

# Variationszugang zur QCD in Coulombbeichung

DISSERTATION

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Eberhard Karls Universität Tübingen  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von  
PETER VASTAG  
aus Herrenberg

Tübingen  
2016

Gedruckt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der  
Eberhard Karls Universität Tübingen.

Tag der mündlichen Qualifikation: 28.03.2017

Dekan:	Prof. Dr. Wolfgang Rosenstiel
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Hugo Reinhardt
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Amand Fäßler
3. Berichterstatter:	Prof. Dr. Reinhard Alkofer

# Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die QCD im Hamilton'schen Zugang. In diesem ist die Bestimmung des Grundzustands im Nulltemperaturlimes bzw. des Gleichgewichtszustands bei endlichen Temperaturen und chemischen Potentialen auf nicht-perturbative Weise durch Anwenden des Variationsprinzips möglich. Das gestattet die Untersuchung der im Niederenergiesektor dominanten Effekte der chiralen Symmetriebrechung und des Farbeinschlusses sowie deren Aufhebung bei endlichen Temperaturen und chemischen Potentialen.

Wir greifen den in früheren Arbeiten für die Yang–Mills-Theorie entwickelten und später auf die volle QCD erweiterten Variationszugang auf und verbessern ihn in einigen Gesichtspunkten signifikant. Die im Nulltemperaturlimes gefundenen Bewegungsgleichungen werden dadurch konsistent mit den Ergebnissen alternativer Zugänge. Für den Quarksektor ergibt sich eine endliche Bewegungsgleichung deren numerische Lösung den phänomenologischen Wert des chiralen Quarkkondensats reproduziert und dadurch die spontane Brechung der chiralen Symmetrie impliziert. Für den Yang–Mills-Sektor läßt sich die Lösung unter Vernachlässigung von Rückkopplungseffekten aus Gitterrechnungen übernehmen und zeigt das Auftreten des Farbeinschlusses.

Wir erweitern den Variationszugang zur vollen QCD nach unserer Kenntnis erstmalig auf endliche Temperaturen und chemische Potentiale, wobei wir auf zweierlei Methoden zurückgreifen. Zum einen verwenden wir den kanonischen Zugang indem wir das Großkanonische Potential minimieren. Der sich ergebende Ausdruck für das Quarkkondensat zeigt die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie bei endlichen Temperaturen an, auch wenn wir auf eine vollständige Ableitung und die numerische Lösung der Bewegungsgleichungen in dieser Arbeit vorerst verzichten. Zum anderen kompaktifizieren wir eine räumliche Dimension und extrahieren die thermischen Eigenschaften der Theorie aus den Bewegungsgleichungen auf der Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(1/T)$ . Das gestattet die direkte Auswertung des dualen Quarkkondensats und des Polyakov-Loops als Ordnungsparameter des Farbeinschlusses sowie des chiralen Quarkkondensats als Maß für die Brechung der chiralen Symmetrie. Unter Verzicht auf Rückkopplungseffekte und Verwendung der Nulltemperaturpropagatoren finden wir anhand von dualem bzw. chiralem Quarkkondensat für masselose Quarks und die Eichgruppe  $SU(3)$  Crossover-Übergänge für die Aufhebung von Farbeinschluß bzw. Wiederherstellung der chiralen Symmetrie, wobei die kritische Temperatur bei  $T_c \approx 198 \text{ MeV}$  bzw.  $T_\chi \approx 170 \text{ MeV}$  liegt. Aus dem Erwartungswert des Polyakov-Loops ergibt sich infolge der Vernachlässigung der skalaren Krümmung des Yang–Mills-Sektors hingegen für die Farbgruppe  $SU(2)/SU(3)$  eine deutlich höhere kritische Temperatur von  $T_c \approx 405 \text{ MeV}/T_c \approx 475 \text{ MeV}$  für die Aufhebung des Farbeinschlusses.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>iii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Hamilton'scher Zugang zur QCD in Coulombbeichung</b>	<b>7</b>
2.1 Hamilton'sche Formulierung der QCD . . . . .	7
2.1.1 Formulierung der klassischen QCD . . . . .	8
2.1.2 Bestimmung des klassischen QCD-Hamiltonians . . . . .	11
2.2 Kanonische Quantisierung und Fixieren der Coulombbeichung . . . . .	13
2.2.1 Kanonische Quantisierung, Weyleichung . . . . .	13
2.2.2 Fixieren der Coulombbeichung und Auflösen des Gauß'schen Gesetzes . . . . .	14
2.2.3 Gribov-Zwanziger-Szenario des Farbeinschlusses . . . . .	18
2.2.4 Impulsdarstellung . . . . .	19
2.2.5 Funktionale Schrödingergleichung und Variationsprinzip . . . . .	20
2.3 Niederenergiesektor und Phasendiagramm der QCD . . . . .	21
2.3.1 Chirale Symmetrie . . . . .	21
2.3.2 Phasendiagramm der QCD . . . . .	25
2.4 Hamilton'scher Zugang zu endlichen Temperaturen und chem. Potentialen . . . . .	28
2.4.1 Kanonischer Zugang . . . . .	28
2.4.2 Kompaktifizieren einer räumlichen Dimension . . . . .	29
2.5 Ordnungsparameter des Deconfinement- und chiralen Phasenübergangs . . . . .	33
2.5.1 Ordnungsparameter . . . . .	33
2.5.2 Ordnung des QCD-Phasenübergangs . . . . .	34
2.5.3 Chirales Quarkkondensat . . . . .	36
2.5.4 Polyakov-Loop . . . . .	36
2.5.5 Duales Quarkkondensat . . . . .	39
2.5.6 Weitere Ordnungsparameter für den Deconfinement-Übergang . . . . .	40
<b>3 Variationszugang zum QCD-Vakuum</b>	<b>41</b>
3.1 Motivation des Ansatzes und Grundlagen . . . . .	41
3.1.1 Ansatz für das Vakuumwellenfunktional . . . . .	41
3.1.2 Variationszugang zur reinen Yang-Mills-Theorie . . . . .	42
3.1.3 Ansatz für das fermionische Vakuumfunktional . . . . .	47
3.1.4 Wellenfunktional im Ortsraum . . . . .	51
3.1.5 Berechnung von Erwartungswerten . . . . .	52
3.2 Statischer Quarkpropagator und Energiefunktional . . . . .	54
3.2.1 Statischer Quarkpropagator . . . . .	54
3.2.2 Fermionisches Energiefunktional . . . . .	56
3.2.3 Bosonisches Energiefunktional . . . . .	60
3.2.4 Gesamtenergie . . . . .	62

3.3	Variationsgleichungen und Renormierung . . . . .	63
3.3.1	Variationsgleichungen . . . . .	63
3.3.2	UV- und IR-Analyse . . . . .	68
3.3.3	Gapgleichung in der Massenfunktion . . . . .	72
3.4	Numerische Ergebnisse . . . . .	74
3.4.1	Anmerkungen zur Lösung der Gapgleichung . . . . .	74
3.4.2	Ergebnisse . . . . .	77
3.5	Ausblick . . . . .	85
3.5.1	Vergleich mit laufender Kopplung . . . . .	85
3.5.2	Selbstkonsistentes Energiefunktional . . . . .	86
3.5.3	Endliches fermionisches Energiefunktional . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Kanonischer Zugang zur QCD bei endlichen Temperaturen und chemischen Potentialen</b>	<b>91</b>
4.1	Grundlagen des kanonischen Zugangs zur QCD . . . . .	93
4.1.1	Basis des Fockraums . . . . .	93
4.1.2	Großkanonisches Ensemble der Yang–Mills-Theorie . . . . .	93
4.1.3	Basis des fermionischen Fockraums . . . . .	97
4.1.4	Berechnung thermischer Erwartungswerte . . . . .	100
4.2	Statischer Quarkpropagator, Großkanonisches Potential und Variationsgleichungen . . . . .	102
4.2.1	Statischer Quarkpropagator und Quarkkondensat . . . . .	103
4.2.2	Thermischer Energieerwartungswert . . . . .	104
4.2.3	Entropie und Teilchenzahl . . . . .	105
4.2.4	Variationsgleichungen . . . . .	106
<b>5</b>	<b>QCD bei endlichen Temperaturen durch Kompaktifizieren einer Raumdimension</b>	<b>109</b>
5.1	Berechnung von chiralem und dualem Quarkkondensat . . . . .	109
5.1.1	Duales Quarkkondensat und QCD-Hamiltonian auf $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$ . . . . .	110
5.1.2	Ansatz für das Vakuumwellenfunktional . . . . .	113
5.1.3	Grundzustandsenergie und Variationsgleichungen . . . . .	116
5.1.4	Duales und chirales Quarkkondensat im Hamilton’schen Zugang in Coulombbeichung . . . . .	123
5.1.5	Numerische Ergebnisse . . . . .	127
5.2	Berechnung des effektiven Potentials des Polyakov-Loops . . . . .	132
5.2.1	QCD in Hintergrundeichung . . . . .	133
5.2.2	Wahl des Hintergrundeichfelds . . . . .	135
5.2.3	Ansatz für das Vakuumwellenfunktional . . . . .	136
5.2.4	Grundzustandsenergie und Variationsgleichungen . . . . .	139
5.2.5	Erweiterung auf endliche Temperaturen . . . . .	145
5.2.6	Effektives Potential . . . . .	146
5.2.7	Numerische Ergebnisse . . . . .	151
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>161</b>

**Anhang**

<b>A</b>	<b>Explizite Form der Dirac- und Farbstruktur</b>	<b>165</b>
A.1	Explizite Form der Diracstruktur . . . . .	165
A.1.1	Dirac- und Paulimatrizen . . . . .	165
A.1.2	Chirale Diracspinoren . . . . .	166
A.2	Anmerkungen zur Farbstruktur . . . . .	168
A.2.1	Explizite Form der Farbstruktur . . . . .	168
A.2.2	Definition der Cartanunteralgebra . . . . .	168
A.2.3	Explizite Struktur der Cartanunteralgebra für $SU(2)$ und $SU(3)$ .	169
A.2.4	Farbmatrizen in der Cartaneigenbasis . . . . .	171
<b>B</b>	<b>Explizite Berechnung von Erwartungswerten</b>	<b>173</b>
B.1	Nulltemperaturlimes . . . . .	173
B.1.1	Bosonische Erwartungswerte . . . . .	173
B.1.2	Fermionische Erwartungswerte . . . . .	174
B.1.3	Statischer Quarkpropagator . . . . .	177
B.1.4	Kopplungsterm . . . . .	180
B.1.5	Kinetische Energie der transversalen Gluonen . . . . .	183
B.2	Endliche Temperaturen . . . . .	187
B.2.1	Bosonische thermische Erwartungswerte . . . . .	187
B.2.2	Fermionische thermische Erwartungswerte . . . . .	190
B.2.3	Kinetische Energie der transversalen Gluonen . . . . .	192
<b>C</b>	<b>Störungstheoretische Motivation des Quarkwellenfunktionals</b>	<b>197</b>
C.1	Störungstheoretisches Energiefunktional für nacktes Vakuum . . . . .	197
C.2	Störungstheoretisches Quarkwellenfunktional für BCS-Vakuum . . . . .	199
C.3	Effektiver fermionischer Einteilchenoperator . . . . .	200
<b>D</b>	<b>UV-Analyse</b>	<b>203</b>
D.1	Quarkgapgleichung . . . . .	203
D.2	Statischer Quarkpropagator . . . . .	206
D.3	Fermionisches Energiefunktional . . . . .	206
D.4	Resummierte Gapgleichung . . . . .	210
D.5	UV-Limes des fermionischen Anteils am effektiven Potentials . . . . .	212
<b>E</b>	<b>Analyse der Lösung der Quarkgapgleichung</b>	<b>215</b>
E.1	Verhalten der Lösung im UV . . . . .	215
E.1.1	Winkelnäherung . . . . .	215
E.1.2	Skalierungsargument . . . . .	218
E.2	Verhalten der Lösung im IR . . . . .	218
E.2.1	Divergenter Skalarkern . . . . .	219
E.2.2	Verschwindender Skalarkern . . . . .	220
<b>F</b>	<b>Bewegungsgleichungen auf <math>\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)</math></b>	<b>221</b>
F.1	Bewegungsgleichungen in Abhängigkeit der Matsubarafrequenzen . . . . .	221
F.2	Resummation der Gapgleichung . . . . .	223

<b>Literatur</b>	<b>225</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>235</b>
<b>Danksagung</b>	<b>237</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Nach unserem gegenwärtigen Wissensstand wechselwirkt sämtliche Materie über vier Fundamentalkräfte: *Starke* und *schwache Wechselwirkung*, *Elektromagnetismus* sowie *Gravitation*. Den mathematischen Rahmen zur Beschreibung aller Fundamentalkräfte mit Ausnahme der Gravitation bildet das *Standardmodell* der Teilchenphysik, in welchem sämtliche bisher bekannten Elementarteilchen enthalten sind. Die (Fort-)Entwicklung des Standardmodells sowie die Überprüfung seiner Vorhersagen war Gegenstand jahrzehntelanger intensiver experimenteller und theoretischer Untersuchungen und dauert nach wie vor an. Einen medienwirksamen Höhepunkt in diesem Prozeß stellte der 2012 bekannt gegebene experimentelle Nachweis des *Higgsbosons* im *Large Hadron Collider* (LHC) am CERN – dem größten und teuersten jemals errichteten Meßapparat – dar [1, 2]. Neben dem immensen Aufwand beruhte die große Aufmerksamkeit für diese Entdeckung darauf, daß das Higgsboson zum einen das letzte Elementarteilchen des aktuellen Standardmodells war, dessen Nachweis noch ausstand. Zum anderen ist das Auftreten des Higgsbosons mit dem *Higgsmechanismus* verknüpft, welcher im Standardmodell ursächlich für die Entstehung der Massen der übrigen Elementarteilchen ist. Allerdings ist der Anteil dieser sogenannten *nackten* Massen an der Gesamtmasse der im Universum sichtbaren Materie mit ein bis zwei Prozent verschwindend gering. Der weitaus größere Teil der Masse entsteht aus der Bindungsenergie der starken Wechselwirkung, welche z.B. im Inneren von Atomkernen für die Stabilität der Nukleonen, d.h. von Protonen und Neutronen, sorgt. Das Verständnis der damit verbundenen Effekte sowie die Entwicklung geeigneter Modelle und Techniken zu deren Beschreibung ist daher von großem Interesse und stellt die Motivation der vorliegenden Arbeit dar.

Im Rahmen des Standardmodells bildet die *Quantenchromodynamik* (QCD) die Theorie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung. Die faszinierenden Eigenschaften der QCD treten besonders deutlich im Vergleich mit der *Quantenelektrodynamik* (QED) als quantisierter Theorie des Elektromagnetismus zu Tage. In der QED läßt sich die Wechselwirkung von Elektronen sowie anderer elektrisch geladener Teilchen durch den Austausch elektrisch neutraler – und daher untereinander nicht wechselwirkender – Photonen beschreiben. In der QCD übernehmen sechs Arten von Fermionen, die sogenannten *Quarks*, die Rolle der Elektronen und anstelle der elektrischen Ladung treten drei *Farbladungen* auf. Die Wechselwirkung der Quarks kann durch Austausch von *Gluonen* beschrieben werden, welche im Gegensatz zu Photonen eine (Farb-)Ladung tragen und untereinander wechselwirken können. Entfernt man die Quarks aus dem theoretischen Modell der QCD und betrachtet ausschließlich die Gluonen, so ergibt sich daher nach wie vor eine wechselwirkende und höchst nicht-triviale Theorie, welche als *Yang–Mills-Sektor* oder *-Theorie* bezeichnet wird.

Der Niederenergiesektor der QCD – man lasse sich vom Namen nicht irritieren, selbst im Inneren der Sonne liegen nach Maßstäben der starken Wechselwirkung niedrige Energien

vor – wird geprägt von zwei Effekten, die in der QED keine Entsprechung finden: Der *spontanen Brechung chiraler Symmetrie* sowie dem *Farbeinschluß* oder *Confinement*. Die chirale Symmetriebrechung erklärt die großen Unterschiede zwischen den nackten Massen der Elementarteilchen und der tatsächlich beobachteten Masse von Materie und führt zur Entstehung von *Pionen*, deren Austausch ein Modell zur Beschreibung der Wechselwirkung von Nukleonen innerhalb eines Atomkerns bietet. Unter dem Farbeinschluß versteht man das Phänomen, daß Quarks und Gluonen stets in Form farbneutraler, gebundener Zustände auftreten. Fügt man solchen Zuständen zusätzliche Energie zu, so führt dies nicht zur Freisetzung einzelner Farbladungen, sondern lediglich zur Entstehung weiterer farbneutraler Objekte. Quarks und Gluonen manifestieren sich also nicht als freie Teilchen im Anregungsspektrum. Das unterscheidet die QCD deutlich von der QED, in welcher sich freie elektrische Ladungen z.B. durch Ionisation elektrisch neutraler Atome gewinnen lassen. Der Farbeinschluß hat ganz wesentlichen Einfluß auf die Gestalt der Materie, die uns im alltäglichen Leben umgibt. Daher ist es umso bedauerlicher, daß trotz jahrzehntelanger intensiver Bemühungen bislang weder ein strikter Beweis auf fundamentaler Ebene für das Auftreten des Farbeinschlusses, noch eine allgemein anerkannte Erklärung für dessen Ursachen vorliegen [3]. Es bestehen allerdings keinerlei Zweifel daran, daß er auftritt. Dabei war lange Zeit unklar, welche Rolle den Gluonen zukommt, d.h. ob sie lediglich selber dem Farbeinschluß unterliegen, oder diesen vermitteln. In aktuellen Simulationen zeigt sich der Farbeinschluß bereits im Yang–Mills-Sektor, sodaß tatsächlich die Gluonen die entscheidende Rolle für dieses Phänomen zu spielen scheinen. Experimentell konnte rein gluonische Materie (*Glueballs*) bislang aber nicht nachgewiesen werden; ihre Suche ist daher Gegenstand intensiver Forschungen.

Exakte Berechnungen sind in den allermeisten Fällen weder in der QED, noch in der QCD möglich. In der QED lassen sich mit störungstheoretischen Methoden exzellente Vorhersagen machen. Ermöglicht wird dies dadurch, daß die Feinstrukturkonstante  $\alpha$  als Maß der Wechselwirkungsstärke dimensionslos und deutlich kleiner als eins ist – bei niedrigen Energien gilt  $\alpha \approx 1/137$  und auch bei großen Energien wächst  $\alpha$  nur langsam an. Aufgrund der Energieabhängigkeit spricht man allgemein von einer *laufenden Kopplung*. Dagegen besitzt die *Kopplungskonstante*  $\alpha_S$  der QCD im Niederenergiesektor einen Wert größer als eins und nimmt mit wachsender Energie ab. Erst im Hochenergiesektor ist  $\alpha_S \ll 1$  und störungstheoretische Berechnungen werden möglich. Dies erlaubt recht genaue Vorhersagen für Hochenergieprozesse, wie sie bei Schwerionenkollisionen beispielsweise im LHC am CERN oder im RHIC am Brookhaven National Laboratory (BNL) auftreten. Das Verschwinden der QCD-Wechselwirkungsstärke bei großen Energien bezeichnet man als *asymptotische Freiheit*. Mit ihr verbunden ist die Erwartung, daß Farbeinschluß sowie chirale Symmetriebrechung bei sehr hohen Temperaturen bzw. großen Dichten (oder chemischen Potentialen) aufgehoben werden. Dieser Vorgang – der *QCD-Phasenübergang* – unterliegt ebenfalls intensiver Forschungstätigkeit, läßt sich aber wie der Farbeinschluß und die chirale Symmetriebrechung selbst nur nicht-störungstheoretisch beschreiben. Von seinem Studium erhofft man sich unter anderem Erkenntnisse über Prozesse, die im frühen Stadium des Universums abliefen.

Für Berechnungen im Niederenergiesektor der QCD ist man auf Alternativen zur Störungstheorie angewiesen. Als sehr effizient haben sich dabei *Gitterrechnungen*, d.h. rein numerische Computersimulationen, erwiesen [4]. Diese lassen sich für beliebige Kopplungsstärken anwenden und haben zu erheblichen Erkenntnisgewinnen geführt, wozu auch die in den vergangenen Jahrzehnten deutlich gesteigerte Rechenleistung von Computern bei-

getragen hat. Bei der Betrachtung endlicher Temperaturen  $T$  und chemischer Potentiale  $\mu$  versagen Gitterrechnungen jedoch außerhalb des Limes  $T \gg \mu$  aufgrund des *Vorzeichenproblems* [5–7]. Dieses tritt für endliche chemische Potentiale bzw. Dichten unvermeidlich auf und verhindert die Wahrscheinlichkeitsgewichtung der Datenpunkte bei Anwendung von *Monte-Carlo-Methoden*. Eine (vollständige) Lösung oder Umgehung des Vorzeichenproblems ist nicht absehbar und da sich die physikalisch relevanten Bereiche nicht auf verschwindend kleine Dichten beschränken, treten neben Gitterrechnungen auch analytische Zugänge in den Fokus.

Eine Möglichkeit stellen dabei eine Reihe nicht-störungstheoretischer *Kontinuumsansätze* dar, welche in den letzten beiden Jahrzehnten entwickelt wurden, nicht unter dem Vorzeichenproblem leiden und daher prinzipiell zur Beschreibung des gesamten  $(T-\mu)$ -*Phasendiagramms* der QCD eingesetzt werden können. Diese Techniken beruhen auf der analytischen Herleitung von Bewegungsgleichungen für die *Propagatoren* und weiteren *Korrelationsfunktionen* bzw. für damit verwandte Größen der Theorie. Die Bewegungsgleichungen enthalten die gesamte Dynamik des betrachteten Quantensystems und lassen sich numerisch lösen. Allerdings sind Herleitung und Lösung der Bewegungsgleichungen nur im Rahmen von Näherungen möglich, was die Ergebnisse beeinträchtigen kann und daher die Kombination unterschiedlicher Ansätze zur Erhöhung der Aussagekraft sinnvoll macht.

Im einzelnen basieren die genannten Kontinuumsansätze auf der Verwendung von *Dyson-Schwinger-Gleichungen* in Landau- [8–10] oder *Coulombbeichung* [11–13], *Renormierungsgruppengleichungen* in Landaugleichung [14, 15] sowie Variationsrechnungen in Landaugleichung [16, 17] und im Hamilton’schen Zugang in Coulombbeichung. In der vorliegenden Arbeit werden wir auf den letztgenannten Variationszugang in Coulombbeichung zurückgreifen. Dieser beruht auf der Bestimmung des QCD-Vakuumszustands durch approximatives Lösen der *funktionalen* Schrödingergleichung mithilfe des *Ritz’schen Variationsprinzips*, d.h. durch Minimieren des Energieerwartungswerts. Vom QCD-Vakuum läßt sich danach auf die grundlegenden Eigenschaften der Theorie wie Farbeinschluß usw. schließen. Der Variationszugang in Coulombbeichung wurde zunächst für den Yang–Mills-Sektor entwickelt [18–22] und später auf die volle QCD erweitert [23–25]. Die Orientierung an bekannten Prinzipien der Quantenmechanik sowie die Verwendung der physikalischen Coulombbeichung tragen dabei zur Entstehung von Ausdrücken bei, die sich in Anlehnung an die QED intuitiv physikalisch interpretieren lassen. Alternativ sind Berechnungen im Hamilton’schen Zugang auch unter Verwendung von Dyson–Schwinger-Gleichungen möglich [26–28].

Die Einführung in die Hamilton’sche Formulierung der QCD in Coulombbeichung im Nulltemperaturlimes sowie bei endlichen Temperaturen und chemischen Potentialen ist Gegenstand von **Kapitel 2**. Dabei gehen wir auch auf die erwartete Struktur des QCD-Phasendiagramms ein und stellen geeignete *Ordnungsparameter* für den QCD-Phasenübergang vor. In **Kapitel 3** greifen wir den Variationszugang zur QCD im Nulltemperaturlimes auf und entwickeln ihn in zwei Punkten, dem Ansatz für den QCD-Vakuumszustand und der Güte der zur Ableitung der Bewegungsgleichungen verwendeten Näherungen, entscheidend weiter. Die entstehenden Bewegungsgleichungen lösen wir in eingeschränkter Form lediglich für den Quarksektor und finden eindeutige Anzeichen für die Brechung der chiralen Symmetrie im QCD-Vakuum. Dabei kann auf eine *Renormierung* verzichtet werden, da aufgrund der verbesserten Form des Variationszugangs sämtliche UV-Divergenzen in den Bewegungsgleichungen des Quarksektors verschwinden. In **Kapitel 4** erweitern wir den Variationszugang zur vollen QCD erstmals auf endliche Temperaturen und chemische

Potentiale, welche wir durch Betrachtung des *Großkanonischen Ensembles* einführen. Nach Ersetzen des *Dichteoperators* durch einen effektiven Einteilchenoperator lassen sich die Bewegungsgleichungen durch Minimieren des *Großkanonischen Potentials* bestimmen. Wir gehen auf die zur Berechnung erforderlichen Techniken ein und leiten die Gleichungen in einem ersten Schritt unter Vernachlässigung der Quark-Gluon-Kopplung ab. Dabei läßt sich bereits feststellen, daß die chirale Symmetrie bei hohen Temperaturen wiederhergestellt wird. Alternativ zum Großkanonischen Ensemble lassen sich endliche Temperaturen und chemische Potentiale durch *Kompaktifizieren* einer räumlichen Dimension einführen. Diese Methode hat den Vorteil, daß sich sämtliche thermodynamische Größen statt aus der Summe über eine unendliche Anzahl von Vielteilchenzuständen aus der konzeptionell einfacheren und weniger näherungsbehafteten Lösung der Schrödingergleichung auf der räumlichen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(1/T)$  gewinnen lassen. Außerdem erlaubt sie – im Gegensatz zum Großkanonischen Ensemble – den direkten Zugriff auf Ordnungsparameter des Farbeinschlusses. Wir verfolgen diesen Zugang in **Kapitel 5** und bestimmen unter Verwendung der Propagatoren der Theorie im Nulltemperaturlimes mit dem *chiralen* und *dualen Quarkkondensat* sowie dem Erwartungswert des *Polyakov-Loops* verschiedene Ordnungsparameter für den QCD-Phasenübergang. Die gefundenen Werte für die *kritischen Temperaturen* erlauben einen Einblick in das QCD-Phasendiagramm. Die wesentlichen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit werden in **Kapitel 6** zusammengefaßt, wo wir auch auf mögliche Ansatzpunkte für weiterführende Projekte eingehen. Schließlich finden sich technische oder ergänzende Teile der Arbeit in **Anhängen** sowie gelegentlich in Anmerkungen in Grauboxen.

## Einheitensystem

Wir verwenden in der vorliegenden Arbeit das *Lorentz–Heaviside-Einheitensystem* in Kombination mit *natürlichen Einheiten*

$$\hbar = c = k_B = 1. \quad (1.1)$$

Sämtliche dimensionsbehaftete Größen werden dabei in Einheiten von Elektronenvolt (eV) angegeben.

## Notation

Wir verwenden in dieser Arbeit die *Einstein’sche Summenkonvention*, d.h. doppelt auftretende Spin-, Dirac- oder Farbindizes implizieren eine Summation über den betreffenden Index. Ein separates Summenzeichen werden wir nur in Ausnahmefällen schreiben um das Auftreten der Summe zu verdeutlichen. Falls ein Index doppelt auftreten sollte ohne daß über ihn summiert wird, werden wir dies an der entsprechenden Stelle kennzeichnen sofern es nicht offensichtlich ist.

Zur Wahrung einer kompakten Notation werden wir teilweise auch sämtliche Argumente von Funktionen (also Impuls, Farbe, usw.) in einer einzigen Ziffer zusammenfassen. Für eine Funktion aus dem bosonischen Yang–Mills-Sektor (z.B. das Eichfeld) bedeutet dies

$$A(1) = A_{i_1}^{a_1}(\mathbf{p}_1) \quad (1.2)$$

während für den fermionischen Quarksektor (z.B. Quasiteilchenoperator)

$$C(1) = C^{s_1, m_1}(\mathbf{p}_1) \quad (1.3)$$

gilt. In dieser Notation impliziert eine doppelt auftretende Ziffer eine Summation bzw. Integration über sämtliche Argumente der Funktionen, also

$$A(1)B(1) \equiv \sum_{a_1} \sum_{i_1} \int \bar{d}^3 p_1 A_{i_1}^{a_1}(\mathbf{p}_1) B_{i_1}^{a_1}(\mathbf{p}_1) \quad (1.4)$$

bei bosonischen sowie

$$C(1)D(1) \equiv \sum_{m_1} \sum_{s_1} \int \bar{d}^3 p_1 C^{s_1, m_1}(\mathbf{p}_1) D^{s_1, m_1}(\mathbf{p}_1) \quad (1.5)$$

bei fermionischen Operatoren ( $\bar{d} = d/2\pi$ ). Es wird sich als nützlich erweisen, eine kompakte Notation auch für Produkte zweier fermionischer oder bosonischer Operatoren mit einer skalaren, impulsabhängigen Funktion zu verwenden:

$$f(p_1)A(1)B(1) \equiv \sum_{a_1} \sum_{i_1} \int \bar{d}^3 p_1 f(p_1) A_{i_1}^{a_1}(\mathbf{p}_1) B_{i_1}^{a_1}(\mathbf{p}_1), \quad (1.6)$$

$$f(p_1)C(1)D(1) \equiv \sum_{m_1} \sum_{s_1} \int \bar{d}^3 p_1 f(p_1) C^{s_1, m_1}(\mathbf{p}_1) D^{s_1, m_1}(\mathbf{p}_1). \quad (1.7)$$

## Veröffentlichungen zu dieser Dissertation

Artikel in Zeitschriften

- P. Vastag, H. Reinhardt und D. Campagnari,  
Improved variational approach to QCD in Coulomb gauge,  
Phys. Rev. D **93**, 065003 (2016), arXiv: 1512.06733
- D. Campagnari, E. Ebadati, H. Reinhardt und P. Vastag,  
Revised variational approach to QCD in Coulomb gauge,  
Phys. Rev. D **94**, 074027 (2016), arXiv: 1608.06820
- H. Reinhardt und P. Vastag,  
Chiral and deconfinement phase transition in the Hamiltonian approach to QCD in  
Coulomb gauge,  
Phys. Rev. D **94**, 105005 (2016), arXiv: 1605.03740

Für die aus diesen Artikeln übernommenen Abbildungen etc. gilt:

©2016 American Physical Society

Artikel in Tagungsbänden (*Proceedings*)

- H. Reinhardt, D. Campagnari, J. Heffner, M. Quandt und P. Vastag,  
Hamiltonian approach to QCD in Coulomb gauge: From the vacuum to finite tem-  
peratures,  
EPJ Web of Conferences **126**, 01002 (2016), arXiv: 1510.03286

- H. Reinhardt, G. Burgio, D. Campagnari, M. Quandt, P. Vastag, H. Vogt und E. Ebadati,  
Hamiltonian approach to QCD in Coulomb gauge: Gribov's confinement scenario at work,  
arXiv: 1607.08143
- H. Reinhardt, G. Burgio, D. Campagnari, E. Ebadati, J. Heffner, M. Quandt, P. Vastag und H. Vogt,  
Hamiltonian approach to QCD in Coulomb gauge at zero and finite temperature,  
EPJ Web of Conferences **137**, 03019 (2017), arXiv: 1609.09370
- D. Campagnari, H. Reinhardt, M. Q. Huber, P. Vastag und E. Ebadati,  
Dyson–Schwinger Approach to Hamiltonian QCD,  
EPJ Web of Conferences **137**, 03004 (2017), arXiv: 1610.06456

## Kapitel 2

# Hamilton'scher Zugang zur QCD in Coulombbeichung

In diesem einführenden Kapitel stellen wir den Hamilton'schen Zugang zur QCD sowie die grundlegenden Eigenschaften der QCD vor. Wir beginnen dabei in Abschnitt 2.1 mit einem kurzen historischen Überblick zur Entwicklung von Eichtheorien bevor wir uns der Herleitung der klassischen Hamiltonfunktion der QCD aus der entsprechenden Lagrange-funktion widmen. In Abschnitt 2.2 fixieren wir den QCD-Hamiltonian zunächst auf Weyl- und anschließend zusätzlich auf Coulombbeichung, wobei wir auch auf die Quantisierung der Theorie sowie die Realisierung des Farbeinschlusses im Hamilton'schen Zugang durch das Gribov-Zwanziger-Szenario eingehen werden. Die chirale Symmetriebrechung als zweite fundamentale Eigenschaft der QCD im Niederenergiesektor ist Gegenstand des folgenden Abschnitts 2.3. Dort diskutieren wir auch das Phasendiagramm der QCD sowie die bei hohen Temperaturen und Dichten erwarteten Effekte. Dies dient als Motivation für die in Abschnitt 2.4 durchgeführte Erweiterung der Theorie auf endliche Temperaturen und Dichten, wobei wir zwei alternative Zugänge vorstellen werden. In Abschnitt 2.5 führen wir schließlich Ordnungsparameter für die bei endlichen Temperaturen erwarteten Phasenübergänge der QCD ein.

### 2.1 Hamilton'sche Formulierung der QCD

Das Standardmodell der Teilchenphysik basiert auf der Verwendung von Quantenfeldtheorien zur Beschreibung der Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen. Die Lagrange-funktion dieser Theorien ist invariant unter lokalen *Eichtransformationen*, welche sich mathematisch durch Elemente einer *Liegruppe* beschreiben lassen. Bei der QCD, wie auch bei der Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung handelt es sich daher um *Eichtheorien*.

Der Begriff der Eichtransformation bzw. Eichtheorie geht auf H. Weyl zurück, der ihn zuerst 1919 bei seinem vergeblichen Versuch zur Vereinigung von Elektrodynamik und Gravitation verwendet und später im Zuge der aufkommenden Quantentheorie erneut aufgegriffen hat [29, 30].<sup>1</sup> Allerdings war bereits im 19. Jahrhundert – noch vor der Entdeckung der Maxwellgleichungen 1865 – bekannt, daß die Gesetze der Elektrodynamik verschiedene Darstellungen des Vektorpotentials  $\mathbf{A}$  erlauben.<sup>2</sup> Das ist Ausdruck der Invarianz der Lagrange-funktion der Elektrodynamik unter komplexen Phasentransformationen der Felder, welche der *abelschen* Liegruppe  $U(1)$  entsprechen. Die Erweiterung von Eichtheorien auf

---

<sup>1</sup>Der erste Beweis der Eichinvarianz der quantenmechanischen Bewegungsgleichungen stammt jedoch nicht von Weyl, sondern wurde von W. Fock anhand der Klein-Gordon-Gleichung erbracht [31].

<sup>2</sup>Für einen weitergehenden historischen Überblick sei auf [32] sowie die darin angegebenen Referenzen verwiesen.

nichtabelsche Liegruppen gelang – nach früheren Versuchen von O. Klein – 1954 C. Yang und R. Mills mit der Gruppe  $SU(2)$  [33], wobei eine Verallgemeinerung auf  $SU(N)$  mit beliebigem  $N \in \mathbb{N}$  problemlos möglich ist, siehe z.B. Referenz [34]. Die Verwendung nichtabelscher Eichtheorien führte in der Folgezeit zu großen Fortschritten in der Beschreibung elementarer Wechselwirkungen.

Unter Verwendung einer  $SU(2)$ -Yang–Mills-Theorie sowie des Higgsmechanismus erfolgte in den 1960er Jahren die Vereinigung von Elektrodynamik und schwacher Wechselwirkung im Rahmen des *Glashow–Salam–Weinberg-Modells* [35, 36] und in den 1970er Jahren wurde eine an ein spinorwertiges Feld gekoppelte  $SU(3)$ -Yang–Mills-Theorie – die QCD – zur Beschreibung der starken Wechselwirkung eingeführt [37, 38]. Damit war das bis heute verwendete Grundgerüst des Standardmodells errichtet. Begleitet wurde diese Entwicklung von einer Reihe wichtiger technischer Erkenntnisse über die Regularisierung und Renormierung von Yang–Mills-Theorien [39, 40] sowie den für die QCD essentiellen Beweis der asymptotischen Freiheit [41, 42]. Ungeachtet dieser Fortschritte bestehen aber nach wie vor viele ungeklärte Fragestellungen. So fehlen beispielsweise Beweise für die Renormierbarkeit der QCD in beliebigen Eichungen sowie den Farbeinschluß in Yang–Mills-Theorien. Yang–Mills-Theorien und speziell die QCD sind daher unverändert Gegenstand intensiver Untersuchungen.

Nach dieser knappen Zusammenfassung der geschichtlichen Entwicklung widmen wir uns im Folgenden der Hamilton'schen Formulierung der QCD. In deren Mittelpunkt steht der QCD-Hamiltonian, welchen wir in üblicher Weise durch Legendretransformation aus der Lagrangedichte gewinnen werden. Diese ergibt sich wiederum auf anschauliche Art aus der nichtabelschen Erweiterung der Lagrangedichte der QED. Der Wechsel von der abelschen Liegruppe  $U(1)$  zur nichtabelschen Gruppe  $SU(N_C)$  bedingt einige signifikante Änderungen der Theorie: Statt der elektrischen Ladung treten  $N_C$  verschiedene Farbladungen auf, weshalb  $(N_C^2 - 1)$  masselose Eichbosonen (Gluonen) die Rolle des Photons übernehmen.<sup>3</sup> Weiterhin ergeben sich in der QCD statt des Elektrons  $N_F$  verschiedene Arten von massiven Fermionen, die *Quarkflavours*.<sup>4</sup>

Als erste Vereinfachung werden wir in der vorliegenden Arbeit – zumindest weitestgehend – auf die Betrachtung unterschiedlicher Quarkflavours verzichten. Das stellt jedoch keinen grundlegenden Eingriff in unsere Theorie dar, da eine Erweiterung auf mehrere Quarkflavours konzeptionell relativ einfach möglich ist, siehe Abschnitt 5.1.5 für eine Diskussion der notwendigen Anpassungen. Da der Niederenergiesektor der QCD von den beiden annähernd gleich schweren – und daher gut miteinander identifizierbaren – leichtesten Quarkflavours (Up, Down) dominiert wird, sollten die Auswirkungen dieser Näherung aber ohnehin gering sein.

### 2.1.1 Formulierung der klassischen QCD

Den Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen stellt somit ein massives, raumzeitabhängiges und spinorwertiges Quarkfeld

$$\Psi^m(x) \tag{2.1}$$

<sup>3</sup>Im Standardmodell gilt  $N_C = 3$  und man bezeichnet die drei Farbladungen in Anlehnung an die Grundfarben mit rot, blau und grün. Aufgrund der prinzipiell ähnlichen Struktur werden wir im Verlauf der Arbeit gelegentlich auch  $N_C = 2$  betrachten und dies an den betreffenden Stellen vermerken.

<sup>4</sup>Das aktuelle Standardmodell enthält  $N_F = 6$  verschiedene Quarkflavours: Up- ( $u$ ), Down- ( $d$ ), Strange- ( $s$ ), Charm- ( $c$ ), Bottom- ( $b$ ) und Top-Quark ( $t$ ).



bestehend aus  $m = 1, \dots, N_C$  (Farb-)Komponenten dar.<sup>5</sup> Unterziehen wir das Quarkfeld (2.1) einer lokalen Eichtransformation

$$\Psi^m(x) \rightarrow \Psi'^m(x) = U^{mn}(x)\Psi^n(x), \quad (2.2)$$

so stellen wir fest, daß die sich aus der üblichen Diractheorie ergebende klassische Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_Q)\Psi \quad (2.3)$$

nicht eichinvariant ist, d.h. ihren Wert unter der lokalen Eichtransformation (2.2) ändert. Hierbei bezeichnet  $U$  ein Element der Liegruppe  $SU(N_C)$ ,  $m_Q$  die nackte oder *Strommasse* der Quarks und  $\gamma$  in üblicher Weise die Diracmatrizen, siehe Anhang A.1 für die in dieser Arbeit verwendete Darstellung. Die explizite Rechnung zeigt, daß die fehlende Invarianz der Lagrangedichte (2.3) durch die Raumzeitabhängigkeit von  $U$  verursacht wird,

$$\bar{\Psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \rightarrow \bar{\Psi}'i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi' = \bar{\Psi}i\gamma^\mu\left[\partial_\mu + \left(U^\dagger\partial_\mu U\right)\right]\Psi. \quad (2.4)$$

Um die Lagrangedichte in eine (lokal) eichinvariante Form zu bringen, sind wir gezwungen, die gewöhnliche Viererableitung durch die *kovariante Ableitung*

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \quad (2.5)$$

zu ersetzen, was dem Prinzip der aus der klassischen Elektrodynamik bekannten minimalen Substitution entspricht. Hierbei bezeichnet  $g$  die *Kopplungskonstante* und  $A$  ein *Eichfeld*. Wir weisen darauf hin, daß die Wahl des Vorzeichens des Eichfelds willkürlich ist, da sich die Wirkung bzw. die Gesamtenergie des Systems aus einem Funktionalintegral über sämtliche Eichfeldkonfigurationen ergeben wird. Fordern wir für das Eichfeld das Transformationsverhalten

$$igA_\mu \rightarrow igA'_\mu = igUA_\mu U^\dagger + (\partial_\mu U)U^\dagger, \quad (2.6)$$

so sehen wir mithilfe von (2.4), daß die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_Q = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_Q)\Psi \quad (2.7)$$

eichinvariant und somit zur Beschreibung des Quarkfeldes unter Einfluß des Eichfeldes  $A$  geeignet ist.

Aus dem Transformationsverhalten (2.6) ergibt sich, daß das Eichfeld ein nicht-triviales Objekt im Farbraum darstellen muß. Betrachten wir das Quarkfeld in der *fundamentalen Darstellung* und führen wir die *Generatoren*  $t_a$ ,  $a = 1, \dots, N_C^2 - 1$  der Liegruppe  $SU(N_C)$  in dieser Darstellung ein, so läßt sich das Eichfeld als

$$A_\mu^{mn}(x) = A_\mu^a(x)t_a^{mn} \quad (2.8)$$

schreiben, wobei wir im Folgenden die Bezeichnung Eichfeld häufig synonym für die Größen  $A$  und  $A^a$  verwenden werden.<sup>6</sup> Die Generatoren erfüllen die Vertauschungsrelation

$$[t_a, t_b] = if^{abc}t_c \quad (2.9)$$

<sup>5</sup>Bei Betrachtung mehrerer Quarkflavours muß das Quarkfeld durch eine mehrkomponentige Größe  $\Psi_f^m$  ersetzt werden, wobei  $f = 1, \dots, N_F$  die verschiedenen Flavours indiziert.

<sup>6</sup>Man beachte, daß es sich bei  $A^a$  nicht um *ein* Eichfeld sondern tatsächlich um  $(N_C^2 - 1)$  Felder handelt.

mit der vollständig antisymmetrischen *Strukturkonstanten*  $f$  der Liegruppe und sind gemäß

$$\text{Sp}(t_a t_b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (2.10)$$

normiert, siehe Anhang A.2 für die von uns verwendete explizite Form der Farbstruktur. Das Nicht-Verschwinden des Kommutators (2.9) stellt einen wesentlichen Unterschied im Vergleich zur abelschen Eichtheorie QED dar und überträgt sich direkt auf die Eichfelder. Das hat zur Folge, daß die mit den Eichfeldern assoziierten Gluonen anders als die Photonen in der QED auch untereinander wechselwirken können.

An dieser Stelle bietet es sich an, für Größen im Farbraum zusätzlich die *adjungierte Darstellung* einzuführen, welche wir im Laufe der Arbeit ebenfalls verwenden werden. Diese beruht auf der Ersetzung der Generatoren  $t_a$  durch die anti-Hermite'schen Operatoren  $T_a = -it_a$  sowie der Identifikation  $\hat{T}_a^{bc} = f^{bac}$ , wobei wir Größen in der adjungierten Darstellung stets durch einen Hut kennzeichnen werden. Beispielsweise ergibt sich für die kovariante Ableitung (2.5) in dieser Darstellung

$$\hat{D}_\mu^{ab}(x) = \delta^{ab} \partial_\mu + g f^{acb} A_\mu^c(x) \quad (2.11a)$$

sowie für deren räumlichen Anteil

$$\hat{\mathbf{D}}^{ab}(x) = \delta^{ab} \nabla - g f^{acb} \mathbf{A}^c(x). \quad (2.11b)$$

Man beachte, daß  $\mathbf{D}$  tatsächlich die *negativen* räumlichen Komponenten von  $D_\mu$  enthält.

Für die vollständige Beschreibung der QCD muß das Eichfeld – wie das Quarkfeld – eine dynamische Größe darstellen und nicht-triviale Bewegungsgleichungen erfüllen. Das macht einen entsprechenden Beitrag zur Lagrangedichte des Gesamtsystems erforderlich, welcher in Analogie zur QED durch

$$\mathcal{L}_{\text{YM}}(x) = -\frac{1}{2} \text{Sp}(F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F^{a,\mu\nu}(x) \quad (2.12)$$

gegeben ist und als Yang–Mills-Lagrangedichte bezeichnet wird.<sup>7</sup> Dabei haben wir im zweiten Schritt die Spur über den Farbraum mithilfe der Normierung (2.10) ausgewertet.<sup>8</sup> Weiterhin ist

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{g} [D_\mu(x), D_\nu(x)] \quad (2.13a)$$

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \quad (2.13b)$$

der nicht-abelsche *Feldstärketensor* und das Transformationsverhalten (2.6) des Eichfelds impliziert  $D_\mu \rightarrow U D_\mu U^\dagger$  bzw.  $F_{\mu\nu} \rightarrow U F_{\mu\nu} U^\dagger$  und stellt so die Eichinvarianz von  $\mathcal{L}_{\text{YM}}$  sicher. Die Einführung des *farbelektrischen*,<sup>9</sup>

$$\mathbf{E}^a = -\dot{\mathbf{A}}^a - \hat{\mathbf{D}}^{ab} A_0^b, \quad (2.14)$$

<sup>7</sup>Der Einfachheit halber verzichten wir bei der Definition auf die mögliche Einführung externer Farbladungen, da diese für die vorliegende Arbeit nicht von Relevanz sind.

<sup>8</sup>Wir bezeichnen in der vorliegenden Arbeit beliebige Spuren mit „Sp“. Worüber sich die Spuren im Einzelfall erstrecken sollte aus dem Kontext klar werden oder wird andernfalls an der entsprechenden Stelle vermerkt.

<sup>9</sup>Ein Punkt kennzeichnet wie üblich die Zeitableitung.

sowie des *farbmagnetischen Feldes*

$$\mathbf{B}^a = \nabla \times \mathbf{A}^a - \frac{1}{2} g f^{abc} \mathbf{A}^b \times \mathbf{A}^c \quad (2.15)$$

ermöglichen schließlich die für die Hamilton'sche Formulierung der QCD vorteilhafte Darstellung

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^a \cdot \mathbf{E}^a - \frac{1}{2} \mathbf{B}^a \cdot \mathbf{B}^a \quad (2.16)$$

der Yang–Mills-Lagrangedichte (2.12). Zusammenfassend ergibt sich die klassische Lagrangedichte der QCD aus der Summe der Quark- sowie der Yang–Mills-Dichte, Gleichungen (2.7) und (2.12):

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{Q}} + \mathcal{L}_{\text{YM}}. \quad (2.17)$$

### 2.1.2 Bestimmung des klassischen QCD-Hamiltonians

Um zur Hamilton'schen Formulierung der QCD zu gelangen, unterziehen wir die sich aus der klassischen QCD-Lagrangedichte (2.17) ergebende Lagrangefunktion einer Legendretransformation bezüglich des Quarkfelds  $\Psi$  sowie des Eichfelds  $A$ . Hierzu betrachten wir die *Wirkung*

$$S_{\text{QCD}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}} = S_{\text{Q}} + S_{\text{YM}}, \quad (2.18)$$

welche wie die Lagrangedichte in einen Quark- sowie einen Yang–Mills-Anteil zerfällt und aus welcher wir mittels Ableitung die *kanonischen Impulse*

$$\frac{\delta S_{\text{QCD}}}{\delta(\partial_0 \Psi_i^m(x))} = i \Psi_i^{m\dagger}(x), \quad (2.19)$$

$$\frac{\delta S_{\text{QCD}}}{\delta(\partial_0 A_0^a(x))} = 0 \equiv \Pi_0^a(x), \quad (2.20)$$

$$\frac{\delta S_{\text{QCD}}}{\delta(\partial_0 A_i^a(x))} = -E_i^a(x) \equiv \Pi_i^a(x) \quad (2.21)$$

bestimmen können. An dieser Stelle ist eine Bemerkung zur Notation angebracht: Wir haben bei der Bezeichnung der einzelnen Komponenten der (Eich-)Felder einen Wechsel von der Minkowski- hin zur euklidischen Metrik unternommen. Dabei indizieren lateinische Buchstaben stets die Komponenten von Dreier- und *nicht* die räumlichen Komponenten von kovarianten Vierervektoren. Sämtliche aus dem metrischen Tensor hervorgehende Vorzeichen werden explizit berücksichtigt. Daneben verwenden wir lateinische Buchstaben auch zum Indizieren der vier Spinorkomponenten der Quarkfelder. Da die Anzahl der Komponenten aus der Art der Felder eindeutig hervorgeht, sollte dies zu keinerlei Unklarheiten führen.

Die klassische *Hamiltonfunktion* ist durch die Legendre-Transformierte

$$H_{\text{QCD}} = \int d^3x \left( i \Psi_i^{m\dagger}(x) \dot{\Psi}_i^m(x) + \Pi_i^a(x) \dot{A}_i^a(x) - \mathcal{L}_{\text{QCD}} \right) \quad (2.22)$$

gegeben und läßt sich in einen Quark- sowie einen Yang-Mills-Anteil aufspalten:

$$H_Q = \int d^3x \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \left[ -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla - gA_0(\mathbf{x}) + g\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \beta m_Q \right] \Psi(\mathbf{x}), \quad (2.23)$$

$$H_{\text{YM}} = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \mathbf{E}^a(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}^a(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbf{B}^a(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}^a(\mathbf{x}) - A_0^a(\mathbf{x}) \hat{D}_i^{ab}(\mathbf{x}) E_i^b(\mathbf{x}) \right]. \quad (2.24)$$

Hierbei haben wir auf die explizite Nennung des Zeitarguments der Felder verzichtet (und werden dies auch im Folgenden tun), da dieses bei der weiteren Hamilton'schen Formulierung der Theorie sowie ihrer Quantisierung ohne Belang sein wird.

