^{-1} = \zeta_k(3(s-2))^2 \prod_{v \in M_k^0} g(q_v, q_v^{-s})$$

mit $g(t, u) := 1 + (t + 2t^2 + 2t^3)u^2 + (2t^4 + 2t^5)u^3 - (2t^8 + 2t^9)u^5 - (2t^{10} + 2t^{11} + t^{12})u^6 - t^{13}u^8$.
Nach [SW08, Lemma 5.4] ist das Euler-Produkt $\prod_{v \in M_k^0} g(q_v, q_v^{-s})$ holomorph für $\operatorname{Re}(s) > 2 + \frac{1}{6}$ und die Behauptung folgt.

Sei nun $n \geq 4$. Wir werden zeigen, dass $\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k)}^0(s)\zeta_k(2(s - \alpha_n))^{-1}$ für $\operatorname{Re}(s) > \alpha_n + \frac{1}{4}$ holomorph fortsetzbar ist. Laut Satz 5.3.17 gibt es ein Polynom $F \in \mathbb{Z}[t, u]$ mit $F(t, 0) = 1$, so dass für $\operatorname{Re}(s) > \alpha_n + \frac{1}{n}$ gilt

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k)}^0(s) = \prod_{v \in M_k^0} F(q_v, q_v^{-s}) \prod_{i=1}^{n-1} \zeta_k(n(s - i(n - i))).$$

Für $\operatorname{Re}(s) > \alpha_n + \frac{1}{2}$ erhalten wir daher

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k)}^0(s)\zeta_k(2(s - \alpha_n))^{-1} = \prod_{v \in M_k^0} F(q_v, q_v^{-s})(1 - q_v^{-2(s - \alpha_n)}) \prod_{i=1}^{n-1} \zeta_k(n(s - i(n - i))).$$

Da das Produkt $\prod_{i=1}^{n-1} \zeta_k(n(s - i(n - i)))$ für $\operatorname{Re}(s) > \alpha_n + \frac{1}{n}$ holomorph ist, reicht es zu zeigen, dass das Euler-Produkt

$$\prod_{v \in M_k^0} F(q_v, q_v^{-s})(1 - q_v^{-2(s - \alpha_n)})$$

für $\operatorname{Re}(s) > \alpha_n + \frac{1}{4}$ holomorph ist.

Sei $G(t, u) := F(t, u)(1 - t^{2\alpha_n}u^2)$. Und $H(t, u) := G(t, u) - 1 = \sum_{j=1}^m \sum_{l=0}^{n_j} a_{jl}t^l u^j$ für geeignete $m, n_j \in \mathbb{N}$ und $a_{jl} \in \mathbb{Z}$. Dann reicht es nach [Rem98, A.1, §2.1] zu zeigen, dass $\sum_{v \in M_k^0} |H(q_v, q_v^{-s})|$ für $\operatorname{Re}(s) > \alpha_n + \frac{1}{4}$ konvergiert. Dies ist erfüllt, wenn für $\operatorname{Re}(s) > \alpha_n + \frac{1}{4}$ alle Reihen $\sum_{v \in M_k^0} |a_{jl}q_v^l q_v^{-sj}| = |a_{jl}| \sum_{v \in M_k^0} q_v^{l - \operatorname{Re}(s)j}$ konvergieren, d.h. wenn alle Exponenten $(l - xj)$ von q_v in $H(q_v, q_v^{-x})$ für $x > \alpha_n + \frac{1}{4}$ echt kleiner -1 sind.

Dies werden wir nun zeigen. Da für $x > \alpha_n + \frac{1}{4}$ das Euler-Produkt über die Faktoren

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - q_v^{-n(x - i(n - i))}}$$

endlich ist, sind in der zugehörigen Reihenentwicklung alle von 0 verschiedenen Exponenten von q_v echt kleiner -1 (ist ein Exponent größer oder gleich -1 , so zeigt ein Vergleich

mit der Dedekindschen Zetafunktion die Divergenz des Produkts). Daher können wir auch die Exponenten in

$$\mathcal{I}_{\text{SL}_n(k_v)}(x)(1 - q_v^{-2(x-\alpha_n)}) = (1 + H(q_v, q_v^{-x})) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - q_v^{-n(x-i(n-i))}}$$

untersuchen und zeigen, dass für $x > \alpha_n + \frac{1}{4}$ alle von 0 verschiedenen Exponenten von q_v echt kleiner als -1 sind.

Sei nun $x > \alpha_n + \frac{1}{4}$. Dann gilt mit Satz 5.3.15 und Lemma 5.3.16

$$\begin{aligned} & (1 - q_v^{-2(x-\alpha_n)}) \mathcal{I}_{\text{SL}_n(k_v)}(x) \\ &= \sum_{\substack{m_i=0, \\ 1 \leq i \leq n-1}}^{\infty} \frac{W(q_v^{-1})}{W_{(\sum_{i=1}^{n-2} m_i \lambda_i + (nm_{n-1} + (\sum_{i=1}^{n-2} im_i) \bmod n) \lambda_{n-1})}(q_v^{-1})} \\ & \quad \cdot (1 - q_v^{-2(x-\alpha_n)}) q_v^{-\left(\sum_{i=1}^{n-2} (x-i(n-i))m_i + (x-(n-1))nm_{n-1} + (x-(n-1))(\sum_{i=1}^{n-2} im_i) \bmod n\right)}. \end{aligned}$$

Sei $\lambda \in P^+$ mit $\tau(\lambda + \xi) = 0$. Dann besitzen die Laurent-Polynome $\frac{W(q_v^{-1})}{W_{\lambda}(q_v^{-1})}$ nach Lemma 5.3.1 die Zahl 1 als konstanten Term und alle von 0 verschiedenen Exponenten von q_v sind negativ. Folglich können wir diese Faktoren für unsere Betrachtungen vernachlässigen.

Sei $(m_1, \dots, m_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Wir betrachten die Terme

$$f(x, m_1, \dots, m_{n-1}) := q_v^{-\left(\sum_{i=1}^{n-2} (x-i(n-i))m_i + (x-(n-1))nm_{n-1} + (x-(n-1))(\sum_{i=1}^{n-2} im_i) \bmod n\right)}$$

mit den Exponenten

$$\begin{aligned} e(x, m_1, \dots, m_{n-1}) := & - \left(\sum_{i=1}^{n-2} (x - i(n - i))m_i + (x - (n - 1))nm_{n-1} \right. \\ & \left. + (x - (n - 1)) \left(\sum_{i=1}^{n-2} im_i \right) \bmod n \right). \end{aligned}$$

Ist

$$n_i := \begin{cases} 2, & \text{falls } n \text{ gerade und } i = \frac{n}{2}, \\ 1, & \text{falls } n \text{ ungerade und } i = \frac{n+1}{2} \text{ oder } i = \frac{n-1}{2}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist

$$e(x, n_1, \dots, n_{n-1}) = -2(x - \alpha_n)$$

und der Term $f(x, n_1, \dots, n_{n-1})$ wird in der obigen Reihe durch die Multiplikation mit $(1 - q_v^{-2(x-\alpha_n)})$ annulliert. Da der Exponent von $q_v^{-2(x-\alpha_n)}$ echt kleiner 0 ist, brauchen wir auch diesen Term ansonsten nicht weiter zu berücksichtigen.

Es reicht also zu zeigen, dass $e(x, m_1, \dots, m_{n-1}) < -1$ für alle $(m_1, \dots, m_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ mit $(m_1, \dots, m_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ und $(m_1, \dots, m_{n-1}) \neq (n_1, \dots, n_{n-1})$ gilt.

Ist $i \neq \frac{n}{2}$, falls n gerade, bzw. $i \neq \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}$, falls n ungerade, so ist $i(n-i) \leq \alpha_n - 1$. Daher gilt für alle $1 \leq i \leq n-1$

$$x - i(n-i) > \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{falls } n \text{ gerade und } i = \frac{n}{2}, \\ \frac{1}{4}, & \text{falls } n \text{ ungerade und } i = \frac{n+1}{2} \text{ oder } i = \frac{n-1}{2}, \\ \frac{5}{4}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Existiert ein $1 \leq i \leq n-1$ mit $m_i \geq 1$ und $i \neq \frac{n}{2}$, falls n gerade, bzw. $i \neq \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}$, falls n ungerade, so folgt

$$e(x, m_1, \dots, m_{n-1}) < -1.$$

Sei also $m_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n-1$ mit $i \neq \frac{n}{2}$, falls n gerade bzw. $i \neq \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}$, falls n ungerade. Ist n gerade, so gilt für $m_{\frac{n}{2}} \neq 2$

$$\begin{aligned} e(x, m_1, \dots, m_{n-1}) &= -\left(\left(x - \frac{n^2}{4}\right)m_{\frac{n}{2}} + (x - (n-1))\left(\frac{n}{2}m_{\frac{n}{2}}\right) \bmod n\right) \\ &< -\left(\frac{1}{4}m_{\frac{n}{2}} + \frac{5}{4}\left(\frac{n}{2}m_{\frac{n}{2}}\right) \bmod n\right) \\ &\leq -1. \end{aligned}$$

Ist n ungerade, so ist für $(m_{\frac{n-1}{2}}, m_{\frac{n+1}{2}}) \neq (1, 1)$

$$\begin{aligned} e(x, m_1, \dots, m_{n-1}) &= -\left(\left(x - \frac{(n-1)(n+1)}{4}\right)(m_{\frac{n-1}{2}} + m_{\frac{n+1}{2}})\right. \\ &\quad \left.+ (x - (n-1))\left(\frac{n-1}{2}m_{\frac{n-1}{2}} + \frac{n+1}{2}m_{\frac{n+1}{2}}\right) \bmod n\right) \\ &< -\left(\frac{1}{4}(m_{\frac{n-1}{2}} + m_{\frac{n+1}{2}}) + \frac{5}{4}\left(\frac{n-1}{2}m_{\frac{n-1}{2}} + \frac{n+1}{2}m_{\frac{n+1}{2}}\right) \bmod n\right) \\ &\leq -1. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. \square

Satz 5.4.2. *Das Produkt*

$$\prod_{v \in M_k} \mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s)$$

ist holomorph für $\mathrm{Re}(s) \geq \alpha_n + \frac{1}{2}$, mit Ausnahme eines einfachen Pols in $s = \alpha_n + \frac{1}{2}$. Ferner gilt für das globale Höhenintegral

$$\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k)}(s) = \prod_{v \in M_k} \mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s)$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) \geq \alpha_n + \frac{1}{2}$.

Beweis. Nach Satz 5.2.2 sind die archimedischen lokalen Höhenintegrale $\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s)$ für $\mathrm{Re}(s) \geq \alpha_n + \frac{1}{2}$ holomorphe Funktionen. Folglich ist mit Satz 5.4.1 das Produkt

$$\prod_{v \in M_k} \mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s) = \mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}^0(s) \prod_{v \in M_k^\infty} \mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s) \quad (\heartsuit)$$

holomorph für $\mathrm{Re}(s) \geq \alpha_n + \frac{1}{2}$, mit Ausnahme eines einfachen Pols in $s = \alpha_n + \frac{1}{2}$.

Sei nun $v \in M_k$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) \geq \alpha_n + \frac{1}{2}$. Dann ist $(H_{\mathrm{SL}_n(k_v)})^{-s} : \mathrm{SL}_n(k_v) \rightarrow \mathbb{C}$, $A_v \mapsto H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A_v)^{-s}$ stetig und $(H_{\mathrm{SL}_n(k_v)})^{-s}(K_v) = 1$. Weiter gilt $|H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A_v)^{-s}| = H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A_v)^{-\mathrm{Re}(s)}$ für alle $A_v \in \mathrm{SL}_n(k_v)$ und daher, mit den Sätzen 5.2.2 und 5.3.17, $H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}^{-s} \in \mathcal{L}_1(\mathrm{SL}_n(k_v))$.

Da das Produkt (\heartsuit) für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) \geq \alpha_n + \frac{1}{2}$ und $s \neq \alpha_n + \frac{1}{2}$ endlich ist und $H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A_v)^{-(\alpha_n + \frac{1}{2})} > 0$ für alle $A_v \in \mathrm{SL}_n(k_v)$ gilt, folgt mit [Tat67, Lemma 3.3.1, Lemma 3.3.2, Theorem 3.3.1]

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k)}(s) &= \int_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_k)} H_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_k)}(\mathbf{A})^{-s} d\mu(\mathbf{A}) = \prod_{v \in M_k} \int_{\mathrm{SL}_n(k_v)} H_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(A_v)^{-s} d\mu_v(A_v) \\ &= \prod_{v \in M_k} \mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k_v)}(s) \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) \geq \alpha_n + \frac{1}{2}$. □

Wie schon in §5.1 diskutiert, gehen wir davon aus, dass das analytische Verhalten des globalen Höhenintegrals $\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k)}$ mit dem der Höhenzetafunktion $Z_{\mathrm{SL}_n(k)}$ übereinstimmt. Genauer gelte für jede positive ganze Zahl r und jede positive reelle Zahl a :

Ist das Integral $\mathcal{I}_{\mathrm{SL}_n(k)}(s)$ holomorph für $\mathrm{Re}(s) \geq a$, mit Ausnahme eines r -fachen Pols bei $s = a$, so ist auch die Höhenzetafunktion $Z_{\mathrm{SL}_n(k)}(s)$ holomorph (★)
für $\mathrm{Re}(s) \geq a$, mit Ausnahme eines r -fachen Pols bei $s = a$.

Mit dieser Annahme und Satz 5.1.3, können wir nun direkt die gesuchte Aussage über das asymptotische Verhalten von $N_{\mathrm{SL}_n(k)}(B)$ für $B \rightarrow \infty$ ablesen, vergleiche auch Proposition 2.2.9:

Korollar 5.4.3. *Sei (★) erfüllt. Dann gilt*

$$N_{\mathrm{SL}_n(k)}(B) \sim cB^{\alpha_n + \frac{1}{2}}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$.