Die Kenntnis der Hamiltonfunktion der QCD (2.22) ermöglicht die Auswertung der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen. Während sich die Gleichungen für das Quarkfeld bzw. den damit verbundenen kanonischen Impuls auf die (adjungierte) Diracgleichung des Einteilchen-Operators

$$-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla - gA_0 + g\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} + \beta m_Q \quad (2.25)$$

reduzieren, ergeben sich aus denjenigen für die temporale Komponente von Eichfeld und zugehörigem Impuls die folgenden Zusammenhänge:

$$\dot{A}_0^a(\mathbf{x}) = \frac{\delta H_{\text{QCD}}}{\delta \Pi_0^a(\mathbf{x})} = 0 \quad (2.26)$$

impliziert die zeitliche Erhaltung der temporalen Eichfeldkomponente während sich

$$\dot{\Pi}_0^a(\mathbf{x}) = -\frac{\delta H_{\text{QCD}}}{\delta A_0^a(\mathbf{x})} \quad (2.27)$$

zum nichtabelschen *Gauß'schen Gesetz*

$$\hat{D}_i^{ab}(\mathbf{x}) \Pi_i^b(\mathbf{x}) = g \Psi^\dagger(\mathbf{x}) t_a \Psi(\mathbf{x}) \quad (2.28)$$

umformen läßt. Die rechte Seite dieser Gleichung legt die Interpretation von

$$\rho_Q^a(\mathbf{x}) = \Psi^\dagger(\mathbf{x}) t_a \Psi(\mathbf{x}) \quad (2.29)$$

als Farbladungsdichte des Quarkfelds nahe. Analog würden externe Farbladungen ebenfalls in die rechte Seite von (2.28) eingehen. Im folgenden Abschnitt 2.2 werden wir sehen, daß dem Gauß'schen Gesetz eine wichtige Rolle bei der Bestimmung des QCD-Hamiltonians in Coulombbeichung zukommen wird. Zuvor gehen wir aber noch auf die verbleibenden Hamilton'schen Bewegungsgleichungen ein: Die Gleichungen für die räumlichen Komponenten des Eichfelds reproduzieren die Definition (2.14) des farbelektrischen Felds sowie dessen Identität mit dem kanonischen Impuls, während die Gleichungen für die räumlichen Impulskomponenten auf das nichtabelsche *Ampère'sche Gesetz*

$$\hat{D}^{ab}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}^b(\mathbf{x}) = \hat{D}_0^{ab}(\mathbf{x}) \mathbf{E}^b(\mathbf{x}) - g \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha} t_a \Psi(\mathbf{x}) \quad (2.30)$$

führen.

## 2.2 Kanonische Quantisierung und Fixieren der Coulombbeziehung

### 2.2.1 Kanonische Quantisierung, Weyleichung

Wie schon der Name *Quantenchromodynamik* impliziert, stellt der klassische QCD-Hamiltonian (2.22) lediglich den Ausgangspunkt für unsere weiteren Betrachtungen dar. Um zu einer quantenmechanischen Theorie zu gelangen, werden wir im Folgenden auf die Methodik der kanonischen Quantisierung zurückgreifen, d.h. wir ersetzen die in Gleichung (2.22) enthaltenen kontinuierlichen Freiheitsgrade  $\Psi$  und  $A$  durch (operatorwertige) Quantenfelder, für welche wir zur Erhaltung einer möglichst kompakten Notation dieselben Bezeichnungen wie für die klassischen Felder verwenden werden. Die Operatoreigenschaften der Quantenfelder werden dabei durch die kanonischen (Anti-)Kommutationsbeziehungen fixiert, d.h. indem wir die sich aus dem klassischen Hamiltonformalismus ergebenden Fundamentalklammern durch Antikommutatoren für das fermionische Quark- bzw. Kommutatoren für das bosonische Eichfeld ersetzen.

Für das quantisierte Quarkfeld ergeben sich somit die Bedingungen

$$\left\{ \Psi_i^m(\mathbf{x}), \Psi_j^{n\dagger}(\mathbf{y}) \right\} = \delta_{ij} \delta^{mn} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.31a)$$

$$\left\{ \Psi_i^m(\mathbf{x}), \Psi_j^n(\mathbf{y}) \right\} = 0, \quad (2.31b)$$

wobei wir bei diesen Antikommutationsrelationen formal auch die – in unserer Notation bereits vollzogene – Gleichzeitigkeit der Felder gefordert haben. Die kanonische Quantisierung des Eichfelds gestaltet sich etwas schwieriger: Während wir für dessen räumliche Komponenten problemlos

$$\left[ A_i^a(\mathbf{x}), \Pi_j^b(\mathbf{y}) \right] = i \delta_{ij} \delta^{ab} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.32a)$$

$$\left[ A_i^a(\mathbf{x}), A_j^b(\mathbf{y}) \right] = \left[ \Pi_i^a(\mathbf{x}), \Pi_j^b(\mathbf{y}) \right] = 0 \quad (2.32b)$$

einfordern können, ist eine analoge Beziehung für die zeitliche Komponente ausgeschlossen, denn in Gleichung (2.20) hatten wir explizit  $\Pi_0 = 0$  gefunden, was einen nicht-verschwindenden Kommutator mit  $A_0$  unmöglich macht. Die in dieser Arbeit verwendete Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen und dennoch eine quantisierte Theorie zu erhalten, besteht im Gebrauch der *Weyleichung*

$$A_0 = 0. \quad (2.33)$$

Mit ihr verschwindet die zeitliche Komponente des Eichfelds als Freiheitsgrad aus der klassischen Hamiltonfunktion und muß folglich auch nicht mehr quantisiert werden.

Für den quantisierten QCD-Hamiltonian

$$H_{\text{QCD}} = H_{\text{Q}} + H_{\text{YM}} \quad (2.34)$$

ergibt sich damit [vgl. (2.23), (2.24)]

$$H_{\text{Q}} = \int d^3x \Psi^{m\dagger}(\mathbf{x}) \left[ -i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \delta^{mn} + g \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}^a(\mathbf{x}) t_a^{mn} + \beta m_{\text{Q}} \delta^{mn} \right] \Psi^n(\mathbf{x}), \quad (2.35)$$

$$H_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ \boldsymbol{\Pi}^a(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\Pi}^a(\mathbf{x}) + \mathbf{B}^a(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}^a(\mathbf{x}) \right]. \quad (2.36)$$

Die Vertauschungsrelation (2.32a) impliziert hierbei die Darstellung

$$\Pi_i^a(\mathbf{x}) = \frac{\delta}{i\delta A_i^a(\mathbf{x})} \quad (2.37)$$

für den kanonischen Impulsoperator welcher gemäß Gleichung (2.21) auch dem Operator des farbelektrischen Feldes entspricht. Das kann in Analogie zur Ortsdarstellung des Impulsoperators in der Standard-Quantenmechanik gesehen werden. Für das quantisierte farbmagnetische Feld gilt dagegen wie gehabt der in (2.15) angegebene Ausdruck.

Im Zuge der „Ortsdarstellung“ bezüglich des Eichfeldes entsprechen Zustände Funktionalen im Eichfeld, während Operatoren Funktionale des Eichfeldes und/oder dessen kanonischen Impulses sind – man spricht in diesem Zusammenhang vom *funktionalen Schrödingerbild*. Dabei wirkt das Eichfeld als Multiplikationsoperator und der kanonische Impuls als Ableitungsoperator, vgl. (2.37). Das Matrixelement eines Operators  $O$  bezüglich zweier Zustände  $\phi, \psi$  ist analog zur Standard-Quantenmechanik durch das „Skalarprodukt“

$$\langle \phi | O | \psi \rangle = \int \mathcal{D}A \phi^*[A] O[A, \Pi] \psi[A] \quad (2.38)$$

gegeben. Dabei erstreckt sich das Funktionalintegral über sämtliche Eichfeldkonfigurationen. Aus physikalischer Sicht beschreiben jedoch nur solche Eichfeldkonfigurationen verschiedene Zustände, die sich nicht durch eine räumliche<sup>10</sup> Eichtransformation  $U$  verbinden lassen. Sämtliche Konfigurationen, die auf demselben *Eichorbit*

$$\mathcal{O}_A = \left\{ A_i^U \left| A_i^U = U A_i U^\dagger + \frac{i}{g} (\partial_i U) U^\dagger \right. \right\} \quad (2.39)$$

liegen, sind äquivalent und liefern aufgrund der Eichinvarianz der Zustände  $\phi, \psi$  und des Operators  $O$  denselben Wert im Integranden. Das führt zu einer zusätzlichen Divergenz im Funktionalintegral (2.38), weshalb für jeden Eichorbit  $\mathcal{O}_A$  nur ein Repräsentant<sup>11</sup> darin eingehen sollte. Dies läßt sich durch Aufstellen einer weiteren, räumlichen Eichbedingung an die Felder und das Fixieren des Funktionalintegrals (2.38) in dieser Eichung realisieren.

Dabei können wir uns im Folgenden auf den Yang–Mills-Anteil der Theorie beschränken. Für den fermionischen Anteil, d.h. die Quarkfelder, stellt sich die Frage nach einer Eichfixierung nicht. Auch werden wir für diesen keine funktionale Darstellung verwenden, welche hier keinerlei Vorteile bietet.

### 2.2.2 Fixieren der Coulombbeichung und Auflösen des Gauß'schen Gesetzes

Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit (mit Ausnahme von Abschnitt 5.2) verlangen wir von den Eichfeldern neben der Weyleichung (2.33) die zusätzliche Erfüllung der *Coulomb-* oder *Strahlungseichung*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (2.40)$$

<sup>10</sup>Durch die Weyleichung sind die temporalen Eichfreiheitsgrade fixiert.

<sup>11</sup>Es läßt sich zeigen, daß Eichorbits Äquivalenzklassen mit der Eichtransformation als zugehöriger Äquivalenzrelation darstellen [21].

Das hat zur Folge, daß die *longitudinale* Komponente der Eichfelder verschwindend sein muß, d.h.

$$A_i^{a\parallel}(\mathbf{x}) = \int d^3y \left[ \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - t_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] A_j^a(\mathbf{y}) = 0, \quad (2.41)$$

wobei

$$t_{ij}(\mathbf{x}) = \int \bar{d}^3p \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) t_{ij}(\mathbf{p}), \quad (2.42a)$$

$$t_{ij}(\mathbf{p}) = \delta_{ij} - \hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_j \quad (2.42b)$$

mit

$$\bar{d} \equiv \frac{d}{2\pi}, \quad \hat{\mathbf{p}}_i = \frac{p_i}{p} \quad (2.43)$$

den *transversalen Projektor* bezeichnet. Das Vorliegen rein transversaler Eichfelder

$$A_i^a(\mathbf{x}) = A_i^{a\perp}(\mathbf{x}) = \int d^3y t_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) A_j^a(\mathbf{y}) \quad (2.44)$$

macht die Coulombbeichung zu einer physikalischen Eichung. So besitzen Photonen (und damit die Eichfelder) als physikalische Zustände der freien QED ebenfalls nur transversale Freiheitsgrade. Es sei jedoch betont, daß das Verschwinden der longitudinalen Eichfeldkomponenten *nicht* zur Folge hat, daß die longitudinalen Komponenten des kanonischen Impulses dies ebenfalls tut.

Die Fixierung des Funktionalintegrals (2.38) in Coulombbeichung läßt sich besonders elegant mit der *Faddeev-Popov-Methode* durchführen, wobei die Identität [43]

$$1 = \int \mathcal{D}U \delta(\nabla \cdot \mathbf{A}^U) \det(-\nabla \cdot \hat{\mathbf{D}}^U) \quad (2.45)$$

mit der kovarianten Ableitung  $\hat{\mathbf{D}}^U$  (2.11) bezüglich des Eichfelds  $\mathbf{A}^U$  [siehe (2.39)] eingeschoben wird. Unter Ausnutzung der Eichinvarianz von  $\psi$ ,  $\phi$  und  $O$  sowie nach Substitution  $\mathbf{A}^U \rightarrow \mathbf{A}$  läßt sich die (divergente) Integration über die Eichgruppe vom übrigen Funktionalintegral abspalten. Dieses erstreckt sich aufgrund der Delta-Distribution  $\delta$  nunmehr ausschließlich über die relevanten (transversalen) Eichfeldkonfigurationen in Coulombbeichung (2.40) und unter Vernachlässigung der divergenten Konstante  $\int \mathcal{D}U$  – welche sich in die Normierung der Zustände absorbieren läßt – ergibt sich

$$\langle \phi | O | \psi \rangle = \int \mathcal{D}A^\perp J[A^\perp] \phi^*[A^\perp] O[A^\perp, \Pi] \psi[A^\perp]. \quad (2.46)$$

Dabei wird

$$J[A] = \det(\hat{\mathbf{G}}^{-1}) \quad (2.47)$$

als *Faddeev-Popov-Determinante* und

$$(\hat{\mathbf{G}}^{-1})^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv (-\nabla \cdot \hat{\mathbf{D}})^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.48)$$

als *Faddeev–Popov-Operator* bezeichnet. Für eine ausführlichere, didaktische Herleitung von Gleichung (2.46) sei auf [21] und für weitere Details auf die darin angegebenen Referenzen verwiesen.

Allerdings zeigt sich, daß die Anwendung der Faddeev–Popov-Methode zu keiner vollständigen Eichfixierung führt, d.h. die Integration in Gleichung (2.46) enthält nach wie vor über Eichtransformationen verbundene Feldkonfigurationen, sogenannte *Gribovkopien* [44]. Dies wird als *Gribovproblem* bezeichnet. Die vollständige Fixierung der Coulombbeichung bedingt die weitere Einschränkung des Funktionalintegrals (2.46) auf die *Fundamental Modular Region* (FMR)

$$\text{FMR} = \left\{ A_i \mid \partial_i A_i = 0 \text{ und } \int d^3x \text{Sp} [A_i^U(\mathbf{x}) A_i^U(\mathbf{x})] \rightarrow \min \text{ für } U = \text{id} \right\} \quad (2.49)$$

sowie die Identifikation der auf dem Rand der FMR immer noch vorhandenen Gribovkopien [21]. Das löst zumindest formal das Gribovproblem, allerdings ist es bislang nicht möglich, dieses Prozedere auf Kontinuumstheorien anzuwenden [45]. Im Folgenden werden wir daher sämtliche Funktionalintegrale in der Form (2.46) bestimmen und das mögliche Auftreten von Gribovkopien ignorieren.

Das Auftreten der Faddeev–Popov-Determinante  $J$  im Funktionalintegral (2.46) erinnert an die Änderung des Integrationsmaßes bei einem Koordinatenwechsel und läßt sich anschaulich ebenso interpretieren. Wie der Wechsel zu krummlinigen Koordinaten bedingt auch die Eichfixierung mit der Faddeev–Popov-Methode eine Transformation des durch den kanonischen Impuls gegebenen Ableitungsoperators und somit des Yang–Mills-Anteils des QCD-Hamiltonians (2.34). Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Faddeev–Popov-Determinante (2.47) durch die enthaltene kovariante Ableitung (2.11) ein nicht-triviales Funktional im Eichfeld darstellt und *nicht* mit dem kanonischen Impuls vertauscht.

Im Zuge der Eichfixierung des Hamiltonians (2.34) läßt sich noch ein weiteres Problem beheben, welches mit der Verwendung der Weyleichung (2.33) verknüpft ist: Diese eliminiert die zeitliche Eichfeldkomponente als Freiheitsgrad der klassischen Theorie, womit auch die zugehörigen Hamilton'schen Bewegungsgleichungen (2.26) und (2.28) verschwinden. Während das bei der ersten Gleichung keinerlei Probleme bereitet, ist die zweite Gleichung, das Gauß'sche Gesetz, nicht verzichtbar da sie physikalische Inhalte repräsentiert. Zu deren Erhaltung läßt sich das Gauß'sche Gesetz (2.28) als Randbedingung an physikalische Zustände  $\psi$  einfordern, d.h. wir verlangen

$$\hat{D}^{ab}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{\Pi}^b(\mathbf{x})\psi = g\rho_Q^a(\mathbf{x})\psi, \quad (2.50)$$

wobei der Operator auf der linken Seite als *Gaußoperator* bezeichnet wird. Gleichung (2.50) läßt sich zu einer Bedingung an die longitudinale Komponente des kanonischen Impulses umformen und so in den Erwartungswert des QCD-Hamiltonians einsetzen.<sup>12</sup> Dadurch ist es möglich, den Hamiltonian (2.34) nach Eichfixierung ausschließlich in Abhängigkeit der transversalen Felder (Eichfeld und kanonischer Impuls) darzustellen, weshalb wir im Folgenden auf das Superskript  $\perp$  verzichten werden. Sofern nicht explizit erwähnt sind sämtliche Felder stets transversal.

Wir verzichten in dieser Arbeit auf die explizite Durchführung von Eichfixierung und Auflösung des Gauß'schen Gesetzes (2.50) – diese ist ausführlich in Referenz [21] zu finden

<sup>12</sup>Dabei wird explizit verwendet, daß der Faddeev–Popov-Operator (2.48) auf der FMR positiv und deshalb invertierbar ist.



– sondern geben den QCD-Hamiltonian direkt in seiner endgültigen Form an,

$$\tilde{H}_{\text{QCD}} = H_{\text{Q}} + \hat{H}_{\text{YM}} + H_{\text{C}}. \quad (2.51)$$

Der Quarkanteil  $H_{\text{Q}}$  ist weiterhin durch den Dirac-Hamiltonian (2.35) gegeben, wobei der einzige Unterschied gegenüber dem Ausdruck in reiner Weyleichung darin besteht, daß das Eichfeld nun transversal ist. Für spätere Betrachtungen wird es sich als nützlich erweisen, den Dirac-Hamiltonian gemäß

$$H_{\text{Q}} = H_{\text{Q}}^0 + H_{\text{Q}}^A \quad (2.52)$$

zu zerlegen, wobei

$$H_{\text{Q}}^0 = \int d^3x \Psi^{m\dagger}(\mathbf{x}) \left[ -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m_{\text{Q}} \right] \Psi^m(\mathbf{x}) \quad (2.53)$$

den Eichfeld-unabhängigen und

$$H_{\text{Q}}^A = g \int d^3x \Psi^{m\dagger}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}^a(\mathbf{x}) t_a^{mn} \Psi^n(\mathbf{x}) \quad (2.54)$$

den Eichfeld-abhängigen Anteil von  $H_{\text{Q}}$  enthält.  $H_{\text{Q}}^0$  entspricht dem Hamiltonian eines freien, massiven Quarkfelds während  $H_{\text{Q}}^A$  die Effekte der Kopplung des Quarkfelds an das transversale Eichfeld berücksichtigt. Wir bezeichnen diese beiden Anteile deshalb als *freien Dirac-Hamiltonian* sowie *Kopplungsterm*.

Die weiteren Anteile des Hamiltonians (2.51) sind bosonischen Ursprungs und unterscheiden sich stark vom QCD-Hamiltonian in Weyleichung (2.34). Dabei enthält

$$\hat{H}_{\text{YM}} = H_{\text{YM}}^E + H_{\text{YM}}^B \quad (2.55)$$

mit

$$H_{\text{YM}}^E = \frac{1}{2} \int d^3x J^{-1}[A] \Pi_i^a(\mathbf{x}) J[A] \Pi_i^a(\mathbf{x}), \quad (2.56)$$

$$H_{\text{YM}}^B = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{B}^a(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}^a(\mathbf{x}) \quad (2.57)$$

die transversalen Anteile des ursprünglichen Yang–Mills-Hamiltonians (2.36). Während der Beitrag des farbmagnetischen Feldes – bis auf die Transversalität – unverändert erhalten bleibt, geht in den Beitrag der transversalen Komponenten des farbelektrischen Feldes infolge der Eichfixierung explizit die Faddeev–Popov-Determinante ein. Dem Ursprung entsprechend bezeichnen wir  $H_{\text{YM}}^E$  als *kinetische Energie* der transversalen Gluonen und  $H_{\text{YM}}^B$  als deren *potentielle Energie*. Die gravierendsten Änderungen betreffen den Beitrag der longitudinalen Impulskomponenten, welcher die Form

$$H_{\text{C}} = \frac{g^2}{2} \int d^3x \int d^3y J^{-1}[A] \rho^a(\mathbf{x}) J[A] \hat{F}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho^b(\mathbf{y}) \quad (2.58)$$

annimmt. Dabei enthält die Farbladungsdichte

$$\rho^a(\mathbf{x}) = \rho_{\text{Q}}^a(\mathbf{x}) + \rho_{\text{YM}}^a(\mathbf{x}) \quad (2.59)$$

neben dem bereits bekannten fermionischen (2.29) auch einen bosonischen Anteil

$$\rho_{\text{YM}}^a(\mathbf{x}) = f^{abc} \mathbf{A}^b(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\Pi}^c(\mathbf{x}), \quad (2.60)$$

welcher seinen Ursprung in der Auflösung des Gauß'schen Gesetzes (2.50) hat. Die Farbladungen (2.59) wechselwirken über den (*Farb-*)*Coulombkern*

$$\hat{F}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int d^3z \hat{G}^{ac}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (-\Delta_{\mathbf{z}}) \hat{G}^{cb}(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \quad (2.61)$$

welcher ein nichtlokales Funktional des Eichfelds darstellt. Im Fall der QED entspricht der Coulombkern dem Coulombpotential der Elektrostatik und (2.58) wird zur üblichen Coulombwechselwirkung. Aufgrund dieser formalen Ähnlichkeit bezeichnet man  $H_C$  [Gleichung (2.58)] als *Farb-Coulombwechselwirkung*.

Der Umstand, daß die Farbladungsdichte (2.59) aus einem fermionischen sowie einen bosonischen Term besteht, ermöglicht die entsprechende Zerlegung der Farb-Coulombwechselwirkung (2.58),

$$H_C = H_C^{\text{YM}} + H_C^{\text{INT}} + H_C^{\text{Q}}. \quad (2.62)$$

Dabei enthält  $H_C^{\text{YM}}$  ausschließlich die bosonische,  $H_C^{\text{Q}}$  ausschließlich die fermionische und  $H_C^{\text{INT}}$  gemischt beide Farbladungsdichten. Da die fermionische Farbladungsdichte (2.29) keinen kanonischen Impulsoperator enthält, vertauscht sie mit der Faddeev–Popov-Determinante und wir können für den rein fermionischen Anteil

$$H_C^{\text{Q}} = \frac{g^2}{2} \int d^3x \int d^3y \rho_{\text{Q}}^a(\mathbf{x}) \hat{F}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho_{\text{Q}}^b(\mathbf{y}) \quad (2.63)$$

schreiben. Übertragen wir die Zerlegung (2.62) auf den gesamten QCD-Hamiltonian (2.51), so ergibt sich für diesen die Form

$$\bar{H}_{\text{QCD}} = \bar{H}_{\text{YM}} + \bar{H}_{\text{Q}}. \quad (2.64)$$

Hierbei entspricht

$$\bar{H}_{\text{YM}} = \hat{H}_{\text{YM}} + H_C^{\text{YM}} \quad (2.65)$$

exakt dem Hamiltonian der reinen Yang–Mills-Theorie in Coulombbeichung während der gesamte Quarksektor sowie die Quark-Gluon-Kopplung in

$$\bar{H}_{\text{Q}} = H_{\text{Q}} + H_C^{\text{Q}} + H_C^{\text{INT}} \quad (2.66)$$

enthalten sind.

### 2.2.3 Gribov–Zwanziger-Szenario des Farbeinschlusses

In der QED liefert der Coulombkern (2.61) das Coulombpotential der Elektrostatik. Es stellt sich daher die Frage, ob man aus dem Coulombkern in der QCD auf das Potential zwischen Quarks schließen kann. Ein solches Potential läßt sich in Gitterrechnungen simulieren und man findet für ein Quark–Antiquark-Paar im Abstand  $r$  ein für große Abstände linear anwachsendes Potential,  $V(r) \sim r$ . Eine Trennung der beiden Farbladungen würde

deshalb eine unendliche Menge an Energie erfordern und ist nicht möglich. Das Auftreten eines solchen linearen Potentials ist ein wesentliches Anzeichen des Farbeinschlusses und sollte auch in Coulombbeichung in irgendeiner Form realisiert sein.

Die Grundlage für die Realisierung des Farbeinschlusses im Hamilton'schen Zugang stellt das sogenannte *Gribov-Zwanziger-Szenario* dar [44, 46]. Dieses geht davon aus, daß der überwiegende Anteil der Eichfeldkonfigurationen, die in das eichfixierte Funktionalintegral (2.46) eingehen, am Rand der FMR (2.49) liegen; analog dazu, daß sich das Volumen der  $n$ -dimensionalen Kugel für große  $n$  an der Kugeloberfläche konzentriert. Während er im Inneren der FMR positiv ist, vgl. Fußnote 12, besitzt der Faddeev-Popov-Operator (2.48) auf deren Rand, dem *Gribovhorizont*,<sup>13</sup> Nullmoden. Diese strahlen aus Stetigkeitsgründen auf die Umgebung des Rands aus und führen dort zu kleinen Eigenwerten von (2.48), welche wiederum zu großen Werten des explizit vom inversen Faddeev-Popov-Operator abhängigen Coulombkerns (2.61) führen. In Verbindung mit der Konzentration der Eichfeldmoden am Rand der FMR führt dies zu einer – verglichen mit der QED – enormen Verstärkung des aus dem Coulombkerns bestimmbaren Potentials.

Untersuchungen sowohl in Gitter- als auch in Kontinuumsrechnungen haben ergeben, daß das Gribov-Zwanziger-Szenario zwar nicht in Landau- [47], dafür aber in Coulombbeichung realisiert ist [18, 19, 22, 48]. Weiterhin ergibt sich aus dem Coulombkern (2.61) tatsächlich ein für große Abstände linear wachsendes Potential, welches jedoch nicht dieselbe Steigung wie das in anderen Ansätzen auf dem Gitter gefundene statische Quarkpotential besitzt. Wir werden auf diesen Punkt in Abschnitt 3.1.2 nochmals zurückkommen.

Neben dem Gribov-Zwanziger-Szenario existieren zahlreiche weitere Modelle zur Erklärung des Farbeinschlusses – basierend z.B. auf Zentrumsvortizes, magnetischen Monopolen und dualer Supraleitung – auf welche wir jedoch nicht näher eingehen wollen, siehe [3, 49] sowie die darin angegebenen Referenzen für eine ausführlichere Einführung. Wir merken jedoch an, daß sich auch diese Modelle mit dem Gribov-Zwanziger-Szenario in Verbindung bringen lassen, siehe z.B. Referenz [50] für eine Übersicht.

## 2.2.4 Impulsdarstellung

Für die meisten Berechnungen wird es von Vorteil sein, sie nicht im Orts-, sondern im Impulsraum durchzuführen. Wir geben daher im Folgenden die Impulsdarstellung der Quark- und Gluonfelder an. Aus ihr läßt sich durch Einsetzen auch diejenige für den QCD-Hamiltonian (2.64) ableiten. Für das Eichfeld und den kanonischen Impulsoperator setzen wir

$$\mathbf{A}^a(\mathbf{x}) = \int \mathrm{d}^3p \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{A}^a(\mathbf{p}), \quad (2.67)$$

$$\mathbf{\Pi}^a(\mathbf{x}) = \int \mathrm{d}^3p \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{\Pi}^a(\mathbf{p}). \quad (2.68)$$

Die Kommutatorrelationen (2.32) implizieren dann

$$\left[ A_i^a(\mathbf{p}), \Pi_j^b(\mathbf{q}) \right] = it_{ij}(\mathbf{p}) \delta^{ab} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (2.69a)$$

$$\left[ A_i^a(\mathbf{p}), A_j^b(\mathbf{q}) \right] = \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}), \Pi_j^b(\mathbf{q}) \right] = 0 \quad (2.69b)$$

<sup>13</sup>Wir verwenden hier eine etwas vereinfachende Darstellung: Tatsächlich ist der Gribovhorizont der Rand der *Gribovregion*, die die FMR als echte Teilmenge enthält. Der Rand der FMR berührt dabei stets den Gribovhorizont, siehe Referenz [21] für weitere Details.

mit  $\delta \equiv 2\pi\delta$ , wobei das Auftreten des transversalen Projektors in (2.69a) eine Folge der Verwendung der Coulombbeichung ist. Für den kanonischen Impulsoperator ergibt sich damit die Darstellung

$$\Pi_i^a(\mathbf{p}) = -it_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\delta}{\delta A_j^a(\mathbf{p})}. \quad (2.70)$$

Das Quarkfeld  $\Psi$  übertragen wir in Impulsdarstellung, indem wir es nach einer geeigneten Spinorbasis entwickeln. Hierzu bietet sich die Eigenbasis des freien, masselosen Einteilchen-Diracoperators

$$h(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \quad (2.71)$$

an, da bezüglich dieser der Operator Kern des freien Dirac-Hamiltonians  $H_Q^0$  (2.53) im Limes *chiraler* ( $m_Q = 0$ ) Quarks diagonal wird. Die Eigenenergien von  $h$  (2.71) sind durch  $e_{\pm}(\mathbf{p}) = \pm p$  gegeben und wir bezeichnen die Eigenspinore zu  $e_+(\mathbf{p})$  mit  $u^s(\mathbf{p})$  und diejenigen zu  $e_-(\mathbf{p})$  mit  $v^s(-\mathbf{p})$ . Dabei ist  $s = \pm 1$  das Doppelte der Spinprojektion. Die Herleitung der genauen Form der Eigenspinore sowie die für explizite Berechnungen relevanten Relationen finden sich in Anhang A.1. Mithilfe der Eigenspinore ergibt sich die Entwicklung

$$\Psi^m(\mathbf{x}) = \int d^3p \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \left( a^{s,m}(\mathbf{p}) u^s(\mathbf{p}) + b^{s,m\dagger}(-\mathbf{p}) v^s(-\mathbf{p}) \right) \quad (2.72)$$

des Quarkfelds, wobei die operatorwertigen Entwicklungskoeffizienten  $a$  ( $b$ ) den Vernichtungsoperatoren von (Anti-)Quarkzuständen entsprechen und aufgrund von (2.31) den folgenden Antikommutationsbeziehungen genügen müssen:

$$\left\{ a^{s,m}(\mathbf{p}), a^{t,n\dagger}(\mathbf{q}) \right\} = \left\{ b^{s,m}(\mathbf{p}), b^{t,n\dagger}(\mathbf{q}) \right\} = \delta^{st} \delta^{mn} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (2.73a)$$

$$\begin{aligned} \left\{ a^{s,m}(\mathbf{p}), a^{t,n}(\mathbf{q}) \right\} &= \left\{ b^{s,m}(\mathbf{p}), b^{t,n}(\mathbf{q}) \right\} \\ &= \left\{ a^{s,m}(\mathbf{p}), b^{t,n}(\mathbf{q}) \right\} = \left\{ a^{s,m}(\mathbf{p}), b^{t,n\dagger}(\mathbf{q}) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.73b)$$

### 2.2.5 Funktionale Schrödingergleichung und Variationsprinzip

Für den QCD-Hamiltonian (2.64) läßt sich in Analogie zur Standard-Quantenmechanik die funktionale Schrödingergleichung

$$\bar{H}_{\text{QCD}}|\phi\rangle = E|\phi\rangle \quad (2.74)$$

formulieren.<sup>14</sup> Das Lösen dieser Gleichung und die damit verbundene Bestimmung des Grundzustands  $|\phi\rangle$  sowie seiner Eigenenergie  $E$  sind das Ziel des Hamilton'schen Zugangs zur QCD. Da uns dies nicht auf direkte Art und Weise möglich sein wird, erinnern wir uns nochmals an die Standard-Quantenmechanik, genauer an das *Ritz'sche Variationsprinzip*: Sei  $O$  ein selbstadjungierter Operator und  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  sein kleinster Eigenwert, so gilt für jeden beliebigen Zustand  $|\psi\rangle$

$$\lambda_0 \leq \frac{\langle \psi | O | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (2.75)$$

<sup>14</sup>Man lasse sich von der Bezeichnung Schrödingergleichung nicht irritieren: Der QCD-Hamiltonian (2.64) und mit ihm die Gleichung (2.74) sind relativistisch kovariant.

wobei die Ungleichung scharf wird, sobald  $|\psi\rangle$  Eigenzustand zum Eigenwert  $\lambda_0$  ist [51]. Das impliziert, daß wir den niedrigsten Eigenwert von  $O$ , d.h. für  $O = H$  die Grundzustandsenergie, bestimmen können, indem wir die rechte Seite der Ungleichung (2.75) minimieren. Für den Hamiltonian ist dieses Vorgehen äquivalent zur Bestimmung der Grundzustandsenergie aus der Schrödingergleichung (2.74) – allerdings nur, solange sich die mit der Minimierung verbundene Variation über *sämtliche* Zustände des Hilbertraums erstreckt. Schränken wir den Raum für die Variation ein, so liefert uns das Variationsprinzip aber zumindest den optimalen auf dem verkleinerten Raum möglichen Vakuumzustand.

Dieses Variationsprinzip läßt sich auf endliche Temperaturen übertragen und wird im Folgenden die Grundlage sämtlicher Berechnungen sein. In einem ersten Schritt werden wir in Kapitel 3 einen vertretbaren Ansatz für die Gestalt des QCD-Vakuumfunktionals machen und für diesen den Energieerwartungswert minimieren, was uns einen Einblick in die Struktur des QCD-Vakuums bei verschwindender Temperatur erlauben wird. Die zur Anwendung auf endliche Temperaturen erforderlichen technischen Details werden wir in Kürze in Abschnitt 2.4 besprechen und in den Kapiteln 4 und 5 anwenden. Zuvor ist es aber ratsam, genauer auf die im Niederenergiesektor der QCD beobachtbaren Effekte sowie die sich bei Erhöhung von Temperatur oder Dichte ergebenden Veränderungen einzugehen.

## 2.3 Niederenergiesektor und Phasendiagramm der QCD

Für kleine Energien, d.h. bei niedriger Temperatur und Dichte, befindet sich die QCD in der *hadronischen Phase*: Quarks und Gluonen liegen nicht in freier Form vor sondern bilden zusammengesetzte, farbneutrale Teilchen (Hadronen) welche wiederum die Kernmaterie formen, die uns im alltäglichen Leben umgibt. Die hadronische Phase wird von zwei Effekten dominiert, dem bereits diskutierten Farbeinschluß (Confinement) sowie der chiralen Symmetriebrechung, welcher wir uns im Folgenden widmen wollen.

### 2.3.1 Chirale Symmetrie

Die Brechung der chiralen Symmetrie ist eng mit der *dynamischen Erzeugung* von Masse verknüpft. Fast die gesamte sichtbare Masse des Universums (99%) entstammt den Atomkernen, welche aus Protonen und Neutronen aufgebaut sind. Diese sind *Baryonen*, d.h. gebundene Drei-Quark-Zustände (Proton  $uud$ , Neutron  $udd$ ). Vergleicht man die Masse von Proton oder Neutron<sup>15</sup>

$$m_p \approx 938.3 \text{ MeV}, \quad m_n \approx 939.6 \text{ MeV} \quad (2.76)$$

mit derjenigen der leichten Quarkflavours [52]

$$m_u \approx 2.2 \text{ MeV}, \quad m_d \approx 4.7 \text{ MeV}, \quad m_s \approx 96 \text{ MeV}, \quad (2.77)$$

so fällt auf, daß die nackte Masse der Konstituenten von Proton oder Neutron nur etwa ein bis zwei Prozent der Gesamtmasse beträgt. Der „Rest“ – also annähernd sämtliche Masse – wird dynamisch erzeugt, d.h. entsteht durch die Bindungs- und kinetische Energie. Es ist eine wichtige Feststellung, daß dieser Prozeß, bzw. die ihm zugrunde liegende chirale Symmetriebrechung, für die Entstehung fast aller Masse der Objekte unseres Alltags

<sup>15</sup>In SI-Einheiten entspricht 1 MeV einer Masse von  $1.78 \cdot 10^{-30}$  kg.

verantwortlich ist und nicht – wie in manchen populärwissenschaftlichen Darstellungen behauptet wird – der Higgsmechanismus, welcher lediglich für die Entstehung der nackten Massen sorgt.

Die Diskrepanz zwischen nackten und beobachtbaren Massen motiviert die Einführung einer *Konstituentenmasse*  $M_f(p)$  für gebundene Quarks, welche ein dynamisches Verhalten zeigt und sich im Limes (asymptotisch-)freier Quarks auf die nackte Masse reduziert,  $M_f(p \rightarrow \infty) = m_f$ , während sie im Infraroten, d.h. „eingefroren“ durch die Bindung, für Up- bzw. Down-Quarks den durch (2.76) implizierten Wert

$$M_{u,d}(0) \approx 300 \text{ MeV} \quad (2.78)$$

annimmt. Das Auftreten einer nicht-verschwindenden Konstituentenmasse  $M_f(p)$  ist unabhängig von der nackten Masse und ergibt sich auch in chiralen Modellen, d.h. für  $m_f = 0$ . Dies ist ein Zeichen der nicht-störungstheoretischen Natur der dynamischen Massenerzeugung, da eine störungstheoretisch bestimmte Masse in beliebiger Ordnung proportional zu ihrem Wert in führender Ordnung ist.

Die Anwendung des Konzepts der Konstituentenmasse auf das gesamte hadronische Spektrum führt unmittelbar zu einer weiteren Ungereimtheit: Die Massen der Pionen als gebundene Quark–Antiquark-Zustände (*Mesonen*) der leichten Up- und Down-Quarks sind deutlich niedriger als es die Konstituentenmasse (2.78) erwarten läßt, beispielsweise gilt für das  $\pi^+$ -Meson ( $u\bar{d}$ ) [52]

$$m_{\pi^+} \approx 139.6 \text{ MeV} . \quad (2.79)$$

Wie wir in Kürze sehen werden, läßt sich auch diese Abweichung im Zuge der chiralen Symmetriebrechung erklären.

Worum genau handelt es sich nun bei der chiralen Symmetrie und deren Brechung? Hierzu betrachten wir die klassische Lagrangedichte der QCD (2.17) für  $f = 1, \dots, N_F$  Quarkflavours

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f=1}^{N_F} \bar{\Psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) \Psi_f + \mathcal{L}_{\text{YM}} . \quad (2.80)$$

Führen wir für die (spinorwertigen) Wellenfunktionen der einzelnen Flavours die Zerlegung

$$\Psi_f = \Psi_{R,f} + \Psi_{L,f} \quad \text{mit} \quad \Psi_{R,f} \equiv \frac{\text{id} + \gamma_5}{2} \Psi_f \quad (2.81)$$

durch,<sup>16</sup> so folgt für die Lagrangedichte bei Verwendung der in Anhang A.1 gegebenen (Anti-)Kommutationsrelationen der Diracmatrizen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} = & - \sum_{f=1}^{N_F} m_f \left( \bar{\Psi}_{R,f} \Psi_{L,f} + \bar{\Psi}_{L,f} \Psi_{R,f} \right) \\ & + \sum_{f=1}^{N_F} \left( \bar{\Psi}_{R,f} i\gamma^\mu D_\mu \Psi_{R,f} + \bar{\Psi}_{L,f} i\gamma^\mu D_\mu \Psi_{L,f} \right) + \mathcal{L}_{\text{YM}} . \end{aligned} \quad (2.82)$$

<sup>16</sup>Siehe Gleichung (A.3) für die Darstellung der Matrix  $\gamma_5$ .

Die Komponenten  $\Psi_R, \Psi_L$  bezeichnet man als rechts-, bzw. linkshändig und Gleichung (2.82) zeigt, daß der Massenterm der Lagrangedichte – im Gegensatz zum dynamischen Term – diese beiden Komponenten mischt.

Der dynamische Anteil der Lagrangedichte ist invariant unter separaten Transformationen der rechts- und linkshändigen Komponenten

$$\Psi_{R,f} \rightarrow \Psi'_{R,f} = U_{R,ff'} \Psi_{R,f'}, \quad (2.83a)$$

$$\Psi_{L,f} \rightarrow \Psi'_{L,f} = U_{L,ff'} \Psi_{L,f'}, \quad (2.83b)$$

wobei  $U_{R,L}$  unitäre Matrizen auf dem Flavourraum sind. Das entspricht der *chiralen Symmetrie*

$$U_R(N_F) \times U_L(N_F) \cong SU_R(N_F) \times SU_L(N_F) \times U_R(1) \times U_L(1) \quad (2.84)$$

und läßt sich durch

$$SU_{R,L}(N_F) : \quad \Psi'_{R,L} = \exp\left(i\theta_{R,L}^a \mathcal{G}^a\right) \Psi_{R,L}, \quad (2.85)$$

$$U_{R,L}(1) : \quad \Psi'_{R,L} = \exp\left(i\theta_{R,L}\right) \Psi_{R,L} \quad (2.86)$$

darstellen. Dabei bezeichnet  $\mathcal{G}^a$  mit  $a = 1, \dots, N_F^2 - 1$  die Generatoren der Gruppe  $SU(N_F)$  in fundamentaler Darstellung und  $\theta_{R,L}^{(a)}$  die Phasen der Transformationen.

Der Massenterm der Lagrangedichte (2.80) besitzt lediglich eine  $[U(1)]^{N_F}$ -Symmetrie durch die Invarianz unter Phasentransformationen der einzelnen Quarkflavours. Die chirale Symmetrie ist deshalb in der QCD-Lagrangedichte (2.82) explizit gebrochen. Der Grad der Brechung hängt von der Masse der betrachteten Quarkflavours ab und sollte vernachlässigbar sein, sofern diese erheblich kleiner als die physikalische Energieskala  $\Lambda_{\text{QCD}} \approx 220 \text{ MeV}$  ist. Das dürfte sicher für Up- und Down- sowie unter Einschränkungen für das Strange-Quark der Fall sein, vgl. (2.77) [53]. Wir beschränken uns im Folgenden auf diese drei Quarkflavours ( $N_F = 3$ ) und setzen  $m_f = 0$ . Die Generatoren  $\mathcal{G}$  sind dann beispielsweise durch die Gell-Mann-Matrizen (siehe Anhang A.2) gegeben. Das *Noether'sche Theorem* impliziert, daß die chirale Symmetrie der Lagrangefunktion in diesem Limes die Erhaltung der Ströme

$$SU_{R,L}(N_F) : \quad j_{R,L}^{a,\mu} = \bar{\Psi}_{R,L} \mathcal{G}^a \gamma^\mu \Psi_{R,L}, \quad (2.87)$$

$$U_{R,L}(1) : \quad j_{R,L}^\mu = \bar{\Psi}_{R,L} \gamma^\mu \Psi_{R,L} \quad (2.88)$$

bedingt. Diese lassen sich zu jeweils zwei Axial- und Vektorströmen

$$j_A^{a,\mu} = j_R^{a,\mu} - j_L^{a,\mu} = \bar{\Psi} \mathcal{G}^a \gamma^\mu \gamma_5 \Psi, \quad (2.89)$$

$$j_A^\mu = j_R^\mu - j_L^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \Psi, \quad (2.90)$$

$$j_V^{a,\mu} = j_R^{a,\mu} + j_L^{a,\mu} = \bar{\Psi} \mathcal{G}^a \gamma^\mu \Psi, \quad (2.91)$$

$$j_V^\mu = j_R^\mu + j_L^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (2.92)$$

zusammenfassen.

In der quantisierten Theorie erfüllen die (zeitlich erhaltenen) Noetherladungen

$$Q_{A,V}^a = \int d^3x j_{A,V}^{a,0}(\mathbf{x}) \quad (2.93)$$

jeweils die Vertauschungsrelation (2.9) und erzeugen die Gruppe  $SU_A(N_F) \times SU_V(N_F)$ . Ist der QCD-Vakuumszustand  $|\phi\rangle$  invariant unter der Wirkung dieser Gruppe, so gilt  $Q_{A,V}^a|\phi\rangle = 0$  was man als *Wigner–Weyl-Realisierung* des Vakuums bezeichnet. Für das hadronische Spektrum hätte dies das Auftreten von Teilchen unterschiedlicher Parität, aber identischer Masse zur Folge. Da das den experimentellen Erkenntnissen widerspricht, läßt sich darauf schließen, daß für das QCD-Vakuum  $Q_A^a|\phi\rangle \neq 0$  gelten muß [54]. Das entspricht der *Nambu–Goldstone-Realisierung* des Vakuums und bedeutet, daß die Symmetrie  $SU_A(N_F)$  spontan gebrochen wird.

Gemäß des *Goldstonetheorems* tritt für jeden Generator einer spontan gebrochenen (Axial-)Vektorsymmetrie ein masseloses, (pseudo-)skalares Boson (*Goldstoneboson*) auf. Die acht leichtesten Hadronen, d.h. die Pionen  $\pi^{0,\pm}$ , Kaonen  $K^{0,\pm}$ ,  $\bar{K}^0$  sowie das Eta-Meson  $\eta$  lassen sich als Goldstonebosonen der spontanen Brechung von  $SU_A(N_F = 3)$  interpretieren.<sup>17</sup> Daß diese eine, verglichen mit den übrigen Hadronen zwar geringe, aber nicht-verschwindende Masse besitzen, ist eine Folge der nicht-verschwindenden Quarkmassen (2.77) welche die chirale Symmetrie explizit verletzen. Das erklärt insbesondere die oben erwähnte starke Abweichung zwischen Pion- und Nukleonmassen, vgl. Gleichung (2.79) und (2.76).

Die im chiralen Limes realisierte Invarianz des QCD-Vakuums unter der Wirkung der Gruppe  $SU_V(N_F = 3)$  ermöglicht es, die aus leichten Quarks aufgebauten Hadronen in Form von Darstellungen von  $SU(3)$  anzuordnen. Dies ist der auf M. Gell-Mann und Y. Ne'eman zurückgehende *Eightfold Way* und findet seinen Ausdruck beispielsweise im Baryon- oder Mesonoktett [55]. Haben die verschiedenen Quarkflavours unterschiedliche Massen,  $m_f \neq m_{f'}$ , so wird auch die  $SU_V(N_F)$ -Symmetrie explizit gebrochen [53]. Wäre dies in der Natur nicht der Fall, so müßten z.B. alle (pseudoskalaren) Hadronen des Mesonoktetts identische Massen besitzen.

Die Brechung der chiralen Symmetrie ist mit der Vermischung von rechts- und links-händigen Feldkomponenten verknüpft, siehe oben. Ein Maß dafür, inwieweit die chirale Symmetriebrechung im QCD-Vakuum realisiert ist, ist das (*chirale*) *Quarkkondensat*

$$\langle\phi|\bar{\Psi}(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x})|\phi\rangle = \langle\phi|\bar{\Psi}_R(\mathbf{x})\Psi_L(\mathbf{x})|\phi\rangle + \langle\phi|\bar{\Psi}_L(\mathbf{x})\Psi_R(\mathbf{x})|\phi\rangle, \quad (2.94)$$

welches in der vorliegenden Arbeit eine zentrale Rolle spielen wird. Ein nicht-verschwindendes Kondensat (2.94) ist Ausdruck der dynamischen Erzeugung von Masse durch das QCD-Vakuum, vgl. die Struktur des Kondensats mit der des Massenterms im Lagrangian (2.82). Die spontane Brechung der chiralen Symmetrie ist deshalb wesentlich für die Größe der Nukleonmassen (2.76) verantwortlich.

Als Referenzwert für das Quarkkondensat im chiralen Limes werden wir im Laufe dieser Arbeit den Wert

$$\langle\phi|\bar{\Psi}(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x})|\phi\rangle_{\text{phen}} \approx (-235 \text{ MeV})^3 \quad (2.95)$$

verwenden, welcher sich aus der Betrachtung von Dyson–Schwinger-Gleichungen in der Kontinuumstheorie ergibt und von experimentellen Resultaten für die Kondensate der leichten Quarks gestützt wird [56]. Dabei ist zu beachten, daß sich das Quarkkondensat nicht direkt messen läßt, sondern beispielsweise über die *Gell-Mann–Oakes–Renner-Relation* [57]

$$m_\pi^2 = \frac{m_u + m_d}{f_\pi^2} |\langle\phi|\bar{\Psi}(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x})|\phi\rangle| \quad (2.96)$$

<sup>17</sup>Betrachten wir lediglich Up- und Down-Quark ( $N_F = 2$ ), so ergeben sich mit den Pionen nur drei Goldstonebosonen.



aus der Pionzerfallskonstante  $f_\pi \approx 92 \text{ MeV}$ , der Pionmasse  $m_\pi$  sowie den nackten Quarkmassen (2.77) bestimmt werden muß. Der Wert (2.95) liegt weiterhin im unteren Bereich des Rahmens der Ergebnisse von Gitterrechnungen, siehe [58] sowie die darin angegebenen Referenzen. Es sei aber darauf hingewiesen, daß das Quarkkondensat (sowie die Quarkmassen) stets eine Abhängigkeit von der verwendeten Renormierungsskala zeigt.

Die Formulierung der QCD als Gitterfeldtheorie erlaubt einen weiteren Einblick in die Ursachen der chiralen Symmetriebrechung: Auf dem Gitter ist das Quarkkondensat (2.94) über einen Erwartungswert des vierdimensionalen Diracoperators bestimmt [4], welcher sich in die *Banks–Casher-Relation* [59]

$$\langle \phi | \bar{\Psi}(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) | \phi \rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \pi \rho(0) \quad (2.97)$$

umformen läßt. Dabei ist  $V$  das Volumen des Gitters und

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{V} \sum_n \langle \delta(\lambda - \lambda_n) \rangle \quad (2.98)$$

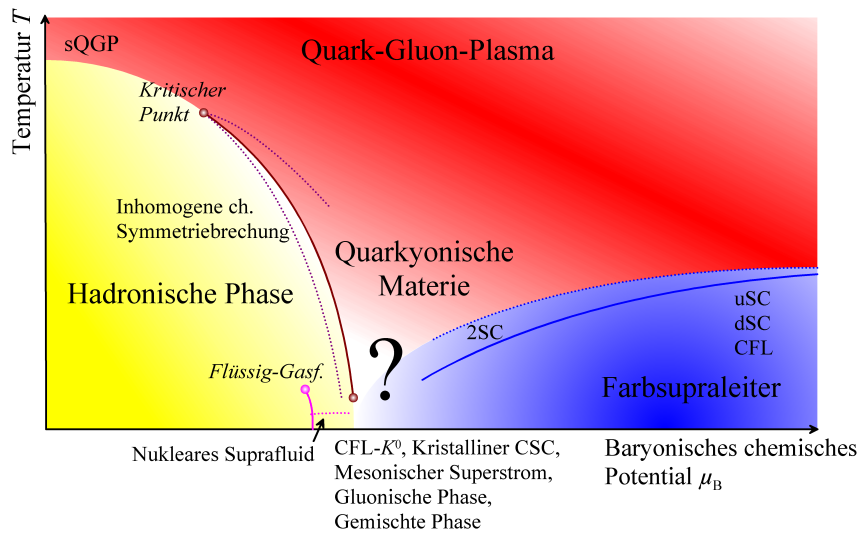
die spektrale Dichte des vierdimensionalen Diracoperators entlang der imaginären Achse. Die spontane Brechung der chiralen Symmetrie ist folglich mit dem Auftreten von Zuständen im Ursprung des Spektrums verbunden. Das offenbart einen Zusammenhang mit dem Farbeinschluß: Entfernt man die mit dem Farbeinschluß verknüpften Zentrumsvortizes sowie magnetischen Monopole (siehe Referenz [3]) aus dem Ensemble der Eichfeldkonfigurationen, so verschwindet nicht nur das Confinement, sondern es bildet sich auch eine Lücke im Spektrum des Diracoperators aus, welche die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie impliziert [60]. Das ist ein Hinweis darauf, daß Farbeinschluß und spontane Brechung der chiralen Symmetrie eng verwandte Effekte sind.