Literaturverzeichnis

- [AB08] ABRAMENKO, Peter ; BROWN, Kenneth S.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 248: *Buildings*. Springer, New York, 2008. – Theory and applications
- [Apo90] APOSTOL, Tom M.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 41: *Modular functions and Dirichlet series in number theory*. Second. Springer-Verlag, New York, 1990
- [BM90] BATYREV, Victor V. ; MANIN, Yuri I.: Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques. In: *Mathematische Annalen* 286 (1990), Nr. 1-3, S. 27–43
- [Bor91] BOREL, Armand: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 126: *Linear algebraic groups*. Second. Springer-Verlag, New York, 1991
- [Bou98] BOURBAKI, Nicolas: *General topology. Chapters 1–4*. Springer-Verlag, Berlin, 1998 (Elements of Mathematics). – Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation
- [Bou02] BOURBAKI, Nicolas: *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6*. Springer-Verlag, Berlin, 2002 (Elements of Mathematics). – Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley
- [BT65] BOREL, Armand ; TITS, Jacques: Groupes réductifs. In: *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1965), Nr. 27, S. 55–150
- [BT72] BRUHAT, François ; TITS, Jacques: Groupes réductifs sur un corps local. In: *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1972), Nr. 41, S. 5–251
- [BT84] BRUHAT, François ; TITS, Jacques: Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d’une donnée radicielle valuée. In: *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1984), Nr. 60, S. 197–376
- [BT96a] BATYREV, Victor V. ; TSCHINKEL, Yuri: Height zeta functions of toric varieties. In: *Journal of Mathematical Sciences* 82 (1996), Nr. 1, S. 3220–3239. – Algebraic geometry, 5
- [BT96b] BATYREV, Victor V. ; TSCHINKEL, Yuri: Rational points on some Fano cubic bundles. In: *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série 1, Mathématique* 323 (1996), Nr. 1, S. 41–46
- [BT98] BATYREV, Victor V. ; TSCHINKEL, Yuri: Manin’s conjecture for toric varieties. In: *Journal of Algebraic Geometry* 7 (1998), Nr. 1, S. 15–53
- [Car97] CARTWRIGHT, Donald I.: A brief introduction to buildings. In: *Harmonic functions on trees and buildings (New York, 1995)* Bd. 206. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, S. 45–77
- [Car01] CARTWRIGHT, Donald I.: Spherical harmonic analysis on buildings of type \tilde{A}_n . In: *Monatshefte für Mathematik* 133 (2001), Nr. 2, S. 93–109
- [CL10] CHAMBERT-LOIR, Antoine: Lectures on height zeta functions: at the confluence of algebraic geometry, algebraic number theory, and analysis. In: *Algebraic and analytic aspects of zeta functions and L-functions* Bd. 21. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, S. 17–49

- [CLT02] CHAMBERT-LOIR, Antoine ; TSCHINKEL, Yuri: On the distribution of points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups. In: *Inventiones Mathematicae* 148 (2002), Nr. 2, S. 421–452
- [Del54] DELANGE, Hubert: Généralisation du théoreme de Ikehara. In: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* Bd. 71, 1954, S. 213–242
- [EGM98] ELSTRODT, Jürgen ; GRUNEWALD, Fritz ; MENNICKE, Jens: *Groups acting on hyperbolic space*. Springer-Verlag, Berlin, 1998 (Springer Monographs in Mathematics). – Harmonic analysis and number theory
- [Els05] ELSTRODT, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie*. Fourth. Springer-Verlag, Berlin, 2005 (Springer-Lehrbuch). – Grundwissen Mathematik
- [Est28] ESTERMANN, Theodor: On Certain Functions Represented by Dirichlet Series. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* S2-27 (1928), Nr. 1, S. 435–448
- [FMT89] FRANKE, Jens ; MANIN, Yuri I. ; TSCHINKEL, Yuri: Rational points of bounded height on Fano varieties. 95 (1989), Nr. 2, S. 421–435
- [Ful93] FULTON, William: *Annals of Mathematics Studies*. Bd. 131: *Introduction to toric varieties*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. – The William H. Roever Lectures in Geometry
- [Gar97] GARRETT, Paul: *Buildings and classical groups*. Chapman & Hall, London, 1997
- [GMO08] GORODNIK, Alex ; MAUCOURANT, François ; OH, Hee: Manin's and Peyre's conjectures on rational points and adelic mixing. In: *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* 41 (2008), Nr. 3, S. 383–435
- [GV88] GANGOLLI, Ramesh ; VARADARAJAN, Veeravalli S.: *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]*. Bd. 101: *Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups*. Springer-Verlag, Berlin, 1988
- [Har70] HARTSHORNE, Robin: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 156: *Ample subvarieties of algebraic varieties*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970. – Notes written in collaboration with C. Musili
- [Har77] HARTSHORNE, Robin: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 52: *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977
- [Hel78] HELGASON, Sigurdur: *Pure and Applied Mathematics*. Bd. 80: *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978
- [HN12] HILGERT, Joachim ; NEEB, Karl-Hermann: *Structure and geometry of Lie groups*. Springer, New York, 2012 (Springer Monographs in Mathematics)
- [HS00] HINDRY, Marc ; SILVERMAN, Joseph H.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 201: *Diophantine geometry*. Springer-Verlag, New York, 2000. – An introduction
- [Hum75] HUMPHREYS, James E.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 21: *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975
- [Hum90] HUMPHREYS, James E.: *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Bd. 29: *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990
- [Ike31] IKEHARA, Shikao: An extension of Landau's theorem in the analytic theory of numbers. In: *Journal of Mathematics and Physics. Massachusetts Institute of Technology* 10 (1931), S. 1–12

-
- [Iwa66] IWAHORI, Nagayoshi: Generalized Tits system (Bruhat decomposition) on p -adic semisimple groups. In: *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966, S. 71–83
- [Kur84] KUROKAWA, Nobushige: On some Euler products. I. In: *Japan Academy. Proceedings. Series A. Mathematical Sciences* 60 (1984), Nr. 9, S. 335–338
- [Kur86] KUROKAWA, Nobushige: On the meromorphy of Euler products. II. In: *Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series* 53 (1986), Nr. 2
- [Lan96] LANDVOGT, Erasmus: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 1619: *A compactification of the Bruhat-Tits building*. Springer-Verlag, Berlin, 1996
- [Lan02] LANG, Serge: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 211: *Algebra*. Third. Springer-Verlag, New York, 2002
- [Man91] MANIN, Yuri I.: Three-dimensional hyperbolic geometry as ∞ -adic Arakelov geometry. In: *Inventiones Mathematicae* 104 (1991), Nr. 2, S. 223–243
- [Nar04] NARKIEWICZ, Władysław: *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*. Third. Springer-Verlag, Berlin, 2004 (Springer Monographs in Mathematics)
- [Neu99] NEUKIRCH, Jürgen: *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Bd. 322: *Algebraic number theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. – Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder
- [Nor50] NORTHCOTT, Douglas G.: Periodic points on an algebraic variety. In: *Annals of Mathematics. Second Series* 51 (1950), S. 167–177
- [OV93] ONISHCHIK, Arkadiĭ L. ; VINBERG, Èrnest B.: Foundations of Lie theory. In: *Lie groups and Lie algebras, I* Bd. 20. Springer, Berlin, 1993, S. 1–94, 231–235
- [Par06a] PARKINSON, James: Buildings and Hecke algebras. In: *Journal of Algebra* 297 (2006), Nr. 1, S. 1–49
- [Par06b] PARKINSON, James: Spherical harmonic analysis on affine buildings. In: *Mathematische Zeitschrift* 253 (2006), Nr. 3, S. 571–606
- [Pey95] PEYRE, Emmanuel: Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. In: *Duke Mathematical Journal* 79 (1995), Nr. 1, S. 101–218
- [PR94] PLATONOV, Vladimir ; RAPINCHUK, Andrei: *Pure and Applied Mathematics*. Bd. 139: *Algebraic groups and number theory*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994. – Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen
- [Rem98] REMMERT, Reinhold: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 172: *Classical topics in complex function theory*. Springer-Verlag, New York, 1998. – Translated from the German by Leslie Kay
- [Rou77] ROUSSEAU, Guy: *Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux*. U.E.R. Mathématique, Université Paris XI, Orsay, 1977. – Thèse de doctorat, Publications Mathématiques d’Orsay, No. 221-77.68
- [Sch79] SCHANUEL, Stephen H.: Heights in number fields. In: *Bulletin de la Société Mathématique de France* 107 (1979), Nr. 4, S. 433–449
- [Ser03] SERRE, Jean-Pierre: *Trees*. Springer-Verlag, Berlin, 2003 (Springer Monographs in Mathematics). – Translated from the French original by John Stillwell, Corrected 2nd printing of the 1980 English translation

- [Sha74] SHAFAREVICH, Igor R.: *Basic algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974. – Translated from the Russian by K. A. Hirsch, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 213
- [SS97] SCHNEIDER, Peter ; STUHLER, Ulrich: Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building. In: *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques* (1997), Nr. 85, S. 97–191
- [ST04] SHALIKA, Joseph A. ; TSCHINKEL, Yuri: Height zeta functions of equivariant compactifications of the Heisenberg group. In: *Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory*. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004, S. 743–771
- [ST15] SHALIKA, Joseph A. ; TSCHINKEL, Yuri: *Height zeta functions of equivariant compactifications of unipotent groups*. 2015
- [STBT07] SHALIKA, Joseph A. ; TAKLOO-BIGHASH, Ramin ; TSCHINKEL, Yuri: Rational points on compactifications of semi-simple groups. In: *Journal of the American Mathematical Society* 20 (2007), Nr. 4, S. 1135–1186 (electronic)
- [SW08] SAUTOY, Marcus du ; WOODWARD, Luke: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 1925: *Zeta functions of groups and rings*. Springer-Verlag, Berlin, 2008
- [Tat67] TATE, John T.: Fourier analysis in number fields, and Hecke’s zeta-functions. In: *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965)*. Thompson, Washington, D.C., 1967, S. 305–347
- [TB09] TAKLOO-BIGHASH, Ramin: Distribution of rational points: a survey. In: *Iranian Mathematical Society. Bulletin* 35 (2009), Nr. 1, S. 1–30, 273
- [Tit75] TITS, Jacques: On buildings and their applications. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974)*, Vol. 1, Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975, S. 209–220
- [Tit79] TITS, Jacques: Reductive groups over local fields. In: *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977)*, Part 1. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979 (Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII), S. 29–69
- [Tsc09] TSCHINKEL, Yuri: Algebraic varieties with many rational points. In: *Arithmetic geometry* Bd. 8. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, S. 243–334
- [Wer01] WERNER, Annette: Non-Archimedean intersection indices on projective spaces and the Bruhat-Tits building for PGL. In: *Université de Grenoble. Annales de l’Institut Fourier* 51 (2001), Nr. 6, S. 1483–1505
- [Wer02] WERNER, Annette: Arakelov intersection indices of linear cycles and the geometry of buildings and symmetric spaces. In: *Duke Mathematical Journal* 111 (2002), Nr. 2, S. 319–355
- [Wie32] WIENER, Norbert: Tauberian theorems. In: *Annals of Mathematics. Second Series* 33 (1932), Nr. 1, S. 1–100

Symbolverzeichnis

- k : algebraischer Zahlkörper, 15
- $\mathbf{X}(l)$: Menge der l -rationalen Punkte der Varietät \mathbf{X} über einen Körper l , 15
- $v, |\cdot|_v$: Bewertung des Körpers k oder seiner Vervollständigung k_v , 15
- \mathcal{O} : Ring der ganzen Zahlen in k , 16
- $|\cdot|$: Standardbetrag auf \mathbb{C} , 16
- M_k : Menge der Standardbewertungen von k , 16
- M_k^∞ : Menge der archimedischen Standardbewertungen von k , 16
- M_k^0 : Menge der nicht-archimedischen Standardbewertungen von k , 16
- k_v : Vervollständigung von k bezüglich v , 17
- $\varphi_v : k \rightarrow k_v$: kanonische Einbettung von k in k_v , 17
- \mathcal{O}_v : Bewertungsring von k_v bezüglich der nicht-archimedischen Bewertung v , 17
- \mathfrak{m}_v : maximales Ideal in \mathcal{O}_v , 17
- q_v : Mächtigkeit von $\mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$, 17
- π_v : Erzeuger des maximalen Ideals \mathfrak{m}_v , 17
- $\text{ord}_v(x)$: Ordnung von x bezüglich π_v , 17
- $\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p$: Körper der p -adischen Zahlen bzw. Ring der ganzen p -adischen Zahlen, 17
- \mathbb{A}_k : Adelering von k , 17
- $\|\cdot\|_{v,\infty}$: Maximumsnorm auf k_v^m oder Matrixnorm auf $\text{Mat}_m(k_v)$ bezüglich dieser Norm, 18
- $f \sim g$: f und g haben das gleiche asymptotische Verhalten, 19
- ζ_k : die Dedekindsche Zetafunktion des Körpers k , 19
- $\|\cdot\|_{M_k}$: adelische Metrik, 21
- $\mathbb{E} = (E, \|\cdot\|_{M_k})$: adelisch metrisiertes Geradenbündel, 21
- $H_{\mathbb{E}} : \mathbf{X}(k) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$: Höhenfunktion auf $\mathbf{X}(k)$ bezüglich des adelisch metrisierten Geradenbündels \mathbb{E} , 22
- $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(1)$: Hyperebenenbündel über der Varietät \mathbf{X} , 22
- $\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}'$: adelisch metrisiertes (inneres) Tensorprodukt der metrisierten Geradenbündel \mathbb{E}, \mathbb{E}' , 23
- \mathbb{E}^* : adelisch metrisiertes duales Geradenbündel zum metrisierten Geradenbündel \mathbb{E} , 23
- $\mathbb{E} \boxtimes \mathbb{E}'$: adelisch metrisiertes (äußeres) Tensorprodukt der metrisierten Geradenbündel \mathbb{E}, \mathbb{E}' , 23
- $\varphi^*\mathbb{E}$: adelisch metrisierter Rückzug unter φ des metrisierten Geradenbündels \mathbb{E} , 23
- $N_{\mathbf{X}(k)}(\mathbb{E}, B)$: Anzahl der Punkte $x \in \mathbf{X}(k)$ deren Höhe $H_{\mathbb{E}}(x)$ kleiner oder gleich B ist, 24
- $\text{Pic}(\mathbf{X})$: Picard-Gruppe von \mathbf{X} , 24
- $D \equiv_{lin} D'$: Die Divisoren D und D' sind linear äquivalent, 24
- $[D]$: Äquivalenzklasse bezüglich linearer Äquivalenz des Divisors D , 24
- $[E]$: Isomorphieklasse des Geradenbündels E , 24
- $\text{Pic}(\mathbf{X})_{\mathbb{R}}$: \mathbb{R} -Vektorraum über $\text{Pic}(\mathbf{X})$, 24
- $\Lambda_{\text{eff}}(\mathbf{X})$: Kegel der effektiven Geradenbündel über \mathbf{X} , 24
- $\omega_{\mathbf{X}}, \omega_{\mathbf{X}}^{-1}$: kanonisches bzw. anti-kanonisches Geradenbündel über \mathbf{X} , 24
- $\mathbf{G}(\mathcal{O}), \mathbf{G}(\mathcal{O}_v)$: \mathcal{O} - bzw. \mathcal{O}_v -wertige Punkte von \mathbf{G} , 27
- G_v : k_v -rationale Punkte der Gruppe \mathbf{G} , 27