Neben  $j_A^{a,\mu}$  (2.89) und  $j_V^{a,\mu}$  (2.91) ergeben sich in der klassischen Theorie mit (2.90) und (2.92) zwei weitere erhaltene Ströme, auf welche wir noch kurz eingehen wollen: Die mit dem Axialstrom  $j_A^\mu$  (2.90) verknüpfte Symmetrie  $U_A(1)$  wird *anomal*, d.h. durch Quanteneffekte gebrochen. Das wird als *axiale Anomalie* bezeichnet und äußert sich darin, daß das Integrationsmaß des fermionischen Funktionalintegrals nicht invariant unter  $U_A(1)$ -Transformationen ist [61, 62]. Bezogen auf das hadronische Spektrum liefert die anomale Brechung von  $U_A(1)$  eine Erklärung für die großen Unterschiede in den Massen des  $\eta$ - und  $\eta'$ -Mesons. Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit wird die axiale Anomalie keine Rolle spielen; wir verweisen auf Referenz [63] für eine Behandlung im Rahmen des Hamilton'schen Zugangs.

Die mit dem Vektorstrom (2.92) verbundene Invarianz unter  $U_V(1)$ -Transformationen ist nach aktuellem Kenntnisstand als einzige der genannten Symmetrien im tatsächlichen QCD-Vakuum, d.h. unter Einbeziehung sämtlicher Quarkflavours und -massen, exakt realisiert. Aus ihr folgt die Erhaltung der Baryonenzahl.

### 2.3.2 Phasendiagramm der QCD

Während der Niederenergiesektor der QCD von Farbeinschluß und chiraler Symmetriebrechung geprägt ist, wird im Hochenergiebereich die asymptotische Freiheit zum dominierenden Effekt. Die die Wechselwirkungsstärke beschreibende Kopplung  $g$  nimmt mit zunehmender Energie ab, weshalb sich Quarks und Gluonen für hohe Energien wie freie Teilchen verhalten. In diesem Bereich sind deshalb – im Gegensatz zum Niederenergiesektor –



**Abbildung 2.1:** Schematische Darstellung des QCD-Phasendiagramms in Abhängigkeit von Temperatur  $T$  und chemischem Potential der Baryonen  $\mu_B$ . Graphische Darstellung nach Referenz [64], Beschreibung siehe Text.

zuverlässige störungstheoretische Berechnungen möglich, die insbesondere für die Beschreibung von in Beschleunigern stattfindenden Streuprozessen eine wichtige Rolle spielen. Die asymptotische Freiheit bedingt für hohe Energien sowohl die Aufhebung des Farbeinschlusses (*Deconfinement*), als auch die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie. Für Quarks und Gluonen bedeutet das den Übergang von der hadronischen in andere Phasen, was sich anschaulich – wenn auch etwas naiv – analog zum Aufschmelzen von Eis bei hinreichender Erhöhung von Temperatur und Druck auffassen lässt. Vom Studium der Phasenübergänge der QCD erhofft man sich einerseits ein tiefgehendes Verständnis des Farbeinschlusses sowie der chiralen Symmetriebrechung. Zum anderen könnte das Verhalten von Kernmaterie unter extremen Temperatur- und Dichtebedingungen Einblicke in Abläufe gewähren, die in der Frühzeit des Universums stattgefunden haben bzw. in Neutronensternen oder Supernovae noch immer stattfinden könnten [7].

Wie Wasser besitzt vermutlich auch die QCD ein reichhaltiges Phasendiagramm, auf welches wir im Folgenden kurz eingehen wollen. Für eine weitergehende Einführung sei dabei auf [64] sowie die darin angegebenen Referenzen verwiesen. Abbildung 2.1 zeigt eine schematische Darstellung unserer aktuellen Vorstellung des QCD-Phasendiagramms in Abhängigkeit von Temperatur  $T$  und chemischem Potential der Baryonen  $\mu_B$ . Neben der hadronischen Phase für kleine  $T$ ,  $\mu_B$  enthält dieses mit dem *Quark-Gluon-Plasma* (QGP) im Limes  $T \gg \mu_B$  sowie der *farbsupraleitenden Phase* (CSC) im Limes  $\mu_B \gg \Lambda_{\text{QCD}}$  zwei weitere Phasen, deren Existenz weitestgehend akzeptiert ist. Abseits dieser Limes ist eine genaue Beschreibung – unter anderem aufgrund des Vorzeichenproblems – schwierig und es existiert eine Vielzahl an Vorschlägen möglicher weiterer (Unter-)Phasen, von denen einige in Abbildung 2.1 eingezeichnet sind, auf die wir aber nicht weiter eingehen werden; siehe hierfür Referenz [64]. Ebenso wenig besteht über die genaue Lage der Phasengrenzen sowie die *Ordnung* der Phasenübergänge Klarheit. Die in Abbildung 2.1 schematisch dargestellten Phasengrenzlinien entsprechen Übergängen erster Ordnung, ihre Endpunkte (*kritische*

*Punkte*) Übergängen zweiter Ordnung. Jenseits der kritischen Punkte verschwimmen die Grenzen zwischen den Phasen und sie sind durch *Crossover-Übergänge* verbunden, siehe Abschnitt 2.5 für die in dieser Arbeit verwendete Nomenklatur der Ordnung von Phasenübergängen. Die Lage der kritischen Punkte ist von besonderem Interesse und Gegenstand theoretischer sowie experimenteller Untersuchungen [65]. Bei der Betrachtung theoretischer Modelle muß dabei berücksichtigt werden, daß die Ordnung (und natürlich auch die Lage) der Phasenübergänge abhängig von der Anzahl der Flavour- und Farbfreiheitsgrade sowie der nackten Quarkmassen ist, vgl. Abschnitt 2.5.

Die hadronische Phase läßt sich bei niedrigen Temperaturen ( $T < 15 - 20 \text{ MeV}$ ) weiter in einen gasförmigen unter- und einen flüssigen Bereich oberhalb von etwa  $\mu_B \approx 924 \text{ MeV}$  aufteilen.<sup>18</sup> *Reine* Kernmaterie liegt unter Normalbedingungen in der flüssigen hadronischen Phase vor, was aber vermutlich nur im Inneren von Neutronensternen relevant ist. Die Materie unseres Alltags besteht – bezogen auf das Volumen – nur zu einem kleinen Teil aus Kernmaterie, „tropfen“, was der gasförmigen Phase entspricht, genauer der unteren linken Ecke des Phasendiagramms (Abbildung 2.1). Die starke Erhitzung oder Kompression von Kernmaterie führt (eventuell über Zwischenschritte) zur Bildung eines QGP oder Farbsupraleiters und damit zu Deconfinement und Wiederherstellung der chiralen Symmetrie. Obwohl es den Anschein hat, daß Farbeinschluß und chirale Symmetriebrechung eng verwandt sind, siehe oben bzw. Referenz [60], ist es nach wie vor unklar, ob die Aufhebung dieser beiden Phänomene bei einem Phasenübergang gleichzeitig erfolgt. Lediglich im Limes  $\mu_B \rightarrow 0$  sind recht zuverlässige Aussagen möglich, die jedoch angesichts des Crossover-Übergangs keine allgemeinen Rückschlüsse erlauben, vgl. Abschnitt 2.5.

Insbesondere der bei hohen Temperaturen erwartete Übergang zum stark-korrelierten Quark-Gluon-Plasma (sQGP) wird sowohl von theoretischer als auch von experimenteller Seite (z.B. in Schwerionenkollisionen im LHC am CERN oder im RHIC am BNL) intensiv untersucht. Aus theoretischer Sicht ist die Anwendung nicht-perturbativer Kontinuumsmethoden wie dem in dieser Arbeit verwendeten Variationszugang insbesondere bei endlichen chemischen Potentialen erforderlich. Während Gitterrechnungen bei endlichen Temperaturen – aber verschwindendem chemischen Potential – zuverlässige Ergebnisse liefern, tritt bei endlichen Potentialen das sogenannte Vorzeichenproblem auf. Dieses wird durch eine, in diesem Bereich komplexwertige, Gewichtungs determinante verursacht, welche die numerische Auswertung erheblich erschwert oder sogar gänzlich unmöglich macht, siehe Referenz [5–7] für eine weitergehende Einführung. Trotz intensiver Bemühungen bleiben Gitterrechnungen deshalb bislang auf den Bereich kleiner chemischer Potentiale bzw. Dichten beschränkt, was angesichts der endlichen Dichten in Schwerionenkollisionen sehr unbefriedigend ist. Zugleich ergeben sich auch bei störungstheoretischen Betrachtungen für endliche Temperaturen Schwierigkeiten durch Infrarotdivergenzen [66].

Der Bereich großer chemischer Potentiale bzw. Baryondichten unterliegt ebenfalls intensiver Forschungstätigkeit, wobei sich insbesondere die Analogie zu Problemen der Festkörperphysik als nützlich erweist. Darüber hinaus erhofft man sich experimentelle Erkenntnisse aus dem Studium von Neutronensternen, die in ihrem Inneren möglicherweise eine hinreichend hohe Dichte zur Ausbildung eines farbsupraleitenden Kerns besitzen, siehe Referenz [64] für eine weitergehende Abhandlung.

Die große Unkenntnis der genauen Struktur des QCD-Phasendiagramms über weite Temperatur- und Dichtebereiche macht die Anwendung des in dieser Arbeit verwendeten

<sup>18</sup>In SI-Einheiten entspricht 1 MeV einer Temperatur von etwa  $1.16 \cdot 10^{10} \text{ K}$ .

Hamilton'schen Zugangs zur QCD auf endliche Temperaturen und Baryondichten äußerst interessant. Das gilt vor allem, da sich dieser – wie andere Kontinuumsansätze – prinzipiell auf beliebige Temperaturen und Dichten erweitern läßt, was wir im folgenden Abschnitt 2.4 auf zweierlei Arten tun werden. Die praktische Anwendung beider Zugänge erfordert gewisse Näherungen und ist Gegenstand von Kapitel 4 und 5.

## 2.4 Hamilton'scher Zugang zu endlichen Temperaturen und chemischen Potentialen

Die Bestimmung des Grundzustands durch Lösen der funktionalen Schrödingergleichung (2.74) auf dem Raum  $\mathbb{R}^3$  oder äquivalent dazu durch Minimieren des Energieerwartungswerts ermöglicht lediglich bei verschwindenden Temperaturen und chemischen Potentialen bzw. Dichten eine sinnvolle Beschreibung des Systems. Durch endliche Temperaturen werden neben dem Grundzustand weitere, energetisch höher liegende Zustände angeregt, was die statistische Mittelung über sämtliche Zustände des Ensembles erforderlich macht. Gleiches gilt für ein nicht-verschwindendes chemisches Potential. Das ist der übliche *kanonische Zugang* zu endlichen Temperaturen wie er aus der statistischen Physik bekannt ist und Gegenstand von Abschnitt 2.4.1. In Referenz [67] wurde dieser auf geschickte Weise so umformuliert, daß sich sämtliche thermodynamische Eigenschaften des Systems alternativ durch Lösen der funktionalen Schrödingergleichung auf dem *kompaktifizierten* Raum  $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$  ergeben. Wir werden diesen Zugang zur Behandlung der QCD bei endlichen Temperaturen benutzen und ihn deshalb in Abschnitt 2.4.2 vorstellen.

### 2.4.1 Kanonischer Zugang

Die natürliche Herangehensweise zur Beschreibung endlicher Temperaturen und chemischer Potentiale liegt in der Betrachtung der *Großkanonischen Zustandssumme* [66]

$$\mathcal{Z} = \text{Sp} \left[ \exp(-\beta(\bar{H}_{\text{QCD}} - \mu N)) \right], \quad (2.99)$$

wobei  $\beta = 1/(k_{\text{B}}T)$  die inverse Temperatur,<sup>19</sup>  $\mu$  das chemische Potential und

$$N = \int d^3x \Psi^{m\dagger}(\mathbf{x}) \Psi^m(\mathbf{x}) \quad (2.100)$$

den *Teilchenzahloperator* bezeichnet. Die Spur in (2.99) ist hierbei über den gesamten *Fockraum* der Vielteilchenzustände zu bilden. Die Großkanonische Zustandssumme enthält die gesamten Informationen des betrachteten Systems, welche sich ihr durch die Berechnung *thermischer Erwartungswerte*

$$\langle\langle O \rangle\rangle \equiv \text{Sp}[\mathcal{D} O] \quad (2.101)$$

geeigneter Operatoren  $O$  entnehmen lassen, wobei

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp(-\beta(\bar{H}_{\text{QCD}} - \mu N)) \quad (2.102)$$

<sup>19</sup>Wir führen die Boltzmannkonstante  $k_{\text{B}}$  hier lediglich zu Definitionszwecken auf, ansonsten gilt in natürlichen Einheiten  $k_{\text{B}} = 1$ , siehe (1.1).

den *Dichteoperator* bezeichnet.

Anders als bei verschwindender Temperatur wird im thermodynamischen Gleichgewicht nicht der (thermische) Energieerwartungswert  $\langle\langle \bar{H}_{\text{QCD}} \rangle\rangle$ , sondern das *Großkanonische Potential*

$$\Omega \equiv \langle\langle \bar{H}_{\text{QCD}} \rangle\rangle - T\mathcal{S} - \mu\langle\langle N \rangle\rangle \quad (2.103)$$

mit der *Entropie*

$$\mathcal{S} = k_{\text{B}} \left( \ln \mathcal{Z} - \beta \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta} \right) \quad (2.104)$$

minimal. Dessen Berechnung steht deshalb im Zentrum des Hamilton'schen Zugangs und ermöglicht unter Verwendung des Variationsprinzips Aussagen über den thermodynamischen Gleichgewichtszustand sowohl bei endlichen Temperaturen, als auch bei endlichen chemischen Potentialen bzw. Dichten.

Bei der in Kapitel 4 diskutierten Anwendung des kanonischen Zugangs werden wir allerdings auf Näherungen angewiesen sein, welche neben der Verwendung eines einschränkenden Ansatzes für die Basis des Fockraums insbesondere die Gestalt des Dichteoperators (2.102) betreffen werden.

### 2.4.2 Kompaktifizieren einer räumlichen Dimension\*

Diese Näherungen sowie weitere, in Kapitel 4 erläuterte Schwierigkeiten machen die Betrachtung einer alternativen Herangehensweise anstelle des kanonischen Zugangs empfehlenswert. Bei der Einführung der Ordnungsparameter des Deconfinement-Phasenübergangs im folgenden Abschnitt 2.5 sowie ihrer Berechnung in Kapitel 5 werden wir feststellen, daß ein solches Vorgehen sogar zwingend erforderlich sein wird.

Hierfür gehen wir zunächst einen Schritt zurück und betrachten die Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = \text{Sp} \left[ \exp(-\beta(H_{\text{QCD}} - \mu N)) \right] \quad (2.105)$$

für den QCD-Hamiltonian (2.34) in Weyl- aber ohne Coulombbeichung. Diese läßt sich äquivalent zum euklidischen Funktionalintegral

$$\mathcal{Z} = \int_{\text{aRB}} \mathcal{D}\Psi \int_{\text{pRB}} \mathcal{D}A \exp \left[ - \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \int d^3x \left( \mathcal{L}_{\text{QCD}}^e(\tau, \mathbf{x}) + i\mu \bar{\Psi}^m(\tau, \mathbf{x}) \gamma_4 \Psi^m(\tau, \mathbf{x}) \right) \right] \quad (2.106)$$

umschreiben [66–68]. Dabei erstreckt sich die Funktionalintegration über Eichfelder mit der periodischen Randbedingung

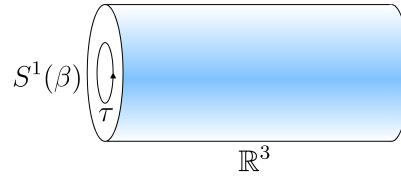
$$A^\mu(\beta/2, \mathbf{x}) = A^\mu(-\beta/2, \mathbf{x}) \quad (2.107)$$

sowie Quarkfelder mit der antiperiodischen Bedingung

$$\Psi(\beta/2, \mathbf{x}) = -\Psi(-\beta/2, \mathbf{x}) \quad (2.108)$$

---

\*Dieser Abschnitt ist inhaltlich komplett aus Referenz [67] entnommen.



**Abbildung 2.2:** Illustration von  $S^1(\beta) \times \mathbb{R}^3$ . Die (euklidische) Zeit ist auf  $-\beta/2 \leq \tau \leq \beta/2$  begrenzt.

und wir bezeichnen mit  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^e$  den *euklidischen* Lagrangian. Dieser geht aus der gewöhnlichen QCD-Lagrangefunktion (2.17) durch die Ersetzungen

$$t \rightarrow \tau = it, \quad (2.109a)$$

$$A_0(x) \rightarrow A_4(\tau, \mathbf{x}) = iA_0(\tau, \mathbf{x}), \quad (2.109b)$$

$$\gamma_0 \rightarrow \gamma_4 = i\gamma_0 \quad (2.109c)$$

hervor. Insbesondere tritt – trotz Weyleichung – wieder eine temporale Eichfeldkomponente  $A_0$  auf, welche infolge einer zur Herleitung von Gleichung (2.106) erforderlichen Eichtransformation entsteht, siehe Referenz [68]. Die euklidischen Diracmatrizen gehorchen dabei der aus der Cliffordalgebra (siehe Anhang A.1) hervorgehenden Relation

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, \dots, 4. \quad (2.110)$$

Verglichen mit der in der ursprünglichen Zustandssumme (2.105) enthaltenen Spur über den gesamten (unendlich-dimensionalen) Fockraum besitzt das Funktionalintegral (2.106) eine deutlich einfachere Struktur und entspricht der Betrachtung einer klassischen Feldtheorie auf dem Raum  $S^1(\beta) \times \mathbb{R}^3$ , d.h. bei *Kompaktifizierung* der (euklidischen) Zeitachse, vgl. Abbildung 2.2. Allerdings läßt sich der Ausdruck (2.106) nicht direkt auf die QCD im Hamilton'schen Zugang anwenden: In diesem Fall treten lediglich statische Ausdrücke auf, die zu allen Zeiten definiert sind, weshalb auch die für endliche Temperaturen essentielle kompakte euklidische Zeit nicht auftritt.

Eine Lösung dieses Problems bietet das in Referenz [67] beschriebene Vorgehen. Dazu führen wir in Gleichung (2.106) die vierdimensionale Rotation

$$\tau \rightarrow z', \quad A_4(x) \rightarrow C_3(x'), \quad \gamma_4 \rightarrow \gamma'_3, \quad (2.111a)$$

$$x \rightarrow \tau', \quad A_1(x) \rightarrow C_4(x'), \quad \gamma_1 \rightarrow \gamma'_4, \quad (2.111b)$$

$$y \rightarrow x', \quad A_2(x) \rightarrow C_1(x'), \quad \gamma_2 \rightarrow \gamma'_1, \quad (2.111c)$$

$$z \rightarrow y', \quad A_3(x) \rightarrow C_2(x'), \quad \gamma_3 \rightarrow \gamma'_2 \quad (2.111d)$$

durch, wobei für das Quarkfeld  $\Psi(\tau, \mathbf{x}) \rightarrow \psi(\tau', \mathbf{x}')$  gelte.<sup>20</sup> Aufgrund der  $O(4)$ -Invarianz der euklidischen Lagrangedichte ist<sup>21</sup>

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^e(\tau, \mathbf{x}; A_\mu, \Psi, \gamma_\mu) = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^e(\tau', \mathbf{x}'; C_\mu, \psi, \gamma'_\mu), \quad (2.112)$$

<sup>20</sup>Die euklidischen Diracmatrizen erfüllen vor und nach der Rotation dieselbe Algebra (2.110). Daher steht es uns frei, für die Matrizen  $\gamma'_\mu$  dieselbe Darstellung zu wählen wie für die  $\gamma_\mu$ .

<sup>21</sup>Um eine eindeutige Darstellung zu gewährleisten führen wir die Abhängigkeit von Feldern und Diracmatrizen explizit auf.

womit sich für den in der Zustandssumme (2.106) enthaltenen Exponenten durch die Rotation die Änderung

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \int d^3x \left( \mathcal{L}_{\text{QCD}}^e(\tau, \mathbf{x}) + i\mu \bar{\Psi}^m(\tau, \mathbf{x}) \gamma_4 \Psi^m(\tau, \mathbf{x}) \right) \\
 & \rightarrow \int d\tau' \int_{\beta} d^3x' \left( \mathcal{L}_{\text{QCD}}^e(\tau', \mathbf{x}') + i\mu \bar{\psi}^m(\tau', \mathbf{x}') \gamma'_3 \psi^m(\tau', \mathbf{x}') \right) \\
 & = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B/2}^{B/2} d\tau' \int_{\beta} d^3x' \left( \mathcal{L}_{\text{QCD}}^e(\tau', \mathbf{x}') + i\mu \bar{\psi}^m(\tau', \mathbf{x}') \gamma'_3 \psi^m(\tau', \mathbf{x}') \right) \quad (2.113)
 \end{aligned}$$

ergibt. Dabei haben wir die Abkürzung

$$\int_{\beta} d^3x \equiv \int dx \int dy \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dz \quad (2.114)$$

für die Integration über den Raum  $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$  mit kompaktifizierter  $z$ -Achse eingeführt. Insgesamt ergibt sich also

$$\mathcal{Z} = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{\text{aRB}} \mathcal{D}\psi \int_{\text{pRB}} \mathcal{D}C \exp \left[ - \int_{-B/2}^{B/2} d\tau' \int_{\beta} d^3x' \left( \mathcal{L}_{\text{QCD}}^e(\tau', \mathbf{x}') + i\mu \bar{\psi}^m(\tau', \mathbf{x}') \gamma'_3 \psi^m(\tau', \mathbf{x}') \right) \right], \quad (2.115)$$

wobei sich die Funktionalintegrationen auf Felder mit den Randbedingungen

$$C^\mu(\tau', \mathbf{x}', y', \beta/2) = C^\mu(\tau', \mathbf{x}', y', -\beta/2), \quad (2.116a)$$

$$\psi(\tau', \mathbf{x}', y', \beta/2) = -\psi(\tau', \mathbf{x}', y', -\beta/2) \quad (2.116b)$$

erstrecken.

Fassen wir die ursprünglich räumliche Koordinate  $\tau'$  als (euklidische) Zeit auf, so lassen sich ausgehend von Gleichung (2.115) und unter Verwendung von

$$\tau' \rightarrow it', \quad (2.117a)$$

$$C_4(\tau', \mathbf{x}') \rightarrow iC_0(x'), \quad (2.117b)$$

$$\gamma'_4 \rightarrow i\gamma'_0 \quad (2.117c)$$

sämtliche Schritte, die von (2.105) auf (2.106) geführt haben, in umgekehrter Reihenfolge wiederholen womit sich für die Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = \lim_{B \rightarrow \infty} \text{Sp} \left[ \exp \left( -B \int_{\beta} d^3x' \left( i\psi^{m\dagger}(\mathbf{x}') \dot{\psi}^m(\mathbf{x}') + \boldsymbol{\pi}^a(\mathbf{x}') \cdot \dot{\mathbf{C}}^a(\mathbf{x}') - \mathcal{L}_{\text{QCD}}(\mathbf{x}'; C_\mu, \psi) + i\mu \psi^{m\dagger}(\mathbf{x}') \gamma'_0 \gamma'_3 \psi^m(\mathbf{x}') \right) \right) \right] \quad (2.118)$$

ergibt. Dabei bezeichnet  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  den klassischen QCD-Lagrangian (2.17) und  $\pi_i$  den kanonischen Impuls zu  $C_i$ , vgl. Gleichung (2.21). Weiterhin ist zu beachten, daß die Felder nach wie vor die (anti-)periodischen Randbedingungen bei  $z' = \pm\beta/2$  erfüllen.

Wir verwenden im Folgenden o.B.d.A. wieder unsere ursprüngliche Notation für Felder und Koordinaten, d.h.

$$\mathcal{Z} = \lim_{B \rightarrow \infty} \text{Sp} \left[ \exp \left( -B \int_{\beta} d^3x \left( i\Psi^{m\dagger}(\mathbf{x}) \dot{\Psi}^m(\mathbf{x}) + \mathbf{\Pi}^a(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{A}}^a(\mathbf{x}) - \mathcal{L}_{\text{QCD}}(\mathbf{x}; A_{\mu}, \Psi) + i\mu \Psi^{m\dagger}(\mathbf{x}) \gamma_0 \gamma_3 \Psi^m(\mathbf{x}) \right) \right) \right]. \quad (2.119)$$

Die hierin enthaltenen Felder lassen sich unter Verwendung von Weyl- (2.33) und Coulombgleichung (2.40) kanonisch quantisieren, wodurch die Zustandssumme (2.119) äquivalent zu (2.99) wird und die Form

$$\mathcal{Z} = \lim_{B \rightarrow \infty} \text{Sp} \left[ \exp \left( -B \left( \tilde{H}_{\text{QCD}} + i\mu \int_{\beta} d^3x \Psi^{m\dagger}(\mathbf{x}) \alpha_3 \Psi^m(\mathbf{x}) \right) \right) \right] \quad (2.120)$$

annimmt.<sup>22</sup> Hierbei ist  $\tilde{H}_{\text{QCD}}$  der auf  $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$  definierte, eichfixierte QCD-Hamiltonian (2.64) mit den Randbedingungen

$$\mathbf{A}^a(x, y, z = \beta/2) = \mathbf{A}^a(x, y, z = -\beta/2), \quad (2.121a)$$

$$\Psi^m(x, y, z = \beta/2) = -\Psi^m(x, y, z = -\beta/2). \quad (2.121b)$$

Werten wir die Spur in der Zustandssumme (2.120) in der Eigenbasis von

$$\tilde{H}(\beta, \mu) \equiv \tilde{H}_{\text{QCD}} + i\mu \int_{\beta} d^3x \Psi^{m\dagger}(\mathbf{x}) \alpha_3 \Psi^m(\mathbf{x}) \quad (2.122)$$

aus, so reduziert sie sich aufgrund des Limes  $B \rightarrow \infty$  auf den Beitrag des kleinsten Eigenwerts<sup>23</sup>

$$\tilde{E}_0(\beta, \mu) \equiv \inf \sigma \left( \tilde{H}_{\text{QCD}} + i\mu \int_{\beta} d^3x \Psi^{m\dagger}(\mathbf{x}) \alpha_3 \Psi^m(\mathbf{x}) \right), \quad (2.123)$$

also

$$\mathcal{Z} = \lim_{B \rightarrow \infty} \exp \left( -B \tilde{E}_0(\beta, \mu) \right). \quad (2.124)$$

Das stellt eine enorme Vereinfachung der Theorie dar, denn während im kanonischen Zugang die Zustandssumme (2.99) als Spur über den unendlich-dimensionalen Fockraum zu bilden war, ist nun der gesamte Effekt von endlicher Temperatur und chemischem Potential im kleinsten Eigenwert des Operators  $\tilde{H}$  enthalten, welcher sich aus der Lösung der funktionalen Schrödingergleichung

$$\tilde{H}(\beta, \mu)|\phi\rangle = \tilde{E}_0(\beta, \mu)|\phi\rangle \quad (2.125)$$

bzw. mittels des Ritz'schen Prinzips ergibt. Dadurch wird der Zugang zu endlichen Temperaturen und chemischen Potentialen durch Kompaktifizieren einer räumlichen Dimension weitestgehend analog zum Variationszugang im Nulltemperaturlimes, vgl. Abschnitt 2.2.5. Die Anwendung dieses Ansatzes zur Betrachtung der Phasenübergänge der QCD erfolgt in Kapitel 5.

<sup>22</sup>Man beachte, daß die Eichfeldkomponenten  $A_{\mu}$  in (2.119) nicht den ursprünglichen Feldern entsprechen. Ungeachtet dessen verwenden wir dennoch die Bezeichnungen Weyl- und Coulombgleichung.

<sup>23</sup> $\sigma(O)$  bezeichnet das *Spektrum* des Operators  $O$ .



## 2.5 Ordnungsparameter des Deconfinement- und chiralen Phasenübergangs

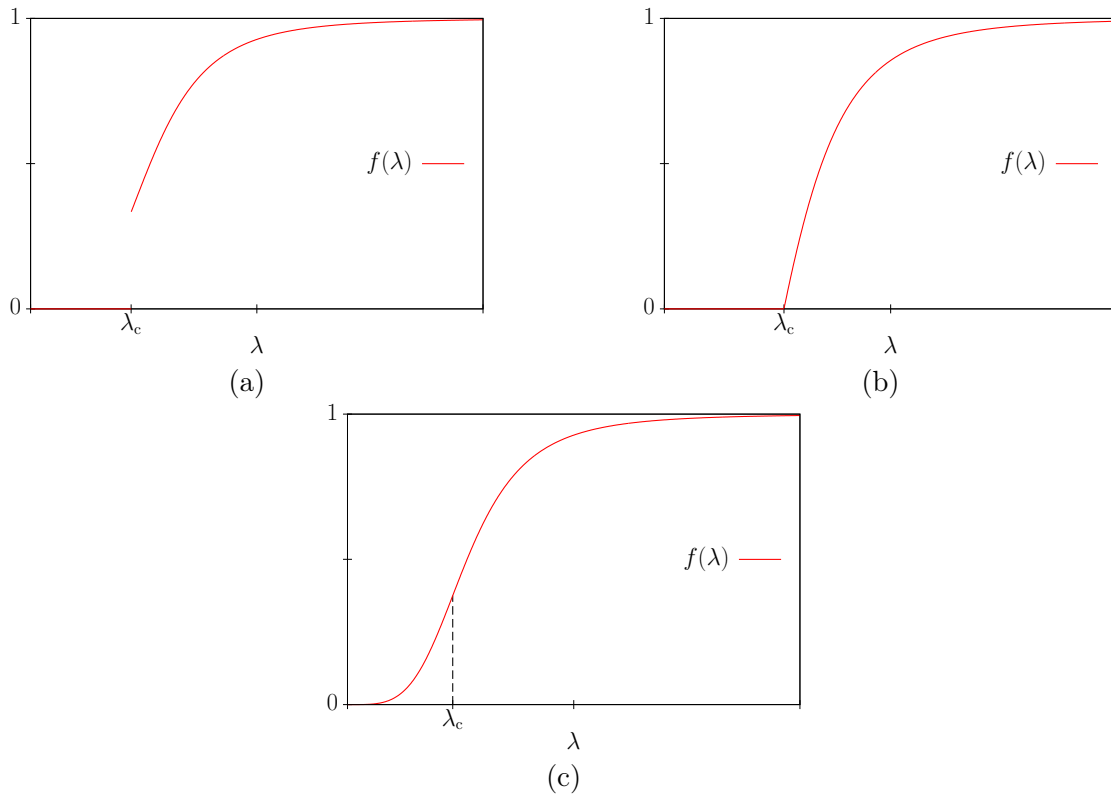
Das Studium des QCD-Phasendiagramms erfordert Kriterien, mit deren Hilfe wir die verschiedenen Phasen unterscheiden können. Dafür führen wir analog zur Thermodynamik geeignete *Ordnungsparameter* ein, d.h. Größen, die ihren Wert in unterschiedlichen Phasen in signifikanter Weise ändern. Für die in dieser Arbeit betrachteten Übergänge zur deconfinierten bzw. zur chiral symmetrischen Phase sind solche Parameter beispielsweise durch den Polyakov-Loop und das duale Quarkkondensat bzw. durch das chirale Quarkkondensat gegeben.

### 2.5.1 Ordnungsparameter

Unterschiedliche Phasen eines Systems weisen i.A. einen unterschiedlichen Grad der Ordnung auf. So besitzt beispielsweise Eisen unterhalb der Curietemperatur  $T_{\text{Curie}}$  in der ferromagnetischen Phase durch Vorliegen der Weiss'schen Bezirke eine geordnetere Struktur als in der paramagnetischen Phase. Die (spontane) Magnetisierung des Systems ist ein Maß für diese Ordnung und verschwindet bei Erhöhung der Temperatur oberhalb von  $T_{\text{Curie}}$ . Eine solche Größe, die die Ordnung des Systems in zwei unterschiedlichen Phasen beschreibt und deren Wert sich in beiden Phasen charakteristisch unterscheidet, bezeichnet man als Ordnungsparameter [69]. Insbesondere ist es damit möglich, verschiedene Phasen eines Systems zu unterscheiden: Geht das System, z.B. durch Erhöhung der Temperatur oder des Druckes, von einer Phase in eine andere über, so ist der Ordnungsparameter dabei einer drastischen Änderung unterworfen. Die genaue Form dieser Änderung charakterisiert die Ordnung des Phasenübergangs und ihr Auftreten markiert die Grenze zwischen zwei Phasen.

Zur weiteren Erläuterung betrachten wir ein System in Abhängigkeit eines äußeren Parameters  $\lambda$  und einen Ordnungsparameter  $f(\lambda)$  für den Übergang zwischen zwei Phasen I und II, in denen  $f = 0$  bzw.  $f = 1$  gelte. Weiterhin sei der Parameter am kritischen Punkt des Übergangs von Phase I zu II mit  $\lambda_c$  bezeichnet. Wir nennen den Übergang von I nach II einen Übergang  $n$ -ter Ordnung, wenn  $f$  sowie seine ersten  $(n - 2)$  Ableitungen in  $\lambda_c$  stetig sind.<sup>24</sup> Für die vorliegende Arbeit werden vor allem Übergänge erster und zweiter Ordnung eine Rolle spielen, welche in Abbildung 2.3 (a), (b) schematisch dargestellt sind. Man beachte, daß sich ein Phasenübergang dabei stets über einen endlichen Wertebereich des äußeren Parameters erstreckt. Neben einem Übergang  $n$ -ter Ordnung besteht weiterhin die Möglichkeit, daß der Ordnungsparameter  $f$  seinen Wert zwischen den beiden Phasen I und II glatt ändert, siehe Abbildung 2.3 (c). Ein solcher Übergang wird als Crossover bezeichnet und eröffnet eine gewisse Willkür bei der Festlegung des kritischen Parameters  $\lambda_c$ . Im Allgemeinen orientiert man sich dabei am Wendepunkt der Kurve  $f(\lambda)$ , allerdings ist auch die Berücksichtigung zusätzlicher Gewichtungsfaktoren möglich.

<sup>24</sup>Das entspricht der Klassifikation von Phasenübergängen nach P. Ehrenfest, welche zwar in Teilen überholt, aber für die Zwecke dieser Arbeit hinreichend ist.

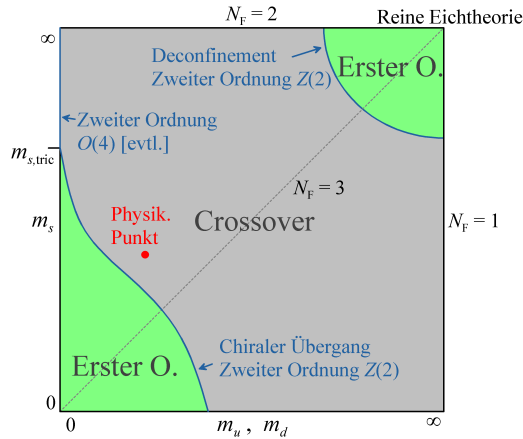


**Abbildung 2.3:** Illustration eines Phasenübergangs (a) erster und (b) zweiter Ordnung sowie (c) eines Crossover-Phasenübergangs. Für diesen wurde der kritische Parameter  $\lambda_c$  mit dem Wendepunkt des Graphen  $f(\lambda)$  identifiziert.

## 2.5.2 Ordnung des QCD-Phasenübergangs

Das QCD-Phasendiagramm besitzt nach aktuellem Stand der Forschung eine sehr reichhaltige Struktur, siehe Abbildung 2.1. In dieser Arbeit werden wir uns auf die niederenergetische Phase des Farbeinschlusses und der chiralen Symmetrie bzw. die damit verknüpften Phasenübergänge fokussieren. Deshalb ist es ratsam, im Vorfeld auf die erwartete Ordnung der Übergänge einzugehen. Wie in Abschnitt 2.3.2 erwähnt, ist es es nach wie vor nicht abschließend geklärt, ob die kritischen Temperaturen sowie die Ordnung der Phasenübergänge der Wiederherstellung der chiralen Symmetrie sowie der Aufhebung des Farbeinschlusses übereinstimmen. In Gitter- und auch Kontinuumsrechnungen finden sich bei Verwendung geeigneter Ordnungsparameter jedoch keine Hinweise, die dem zwingend widersprechen würden, weshalb wir im Folgenden gelegentlich QCD-Phasenübergang synonym für beide Phasenübergänge verwenden werden.

Abbildung 2.4 zeigt das sogenannte *Columbiadiagramm*, die Darstellung der Ordnung des QCD-Phasenübergangs in Abhängigkeit der Masse der beteiligten Quarkflavours bei verschwindendem chemischen Potential  $\mu = 0$  [64, 70, 71]. Dabei beschränkt man sich auf die drei leichten Flavours und setzt darüber hinaus die Massen der beiden leichtesten Flavours gleich,  $m_u \approx m_d$ . Während der Limes  $m_f \rightarrow 0$  einem chiralen Flavour  $f$  entspricht, impliziert  $m_f \rightarrow \infty$  das Einfrieren des entsprechenden Quarkflavours, sodaß die obere



**Abbildung 2.4:** Darstellung der Ordnung des QCD-Phasenübergangs in Abhängigkeit der Up-, Down- und Strange-Quarkmasse. Graphische Darstellung gemäß Referenz [70], Beschreibung siehe Text.

(rechte) Kante des Diagramms der Betrachtung zweier (eines) Flavours entspricht. Insbesondere ergibt sich in der unteren (oberen) linken Ecke der chirale Limes der QCD mit drei (zwei) Quarkflavours, in welchem die Lagrangedichte der QCD (2.17) exakt invariant unter chiralen Symmetrietransformationen ist, siehe Abschnitt 2.3.1. In der oberen rechten Ecke erhalten wir hingegen die Yang–Mills-Theorie als reine Eichtheorie ohne Quarkflavours, welche invariant unter *Zentrumstransformationen* ist, siehe Abschnitt 2.5.4.

Für diese beiden Grenzfälle stellen beispielsweise das chirale Quarkkondensat (2.94) bzw. der Polyakov-Loop, auf welche wir in den folgenden Abschnitten näher eingehen werden, geeignete Ordnungsparameter dar und ihre Auswertung ergibt, daß der QCD-Phasenübergang in diesen Limites als Übergang erster Ordnung realisiert ist. Bei hinreichender Erhöhung (bzw. Absenkung) der Quarkmassen wandelt sich der Phasenübergang zunächst zu einem Übergang zweiter Ordnung und anschließend zu einem Crossover, wobei der Übergang zweiter Ordnung entlang einer kritischen Linie im Columbiadiagramm auftritt. Dabei unterscheidet man gemäß ihrer Lage die chirale von der kritischen Linie des Deconfinements, siehe Abbildung 2.4. Der physikalische Punkt, welcher sich bei Verwendung der physikalischen Werte für die Quarkmassen (2.77) ergibt, befindet sich in dem Crossover-Bereich (vgl. auch Abbildung 2.1) und die an dieser Stelle in Gitterrechnungen gefundene pseudokritische Temperatur für den chiralen Phasenübergang liegt mit  $T_\chi \approx 155$  MeV geringfügig unterhalb derer für den Deconfinement-Phasenübergang,  $T_c \approx 165$  MeV [72, 73] (siehe auch [74, 75]). Da ein Crossover-Übergang kontinuierlich verläuft, bedeutet das aber *nicht* das Vorliegen einer confinierten, chiral symmetrischen Phase.

Der Fall eines nicht-verschwindenden chemischen Potentials wird im Folgenden nur eine untergeordnete Rolle spielen; man geht i.A. davon aus, daß für  $\mu > 0$  der Bereich des Übergangs erster Ordnung wächst, allerdings bestehen auch gegenteilige Vorhersagen, siehe [64, 70, 71] sowie die darin angegebenen Referenzen.

Die in Abbildung 2.4 gezeigte Graphik ergibt sich für das physikalische System mit drei Farbfreiheitsgraden, d.h. die Eichgruppe  $SU(3)$ . Für die im Laufe dieser Arbeit ebenfalls betrachtete Gruppe  $SU(2)$  findet man im Limes der reinen Eichtheorie einen Deconfinement-Phasenübergang zweiter Ordnung, welcher sich bei Einbeziehung von Quarks zu einem Crossover-Übergang wandelt. Die Gruppen  $SU(N_C > 3)$  spielen für den weiteren

Verlauf der Arbeit keine Rolle, zeigen als reine Eichtheorien aber einen, verglichen mit  $SU(3)$  stärker ausgeprägten, Übergang erster Ordnung, siehe beispielsweise [76] sowie die darin angegebenen Referenzen.

### 2.5.3 Chirales Quarkkondensat

Da das chirale Quarkkondensat (2.94) per Konstruktion genau dann nicht-verschwindend ist, wenn die chirale Symmetrie gebrochen wird, stellt es den natürlichen Ordnungsparameter für die chiral symmetrische Phase dar, vgl. Abschnitt 2.3.1. Für endliche Quarkmassen ist die chirale Symmetrie in der QCD-Lagrangefunktion (2.17) explizit gebrochen und das Quarkkondensat stets von null verschieden. Dennoch zeigt es für die leichten Quarkflavours eine starke Temperaturabhängigkeit, welche auf die (nicht mehr exakte) Wiederherstellung der chiralen Symmetrie zurückzuführen ist [72, 75].

Da die Entstehung der Konstituentenmasse mit der Brechung der chiralen Symmetrie verknüpft ist, ist auch sie ein geeigneter Ordnungsparameter zur Beschreibung der chiral symmetrischen Phase.

### 2.5.4 Polyakov-Loop

Da der Farbeinschluß eine durch die Gluonen induzierte Eigenschaft ist, betrachten wir zunächst den reinen Yang–Mills-Sektor ohne Verwendung von Weyl- und Coulombbeugung und führen endliche Temperaturen (Gluonen besitzen stets ein verschwindendes chemisches Potential  $\mu = 0$ ) durch Kompaktifizierung der euklidischen Zeitachse mit periodischen Randbedingungen (2.107) an das Eichfeld ein, vgl. Abschnitt 2.4.2.

In diesem Fall ist die Wirkung  $\mathcal{S}_{\text{YM}}$  (2.18) nicht nur invariant unter zeitlich periodischen Eichtransformationen

$$U(\beta/2, \mathbf{x}) = U(-\beta/2, \mathbf{x}), \quad (2.126)$$

sondern auch unter solchen, die bis auf ein Zentrumselement  $z_k \in Z(N_C)$  periodisch sind,

$$U(\beta/2, \mathbf{x}) = z_k(\mathbf{x})U(-\beta/2, \mathbf{x}). \quad (2.127)$$

Als *Zentrum*  $Z$  bezeichnet man denjenigen Teil einer Eichgruppe, welcher mit sämtlichen Gruppenelementen vertauscht. Dieses besteht für  $SU(N_C)$  aus  $N_C$  verschiedenen Zentrumselementen

$$z_k = \exp(i2\pi\tilde{\mu}_k^m h_m) = \exp\left(i\frac{2\pi k}{N_C}\right) \text{id} \in Z(N_C), \quad k = 0, \dots, N_C - 1, \quad (2.128)$$

welche sich mithilfe von *Cogewichten*  $\tilde{\mu}_k^m$  aus den in Anhang A.2 eingeführten *Cartangeneratoren*  $h$  erzeugen lassen.

Obwohl die Wirkung  $\mathcal{S}_{\text{YM}}$  invariant unter Eichtransformationen (2.127) ist, muß dies nicht unbedingt für sämtliche (eichinvariante) Observablen gelten. Tatsächlich wird eine Brechung der *Zentrumssymmetrie* in engem Zusammenhang mit dem Verlust des Farbeinschlusses gesehen [3], was sich zur Bestimmung von Ordnungsparametern nutzen läßt. Prominentestes Beispiel hierfür ist der Polyakov-Loop, eine Schleife, welche sich in topologisch nicht-trivialer Weise *einmal* um die (kompaktifizierte) euklidische Zeitachse windet



**Abbildung 2.5:** Illustration des Polyakov-Loops: (a) gemäß Gleichung (2.129) als Windung um die (euklidische) Zeitachse und (b) nach vierdimensionaler Rotation als Windung um die (kompaktifizierte)  $z$ -Achse, siehe Gleichung (2.137). Man beachte die Reduktion der „übrigen“ Dimensionen von  $\mathbb{R}^3$  zu  $\mathbb{R}^2$ .

– siehe Abbildung 2.5 (a) – und gemäß

$$P[A_4](\mathbf{x}) = \frac{1}{N_C} \text{Sp} \mathcal{P} \exp \left( ig \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau A_4(\tau, \mathbf{x}) \right) \quad (2.129)$$

definiert ist [77, 78]. Hierbei bezeichnet  $\mathcal{P}$  den *Pfadordnungsoperator* und die Spur ist über die fundamentale Darstellung der Eichgruppe  $SU(N_C)$  zu bilden.

Unter einer Eichtransformationen (2.127) ergibt sich für den Polyakov-Loop das Transformationsverhalten

$$P[A_4](\mathbf{x}) \rightarrow z_k(\mathbf{x}) P[A_4](\mathbf{x}), \quad (2.130)$$

welches auch nach Bildung des Erwartungswerts erhalten bleibt, d.h.  $\langle P[A_4] \rangle \rightarrow z_k \langle P[A_4] \rangle$ . Ein nicht-verschwindender Erwartungswert des Polyakov-Loops impliziert damit die Brechung der Zentrumsymmetrie. Daß dies mit dem Vorliegen des Farbeinschlusses verknüpft ist, läßt sich mit folgendem Zusammenhang motivieren: Fügen wir unserem System von Gluonen eine am Ort  $\mathbf{x}$  lokalisierte, unendlich schwere Farbladung in Form eines statischen Quarks hinzu, so erfüllt die damit verbundene Änderung  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$  der freien Energie [79]

$$\exp(-\beta \mathcal{F}(\mathbf{x})) \sim \langle P[A_4](\mathbf{x}) \rangle. \quad (2.131)$$

Da freie Farbladungen lediglich in der deconfinierten Phase auftreten können, ergibt sich nur für diese ein endlicher Wert der freien Energie womit wir auf den Zusammenhang

$$\langle P[A_4](\mathbf{x}) \rangle \begin{cases} = 0 & \Rightarrow \text{Confinement / Zentrumsymmetrie} \\ \neq 0 & \Rightarrow \text{Deconfinement / Zentrumsymmetrie gebrochen} \end{cases} \quad (2.132)$$

und die Eignung des (Erwartungswerts des) Polyakov-Loops als Ordnungsparameter für den Deconfinement-Phasenübergang schließen können.

Die Berechnung des Polyakov-Loops (2.129) in Kontinuumstheorien wird durch die Pfadordnung  $\mathcal{P}$  erschwert, weshalb es sich anbietet, das Eichfeld in *Polyakoveichung*

$$\partial_\tau A_4(\tau, \mathbf{x}) = 0, \quad A_4(\tau, \mathbf{x}) = A_4(\mathbf{x}) \in \mathcal{C} \quad (2.133)$$

zu wählen. Dabei ist  $\mathcal{C}$  die *Cartanunteralgebra*, siehe Anhang A.2. Aufgrund der Unabhängigkeit von  $\tau$  wird die Pfadordnung in Polyakoveichung hinfällig und der Polyakov-Loop reduziert sich zu

$$P[A_4](\mathbf{x}) = \frac{1}{N_C} \text{Sp} \exp(ig\beta A_4(\mathbf{x})). \quad (2.134)$$

Hieraus ergibt sich, daß sich das Eichfeld unter einer Zentrumstransformation (2.127) gemäß

$$A_4 \rightarrow A_4 + \frac{2\pi}{\beta} \tilde{\mu}_k^m h_m \quad (2.135)$$

verändern muß.

Weiterhin gilt für Eichfelder aus der Farbgruppe  $SU(2)$  in Polyakoveichung in der deconfinierten Phase die *Jensen'sche Ungleichung*

$$\langle |P[A_4](\mathbf{x})| \rangle \leq P[|\langle A_4 \rangle|](\mathbf{x}) \quad (2.136)$$

und – darüber hinaus –  $P[\langle A_4 \rangle] = 0$  in der zentrumssymmetrischen (d.h. confinierten) Phase. Zusammen implizieren diese beiden Bedingungen, daß – zumindest für  $SU(2)$  – nicht nur der Erwartungswert des Polyakov-Loops, sondern auch  $P[\langle A_4 \rangle]$  als Ordnungsparameter für den Farbeinschluß verwendet werden kann. Da sich  $\langle A_4 \rangle$  aus allgemeinen Gründen auf das Intervall  $[0, 2\pi/\beta]$  beschränken läßt, ist  $P[\langle A_4 \rangle]$  gemäß Gleichung (2.134) in eindeutiger Weise durch  $\langle A_4 \rangle$  bestimmt und der Erwartungswert des Eichfelds wird selbst zum Ordnungsparameter. Dieser Zusammenhang wurde zuerst in den Referenzen [80, 81] aufgestellt, jedoch nicht streng bewiesen. Wir verweisen deshalb auf Referenz [82] für einen unabhängigen Beweis. Gemäß Referenz [83] läßt sich diese Argumentation auf die Eichgruppe  $SU(3)$  erweitern, was dort jedoch nicht bewiesen wurde. Tatsächlich werden wir in Abschnitt 5.2 sehen, daß im Fall  $SU(3)$  zwar gewisse Schwierigkeiten auftreten, die mit dieser Methodik im Yang–Mills-Sektor gefundenen Resultate aber durchaus sinnvoll sind.