- K_v : maximale kompakte Untergruppe in G_v , 27
 G° : Zusammenhangskomponente einer Gruppe G , 27
 $\text{Stab}_G(x)$: Stabilisator von x bezüglich der Wirkung von G , 27
 $H_v : G_v \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$: v -adische lokale Höhenfunktion auf \mathbf{G} , 28
 $H : \mathbf{G}(k) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$: globale Höhenfunktion auf \mathbf{G} , 28
 $N_{\mathbf{G}(k)}(B)$: Anzahl der Punkte $g \in \mathbf{G}(k)$ mit $H(g)$ kleiner oder gleich B ist, 29
 $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(m)$: m -faches Tensorprodukt des Geradenbündels $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(1)$, 35
 $H_{\text{SL}_n(k_v)} : \text{SL}_n(k_v) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$: v -adische lokale Höhenfunktion auf SL_n , 37
 $H_{\text{SL}_n(k)} : \text{SL}_n(k) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$: globale Höhenfunktion auf SL_n , 37
 $N_{\text{SL}_n(k)}(B) = \#\{A \in \text{SL}_n(k) : H_{\text{SL}_n(k)}(A) \leq B\}$: Anzahl der Punkte $A \in \text{SL}_n(k)$ mit $H_{\text{SL}_n(k)}(A)$ kleiner oder gleich B ist, 37
 \mathfrak{g}_v : Lie-Algebra von G_v (k_v -Vektorraum), 37
 $\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$: Lie-Algebra von G_v , aufgefasst als reellen Vektorraum, 37
 $B_{\mathfrak{sl}_n(k_v)} : \mathfrak{sl}_n(k_v)^{\mathbb{R}} \times \mathfrak{sl}_n(k_v)^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$: skalierte Killing-Form von $\mathfrak{sl}_n(k_v)^{\mathbb{R}}$, 38
 $\text{dist}_{\text{SL}_n(k_v)} : G_v/K_v \times G_v/K_v \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$: durch die skalierte Killing-Form $B_{\mathfrak{sl}_n(k_v)}$ induzierte Metrik, 38
 $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$: Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen x_1, \dots, x_n , 38
 \mathbb{G}_m : multiplikative Gruppe, 39
 $\mathbb{X}^*(\mathbf{T})$: Charaktergruppe des Torus \mathbf{T} , 39
 $\mathbb{X}_*(\mathbf{T})$: Kocharaktergruppe des Torus \mathbf{T} , 39
 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{X}_*(\mathbf{T}) \times \mathbb{X}^*(\mathbf{T}) \rightarrow \mathbb{Z}$: duale Paarung von $\mathbb{X}_*(\mathbf{T})$ und $\mathbb{X}^*(\mathbf{T})$, auch Fortsetzung auf $V \times V^*$, 40
 $V = \mathbb{X}_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$: \mathbb{R} -Vektorraum der Kocharaktere von \mathbf{T} , 40
 $V^* = \mathbb{X}^*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$: \mathbb{R} -Vektorraum der Charaktere von \mathbf{T} , 40
 $\mathbf{N} = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$: Normalisator von \mathbf{T} in \mathbf{G} , 40
 $\mathbf{Z} = Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$: Zentralisator von \mathbf{T} in \mathbf{G} , 40
 $W = \mathbf{N}/\mathbf{T}$: Weyl-Gruppe von \mathbf{G} bezüglich \mathbf{T} , 40
 $\Phi = \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{G})$: Menge der k_v -Wurzeln von \mathbf{G} bezüglich \mathbf{T} , 41
 χ_{ij} : Wurzel von SL_n bezüglich \mathbf{T} , 41
 $\Phi = \{\chi_{ij} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$: Wurzelsystem von SL_n bezüglich \mathbf{T} , 41
 $\Delta_{\Phi} = \{\chi_{i, i+1} : 1 \leq i < n\}$: Basis des Wurzelsystems von SL_n bezüglich \mathbf{T} , 41
 $\Phi^+ = \{\chi_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$: Menge der positiven Wurzeln von SL_n bezüglich \mathbf{T} , 41
 $\check{\Phi} = \{\check{\chi}_{ij} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$: Menge der Kowurzeln von SL_n bezüglich \mathbf{T} , 41
 H_{ij} : Hyperebene senkrecht zu $\check{\chi}_{ij}$, 42
 $w_{(ij)} = s_{ij;0}$: lineare orthogonale Spiegelung an der Hyperebene H_{ij} , 42
 $W = \langle w_{(ij)} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \rangle$: Weyl-Gruppe von SL_n bezüglich \mathbf{T} , 42
 $\{\lambda_i : 1 \leq i < n\}$: duale Basis zu Δ_{Φ} , 42
 $\text{Span}_M(x_i : 1 \leq i < n)$: Aufspann von x_1, \dots, x_n bezüglich eines Monoids M , 42
 $P = \text{Span}_{\mathbb{Z}}(\lambda_i : 1 \leq i < n)$: Kogewichtsgitter von SL_n bezüglich \mathbf{T} , 42
 $P^+ = \text{Span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}(\lambda_i : 1 \leq i < n)$: Monoid der dominanten Kogewichte von SL_n bezüglich \mathbf{T} , 42
 \mathcal{A}, \mathbb{A} : euklidisch-affiner Raum über V , Apartment in einem affinen Gebäude, 42
 ξ : ausgewählter Punkt in \mathcal{A} bzw. \mathbb{A} , ausgewählte Ecke in einem affinen Gebäude, 42
 Φ_{aff} : Menge aller affinen Wurzeln auf \mathcal{A} zu Φ , 42
 $\theta_{ij;l}$: affine Wurzel von SL_n bezüglich \mathbf{T} , 42
 $\Phi_{\text{aff}} = \{\theta_{ij;l} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \text{ und } l \in \mathbb{Z}\}$: Menge aller affinen Wurzeln von SL_n bezüglich \mathbf{T} , 42
 $H_{ij;l}$: Verschwindungshyperebene von $\theta_{ij;l}$, 42
 $s_{ij;l}$: affine orthogonale Spiegelung an $H_{ij;l}$, 42

- $\text{Aff}(\mathcal{A}), \text{Aff}(\mathbb{A})$: Automorphismengruppe des affinen Raums \mathcal{A} bzw. \mathbb{A} , 42
 W_{aff} : affine Weyl-Gruppe von Φ auf \mathcal{A} bzw. \mathbb{A} , Untergruppe von $\text{Aff}(\mathcal{A})$ bzw. $\text{Aff}(\mathbb{A})$, 42
 $W_{aff} = \langle s_{ij;l} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \text{ und } l \in \mathbb{Z} \rangle$: affine Weyl-Gruppe von SL_n bezüglich \mathbf{T} , 42
 $G \ltimes H$: semidirektes Produkt der Gruppen G und H , 43
 $\Sigma(W_{aff})$: Menge der Zellen in \mathcal{A} bzw. \mathbb{A} bezüglich W_{aff} , 43
 $\mathcal{V}(W_{aff})$: Menge der Ecken in \mathcal{A} bzw. \mathbb{A} bezüglich W_{aff} , 43
 $\mathcal{C}(W_{aff})$: Menge der Kammern in \mathcal{A} bzw. \mathbb{A} bezüglich W_{aff} , 44
 $\tau : \mathcal{V}(W_{aff}) \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$: Färbung des Simplicialkomplexes $\Sigma(W_{aff})$ für SL_n , 44
 $(x) \bmod n$: Rest r mit $0 \leq r < n$ bei der euklidischen Division einer Zahl $x \in \mathbb{Z}$ durch n , 45
 \mathcal{L}_v : Menge aller \mathcal{O}_v -Gitter von vollem Rang in k_v^n , 45
 $\{L\}$: Homothetieklasse des Gitters L , 45
 \mathcal{L}_v^* : Menge der Homothetieklassen aller \mathcal{O}_v -Gitter von vollem Rang in k_v^n , 45
 L_v : Standardgitter in k_v^n , 45
 u_v : Homothetieklasse des Standardgitters L_v , 45
 $\widehat{\mathcal{L}}_v^*$: Bahn von u_v in \mathcal{L}_v^* unter der $\text{SL}_n(k_v)$ -Wirkung, 46
 $\mathcal{B}_{\text{SL}_n(k_v)}$: Bruhat-Tits-Gebäude von $\text{SL}_n(k_v)$, 46
 \mathcal{V}_v^B : Menge der Ecken in $\mathcal{B}_{\text{SL}_n(k_v)}$ bezüglich der Basis B , 47
 \mathcal{A}_v^B : Menge aller Simplexe in $\mathcal{B}_{\text{SL}_n(k_v)}$, deren Ecken in \mathcal{V}_v^B liegen, 47
 $\varphi_v^B : \mathcal{A}_v^B \rightarrow \Sigma(W_{aff})$: Isomorphismus der Simplicialkomplexe, 47
 $\tau_v : \mathcal{L}_v^* \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$: Färbung des Simplicialkomplexes $\mathcal{B}_{\text{SL}_n(k_v)}$, 48
 $M(v_1, \dots, v_n)$: Matrix, deren i -te Spalte gleich v_i ist, 48
 $\det(v_1, \dots, v_n)$: Determinante von $M(v_1, \dots, v_n)$, 48
 $\text{dist}_{\text{SL}_n(k_v)} : \mathcal{L}_v^* \times \mathcal{L}_v^* \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$: kombinatorische Metrik auf der Eckenmenge \mathcal{L}_v^* von $\mathcal{B}_{\text{SL}_n(k_v)}$, 49
 $\|\cdot\|_{v,2}$: euklidische/hermitesche Standardnorm auf k_v^m oder Matrixnorm auf $\text{Mat}_m(k_v)$ bezüglich dieser Norm, 51
 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k$: Lie-Algebra der Gruppe \mathbf{G} (\mathbb{C} -Vektorraum) bzw. $\mathbf{G}(k)$ (k -Vektorraum), 53
 $[\mathbf{G}, \mathbf{G}]$: Kommutatorgruppe von \mathbf{G} , 53
 $\text{Ad} : \mathbf{G} \rightarrow \text{SL}(\mathfrak{g}), \text{Ad}_k : \mathbf{G}(k) \rightarrow \text{SL}(\mathfrak{g}_k), \text{Ad}_v : G_v \rightarrow \text{SL}(\mathfrak{g}_v)$: adjungierte Darstellung, 53
 e_v : neutrales Element in G_v , 54
 $B_v : \mathfrak{g}_v \times \mathfrak{g}_v \rightarrow \mathbb{R}, B_v^{\mathbb{R}} : \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} \times \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$: Killing-Form von \mathfrak{g}_v bzw. $\mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}}$, 54
 $B_{\kappa_v} : \mathfrak{g}_v \times \mathfrak{g}_v \rightarrow \mathbb{R}, B_{\kappa_v}^{\mathbb{R}} : \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} \times \mathfrak{g}_v^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$: Skalierung der Killing-Form B_v bzw. $B_v^{\mathbb{R}}$ mit der Skalierungskonstanten κ_v , 56
 $\text{dist}_v^{\kappa_v} : G_v/K_v \times G_v/K_v \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$: durch die skalierte Killingform B_{κ_v} bzw. $B_{\kappa_v}^{\mathbb{R}}$ induzierte Metrik, 56
 $H_v^{\kappa_v} : G_v \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$: v -adische lokale Höhenfunktion bezüglich $\text{dist}_v^{\kappa_v}$, 56
 $Z(\mathbf{G})$: Zentrum von \mathbf{G} , 56
 $\tau_u : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}, x \mapsto x + u$: Verschiebung um u , 61
 $\overline{W_{aff}}$: Gruppe der linearen Anteile von W_{aff} , 61
 $\mathcal{H}, \mathcal{H}_v$: Menge von Hyperebenen, 61
 $\mathcal{V}(\mathcal{B}), \mathcal{V}(\mathcal{B}_v)$: Eckenmenge des Gebäudes \mathcal{B} bzw. \mathcal{B}_v , 64
 $\mathcal{E}(\mathcal{B}), \mathcal{E}(\mathcal{B}_v)$: Kantenmenge des Gebäudes \mathcal{B} bzw. \mathcal{B}_v , 64
 $\text{dist} : \mathcal{V}(\mathcal{B}) \times \mathcal{V}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \text{dist}_v : \mathcal{V}(\mathcal{B}_v) \times \mathcal{V}(\mathcal{B}_v) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$: kombinatorische Metrik auf $\mathcal{V}(\mathcal{B})$ bzw. $\mathcal{V}(\mathcal{B}_v)$, 64
 $\mathcal{B}_v = \mathcal{B}(\mathbf{G}, k_v)$: Bruhat-Tits-Gebäude von G_v , 65
 T, N, Z : k_v -rationale Punkte der Gruppen $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{Z}$, 66
 Z_c : eindeutige maximale kompakte Untergruppe von Z , 67
 T_c : eindeutige maximale kompakte Untergruppe von T , 67