Weder der Polyakov-Loop (2.134), noch der Erwartungswert des Eichfelds  $\langle A_4 \rangle$  sind in Weyleichung (2.33) wohldefiniert. Dieses Problem läßt sich umgehen, indem wir – wie in Abschnitt 2.4.2 beschrieben – eine Rotation in der vierdimensionalen (euklidischen) Raumzeit durchführen und endliche Temperaturen durch die Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension einführen. Dadurch wird der Polyakov-Loop zu

$$P[A_3](x, y) = \frac{1}{N_C} \text{Sp } \mathcal{P} \exp \left( ig \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dz A_3(\mathbf{x}) \right) \quad (2.137)$$

und entspricht einer Schleife, welche sich einmal um die kompaktifizierte räumliche Achse (in unserem Fall  $z$ ) windet, siehe Abbildung 2.5 (b). Dieser Ausdruck ist kompatibel mit dem Hamilton'schen Zugang, wobei sämtliche oben genannten Eigenschaften erhalten bleiben. Insbesondere läßt sich der Erwartungswert des Eichfelds  $\langle A_3 \rangle$  als Ordnungsparameter verwenden.

Wie eingangs erwähnt, sind wir bei unseren Überlegungen zum Polyakov-Loop bislang von der Yang–Mills-Theorie als reiner Eichtheorie ausgegangen. Betrachten wir stattdessen die volle QCD unter Einbeziehung dynamischer Quarks, so wird die Zentrumssymmetrie explizit gebrochen [3]. Ebenso besitzt die in Gleichung (2.131) auftretende freie Energie  $\mathcal{F}$  für die volle QCD einen endlichen Wert, da die Farbladung in diesem Fall durch Anregung von *Seequarks* abgeschirmt werden kann. Das hat zur Folge, daß der Polyakov-Loop für die volle QCD keinen echten Ordnungsparameter darstellt. Ungeachtet dessen zeigt er auch dort eine charakteristische Änderung, die mit der Aufhebung des Farbeinschlusses einhergeht, sodaß die Berechnung des Polyakov-Loops auch in diesem Fall ein übliches Kriterium zur Bestimmung des Deconfinement-Phasenübergangs ist.

Wir werden in Abschnitt 5.2 auf die zur Berechnung des Polyakov-Loops im Hamilton'schen Zugang erforderlichen technischen Details eingehen und dort – im Rahmen gewisser Näherungen – auch die kritische Temperatur für den Deconfinement-Phasenübergang der QCD bestimmen.

### 2.5.5 Duales Quarkkondensat

Allgemein geht man davon aus, daß die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie und das Deconfinement eng miteinander verknüpft sind. Das wirft die Frage auf, ob sich z.B. für den Polyakov-Loop eine ähnliche Abhängigkeit von den spektralen Eigenschaften des Diracoperators zeigen läßt, wie sie für das chirale Kondensat durch die Banks–Casher-Relation (2.97) gegeben ist. Dies gab Veranlassung für weitergehende Untersuchungen des Spektrums des Diracoperators [84, 85], an deren Ende mit dem dualen Quarkkondensat die Einführung eines weiteren Ordnungsparameters für den Deconfinement-Phasenübergang stand [86]. Dieses wird im üblichen Funktionalintegralzugang, bei dem endliche Temperaturen durch Kompaktifizierung der euklidischen Zeitachse eingeführt werden, durch

$$\Sigma_n = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \exp(-in\varphi) \langle \bar{\Psi}(x)\Psi(x) \rangle_\varphi \quad (2.138)$$

definiert, wobei  $n \in \mathbb{N}$  ist und der Index  $\varphi$  impliziert, daß die Quarkfelder  $\Psi$  den  $U(1)$ -wertigen Randbedingungen

$$\Psi(\tau + \beta/2, \mathbf{x}) = \exp(i\varphi)\Psi(\tau - \beta/2, \mathbf{x}), \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad (2.139)$$

auf der euklidischen Raumzeit genügen. Somit geht das duale Kondensat (bzw. *die dualen Kondensate*) auf höchst interessante Weise durch eine Fouriertransformation bezüglich der Phase  $\varphi$  aus dem chiralen Kondensat  $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle_\varphi$  hervor, welches sich für antiperiodische Randbedingungen  $\varphi = \pi$  [vgl. (2.108)], auf das übliche Quarkkondensat (2.94) reduziert.

Im Zuge der Gitterformulierung der QCD läßt sich recht einfach zeigen, daß das duale Kondensat  $\Sigma_n$  (2.138) dem Erwartungswert der Summe aller geschlossenen Wilsonlinien<sup>25</sup> entspricht, welche sich  $n$ -mal um die kompaktifizierte euklidische Zeitachse winden [86]. Damit enthält  $\Sigma_1$  – neben sämtlichen weiteren einfachen Schleifen – insbesondere auch den Erwartungswert des Polyakov-Loops (2.129) und besitzt unter Zentrumstransformationen (2.127) dasselbe Verhalten wie dieser, d.h.  $\Sigma_1 \rightarrow z_k \Sigma_1$  [86].<sup>26</sup> Das macht  $\Sigma_1$  ebenfalls zu einem Ordnungsparameter für den Deconfinement-Phasenübergang, der darüber hinaus die attraktive Eigenschaft hat, über (2.138) mit dem chiralen Kondensat als Ordnungsparameter der chiralen Symmetrie verknüpft zu sein. Wie beim Polyakov-Loop ist aber zu beachten, daß die Anwesenheit von Quarks die Zentrumssymmetrie explizit bricht.

Wir werden das duale Quarkkondensat in Abschnitt 5.1 im Rahmen des Hamilton'schen Zugangs in Weyl- und Coulombbeichung berechnen und zur Ermittlung der kritischen Temperatur des Deconfinement-Phasenübergangs heranziehen. Da die  $U(1)$ -wertigen Randbedingungen (2.139) die Kompaktifizierung der euklidischen Raumzeit erfordern, werden wir hierbei – neben einigen Näherungen – erneut auf die in Abschnitt 2.4.2 vorgestellte Raumzeitrotation zurückgreifen müssen. Das kommt nicht von ungefähr: Sowohl der Polyakov-Loop als auch das duale Kondensat sind Größen, die ihren Ursprung in der Gitter- und

<sup>25</sup>Eine Wilsonlinie ergibt sich analog zum Wilson-Loop (2.140) bei nicht geschlossenem Integrationsweg.

<sup>26</sup>Man bezeichnet  $\Sigma_1$  deshalb auch als *dressed Polyakov loop*.

nicht in der Kontinuumsstheorie haben. Aufgrund der endlichen Größe eines Gitters bedingt dies stets die Kompaktifizierung und somit im Hamiltonzugang auch eine Rotation der euklidischen Raumzeit. Im kanonischen Zugang zu endlichen Temperaturen durch Auswerten der Zustandssumme  $\mathcal{Z}$ , siehe Abschnitt 2.4.2, sind hingegen weder der Polyakov-Loop noch das duale Kondensat wohldefiniert. Die Feststellung der Aufhebung des Farbeinschlusses erfolgt dort indirekt z.B. anhand des Infrarotverhaltens der Gluonenergie [87, 88].

### 2.5.6 Weitere Ordnungsparameter für den Deconfinement-Übergang

Neben dem Erwartungswert des Polyakov-Loops (2.129) und dem dualen Quarkkondensat (2.138) existieren noch weitere Ordnungsparameter für den Deconfinement-Phasenübergang. Beispiele hierfür sind der Erwartungswert des *Wilson-Loops* [89]

$$W[A](\mathcal{C}) = \frac{1}{N_C} \text{Sp} \mathcal{P} \exp \left( ig \oint_{\mathcal{C}} dx_{\mu} A^{\mu}(x) \right), \quad (2.140)$$

wobei  $\mathcal{C}$  eine geschlossene Kurve ist und sich die Spur über die fundamentale Darstellung des Farbraums erstreckt, oder der *'t Hooft-Loop* [90]. Beide Größen wurden bereits im Hamilton'schen Zugang behandelt [91, 92] und spielen für den weiteren Verlauf dieser Arbeit keine Rolle. Wir verweisen daher für eine weitergehende Einführung auf Referenz [3]. An dieser Stelle sei lediglich erwähnt, daß sich aus dem Erwartungswert des Wilson-Loops (2.140) die *Wilson-Stringtension*  $\sigma$  ergibt, welche uns in Kürze erneut begegnen wird.

Das anschaulichste Anzeichen für das Vorliegen von Confinement ist das Auftreten eines linear mit dem Abstand anwachsenden Potentials zwischen zwei Farbladungen, vgl. Abschnitt 2.2.3. Wie bereits erwähnt, findet man ein solches Verhalten tatsächlich auch anhand des Coulombkerns (2.61), siehe Abschnitt 3.1.2 für weitere Details. Dennoch ist der Coulombkern *kein* geeigneter Ordnungsparameter für den Farbeinschluß, da er gemäß Gitterrechnungen oberhalb der kritischen Temperatur nicht verschwindet sondern sogar einen noch steileren linearen Anstieg zeigt. Die Ursache dafür ist, daß der Erwartungswert des Coulombkerns nicht mit dem für Confinement verantwortlichen zeitlichen, sondern dem räumlichen Wilson-Loop in Verbindung steht, siehe [93, 94].



# Kapitel 3

## Variationszugang zum QCD-Vakuum

Nachdem wir im vorherigen Kapitel die für diese Arbeit relevanten Eigenschaften der QCD besprochen sowie die Hamilton'sche Formulierung der QCD in Coulombbeichung vorgestellt haben, widmen wir uns im Folgenden der Analyse des QCD-Vakuums bei verschwindender Temperatur und chemischem Potential. Dabei werden wir in Abschnitt 3.1 zunächst den von uns verwendeten Ansatz für das QCD-Vakuumfunktional motivieren, wobei wir auch auf die Ergebnisse früherer Arbeiten für den reinen Yang–Mills-Sektor sowie die zur Berechnung von Erwartungswerten notwendigen Näherungen eingehen werden. In Abschnitt 3.2 berechnen wir im Rahmen dieser Näherungen zunächst den statischen Quarkpropagator sowie anschließend den Energieerwartungswert, welchen wir in Abschnitt 3.3 gemäß des Ritz'schen Variationsprinzips minimieren. Das führt auf ein System gekoppelter Bewegungsgleichungen, deren Analyse ebenfalls Gegenstand von Abschnitt 3.3 ist. Danach widmen wir uns in Abschnitt 3.4 – unter gewissen Einschränkungen und mit Fokus auf den Quarksektor – der numerischen Lösung der Bewegungsgleichungen sowie der Diskussion der erzielten Ergebnisse. In Abschnitt 3.5 stellen wir schließlich einige weiterführende Überlegungen an, welche in späteren Kapiteln von Nutzen sein werden. Die wesentlichen Ergebnisse dieses Kapitels wurden in [95, 96] veröffentlicht.

### 3.1 Motivation des Ansatzes und Grundlagen

#### 3.1.1 Ansatz für das Vakuumwellenfunktional

Ziel des Hamilton'schen Zugangs ist die Lösung der funktionalen Schrödingergleichung (2.74) für den QCD-Hamiltonian in Coulombbeichung (2.64). Diese ist nicht exakt möglich, weshalb wir auf das Ritz'sche Variationsprinzip zurückgreifen und zunächst einen *Ansatz* für das Vakuumwellenfunktional der QCD machen. Da der QCD-Hamiltonian in die Summe aus Yang–Mills- und Quarkanteil zerfällt, siehe Gleichung (2.64), liegt es nahe, hierfür einen Produktzustand

$$|\phi[A]\rangle = \phi_{\text{YM}}[A] |\phi_{\text{Q}}[A]\rangle \quad (3.1)$$

zu verwenden. Dabei bezeichnet  $|\phi_{\text{Q}}[A]\rangle$  das fermionische Vakuum unter Einfluß des dynamischen Eichfelds  $\mathbf{A}$  und  $\phi_{\text{YM}}[A] = \langle A | \phi_{\text{YM}} \rangle$  den Vakuumzustand der reinen Yang–Mills-Theorie. Man beachte, daß wir an dieser Stelle unterschiedliche Darstellungen für den fermionischen und bosonischen Anteil des Funktionals gewählt haben: Während wir für den Yang–Mills-Vakuumzustand die in Abschnitt 2.2 eingeführte Ortsdarstellung bezüglich des Eichfelds gewählt haben, werden wir das Quarkfunktional als Eichfeld-abhängigen Zustand im fermionischen Fockraum auffassen, wie er sich im Zuge der Zweiten Quantisierung der Theorie ergibt. Eine Ortsdarstellung wäre für diesen Zustand mittels der Einführung von

Graßmannfeldern (siehe Anhang B.1.2) zwar ebenfalls möglich, bietet für die vorliegende Arbeit aber keinerlei Vorteile.

Wir merken an, daß die Wahl des Ansatzes als Produktzustand an sich noch keine Einschränkung darstellt. Zwar ist der bosonische Anteil als Grundzustand der reinen Yang–Mills-Theorie fixiert, allerdings enthält der fermionische Anteil explizit das Eichfeld und könnte somit sämtliche durch die Kopplung der Quarks an die transversalen Gluonen auftretende Effekte berücksichtigen. Um explizite Berechnungen durchführen zu können, werden wir aber dazu gezwungen sein, konkrete Ausdrücke für den bosonischen und den fermionischen Anteil des Vakuumfunktionals (3.1) zu wählen was dann tatsächlich Näherungen mit sich bringen wird.

### 3.1.2 Variationszugang zur reinen Yang–Mills-Theorie

Da der Ansatz (3.1) explizit den Vakuumzustand der reinen Yang–Mills-Theorie enthält, ist es sinnvoll, zunächst auf deren Behandlung im Zuge des Variationszugangs einzugehen. Das gilt umso mehr, da wir uns später bei der Lösung der Bewegungsgleichungen auf den fermionischen Anteil konzentrieren und dabei für den Bosonischen die Ergebnisse der reinen Yang–Mills-Theorie als Input verwenden werden.<sup>27</sup>

Das Vakuumwellenfunktional der freien QED in Coulombbeichung läßt sich exakt bestimmen und besitzt eine Gauß'sche Gestalt [21]. Für die reine Yang–Mills-Theorie ist eine solche exakte Lösung nicht bekannt. Allerdings ist es aufgrund der ähnlichen Struktur der Hamiltonians der beiden Theorien naheliegend, hier (zumindest in einem ersten Schritt) im Zuge des Variationszugangs ebenfalls ein Gauß'sches Funktional als Ansatz für das Vakuumfunktional zu verwenden. Entsprechende Betrachtungen wurden erstmals in Referenz [97] angestellt und beispielsweise in Referenz [98] nochmals aufgegriffen, wobei auch numerische Berechnungen durchgeführt wurden. Jedoch wurden in diesen Arbeiten – insbesondere im verwendeten Ansatz des Wellenfunktionals – die durch die Faddeev–Popov-Determinante (2.47) verursachten Effekte nicht hinreichend berücksichtigt. Eine entsprechend verbesserte Methodik, welche auch ein abgeändertes Wellenfunktional umfaßt, wurde im Zuge von [18, 19, 21] entwickelt und später in [22] nochmals umfassend numerisch behandelt.<sup>28</sup> Diese verbesserte Methodik wird die Grundlage für die Behandlung des Yang–Mills-Sektors in dieser Arbeit darstellen, weshalb wir im Folgenden ihre Grundzüge und wesentlichen Resultate vorstellen werden.

Der in Referenz [18, 19, 22] verwendete Ansatz für das Vakuumfunktional der Yang–Mills-Theorie besitzt in Impulsdarstellung die Gestalt

$$\phi_{\text{YM}}[A] = \mathcal{N}_{\text{YM}} J^{-\frac{1}{2}}[A] \exp\left(-\frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 p \int \mathrm{d}^3 q A_i^a(\mathbf{p}) \omega_{ij}^{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) A_j^b(\mathbf{q})\right), \quad (3.2)$$

wobei  $\mathcal{N}_{\text{YM}}$  eine durch  $\langle \phi_{\text{YM}} | \phi_{\text{YM}} \rangle = 1$  fixierte Normierungskonstante,<sup>29</sup>  $\omega$  den *Variationskern* und  $J$  die Faddeev–Popov-Determinante (2.47) bezeichnet. Das Vorliegen der Faddeev–Popov-Determinante unterscheidet diesen Ansatz von dem in [97, 98] verwendeten

<sup>27</sup>Die in diesem Abschnitt wiedergegebenen Resultate wurden hauptsächlich für die Eichgruppe  $SU(2)$  erzielt. Wir werden sie im späteren Verlauf aber auch für die Gruppe  $SU(3)$  verwenden, da die erwarteten Unterschiede gering sind.

<sup>28</sup>Die aus dem Ansatz resultierenden Bewegungsgleichungen besitzen mehrere Lösungen, welche allerdings erst in Referenz [22] vollständig behandelt wurden.

<sup>29</sup>Es gilt  $|\mathcal{N}_{\text{YM}}|^2 = (\det 2\omega)^{1/2}$ , siehe Anhang B.1.1.

reinen Gauß'schen Funktional und ist von großer Wichtigkeit für die Niederenergieeffekte der Theorie, also insbesondere den Farbeinschluß: Da die Faddeev–Popov-Determinante auf dem Rand der FMR (2.49) verschwindet, wird das Wellenfunktional (3.2) von den dortigen Eichfeldkonfigurationen dominiert. Diese sind im Gribov–Zwanziger-Szenario wesentlich für das Auftreten des Farbeinschlusses verantwortlich, vgl. Abschnitt 2.2.3. Daneben ist die Anwesenheit der Faddeev–Popov-Determinante im Vorfaktor auch von praktischem Nutzen bei der Berechnung von Funktionalintegralen (2.46), siehe unten.

Der Variationskern  $\omega$  stellt die freie Größe des Ansatzes (3.2) dar und muß gemäß des Ritz'schen Prinzips so bestimmt werden, daß der Energieerwartungswert minimal wird. Aus allgemeinen Überlegungen läßt sich seine Struktur bereits a priori einengen: Die räumliche Transversalität der Eichfelder in Coulombbeichung überträgt sich direkt auf den Variationskern, welcher aus Gründen der Impulserhaltung sowie der Isotropie des Raumes lediglich vom Betrag eines Impulses abhängen kann. Schließlich impliziert die Invarianz des Farb- raumes unter (Farb-)Rotationen die Diagonalität des Kerns auf diesem Raum, d.h.

$$\omega_{ij}^{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \delta^{ab} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) t_{ij}(\mathbf{p}) \omega(p) \quad (3.3)$$

mit dem transversalen Projektor (2.42).

Für den Erwartungswert eines beliebigen Operators  $O[A, \Pi]$  ergibt sich durch Einsetzen des Ansatzes (3.2) in das Matrixelement (2.46)

$$\begin{aligned} \langle O[A, \Pi] \rangle_{\text{YM}} &\equiv \langle \phi_{\text{YM}} | O | \phi_{\text{YM}} \rangle \\ &= \int \mathcal{D}A J[A] \phi_{\text{YM}}^*[A] O[A, \Pi] \phi_{\text{YM}}[A] \\ &= |\mathcal{N}_{\text{YM}}|^2 \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^*[A] \tilde{O}[A, \Pi] \tilde{\phi}_{\text{YM}}[A], \end{aligned} \quad (3.4)$$

wobei wir im letzten Schritt den transformierten Operator

$$\tilde{O}[A, \Pi] \equiv J^{\frac{1}{2}}[A] O[A, \Pi] J^{-\frac{1}{2}}[A] \quad (3.5)$$

sowie das reine Gauß'sche Funktional

$$\tilde{\phi}_{\text{YM}}[A] = \exp \left( -\frac{1}{2} \int \tilde{d}^3 p A_i^a(\mathbf{p}) t_{ij}(\mathbf{p}) \omega(p) A_j^a(-\mathbf{p}) \right) \quad (3.6)$$

eingeführt haben. Falls der Operator  $O$  unabhängig vom kanonischen Impuls  $\Pi$  ist, vertauscht er mit der Faddeev–Popov-Determinante  $J$  womit  $O = \tilde{O}$  gilt. In diesem Fall verschwindet die Faddeev–Popov-Determinante vollständig aus dem Erwartungswert was den erforderlichen Rechenaufwand enorm verringert.<sup>30</sup> Das ist insbesondere für den *statischen Gluonpropagator*

$$D_{ij}^{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \langle A_i^a(\mathbf{p}) A_j^b(\mathbf{q}) \rangle_{\text{YM}} = \delta^{ab} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) t_{ij}(\mathbf{p}) \frac{1}{2\omega(p)} = \delta^{ab} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) t_{ij}(\mathbf{p}) D(p) \quad (3.7)$$

erfüllt.<sup>31</sup> Dieser ist von besonderer Relevanz, da das Vorliegen eines Gauß'schen Wellenfunktionals die Gültigkeit des *Wick'schen Theorems* gewährleistet und sich der Erwartungswert beliebiger Potenzen des Eichfelds somit auf Produkte von Propagatoren reduzieren

<sup>30</sup>Im Gegenzug kann eine explizite Impulsabhängigkeit von  $O$  zu einem komplizierten Ausdruck für den transformierten Operator (3.5) führen, siehe die spätere Berechnung der kinetischen Energie.

<sup>31</sup>Zur Erläuterung der expliziten Berechnung von Erwartungswerten siehe Anhang B.1.1.

läßt, siehe Anhang B.1.1. Äquivalent hierzu ist, daß der Erwartungswert eines Operators  $O$ , welcher ausschließlich vom Eichfeld abhängt, über

$$\langle O[A] \rangle_{\text{YM}} = \left\{ \exp \left( \frac{1}{2} \int \bar{d}^3 p \frac{\delta}{\delta A_i^a(\mathbf{p})} t_{ij}(\mathbf{p}) D(p) \frac{\delta}{\delta A_j^a(-\mathbf{p})} \right) O[A] \right\} \Big|_{A=0} \quad (3.8)$$

bestimmt werden kann [21].

Die Berechnung des Energieerwartungswerts

$$E_{\text{YM}} = \langle \bar{H}_{\text{YM}} \rangle_{\text{YM}} \quad (3.9)$$

ist aufgrund der nicht-trivialen Struktur von Faddeev–Popov-Determinante (2.47) und Coulombkern (2.61) nicht in geschlossener Form möglich und wurde in Referenz [18, 19] auf Zweischleifenniveau<sup>32</sup> durchgeführt. Damit verbunden sind gewisse Näherungen sowie Vereinfachungen, welche wir auch für diese Arbeit übernehmen werden. Zunächst läßt sich bei der Berechnung des Energieerwartungswerts der Coulombkern (2.61) durch seinen Erwartungswert ersetzen,  $\hat{F} \approx \langle \hat{F} \rangle_{\text{YM}}$ . Für diesen sogenannten *Coulombpropagator* führt man dabei die Faktorisierung

$$\langle \hat{F} \rangle_{\text{YM}} = \langle \hat{G} \rangle_{\text{YM}} (-\Delta) f \langle \hat{G} \rangle_{\text{YM}} \quad (3.10)$$

ein, welche zugleich als Definitionsgleichung für den *Coulombformfaktor*  $f$  dient.<sup>33</sup> Daneben enthält diese Gleichung den *Geistpropagator*, d.h. den Erwartungswert des inversen Faddeev–Popov-Operators (2.48)

$$\langle \hat{G}^{ab}(\mathbf{p}) \rangle_{\text{YM}} = \delta^{ab} \frac{1}{g} \frac{d(\mathbf{p})}{p^2}. \quad (3.11)$$

Der *Geistformfaktor*  $d$  ist hierbei ein Maß für die Abweichung des Geistpropagators von seinem abelschen Pendant ( $d = 1$ ) und besitzt im Zuge des Gribov–Zwanziger-Szenarios den Fixpunkt  $d^{-1}(0) = 0$ . Dieser entsteht durch die Nullmoden des Faddeev–Popov-Operators am Rand der FMR und sorgt dafür, daß die Faddeev–Popov-Determinante dort verschwindet, vgl. Abschnitt 2.2.3. Der inverse Geistformfaktor läßt sich als *dielektrische Funktion* des Yang–Mills-Vakuums interpretieren,  $\varepsilon = 1/d$ , womit das Vakuum bei Vorliegen des Farbeinschlusses einem idealen Farb-Dielektrikum entspricht,  $\varepsilon(0) = 0$  [99]. Das verknüpft das Gribov–Zwanziger-Szenario mit dem Bild des dualen Supraleiters.

Mithilfe des Geistpropagators (3.11) ergibt sich für den Coulombpropagator (3.10) die farbdiagonale Gestalt

$$g^2 \langle \hat{F}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_{\text{YM}} = \delta^{ab} \int \bar{d}^3 p \exp(i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) \frac{d^2(\mathbf{p}) f(\mathbf{p})}{p^2}. \quad (3.12)$$

Ersetzt man die Ladungsdichte (2.59) in der Farb-Coulombwechselwirkung (2.58) durch diejenige eines statischen, d.h. unendlich schweren, Quark-Paares im Abstand  $r$ , so findet man für das zugehörige Quarkpotential [22]<sup>34</sup>

$$V_{\text{C}}(r) = \int \bar{d}^3 p \frac{d^2(\mathbf{p}) f(\mathbf{p})}{p^2} \left( \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - 1 \right). \quad (3.13)$$

<sup>32</sup>Die Bezeichnung wird bei der Betrachtung der Feynmandiagramme, Abschnitt 3.2, klar werden.

<sup>33</sup>In der QED gilt  $f = 1$  und der Coulombpropagator wird zum üblichen Coulombpotential.

<sup>34</sup>Der von uns verwendete Ausdruck unterscheidet sich von demjenigen in Referenz [22] durch einen Faktor  $(-1)$ . Die Ursache dafür ist, daß dort ein Quark–Antiquark-Paar betrachtet wurde, womit das zugehörige Potential attraktiv ist. Wir werden jedoch Gleichung (3.13) als allgemeines Farb-Wechselwirkungspotential verwenden, welches abhängig von der Form der Ladungsdichte (2.59) attraktiv oder repulsiv ist.

Aufgrund der formalen Analogie zur QED bezeichnen wir dieses als *nichtabelsches* oder *Farb-Coulombpotential*. Für den Coulombpropagator verwenden wir im Folgenden die Ersetzung

$$g^2 \langle \hat{F}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_{\text{YM}} = \delta^{ab} V_C(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|). \quad (3.14)$$

Daß sich die beiden Größen ursprünglich um eine Konstante unterscheiden spielt für die Berechnung von Erwartungswerten im Nulltemperaturlimes keine Rolle. Für endliche Temperaturen im Großkanonischen Ensemble entspricht (3.14) dagegen einer Regularisierung ansonsten divergenter Ausdrücke, siehe Kapitel 4.

Daneben läßt sich auf Zweischleifenniveau die Faddeev–Popov-Determinante [Gleichung (2.47)] durch einen Gauß'schen Ausdruck ersetzen,

$$J[A] = \exp \left( - \int \mathrm{d}^3 p \int \mathrm{d}^3 q A_i^a(\mathbf{p}) \chi_{ij}^{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) A_j^b(\mathbf{q}) \right). \quad (3.15)$$

Hierbei bezeichnet

$$\chi_{ij}^{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta}{\delta A_i^a(\mathbf{p})} \frac{\delta}{\delta A_j^b(\mathbf{q})} \ln J[A] \right\rangle_{\text{YM}} \quad (3.16)$$

den *Krümmungstensor*,<sup>35</sup> für welchen im Zuge der verwendeten Näherungen

$$\chi_{ij}^{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \delta^{ab} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) t_{ij}(\mathbf{p}) \chi(p) \quad (3.17)$$

mit der *skalaren Krümmung*

$$\chi(p) = \frac{N_C}{4} \int \mathrm{d}^3 q \frac{d(\mathbf{p} - \mathbf{q}) d(\mathbf{q})}{|\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2} (1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}})^2) \quad (3.18)$$

gilt.

Die Minimierung des Energieerwartungswerts als Funktion des Variationskerns  $\omega$  führt auf die sogenannte *Gapgleichung*, eine Integralgleichung, welche Terme mit maximal einer Schleife enthält. An die Gapgleichung sind die Bestimmungsgleichungen für den Geist- und den Coulombformfaktor gekoppelt, welche ihren Ursprung allerdings nicht im Variationsprinzip haben, sondern als Dyson–Schwinger-Gleichungen aus einer diagrammatischen Entwicklung hervorgehen und ebenfalls Integralgleichungen mit höchstens einer Schleife darstellen. Unter den genannten Näherungen enthalten diese gekoppelten Gleichungen eine vollständige Beschreibung der Theorie. Ihre Lösung ist für kleine (IR-Bereich) sowie große Impulse (UV-Bereich) analytisch möglich und liefert für den Variationskern das Verhalten

$$\omega(p \rightarrow 0) \sim \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad \omega(p \rightarrow \infty) \sim p, \quad (3.19)$$

welches auch durch die numerische Lösung der Gleichungen auf dem gesamten Impulsbereich bestätigt wird [22].<sup>36</sup> Da sich der Variationskern  $\omega$  als Gluonenergie interpretieren läßt, entspricht sein UV-Verhalten der Forderung nach asymptotischer Freiheit, d.h. der

<sup>35</sup>Aus physikalischer Sicht entspricht diese Größe demjenigen Anteil der Selbstenergie der Gluonen, welcher durch eine Geistschleife gebildet wird [21].

<sup>36</sup>Wir betrachten im Folgenden stets diejenige Lösung der Gleichungen aus [22], welche zu einem linear anwachsendem Farb-Coulombpotential führt.

Annäherung an die Photonenergie. Weiterhin impliziert die im IR-Bereich divergierende Energie, daß für diesen Limes keine freien Gluonen vorliegen können. Auch das ist physikalisch sinnvoll und ein Zeichen des Farbeinschlusses.

Ein Vergleich des aus der numerischen Lösung für die Gluonenergie  $\omega$  bestimmten Gluonpropagators  $D$  mit den in Referenz [48] durchgeführten Gitterrechnungen liefert das in Abbildung 3.1 gezeigte Ergebnis. Während man im IR- und UV-Bereich eine sehr gute Übereinstimmung erkennt, ergeben sich bei mittleren Impulsen größere Abweichungen. Diese halten sich jedoch, berücksichtigt man die Einfachheit des verwendeten Ansatzes, in einem vertretbaren Rahmen und lassen sich bei Verwendung eines nicht-Gauß'schen Ansatzes

$$\phi_{\text{NG}}[A] \sim \exp\left(-\int[\gamma^2 A^2 + \gamma^3 A^3 + \gamma^4 A^4]\right), \quad (3.20)$$

welcher auch kubische und quartische Eichfeldfaktoren im Exponenten enthält, weiter reduzieren, siehe ebenfalls Abbildung 3.1 sowie Referenz [26] für weitere Details. Ein nicht-Gauß'scher Ansatz macht die explizite Ausführung von Funktionalintegralen unmöglich und führt zum Verschwinden des Wick'schen Theorems. Diesem Umstand läßt sich durch die Verwendung von Dyson-Schwinger-Gleichungen begegnen [26, 28], was jedoch nicht mit der in dieser Arbeit verwendeten Methodik kompatibel ist. Daher bleiben wir bei der Verwendung Gauß'scher Funktionale. Die Gitterdaten für die Gluonenergie  $\omega$  besitzen die interessante Eigenschaft, daß sie sich im gesamten Impulsbereich sehr gut durch die *Gribovformel* [44]

$$\omega(p) = \sqrt{p^2 + \frac{M_G^4}{p^2}} \quad (3.21)$$

fitten lassen, wobei mit der *Gribovmasse*  $M_G \approx 880 \text{ MeV}$  [48] lediglich ein einziger Fitparameter vonnöten ist.

Für das Farb-Coulombpotential (3.13) findet man im Rahmen der numerischen Behandlung die Asymptotik

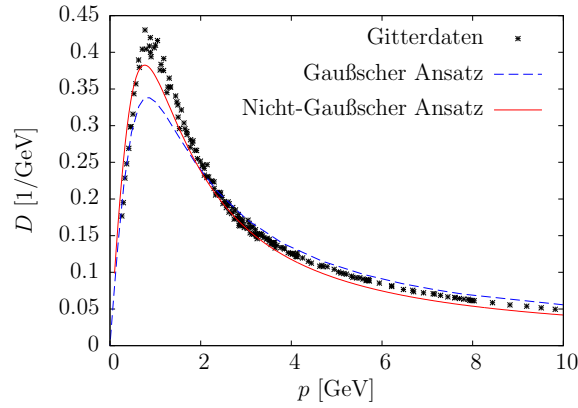
$$V_C(r) = \begin{cases} -\sigma_C r & \text{für } r \rightarrow \infty \\ \alpha_S/r & \text{für } r \rightarrow 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

wobei

$$\alpha_S = \frac{g^2}{4\pi} \quad (3.23)$$

gilt und  $\sigma_C$  als *Coulomb-Stringtension* bezeichnet wird. Da sich  $V_C$  als Potential zwischen zwei statischen Farbladungen ergibt, entspricht das genau dem erhofften Ergebnis, vgl. Abschnitt 2.2.3. Neben dem farbeinschließenden linearen Verlauf bei großen Abständen (kleinen Impulsen) stimmt auch die Reduktion auf ein reines Coulombpotential bei kleinen Abständen (großen Impulsen) mit den Erwartungen aufgrund der asymptotischen Freiheit der Theorie überein. Ein ähnliches Resultat für das statische Quark-Antiquark-Potential ergibt sich in Gitterrechnungen [3], wo die Betrachtung des Wilson-Loops (2.140) den IR-Limes

$$V(r \rightarrow \infty) = \sigma r \quad (3.24)$$



**Abbildung 3.1:** Der statische Gluonpropagator  $D = 1/2\omega$  als Funktion des Impulses. Kreuze entsprechen Gitterdaten [48], die gestrichelte Kurve der Variationsrechnung mit einem Gauß'schen Ansatz [22] und die durchgezogene Kurve einem nicht-Gauß'schen Ansatz [26].

liefert (zum Vorzeichen siehe Fußnote 34). Jedoch stimmt die Coulomb-Stringtension  $\sigma_C$  nicht mit der Wilson-Stringtension  $\sigma \approx (440 \text{ MeV})^2$  überein, sondern es läßt sich allgemein  $\sigma_C \geq \sigma$  zeigen [100].<sup>37</sup> Das nichtabelsche Coulombpotential ist zwar nicht das echte Quarkpotential, es liefert aber eine notwendige Bedingung für den Farbeinschluß: Kein Quark-Confinement ohne Coulomb-Confinement.

Die IR-Analyse der Bewegungsgleichungen in Referenz [22] ergibt weiterhin den Zusammenhang

$$\sigma_C = \frac{\pi}{N_C} M_G^2, \quad (3.25)$$

woraus hervorgeht, daß der Gluonsektor nur eine dimensionale Skala besitzt. Diese überträgt sich bei der Betrachtung der gesamten QCD auf den Quarksektor und wird von uns in Abschnitt 3.4 mithilfe der Ergebnisse von Gitterberechnungen der Coulomb-Stringtension fixiert werden.

### 3.1.3 Ansatz für das fermionische Vakuumfunktional

Wir widmen uns nun der Wahl des fermionischen Anteils des Vakuumfunktionals (3.1),  $|\phi_Q[A]\rangle$ . Zu dessen Motivation werfen wir zunächst einen kurzen Blick auf die Theorie der Supraleitung, welche auf J. Bardeen, L. Cooper und J. Schrieffer zurückgeht [101] und deshalb als *BCS-Theorie* bezeichnet wird. Unter Annahme einer attraktiven Paarwechselwirkung zwischen Elektronen, welche im Festkörper durch Gitterschwingungen realisiert wird, findet man, daß der Grundzustand unterhalb einer kritischen Temperatur nicht in Form einzelner freier Elektronen vorliegt, sondern durch *Cooperpaare* aus Elektronen mit entgegengesetztem Impuls und Spin gebildet wird,

$$|\phi_{\text{BCS}}\rangle = \prod_{\mathbf{p}} \left( \alpha(\mathbf{p}) + \beta(\mathbf{p}) d_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{p}) d_{\downarrow}^{\dagger}(-\mathbf{p}) \right) |0\rangle_{\text{BCS}}. \quad (3.26)$$

<sup>37</sup>Da das Coulombpotential lediglich eine obere Schranke an das statische Quarkpotential darstellt, führt sein Anwachsen bei hohen Temperaturen, siehe [94], zu keinerlei Widersprüchen.

Dabei bezeichnet  $d_{\uparrow(\downarrow)}^\dagger(\mathbf{p})$  den Erzeugungsoperator für einen Elektronenzustand mit Spin-Up (-Down) und Impuls  $\mathbf{p}$ ,  $|0\rangle_{\text{BCS}}$  das durch  $d|0\rangle_{\text{BCS}} = 0$  definierte Vakuum sowie  $\alpha$  und  $\beta$  Amplituden. Verbunden mit der Bildung von Cooperpaaren ist die Ausbildung einer *Energielücke* zwischen der Grundzustandsenergie und dem kontinuierlichen Spektrum angeregter Zustände, den *Quasiteilchen*. Der genaue Wert der Energielücke ergibt sich durch Lösen der Gapgleichung, welche man beispielsweise aus der Minimierung des Energieerwartungswerts gewinnen kann. Siehe z.B. Referenz [102] für eine Einführung in die BCS-Theorie.

Dieses mikroskopische Bild der Supraleitung läßt sich im Zuge des *Nambu–Jona-Lasinio-Modells* (NJL-Modell) auf den Quarksektor der QCD übertragen [103, 104]. Dabei übernehmen Quark–Antiquark-Paare die Rolle der Elektronenpaare, aus der kritischen Temperatur wird eine kritische Kopplungsstärke und die Lücke im Energiespektrum läßt sich als *Massenfunktion* (vgl. Abschnitt 2.3.1) interpretieren. Dieser Ansatz wurde in verschiedenen Arbeiten [105–109] aufgegriffen und weiterentwickelt, wobei ein BCS-artiges Wellenfunktional der Form

$$|\phi_Q\rangle = \mathcal{N} \prod_{\mathbf{p}, s, m} \left( \text{id} - \frac{1}{\delta^3(0)} s S(\mathbf{p}) a^{s, m \dagger}(\mathbf{p}) b^{s, m \dagger}(-\mathbf{p}) \right) |0\rangle \quad (3.27a)$$

$$= \mathcal{N} \exp \left( - \int \mathrm{d}^3 p s S(\mathbf{p}) a^{s, m \dagger}(\mathbf{p}) b^{s, m \dagger}(-\mathbf{p}) \right) |0\rangle \quad (3.27b)$$

Verwendung fand. Hier bezeichnet  $a^\dagger$  ( $b^\dagger$ ) die in Abschnitt 2.2.4 eingeführten Erzeugungsoperatoren für (Anti-)Quarkzustände,  $|0\rangle$  das durch

$$a^{s, m}(\mathbf{p})|0\rangle = b^{s, m}(\mathbf{p})|0\rangle = 0 \quad \forall s, m, \mathbf{p} \quad (3.28)$$

definierte *nackte Vakuum* (*Diracsee*),  $\mathcal{N}$  eine Normierungskonstante sowie  $S$  den Variationskern. Bei Verwendung im Produktzustand (3.1) führt das BCS-Wellenfunktional (3.27) zur vollständigen Separation von Gluon- und Quarksektor wodurch sich der fermionische Hamiltonian (2.66) auf die Summe aus freiem Dirac- und Farb-Coulombterm reduziert,<sup>38</sup>

$$\bar{H}_Q \rightarrow H_Q^0 + H_C^Q. \quad (3.29)$$

Ersetzt man den Coulombkern (2.61) in  $H_C^Q$  (2.63) durch eine geeignete Parametrisierung – beispielsweise das Farb-Coulombpotential (3.13) oder dessen IR-Asymptotik (3.22) – ergibt sich so ein einfaches Modellsystem zur Beschreibung von Quarks in einem farbeinschließenden Potential, wobei auf eine explizite Betrachtung des Yang–Mills-Sektors verzichtet werden kann. Die Lösung der mittels Variationsprinzip oder durch Diagonalisieren des Hamiltonians (*Bogoljubovtransformation*, vgl. Anhang C.3) bestimmbaren *Quarkgapgleichung* für  $S$  impliziert eine nicht-verschwindende dynamische Quarkmasse und die spontane Brechung der chiralen Symmetrie. Jedoch fallen die daraus abgeleiteten chiralen Größen verglichen mit ihrem phänomenologischen Wert deutlich zu klein aus.

Das läßt sich unter anderem auf die mangelnde Berücksichtigung der Kopplung der Quarks an die transversalen Gluonen zurückführen und war der Anlaß für die Verwendung eines erweiterten Wellenfunktionals in den Arbeiten [23–25]. Dessen fermionischer Anteil

<sup>38</sup>Der Kopplungsterm  $H_C^A$  ist irrelevant, da er linear im Eichfeld ist und in diesem Modell einen verschwindenden Erwartungswert besitzt, vgl. Anhang B.1.1.



besitzt neben dem skalaren Kern des BCS-Funktional (3.27) einen weiteren, vektoriellen Variationskern welcher explizit Eichfeld-abhängig ist. Dies macht eine ausschließliche Betrachtung des Quarksektors wie in [105–109] unmöglich und erzwingt einen konkreten Ansatz für den Yang–Mills-Anteil am Produktzustand (3.1), wobei in Referenz [23–25] das Yang–Mills-Vakuumsfunktional (3.2) verwendet wurde. Damit ergibt sich ein nicht-verschwindender Erwartungswert des Kopplungsterms  $H_Q^A$ , welcher zu einer expliziten Abhängigkeit der fermionischen Variationskerne von bosonischen Größen führt und somit eine Realisierung der Quark-Gluon-Kopplung darstellt. Tatsächlich liefert die im Rahmen einer *Quenching*-Approximation, d.h. unter Vernachlässigung der Rückkopplungseffekte der Quarks auf die Gluonen, erfolgte Lösung der Bewegungsgleichungen für den skalaren sowie vektoriellen Kern auch den erhofften deutlichen Anstieg der chiralen Größen verglichen mit einem reinen BCS-Ansatz. Dabei verbleibt allerdings – insbesondere bei der dynamisch erzeugten Masse – noch immer eine teils deutliche Abweichungen vom phänomenologischen Wert.

Ungeachtet der signifikanten Verbesserung der Resultate besitzt die Vorgehensweise in Referenz [23–25] einige näherungsbedingte Unzulänglichkeiten: Bei der Berechnung des bosonischen Erwartungswerts fermionischer Größen wurden Näherungsschemata in inkonsistenter Weise verwendet; außerdem wurde im Zuge der Vernachlässigung der Quark-Gluon-Rückkopplung die Wirkung des Yang–Mills-Hamiltonians (2.65) auf den Quarksektor völlig außer Acht gelassen. Das resultiert in unphysikalischen Eigenschaften des vektoriellen Variationskerns und einem von störungstheoretischen Berechnungen abweichenden Ausdruck für den Energieerwartungswert, siehe Anhang C.1. Darüber hinaus zeigen die Bewegungsgleichungen für den Skalarkern unphysikalische lineare UV-Divergenzen. In der vorliegenden Arbeit gehen wir deshalb über die Näherungen aus Referenz [23–25] hinaus und berechnen den Energieerwartungswert konsistent auf Zweischleifenniveau. Dabei werden wir ein um einen weiteren fermionischen Variationskern ergänztes Vakuumswellenfunktional verwenden. Neben den grundsätzlichen Vorzügen eines erweiterten Variationsraums ist die Verwendung des zusätzlichen Kerns von essentieller Bedeutung bei der Eliminierung divergenter Beiträge in den Bewegungsgleichungen und wird darüber hinaus durch störungstheoretische Berechnungen motiviert, siehe Anhang C.

Aufbauend auf den soeben vorgestellten früheren Arbeiten wählen wir den fermionischen Anteil am Wellenfunktional (3.1) in der Form

$$|\phi_Q[A]\rangle = \exp\left(-\int \bar{d}^3p \int \bar{d}^3q K^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) a^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) b^{t,n\dagger}(\mathbf{q})\right) |0\rangle, \quad (3.30)$$

wobei  $a$  ( $b$ ) erneut den Vernichtoperator für einen (Anti-)Quarkzustand,  $|0\rangle$  das gemäß (3.28) definierte nackte Vakuum und  $K$  den *Variationskern* bezeichnet. Dabei betrachten wir der Einfachheit halber lediglich ein Flavour chiraler Quarks,  $m_Q = 0$ . Eine Erweiterung der Theorie auf massive Quarks oder mehrere Flavours wäre aber problemlos möglich. Der Variationskern  $K$  stellt ein Eichfeld-abhängiges<sup>39</sup> Funktional im Farb-, Spin- und Impulsraum<sup>40</sup> dar und verknüpft Eigenzustände des Einteilchen-Diracoperators (2.71) positiver Energie (Quarkzustände) mit solchen negativer Energie (Antiquarkzustände), wie man sich anhand von Gleichung (2.72) klar machen kann. Wir setzen für ihn die Form

$$K^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = K_0^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + K_1^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (3.31a)$$

<sup>39</sup>Aus Gründen einer kompakten Notation schreiben wir die Eichfeld-Abhängigkeit nicht explizit an.

<sup>40</sup>Bei Betrachtung mehrerer Quarkflavours auch im Flavourraum.

mit

$$\begin{aligned} K_0^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \delta^{mn} \frac{1}{2p} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) u^{s\dagger}(\mathbf{p}) \beta S(p) v^t(-\mathbf{p}) \\ &= \delta^{mn} \delta^{st} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) s S(p), \end{aligned} \quad (3.31b)$$

$$K_1^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{g}{2\sqrt{pq}} t_a^{mn} u^{s\dagger}(\mathbf{p}) \left[ V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \beta W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] \alpha_k v^t(\mathbf{q}) A_k^a(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \quad (3.31c)$$

an, wobei der *Skalarkern*  $S$  sowie die *Vektorkerne*  $V$  und  $W$  durch Minimieren des Energieerwartungswerts bestimmt werden müssen. Im Limes  $V = W = 0$  reduziert sich der Ansatz (3.30) – modulo Normierung – auf das BCS-Funktional (3.27), während er für  $W = 0$  mit demjenigen aus [23–25] übereinstimmt. Setzen wir sämtliche Variationskerne als reelle<sup>41</sup> skalare Funktionen an, so ergibt sich aus der Forderung nach einem korrekten Transformationsverhalten unter räumlichen Translationen und Rotationen, daß der Skalarkern – wie bereits im Ansatz berücksichtigt – ausschließlich eine Funktion des Betrags seines Impulsargumentes ist,  $S(\mathbf{p}) = S(p)$ , während die Vektorkerne lediglich von den beiden Beträgen  $p$  und  $q$  sowie dem eingeschlossenen Winkel  $\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}}$  abhängen dürfen. Dies impliziert

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = V(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}) \quad \text{bzw.} \quad W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = W(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}). \quad (3.32)$$

Wir weisen darauf hin, daß wir die Vektorkerne im Gegensatz zu den Veröffentlichungen [95, 96] nicht a priori symmetrisch gewählt haben. Die Bestimmungsgleichungen der Kerne werden aber zeigen, daß eine solche Beschränkung problemlos möglich ist.

Für das zu Gleichung (3.30) adjungierte Wellenfunktional ergibt sich

$$\langle \phi_Q[A] | = \langle 0 | \exp \left( - \int \mathrm{d}^3 p \int \mathrm{d}^3 q K^{st,mn\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) b^{s,m}(\mathbf{p}) a^{t,n}(\mathbf{q}) \right) \quad (3.33)$$

mit dem adjungierten Variationskern

$$K^{st,mn\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = K_0^{st,mn\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + K_1^{st,mn\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (3.34a)$$

wobei unter Verwendung von  $A_i^{a*}(\mathbf{p}) = A_i^a(-\mathbf{p})$  [siehe (2.67)]

$$K_0^{st,mn\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \delta^{mn} \delta^{st} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) s S(p), \quad (3.34b)$$

$$K_1^{st,mn\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{g}{2\sqrt{pq}} t_a^{mn} v^{s\dagger}(\mathbf{p}) \left[ V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \beta W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right] \alpha_k u^t(\mathbf{q}) A_k^a(-\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (3.34c)$$

gilt.

Bei der Definition des fermionischen Wellenfunktionals (3.30) haben wir bewußt auf eine Normierung verzichtet, da es für die folgenden Berechnungen von Vorteil sein wird, die globale Normierung dem bosonischen Anteil am Vakuumfunktional (3.1) zuzuschlagen und dabei die *Fermideterminante*

$$I[A] \equiv \langle \phi_Q[A] | \phi_Q[A] \rangle \quad (3.35)$$

<sup>41</sup>Die Betrachtung ausschließlich reeller Kerne stellt eine gewisse Einschränkung des Ansatzes dar, welche z.B. in [23–25] unterlassen wurde. Die sich aus der Variation ergebenden Bestimmungsgleichungen der Kerne werden explizit zeigen, daß sich auch unter dieser Annahme selbstkonsistente Lösungen ergeben.

aufgrund ihrer expliziten Eichfeld-Abhängigkeit analog zur Faddeev–Popov-Determinante (2.47) zu behandeln. Wir wählen deshalb für den bosonischen Anteil den Ansatz

$$\phi_{\text{YM}}[A] = \mathcal{N} I^{-\frac{1}{2}}[A] J^{-\frac{1}{2}}[A] \tilde{\phi}_{\text{YM}}[A] \quad (3.36)$$

mit dem Gauß'schen Yang–Mills-Funktional (3.6) sowie einer globalen Normierungskonstanten  $\mathcal{N}$ . Für den in (3.36) enthaltenen bosonischen Variationskern  $\omega$  gelten dieselben Symmetrieeigenschaften wie im reinen Yang–Mills-Sektor, vgl. Abschnitt 3.1.2.

### 3.1.4 Wellenfunktional im Ortsraum

Obwohl wir sämtliche Berechnungen mithilfe des Wellenfunktionals in Impulsdarstellung durchführen werden, geben wir der Vollständigkeit halber auch dessen Ortsdarstellung an. Diese wurde insbesondere in den Veröffentlichungen [95, 96] verwendet.