- $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{T}, k_v)$: Standardapartment in \mathcal{B}_v bezüglich \mathbf{T} , 67
 $\Sigma(\mathcal{B}_v)$: Menge der Zellen des Gebäudes \mathcal{B}_v , 71
 $\Sigma(g\mathcal{A})$: Menge der Zellen des Apartments $g\mathcal{A}$, 71
 ξ_v : spezielle Ecke von \mathcal{B}_v mit $K_v = \text{Stab}_{G_v}(\xi_v)$, 74
 $\mathcal{A}_v = \mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{T}_v, k_v)$: Standardapartment von \mathcal{B}_v bezüglich \mathbf{T}_v , 75
 $\mathbf{N}_v = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_v)$: Normalisator von \mathbf{T}_v in \mathbf{G} , 75
 $\mathbf{Z}_v = Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_v)$: Zentralisator von \mathbf{T}_v in \mathbf{G} , 75
 T_v, N_v, Z_v : k_v -rationale Punkte von $\mathbf{T}_v, \mathbf{N}_v, \mathbf{Z}_v$, 75
 W_v : Weyl-Gruppe von \mathbf{G} bezüglich \mathbf{T}_v , 75
 $V_v = \mathbb{X}_*(\mathbf{T}_v) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$: \mathbb{R} -Vektorraum der Kocharaktere von \mathbf{T}_v , 75
 $V_v^* = \mathbb{X}^*(\mathbf{T}_v) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$: \mathbb{R} -Vektorraum der Charaktere von \mathbf{T}_v , 75
 $\mathbb{X}^*(\mathbf{Z}_v)$: Charaktergruppe von \mathbf{Z}_v , 75
 $\nu_{v,0} : Z_v \rightarrow V_v$: Gruppenhomomorphismus mit $\langle \nu_{v,0}(z), \chi \rangle = -\text{ord}_v(\chi(z))$ für alle $z \in Z_v$ und alle $\chi \in \mathbb{X}^*(\mathbf{Z}_v)$, 75
 $\nu_v : N_v \rightarrow \text{Aff}(\mathcal{A}_v)$: Fortsetzung von $Z_v \rightarrow \text{Aff}(\mathcal{A}_v)$, $z \mapsto [\tau_{\nu_{v,0}(z)} : \mathcal{A}_v \rightarrow \mathcal{A}_v, x \mapsto x + \nu_{v,0}(z)]$, 75
 $\Phi_v = \Phi(\mathbf{T}_v, \mathbf{G})$: Menge der k_v -Wurzeln von \mathbf{G} bezüglich \mathbf{T}_v , 75
 Φ_{aff}^v : Menge der affinen Wurzeln von \mathcal{A}_v , 75
 W_{aff}^v : affine Spiegelungsgruppe zu \mathcal{H}_v , 75
 n_v : Dimension von V_v bzw. V_v^* , 75
 $\Delta_{\Phi_v} = \{\alpha_{v,1}, \dots, \alpha_{v,n_v}\}$: Basis von Φ_v , 75
 $\tilde{\alpha}_v$: höchste Wurzel von Φ_v bezüglich Δ_{Φ_v} oder Summe über die höchsten Wurzeln der irreduziblen Komponenten von Φ_v , 75
 $m_{v,i}$: Koeffizient $m_{v,i} \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit $\tilde{\alpha}_v = \sum_{i=1}^{n_v} m_{v,i} \alpha_{v,i}$, 75
 Ψ_v : eindeutiges reduziertes Wurzelsystem aus Proposition 4.2.27 mit affiner Weyl-Gruppe W_{aff}^v , 76
 $\Delta_{\Psi_v} = \{\beta_{v,1}, \dots, \beta_{v,n_v}\}$: Basis von Ψ_v , die proportional zu Δ_{Φ_v} ist, 76
 $c_{v,i}$: Proportionalitätskonstante $c_{v,i} \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\alpha_{v,i} = c_{v,i} \beta_{v,i}$, 76
 $\{\mu_{v,1}, \dots, \mu_{v,n_v}\}$: duale Basis zu Δ_{Φ_v} , 76
 $\{\lambda_{v,1}, \dots, \lambda_{v,n_v}\}$: duale Basis zu Δ_{Ψ_v} , 76
 $P_v = \text{Span}_{\mathbb{Z}}(\lambda_{v,1}, \dots, \lambda_{v,n_v})$: Kogewichtsgitter von Ψ_v bezüglich Δ_{Ψ_v} , 76
 $P_v^+ = \text{Span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}(\lambda_{v,1}, \dots, \lambda_{v,n_v})$: Monoid der dominanten Kogewichte von Ψ_v bezüglich Δ_{Ψ_v} , 76
 c_v : Maximum über die $c_{v,i}$, 80
 m_v : Maximum über die $m_{v,i}$, 80
 S_k : endliche Teilmenge von M_k^0 mit $K_v = \text{Stab}_{G_v}(\xi_v) = \mathbf{G}(\mathcal{O}_v)$ für alle $v \in M_k^0 \setminus S_k$, 82
 $\mathbf{G}(\mathbb{A}_k)$: adewertige Punkte von \mathbf{G} , 91
 $H_{\text{SL}_n(\mathbb{A}_k)} : \text{SL}_n(\mathbb{A}_k) \times \text{SL}_n(\mathbb{A}_k) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$: Höhenfunktion auf den adewertigen Punkten von SL_n , 92
 $\mathcal{I}_{\text{SL}_n(k)}(s)$: globales Höhenintegral von SL_n , 92
 $\mathcal{I}_{\text{SL}_n(k_v)}(s)$: v -adisches lokales Höhenintegral von SL_n , 92
 $Z_{\text{SL}_n(k)}(s)$: Höhenzetafunktion von $\text{SL}_n(k)$ bezüglich $H_{\text{SL}_n(k)}$, 92
 2ρ : Summe der positiven Wurzeln Φ^+ von SL_n bezüglich \mathbf{T} , 95
 $\alpha_n = \max\{i(n-i) : 1 \leq i \leq n-1\}$: Maximum über die Koeffizienten von 2ρ bezüglich Δ_{Φ} , 95
 $\beta_n = \alpha_n + \frac{1}{4}$: , 95
 $S = \{s_i : 0 \leq i \leq n-1\}$: $s_0 = s_{1,n;1}$ und $s_i = s_{i,i+1;0} = w_{(i,i+1)}$, 98
 $S_0 = S \setminus \{s_0\}$: Teilmenge von S , 98
 $l(w)$: Länge von w bezüglich S bzw. S_0 , 98
 $X(t)$: Poincaré-Polynom einer Teilmenge X von W_{aff} in der Unbestimmten t , 99

Sachverzeichnis

- äquivariante Kompaktifizierung, 91
- Abstand
 - hyperbolischer Abstand, 30
 - kombinatorischer Abstand, 32, 49, 64
 - riemannscher Abstand, 38, 56
- Adele, 17
- adelewertige Punkte, 91
- adjungierte Darstellung, 53
- affine Automorphismengruppe, 61
 - affine Isometrien, 61
 - Gruppe der linearen Anteile, 61
 - linearer Anteil eines Automorphismus, 61
 - Verschiebungsanteil eines Automorphismus, 61
- affine Funktion, 42, 61
 - linearer Anteil einer affinen Funktion, 61
- affine Spiegelungsgruppe, 61
- affine Wurzel, 42, 69
- affines Gebäude, 64
- algebraischer Zahlkörper, 15
- Apartment, 47, 64, 72
 - Standardapartment, 72
- Apartmentsystem, 64, 72
- asymptotisches Verhalten, 19
- benachbart
 - benachbarte Ecken eines Gebäudes, 64
 - benachbarte Gitterklassen, 32, 46
- Bewertung, 15
 - \mathfrak{p} -adische Bewertung, 16
 - p -adische Bewertung, 16
 - archimedische Bewertung, 16
 - diskrete Bewertung, 16
 - nicht-archimedische Bewertung, 16
 - Standardbewertung, 16
- Bewertungsring, 16
 - diskreter Bewertungsring, 16
- Bruhat-Tits-Baum, 32
- Bruhat-Tits-Gebäude, 27, 72
 - Bruhat-Tits-Gebäude der speziellen linearen Gruppe, 48, 72, 100
- Cartan-Zerlegung, 54, 76, 93, 98
- Charaktergruppe, 39
- Coxeter-Gruppe, 98
- Doppelnebenklasse, 29, 98
- duale Paarung, 40
- Ecke, 43, 62, 71
 - hyperspezielle Ecke, 28, 74, 82
 - spezielle Ecke, 27, 63, 74
- Elementarteilersatz, 33, 46, 50
- euklidisch-affiner Raum, 42, 61
- Euler-Produkt, 108
- Färbung, 44, 48, 100
 - gefärbt, 44
 - Typ, 44
 - Typ-erhaltender Isomorphismus, 100
 - Typ-rotierender Isomorphismus, 100
- Fano-Varietät, 24
- Geradenbündel, 19
 - (äußeres) Tensorprodukt von Geradenbündeln, 21
 - (inneres) Tensorprodukt von Geradenbündeln, 20
 - adelisch metrisiertes Geradenbündel, 21, 35, 51
 - anti-kanonisches Geradenbündel, 24
 - duales Geradenbündel, 21
 - Hyperebenenbündel, 22
 - kanonisches Geradenbündel, 24
 - Kegel der effektiven Geradenbündel, 24
 - Rückzug eines Geradenbündels, 21
 - sehr ample Geradenbündel, 20
- Gitter, 31, 45
 - Kogewichtsgitter, 42, 76
 - Kowurzelgitter, 42
 - Standardgitter, 31, 45, 100
- Höhe
 - v -adische lokale Höhe, 28
 - archimedische lokale Höhe, 30, 39, 56
 - globale Höhe, 28, 34, 51, 84
 - Höhe bezüglich eines adelisch metrisierten Geradenbündels, 22
 - nicht-archimedische lokale Höhe, 34, 51, 80
 - Standardhöhe, 18
- Höhenfunktion

- Höhenfunktion auf einer halbeinfachen algebraischen Gruppe, 28
- Höhenfunktion bezüglich eines adelisch metrisierten Geradenbündels, 22, 91
- Höhenfunktion bezüglich Morphismen, 19
- Standardhöhenfunktion auf $\mathbb{P}^m(k)$, 18
- Höhenintegral, 91
 - v -adisches lokales Höhenintegral, 92
 - archimedisches lokales Höhenintegral, 95
 - globales Höhenintegral, 92, 111
 - nicht-archimedisches lokales Höhenintegral, 104, 105
- Höhenzetafunktion, 89
 - Höhenzetafunktion der speziellen linearen Gruppe, 92
- halbeinfache algebraische Gruppe, 27
- harmonische Analysis, 90
- Hecke-Algebra, 100
- Homothetie, 31, 45
- Homothetieklasse, 31, 45
- hyperbolischer Raum
 - dreidimensionaler hyperbolischer Raum, 29
 - hyperbolische Ebene, 30
- Kammer, 43, 62, 71
- Kante, 43, 62, 71
- Killing-Form, 38, 54
 - skalierte Killing-Form, 38, 56
- Kocharaktergruppe, 39
- Länge, 98
- Möbiustransformation, 29
- maximale kompakte Untergruppe, 27, 37, 39, 54, 74
- Metrik
 - v -adische Metrik, 20
 - adelische Metrik, 21, 35, 51
 - durch Basis definierte v -adische Metrik, 20
 - kombinatorische Metrik, 49, 64
 - Metriken auf einem affinen Gebäude, 64
- Norm
 - v -adische Norm, 20
- Paneel, 62, 71
- Picard-Gruppe, 24
- Poincaré-Polynom, 99
- Polarzerlegung, 38, 59, 93
- Polysimplex, 63
- Polysimplizialkomplex, 63, 70
- Produktformel, 17
- Punkt
 - hyperspezieller Punkt, 74
 - spezieller Punkt, 62, 73
- Quaternionen, 29
- Retraktion, 65
- riemannsche Struktur, 30, 38, 55
- riemannscher symmetrischer Raum, 27, 30, 37, 54
- Ring der ganzen Zahlen, 16
- Simplizialkomplex, 46, 64
 - Fahnenkomplex, 46
 - gefärbter Simplizialkomplex, 43
- spaltend
 - k -spaltende Gruppe, 29, 84
 - über k spaltende Gruppe, 29
 - über k spaltender Torus, 29
- spezielle lineare Gruppe, 29, 37, 89
- Spiegelung
 - affine orthogonale Spiegelung, 42
 - lineare orthogonale Spiegelung, 41
- Topologie
 - v -adischen Topologie, 20
- verallgemeinerte Fahnenvarietät, 35
- Vermutung, 112
 - Batyrev-Manin-Vermutung, 24, 90
- Vervollständigung von k , 17
- Wand, 62
- Weyl-Gruppe, 40, 66
 - affine Weyl-Gruppe, 42, 63, 70
 - affine Weyl-Gruppe eines Gebäudes, 64, 72
- Weyl-Kammer, 76
- Wurzelsystem
 - Basis, 41, 75
 - dominante Kogewichte, 42, 76
 - duale Basis, 42, 76
 - fundamentale Kogewichte, 42
 - höchste Wurzel, 41, 75
 - Kogewichtsgitter, 42, 76
 - Kowurzelgitter, 42
 - Kowurzeln, 41, 66
 - negative Wurzeln, 41, 75
 - positive Wurzeln, 41, 75
 - reduziertes Wurzelsystem, 63, 75
 - Summe der positiven Wurzeln, 95
 - Wurzelgruppe, 68
 - Wurzeln, 41, 66
- Zählfunktion, 19, 89
- Zelle, 43, 61, 71
 - Abschluss einer Zelle, 62
 - Dimension einer Zelle, 43, 62
 - Seite einer Zelle, 43, 62, 71
 - Träger einer Zelle, 43, 62

Danksagung

Dies ist die letzte Seite meiner Doktorarbeit - höchste Zeit *Danke* zu sagen:

Zuallererst möchte ich mich von ganzem Herzen bei meinem Doktorvater, *Prof. Dr. Victor Batyrev*, für seine ausgezeichnete Betreuung während der letzten Jahre bedanken. Er hat mein mathematisches Leben von der ersten Vorlesung bis jetzt, zur Fertigstellung meiner Dissertation, begleitet. Immer stand seine Tür für meine zahlreichen Fragen offen. Dabei nahm er sich stets die Zeit, mit mir über meine mathematischen Anliegen zu sprechen, auch wenn sie sich dann doch als philosophischer oder privater Natur herausgestellt haben. Darüber hinaus möchte ich mich bei ihm dafür bedanken, dass er es mir ermöglicht hat eine Doktorarbeit über dieses schöne und interessante Thema anzufertigen. Die Schnittmenge aus Zahlentheorie und Geometrie hat mir viel Freude bereitet.

Mein Dank gilt auch *Prof. Dr. Anton Deitmar* für diverse fachliche Diskussionen und für seine Bereitschaft, als Gutachter dieser Arbeit zur Verfügung zu stehen.

Als Nächstes möchte ich mich beim gesamten *Arbeitsbereich Algebra* für die freundschaftliche Atmosphäre und den Zusammenhalt bedanken. Die Mittags- und Kaffeepausen mit all den Lebensweisheiten und wilden Theorien werde ich sicher sehr vermissen.

Besonders bedanken möchte ich mich auch bei meinem Bürokollegen *Giuliano Gagliardi*. Nicht nur für die vielen fachlichen Diskussionen und das Korrekturlesen dieser Arbeit, auch für seine Hilfe in allen weiteren Lebenslagen. Ob Computerprobleme, philosophische Diskussionen, private Themen oder Umzüge, er stand mir stets mit Rat und Tat zur Seite. Vielen Dank dafür!

Meinen *Eltern* möchte ich an dieser Stelle für ihre großzügige finanzielle Unterstützung während meines Studiums Danke sagen. Dadurch musste ich mir nie Sorgen um meinen Lebensunterhalt machen. Darüber hinaus danke ich meiner gesamten *Familie* für die moralische Unterstützung, vor allem in der Schlussphase der Promotion.

Meinen *Freunden* bin ich ebenfalls sehr dankbar. Auch wenn sie mich in den letzten Jahren zeitweise nicht oft zu Gesicht bekommen haben, haben sie mich nicht vergessen und waren immer für mich da, wenn ich sie gebraucht habe.

Zum Schluss möchte ich mich bei meinem Freund *Alexander Roth* für seine Liebe und Unterstützung in den letzten Jahren bedanken. Er hat mit unglaublicher Geduld und Verständnis all meine Launen in dieser aufregenden Zeit ertragen und mich mit seiner liebevollen Art immer wieder aufgemuntert. Jetzt werde ich für Dich da sein, Alex! Schreib Dein Buch!