Für den bosonischen Anteil (3.6) erhalten wir unter Verwendung der Fourierdarstellung des Eichfelds (2.67) den Ausdruck

$$\tilde{\phi}_{\text{YM}}[A] = \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y A_i^a(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) A_i^a(\mathbf{y})\right), \quad (3.37)$$

wobei sich für den Variationskern der Zusammenhang

$$\omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int d^3p \exp(-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) \omega(p), \quad (3.38)$$

also insbesondere  $\omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \omega(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ , ergibt.

Für das fermionische Funktional führen wir die Anteile des Quarkfelds positiver bzw. negativer Energie,

$$\Psi_{\pm}^m(\mathbf{x}) = \int d^3y \Lambda_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Psi^m(\mathbf{y}), \quad (3.39)$$

mittels der spektralen Projektoren

$$\Lambda_{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int d^3p \exp(i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) \Lambda_{\pm}(p), \quad \Lambda_{\pm}(p) = \frac{1}{2} \left( \text{id} + \frac{h(p)}{e_{\pm}(p)} \right) \quad (3.40)$$

des freien Diracoperators (2.71) ein. Der positive (negative) Anteil des Quarkfelds entspricht hierbei dem Term  $\sim u$  ( $v$ ) in der Entwicklung (2.72). Da das fermionische Wellenfunktional (3.30) auf der Anregung von Teilchen–Antiteilchen-Paaren beruht, besitzt es in Ortsdarstellung die Gestalt

$$|\phi_{\text{Q}}[A]\rangle = \exp\left(-\int d^3x \int d^3y \Psi_+^{m\dagger}(\mathbf{x}) K^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Psi_-^n(\mathbf{y})\right) |0\rangle \quad (3.41)$$

mit dem (auch in den Diracindizes) matrixwertigen Variationskern

$$K^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^{mn} \beta S(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + g \int d^3z \left[ V(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{z}) + \beta W(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{z}) \right] t_a^{mn} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}^a(\mathbf{z}). \quad (3.42)$$

Der Vergleich von Gleichung (3.41) mit (3.30) liefert den folgenden Zusammenhang von Skalar- und Vektorkernen in Orts- bzw. Impulsdarstellung ( $W$  analog zu  $V$ ):

$$S(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int d^3p \exp(i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) S(p), \quad (3.43)$$

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{z}) = \int d^3p \int d^3q \exp(i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z})) \exp(i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z})) V(p, q). \quad (3.44)$$

### 3.1.5 Berechnung von Erwartungswerten

Für den Erwartungswert eines Operators  $O$  im Produktzustand (3.1) ergibt sich durch Einsetzen in Gleichung (2.46)

$$\begin{aligned} \langle O[A, \Pi, \Psi] \rangle &\equiv \langle \phi[A] | O[A, \Pi, \Psi] | \phi[A] \rangle \\ &= \int \mathcal{D}A J[A] \phi_{\text{YM}}^*[A] \langle \phi_{\text{Q}}[A] | O[A, \Pi, \Psi] | \phi_{\text{Q}}[A] \rangle \phi_{\text{YM}}[A], \end{aligned} \quad (3.45)$$

wobei der Operator für die volle QCD i.A. ein Funktional von Eichfeld, kanonischem Impuls und Quarkfeld ist und daher weder mit  $\phi_{\text{YM}}[A]$  noch mit  $|\phi_{\text{Q}}[A]\rangle$  vertauscht. Analog zur reinen Yang–Mills-Theorie, siehe Gleichung (3.4), läßt sich der Erwartungswert (3.45) durch Einführen des transformierten Operators

$$\tilde{O}[A, \Pi, \Psi] \equiv J^{\frac{1}{2}}[A] I^{\frac{1}{2}}[A] O[A, \Pi, \Psi] J^{-\frac{1}{2}}[A] I^{-\frac{1}{2}}[A] \quad (3.46)$$

in eine deutlich kompaktere Form bringen,

$$\langle O[A, \Pi, \Psi] \rangle = |\mathcal{N}|^2 \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^*[A] \langle \tilde{O}[A, \Pi, \Psi] \rangle_{\text{Q}} \tilde{\phi}_{\text{YM}}[A]. \quad (3.47)$$

Dabei haben wir für das bosonische Funktional den Ansatz (3.36) eingesetzt sowie den fermionischen Erwartungswert

$$\langle O[A, \Pi, \Psi] \rangle_{\text{Q}} = I^{-1}[A] \langle \phi_{\text{Q}}[A] | O[A, \Pi, \Psi] | \phi_{\text{Q}}[A] \rangle \quad (3.48)$$

definiert. Für einen Operator, der *kein* Funktional des kanonischen Impulses  $\Pi$  ist, gilt  $O = \tilde{O}$  und die Faddeev–Popov-Determinante verschwindet vollständig aus dem Erwartungswert (3.47). In diesem Fall läßt sich das Wick’sche Theorem der Yang–Mills-Theorie in der Form (3.8) direkt übertragen und wir erhalten

$$\langle O[A, \Psi] \rangle = \left\{ \exp \left( \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3p \frac{\delta}{\delta A_i^a(\mathbf{p})} t_{ij}(\mathbf{p}) D(p) \frac{\delta}{\delta A_j^a(-\mathbf{p})} \right) \langle O[A, \Psi] \rangle_{\text{Q}} \right\} \Big|_{A=0} \quad (3.49)$$

mit dem Gluonpropagator  $D(p) = 1/2\omega(p)$ . Falls der Operator  $O$  jedoch explizit vom kanonischen Impuls abhängig ist, müssen zunächst sämtliche dadurch implizierte Funktionalableitungen ausgeführt werden bevor der fermionische Erwartungswert (3.48) bestimmt und schließlich Gleichung (3.49) angewendet werden kann.

### Fermionischer Anteil des Erwartungswerts

Die Quarkfeld-Abhängigkeit sämtlicher für diese Arbeit relevanter Operatoren ist polynomieller Art, weshalb es hinreichend ist, den fermionischen Erwartungswert von Produkten von Quarkfeldern bzw. [vgl. (2.72)] von Erzeugungs- und/oder Vernichtungsoperatoren  $a^{(\dagger)}$ ,  $b^{(\dagger)}$  zu betrachten. Da der Vakuumzustand (3.30) gemäß des *Thouless’schen Theorems* der allgemeinsten Form einer zum nackten Vakuum  $|0\rangle$  nicht-orthogonalen *Slaterdeterminante* entspricht, können wir hierbei das Wick’sche Theorem verwenden [110, 111]. Damit reduziert sich die relevante Berechnung auf die Erwartungswerte von Operatorpaaren, für

welche wir

$$\langle a^{s,m}(\mathbf{p})a^{t,n\dagger}(\mathbf{q}) \rangle_{\mathbb{Q}} = [\text{id} + KK^\dagger]^{-1st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (3.50a)$$

$$\langle b^{s,m}(\mathbf{p})b^{t,n\dagger}(\mathbf{q}) \rangle_{\mathbb{Q}} = [\text{id} + K^\dagger K]^{-1ts,nm}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (3.50b)$$

$$\langle a^{s,m\dagger}(\mathbf{p})b^{t,n\dagger}(\mathbf{q}) \rangle_{\mathbb{Q}} = - \left( [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} K^\dagger \right)^{ts,nm}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (3.50c)$$

$$\langle a^{s,m}(\mathbf{p})b^{t,n}(\mathbf{q}) \rangle_{\mathbb{Q}} = \left( [\text{id} + KK^\dagger]^{-1} K \right)^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (3.50d)$$

$$\langle a^{s,m\dagger}(\mathbf{p})b^{t,n}(\mathbf{q}) \rangle_{\mathbb{Q}} = \langle a^{s,m}(\mathbf{p})a^{t,n}(\mathbf{q}) \rangle_{\mathbb{Q}} = \langle b^{s,m}(\mathbf{p})b^{t,n}(\mathbf{q}) \rangle_{\mathbb{Q}} = 0 \quad (3.50e)$$

erhalten, siehe Anhang B.1.2 für Details zur Rechnung und die Aussage des Wick'schen Theorems. Erwartungswerte hier nicht genannter Paare lassen sich mithilfe der Vertauschungsrelationen (2.73) bilden. Weiterhin liefert die konkrete Berechnung in Anhang B.1.2 für die Fermideterminante (3.35) das Ergebnis

$$I[A] = \det \begin{pmatrix} \text{id} & K \\ K^\dagger & -\text{id} \end{pmatrix} = \det(\text{id} + K^\dagger K), \quad (3.51)$$

wobei die erste (Funktional-)Determinante auf dem vollständigen und die zweite auf dem negativen Eigenraum des Einteilchen-Diracoperators (2.71) gebildet wird.

### Bosonischer Anteil des Erwartungswerts

Nach Ausführen eventuell vorhandener Funktionalableitungen sowie Berechnung des fermionischen Erwartungswerts entspricht die weitere Auswertung von Gleichung (3.49) prinzipiell der Erwartungswertbildung in der reinen Yang–Mills-Theorie. Neben den in Abschnitt 3.1.2 diskutierten Vereinfachungen sind wir bei der vollen QCD jedoch zu einer weiteren Näherung gezwungen sobald wir Erwartungswerte fermionischer Operatoren betrachten: Gemäß Gleichung (3.50) enthalten diese stets Terme der Art

$$[\text{id} + KK^\dagger]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (KK^\dagger)^n, \quad (3.52)$$

welche für den gewählten Ansatz (3.31) eine unendlichen Potenzreihe im Eichfeld darstellen und eine Auswertung des Erwartungswerts (3.49) in geschlossener Form unmöglich machen. Zur Bestimmung des Energieerwartungswerts auf Zweischleifenniveau ist eine exakte Berechnung aber gar nicht erforderlich, sondern wir können den Ausdruck (3.49) durch die ersten Glieder seiner Reihenentwicklung ersetzen:

$$\langle O[A, \Psi] \rangle \approx \langle O[A = 0, \Psi] \rangle_{\mathbb{Q}} + \frac{1}{2} \int \bar{d}^3p \frac{\delta}{\delta A_i^a(\mathbf{p})} t_{ij}(\mathbf{p}) D(p) \frac{\delta}{\delta A_j^a(-\mathbf{p})} \langle O[A, \Psi] \rangle_{\mathbb{Q}} \Big|_{A=0} \quad (3.53)$$

Dieses Vorgehen ist auf Zweischleifenniveau konsistent und unterscheidet die Berechnungsmethode der vorliegenden von derjeniger früherer Arbeiten, in denen der bosonische Erwartungswert fermionischer Operatoren gebildet wurde, indem Variationskerne im „Nenner“ durch ihren Erwartungswert ersetzt wurden [23–25],

$$[\text{id} + KK^\dagger]^{-1} \approx [\text{id} + \langle KK^\dagger \rangle]^{-1}. \quad (3.54)$$

Diese vereinfachende Approximation führt im Energieerwartungswert zu Beiträgen mit einer unkontrollierten Anzahl an Schleifen<sup>42</sup> während zugleich auf Zweischleifenniveau relevante Terme vernachlässigt werden. Dies bleibt nicht ohne Auswirkung auf die so bestimmten Variationskerne, worauf wir später an geeigneter Stelle nochmals eingehen werden.

Abschließend bemerken wir, daß für Potenzen des Eichfelds das (bosonische) Wick'sche Theorem (siehe Anhang B.1.1) nach wie vor seine Gültigkeit behält, da wir die Reihenentwicklung (3.53) ausschließlich für fermionische Operatoren verwenden werden. Für den statischen Gluonpropagator ergibt sich dabei das aus der reinen Yang–Mills-Theorie bekannte Resultat [siehe (3.7)]

$$D_{ij}^{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \langle A_i^a(\mathbf{p}) A_j^b(\mathbf{q}) \rangle = \delta^{ab} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) t_{ij}(\mathbf{p}) D(p). \quad (3.55)$$

## 3.2 Statischer Quarkpropagator und Energiefunktional

### 3.2.1 Statischer Quarkpropagator

Die Verwendung eines Gauß'schen Wellenfunktionals für den Quarksektor und die damit verbundene Gültigkeit des Wick'schen Theorems impliziert, daß sich – zumindest die meisten – Erwartungswerte fermionischer Operatoren durch den *statischen Quarkpropagator*

$$G_{ij}^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \langle [\Psi_i^m(\mathbf{x}), \Psi_j^{n\dagger}(\mathbf{y})] \rangle \quad (3.56)$$

ausdrücken lassen. Wir widmen uns deshalb zunächst dessen Bestimmung und nehmen dies zum Anlaß, in Anhang B.1.3 die Herangehensweise bei der Berechnung von Erwartungswerten nochmals detailliert darzustellen. Für die mittels

$$G_{ij}^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^{mn} \int \mathrm{d}^3 p \exp(i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) G_{ij}(\mathbf{p}) \quad (3.57)$$

definierte Impulsdarstellung des Propagators ergibt sich dabei das Ergebnis

$$G(\mathbf{p}) = \frac{P(p)}{2} [1 - S^2(p) - I_\alpha(p)] \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + P(p) [S(p) - I_\beta(p)] \beta \quad (3.58)$$

mit den Schleifenintegralen

$$I_\alpha(p) = C_F g^2 \int \mathrm{d}^3 q \frac{P(p)P(q)}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} \left[ V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) V(\mathbf{q}, \mathbf{p}) X(\mathbf{p}, \mathbf{q}) (1 + 2S(p)S(q) - S^2(p)) \right. \\ \left. + W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) Y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) (1 - 2S(p)S(q) - S^2(p)) \right] \quad (3.59)$$

und

$$I_\beta(p) = \frac{C_F}{2} g^2 \int \mathrm{d}^3 q \frac{P(p)P(q)}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} \left[ V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) V(\mathbf{q}, \mathbf{p}) X(\mathbf{p}, \mathbf{q}) (2S(p) - S(q) + S^2(p)S(q)) \right. \\ \left. + W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) Y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) (2S(p) + S(q) - S^2(p)S(q)) \right]. \quad (3.60)$$

<sup>42</sup>Die Ersetzung (3.54) führt zu Schleifenbeiträgen im Nenner.

Hierbei haben wir die Abkürzungen

$$P(p) = \frac{1}{1 + S^2(p)}, \quad (3.61)$$

$$X(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 1 - \left[ \hat{\mathbf{p}} \cdot \widehat{(\mathbf{p} + \mathbf{q})} \right] \left[ \hat{\mathbf{q}} \cdot \widehat{(\mathbf{p} + \mathbf{q})} \right], \quad (3.62)$$

$$Y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 1 + \left[ \hat{\mathbf{p}} \cdot \widehat{(\mathbf{p} + \mathbf{q})} \right] \left[ \hat{\mathbf{q}} \cdot \widehat{(\mathbf{p} + \mathbf{q})} \right] \quad (3.63)$$

sowie den (*quadratischen*) *Casimirfaktor*

$$C_F = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} \quad (3.64)$$

eingeführt. Im Limes  $V = W = 0$ , also bei Vernachlässigung der Quark-Gluon-Kopplung im Wellenfunktional, reduziert sich der Propagator (3.58) exakt auf das mit einem BCS-Ansatz erzielte Ergebnis aus Referenz [107]. Weiterhin besteht für  $V, W \neq 0$  Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Variationsrechnungen unter Verwendung von Dyson-Schwinger-Gleichungen [112] sowie für  $S = 0$  und nach Einsetzen der Bestimmungsgleichungen (3.93), (3.97) für  $V, W$  mit störungstheoretischen Berechnungen [113]. Demgegenüber ergeben sich für  $W = 0$  deutliche Abweichungen vom Propagator aus Referenz [23–25], was durch die in diesen Arbeiten verwendete Näherung (3.54) verursacht wird.

Noch vor der vereinfachten Berechnung des Energiefunktionals besteht die wichtigste Eigenschaft des statischen Quarkpropagators darin, daß er direkten Zugriff auf das chirale Quarkkondensat (2.94) sowie eine effektive Quarkmassenfunktion erlaubt. Beide Größen dienen als Ordnungsparameter für die chirale Symmetriebrechung und erlauben so einen Vergleich der Resultate unseres Ansatzes mit phänomenologischen Erkenntnissen. Zu ihrer Ableitung betrachten wir zunächst den statischen Propagator eines freien, massiven Diraceteilchens,

$$G_0(\mathbf{p}) = \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m_Q}{2\sqrt{p^2 + m_Q^2}}. \quad (3.65)$$

Dieser besitzt zwei unabhängige Diracstrukturen, eine vektorielle ( $\sim \alpha_i$ ) sowie eine skalare ( $\sim \beta$ ), wovon letztere im Limes masseloser Teilchen verschwindet. Dieselben Diracstrukturen finden wir im Quarkpropagator (3.58) wieder und es ist sinnvoll, ihn in eine zu (3.65) analoge Form zu bringen. Daraus ergibt sich die Quasiteilchendarstellung<sup>43</sup>

$$G(\mathbf{p}) = Z(p) \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta M(p)}{2\sqrt{p^2 + M^2(p)}}, \quad (3.66)$$

wobei sich aus dem Vergleich mit (3.58) die Koeffizienten in Form einer *effektiven* bzw. *laufenden Massenfunktion*

$$M(p) = \frac{2p[S(p) - I_\beta(p)]}{1 - S^2(p) - I_\alpha(p)} \quad (3.67)$$

<sup>43</sup>Die Tatsache, daß sich der statische Quarkpropagator in Quasiteilchenform darstellen läßt, ist eine Folge des verwendeten Ansatzes für das Quarkwellenfunktional in Form einer Slaterdeterminante.

sowie des *Feldrenormierungsfaktors*

$$Z(p) = P(p) \sqrt{[1 - S^2(p) - I_\alpha(p)]^2 + 4[S(p) - I_\beta(p)]^2} \quad (3.68)$$

erschließen. Mithilfe der Massenfunktion (3.67) läßt sich zudem die *Quasiteilchenenergie*

$$E(p) = \sqrt{p^2 + M^2(p)} \quad (3.69)$$

definieren.

Offenbar impliziert das Vorliegen eines nicht-verschwindenden Skalarkerns  $S$  eine nicht-verschwindende effektive Masse, was ein erstes Zeichen für die spontane Brechung der chiralen Symmetrie in dem verwendeten Modell ist. Wir betonen aber, daß die effektive Massenfunktion (3.67) nicht zwangsläufig der Konstituentenmasse der Quarks, vgl. Abschnitt 2.3.1, entsprechen muß. In dem von uns betrachteten Modell wurden weder unterschiedliche Quarkflavours, noch eine Bindung zu hadronischen Zuständen berücksichtigt, sodaß diese Identifikation etwas voreilig wäre. Bei Vernachlässigung der Quark-Gluon-Kopplung im Wellenfunktional reduzieren sich sowohl die Massenfunktion (3.67) als auch der Feldrenormierungsfaktor (3.68) auf die in Referenz [107] gefundenen Ausdrücke

$$M(p) = \frac{2pS(p)}{1 - S^2(p)} \quad \text{und} \quad Z(p) = 1. \quad (3.70)$$

Zur eindeutigen Feststellung der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie ist die Betrachtung des chiralen Kondensats (2.94) als direkter Ordnungsparameter erforderlich. Mithilfe des statischen Propagators (3.58), (3.66) ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Psi}^m(\mathbf{x}) \Psi^m(\mathbf{x}) \rangle &= \langle \Psi_i^{m\dagger}(\mathbf{x}) \beta_{ij} \Psi_j^m(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \beta_{ij} \left( \delta_{ij} \delta^{mm} \delta^3(0) - 2G_{ji}^{mm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right) \\ &= -\text{Sp} \left( \beta G^{mm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right) \\ &= -2N_C \int \mathrm{d}^3p \frac{Z(p)M(p)}{E(p)} \end{aligned} \quad (3.71a)$$

$$= -4N_C \int \mathrm{d}^3p P(p) [S(p) - I_\beta(p)], \quad (3.71b)$$

was für eine nicht-verschwindende Massenfunktion (bzw. Skalarkern) ebenfalls nicht-verschwindend ist. Wir merken an, daß der Ausdruck (3.71) für das Kondensat tatsächlich auf Zweischleifenniveau ist, da  $I_\beta$  bereits eine Schleife enthält, siehe Gleichung (3.60).

### 3.2.2 Fermionisches Energiefunktional

Wir widmen uns nun der Berechnung des Erwartungswerts des QCD-Hamiltonians (2.64), wobei wir wie in Abschnitt 3.1.5 beschrieben vorgehen und einen auf Zweischleifenniveau konsistenten Ausdruck ableiten werden. Um eine größere Übersichtlichkeit zu wahren, verwenden wir hierzu die Zerlegung des Hamiltonians nach fermionischen (2.66) und bosonischen Anteilen (2.65) und betrachten die jeweiligen Erwartungswerte zunächst getrennt.

Der Dirac-Hamiltonian (2.35) als führender fermionischer Beitrag zerfällt in einen Anteil für die freie Dynamik der Quarks, Gleichung (2.53), sowie einen für die Kopplung der



Quarks an das transversale Eichfeld, Gleichung (2.54). Der Erwartungswert von ersterem läßt sich durch den statischen Quarkpropagator (3.58) darstellen und daher sehr einfach bestimmen:<sup>44</sup>

$$\begin{aligned}\langle H_Q^0 \rangle &= -N_C \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p \operatorname{Sp}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} G(\mathbf{p})) \\ &= -2N_C \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p \frac{p^2 Z(p)}{E(p)}\end{aligned}\quad (3.72a)$$

$$= -2N_C \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p p P(p) \left[ 1 - S^2(p) - I_\alpha(p) \right] \quad (3.72b)$$

Dieser Ausdruck enthält – ebenso wie sämtliche weitere Erwartungswerte – einen divergenten Vorfaktor  $\delta^3(0)$ , welcher sich leicht als das (unendlich große) Volumen des Raumes identifizieren läßt,

$$\operatorname{Vol} = \int d^3 x = \delta^3(0). \quad (3.73)$$

Das Auftreten eines solchen Faktors war zu erwarten und stellt keinerlei Problem dar, da im Folgenden – wie bei Quantenfeldtheorien üblich – lediglich die Energiedichte von physikalischer Bedeutung sein wird. Ersetzen wir in Gleichung (3.72b) das Schleifenintegral  $I_\alpha$  durch seine Definition (3.59) und symmetrisieren wir den Integranden,<sup>45</sup> so erhalten wir den Ausdruck

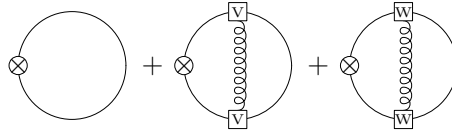
$$\begin{aligned}\langle H_Q^0 \rangle &= 2N_C \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p p (1 - 2P(p)) \\ &\quad + \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) g^2 \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q \frac{V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) V(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} P(p) P(q) X(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ &\quad \times \left[ p P(p) \left( 1 - S^2(p) + 2S(p)S(q) \right) + q P(q) \left( 1 - S^2(q) + 2S(p)S(q) \right) \right] \\ &\quad + \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) g^2 \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q \frac{W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) W(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} P(p) P(q) Y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ &\quad \times \left[ p P(p) \left( 1 - S^2(p) - 2S(p)S(q) \right) + q P(q) \left( 1 - S^2(q) - 2S(p)S(q) \right) \right].\end{aligned}\quad (3.74)$$

Dieser besitzt verglichen mit (3.72) zwar eine etwas längliche Struktur, bietet aber zweierlei Vorzüge: Zum einen enthält er direkt die Variationskerne  $S$ ,  $V$ ,  $W$  sowie  $\omega$  und zum anderen erlaubt er eine graphische Interpretation im Sinne von *Feynmandiagrammen*.

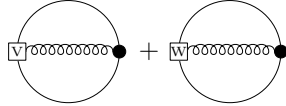
Dazu identifizieren wir  $1/\omega$  qualitativ als Gluon- (3.55) und  $P \cdot f[S]$  (mit  $f$  einem Funktional in  $S$ ) als Quarkpropagator (3.58) und stellen diese durch eine gekringelte bzw. durchgezogene Linie dar. Die Propagatoren verbinden, sofern über ihr Impulsargument integriert wird, die *Operatorkerne* und *Vertizes* der Theorie. Insbesondere muß dabei an jedem Operatorkern oder Vertex die Erhaltung der ein- und auslaufenden Impulse gewährleistet sein, womit die Anzahl der Impulsintegrale auch graphisch der Anzahl an Schleifen entspricht.

<sup>44</sup>Die Darstellung des Erwartungswerts als Spur des Propagators folgt – mit Ausnahme der aufgrund des Gradienten zusätzlich erforderlichen Ortsableitung – denselben Schritten wie beim chiralen Kondensat (3.71) und berücksichtigt den spurbedingten Entfall des Terms  $\sim \delta_{ij}$ .

<sup>45</sup>Wir nehmen an, daß die Integrale wohldefiniert sind und deshalb eine Umordnung erlauben.



**Abbildung 3.2:** Diagrammatische Darstellung des Erwartungswerts des freien Dirac-Hamiltonians (3.74), Erläuterung siehe Text.



**Abbildung 3.3:** Diagrammatische Darstellung des Erwartungswerts des Kopplungsterms (3.75), siehe Text.

Für den freien Dirac-Hamiltonian ist der Operator Kern durch den Betrag des Impulses gegeben, welchen wir graphisch durch einen Kreis mit zwei Quarkbeinen und einem Kreuz im Innern darstellen, während wir die Vektorkerne  $V$  und  $W$  – aufgrund ihres Auftretens in Kombination mit der Struktur  $\Psi^\dagger A \Psi$  im Wellenfunktional – als Quark-Gluon-Vertizes auffassen können und durch entsprechend beschriftete Quadrate mit zwei Quark- und einem Gluonbein darstellen. Die Anwendung dieses Schemas auf den Erwartungswert (3.74) ergibt die in Abbildung 3.2 gezeigte Darstellung, wobei die Reihenfolge der Diagramme mit derjenigen der Terme in Gleichung (3.74) übereinstimmt. Es sei betont, daß die Darstellung durch Feynmandiagramme im vorliegenden Fall rein qualitativ ist und die Kenntnis der Diagramme daher keine Rekonstruktion der exakten Struktur von Erwartungswerten erlaubt. Weiterhin enthält sie stets die vollen Propagatoren und Vertizes und stellt keine störungstheoretische Entwicklung dar.

Für den Erwartungswert des Kopplungsterms (2.54) ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle H_Q^A \rangle = & -(N_C^2 - 1) \delta^3(0) g^2 \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q \frac{V(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} P(q) P(p) (1 + S(q) S(p)) X(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ & - (N_C^2 - 1) \delta^3(0) g^2 \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q \frac{W(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} P(q) P(p) (S(p) + S(q)) Y(\mathbf{p}, \mathbf{q}); \end{aligned} \quad (3.75)$$

seine Berechnung ist in Anhang B.1.4 skizziert. Diese verläuft im Grunde analog zu derjenigen des statischen Quarkpropagators, jedoch läßt sich dabei eine interessante Feststellung machen: Derjenige Term, welcher (im Limes  $W = 0$ ) in den früheren Arbeiten [23–25] den alleinigen Beitrag zum Erwartungswert des Kopplungsterms geliefert hat, verschwindet bei Anwendung unseres auf zwei Schleifen konsistenten Schemas identisch.<sup>46</sup>

Identifizieren wir den Operator Kern des Kopplungsterms mit dem *nackten* Quark-Gluon-Vertex und stellen ihn durch einen ausgefüllten schwarzen Punkt dar, so ergibt sich für den Erwartungswert (3.75) die in Abbildung 3.3 gezeigte diagrammatische Darstellung.

Es verbleibt die Berechnung des Erwartungswerts der in Gleichung (2.66) enthaltenen Beiträge der Farb-Coulombwechselwirkung (2.58). Während der gemischte Term  $H_C^{\text{INT}}$  erst

<sup>46</sup>Tatsächlich verschwindet der entsprechende Term bereits durch die bloße Anwendung des Wick'schen Theorems (3.49), d.h. ohne jegliche Näherung.

auf Dreischleifenniveau einen nicht-verschwindenden Erwartungswert besitzt und vernachlässigt werden kann, zeigt sich für den fermionischen Term  $H_C^Q$  [Gleichung (2.63)], daß der Coulombkern (2.61) auf Zweischleifenniveau wie im Yang–Mills-Sektor [18, 21] durch seinen (bosonischen) Erwartungswert, d.h. das Farb-Coulombpotential (3.13), ersetzt werden kann. Damit wird der Coulombterm (2.63) ein rein fermionisches Funktional bestehend aus vier Quarkfeldern,

$$H_C^Q = \frac{1}{2} t_a^{m_1 m_2} t_a^{m_3 m_4} \int d^3 x \int d^3 y V_C(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \Psi_i^{m_1 \dagger}(\mathbf{x}) \Psi_i^{m_2}(\mathbf{x}) \Psi_j^{m_3 \dagger}(\mathbf{y}) \Psi_j^{m_4}(\mathbf{y}), \quad (3.76)$$

dessen fermionischer Erwartungswert nach Anwendung des fermionischen Wick'schen Theorems (siehe Anhang B.1.2)

$$\begin{aligned} \langle H_C^Q \rangle_Q &= \frac{1}{2} t_a^{m_1 m_2} t_a^{m_3 m_4} \int d^3 x \int d^3 y V_C(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \\ &\quad \times \left\{ \langle \Psi_i^{m_1 \dagger}(\mathbf{x}) \Psi_i^{m_2}(\mathbf{x}) \rangle_Q \langle \Psi_j^{m_3 \dagger}(\mathbf{y}) \Psi_j^{m_4}(\mathbf{y}) \rangle_Q \right. \\ &\quad - \langle \Psi_i^{m_1 \dagger}(\mathbf{x}) \Psi_j^{m_3 \dagger}(\mathbf{y}) \rangle_Q \langle \Psi_i^{m_2}(\mathbf{x}) \Psi_j^{m_4}(\mathbf{y}) \rangle_Q \\ &\quad \left. + \langle \Psi_i^{m_1 \dagger}(\mathbf{x}) \Psi_j^{m_4}(\mathbf{y}) \rangle_Q \langle \Psi_i^{m_2}(\mathbf{x}) \Psi_j^{m_3 \dagger}(\mathbf{y}) \rangle_Q \right\} \quad (3.77) \end{aligned}$$

lautet. Diese Zerlegung überträgt sich auf Zweischleifenniveau auf den gesamten Erwartungswert womit wir den bosonischen Erwartungswert für jede Kontraktion  $\langle \Psi^{(\dagger)} \Psi^{(\dagger)} \rangle_Q$  einzeln nehmen können,

$$\begin{aligned} \langle H_C^Q \rangle &= \frac{1}{2} t_a^{m_1 m_2} t_a^{m_3 m_4} \int d^3 x \int d^3 y V_C(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \\ &\quad \times \left\{ \langle \Psi_i^{m_1 \dagger}(\mathbf{x}) \Psi_i^{m_2}(\mathbf{x}) \rangle \langle \Psi_j^{m_3 \dagger}(\mathbf{y}) \Psi_j^{m_4}(\mathbf{y}) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \Psi_i^{m_1 \dagger}(\mathbf{x}) \Psi_j^{m_4}(\mathbf{y}) \rangle \langle \Psi_i^{m_2}(\mathbf{x}) \Psi_j^{m_3 \dagger}(\mathbf{y}) \rangle \right\}. \quad (3.78) \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, daß Erwartungswerte der Form  $\langle \Psi \Psi \rangle_Q$  verschwinden, siehe Gleichung (3.50). Drücken wir schließlich die verbleibenden Kontraktionen durch Quarkpropagatoren (3.56) aus, so ergibt sich unter Verwendung von

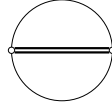
$$\text{Sp } t_a = 0 \quad (3.79)$$

für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} \langle H_C^Q \rangle &= \frac{1}{8} t_a^{m_1 m_2} t_a^{m_3 m_4} \int d^3 x \int d^3 y V_C(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \left[ \delta^{m_1 m_4} \delta^{m_2 m_3} \delta_{ii} \delta^3(0) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right. \\ &\quad \left. - 4 \text{Sp}(G^{m_4 m_1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) G^{m_2 m_3}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \right], \quad (3.80) \end{aligned}$$

bzw. nach Einsetzen des Propagators (3.58) und Auswerten der Spuren

$$\begin{aligned} \langle H_C^Q \rangle &= \frac{N_C^2 - 1}{4} \delta^3(0) \int d^3 p \int d^3 q V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) \\ &\quad \times \left[ 1 - P(p)P(q) \left( 4S(p)S(q) + (1 - S^2(p))(1 - S^2(q)) \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}} \right) \right]. \quad (3.81) \end{aligned}$$



**Abbildung 3.4:** Diagrammatische Darstellung des Erwartungswerts des fermionischen Anteils der Farb-Coulombwechselwirkung (3.81), siehe Text.

Dieser Ausdruck ist vollkommen identisch mit dem Erwartungswert bei Verwendung eines BCS-Wellenfunktionals [107], was darauf zurückzuführen ist, daß auf Zweischleifenniveau lediglich der führende Term des Quarkpropagators (3.58) beiträgt.

Die diagrammatische Darstellung von Gleichung (3.81) ist in Abbildung 3.4 gezeigt, wobei wir den Coulombpropagator (3.10) als Doppellinie darstellen.

### 3.2.3 Bosonisches Energiefunktional

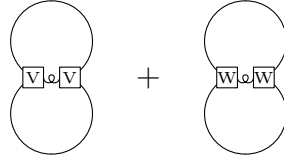
Wir fahren mit dem bosonischen Energiefunktional, d.h. dem Erwartungswert des Yang–Mills-Hamiltonians (2.65), fort. Dieser ist nicht identisch mit demjenigen der reinen Yang–Mills-Theorie, denn obwohl der Hamiltonian (2.65) keine Quarkfelder enthält, wird dessen Erwartungswert von ihnen beeinflusst. Das ist die Folge der Wirkung der durch kanonische Impulsoperatoren implizierten Funktionalableitungen auf den explizit Eichfeld-abhängigen fermionischen Anteil (3.30) des Wellenfunktionals, welcher in der reinen Yang–Mills-Theorie nicht vorhanden ist. Ebenso ergibt sich ein Beitrag durch die Eichfeld-abhängige Fermideterminante (3.51).

Auf Zweischleifenniveau betrifft dies ausschließlich den Erwartungswert der kinetischen Energie der transversalen Gluonen (2.56). Da der entsprechende Anteil des Yang–Mills-Hamiltonians abhängig vom kanonischen Impulsoperator ist, ist der gemäß Gleichung (3.46) transformierte Operator  $\tilde{H}_{\text{YM}}^E$  nicht identisch mit  $H_{\text{YM}}^E$ , sondern besitzt die nicht-triviale Gestalt

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{YM}}^E = \frac{1}{2} \int d^3p \left( \Pi_i^a(\mathbf{p}) \Pi_i^a(-\mathbf{p}) - \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right] \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln J \right] \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln J \right] + \frac{1}{4} \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right] \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln I \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln J \right] - \frac{1}{2} \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln I \right] \right). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Diese entsteht, da weder die Faddeev–Popov- (2.47), noch die Fermideterminante (3.51) mit dem Impulsoperator vertauscht. Man beachte, daß Impulsoperatoren in eckigen Klammern in Gleichung (3.82) ausschließlich innerhalb der Klammern und bei Bildung des Erwartungswerts nicht auf das Wellenfunktional wirken. Der transformierte Operator (3.82) besitzt eine erheblich komplexere Struktur als der ursprüngliche Operator  $H_{\text{YM}}^E$  (2.56). Das ist der Preis, den wir bei Impuls-abhängigen Operatoren für die einfache Form des Erwartungswerts (3.47) ohne Faddeev–Popov-Determinante im Integrationsmaß zu entrichten haben.

Die Auswertung des Erwartungswerts von (3.82) ist aufwendig und technisch und daher



**Abbildung 3.5:** Diagrammatische Darstellung der fermionischen Beiträge zum Erwartungswert der kinetischen Energie der Gluonen (3.83).

in Anhang B.1.5 zu finden. Nichtsdestotrotz ergibt sich mit

$$\begin{aligned}
\langle H_{\text{YM}}^E \rangle &= \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p \frac{(\omega(p) - \chi(p))^2}{\omega(p)} \\
&+ \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) g^2 \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q P(p) P(q) V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) V(\mathbf{q}, \mathbf{p}) X(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\
&+ \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) g^2 \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q P(p) P(q) W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) Y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (3.83)
\end{aligned}$$

ein sehr kompaktes Ergebnis, wobei  $\chi$  die skalare Krümmung (3.18) bezeichnet und wir für die Faddeev–Popov-Determinante mit Gleichung (3.15) dieselbe Näherung wie im reinen Yang–Mills-Sektor verwendet haben. Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.83) entspricht exakt dem Beitrag im reinen Yang–Mills-Sektor und wurde in dieser Form bereits in früheren Arbeiten gefunden [18, 19, 21]. Die beiden folgenden Terme stellen den Beitrag der Quarks zum Erwartungswert dar und waren in dieser Form bei Verwendung des Variationszugangs im funktionalen Schrödingerbild bislang unbekannt. Analog zum fermionischen Energiefunktional ist für diese beiden Terme eine diagrammatische Darstellung möglich, siehe Abbildung 3.5. Dabei ist zu beachten, daß die Gluonbeine der beiden Quark-Gluon-Vertizes ohne Propagator verbunden sind.

Im Gegensatz zur kinetischen ist die potentielle Energie der Gluonen (2.57) ein reines Funktional des Eichfelds womit  $\tilde{H}_{\text{YM}}^B = H_{\text{YM}}^B$  gilt und sich ihr Erwartungswert mithilfe des Wick’schen Theorems (3.49) *exakt* berechnen läßt.<sup>47</sup> Dabei ergeben sich keinerlei Beiträge durch die Kopplung an die Quarks und der Erwartungswert entspricht dem aus der reinen Yang–Mills-Theorie bekannten Ergebnis [18, 19, 21]

$$\begin{aligned}
\langle H_{\text{YM}}^B \rangle &= \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p \frac{p^2}{\omega(p)} \\
&+ \frac{N_C (N_C^2 - 1)}{16} \delta^3(0) g^2 \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q \frac{3 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}})^2}{\omega(p)\omega(q)}. \quad (3.84)
\end{aligned}$$

Zuletzt betrachten wir den rein gluonischen Anteil  $H_C^{\text{YM}}$  der Farb-Coulombwechselwirkung (2.58),

$$H_C^{\text{YM}} = \frac{1}{2} \int d^3 x \int d^3 y J^{-1}[A] f^{abc} \mathbf{A}^b(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\Pi}^c(\mathbf{x}) J[A] V_C(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) f^{ade} \mathbf{A}^d(\mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\Pi}^e(\mathbf{y}), \quad (3.85)$$

wobei wir den Coulombkern auf Zweischleifenniveau konsistent durch seinen Erwartungswert (3.14) ersetzt haben [18, 21]. Bilden wir den Erwartungswert von  $H_C^{\text{YM}}$ , so ergeben

<sup>47</sup>Da  $H_{\text{YM}}^B$  das Eichfeld nur in endlichen Potenzen enthält, sind wir nicht auf Näherungen angewiesen.

sich auch Beiträge durch die Wirkung der Impulsoperatoren auf das fermionische Wellenfunktional bzw. die Fermideterminante. Im Unterschied zur kinetischen Energie sind diese sämtlich mindestens auf Dreischleifenniveau und daher vernachlässigbar. Somit verbleiben nur diejenigen Terme, für welche die Impulsoperatoren auf bosonische Größen wirken. Für diese ist der fermionische Anteil des Erwartungswerts trivial, während sich der Bosonische nach Ausführung der Funktionalableitungen mittels Gleichung (3.49) berechnen läßt und das Ergebnis der reinen Yang–Mills-Theorie reproduziert [18, 19, 21]

$$\langle H_C^{\text{YM}} \rangle = \frac{N_C (N_C^2 - 1)}{16} \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) \times \frac{(\omega(p) - \chi(p) - \omega(q) + \chi(q))^2}{\omega(p)\omega(q)} \left(1 + (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}})^2\right). \quad (3.86)$$

### 3.2.4 Gesamtenergie

Zusammenfassend ergibt sich für die Gesamtenergie

$$\langle \bar{H}_{\text{QCD}} \rangle = \langle \bar{H}_{\text{YM}} \rangle + \langle \bar{H}_{\text{Q}} \rangle, \quad (3.87)$$

wobei sich das bosonische Energiefunktional

$$\langle \bar{H}_{\text{YM}} \rangle = \langle H_{\text{YM}}^E \rangle + \langle H_{\text{YM}}^B \rangle + \langle H_C^{\text{YM}} \rangle \quad (3.88)$$

aus den Beiträgen (3.83), (3.84) sowie (3.86) zusammensetzt und das fermionische Energiefunktional

$$\langle \bar{H}_{\text{Q}} \rangle = \langle H_{\text{Q}}^0 \rangle + \langle H_{\text{Q}}^A \rangle + \langle H_C^{\text{Q}} \rangle \quad (3.89)$$

durch Gleichung (3.72) [bzw. (3.74)], (3.75) und (3.81) gegeben ist. Damit tragen auf Zweischleifenniveau außer dem gemischten Anteil  $H_C^{\text{INT}}$  der Coulombwechselwirkung (2.58) sämtliche Bestandteile des QCD-Hamiltonians (2.64) zum Energieerwartungswert bei. Wir merken an, daß wir die Energie des nackten Vakuums

$$\langle \bar{H}_{\text{QCD}} \rangle \Big|_{S=V=W=0, \omega=p} \quad (3.90)$$

im Gegensatz zu den früheren Arbeiten [23–25] *nicht* abgezogen haben. Da der Abzug der Vakuumenergie lediglich eine konstante Verschiebung darstellt, hat das auf die durch Variation zu bestimmenden Bewegungsgleichungen keinerlei Einfluß.

Das Energiefunktional (3.87) ist in Übereinstimmung mit demjenigen, welches sich bei alternativen Variationsrechnungen unter Verwendung von Dyson–Schwinger-Gleichungen ergibt [112]. Im Limes  $S = 0$  reduziert es sich nach Einsetzen der im folgenden Abschnitt bestimmten Variationsgleichungen (3.93), (3.97) für  $V$  und  $W$  ferner auf das Ergebnis störungstheoretischer Berechnungen, siehe Anhang C.1. Setzen wir  $V = W = 0$ , d.h. vernachlässigen wir die Kopplung zwischen Quarks und transversalen Gluonen im Wellenfunktional, so wird das bosonische Energiefunktional (3.88) zu dem in Referenz [18, 19, 21] für die reine Yang–Mills-Theorie bestimmten, während sich das fermionische Energiefunktional (3.89) auf das Ergebnis eines BCS-Ansatzes reduziert [107]. Lediglich im Limes  $V \neq 0$ ,  $W = 0$  weicht (3.89) erheblich von dem in Referenz [23–25] gefundenen Funktional ab. Die Ursache hierfür ist die in diesen Arbeiten verwendete Näherung (3.54) sowie die teilweise Vernachlässigung des Yang–Mills-Sektors.

### 3.3 Variationsgleichungen und Renormierung

#### 3.3.1 Variationsgleichungen

Unser Ansatz für das Wellenfunktional, Gleichung (3.1) mit (3.30) und (3.36), enthält vier freie Größen  $S$ ,  $V$ ,  $W$  und  $\omega$ , welche wir über das Ritz'sche Variationsprinzip bestimmen werden. Die Minimierung des Energiefunktionals (3.87) führt auf die Forderung<sup>48</sup>

$$\frac{\delta\langle\bar{H}_{\text{QCD}}\rangle}{\delta\omega(k)} = \frac{\delta\langle\bar{H}_{\text{QCD}}\rangle}{\delta S(k)} = \frac{\delta\langle\bar{H}_{\text{QCD}}\rangle}{\delta V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')} = \frac{\delta\langle\bar{H}_{\text{QCD}}\rangle}{\delta W(\mathbf{k}, \mathbf{k}')} = 0, \quad (3.91)$$

wobei wir annehmen werden, daß die Variationskerne unabhängige Größen darstellen,

$$\frac{\delta\omega(p)}{\delta S(k)} = \frac{\delta V(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\delta S(k)} = \dots = 0. \quad (3.92)$$

Das impliziert die Vernachlässigung der gewiß vorhandenen impliziten Abhängigkeiten der Kerne voneinander.

#### Bestimmungsgleichungen der Vektorkerne

Aus der Forderung (3.91) läßt sich für den Vektorkern  $V$  die Bestimmungsgleichung

$$V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1 + S(k)S(k')}{N^V(k, k') + \omega(|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|)} \quad (3.93)$$

mit

$$N^V(k, k') = kP(k)\left(1 - S^2(k) + 2S(k)S(k')\right) + k'P(k')\left(1 - S^2(k') + 2S(k)S(k')\right) \quad (3.94)$$

ableiten, wobei der Zähler seinen Ursprung in der Variation des Kopplungsterms (3.75) hat, während der Nenner dem freien Dirac-Hamiltonian (3.74) sowie der kinetischen Energie (3.83) entspringt. Gleichung (3.93) unterscheidet sich sehr drastisch von der in den früheren Arbeiten [23–25] abgeleiteten Bewegungsgleichung: Zunächst läßt sie sich explizit nach  $V$  auflösen, während die Bestimmungsgleichung in [23–25] in Form einer Integralgleichung gegeben ist. Deren Lösung zeigt eine Abhängigkeit von lediglich einem Impulsargument. Aus allgemeinen Betrachtungen ist aber klar, daß der (u.a. durch  $V$  beschriebene) Quark-Gluon-Vertex nach Berücksichtigung der Impulserhaltung von *zwei* unabhängigen Impulsargumenten abhängen muß. Das ist für unser Ergebnis (3.93) für den Vektorkern erfüllt. Zudem reduziert sich dieser im Limes  $S = 0$  auf die aus der Störungstheorie bekannte Form [113]

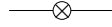
$$V_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{k + k' + \omega(|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|)}. \quad (3.95)$$

Schließlich gilt für den durch Gleichung (3.93) bestimmten Vektorkern

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = V(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (3.96)$$

was die entsprechende Symmetrieannahme in den Veröffentlichungen [95, 96] legitimiert. Im Folgenden werden wir die Symmetrie von  $V$  auch in dieser Arbeit stets verwenden.

<sup>48</sup>Prinzipiell könnte dies auch zur Maximierung des Energiefunktionals führen.



**Abbildung 3.6:** Diagrammatische Darstellung des Einschleifenbeitrags des freien Dirac-Hamiltonians zur Quarkgapgleichung (3.100).

Für den zweiten Vektorkern  $W$  ergibt sich in analoger Weise die Bestimmungsgleichung

$$W(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{S(k) + S(k')}{N^W(k, k') + \omega(|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|)} \quad (3.97)$$

mit

$$N^W(k, k') = kP(k) \left(1 - S^2(k) - 2S(k)S(k')\right) + k'P(k') \left(1 - S^2(k') - 2S(k)S(k')\right), \quad (3.98)$$

wobei die einzelnen Terme denselben Ursprung wie in Gleichung (3.93) haben. Wie für  $V$  erhalten wir für  $W$  eine physikalisch sinnvolle Abhängigkeit von zwei Impulsargumenten sowie die Symmetrieeigenschaft

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = W(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (3.99)$$

Trotz dieser Analogien und der allgemein ähnlichen Struktur von Gleichung (3.93) und (3.97) ergibt sich jedoch ein entscheidender Unterschied: Der Vektorkern  $W$  verschwindet im Limes  $S = 0$ , während sich  $V$  auf die störungstheoretische Form (3.95) reduziert. Das ist von besonderer Relevanz, da die Existenz von  $W$  (bzw. der Diracstruktur  $\alpha_i\beta$ ) im Variationskern (3.31) deshalb nicht mittels Störungstheorie ersichtlich wird, solange wir diese auf dem nackten fermionischen Vakuum (3.28) aufbauen. Stattdessen ist hierfür eine vom BCS-Vakuum (3.27) ausgehende Rechnung erforderlich, siehe Anhang C für weitere Details.

### Bewegungsgleichung des Skalarkerns

Die Extremalbedingung (3.91) für den Skalarkern  $S$  führt nach kurzer Rechnung auf die Integralgleichung

$$kS(k) = I_C^Q(k) + I_{VV}^Q(k) + I_{WW}^Q(k) + I_{VQ}^Q(k) + I_{WQ}^Q(k) + I_{VE}^Q(k) + I_{WE}^Q(k), \quad (3.100)$$

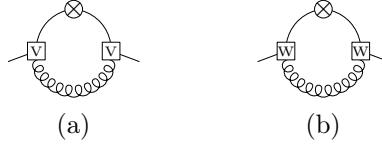
welche wir in Analogie zur BCS-Theorie als (Quark-)Gapgleichung bezeichnen. Während die linke Seite dieser Gleichung ihren Ursprung im Einschleifenbeitrag des freien Dirac-Hamiltonians (3.74) hat, haben wir auf der rechten Seite zur Wahrung einer kompakten Notation Abkürzungen eingeführt, die wir in Kürze erläutern werden.

Zuvor ist es jedoch sinnvoll, der Gapgleichung eine diagrammatische Interpretation zu geben, wozu wir die Funktionalableitung nach  $S$  mit dem Durchschneiden eines Quarkpropagators im Energiediagramm identifizieren. Das führt zur Reduktion der Schleifenzahl, die Gapgleichung ist also lediglich auf Einschleifenniveau, sowie der Entstehung eines *offenen* Diagramms. Für die linke Seite der Gleichung ergibt sich die in Abbildung 3.6 gezeigte graphische Darstellung.





**Abbildung 3.7:** Diagrammatische Darstellung des Beitrags (3.101) der Coulombwechselwirkung zur Quarkgaggleichung.



**Abbildung 3.8:** Diagrammatische Darstellung der Schleifenbeiträge des freien Dirac-Hamiltonians zur Quarkgaggleichung, (a) Gleichung (3.102) und (b) Gleichung (3.103).

Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.100) entspricht dem Beitrag der Coulombwechselwirkung (3.81),

$$I_C^Q(k) = \frac{C_F}{2} \int \bar{d}^3 p V_C(|\mathbf{p}-\mathbf{k}|) P(p) \left[ S(p)(1-S^2(k)) - S(k)(1-S^2(p)) \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right], \quad (3.101)$$

und ist als einziger bei Vernachlässigung der Quark-Gluon-Kopplung ( $V = W = 0$ ) nicht-verschwindend. Seine diagrammatische Darstellung ist in Abbildung 3.7 gegeben. Der zweite und dritte Term auf der rechten Seite,

$$I_{VV}^Q(k) = -\frac{C_F}{2} g^2 \int \bar{d}^3 p \frac{V^2(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p}+\mathbf{k}|)} X(\mathbf{p}, \mathbf{k}) P(p) \\ \times \left\{ kP(k)S(k) \left[ -3 + S^2(k) \right] + pP(p)S(k) \left[ -1 + S^2(p) \right] \right. \\ \left. + kP(k)S(p) \left[ 1 - 3S^2(k) \right] + pP(p)S(p) \left[ 1 - S^2(k) \right] \right\} \quad (3.102)$$

sowie

$$I_{WW}^Q(k) = -\frac{C_F}{2} g^2 \int \bar{d}^3 p \frac{W^2(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p}+\mathbf{k}|)} Y(\mathbf{p}, \mathbf{k}) P(p) \\ \times \left\{ kP(k)S(k) \left[ -3 + S^2(k) \right] + pP(p)S(k) \left[ -1 + S^2(p) \right] \right. \\ \left. - kP(k)S(p) \left[ 1 - 3S^2(k) \right] - pP(p)S(p) \left[ 1 - S^2(k) \right] \right\}, \quad (3.103)$$

entstammen den Zweischleifenanteilen des freien Dirac-Hamiltonians (3.74) und sind in Abbildung 3.8 dargestellt. Der Kopplungsterm liefert die Beiträge

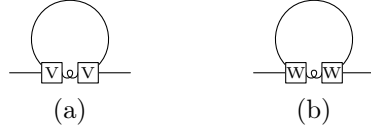
$$I_{VQ}^Q(k) = \frac{C_F}{2} g^2 \int \bar{d}^3 p \frac{V(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p}+\mathbf{k}|)} X(\mathbf{p}, \mathbf{k}) P(p) \left[ S(p)(1-S^2(k)) - 2S(k) \right] \quad (3.104)$$

und

$$I_{WQ}^Q(k) = \frac{C_F}{2} g^2 \int \bar{d}^3 p \frac{W(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p}+\mathbf{k}|)} Y(\mathbf{p}, \mathbf{k}) P(p) \left[ 1 - S^2(k) - 2S(k)S(p) \right] \quad (3.105)$$



**Abbildung 3.9:** Diagrammatische Darstellung der Beiträge des Kopplungsterms zur Quarkgaggleichung, (a) Gleichung (3.104) und (b) Gleichung (3.105).



**Abbildung 3.10:** Diagrammatische Darstellung der Beiträge der kinetischen Energie der Gluonen zur Quarkgaggleichung, (a) Gleichung (3.106) und (b) Gleichung (3.107).

zur Gaggleichung, welche in Abbildung 3.9 diagrammatisch dargestellt sind. Die letzten Beiträge auf der rechten Seite der Gaggleichung (3.100),

$$I_{VE}^Q(k) = \frac{C_F}{2} g^2 S(k) \int d^3 p V^2(\mathbf{p}, \mathbf{k}) X(\mathbf{p}, \mathbf{k}) P(p) \quad (3.106)$$

sowie

$$I_{WE}^Q(k) = \frac{C_F}{2} g^2 S(k) \int d^3 p W^2(\mathbf{p}, \mathbf{k}) Y(\mathbf{p}, \mathbf{k}) P(p), \quad (3.107)$$

entstammen schließlich der kinetischen Energie der transversalen Gluonen (3.83) und besitzen die in Abbildung 3.10 gegebene Darstellung.

Erwartungsgemäß stimmt auch die Gaggleichung (3.100) mit dem Ergebnis unter Verwendung von Dyson–Schwinger-Gleichungen überein [112] und reduziert sich im Limes  $V = W = 0$  auf die Gleichung für einen BCS-Ansatzes [107]. Für  $V \neq 0$ ,  $W = 0$  ergeben sich dagegen signifikante Abweichungen zu dem Resultat aus Referenz [23–25].

### Bestimmungsgleichung des gluonischen Variationskerns

Für den bosonischen Variationskern  $\omega$  ergibt sich aus der Extremalbedingung (3.91) die Gluonaggleichung in Form der Integralgleichung

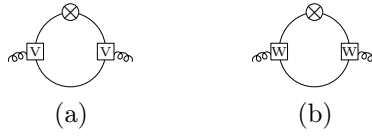
$$\omega^2(k) = \omega_{YM}^2(k) + I_{VV}^{YM}(k) + I_{WW}^{YM}(k) + I_{VQ}^{YM}(k) + I_{WQ}^{YM}(k). \quad (3.108)$$

Dabei bezeichnet

$$\omega_{YM}^2(k) = k^2 + \chi^2(k) + I_T^{YM} + I_C^{YM}(k) \quad (3.109)$$

die rein gluonischen Beiträge des bosonischen Energiefunktionals (3.88) mit dem gluonischen *Tadpole*

$$I_T^{YM} = \frac{2N_C}{3} g^2 \int d^3 p \frac{1}{\omega(p)} \quad (3.110)$$



**Abbildung 3.11:** Diagrammatische Darstellung der Beiträge des freien Dirac-Hamiltonians zur Gluonaggleichung, (a) Gleichung (3.112) und (b) Gleichung (3.113).

sowie dem Coulombterm

$$I_C^{\text{YM}}(k) = \frac{N_C}{4} \int \bar{d}^3 p V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) \left(1 + (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2\right) \frac{(\omega(p) - \chi(p) + \chi(k))^2 - \omega^2(k)}{\omega(p)}. \quad (3.111)$$

Da die übrigen Terme auf der rechten Seite von Gleichung (3.108) fermionischen Ursprungs sind, stimmt Gleichung (3.109) mit der Gluonaggleichung des reinen Yang–Mills-Sektors überein [18, 19, 21].

Die fermionischen Beiträge zur Gluonaggleichung (3.108) entstammen zum einen den Zweischleifenternen des freien Dirac-Hamiltonians (3.74),

$$I_{VV}^{\text{YM}}(k) = 2g^2 \int \bar{d}^3 p V^2(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) X(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) \times p P^2(p) P(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|) \left(1 - S^2(p) + 2S(p)S(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|)\right), \quad (3.112)$$

$$I_{WW}^{\text{YM}}(k) = 2g^2 \int \bar{d}^3 p W^2(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) Y(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) \times p P^2(p) P(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|) \left(1 - S^2(p) - 2S(p)S(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|)\right), \quad (3.113)$$

und zum anderen dem Kopplungsterm (3.75),

$$I_{VQ}^{\text{YM}}(k) = -2g^2 \int \bar{d}^3 p V(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) X(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) \times P(p) P(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|) \left(1 + S(p)S(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|)\right), \quad (3.114)$$

$$I_{WQ}^{\text{YM}}(k) = -2g^2 \int \bar{d}^3 p W(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) Y(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) \times P(p) P(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|) \left(S(p) + S(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|)\right), \quad (3.115)$$

und sind beide im Limes  $V = W = 0$  verschwindend. Bemerkenswerterweise ergibt sich für die Gluonaggleichung (3.108) kein direkter Beitrag aus dem fermionischen Anteil der kinetischen Energie der Gluonen [die letzten beiden Terme in Gleichung (3.83)]. Dieser beeinflusst die Dynamik der Gluonen lediglich indirekt über seinen Beitrag zur Quarkaggleichung (3.100).

Analog zur Quarkaggleichung lassen sich die einzelnen Beiträge zur gluonischen Gleichung diagrammatisch darstellen, indem wir in den Energiediagrammen einen Gluonpropagator aufschneiden. Das impliziert, daß auch die Gluonaggleichung auf Einschleifenniveau ist und liefert für die fermionischen Beiträge (3.112) bis (3.115) die in Abbildung 3.11 und 3.12 gezeigte Darstellung.



**Abbildung 3.12:** Diagrammatische Darstellung der Beiträge des Kopplungsterms zur Gluon-gaugleichung, (a) Gleichung (3.114) und (b) Gleichung (3.115).

Die vollständige Beschreibung des Systems aus Quarks und Gluonen mit Berücksichtigung sämtlicher gegenseitiger Wechselwirkungen (*Unquenching*) würde die numerische Lösung der beiden gekoppelten Integralgleichungen (3.100) für den Skalarern  $S$  sowie (3.108) für den gluonischen Kern  $\omega$  erfordern, während sich die Vektorkerne  $V$  und  $W$  explizit durch  $S$  und  $\omega$  ausdrücken lassen, siehe Gleichung (3.93) sowie (3.97). Obwohl der letzte Punkt bereits eine enorme Vereinfachung mit sich bringt, würde ein solches Vorgehen den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Wir beschränken uns deshalb primär auf die Betrachtung der Dynamik der Quarks, während wir für die Gluonen die Ergebnisse des reinen Yang–Mills-Sektors als Input verwenden werden. Genauer gesagt werden wir den gluonischen Variationskern  $\omega$  durch die Gribovformel (3.21) ersetzen, welche eine sehr gute Approximation des auf dem Gitter berechneten inversen Gluonpropagators der reinen Yang–Mills-Theorie darstellt. Dadurch verlieren wir zwar die Beschreibung der durch die Rückkopplung der Quarks an die Gluonen verursachten Effekte, allerdings reduziert sich der numerische Aufwand erheblich, da lediglich die Quarkgleichung (3.100) zu lösen bleibt. Dabei werden wir das Farb-Coulombpotential (3.13) durch die Summe seines (farb-einschließenden) IR- sowie (Coulomb-artigen) UV-Limes [siehe Gleichung (3.22)] ersetzen,

$$V_C(r) = -\sigma_C r + \frac{\alpha_S}{r} = V_C^{\text{IR}}(r) + V_C^{\text{UV}}(r), \quad (3.116)$$

woraus sich im Impulsraum die Darstellung

$$V_C(p) = \frac{8\pi\sigma_C}{p^4} + \frac{4\pi\alpha_S}{p^2} = V_C^{\text{IR}}(p) + V_C^{\text{UV}}(p) \quad (3.117)$$

ergibt. Die numerische Behandlung des Coulombpotentials im Rahmen des Variationszuges zeigt, daß Gleichung (3.116) eine gute Näherung an dessen tatsächlichen Verlauf darstellt, siehe Referenz [22]. Die Verwendung des Potentials (3.116) ist eine Erweiterung des Vorgehens früherer Arbeiten, in denen lediglich der IR-Anteil von (3.116) verwendet wurde [23–25, 107]. Dieser ist zwar für niederenergetische Effekte, also insbesondere Farbeinschluß und chirale Symmetriebrechung, dominant, jedoch zeigt die UV-Analyse im folgenden Abschnitt, daß die Berücksichtigung des UV-Anteils eine wesentliche Rolle bei der Aufhebung divergender Faktoren in der Quarkgleichung (3.100) spielt.

### 3.3.2 UV- und IR-Analyse

#### Quarkgleichung

Eine numerische Lösung ist nur sinnvoll, sofern die Quarkgleichung (3.100) endlich ist. Da das Auftreten von Divergenzen in Quantenfeldtheorien üblich ist, haben wir davon auszugehen, daß dies a priori nicht der Fall ist und wir deshalb erst die Divergenzen isolieren und eine geeignete Form der Renormierung durchführen müssen.

In der Integralgleichung (3.100) können Divergenzen auf zweierlei Arten entstehen: Entweder durch Polstellen eines Integranden bei endlichen Werten des *Schleifenimpulses*  $\mathbf{p}$  (IR-Divergenz) oder durch einen bei großen Schleifenimpulsen nicht hinreichend schnell abfallenden Integranden (UV-Divergenz). Die einzige mögliche Quelle für IR-Divergenzen ist der Beitrag der Coulombwechselwirkung (3.101), welcher bei Übereinstimmung von Schleifen- und *äußerem Impuls*,  $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ , eine Nennernullstelle aufweist. Eine Taylorentwicklung des restlichen Integranden um die Nennernullstelle zeigt, daß dieser Pol hebbar ist, d.h. der restliche Integrand verschwindet für  $\mathbf{p} = \mathbf{k}$  hinreichend schnell um den Pol zu kompensieren.

Die UV-Analyse der Gapgleichung (3.100) wird in Anhang D.1 erläutert und liefert das folgende Ergebnis: Sämtliche Schleifenintegrale auf der rechten Seite von Gleichung (3.100) weisen lineare sowie logarithmische UV-Divergenzen auf. Die einzige Ausnahme bildet der Coulombterm (3.101), welcher lediglich logarithmisch divergiert, wobei die Divergenzen allein durch den UV-Anteil des Potentials (3.117) verursacht werden. Addiert man die UV-divergenten Faktoren der einzelnen Integrale, so findet man, daß sich sowohl die linearen als auch die logarithmischen Divergenzen *exakt* kompensieren – die Quarkgapgleichung ist also ohne Renormierung endlich. Da diese Eigenschaft im Limes  $g \rightarrow 0$  erhalten bleibt, trifft das auch auf die in [107–109] betrachtete Gapgleichung zu. Man beachte dabei, daß im Limes  $g \rightarrow 0$  auch der UV-Anteil des nichtabelschen Coulombpotentials (3.117) verschwindet.

Die gegenseitige Kompensation der linearen UV-Divergenzen ist eine direkte Folge der Berücksichtigung des – verglichen mit früheren Arbeiten zusätzlichen – Vektorkerns  $W$  und findet ohne diesen nicht statt, siehe Anhang D. Die sich darüber hinaus ergebende Aufhebung der logarithmischen Divergenzen hängt sowohl mit der Berücksichtigung von  $W$ , als auch mit derjenigen des UV-Anteils des Farb-Coulombpotentials (3.117) zusammen. Das bedeutet, daß der Beitrag des UV-Potentials in der Gapgleichung von derselben Größenordnung sein muß wie die Beiträge der die Quark-Gluon-Kopplung beschreibenden Vektorkerne  $V$  und  $W$  – andernfalls könnten sich die Divergenzen nicht gegenseitig heben. Die Einbeziehung von  $W$  stellt folglich nicht nur eine qualitative, sondern eine quantitative Verbesserung des Wellenfunktionals dar und gibt Veranlassung, ein solches Funktional auch im Variationszugang unter Verwendung von Dyson–Schwinger-Gleichungen einzusetzen [112]. Daß unter Einbeziehung von  $V_C^{\text{UV}}$  zusätzlich die logarithmischen UV-Divergenzen entfallen ist jedoch sicher ein glücklicher Zufall welcher bei Verwendung weiterer Diracstrukturen im Quarkanteil des Wellenfunktionals nicht länger auftreten dürfte.

An dieser Stelle weisen wir darauf hin, daß der UV-Anteil des Coulombpotentials (3.117) in der Veröffentlichung [95] das falsche Vorzeichen besitzt, wodurch sich dort die UV-Divergenzen in der Quarkgapgleichung nicht aufheben. Dieser Fehler wurde leider erst später bemerkt und in [96] korrigiert.

### Statischer Quarkpropagator und chirales Kondensat

Das IR-Verhalten des statischen Quarkpropagators (3.58) bereitet keinerlei Schwierigkeiten und sein UV-Verhalten läßt sich analog zu dem der Gapgleichung (3.100) untersuchen, siehe Anhang D. Dabei ergibt sich für die Schleifenbeiträge (3.59), (3.60) des Propagators

$$I_\alpha(p) = \frac{C_F g^2}{8\pi^2} \left(1 - S^2(p)\right) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \text{endliche Terme} \quad (3.118)$$

sowie

$$I_\beta(p) = \frac{C_F g^2}{8\pi^2} S(p) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \text{endliche Terme.} \quad (3.119)$$

Hier bezeichnet  $\Lambda$  den *UV-Cutoff*, eine obere Integrationsgrenze, welche wir einführen müssen um den Grad der Divergenz bestimmen zu können und  $\mu$  eine willkürliche Energie- bzw. Impulsskala, die zur Erlangung dimensionsloser Ausdrücke vonnöten ist (vgl. Anhang D). Im Gegensatz zur Gapgleichung führt die Berücksichtigung des Vektorkerns  $W$  im Propagator zu keiner Kompensation von UV-Divergenzen.

Der divergente Schleifenterm  $I_\beta$  (3.60) des Propagators führt zu UV-Divergenzen in den Zweischleifenbeiträgen des Quarkkondensats (3.71). Deren formale Aufhebung bedarf der Renormierung des betrachteten Modells, beispielsweise über die Einführung von Renormierungsfaktoren in Quark-, Geist- und Gluonfeldern sowie Vertizes.<sup>49</sup> Allerdings sollten die Effekte einer solchen Renormierung der Wellenfunktion verglichen mit dem (nicht-perturbativen) Beitrag führender Ordnung zum Quarkkondensat eher gering sein und vor allem zum Auftreten anomaler Dimensionen führen. Angesichts der erwarteten Komplexität der Renormierung verzichten wir in der vorliegenden Arbeit auf deren Durchführung und überlassen sie als Gegenstand zukünftiger Forschung.<sup>50</sup> Wir beschränken den statischen Propagator (3.58) stattdessen auf seinen führenden Anteil

$$G_{\text{LO}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} P(p) \left[ \left(1 - S^2(p)\right) \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + 2S(p)\beta \right] = \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta M(p)}{2E(p)} \quad (3.120)$$

mit der Massenfunktion (3.67)

$$M(p) = \frac{2pS(p)}{1 - S^2(p)}, \quad (3.121)$$

der Quasiteilchenenergie (3.69)

$$E(p) = \sqrt{p^2 + M^2(p)} \quad (3.122)$$

sowie dem Feldrenormierungsfaktor (3.68)  $Z = 1$ . Der Propagator (3.120) besitzt, ebenso wie das daraus resultierende Quarkkondensat (3.71)

$$\langle \bar{\Psi}^m(\mathbf{x}) \Psi^m(\mathbf{x}) \rangle = -2N_C \int \mathrm{d}^3 p \frac{M(p)}{E(p)} = -4N_C \int \mathrm{d}^3 p P(p) S(p) \quad (3.123a)$$

$$= -\frac{N_C}{\pi^2} \int \mathrm{d}p p^2 \frac{M(p)}{E(p)} = -\frac{2N_C}{\pi^2} \int \mathrm{d}p p^2 P(p) S(p), \quad (3.123b)$$

dieselbe Gestalt wie bei Verwendung eines reinen BCS-Wellenfunktionals, siehe Gleichung (3.70). Die Berücksichtigung von Quark-Gluon-Kopplung und UV-Anteil des Coulombpotentials schlägt sich im chiralen Kondensat daher nur implizit durch die Lösung der vollen Gapgleichung (3.100) nieder.

Die Betrachtung von Propagator bzw. Quarkkondensat in führender Ordnung stellt eine gewisse Inkonsistenz zum verwendeten Energiefunktional auf Zweischleifenniveau dar. Das

<sup>49</sup>Counterterme zum Hamiltonian beeinflussen den Quarkpropagator dagegen nicht und wären deshalb voraussichtlich nicht hilfreich.

<sup>50</sup>Tatsächlich fehlt nach wie vor ein strenger Beweis der Renormierbarkeit der QCD in Coulombbeichung.

ist der Preis, den wir zu entrichten haben um auf eine Renormierung des Felder verzichten zu können. Entfernt man die (bekannten) divergenten Beiträge zum Quarkkondensat (3.71) in einem minimalen Abzugsschema von Hand und verwendet die numerische Lösung der Massenfunktion aus Abschnitt 3.4, so sind die Effekte durch den Zweischleifenterm des Kondensats tatsächlich recht gering (nach Ziehen der dritten Wurzel einige Prozent). Angesichts der Fehler durch Vernachlässigung von Rückkopplungseffekten sowie sonstiger Approximationen ist das – zumal in einer ersten Betrachtung des Ansatzes – akzeptabel.

Im Folgenden werden wir häufig Ausdrücke in Abhängigkeit der Massenfunktion (3.121) verwenden. In Anmerkung 3.3.2 sind daher einige für Umformungen hilfreiche Relationen bezüglich des Skalarkerns  $S$  angegeben.

*Anmerkung 3.3.2:* Umformungen Massenfunktion  $\leftrightarrow$  Skalarkern

$$\begin{aligned}
S(p) &= \frac{E(p) - p}{M(p)} & P(p)(1 - S^2(p)) &= \frac{p}{E(p)} \\
1 - S^2(p) &= \frac{2p}{E(p) + p} & 2P(p)S(p) &= \frac{M(p)}{E(p)} \\
1 + S^2(p) &= \frac{2E(p)}{E(p) + p} & \frac{2S(p)}{1 - S^2(p)} &= \frac{M(p)}{p} \\
P(p) &= \frac{E(p) + p}{2E(p)} & \frac{2p}{1 - S^2(p)} &= \frac{M^2(p)}{E(p) - p}
\end{aligned}$$

### Besetzungszahlen

Die Unterschiede zwischen Diracsee (3.28) und dem durch das Wellenfunktional (3.30) gegebenen Vakuumzustand machen sich besonders an den *Besetzungszahlen* von Quark- und Antiquarkzuständen bemerkbar. Deren Bestimmung bedarf für gewöhnlich der Renormierung der Quarkfelder, da nicht-renormierte Felder i.A. unphysikalischen Zuständen entsprechen. Wir setzen deshalb

$$\Psi^m(\mathbf{x}) = \sqrt{Z} \tilde{\Psi}^m(\mathbf{x}) \quad (3.124)$$

mit dem Feldrenormierungsfaktor (3.68) und gehen davon aus, daß die renormierten Felder  $\tilde{\Psi}$  den physikalischen Antikommutationsrelationen

$$\left\{ \tilde{\Psi}_i^m(\mathbf{x}), \tilde{\Psi}_j^{n\dagger}(\mathbf{y}) \right\} = \delta_{ij} \delta^{mn} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \left\{ \tilde{\Psi}_i^m(\mathbf{x}), \tilde{\Psi}_j^n(\mathbf{y}) \right\} = 0 \quad (3.125)$$

genügen, womit für die nicht-renormierten Felder

$$\left\{ \Psi_i^m(\mathbf{x}), \Psi_j^{n\dagger}(\mathbf{y}) \right\} = Z \delta_{ij} \delta^{mn} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \left\{ \Psi_i^m(\mathbf{x}), \Psi_j^n(\mathbf{y}) \right\} = 0 \quad (3.126)$$

gilt. Analog ergibt sich für die renormierten Erzeuger- und Vernichtoperatoren von (Anti-)Quarkzuständen

$$a^{s,m(\dagger)}(\mathbf{p}) = \sqrt{Z} \tilde{a}^{s,m(\dagger)}(\mathbf{p}), \quad b^{s,m(\dagger)}(\mathbf{p}) = \sqrt{Z} \tilde{b}^{s,m(\dagger)}(\mathbf{p}). \quad (3.127)$$

Im Zuge der Beschränkung des Quarkpropagators auf seine führende Ordnung (3.120) wird der Feldrenormierungsfaktor zu  $Z = 1$ , sodaß die ursprünglichen Feldoperatoren mit den Renormierten übereinstimmen. Für die physikalischen Besetzungszahlen folgt aus den Erwartungswerten von Erzeuger-/Vernichterpaaren<sup>51</sup> [siehe z.B. Gleichung (B.37)]

$$\langle \tilde{a}^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) \tilde{a}^{s,m}(\mathbf{p}) \rangle = \langle a^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) a^{s,m}(\mathbf{p}) \rangle = \delta^3(0) P(p) S^2(p) \quad (3.128)$$

und

$$\langle \tilde{b}^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) \tilde{b}^{s,m}(\mathbf{p}) \rangle = \langle b^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) b^{s,m}(\mathbf{p}) \rangle = \delta^3(0) P(p) S^2(p). \quad (3.129)$$

Dabei wird auf der linken Seite von Gleichung (3.128), (3.129) weder über Spin-, noch über Farbindices summiert und auch nicht integriert. Der auf der rechten Seite auftretende Volumenfaktor  $\delta^3(0)$  impliziert die Divergenz der Besetzungszahlen, was für ein unendliches Volumen (3.73) nicht weiter überraschend ist. Jedoch sind die *Dichten* der besetzten Zustände, welche sich nach Division durch  $\delta^3(0)$  ergeben, endlich. Daß die Besetzungszahlen von Quark- und Antiquarkzuständen übereinstimmen war aufgrund des gewählten Wellenfunktionals mit Quark–Antiquark-Anregungen zu erwarten.

### Gluongapgleichung

Obwohl wir in dieser Arbeit die numerische Lösung der Gluonapgleichung (3.108) außen vor lassen, geben wir der Vollständigkeit halber ihre divergente Struktur an. An den Divergenzen des Yang–Mills-Anteils (3.109) ergeben sich im Vergleich zu früheren Arbeiten des Yang–Mills-Sektors [18, 19, 21] keine Änderungen, während für die fermionischen Beiträge, Gleichung (3.112) bis (3.115),

$$I_{VV}^{\text{YM}}(k) + \dots + I_{WQ}^{\text{YM}}(k) = -\frac{g^2}{6\pi^2} \left[ \Lambda^2 - \frac{1}{2} (\omega^2(k) + k^2) \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right] + \text{endliche Terme} \quad (3.130)$$

gilt. Der Skalarkern  $S$  geht nicht in den divergenten Anteil des fermionischen Beitrags ein, welcher daher mit dem störungstheoretischen Limes  $S \rightarrow 0$  übereinstimmt. Die quadratische Divergenz in Gleichung (3.130) läßt sich wie im reinen Yang–Mills-Sektor durch Abzug an einem Renormierungspunkt bzw. Einführen von Countertermen zum Hamiltonian entfernen [114]. Die Behebung der in der Yang–Mills-Gapgleichung (3.109) nicht enthaltenen logarithmischen Divergenz<sup>52</sup> erfordert dagegen eine Erweiterung der bisherigen Methodik, was über die Ziele dieser Arbeit hinausgeht.

### 3.3.3 Gapgleichung in der Massenfunktion

Die numerische Lösung der Gapgleichung (3.100) läßt sich einfacher durchführen, wenn wir sie in Abhängigkeit der Massenfunktion (3.121) darstellen. Unter Verwendung der in Anmerkung 3.3.2 gegebenen Relationen folgt

$$M(k) = \mathcal{I}_C^Q(k) + \mathcal{I}_{VV}^Q(k) + \mathcal{I}_{WW}^Q(k) + \mathcal{I}_{VQ}^Q(k) + \mathcal{I}_{WQ}^Q(k) + \mathcal{I}_{VE}^Q(k) + \mathcal{I}_{WE}^Q(k), \quad (3.131)$$

<sup>51</sup>Alternativ lassen sich die Besetzungszahlen auch direkt aus dem Propagator (3.120) ableiten.

<sup>52</sup>Im Yang–Mills-Sektor tritt lediglich eine logarithmische Divergenz  $\sim k^2 \ln(\Lambda/\mu)$  auf; die Divergenz  $\sim \omega^2(k) \ln(\Lambda/\mu)$  fehlt hingegen.



wobei die Schleifenbeiträge auf der rechten Seite durch

$$\mathcal{I}_C^Q(k) = \frac{C_F}{2} \int \bar{d}^3 p V_C(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|) \frac{M(p) + M(k) \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{k^2}}{E(p)}, \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{VV}^Q(k) = & -\frac{C_F}{2} g^2 \int \bar{d}^3 p \frac{V^2(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|)} X(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \left\{ -\frac{E(p) + p}{2E(p)} M(k) \frac{E(k) + 2k}{E(k)} \right. \\ & - p^2 \frac{E(p) + p}{2E^2(p)} \frac{M(k)}{k} + \frac{M(p)}{2E(p)} \frac{E(k) + k}{E(k)} [-E(k) + 2k] \\ & \left. + p M(p) \frac{E(p) + p}{2E^2(p)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{WW}^Q(k) = & -\frac{C_F}{2} g^2 \int \bar{d}^3 p \frac{W^2(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|)} Y(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \left\{ -\frac{E(p) + p}{2E(p)} M(k) \frac{E(k) + 2k}{E(k)} \right. \\ & - p^2 \frac{E(p) + p}{2E^2(p)} \frac{M(k)}{k} - \frac{M(p)}{2E(p)} \frac{E(k) + k}{E(k)} [-E(k) + 2k] \\ & \left. - p M(p) \frac{E(p) + p}{2E^2(p)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$\mathcal{I}_{VQ}^Q(k) = \frac{C_F}{2} g^2 \int \bar{d}^3 p \frac{V(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|)} X(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \left[ \frac{M(p)}{E(p)} - \frac{E(p) + p}{E(p)} \frac{M(k)}{k} \right], \quad (3.135)$$

$$\mathcal{I}_{WQ}^Q(k) = \frac{C_F}{2} g^2 \int \bar{d}^3 p \frac{W(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|)} Y(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \left[ \frac{E(p) + p}{E(p)} - \frac{M(p)}{E(p)} \frac{M(k)}{k} \right], \quad (3.136)$$

$$\mathcal{I}_{VE}^Q(k) = \frac{C_F}{2} g^2 \frac{M(k)}{k} \int \bar{d}^3 p V^2(\mathbf{p}, \mathbf{k}) X(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \frac{E(p) + p}{2E(p)} \quad (3.137)$$

sowie

$$\mathcal{I}_{WE}^Q(k) = \frac{C_F}{2} g^2 \frac{M(k)}{k} \int \bar{d}^3 p W^2(\mathbf{p}, \mathbf{k}) Y(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \frac{E(p) + p}{2E(p)} \quad (3.138)$$

gegeben sind. Der Ursprung der einzelnen Terme (3.132)-(3.138) geht aufgrund der gewählten Notation eindeutig aus den Schleifenbeiträgen der ursprünglichen Gapgleichung (3.100) hervor, siehe Gleichung (3.101)-(3.107). Für die Vektorkerne (3.93), (3.97) gilt dabei

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1 + \frac{E(p)-p}{M(p)} \frac{E(q)-q}{M(q)}}{\frac{p^2}{E(p)} \left[ 1 + \frac{M(p)}{p} \frac{E(q)-q}{M(q)} \right] + \frac{q^2}{E(q)} \left[ 1 + \frac{M(q)}{q} \frac{E(p)-p}{M(p)} \right] + \omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} \quad (3.139)$$

und

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\frac{E(p)-p}{M(p)} + \frac{E(q)-q}{M(q)}}{\frac{p^2}{E(p)} \left[ 1 - \frac{M(p)}{p} \frac{E(q)-q}{M(q)} \right] + \frac{q^2}{E(q)} \left[ 1 - \frac{M(q)}{q} \frac{E(p)-p}{M(p)} \right] + \omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)}. \quad (3.140)$$

Wir weisen darauf hin, daß die Umformung der Gapgleichung in  $S$  (3.100) zur Gapgleichung in  $M$  (3.131) exakt ist, d.h. beide Gleichungen sind völlig äquivalent, obwohl die Massenfunktion (3.121) aus dem Propagator in führender Ordnung (3.120) hervorgeht und daher nur der führenden Ordnung der vollen Massenfunktion (3.67) entspricht.

Durch analytische Betrachtungen lassen sich einige Aussagen über die Lösung der Quarkgapgleichung (3.100) bzw. (3.131) treffen: Eine Analyse des IR-Verhaltens der Gleichung

(3.100) mittels Skalierungsargumenten (siehe Anhang E) legt nahe, daß der IR-Limes des Skalarkerns  $S(p \rightarrow 0)$  eine von null verschiedene Konstante ist. Damit ist die *Infrarotmasse*

$$m = \lim_{p \rightarrow 0} M(p) \quad (3.141)$$

entweder null (für  $S(0) \neq 1$ ) oder konstant (für  $S(0) = 1$ ), siehe Gleichung (3.121). Im *Adler-Davis-Fall* ( $g = 0$ ) läßt sich unmittelbar auf  $S(0) = 1$  – d.h.  $m > 0$  – schließen, was die Identifikation mit einer Konstituentenmasse prinzipiell erlauben würde. Für  $g > 0$  ist die Sachlage weniger klar, da in Gleichung (3.100) für  $S(0) = 1$  nicht-verschwindende Terme auftreten. Diese manifestieren sich in Gleichung (3.131) durch Divergenzen im Limes  $k \rightarrow 0$  falls  $m > 0$  ist, siehe z.B. Gleichung (3.138). Die numerische Lösung wird zeigen, daß sich diese Divergenzen gegenseitig kompensieren und auch für  $g > 0$  eine endliche Infrarotmasse  $m > 0$  realisiert ist.

Das UV-Verhalten der Lösung der Gapgleichung (3.100) bzw. (3.131) läßt sich im Fall  $g = 0$  mithilfe der Winkelnäherung untersuchen, siehe Anhang E. Das Ergebnis legt ein Verschwinden der Massenfunktion  $M(p) \sim p^{-4}$  nahe, wie es in früheren Arbeiten [23, 115] ohne Beweis berichtet wurde. Im Fall  $g > 0$  ist eine Untersuchung selbst in Winkelnäherung schwierig, die numerische Lösung wird zeigen, daß sich der Abfall der Massenfunktion verglichen mit  $g = 0$  verlangsamt.

Vor der numerischen Lösung der Gapgleichung (3.131) stellt sich die Frage, wie die Kopplungskonstante  $g$ , die bis auf den IR-Anteil des Coulombterms in sämtliche Schleifenterme eingeht, behandelt werden muß. Die naheliegendste Möglichkeit bestünde darin, die Kopplung aus dem reinen Yang-Mills-Sektor zu übernehmen. Das läßt sich aber nicht realisieren: Da der Beitrag der Coulombwechselwirkung zur reinen Yang-Mills-Gapgleichung (3.109) vernachlässigt werden kann und der Tadpole infolge der Renormierung verschwindet [88], sind sowohl die Gapgleichung (3.109) als auch die Gribovformel (3.21) unabhängig von der Kopplung  $g$ . Alternativ ließe sich  $g$  eventuell mit der in Referenz [22] anhand der Nicht-Renormierbarkeit des Geist-Gluon-Vertexes bestimmten laufenden Kopplung an der physikalischen Skala der Yang-Mills-Theorie – d.h. der Coulomb-Stringtension  $\sigma_C$  – identifizieren. Ohne explizite Berechnung ist aber nicht klar, ob  $g$  völlig identisch mit der in den Quark-Gluon-Vertex eingehenden Kopplung ist, weshalb dieses Vorgehen illegitim sein könnte. Zudem wurden die Berechnungen in Referenz [22] lediglich für die Eichgruppe  $SU(2)$  durchgeführt und lassen sich eventuell nicht einfach auf die Gruppe  $SU(3)$  übertragen.<sup>53</sup> Wir wählen daher eine alternative Herangehensweise indem wir die Kopplung  $g$  als freien Parameter ansehen, welchen wir durch Anpassen des chiralen Kondensats (3.123) an den phänomenologischen Wert [56]

$$\langle \bar{\Psi}^m(\mathbf{x}) \Psi^m(\mathbf{x}) \rangle_{\text{ph}} = (-235 \text{ MeV})^3, \quad (3.142)$$

vgl. Gleichung (2.95), fixieren.

## 3.4 Numerische Ergebnisse

### 3.4.1 Anmerkungen zur Lösung der Gapgleichung

Unter Vernachlässigung von Quark-Gluon-Kopplung und UV-Anteil des Coulombpotentials ( $g = 0$ ) stimmt die Gapgleichung (3.131) mit der in früheren Arbeiten betrachteten

<sup>53</sup>In Abschnitt 3.5.1 werden wir auf diesen Punkt nochmals eingehen und einen Vergleich zwischen der laufenden Kopplung aus [22] und dem verwendeten Wert von  $g$  vornehmen.

überein, siehe z.B. Referenz [108, 109, 115]. Das dort zur numerischen Lösung der Gleichung verwendete Schema beruht auf der Umschreibung der Gapgleichung in die Verhältnisform

$$M(k) = \frac{\frac{C_F}{2} \int \bar{d}^3 p V_C^{\text{IR}}(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|) \frac{M(p)}{E(p)}}{1 - \frac{C_F}{2} \int \bar{d}^3 p V_C^{\text{IR}}(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|) \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{k^2 E(p)}}, \quad (3.143)$$

siehe Referenz [115] für eine detaillierte Erläuterung. Dabei sind sowohl die Schleife im Nenner, als auch die im Zähler für  $\mathbf{p} + \mathbf{k} = 0$  IR-divergent. Durch Bildung des Verhältnisses ergibt sich für die Massenfunktion auf der linken Seite dennoch ein endlicher Wert. Die Übertragung dieses Schemas auf die volle Gleichung (3.131) impliziert die Betrachtung von

$$M(k) = \frac{\frac{C_F}{2} \int \bar{d}^3 p V_C^{\text{IR}}(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|) \frac{M(p)}{E(p)} + \mathcal{I}_C^{\text{Q,UV}}(k) + \mathcal{I}_{VV}^{\text{Q}}(k) + \mathcal{I}_{WW}^{\text{Q}}(k) + \dots}{1 - \frac{C_F}{2} \int \bar{d}^3 p V_C^{\text{IR}}(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|) \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{k^2 E(p)}}. \quad (3.144)$$

Da die Summe der Schleifenbeiträge  $\mathcal{I}_C^{\text{Q,UV}}(k) + \mathcal{I}_{VV}^{\text{Q}}(k) + \mathcal{I}_{WW}^{\text{Q}}(k) + \dots$  im Zähler endlich ist, würden diese Terme durch den IR-divergenten ersten Term unterdrückt werden und keinen Beitrag liefern. Die Verwendung des Lösungsschemas aus Referenz [108, 109, 115] ist für die volle Gleichung also nicht möglich.

Zur numerischen Lösung der Gapgleichung (3.131) führen wir zunächst die Variablen-substitution  $\mathbf{p} + \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{q}$  durch, welche die numerische Behandlung der scheinbaren IR-Singularität von  $\mathcal{I}_C^{\text{Q}}$  [Gleichung (3.132)] bei  $\mathbf{p} + \mathbf{k} = 0$  erleichtert.<sup>54</sup> Nach der anschließenden Einführung sphärischer Koordinaten für  $\mathbf{q}$  wird die Integration über den Azimutwinkel  $\varphi_q$  trivial und liefert einen globalen Faktor von  $2\pi$  während wir für den Polarwinkel  $\vartheta_q$  die Substitution  $z = \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \cos \vartheta_q$  vornehmen. Die verbleibenden Integrationen über  $z$  sowie  $q = |\mathbf{q}|$  werden mit Gauß–Legendre-Quadratur ausgeführt, wobei für die  $q$ -Integration sowohl ein IR- ( $\kappa$ ) als auch ein UV-Cutoff ( $\lambda$ ) eingeführt werden müssen. Der IR-Cutoff dient gleichzeitig als Regulator für die scheinbare IR-Divergenz von  $\mathcal{I}_C^{\text{Q}}$ .

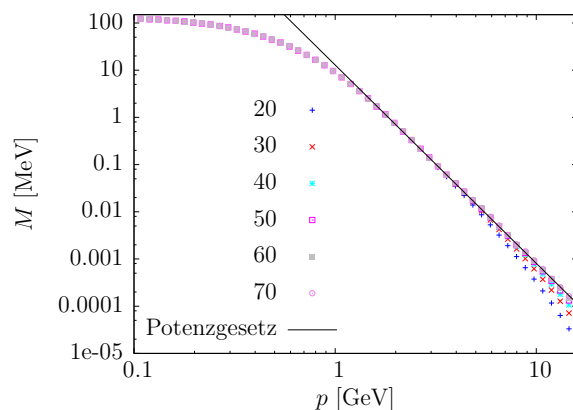
Die Ausführung numerischer Integrationen ist nur in dimensionslosen Einheiten möglich, wozu sämtliche dimensionsbehaftete Größen der Gapgleichung (3.131) bezüglich einer Impuls- bzw. Energieskala  $\mu$  ausgedrückt werden müssen. Es bietet sich an, diese mit der Coulomb-Stringtension  $\sigma_C$  zu identifizieren, welche als einzige dimensionsbehaftete physikalische Größe in die Gapgleichung eingeht: In Abschnitt 3.1.2 hatten wir bereits gesehen, daß die Coulomb-Stringtension die dimensionale Skala des Yang–Mills-Sektors darstellt.<sup>55</sup> Da die Gluonen die durch das Farb-Coulombpotential (3.117) beschriebene starke Wechselwirkung zwischen den Quarks vermitteln, überträgt sich diese Skala auch auf den Quarksektor. Obwohl die physikalische Skala durch die Coulomb-Stringtension gegeben ist, wurde in Referenz [115] aus praktischen Gründen

$$\mu = \sqrt{C_F \sigma_C}, \quad (3.145)$$

gewählt, da dies sowohl die Coulomb-Stringtension als auch den Casimirkfaktor  $C_F$  aus der dimensionslosen Form der Gapgleichung entfernt. Wir verwenden ebenfalls Gleichung (3.145), geben aber sämtliche relevanten Resultate in physikalischen Einheiten an.

<sup>54</sup>Für die numerische Behandlung betrachten wir die rechte Seite von Gleichung (3.131) als eine Schleife. Sämtliche beschriebene Operationen beziehen sich deshalb auf die gesamte Gleichung.

<sup>55</sup>Auch die Gribovmasse ist mit  $\sigma_C$  verbunden, siehe Gleichung (3.25).



**Abbildung 3.13:** Numerische Lösung der Gapgleichung (3.131) bei  $g = 0$  für verschiedene Stützstellenzahlen der  $z$ -Integration (siehe Legende). Die durchgezogene Linie ist ein an die Lösung für 20 Stützstellen im Bereich  $1.7 \text{ GeV} < p < 3.0 \text{ GeV}$  angeftteter Potenzansatz. Darstellung in physikalischen Einheiten und logarithmischer Skalierung.

Die Coulomb-Stringtension bestimmt als Skala den Wert aller im betrachteten Modell berechneter physikalischer Größen, also z.B. des chiralen Kondensats oder der kritischen Temperaturen. Für diese Arbeit verwenden wir den Wert

$$\sigma_C = 2.5\sigma = 2.5 \cdot (440 \text{ MeV})^2 \quad (3.146a)$$

$$\sqrt{\sigma_C} \approx 696 \text{ MeV} \quad (3.146b)$$

mit der Wilson-Stringtension  $\sigma = (440 \text{ MeV})^2$ , welcher in Referenz [94] numerisch auf einem  $32^3$  (Raum)  $\times$  128 (Euklidische Zeit) Gitter bestimmt wurde. Allgemein läßt sich der Wert der Coulomb-Stringtension in Gitterrechnungen sowohl für  $SU(2)$  als auch für  $SU(3)$  nur ungenau fixieren. Dabei zeigen bestehende Rechnungen, daß  $\sigma_C$  mit wachsender Gittergröße sowie verbesserter Güte der Eichfixierung abnimmt. So wurde in Referenz [116] auf einem  $48^3 \times 192$  Gitter der Wert  $\sigma_C \approx 1.74\sigma$  ermittelt, während sich in Referenz [117] mit einer vergleichbaren Gittergröße von  $48^4$  der Wert  $\sigma_C \approx (1.6 \pm 0.2)\sigma$  ergab. Ein recht großer Wert von  $\sigma_C \approx 4\sigma$  wurde – vermutlich bedingt durch das kleinere  $24^4$  Gitter – in [118] gefunden. In der früheren Arbeit [119] wurde auf einem noch kleineren Gitter der Wert  $\sigma_C \approx 3\sigma$  bestimmt. Daneben könnte die Coulomb-Stringtension durch Rückkopplungseffekte der Quarks auf die Gluonen beeinflusst werden. Die Auswirkungen davon sollten jedoch gering sein, da sich Abschirmungseffekte der Gluonen nicht im Farb-Coulombpotential widerspiegeln. Diese müßten extra eingefügt werden um das Coulombpotential in ein physikalisches Quarkpotential zu verwandeln [118]. Generell sei bemerkt, daß das in der vorliegenden Arbeit betrachtete Modell für beliebige Werte der Coulomb-Stringtension (in einem vernünftigen Rahmen  $\sigma_C \lesssim 4.5\sigma$ ) anwendbar ist und die Fixierung auf einen anderen Wert als (3.146) zu keinen qualitativen Änderungen führt.

Die mit dem oben beschriebenen Schema gefundene numerische Lösung der Gapgleichung (3.131) ist für Cutoffs in einem physikalisch sinnvollen Bereich ( $\kappa > 0.8 \text{ MeV}$ ,  $\lambda < 16 \text{ GeV}$ ) stabil. Es zeigt sich aber, daß sich die Anzahl der Stützstellen der  $z$ -Integration als zweite Skala – neben der durch die Coulomb-Stringtension gegebenen physikalischen Skala – in der Lösung für die Massenfunktion niederschlägt. Das läßt sich in Abbildung

3.13 erkennen, in der die Lösung der Gapgleichung für  $g = 0$  für verschiedene Stützstellenzahlen in einer doppelt-logarithmischen Skalierung dargestellt ist. Im UV gehorcht die Lösung nur bis zu einem kritischen Impuls einem Potenzgesetz und knickt darüber ab. Die Erhöhung der Stützstellenzahl führt zu einer Verschiebung des kritischen Impulses zu höheren Werten. Das Auftreten eines solchen Verhaltens ist ein numerisches Artefakt des verwendeten Lösungsverfahrens und läßt sich in ähnlicher Form für  $g > 0$  beobachten (allerdings zeigt dort die Erhöhung der Stützstellenzahl weniger Wirkung). Um den numerischen Aufwand möglichst gering zu halten, werden wir die numerische Lösung nur für eine moderate Stützstellenzahl der  $z$ -Integration (meist 30) berechnen und das UV-Verhalten der Massenfunktion bestimmen, indem wir es durch einen Potenzansatz fitten. Wie in Abbildung 3.13 erkennbar, liefert dieses Vorgehen eine angemessene Beschreibung von  $M(p)$ .

Im Fall  $g = 0$  läßt sich die Integration über den Polarwinkel analytisch nehmen, vgl. Anmerkung 3.4.1, auch wenn dies in Referenz [108, 109, 115] nicht getan wurde. Für die volle Gapgleichung (3.131) mit  $g > 0$  ist die Ausführung der Integration lediglich in bestimmten Termen möglich und verbietet sich im Sinne der Gleichbehandlung aller Schleifenbeiträge.

*Anmerkung 3.4.1:* Explizite Ausführung der Winkelintegration  
Die Gapgleichung (3.131) hat im Limes  $g = 0$  die Gestalt

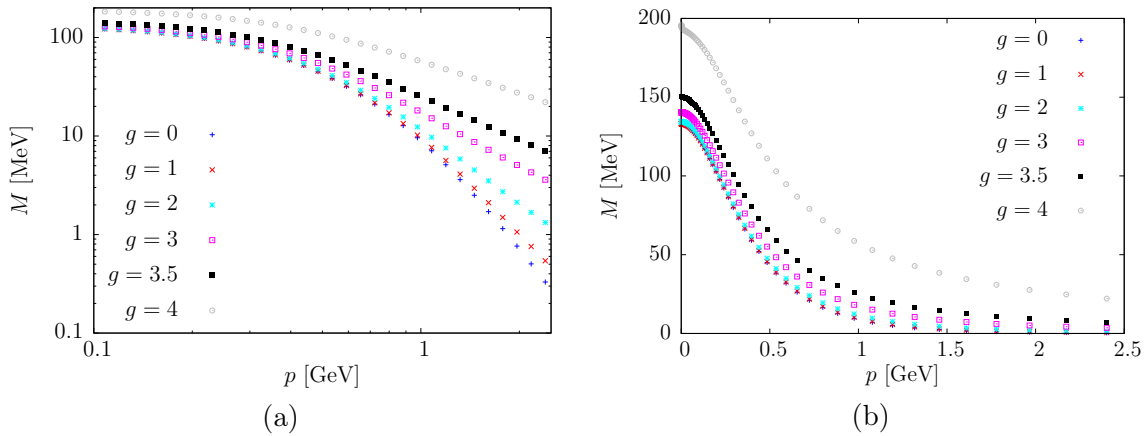
$$f(k) = \int \bar{d}^3 p \frac{C}{|\mathbf{p} - \mathbf{k}|^4} \left( g_1(k, p) + g_2(k, p) \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right)$$

mit geeigneten  $f$ ,  $g_{1,2}$  sowie  $C$ . Mittels der Ersetzung  $\cos \vartheta_p = \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = z$  findet man:

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi_p \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty \bar{d}p p^2 \frac{C}{(k^2 + p^2 - 2pkz)^2} \left( g_1(k, p) + g_2(k, p)z \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty \bar{d}p p^2 \frac{C}{(k^2 + p^2 - 2pkz)^2} \left( g_1(k, p) + g_2(k, p)z \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \bar{d}p p^2 \left( g_1(k, p) \frac{2C}{(k^2 - p^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + g_2(k, p) \left[ \frac{C}{kp} \frac{k^2 + p^2}{(k^2 - p^2)^2} + \frac{C}{2p^2 k^2} \ln \left| \frac{k-p}{k+p} \right| \right] \right) \end{aligned}$$

### 3.4.2 Ergebnisse

Abbildung 3.14 zeigt die Lösung der Gapgleichung (3.131) für verschiedene Werte von  $g$  in linearer sowie logarithmischer Skalierung. Mit der Erhöhung von  $g$  sind zweierlei Effekte verknüpft: Zum einen die Erhöhung des UV-Exponenten, d.h. eine Verlangsamung des Abfalls der Massenfunktion im UV, und zum anderen die Vergrößerung der Infrarotmasse



**Abbildung 3.14:** Numerische Lösung der Gapgleichung (3.131) für die Massenfunktion für verschiedene Werte der Kopplung  $g$  in (a) logarithmischer und (b) linearer Skalierung.

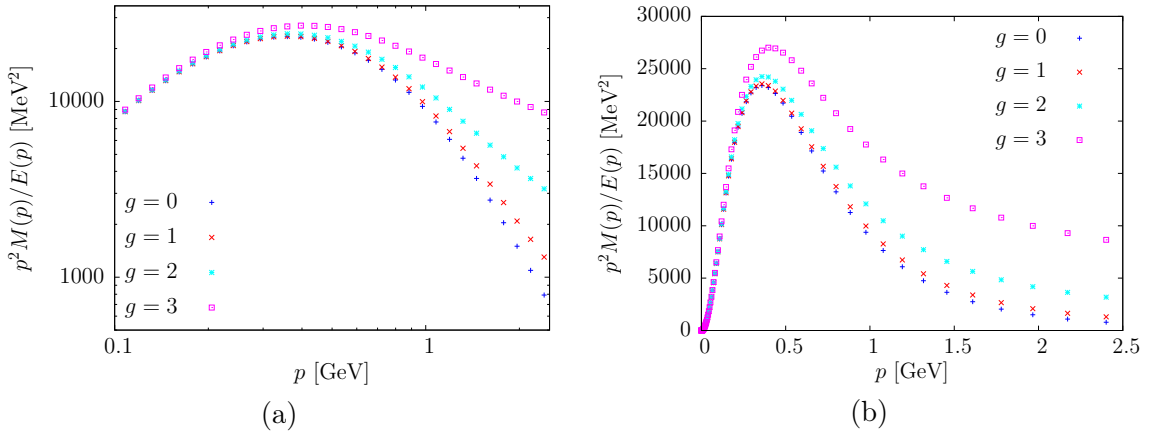
(3.141). Letzterer Effekt wird jedoch erst bei Kopplungskonstanten  $g > 3$  signifikant. Insbesondere zeigt sich hieran, daß es in der Gapgleichung (3.131) im Limes  $k \rightarrow 0$  nicht zum Auftreten von Divergenzen kommt. Das impliziert, daß sich die potentiell IR-divergenten Terme im Zuge der Lösung gegenseitig kompensieren müssen.

Das starke Anwachsen des UV-Exponenten bei gleichzeitig recht überschaubarer Veränderung der Infrarotmasse für  $g > 0$  mag auf den ersten Blick verwundern, ist aber bei Betrachtung der Gapgleichung (3.131) plausibel: Im Limes  $g = 0$  verbleibt einzig der (farbeinschließende) IR-Anteil der Coulombwechselwirkung in der rechten Seite der Gapgleichung (3.131). Sämtliche für  $g > 0$  durch die Quark-Gluon-Kopplung bzw. den UV-Anteil des Farb-Coulombpotentials eingeführte Terme werden im Infraroten durch den um zwei Größenordnungen stärker divergenten farbeinschließenden Anteil des Farb-Coulombpotentials dominiert, vgl. Gleichung (3.117). Daß die Beiträge von Quark-Gluon-Kopplung und UV-Anteil des Coulombterms dabei von derselben Größenordnung sind zeigt sich in der gegenseitigen Aufhebung der UV-Divergenzen, siehe Abschnitt 3.3.2. Für große Impulse tritt hingegen der gegenteilige Effekt auf, da hier der IR-Anteil des nichtabelschen Coulombpotentials um zwei Größenordnungen unterdrückt ist. In diesem Bereich ergeben sich für  $g > 0$  die gravierendsten Änderungen der Lösung der Gapgleichung (3.131).

Vernachlässigen wir den IR-Anteil des Farb-Coulombpotentials, so besitzt die Gapgleichung (3.131) unabhängig vom Wert der Kopplung  $g$  lediglich die triviale Lösung  $M(p) = 0$ . Das impliziert ein verschwindendes Quarkkondensat (3.123) und die chirale Symmetrie wird nicht spontan gebrochen. Das ist ein weiterer Hinweis darauf, daß chirale Symmetriebrechung und Farbeinschluß eng verwandte Phänomene sind.

Wie erwähnt bestimmen wir die Kopplungskonstante  $g$  in der Gapgleichung (3.131) durch Anpassen des chiralen Quarkkondensats (3.123) an seinen phänomenologischen Wert (3.142). Abbildung 3.15 zeigt den Verlauf des sich aus der Lösung der Gapgleichung ergebenden Integranden des chiralen Kondensats

$$I(p) = p^2 \frac{M(p)}{E(p)}. \quad (3.147)$$



**Abbildung 3.15:** Integrand des chiralen Kondensats (3.147) gemäß der numerischen Lösung der Gapgleichung (3.131) für die Massenfunktion für verschiedene Werte der Kopplung  $g$  in (a) logarithmischer und (b) linearer Skalierung.

In Gitterrechnungen findet man, daß die Brechung der chiralen Symmetrie primär von kleinen und mittleren Impulsmoden verursacht wird [120]. Das ist in qualitativer Übereinstimmung mit dem Verlauf des Integranden, der sein Maximum bei mittleren Impulsen besitzt. Eine Erhöhung der Kopplung  $g$  führt zu einer Verschiebung des Maximums zu größeren Impulsen und – bedingt durch den größeren UV-Exponenten von  $M$  – zu einer deutlichen Vergrößerung des Integranden im UV. Der langsamere UV-Abfall des Integranden trägt zu einem beträchtlichen Anwachsen des Kondensats bei, sodaß es seinen phänomenologischen Wert für  $g \approx 2.07$  annimmt. Das entspricht einem Wert der laufenden Kopplung bei mittleren bis hohen Impulsskalen, siehe Abschnitt 3.5.1. Zum Vergleich beträgt das chirale Kondensat für  $g = 0$  etwa  $(-185 \text{ MeV})^3$ , sodaß die Einbeziehung der Kopplung zu einem Anwachsen des Kondensats um 27% führt (nach Ziehen der dritten Wurzel).

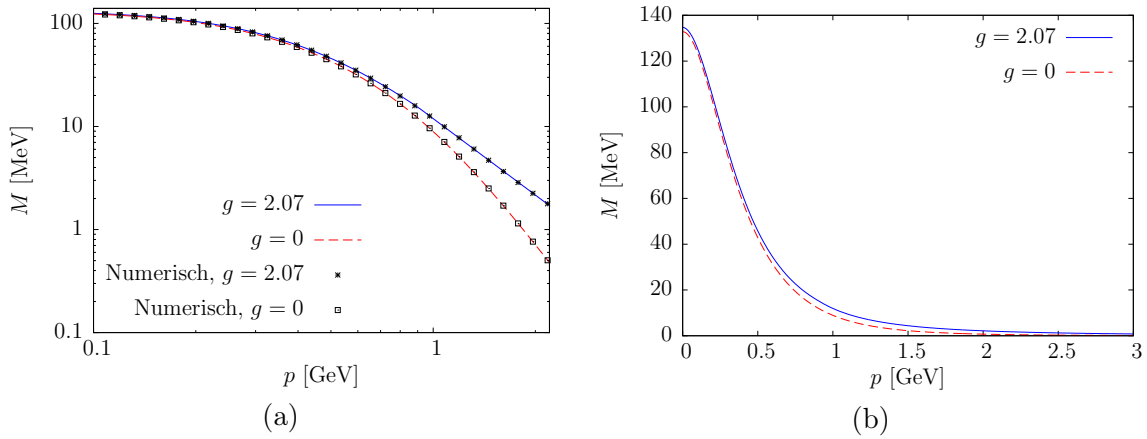
Zur Ausführung der Integration im chiralen Kondensat (3.123) und für die in Kapitel 5 durchgeführte Erweiterung auf endliche Temperaturen ist es von Vorteil, die Massenfunktion durch eine analytische Fitfunktion zu approximieren. Zur Beschreibung des kleinen und mittleren Impulsbereichs verwenden wir einen Ausdruck der Form

$$M_{\text{fit}}^{\text{IR}}(p) = \frac{m_0}{1 + \left(\frac{p}{m_A}\right)^A + \left(\frac{p}{m_B}\right)^B}, \quad (3.148)$$

während wir für große Impulse auf den Potenzansatz

$$M_{\text{fit}}^{\text{UV}}(p) = m_C \left(\frac{p}{m_C}\right)^C \quad (3.149)$$

zurückgreifen. Der Wechsel von  $M_{\text{fit}}^{\text{IR}}$  auf  $M_{\text{fit}}^{\text{UV}}$  findet am ersten Schnittpunkt  $p_S$  der beiden Kurven statt. Daß die so approximierte Massenfunktion nicht glatt ist, spielt für unsere Zwecke keine Rolle. Für eine Kopplung von  $g = 2.07$  ergeben sich die in den oberen Zeilen von Tabelle 3.1 sowie in Tabelle 3.2 aufgeführten optimierten Fitparameter während für die Adler–Davis-Gleichung ( $g = 0$ ) die in den unteren Zeilen von Tabelle 3.1 genannten Werte gelten. Da die Fitfunktion (3.148) für  $g = 0$  auch bei großen Impulsen eine gute Näherung



**Abbildung 3.16:** Lösung der Quarkgagleichung (3.131) für die Massenfunktion  $M$  für eine Kopplung von  $g = 2.07$  (durchgezogene Linie) und bei Vernachlässigung von Quark-Gluon-Kopplung und UV-Anteil des Coulombpotentials ( $g = 0$ , gestrichelte Linie). Wie aus der logarithmischen Darstellung (a) hervorgeht, ergeben sich Unterschiede primär bei mittleren und großen Impulsen und sind daher in der linearen Darstellung (b) weniger auffällig. Linien entsprechen den Fitfunktionen (3.148), (3.149) während numerische Datenpunkte in (a) durch Kreuze bzw. Kästchen dargestellt sind.

darstellt, lässt sich hier auf den separaten UV-Fit (3.149) verzichten. Die in Tabelle 3.1 und 3.2 angegebenen Fitparameter unterliegen gewissen Rundungseffekten, weshalb wir in Anmerkung 3.4.2 zusätzlich die genauen Parameter in dimensionslosen Einheiten von (3.145) wiedergeben.

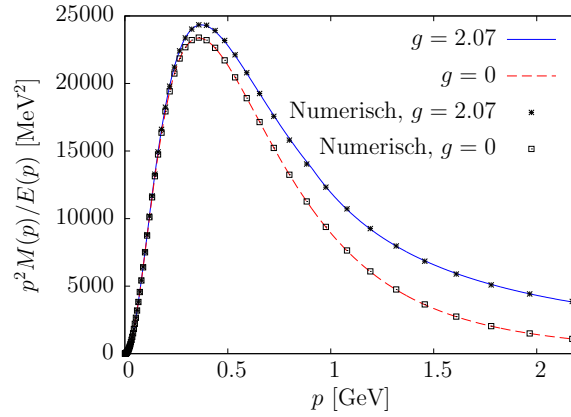
	$m_0$ [MeV]	$m_A$ [MeV]	$m_B$ [MeV]	$A$	$B$
Wert ( $g = 2.07$ )	135	673	392	3.578	1.910
Abs. Fehler ( $g = 2.07$ )	-	$\pm 8.04$	$\pm 4.17$	$\pm 0.0464$	$\pm 0.0074$
Wert ( $g = 0$ )	133	656	370	4.543	1.970
Abs. Fehler ( $g = 0$ )	-	$\pm 0.87$	$\pm 0.48$	$\pm 0.0098$	$\pm 0.0011$

**Tabelle 3.1:** Fitparameter gemäß Gleichung (3.148) für  $g = 2.07$  (obere beide Zeilen) und  $g = 0$  (untere beide Zeilen). Der Wert der Infrarotmasse  $m_0$  entspricht exakt der numerischen Lösung der Gagleichung (3.131) und ist kein Parameter. Die Fehler ergeben sich durch lineare Fortpflanzung aus den ursprünglichen Fitdaten und stellen eine obere Grenze dar.

	$m_C$ [MeV]	$C$	$p_S$ [MeV]
Wert	279	-2.466	911
Abs. Fehler	$\pm 0.58$	$\pm 0.0086$	-

**Tabelle 3.2:** Fitparameter gemäß Gleichung (3.149) für  $g = 2.07$ .





**Abbildung 3.17:** Integrand des Quarkkondensats (3.147) für  $g = 2.07$  und  $g = 0$  gemäß der Fitfunktionen (durchgezogene und gestrichelte Linie) sowie numerischer Daten (Kreuze und Kästchen).

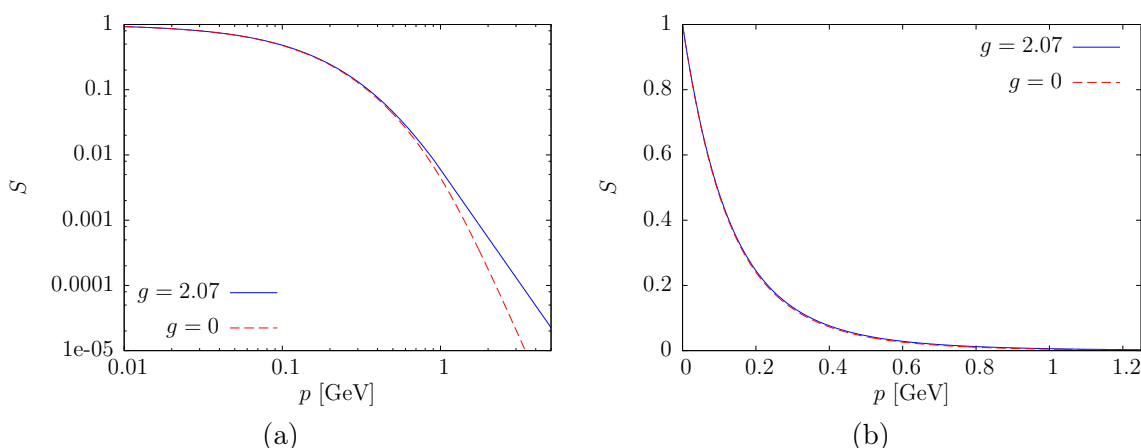
*Anmerkung 3.4.2:* Fitparameter  
Für  $g = 2.07$  gilt

$$\begin{aligned} m_0 &= 0.167689, & m_A &= 0.83767, & m_B &= 0.48738, & m_C &= 0.34688, \\ p_S &= 1.1346, & A &= 3.57776, & B &= 1.90994, & C &= -2.46589 \end{aligned}$$

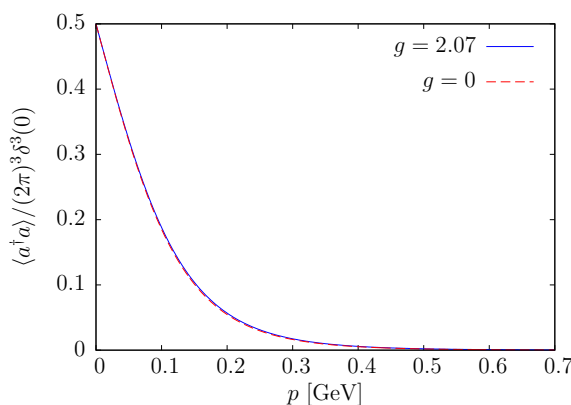
und für  $g = 0$

$$\begin{aligned} m_0 &= 0.165341, & m_A &= 0.81649, & m_B &= 0.46090, \\ A &= 4.54277, & B &= 1.97019. \end{aligned}$$

Die sich aus der der Gapgleichung (3.131) für  $g = 2.07$  ergebende Massenfunktion ist in Abbildung 3.16 sowohl in logarithmischer, als auch in linearer Skalierung dargestellt. Zu Vergleichszwecken ist zusätzlich die Lösung für  $g = 0$  aufgeführt. Die Unterschiede zwischen beiden Massenfunktionen beschränken sich primär auf den Bereich mittlerer und großer Impulse. Das folgt auch aus den Fitparametern, Tabelle 3.1 und 3.2: Während die Infrarotmasse für  $g = 2.07$  ( $m = m_0 = 135$  MeV) nahezu identisch mit derjenigen für  $g = 0$  ( $m = m_0 = 133$  MeV) ist, ergeben sich beim UV-Exponenten beträchtliche Unterschiede,  $-2.466$  gegenüber  $-4.543$ . Diese sind letztlich für das Anwachsen des Kondensats verantwortlich. Man beachte, daß die in Abbildung 3.16 sowie im Folgenden dargestellten Kurven durch die Fitfunktionen (3.148), (3.149) gegeben sind. Abbildung 3.16 (a) enthält zusätzlich einen Vergleich mit den tatsächlichen numerischen Daten, die eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Fit zeigen. Man beachte, daß die numerischen Daten sämtlich vor dem Abknicken der Kurve im UV – siehe oben – liegen. Abbildung 3.17 zeigt den sich mittels der Fitfunktionen bzw. der numerischen Daten ergebenden Integranden des chiralen Kondensats (3.147). Auch hier ergibt sich eine sehr gute Approximation durch den Fit, was wegen der Fixierung der Kopplung  $g$  über den Wert des Kondensats besonders wichtig ist.



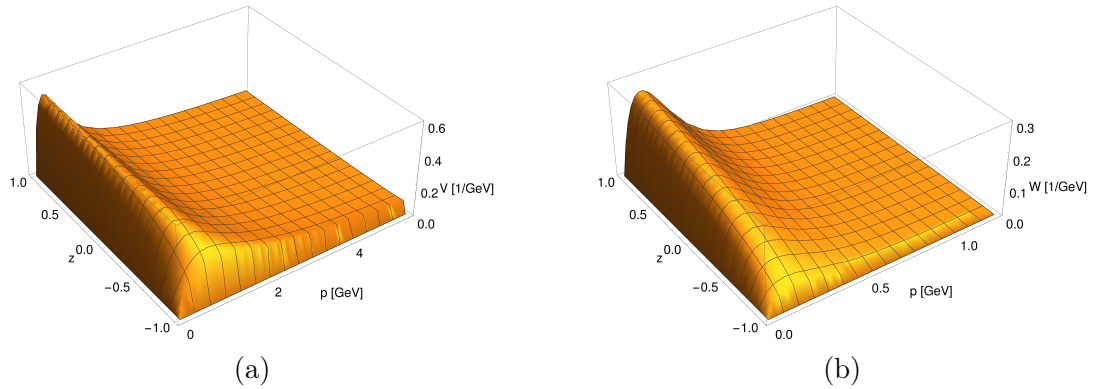
**Abbildung 3.18:** Darstellung des Skalarkerns bei einer Kopplung von  $g = 2.07$  (durchgezogene Linie) bzw.  $g = 0$  (gestrichelte Linie) in (a) logarithmischer und (b) linearer Skalierung.



**Abbildung 3.19:** Dichte besetzter Quarkzustände gemäß Gleichung (3.128); die durchgezogene Linie zeigt das Ergebnis für  $g = 2.07$  während sich die gestrichelte bei Vernachlässigung von Kopplung und UV-Anteil des Coulombpotentials ( $g = 0$ ) ergibt.

Der UV-Exponent der Lösung für  $g = 0$  weicht mit  $-4.543$  etwas von dem in Winkelnäherung analytisch berechneten Wert  $-4$  ab. Diese Abweichung mag von den Schwierigkeiten bei der Fixierung des UV-Verhaltens der numerischen Lösung der Gapgleichung herrühren, siehe oben. Allerdings stellt die Untersuchung mittels Winkelnäherung auch keinen strengen Beweis dar. Tatsächlich wurde in früheren Arbeiten numerisch ebenfalls nicht exakt dieser Exponent reproduziert. Da (zumindest für  $g = 0$ ) der UV-Teil sämtlicher in dieser Arbeit berechneter Größen stark unterdrückt ist, hat die mögliche Abweichung des UV-Exponenten praktisch keinen Effekt.

Da die Infrarotmasse für  $g = 2.07$  mit 135 MeV in etwa auf dem für  $g = 0$  erreichten Wert verharret, bleibt sie recht deutlich unter dem in früheren Arbeiten [23–25] gefundenen Wert von etwas über 200 MeV sowie der sich aus der Nukleonmasse ergebenden Konstituentenmasse von 300 MeV [Gleichung (2.78)]. Dabei ist zu beachten, daß sich die Arbeiten [23–25]



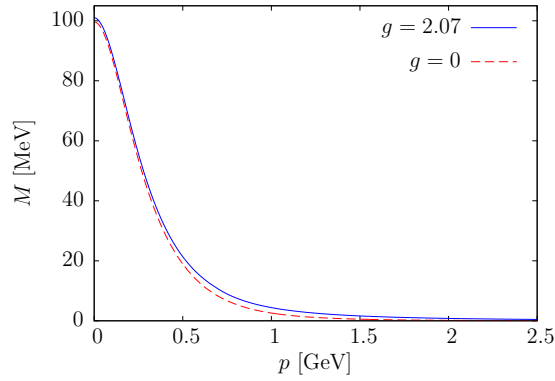
**Abbildung 3.20:** Die Vektorkerne (a)  $V(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  und (b)  $W(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  für  $g = 2.07$  als Funktion von  $p = q$  und  $z = \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}}$ . Man beachte die unterschiedlichen Skalierungen in (a) und (b).

aufgrund des unterschiedlichen Wellenfunktional, des rein farbeinschließenden Coulombpotentials sowie der nicht konsequent auf Zweischleifenniveau ausgeführten Berechnungen konzeptionell signifikant von der vorliegenden Arbeit unterscheiden und daher nicht mit identischen Resultaten zu rechnen war. Zudem ist die Identifikation der Infrarotmasse mit der Konstituentenmasse keinesfalls zwingend.

Durch Kenntnis der Massenfunktion  $M$  läßt sich der Skalarkern  $S$  ermitteln, vgl. Anmerkung 3.3.2. Dessen Verlauf ist in Abbildung 3.18 gezeigt, wobei wir zu Vergleichszwecken auch die sich bei  $g = 0$  ergebende Kurve dargestellt haben. Wie bei der Massenfunktion ergeben sich nur bei mittleren und großen Impulsen Unterschiede zwischen den beiden Kurven, welche jedoch nur bei logarithmischer Darstellung signifikant werden. Insbesondere der Grenzwert  $S(p \rightarrow 0) = 1$  ist in beiden Fällen gleich und entspricht dem für  $g = 0$  analytisch aus der Gapgleichung (3.100) extrahierbaren Wert.

Unter Verwendung des Skalarkerns lassen sich die Besetzungszahlen der (Anti-)Quarkzustände (3.128), (3.129) auswerten. Das liefert für die Dichte der besetzten Quarkzustände das in Abbildung 3.19 gezeigte Ergebnis, welches aufgrund der linearen Skalierung keine signifikanten Unterschiede zwischen  $g = 2.07$  und  $g = 0$  zeigt. Da die Besetzungszahlen von Quark- und Antiquarkzuständen übereinstimmen, entspricht die gezeigte Kurve auch der Dichte der besetzten Antiquarkzustände (3.129).

Schließlich lassen sich mithilfe des Skalarkerns  $S$  sowie der Gribovformel für  $\omega$  (3.21) die Vektorkerne  $V$  (3.93) und  $W$  (3.97) explizit bestimmen, siehe Abbildung 3.20. Da die Darstellung der Vektorkerne nur für einzelne Schnitte möglich ist, haben wir für die Abbildung die Beträge der beiden Impulsargumente gleichgesetzt,  $p = q$ . Wir erkennen bei beiden Kernen ein für große und – aufgrund der Gribovformel – für kleine Impulse abfallendes Verhalten mit einem Maximum im mittleren Impulsbereich bei einem Winkel von  $z = \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}} = 1$ . In diesem Bereich ist die Wechselwirkung zwischen Quarks und transversalen Gluonen maximal. Der Abfall im UV verläuft für den Vektorkern  $V$  proportional zu  $1/p$ , was angesichts des analytischen Ausdrucks (3.93) erwartbar war. Für den Vektorkern  $W$  ergibt sich infolge des für die Darstellung gewählten Schnitts ein deutlich schnellerer Abfall, da für  $p = q$  auch der Zähler von  $W$  im UV stark abfällt, siehe Gleichung (3.97). Hätten wir für  $q$  einen festen endlichen Wert gewählt, so wäre der Abfall hier ebenfalls



**Abbildung 3.21:** Lösung der Quarkgaggleichung (3.131) für die Massenfunktion  $M$  für eine Kopplung von  $g = 2.07$  (durchgezogene Linie) sowie bei Vernachlässigung von Quark-Gluon-Kopplung und UV-Anteil des Coulombpotentials ( $g = 0$ , gestrichelte Linie) für die Eichgruppe  $SU(2)$ .

$\sim 1/p$ . Unabhängig davon gilt, daß der Vektorkern  $V$  größere Werte annimmt als  $W$  – man beachte die unterschiedlichen Skalen in Abbildung 3.20 (a) und (b). Weiterhin ist  $W$  erheblich empfindlicher gegenüber dem konkreten Verhalten des Skalarkerns als  $V$ , was für einen rein nicht-perturbativen Kern (vgl. Anhang C) nicht verwunderlich ist.

### Massenfunktion für $SU(2)$

Die Gaggleichung (3.100), (3.131) ist für beliebige Eichgruppen  $SU(N_C)$  definiert. In Kapitel 5 werden wir die kritischen Temperaturen neben  $SU(3)$  zu Vergleichszwecken auch für  $SU(2)$  berechnen. Bei der Bestimmung der  $SU(2)$ -Massenfunktion tritt erneut die Frage nach dem Wert der Kopplungskonstanten  $g$  auf. Da für  $SU(2)$  naturgemäß kein phänomenologischer Wert für das Quarkkondensat existiert, verwenden wir auch hier den in  $SU(3)$  fixierten Wert der Kopplung,  $g = 2.07$ . Das wird für ein qualitatives Studium der Effekte der Quark-Gluon-Kopplung hinreichend sein. Für die Fitfunktionen (3.148) und (3.149) ergeben sich so die in Tabelle 3.3 und 3.4 genannten Fitparameter; die entsprechende Massenfunktion ist in Abbildung 3.21 graphisch dargestellt. Die zu Vergleichszwecken ebenfalls in Abbildung 3.21 enthaltene Massenfunktion für  $g = 0$  ergibt sich durch Reskalieren der  $SU(3)$ -Fitparameter  $m_i$  (siehe Tabelle 3.1) um einen Faktor  $\frac{3}{4}$ , vgl. Gleichung (3.145).

	$m_0$ [MeV]	$m_A$ [MeV]	$m_B$ [MeV]	$A$	$B$
Wert	101	508	293	3.616	1.914
Abs. Fehler	-	$\pm 5.52$	$\pm 2.79$	$\pm 0.0442$	$\pm 0.0067$

**Tabelle 3.3:** Fitparameter gemäß Gleichung (3.148) für  $g = 2.07$  und die Eichgruppe  $SU(2)$ .

	$m_C$ [MeV]	$C$	$p_S$ [MeV]
Wert	209	-2.468	687
Abs. Fehler	$\pm 0.83$	$\pm 0.0096$	-

**Tabelle 3.4:** Fitparameter gemäß Gleichung (3.149) für  $g = 2.07$  und die Eichgruppe  $SU(2)$ .

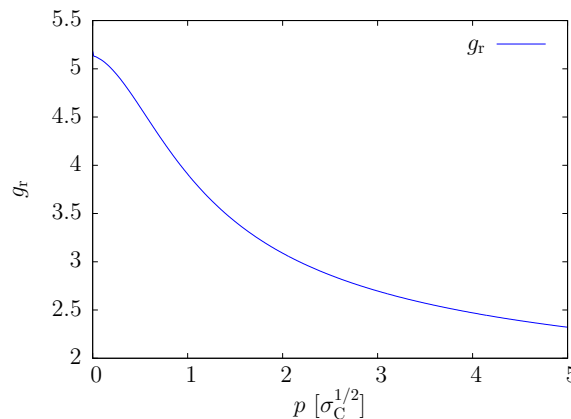
## 3.5 Ausblick

### 3.5.1 Vergleich mit laufender Kopplung

Wir haben bewusst darauf verzichtet, die Kopplung  $g$  in der Gapgleichung (3.100), (3.131) mit der in Referenz [22] im Variationszugang berechneten laufenden Kopplung  $g_r$  zu identifizieren. An dieser Stelle wollen wir den im vorherigen Abschnitt bestimmten Wert  $g \approx 2.07$  aber zumindest mit der in Abbildung 3.22 dargestellten laufenden Kopplung vergleichen. Dabei sind zwei Punkte zu beachten: Zum einen ist der IR-Wert der laufenden Kopplung, welcher zum Fixieren der Skala erforderlich ist, in der Originalarbeit [22] falsch angegeben und wurde von uns auf den korrekten Wert [121]

$$g_r(p \rightarrow 0) = \sqrt{\frac{8\pi^2}{N_C}} \approx \begin{cases} 6.28 & \text{für } SU(2) \\ 5.13 & \text{für } SU(3) \end{cases} \quad (3.150)$$

gesetzt. Zum anderen haben wir mithilfe dieses Fixpunkts den gesamten Kurvenverlauf passend zur Eichgruppe  $SU(3)$  reskaliert. Da die numerische Berechnung in Referenz [22] für die Eichgruppe  $SU(2)$  erfolgte, ist dieser Punkt mit der Annahme verbunden, daß sich die *Form* der Kurve bei einem Wechsel der Eichgruppe nur unwesentlich ändert. Das ist ohne weiteren Beweis natürlich fragwürdig und läßt keine direkte Identifikation von  $g$  mit  $g_r$  zu. Wir können Abbildung 3.22 aber für einen qualitativen Vergleich heranziehen, dem zufolge  $g \approx 2.07$  einem Wert der laufenden Kopplung bei mittleren bis großen Impulsskalen entspricht. In diesem Zusammenhang weisen wir darauf hin, daß die in Referenz [22]



**Abbildung 3.22:** Laufende Kopplung  $g_r$  in Abhängigkeit der Impulsskala in Einheiten der Coulomb-Stringtension (3.146). Verlauf gemäß Referenz [22], jedoch reskaliert für die Eichgruppe  $SU(3)$  (siehe Text).

bestimmte laufende Kopplung über den korrekten, logarithmisch abfallenden UV-Limes verfügt, auch wenn das aus der Darstellung in Abbildung 3.22 nicht hervorgeht.

### 3.5.2 Selbstkonsistentes Energiefunktional

Die Einschränkungen an die Variationskerne, welche sich aus den in Abschnitt 3.3.1 hergeleiteten Bestimmungsgleichungen ergeben, lassen sich direkt im Energieerwartungswert (3.87) berücksichtigen. Ein solches *selbstkonsistentes Energiefunktional* besitzt eine einfachere Gestalt als der volle Erwartungswert und bietet Vorteile bei der in Kapitel 5 durchgeführten Berechnung des Polyakov-Loops.

#### Funktional bei Einsetzen der Gluonapgleichung

Die erste Möglichkeit zur Vereinfachung des Energiefunktional besteht im Einsetzen der gluonischen Gapgleichung (3.108). Dazu multiplizieren wir die Gapgleichung (3.108) mit  $(N_C^2 - 1)\delta^3(0)/2\omega(k)$ , integrieren über den äußeren Impuls  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{q}$  und setzen die so entstandene Gleichung in den Energieerwartungswert (3.87) ein, was zu dem selbstkonsistenten Funktional

$$E_\omega^s = E_Q^{0,1S} + E_Q^E + E_C^Q + E_{YM}^{\text{eff}} + E_{YM}^{\text{eff},2S} \quad (3.151)$$

führt. Dabei bezeichnet

$$E_Q^{0,1S} = 2N_C\delta^3(0) \int \bar{d}^3p p(1 - 2P(p)) \quad (3.152)$$

den Einschleifenbeitrag des freien Dirac-Hamiltonians (3.74),

$$\begin{aligned} E_Q^E &= \frac{N_C^2 - 1}{2}\delta^3(0)g^2 \int \bar{d}^3p \int \bar{d}^3q P(p)P(q)V^2(\mathbf{p}, \mathbf{q})X(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ &+ \frac{N_C^2 - 1}{2}\delta^3(0)g^2 \int \bar{d}^3p \int \bar{d}^3q P(p)P(q)W^2(\mathbf{p}, \mathbf{q})Y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.153)$$

den fermionischen Beitrag zur kinetischen Energie der Gluonen (3.83),  $E_C^Q = \langle H_C^Q \rangle$  den fermionischen Beitrag der Coulombwechselwirkung (3.81) sowie

$$E_{YM}^{\text{eff}} = (N_C^2 - 1)\delta^3(0) \int \bar{d}^3p [\omega(p) - \chi(p)], \quad (3.154)$$

$$\begin{aligned} E_{YM}^{\text{eff},2S} &= -\frac{N_C(N_C^2 - 1)}{6}\delta^3(0)g^2 \int \bar{d}^3p \int \bar{d}^3q \frac{1}{\omega(p)\omega(q)} \\ &- \frac{N_C(N_C^2 - 1)}{16}\delta^3(0) \int \bar{d}^3p \int \bar{d}^3q V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) \left(1 + (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}})^2\right) \\ &\times \frac{(\omega(p) - \chi(p) + \chi(q) + 3\omega(q))(\omega(p) - \chi(p) + \chi(q) - \omega(q))}{\omega(p)\omega(q)} \end{aligned} \quad (3.155)$$

die verbleibenden effektiven gluonischen Ein- und Zweischleifenbeiträge. Deren Summe  $E_{YM}^{\text{eff}} + E_{YM}^{\text{eff},2S}$  entspricht formal dem selbstkonsistenten Energiefunktional der reinen Yang-Mills-Theorie. Das Einsetzen weiterer Bestimmungsgleichungen, z.B. der Quarkgapgleichung (3.100), in Gleichung (3.151) ist prinzipiell möglich um das Energiefunktional weiter

zu beschränken. Allerdings bietet dies auf Zweischleifenniveau keinerlei ersichtliche Vorteile da es zur Entstehung zusätzlicher Terme führt.

Das selbstkonsistente Funktional (3.151) besitzt zwar eine sehr kompakte Struktur, ist für die Verwendung in der vorliegenden Arbeit aber nicht geeignet: Da die volle Gluonapgleichung (3.108) eingesetzt wurde, muß zur Auswertung von Gleichung (3.151) ein inverser Gluonpropagator  $\omega$  verwendet werden, der die Rückkopplungseffekte der Quarks auf die Gluonen berücksichtigt. Das ist für die Gribovformel (3.21) nicht der Fall.

### Funktional bei Einsetzen der Vektorkerngleichungen

Eine Alternative stellt die Verwendung der Bestimmungsgleichungen der Vektorkerne  $V$  (3.93) und  $W$  (3.97) dar, aus denen die Relation

$$2E_{\text{Q}}^{0,2\text{S}} + 2E_{\text{Q}}^E + E_{\text{Q}}^A = 0 \quad (3.156)$$

folgt. Dabei bezeichnet

$$\begin{aligned} E_{\text{Q}}^{0,2\text{S}} = & \frac{N_{\text{C}}^2 - 1}{2} \delta^3(0) g^2 \int \mathrm{d}^3 p \int \mathrm{d}^3 q \frac{V^2(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} P(p) P(q) X(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ & \times \left[ p P(p) \left( 1 - S^2(p) + 2S(p)S(q) \right) + q P(q) \left( 1 - S^2(q) + 2S(p)S(q) \right) \right] \\ & + \frac{N_{\text{C}}^2 - 1}{2} \delta^3(0) g^2 \int \mathrm{d}^3 p \int \mathrm{d}^3 q \frac{W^2(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} P(p) P(q) Y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ & \times \left[ p P(p) \left( 1 - S^2(p) - 2S(p)S(q) \right) + q P(q) \left( 1 - S^2(q) - 2S(p)S(q) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.157)$$

den Zweischleifenbeitrag des freien Dirac-Hamiltonians (3.74),  $E_{\text{Q}}^E$  den fermionischen Beitrag zur kinetischen Energie [Gleichung (3.153)] und  $E_{\text{Q}}^A = \langle H_{\text{Q}}^A \rangle$  den Erwartungswert des Kopplungsterms (3.75). Einsetzen von Gleichung (3.156) in den Energieerwartungswert (3.87) impliziert

$$E_{\text{VW}}^{\text{s}} = E_{\text{Q}}^{0,1\text{S}} + \frac{1}{2} E_{\text{Q}}^A + E_{\text{C}}^{\text{Q}} + E_{\text{YM}}, \quad (3.158)$$

wobei

$$E_{\text{YM}} = \langle \bar{H}_{\text{YM}} \rangle - E_{\text{Q}}^E \quad (3.159)$$

exakt dem Energieerwartungswert der reinen Yang–Mills-Theorie entspricht [18, 19, 21].

Die Vernachlässigung der Rückkopplungseffekte der Quarks auf die Gluonen erlaubt es, zur weiteren Vereinfachung des Funktionals (3.158) die Gluonapgleichung des Yang–Mills-Sektors (3.109) einzusetzen. Formen wir diese wie im Absatz vor Gleichung (3.151) beschrieben um, so wird das Energiefunktional (3.158) nach Einsetzen zu

$$E_{\text{VW}}^{\text{s}} = E_{\text{Q}}^{0,1\text{S}} + \frac{1}{2} E_{\text{Q}}^A + E_{\text{C}}^{\text{Q}} + E_{\text{YM}}^{\text{eff}} + E_{\text{YM}}^{\text{eff},2\text{S}} = E_{\text{VW,Q}}^{\text{s}} + E_{\text{VW,YM}}^{\text{s}} \quad (3.160)$$

mit den gluonischen Beiträgen (3.154), (3.155). Dieses Funktional besitzt gegenüber Gleichung (3.151) den Vorteil, daß es kompatibel mit der Quenching-Approximation der vorliegenden Arbeit, d.h. der Ersetzung des inversen Gluonpropagators durch die Gribovformel (3.21) zur separaten Betrachtung von fermionischen und bosonischen Anteilen, ist.

Schließlich läßt sich sowohl im Funktional (3.160), als auch in (3.151) der gluonische Zweischleifenbeitrag  $E_{\text{YM}}^{\text{eff},2\text{S}}$  (3.155) vernachlässigen. Das entspricht dem Verzicht auf den Tadpole sowie den gluonischen Beitrag der Farb-Coulombwechselwirkung und deckt sich mit dem Vorgehen im reinen Yang–Mills-Sektor, wo diese Beiträge eine unwesentliche Rolle spielen [88].

### 3.5.3 Endliches fermionisches Energiefunktional

Die Berechnung des Polyakov-Loops in Kapitel 5 erfordert ein endliches Energiefunktional bzw. *effektives Potential*, welches wir durch Regularisieren des UV-divergenten Funktional (3.160) gewinnen werden. Dazu muß das Funktional (3.160) zunächst in eine geeignete Form gebracht werden, wobei wir auch auf die Struktur der UV-Divergenzen eingehen werden.

Der auf den Einschleifenterm  $E_{\text{YM}}^{\text{eff}}$  (3.154) eingeschränkte bosonische Teil des Energiefunktional weist dieselbe Struktur wie im Yang–Mills-Sektor auf und gestattet die direkte Anwendung des in Kapitel 5 verwendeten Regularisierungsschemas. Wir können uns daher auf die Betrachtung des fermionischen Anteils des Energiefunktional beschränken. Aus dimensional Gründen ist klar, daß sämtliche Beiträge zum Energiefunktional, welche nicht die Coulomb-Stringtension enthalten, in führender Ordnung mit  $\Lambda^4$  divergieren, wobei  $\Lambda$  den UV-Cutoff bezeichnet. Eine Analyse des UV-Verhaltens der einzelnen Beiträge zum fermionischen Teil des Energiefunktional ist analog zur Gapgleichung möglich und wird in Anhang D.3 ausgeführt. Wir beschränken uns hier auf die Wiedergabe der wesentlichen Ergebnisse: Es zeigt sich, daß das Energiefunktional (3.160) dieselben divergenten Beiträge besitzt welche im perturbativen Energiefunktional für  $S(p) = 0$  und  $\omega(p) = p$  auftreten. Alle weiteren divergenten Faktoren eliminieren sich gegenseitig, wie wir es bereits in der Quarkgapgleichung (3.100) gesehen hatten. Dabei spielen erneut die Berücksichtigung des UV-Beitrags des Coulombpotentials (3.117) und die Wahl des fermionischen Vakuumwellenfunktional eine wesentliche Rolle. Somit ergibt sich mithilfe des Abzugsschemas

$$E_{VW,Q}^{\text{endl}} = E_{VW,Q}^{\text{s}} - E_{VW,Q}^{\text{s}}|_{S=0,\omega=p} \quad (3.161)$$

ein endliches fermionisches Energiefunktional. Für die alternative Form (3.151) des Energiefunktional gilt diese Aussage infolge der Verwendung der vollen Gluongapgleichung (3.108) nicht: Aufgrund von Rückkopplungseffekten enthält das dortige bosonische Energiefunktional auch fermionische Beiträge, weshalb

$$E_{\omega,Q}^{\text{s}} - E_{\omega,Q}^{\text{s}}|_{S=0,\omega=p} \quad (3.162)$$

nicht endlich ist. Auch das spricht für die Verwendung des Funktional (3.160).

Das endliche fermionische Funktional (3.161) gestatten leider nicht die Bestimmung des effektiven Potentials in Kapitel 5: Zwar sollte das Abzugsschema (3.161) mit dem dortigen Vorgehen zur Regularisierung des effektiven Potentials kompatibel sein, jedoch ist die konkrete Durchführung der Regularisierung für Zweischleifenterme komplex und bislang nicht realisiert.<sup>56</sup> Zusätzlich merken wir an, daß das Anlegen eines *Hintergrundeichfelds*  $\mathbf{a}$  wie in Kapitel 5 möglicherweise zur Entstehung zusätzlicher Divergenzen führt, d.h. ein endliches Energiefunktional für  $\mathbf{a} = 0$  bedingt nicht zwangsläufig ein endliches effektives Potential

<sup>56</sup>Die Regularisierung bedingt die explizite Berechnung der Zweischleifenintegrale in Proper-Time-Darstellung, vgl. Anhang D.5.



für  $\mathbf{a} \neq 0$ .<sup>57</sup> Da die Bestimmung eines endlichen effektiven Potentials auf Zweischleifenniveau im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich ist, beschränken wir uns auf die Verwendung eines Einschleifen-Energiefunktionals, wobei wir als Ausgangspunkt das Funktional (3.160) wählen.

Der bosonischen Anteil am Energiefunktional (3.160) ist mit der Vernachlässigung des Terms (3.155) bereits auf Einschleifenniveau,

$$E_{VW,YM}^s \approx E_{YM}^{\text{eff}} = (N_C^2 - 1)\delta^3(0) \int \bar{d}^3p \left[ \omega(p) - \chi(p) \right]. \quad (3.163)$$

Um die Einschnitte durch die Einschleifennäherung für den fermionischen Anteil möglichst gering zu halten, reduzieren wir diesen nicht direkt auf seinen Einschleifenbeitrag (3.152), sondern verwenden zunächst die Quarkgaggleichung (3.100) um den IR-Beitrag der Farb-Coulombwechselwirkung (3.81) durch einen effektiven Einschleifenterm und eine Summe von Zweischleifentermen zu ersetzen:<sup>58</sup>

$$\begin{aligned} E_C^{\text{Q,IR}} = & -\frac{1}{2}E_Q^{0,1S} - \frac{N_C^2 - 1}{8}\delta^3(0) \int \bar{d}^3p \int \bar{d}^3q V_C^{\text{IR}}(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) \frac{(P(p)S(p) - P(q)S(q))^2}{P(p)P(q)S(p)S(q)} \\ & - N_C\delta^3(0) \int \bar{d}^3p P(p) \frac{1 - S^2(p)}{S(p)} \left[ I_C^{\text{Q,UV}}(p) + I_{VV}^{\text{Q}}(p) + I_{WW}^{\text{Q}}(p) + I_{VQ}^{\text{Q}}(p) \right. \\ & \left. + I_{WQ}^{\text{Q}}(p) + I_{VE}^{\text{Q}}(p) + I_{WE}^{\text{Q}}(p) \right] \end{aligned} \quad (3.164)$$

Setzen wir dies in das selbstkonsistente Energiefunktional (3.160) ein, so ergibt sich auf Einschleifenniveau

$$E_{VW,Q}^s \approx \frac{1}{2}E_Q^{0,1S} = N_C\delta^3(0) \int \bar{d}^3p p(1 - 2P(p)) = -N_C\delta^3(0) \int \bar{d}^3p \frac{p^2}{E(p)}. \quad (3.165)$$

Die Ersetzung der Summe von Ein- und Zweischleifentermen durch einen effektiven Einschleifenterm entspricht der Vorgehensweise der *Hartree-Fock-Methode*, bei welcher eine Summe von Ein- und Zweiteilchen-Hamiltonians unter Verwendung des Variationsprinzips durch einen effektiven Einteilchen-Hamiltonian approximiert wird [110]. Die Verwendung von Gleichung (3.164) stellt sicher, daß der IR-Anteil der Coulombwechselwirkung als wichtigster Beitrag zur Quarkgaggleichung (3.100) im effektiven Energiefunktional (3.165) Berücksichtigung findet. Damit sollte sich eine bessere Approximation des vollen Energiefunktionals (3.160) ergeben als durch die bloße Reduktion auf  $E_Q^{0,1S}$  (3.152). Wir weisen aber darauf hin, daß sich die vernachlässigten Zweischleifenterme analytisch nicht gegenüber dem effektiven Einschleifenterm (3.165) abschätzen lassen, da eine solche Abschätzung nur für das (auf Zweischleifenniveau unbekannt) *endliche* effektive Potential Sinn ergäbe.

Verwenden wir dieselben Näherungen im Funktional (3.151), so finden wir

$$E_\omega^s = E_{VW}^s \approx \frac{1}{2}E_Q^{0,1S} + E_{YM}^{\text{eff}}, \quad (3.166)$$

d.h. die beiden Energiefunktionale (3.151) und (3.160) stimmen auf diesem Niveau formal überein. Das spricht dafür, daß die Rückkopplungseffekte der Quarks auf die Gluonen

<sup>57</sup>Eine Analyse der zusätzlichen Divergenzen analog zu Anhang D ist aufgrund der Struktur der auftretenden Integrale schwierig. Voraussichtlich besitzen die Divergenzen aber die Form  $\mathbf{a}^2\Lambda^2$  oder  $\mathbf{a}^4 \ln \Lambda/\mu$ .

<sup>58</sup>Man beachte, daß dieser Ausdruck für  $S = 0$  nicht wohldefiniert ist. Das ist eine Folge der in diesem Limes verschwindenden Gaggleichung.

von höherer Ordnung und in dieser Näherung auch in Gleichung (3.151) vernachlässigbar sind. Schließlich sei erwähnt, daß das effektive Energiefunktional (3.166) aufgrund der verwendeten Näherungen formal mit dem Funktional bei Vernachlässigung von Quark-Gluon-Kopplung und UV-Anteil des Coulombpotentials ( $g = 0$ ) übereinstimmt.

# Kapitel 4

## Kanonischer Zugang zur QCD bei endlichen Temperaturen und chemischen Potentialen

### Allgemeines Vorwort zu endlichen Temperaturen und chemischen Potentialen

Wie wir im einführenden Kapitel 2 dargelegt haben, ist das Verständnis des Phasendiagramms der QCD eine der größten Herausforderungen der Teilchenphysik und Gegenstand intensiver experimenteller sowie theoretischer Untersuchungen. Aus theoretischer Sicht erfordert das Studium der QCD-Phasenübergänge, d.h. der Aufhebung des Farbeinschlusses sowie der Wiederherstellung der chiralen Symmetrie, die Verwendung nicht-perturbativer Methoden. Gitterrechnungen haben zwar zu wesentlichen Erkenntnissen über die Struktur des QCD-Phasendiagramms geführt, bleiben aber aufgrund des Vorzeichenproblems bislang auf den Bereich kleiner chemischer Potentiale beschränkt [5–7]. Die Beschreibung beliebiger chemischer Potentiale und somit des QCD-Phasendiagramms als Ganzes ist jedoch mithilfe nicht-perturbativer Kontinuumsmethoden – welche frei vom Vorzeichenproblem sind – möglich. In den letzten beiden Jahrzehnten wurden verschiedene solcher Methoden – basierend entweder auf Dyson–Schwinger-Gleichungen in Landau- [8–10] und Coulombbeugung [11–13], Renormierungsgruppengleichungen in Landau- [14, 15] oder Variationsrechnungen in Landau- [16, 17, 82] sowie im Hamilton’schen Zugang in Coulombbeugung [18–22] – entwickelt und zur Beschreibung des QCD-Vakuums sowie der Phasenübergänge eingesetzt. Diese drei Ansätze sind zu einem gewissen Grad miteinander verbunden<sup>59</sup> und lassen sich jeweils nur unter Näherungen zur Anwendung bringen. Dabei besitzt jeder der Ansätze Vor- und Nachteile und der Vergleich der in den verschiedenen Ansätzen gefundenen Ergebnisse führt zu einer Steigerung ihrer Aussagekraft. Daneben existieren weitere phänomenologische und Kontinuumsmodelle zur Beschreibung der QCD-Phasenübergänge, auf welche wir jedoch nicht weiter eingehen werden, siehe z.B. [122–124] sowie darin angegebene Referenzen für weitere Details.

Die Bestimmung der (pseudo-)kritischen Temperaturen der QCD-Phasenübergänge erfolgt i.A. durch die Berechnung geeigneter Ordnungsparameter. In Abschnitt 2.5 haben wir mit dem Polyakov-Loop (2.129) und dem dualen Quarkkondensat (2.138) zwei Ordnungsparameter für den Farbeinschluß eingeführt. Beide wurden in früheren Arbeiten bereits auf dem Gitter, siehe z.B. Referenz [125, 126], unter Verwendung von Dyson–Schwinger-Gleichungen [127–130] sowie mithilfe von Renormierungsgruppengleichungen [80, 81, 83,

---

<sup>59</sup>Beispielsweise werden die Renormierungsgruppengleichungen unter einer bestimmten Näherung zu Dyson–Schwinger-Gleichungen und die Anwendung des Variationsansatzes im Hamilton’schen Zugang ist auch unter Verwendung von Dyson–Schwinger-Gleichungen möglich [27, 28]. Diese wird sogar zwingend erforderlich, sofern ein nicht-Gauß’sches Vakuumfunktional betrachtet wird [26].

130–132] berechnet. Selbiges gilt für das chirale Quarkkondensat (2.94) als Ordnungsparameter der chiralen Symmetrie. Der Polyakov-Loop wurde zudem auch im Variationszugang in Landaueichung bestimmt [82].

In den folgenden beiden Kapiteln widmen wir uns der Erweiterung des im vorangegangenen Kapitel 3 vorgestellten Variationsansatzes im Hamilton'schen Zugang auf endliche Temperaturen und chemische Potentiale.

Hierzu berechnen wir in **Kapitel 4** die Großkanonische Zustandssumme durch Bildung der Spur des Dichteoperators und minimieren anschließend das Großkanonische Potential zur Bestimmung des thermodynamischen Gleichgewichtszustands. Entsprechende Berechnungen wurden in früheren Arbeiten für den reinen Yang–Mills-Sektor [87, 88] sowie unter Vernachlässigung der Quark-Gluon-Kopplung und Verwendung eines farbeinschließenden Potentials für ein effektives Quarkmodell [109, 133–137] durchgeführt. Wir formulieren diesen Zugang für ein System gekoppelter Quarks und Gluonen, wobei wir die Bewegungsgleichungen in einem ersten Schritt nur unter Vernachlässigung der Quark-Gluon-Kopplung ableiten. In diesem standardmäßigen Hamilton'schen Zugang zu endlichen Temperaturen und chemischen Potentialen lassen sich weder der Polyakov-Loop, noch das duale Quarkkondensat berechnen. Stattdessen zeigt sich der Deconfinement-Phasenübergang beispielsweise an geänderten IR-Exponenten der Gluonenergie und des Geistformfaktors.

In **Kapitel 5** verwenden wir den in Abschnitt 2.4.2 vorgestellten alternativen Hamilton'schen Zugang aus Referenz [67] zur Einführung endlicher Temperaturen durch Kompaktifizieren einer Raumdimension. Dieser gestattet uns die direkte Berechnung von Polyakov-Loop sowie dualem Quarkkondensat für ein gekoppeltes System von Quarks und Gluonen. Auch das stellt eine Erweiterung früherer Arbeiten dar, da der alternative Hamilton'sche Zugang bereits in Referenz [138] zur Beschreibung des reinen Yang–Mills-Sektors eingesetzt wurde, wobei die gefundenen Ergebnisse konsistent mit denjenigen des kanonischen Zugangs [87, 88] sind. Weiterhin wurde in Referenz [139, 140] der Polyakov-Loop für die reine Yang–Mills-Theorie in diesem Zugang berechnet. Die Erweiterung auf ein System gekoppelter Quarks und Gluonen sowie die erstmalige Auswertung des dualen Quarkkondensats stellen die wesentlichen Neuerungen der vorliegenden Arbeit dar.

## Vorwort zum kanonischen Zugang

Wir widmen uns im Folgenden dem kanonischen Zugang zur vollen QCD, welcher die natürliche Erweiterung des in Kapitel 3 vorgestellten Variationszugangs im Nulltemperaturlimes darstellt. In Abschnitt 4.1 gehen wir zunächst auf die von uns verwendete Basis zur Auswertung der Großkanonischen Zustandssumme sowie die zur Berechnung thermischer Erwartungswerte auf Zweischleifenniveau erforderlichen Näherungen und Techniken ein. Dabei werden wir uns sowohl an unserem Vorgehen im Nulltemperaturlimes, als auch an den Ergebnissen früherer Arbeiten im Yang–Mills- sowie im Quarksektor orientieren, welche wir ebenfalls kurz vorstellen werden. In Abschnitt 4.2 berechnen wir den Quarkpropagator sowie das chirale Quarkkondensat in führender Ordnung und gehen auf die zur Bestimmung des Großkanonischen Potentials erforderlichen Schritte und Techniken ein. Die explizite Auswertung des Großkanonischen Potentials sowie die Lösung der aus dessen Minimierung folgenden Bewegungsgleichungen erweisen sich als sehr aufwendig und werden daher lediglich für den Fall einer verschwindenden Quark-Gluon-Kopplung behandelt. Für das gekoppelte System stellt die Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension, auf

welche wir im folgenden Kapitel 5 eingehen werden, einen deutlich eleganteren Weg zur Einführung endlicher Temperaturen dar.

## 4.1 Grundlagen des kanonischen Zugangs zur QCD

### 4.1.1 Basis des Fockraums

Die Auswertung der Großkanonischen Zustandssumme (2.99) bzw. des Großkanonischen Potentials (2.103) ist in einer beliebigen Vielteilchenbasis des Fockraums möglich, was uns eine gewisse Freiheit für unsere Wahl gibt. Da sich die Theorie im Nulltemperaturlimes aus Konsistenzgründen auf die Ergebnisse aus Kapitel 3 reduzieren sollte, ist es naheliegend, dabei vom Vakuumwellenfunktional (3.1) auszugehen. Führen wir dem System durch Erhöhung der Temperatur oder Änderung des chemischen Potentials Energie zu, so werden aus diesem Vakuum heraus Quark- und Gluonzustände angeregt. Diese Anregungszustände bilden die gesuchte Basis des Fockraums. Da das Vakuum (3.1) in Form eines Produktzustands gewählt wurde und der QCD-Hamiltonian (2.64) in die Summe aus einem Quark- und einem Yang–Mills-Anteil zerfällt, werden wir annehmen, daß sämtliche Zustände  $|N\rangle$  der Basis ebenfalls die Produktform

$$|N[A]\rangle = |n_Q[A]\rangle \otimes |n_{YM}[A]\rangle \quad (4.1)$$

besitzen. Zur Berechnung von Erwartungswerten wird es sich dabei als hilfreich erweisen, für den Gluonanteil  $|n_{YM}\rangle$  die Zustände der in den Arbeiten [87, 88] betrachteten Vielteilchenbasis des Yang–Mills-Sektors zu verwenden.

Daneben wird es zwingend erforderlich sein, davon auszugehen, daß auch der Dichteoperator (2.102) in einen Quark- und einen Yang–Mills-Anteil zerfällt<sup>60</sup> und sich zudem der thermische Erwartungswert (2.101) eines beliebigen Operators  $O$  gemäß

$$\langle\langle O \rangle\rangle = \text{Sp}_{YM} \left[ \mathcal{D}_{YM} \text{Sp}_Q \left( \mathcal{D}_Q O \right) \right] = \sum_{n_{YM}} \langle n_{YM} | \mathcal{D}_{YM} \sum_{n_Q} \langle n_Q | \mathcal{D}_Q O | n_Q \rangle | n_{YM} \rangle \quad (4.2)$$

zerlegen läßt. Das stellt zwar nicht zwingend eine Näherung dar solange wir zulassen, daß die Basiszustände  $|n_Q\rangle$  und der Dichteoperator  $\mathcal{D}_Q$  des Quarkanteils Funktionale des Eichfelds sind und damit sämtliche Kopplungseffekte aufnehmen können. Zur Ausführung von Berechnungen werden wir aber zur Wahl konkreter Ausdrücke gezwungen sein, was wie im Nulltemperaturlimes mit Näherungen verbunden sein wird.

### 4.1.2 Großkanonisches Ensemble der Yang–Mills-Theorie

Da wir die Basiszustände (4.1) so wählen, daß ihr Gluonanteil den Vielteilchenzuständen des in Referenz [87, 88] betrachteten kanonischen Zugangs zum Yang–Mills-Sektor bei endlichen Temperaturen entspricht, ist es naheliegend, zunächst auf diesen einzugehen. Die dort verwendete Vielteilchenbasis aus Quasigluonzuständen entsteht durch Anregungen des in Abschnitt 3.1.2 eingeführten Gauß’schen Vakuumfunktionals (3.6). Zur Beschreibung dieser Anregungszustände zerlegen wir das Eichfeld sowie den kanonischen Impulsoperator

<sup>60</sup>Da der Yang–Mills-Anteil (2.65) des QCD-Hamiltonians nicht mit dem Quarkanteil (2.66) vertauscht, ist das für den Dichteoperator (2.102) nicht exakt gegeben.

analog zur algebraischen Behandlung des quantenmechanischen harmonischen Oszillators in *Erzeuger-* und *Vernichtoperatoren*,

$$A_i^a(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p})}} \left( \mathbf{a}_i^a(\mathbf{p}) + \mathbf{a}_i^{a\dagger}(-\mathbf{p}) \right), \quad (4.3)$$

$$\Pi_i^a(\mathbf{p}) = i\sqrt{\frac{\omega(\mathbf{p})}{2}} \left( \mathbf{a}_i^{a\dagger}(\mathbf{p}) - \mathbf{a}_i^a(-\mathbf{p}) \right), \quad (4.4)$$

wobei  $\omega$  der im Funktional (3.6) enthaltene Variationskern ist. Dieser wird *nicht* aus dem Nulltemperaturlimes übernommen, sondern durch Minimieren des Großkanonischen Potentials bestimmt, was eine bessere Beschreibung des thermodynamischen Gleichgewichtszustands und der bei endlichen Temperaturen auftretenden Effekte erlaubt. Die Erzeuger- und Vernichtoperatoren erfüllen die üblichen Vertauschungsrelationen

$$\left[ \mathbf{a}_i^a(\mathbf{p}), \mathbf{a}_j^{b\dagger}(\mathbf{q}) \right] = t_{ij}(\mathbf{p}) \delta^{ab} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (4.5a)$$

$$\left[ \mathbf{a}_i^a(\mathbf{p}), \mathbf{a}_j^b(\mathbf{q}) \right] = 0 \quad (4.5b)$$

und es läßt sich leicht zeigen, daß der Vernichtoperator den Vakuumzustand (3.6) auslöscht,

$$\mathbf{a}_i^a(\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}}[A] = 0 \quad \forall i, a, \mathbf{p}. \quad (4.6)$$

Durch Anwenden der Erzeugeroperatoren auf den Vakuumzustand  $\tilde{\phi}_{\text{YM}}$  entstehen damit Quasigluonzustände, welche eine Basis des gluonischen Fockraums bilden:

$$\left\{ |\tilde{n}\rangle \right\} \equiv \left\{ |\tilde{\phi}_{\text{YM}}\rangle, \mathbf{a}_i^{a\dagger}(\mathbf{p})|\tilde{\phi}_{\text{YM}}\rangle, \mathbf{a}_i^{a\dagger}(\mathbf{p})\mathbf{a}_j^{b\dagger}(\mathbf{q})|\tilde{\phi}_{\text{YM}}\rangle, \dots \right\} \quad (4.7)$$

Wie im Matricelement (2.46) des Nulltemperaturlimes tritt bei Bildung der Spur über den gluonischen Fockraum infolge der Eichfixierung mithilfe der Faddeev–Popov-Methode (siehe Abschnitt 2.2) ein Faktor der Faddeev–Popov-Determinante  $J$  [Gleichung (2.47)] auf. Daher wurden in Referenz [87, 88] analog zum Nulltemperaturlimes anstelle der Basis (4.7) die Vielteilchenzustände

$$\left\{ |n\rangle \right\} \equiv \left\{ \mathcal{N}_{\text{YM}} J^{-\frac{1}{2}}[A] |\tilde{n}\rangle \right\} \quad (4.8)$$

zur Berechnung thermischer Erwartungswerte verwendet, wobei  $\mathcal{N}_{\text{YM}}$  die durch  $\langle n|n\rangle = 1$  definierte Normierungskonstante bezeichnet.<sup>61</sup> Wie in Abschnitt 3.1.2 erläutert, ist die Anwesenheit der Faddeev–Popov-Determinante in den Zuständen  $|n\rangle$  von großer Bedeutung für die Realisierung des Farbeinschlusses.

Wir merken an, daß die Zustände der Basis (4.7) und somit auch diejenigen in Gleichung (4.8) i.A. nicht farbneutral sind, d.h. es gilt

$$Q_{\text{YM}}^a |\tilde{n}\rangle \neq 0 \quad (4.9)$$

mit dem gluonischen *Farbladungsoperator*

$$Q_{\text{YM}}^a = \int d^3x \rho_{\text{YM}}^a(\mathbf{x}), \quad (4.10)$$

<sup>61</sup>Aufgrund der Vertauschungsrelationen (4.5) besitzen sämtliche Vielteilchenzustände  $|n\rangle$  dieselbe Normierung, sodaß  $\mathcal{N}_{\text{YM}}$  mit der Normierung des Vakuumfunktionals (3.2) übereinstimmt.

wobei  $\rho_{\text{YM}}$  die in Gleichung (2.60) gegebene Farbladungsdichte ist. Da in der Natur ausschließlich farbneutrale Objekte auftreten, sollte das statistische Ensemble zur Bildung thermischer Erwartungswerte jedoch farbneutral sein. Daher wurden die Zustände (4.7) in Referenz [87] vor Bildung von Erwartungswerten zunächst auf ihren farbneutralen Anteil projiziert. Es zeigte sich, daß die Auswirkungen einer solchen Projektion vernachlässigbar sind weshalb in der späteren Arbeit [88] darauf verzichtet wurde. Wir werden dies im Folgenden ebenfalls tun.

Da Gluonen nicht dem Einfluß eines chemischen Potentials unterliegen, ergibt sich der Dichteoperator im Yang–Mills-Sektor unmittelbar aus dem Hamiltonian (2.65),

$$\mathcal{D}_{\text{YM}} = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{YM}}} \exp(-\beta \bar{H}_{\text{YM}}). \quad (4.11)$$

Unter Verwendung der Basis (4.8) finden wir damit für den thermischen Erwartungswert eines beliebigen Operators  $O[A, \Pi]$

$$\begin{aligned} \langle\langle O[A, \Pi] \rangle\rangle_{\text{YM}} &= \text{Sp}_{\text{YM}} \left[ \mathcal{D}_{\text{YM}} O[A, \Pi] \right] \\ &= \sum_n \langle n | J[A] \mathcal{D}_{\text{YM}} O[A, \Pi] | n \rangle \\ &= |\mathcal{N}_{\text{YM}}|^2 \sum_n \langle \tilde{n} | \tilde{\mathcal{D}}_{\text{YM}} \tilde{O}[A, \Pi] | \tilde{n} \rangle \equiv \|\tilde{O}[A, \Pi]\|_{\text{YM}}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

wobei wir analog zum Nulltemperaturlimes [siehe Gleichung (3.5)] den transformierten (Dichte-)Operator

$$\tilde{O}[A, \Pi] \equiv J^{\frac{1}{2}}[A] O[A, \Pi] J^{-\frac{1}{2}}[A], \quad (4.13)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\text{YM}} = J^{\frac{1}{2}}[A] \mathcal{D}_{\text{YM}} J^{-\frac{1}{2}}[A] \quad (4.14)$$

eingeführt haben. Da der Yang–Mills-Hamiltonian  $\bar{H}_{\text{YM}}$  (2.65) ein nicht-lokales Objekt darstellt, läßt sich der thermische Erwartungswert (4.12) nicht ohne weitere Näherungen auswerten. In Referenz [87, 88] wurde der transformierte Dichteoperator daher durch

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\text{YM}} \approx \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{YM}}} \exp(-\beta h_{\text{YM}}) \quad (4.15)$$

mit dem diagonalen, effektiven Einteilchen-Hamiltonian

$$h_{\text{YM}} = \int \mathrm{d}^3 p \mathbf{a}_i^{a\dagger}(\mathbf{p}) \Omega_{ij}^{ab}(\mathbf{p}) \mathbf{a}_j^b(\mathbf{p}) \quad (4.16)$$

ersetzt. Dadurch besitzen sämtliche entstehende Funktionalintegrale eine Gauß'sche Gestalt und lassen sich explizit ausführen. Die im effektiven Hamiltonian enthaltene *effektive Einteilchenenergie*  $\Omega$  kann – wie der Variationskern  $\omega$  – aufgrund der Isotropie von Farb- und Impulsraum sowie der Transversalität der Felder lediglich eine transversale, farbdiaagonale Funktion des Betrags des Impulses sein,

$$\Omega_{ij}^{ab}(\mathbf{p}) = \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{p}) \Omega(p). \quad (4.17)$$

Die verbleibende skalare Funktion  $\Omega$  wird gemäß des Variationsprinzips durch Minimieren des Großkanonischen Potentials optimiert, um die Einschränkungen durch die Näherung (4.15) möglichst gering zu halten.

Die Faddeev–Popov-Determinante verschwindet vollständig aus dem thermischen Erwartungswert (4.12) sofern der Operator  $O$  nicht explizit vom kanonischen Impuls abhängt. Das ist beispielsweise für den statischen Gluonpropagator

$$D_{ij}^{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \langle\langle A_i^a(\mathbf{p}) A_j^b(\mathbf{q}) \rangle\rangle_{\text{YM}} = \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \frac{1 + 2n(p)}{2\omega(p)} \quad (4.18)$$

der Fall, wobei wir die *bosonische thermische Besetzungszahl*

$$n(p) = \frac{1}{\exp(\beta\Omega(p)) - 1} \quad (4.19)$$

eingeführt haben (siehe Anhang B.2.1 für eine Erläuterung zur expliziten Berechnung bosonischer thermischer Erwartungswerte). Der Gluonpropagator spielt wie im Limes  $T \rightarrow 0$  eine besondere Rolle, da durch die Verwendung eines diagonalen Einteilchen-Hamiltonians im Dichteoperator (4.15) das Wick'sche Theorem gilt und sich der thermische Erwartungswert beliebiger Potenzen des Eichfelds durch Gluonpropagatoren ausdrücken läßt. Äquivalent dazu ergibt sich der Erwartungswert eines beliebigen, nicht Impuls-abhängigen Operators  $O$  gemäß

$$\langle\langle O[A] \rangle\rangle_{\text{YM}} = \left\{ \exp \left( \frac{1}{4} \int \mathrm{d}^3p \frac{\delta}{\delta A_i^a(\mathbf{p})} t_{ij}(\mathbf{p}) \frac{1 + 2n(p)}{\omega(p)} \frac{\delta}{\delta A_j^a(-\mathbf{p})} \right) O[A] \right\} \Big|_{A=0}, \quad (4.20)$$

siehe Anhang B.2.1.

Analog zum statischen Gluonpropagator (4.18) findet man die beiden weiteren Propagatoren

$$\|\Pi_i^a(\mathbf{p}) \Pi_j^b(\mathbf{q})\|_{\text{YM}} = \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \omega(p) \frac{1 + 2n(p)}{2}, \quad (4.21a)$$

$$\|A_i^a(\mathbf{p}) \Pi_j^b(\mathbf{q})\|_{\text{YM}} = \frac{i}{2} \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (4.21b)$$

welche bei der Berechnung des thermischen Erwartungswerts von kinetischer Energie (2.56) und Farb-Coulombwechselwirkung (2.58) verwendet werden können, sowie den Erwartungswert

$$\|\mathbf{a}_i^{a\dagger}(\mathbf{p}) \mathbf{a}_j^b(\mathbf{q})\|_{\text{YM}} = \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) n(p) \quad (4.22)$$

für ein Paarung aus Erzeuger- und Vernichteroperator.

Die Bestimmung des thermischen Erwartungswerts  $\langle\langle \bar{H}_{\text{YM}} \rangle\rangle_{\text{YM}}$  des Yang–Mills-Hamiltonians (2.65) ist mithilfe der Propagatoren (4.18) und (4.21) völlig analog zum Nulltemperaturlimes möglich. Für eine Berechnung auf Zweischleifenniveau lassen sich dabei dieselben Annahmen bezüglich des Coulombkerns sowie der Faddeev–Popov-Determinante wie in Abschnitt 3.1.2 machen, siehe Gleichung (3.14) und (3.15). Dabei ist jeweils der Nulltemperatur- durch den thermischen Erwartungswert zu ersetzen [88]. Zur Auswertung des Großkanonischen Potentials (2.103) ist zudem die Berechnung der Entropie (2.104)

$$\mathcal{S}_{\text{YM}} = \ln \mathcal{Z}_{\text{YM}} - \beta \frac{\partial \ln \mathcal{Z}_{\text{YM}}}{\partial \beta} \quad (4.23)$$



erforderlich, während der fermionischen Teilchenzahloperator (2.100) im Yang–Mills-Sektor offenbar verschwindet.<sup>62</sup>

Durch Minimieren des Großkanonischen Potentials als Funktion des gluonischen Variationskerns  $\omega$  und der effektiven Einteilchenenergie  $\Omega$  ergibt sich ein System aus zwei Integralgleichungen erster Ordnung – die Gapgleichung für  $\omega$  sowie die für  $T = 0$  nicht vorhandene Gleichung für  $\Omega$ . An dieses sind wie im Nulltemperaturlimes die Bestimmungsgleichungen für den Coulomb- $f$  [siehe (3.10)] sowie den Geistformfaktor  $d$  [siehe (3.11)] gekoppelt, welche sich als Dyson–Schwinger-Gleichungen im Zuge einer diagrammatischen Entwicklung ergeben. Dieses Gleichungssystem wurde in Referenz [88] numerisch gelöst, wobei der Beitrag der Farb-Coulombwechselwirkung – welcher nur wenig Einfluß auf den Gluonsektor besitzt – vernachlässigt wurde. Das führt zu der zusätzlichen Vereinfachung  $\Omega(p) \approx \omega(p)$ . Die bei endlichen Temperaturen gefundenen Lösungen für die Gluonenergie  $\omega$  sowie den Geistformfaktor  $d$  stimmen für große Impulse mit derjenigen für  $T = 0$  überein, während sich bei kleinen Impulsen oberhalb einer kritischen Temperatur deutliche Unterschiede zeigen. Diese äußern sich jeweils durch eine Änderung des IR-Exponenten, wobei bei der Gluonenergie anstelle der  $1/p$ -Divergenz ein Plateau auftritt. Das ist ein Anzeichen für die Aufhebung des Farbeinschlusses und gestattet die Bestimmung der kritischen Temperatur des Deconfinement-Phasenübergangs.

### 4.1.3 Basis des fermionischen Fockraums

Als nächstes widmen wir uns der Form des fermionischen Anteils der Zustände (4.1) der Vielteilchenbasis des Fockraums.

Der Quarksektor wurde bereits in verschiedenen Arbeiten [109, 133–137] im kanonischen Zugang bei endlichen Temperaturen und chemischen Potentials betrachtet. Dabei wurde die Quark-Gluon-Kopplung vernachlässigt und eine Quarkwechselwirkung über ein effektives, farbeinschließendes Potential vorausgesetzt. Das entspricht der Erweiterung des sich in Kapitel 3 im Limes  $g \rightarrow 0$  ergebenden und beispielsweise in den Arbeiten [105–108] betrachteten Quarkmodells auf endliche Temperaturen und chemische Potentials. Zur Bildung der Spur über den fermionischen Fockraum wurde hierbei die aus Anregungen des BCS-Funktional (3.27) gebildete Basis von Vielteilchenzuständen

$$\begin{aligned} \left\{ |n_{\mathcal{A}n_{\mathcal{B}}}\rangle \right\} \equiv & \left\{ |\phi_{\mathcal{Q}}\rangle, \right. \\ & \mathcal{A}^\dagger(1)|\phi_{\mathcal{Q}}\rangle, \mathcal{B}^\dagger(1)|\phi_{\mathcal{Q}}\rangle, \\ & \left. \mathcal{A}^\dagger(1)\mathcal{A}^\dagger(2)|\phi_{\mathcal{Q}}\rangle, \mathcal{B}^\dagger(1)\mathcal{B}^\dagger(2)|\phi_{\mathcal{Q}}\rangle, \mathcal{A}^\dagger(1)\mathcal{B}^\dagger(2)|\phi_{\mathcal{Q}}\rangle, \dots \right\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

verwendet. Die fermionischen Quasiteilchenoperatoren  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  ergeben sich wie im Yang–Mills-Sektor als Vernichter des Vakuumfunktional (3.27),

$$\mathcal{A}^{m,s}(\mathbf{p})|\phi_{\mathcal{Q}}\rangle = \mathcal{B}^{m,s}(\mathbf{p})|\phi_{\mathcal{Q}}\rangle = 0 \quad \forall m, s, \mathbf{p}, \quad (4.25)$$

und gehen formal durch eine Bogoljubovtransformation aus den ursprünglichen fermionischen Operatoren  $a^{(\dagger)}$ ,  $b^{(\dagger)}$  (vgl. Abschnitt 2.2.4) hervor, siehe unten. Durch die Bedingung

<sup>62</sup>Insbesondere stimmen damit im Yang–Mills-Sektor das Großkanonische Potential sowie die Freie Energie  $\mathcal{F} = \langle\langle H \rangle\rangle - TS$  formal überein.

(4.25) besitzen die Quasiteilchenoperatoren eine Abhängigkeit vom Skalarkern  $S$  des BCS-Funktional (3.27), welcher analog zum Yang–Mills-Sektor nicht aus dem Nulltemperaturlimes übernommen, sondern durch Minimieren des Großkanonischen Potentials bestimmt wird.

Da der Hamiltonian (3.29) des betrachteten Quarkmodells durch Anwesenheit des Coulombterms (2.63) ein nicht-lokales Objekt darstellt, ist zur Auswertung der Spur über dem Fockraum wie im Yang–Mills-Sektor die Ersetzung des Hamiltonians im Dichteoperator

$$\mathcal{D}_Q = \frac{1}{\mathcal{Z}_Q} \exp(-\beta(\bar{H}_Q - \mu N)) \quad (4.26)$$

durch einen effektiven diagonalen Operator

$$h_Q = \int \bar{d}^3 p \left[ \mathcal{A}^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) \varepsilon_+(p) \mathcal{A}^{s,m}(\mathbf{p}) + \mathcal{B}^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) \varepsilon_-(p) \mathcal{B}^{s,m}(\mathbf{p}) \right] \quad (4.27)$$

erforderlich.<sup>63</sup> Die Quasiteilchenenergien  $\varepsilon_{\pm}$  ergeben sich wie der Skalarkern  $S$  im BCS-Wellenfunktional (3.27) durch Minimieren des Großkanonischen Potentials. Das führt auf ein System dreier gekoppelter Integralgleichungen, welches in Referenz [133] für  $\mu = 0$  hergeleitet und in späteren Arbeiten auf  $\mu \neq 0$  erweitert und unter Einschränkungen numerisch gelöst wurde, siehe z.B. [109, 134–137]. Dabei zeigt sich im Limes chiraler Quarks in der numerischen Lösung für den Skalarkern  $S$  und somit auch im Quarkkondensat ein Phasenübergang zweiter Ordnung. Allerdings liegt die gefundene kritische Temperatur für die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie – wie die chiralen Größen im Nulltemperaturlimes – deutlich unterhalb der Erwartungen aus Gitterrechnungen [137]. Bei Berücksichtigung einer nicht-verschwindenden nackten Quarkmasse  $m_Q$  schmiert der Phasenübergang erwartungsgemäß zu einem Crossover aus [109, 136].

Für die vorliegende Arbeit erweitern wir diesen Ansatz wie im Nulltemperaturlimes, indem wir das BCS-Wellenfunktional durch das Eichfeld-abhängige Funktional

$$|\phi_Q[A]\rangle = \exp\left(-\int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q K^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) a^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) b^{t,n\dagger}(\mathbf{q})\right) |0\rangle \quad (4.28)$$

ersetzen, vgl. Gleichung (3.30). Für den Variationskern  $K$  gilt hierbei die Zerlegung

$$K^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = K_0^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + K_1^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (4.29)$$

wobei der Eichfeld-unabhängige Anteil weiterhin durch den Skalarkern  $S$  gegeben ist,

$$K_0^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \delta^{mn} \delta^{st} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) s S(p), \quad (4.30)$$

wir den Eichfeld-abhängigen Kopplungsanteil  $K_1$  jedoch nicht näher spezifizieren werden. Die Ursache dafür ist, daß  $K_1$  zwar sicher die im Nulltemperaturlimes verwendeten Vektorkerne [siehe Gleichung (3.31)] enthalten wird, es allerdings prinzipiell möglich ist, daß bei endlichen Temperaturen weitere Diracstrukturen berücksichtigt werden müßten, welche in der störungstheoretischen Betrachtung für  $T = 0$  nicht sichtbar sind. Tatsächlich werden wir in Kürze sehen, daß zumindest der statische Quarkpropagator für endliche Temperaturen eine im Nulltemperaturlimes nicht vorhandene zusätzliche Diracstruktur enthält.

<sup>63</sup>Dabei ersetzen wir im Folgenden zur Erlangung einer möglichst kompakten Darstellung auch den an sich diagonalen Teilchenzahloperator (2.100), d.h.  $\bar{H}_Q - \mu N \rightarrow h_Q$ .

Die zur Konstruktion der Basis (4.24) aus Vielteilchenzuständen erforderlichen Quasiteilchenoperatoren  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  ergeben sich aus der Forderung  $\mathcal{A}|\phi_Q[A]\rangle = \mathcal{B}|\phi_Q[A]\rangle = 0$  zu

$$\mathcal{A}(1) = \mathcal{U}(1, 2) \left[ a(2) + K(2, 3)b^\dagger(3) \right], \quad (4.31)$$

$$\mathcal{B}(1) = \mathcal{V}(1, 2) \left[ b(2) - K(3, 2)a^\dagger(3) \right] \quad (4.32)$$

und sind über den Variationskern  $K$  explizit Eichfeld-abhängig. Der Zusammenhang (4.31), (4.32) entspricht dabei einer Bogoljubovtransformation. Setzen wir voraus, daß die Quasiteilchenoperatoren den üblichen Vertauschungsrelationen

$$\left\{ \mathcal{A}^{s,m}(\mathbf{p}), \mathcal{A}^{t,n\dagger}(\mathbf{q}) \right\} = \left\{ \mathcal{B}^{s,m}(\mathbf{p}), \mathcal{B}^{t,n\dagger}(\mathbf{q}) \right\} = \delta^{st} \delta^{mn} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (4.33a)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{A}^{s,m}(\mathbf{p}), \mathcal{A}^{t,n}(\mathbf{q}) \right\} &= \left\{ \mathcal{B}^{s,m}(\mathbf{p}), \mathcal{B}^{t,n}(\mathbf{q}) \right\} \\ &= \left\{ \mathcal{A}^{s,m}(\mathbf{p}), \mathcal{B}^{t,n}(\mathbf{q}) \right\} = \left\{ \mathcal{A}^{s,m}(\mathbf{p}), \mathcal{B}^{t,n\dagger}(\mathbf{q}) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.33b)$$

genügen, so müssen die Amplituden  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  die Bestimmungsgleichungen

$$\mathcal{U}^\dagger(1, 3)\mathcal{U}(3, 2) = \left[ \text{id} + KK^\dagger \right]^{-1}(1, 2), \quad (4.34a)$$

$$\mathcal{V}^\dagger(1, 3)\mathcal{V}(3, 2) = \left[ \text{id} + K^\dagger K \right]^{-1}(2, 1) \quad (4.34b)$$

erfüllen woraus sich für die Rücktransformation zu den ursprünglichen Operatoren

$$a(1) = \mathcal{U}^\dagger(1, 2)\mathcal{A}(2) - K(1, 2)\mathcal{V}(3, 2)\mathcal{B}(3), \quad (4.35)$$

$$b(1) = \mathcal{V}^\dagger(1, 2)\mathcal{B}(2) + \mathcal{U}(3, 2)K(2, 1)\mathcal{A}^\dagger(3) \quad (4.36)$$

ergibt.

Die Bestimmungsgleichungen (4.34) lassen sich lediglich im Limes  $g = 0$  (d.h.  $K_1 = 0$ ) explizit auflösen, da andernfalls der Operator auf der rechten Seite nicht diagonal ist. Zur Berechnung thermischer Erwartungswerte sind wir daher gezwungen, einen Ansatz für die Form von  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{V}$  zu machen. Eine pragmatische Wahl stellt

$$\mathcal{U}(1, 2) = \left[ \text{id} + KK^\dagger \right]^{-\frac{1}{2}}(1, 2) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} [KK^\dagger]^n(1, 2), \quad (4.37a)$$

$$\mathcal{V}(1, 2) = \left[ \text{id} + K^\dagger K \right]^{-\frac{1}{2}}(2, 1) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} [K^\dagger K]^n(2, 1) \quad (4.37b)$$

dar, was offenbar Gleichung (4.34) genügt, den korrekten Limes  $K_1 = 0$  besitzt und  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\dagger$ ,  $\mathcal{V} = \mathcal{V}^\dagger$  bedingt.

Der fermionische Anteil der Zustände (4.1) der Basis des Fockraums ergibt sich wie in Gleichung (4.24) durch Anwenden der Quasiteilchenerzeuger  $\mathcal{A}^\dagger$ ,  $\mathcal{B}^\dagger$  auf das Vakuumwellenfunktional (4.28),  $|n_Q\rangle = |n_{\mathcal{A}n_{\mathcal{B}}}\rangle$ . Diese fermionischen Zustände sind nicht normiert, sondern es gilt aufgrund der Vertauschungsrelation (4.33)

$$\langle n_{\mathcal{A}n_{\mathcal{B}}} | n_{\mathcal{A}n_{\mathcal{B}}} \rangle = I[A] \quad (4.38)$$

mit der im Nulltemperaturlimes bestimmten Fermideterminante (3.51). Wie für  $T = 0$  normieren wir die Basiszustände (4.1), indem wir die Fermideterminante äquivalent zur Faddeev–Popov-Determinante in den bosonischen Anteil der Zustände [vgl. (4.8)] einfließen lassen,

$$\{|n_{\text{YM}}\rangle\} \equiv \left\{ \mathcal{N} I^{-\frac{1}{2}}[A] J^{-\frac{1}{2}}[A] |\tilde{n}\rangle \right\}. \quad (4.39)$$

Dieser geht aus der Vielteilchenbasis des Yang–Mills-Sektors [Gleichung (4.7)] hervor und trägt zudem einen globalen Normierungsfaktor  $\mathcal{N}$ .

#### 4.1.4 Berechnung thermischer Erwartungswerte

Unter Verwendung des fermionischen (4.24) und bosonischen Anteils (4.39) der Vielteilchenzustände ergibt sich für den gemäß Gleichung (4.2) separierten thermischen Erwartungswert eines beliebigen Operators  $O$

$$\langle\langle O[A, \Pi, \Psi] \rangle\rangle = |\mathcal{N}|^2 \sum_n \langle \tilde{n} | \tilde{\mathcal{D}}_{\text{YM}} \langle\langle \tilde{O}[A, \Pi, \Psi] \rangle\rangle_{\text{Q}} | \tilde{n} \rangle \equiv \| \langle\langle \tilde{O}[A, \Pi, \Psi] \rangle\rangle_{\text{Q}} \|. \quad (4.40)$$

Dabei haben wir den transformierten (Dichte-)Operator [vgl. Gleichung (3.46)]

$$\tilde{O}[A, \Pi, \Psi] = J^{\frac{1}{2}}[A] I^{\frac{1}{2}}[A] O[A, \Pi, \Psi] J^{-\frac{1}{2}}[A] I^{-\frac{1}{2}}[A], \quad (4.41)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\text{YM}} = I^{-\frac{1}{2}}[A] J^{\frac{1}{2}}[A] \mathcal{D}_{\text{YM}} J^{-\frac{1}{2}}[A] I^{\frac{1}{2}}[A] \quad (4.42)$$

sowie den fermionischen thermischen Erwartungswert

$$\langle\langle O \rangle\rangle_{\text{Q}} \equiv \sum_{n_{\mathcal{A}}, n_{\mathcal{B}}} I^{-1}[A] \langle n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} | \mathcal{D}_{\text{Q}} O | n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}} \rangle \quad (4.43)$$

eingeführt. Man beachte, daß im transformierten bosonischen Dichteoperator (4.42) die Fermi- und die Faddeev–Popov-Determinante *nicht* in identischer Form eingehen.

Da sowohl der Yang–Mills-, als auch der Quarkanteil des QCD-Hamiltonians (2.64) nicht-lokale Terme enthalten, ersetzen wir den bosonischen sowie den fermionischen Dichteoperator wie oben beschrieben durch

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\text{YM}} = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{YM}}} \exp(-\beta h_{\text{YM}}), \quad (4.44)$$

$$\mathcal{D}_{\text{Q}} = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{Q}}} \exp(-\beta h_{\text{Q}}) \quad (4.45)$$

mit den in Gleichung (4.16) und (4.27) gegebenen effektiven Einteilchen-Operatoren. Die Zustandssumme  $\mathcal{Z}_{\text{YM}, \text{Q}}$  folgt dabei jeweils aus der Forderung  $\langle\langle \text{id} \rangle\rangle_{\text{Q}} = \|\text{id}\| = 1$ . Für einen Operator, welcher nicht explizit vom kanonischen Impuls abhängt ist, finden wir wie im Yang–Mills-Sektor [vgl. Gleichung (4.20)]

$$\langle\langle O[A, \Psi] \rangle\rangle = \left\{ \exp \left( \frac{1}{4} \int \mathrm{d}^3 p \frac{\delta}{\delta A_i^a(\mathbf{p})} t_{ij}(\mathbf{p}) \frac{1 + 2n(p)}{\omega(p)} \frac{\delta}{\delta A_j^a(-\mathbf{p})} \right) \langle\langle O[A, \Psi] \rangle\rangle_{\text{Q}} \right\} \Big|_{A=0} \quad (4.46)$$

mit der bosonischen Besetzungszahl (4.19). Falls eine explizite Impuls-Abhängigkeit besteht, müssen in Analogie zum Nulltemperaturlimes zunächst sämtliche Funktionalableitungen ausgeführt werden, bevor der fermionische Erwartungswert (4.43) bestimmt und Gleichung (4.46) ausgewertet werden können.

### Fermionischer Anteil des thermischen Erwartungswerts

Die Ersetzung des Hamiltonians im fermionischen Dichteoperator durch den diagonalen Operator (4.27) ermöglicht zusammen mit dem in Form einer Slaterdeterminante gewählten Vakuumfunktional (4.28) die Anwendung des Wick'schen Theorems. Der fermionische thermische Erwartungswert eines beliebigen Produkts von Quarkoperatoren läßt sich daher durch den Erwartungswert fermionischer Operatorpaare darstellen, vgl. die entsprechende Aussage im Nulltemperaturlimes (Anhang B.1.2). Die konkrete Berechnung – siehe Anhang B.2.2 – liefert für die fermionischen Operatorpaare die Erwartungswerte

$$\langle\langle \mathcal{A}^\dagger(1)\mathcal{A}(2) \rangle\rangle_{\text{Q}} = \text{id}(1,2)\mathcal{N}_+(p_1), \quad (4.47a)$$

$$\langle\langle \mathcal{B}^\dagger(1)\mathcal{B}(2) \rangle\rangle_{\text{Q}} = \text{id}(1,2)\mathcal{N}_-(p_1), \quad (4.47b)$$

$$\langle\langle \mathcal{A}(1)\mathcal{A}(2) \rangle\rangle_{\text{Q}} = \langle\langle \mathcal{A}(1)\mathcal{B}(2) \rangle\rangle_{\text{Q}} = \langle\langle \mathcal{A}^\dagger(1)\mathcal{B}(2) \rangle\rangle_{\text{Q}} = \langle\langle \mathcal{B}(1)\mathcal{B}(2) \rangle\rangle_{\text{Q}} = 0, \quad (4.47c)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle a(1)a^\dagger(2) \rangle\rangle_{\text{Q}} &= \mathcal{U}(1,3)\mathcal{U}(3,2)[1 - \mathcal{N}_+(p_3)] \\ &\quad + K(1,3)\mathcal{V}(4,3)\mathcal{V}(5,4)K^\dagger(5,2)\mathcal{N}_-(p_4), \end{aligned} \quad (4.47d)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle a(1)b(2) \rangle\rangle_{\text{Q}} &= \mathcal{U}(1,3)\mathcal{U}(3,4)K(4,2)[1 - \mathcal{N}_+(p_3)] \\ &\quad - K(1,3)\mathcal{V}(4,3)\mathcal{V}(2,4)\mathcal{N}_-(p_4), \end{aligned} \quad (4.47e)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle a^\dagger(1)b^\dagger(2) \rangle\rangle_{\text{Q}} &= K^\dagger(2,4)\mathcal{U}(4,3)\mathcal{U}(3,1)\mathcal{N}_+(p_3) \\ &\quad - K^\dagger(3,1)\mathcal{V}(3,4)\mathcal{V}(4,2)[1 - \mathcal{N}_-(p_4)], \end{aligned} \quad (4.47f)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle b(1)b^\dagger(2) \rangle\rangle_{\text{Q}} &= \mathcal{V}(1,3)\mathcal{V}(3,2)[1 - \mathcal{N}_-(p_3)] \\ &\quad + K(3,1)\mathcal{U}(4,3)K^\dagger(2,5)\mathcal{U}(5,4)\mathcal{N}_+(p_4), \end{aligned} \quad (4.47g)$$

wobei sich hier nicht genannte Paarungen mithilfe der Vertauschungsrelationen (2.73) bzw. (4.33) ergeben,

$$\text{id}(1,2) = \delta^{s_1 s_2} \delta^{m_1 m_2} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \quad (4.48)$$

ist und die *fermionischen thermischen Besetzungszahlen*

$$\mathcal{N}_\pm(p) = \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon_\pm(p)) + 1} \quad (4.49)$$

eingeführt wurden.

### Bosonischer Anteil des thermischen Erwartungswerts

Nach Ausführen möglicher Funktionalableitungen sowie Bilden des fermionischen Erwartungswerts (4.43) verbleibt für den bosonischen Anteil am thermischen Erwartungswert lediglich die Auswertung von Gleichung (4.46). Wie im Nulltemperaturlimes ist dies für den thermischen Erwartungswert fermionischer Operatoren nicht in geschlossener Form möglich, weshalb wir in Analogie zu Kapitel 3 auf die auf Zweischleifenniveau konsistente Entwicklung

$$\langle\langle O[A, \Psi] \rangle\rangle \approx \langle\langle O[A=0, \Psi] \rangle\rangle_{\text{Q}} + \frac{1}{4} \int \mathrm{d}^3p \frac{\delta}{\delta A_i^a(\mathbf{p})} t_{ij}(\mathbf{p}) \frac{1 + 2n(p)}{\omega(p)} \frac{\delta}{\delta A_j^a(-\mathbf{p})} \langle\langle O[A, \Psi] \rangle\rangle_{\text{Q}} \Big|_{A=0} \quad (4.50)$$

zurückgreifen werden. Davon unbenommen bleibt für den thermischen Erwartungswert von (endlichen) Potenzen des Eichfelds Gleichung (4.46) und damit das (bosonische) Wick'sche Theorem erhalten. Für den statischen Gluonpropagator gilt daher [vgl. (4.18)]

$$D_{ij}^{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \langle\langle A_i^a(\mathbf{p}) A_j^b(\mathbf{q}) \rangle\rangle = \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \frac{1 + 2n(p)}{2\omega(p)}. \quad (4.51)$$

Mithilfe von Gleichung (4.50) ist die Berechnung thermischer Erwartungswerte völlig analog zum Nulltemperaturlimes möglich, wobei wir lediglich noch auf die Behandlung der Bogoljubov-Amplituden  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  (4.37) eingehen müssen. Die in Gleichung (4.50) enthaltene Funktionalableitung führt hier zur Entstehung einer Potenzreihe, welche mit Termen der Form

$$\frac{\delta}{\delta A(9)} \mathcal{U}(1, 2) \sim -\frac{1}{2} [\text{id} + KK^\dagger]^{-\frac{z_1}{2}}(1, 3) \frac{\delta(KK^\dagger)(3, 4)}{\delta A(9)} [\text{id} + KK^\dagger]^{-\frac{z_2}{2}}(4, 2) \quad (4.52)$$

verknüpft ist, wobei  $z_1 + z_2 = 3$  gilt. Die genauen Werte von  $z_1$ ,  $z_2$  sind aber nicht offensichtlich. Da die Amplituden stets paarweise auftreten, siehe Gleichung (4.47), ist eine Wahl naheliegend, die dafür sorgt, daß die Summe der Exponenten benachbarter Faktoren ganzzahlig ist. Beispielsweise ergibt sich dadurch

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{U}(1, 2) \mathcal{U}(2, 3)}{\delta A(9)} &\sim -\frac{1}{2} [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(1, 4) \frac{\delta(KK^\dagger)(4, 5)}{\delta A(9)} \mathcal{U}(5, 2) \mathcal{U}(2, 3) \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathcal{U}(1, 2) \mathcal{U}(2, 4) \frac{\delta(KK^\dagger)(4, 5)}{\delta A(9)} [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(5, 3). \end{aligned} \quad (4.53)$$

## 4.2 Statischer Quarkpropagator, Großkanonisches Potential und Variationsgleichungen

Die Berechnung von statischem Quarkpropagator und Großkanonischem Potential ist zwar analog zum Nulltemperaturlimes möglich, jedoch steigt der erforderliche Aufwand zur Bildung des bosonischen Erwartungswerts fermionischer Operatoren durch die Einführung endlicher Temperaturen stark an. Die Ursache hierfür liegt in der bei  $T > 0$  deutlich höheren Anzahl an Termen in den Erwartungswerten fermionischer Operatorpaare. Beispielsweise enthält derjenige von  $aa^\dagger$  bei  $T = 0$  einen und für  $T > 0$  die Summe aus zwei und vier Termen, siehe Gleichung (3.50) bzw. (4.47). Durch Anwenden der Funktionalableitungen in Gleichung (4.50) zerfällt jeder dieser Terme in mehrere Beiträge. Daneben wird auch die Berechnung des Erwartungswerts der kinetischen Energie der Gluonen (2.56) sehr aufwendig, da die in den Impulsoperatoren enthaltenen Funktionalableitungen auf sämtliche (Eichfeld-abhängige) Quasiteilchenoperatoren in den fermionischen Vielteilchenzuständen (4.24) angewendet werden müssen. Zudem bleibt zu klären, ob die Einführung endlicher Temperaturen im Großkanonischen Ensemble die Berücksichtigung zusätzlicher Diracstrukturen im Eichfeld-abhängigen fermionischen Variationskern  $K_1$  erfordert.

Demgegenüber entspricht der Aufwand zur Auswertung des Energiefunktionals bei Einführung endlicher Temperaturen durch Kompaktifizieren einer räumlichen Dimension exakt demjenigen im Nulltemperaturlimes. Zudem sind wir bei dieser Methodik nicht auf die zweifellos mit Fehlern behaftete Ersetzung des Hamiltonians im fermionischen bzw. bosonischen Dichteoperatoren durch effektive Einteilchenoperatoren angewiesen. Wir geben

daher in der vorliegenden Arbeit dieser Methode den Vorzug und skizzieren im Folgenden lediglich die zur Berechnung des Großkanonischen Potentials erforderlichen Schritte. Zudem geben wir die sich in führender Ordnung ergebenden Resultate an, überlassen die vollständige Auswertung in der gekoppelten Theorie aber zukünftigen Arbeiten.

#### 4.2.1 Statischer Quarkpropagator und Quarkkondensat

Durch die Gültigkeit des Wick'schen Theorems lassen sich wie im Nulltemperaturlimes die Erwartungswerte von freiem Dirac-Hamiltonian (2.53) sowie fermionischem Anteil der Farb-Coulombwechselwirkung (2.63) durch den statischen Quarkpropagator

$$G_{ij}^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \langle\langle [\Psi_i^m(\mathbf{x}), \Psi_j^{n\dagger}(\mathbf{y})] \rangle\rangle \quad (4.54)$$

ausdrücken. Seine Berechnung ist nach Einsetzen der Entwicklung (2.72) für die Quarkfelder grundsätzlich analog zum Nulltemperaturlimes (vgl. Anhang B.1.3) möglich. Vernachlässigen wir die Kopplung zwischen Quarks und Gluonen,  $K_1 = 0$ , so finden wir für die Impulsdarstellung

$$G_{ij}^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^{mn} \int \bar{d}^3 p \exp(i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) G_{ij}(\mathbf{p}) \quad (4.55)$$

des Propagators das Ergebnis

$$G(\mathbf{p}) = -\frac{\mathcal{Y}(p)}{2} \text{id} + \mathcal{X}(p) \frac{P(p)}{2} [1 - S^2(p)] \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \mathcal{X}(p) P(p) S(p) \beta \quad (4.56)$$

mit den Besetzungszahlfaktoren

$$\mathcal{X}(p) = 1 - \mathcal{N}_+(p) - \mathcal{N}_-(p), \quad (4.57a)$$

$$\mathcal{Y}(p) = \mathcal{N}_+(p) - \mathcal{N}_-(p). \quad (4.57b)$$

Verglichen mit dem Ergebnis aus Kapitel 3 [Gleichung (3.58)] tritt zusätzlich die diagonale Diracstruktur  $\text{id}$  auf. Durch Einführen der Massenfunktion (3.121) und Quasiteilchenenergie (3.122) läßt sich der Propagator (4.56) in die Quasiteilchenform

$$G(\mathbf{p}) = -\frac{\mathcal{Y}(p)}{2} \text{id} + \mathcal{X}(p) \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta M(p)}{2E(p)} \quad (4.58)$$

bringen womit sich für das Quarkkondensat (2.94) analog zum Nulltemperaturlimes

$$\langle\langle \bar{\Psi}^m(\mathbf{x}) \Psi^m(\mathbf{x}) \rangle\rangle = -2N_C \int \bar{d}^3 p \frac{\mathcal{X}(p) M(p)}{E(p)} \quad (4.59a)$$

$$= -4N_C \int \bar{d}^3 p \mathcal{X}(p) P(p) S(p) \quad (4.59b)$$

ergibt.

Beschränken wir den statischen Quarkpropagator wie in Kapitel 3 auf seinen führenden Anteil, so gilt der Ausdruck (4.59) auch für die gekoppelte Theorie ( $K_1 \neq 0$ ). Da im Hochtemperaturlimes ( $\beta \rightarrow 0$ ) für den Besetzungszahlfaktor  $\mathcal{X}(p) \rightarrow 0$  gilt [siehe Gleichung (4.49)] und der Skalarkern aufgrund asymptotischer Freiheit ebenfalls  $S(p) \rightarrow 0$  erfüllen sollte, können wir bereits an dieser Stelle darauf schließen, daß das Quarkkondensat für hinreichend hohe Temperaturen verschwindet und die chirale Symmetrie wiederhergestellt wird. Das erlaubt aber natürlich keinerlei Rückschlüsse auf die Ordnung des Phasenübergangs oder die kritische Temperatur.

## 4.2.2 Thermischer Energieerwartungswert

### Fermionischer Anteil

Der thermische Erwartungswert des freien Dirac-Hamiltonians (2.53) ergibt sich wie in Kapitel 3 unmittelbar aus dem statischen Quarkpropagator. Bei Vernachlässigung der Quark-Gluon-Kopplung folgt mit Gleichung (4.56)

$$\langle\langle H_Q^0 \rangle\rangle = 2N_C \delta^3(0) \int \bar{d}^3p \mathcal{X}(p) p(1 - 2P(p)), \quad (4.60)$$

wobei der divergente Vorfaktor dem Volumen des Raumes (3.73) entspricht.

Die Berechnung des thermischen Erwartungswert des Kopplungsterms (2.54) ist analog zum Nulltemperaturlimes möglich, vgl. Anhang B.1.4. Bei Vernachlässigung der Quark-Gluon-Kopplung ist der Erwartungswert wie dort verschwindend.

Während der gemischte Anteil  $H_C^{\text{INT}}$  erst auf Dreischleifenniveau relevant ist, ergibt sich der thermische Erwartungswert des fermionischen Anteils der Farb-Coulombwechselwirkung (2.63) wie für  $T = 0$  [vgl. (3.80)] direkt aus dem statischen Quarkpropagator (4.56):

$$\begin{aligned} \langle\langle H_C^Q \rangle\rangle = & \frac{N_C^2 - 1}{8} \delta^3(0) \int \bar{d}^3p \int \bar{d}^3q V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) \left[ \mathcal{X}^2(p) + \mathcal{X}^2(q) + (\mathcal{Y}(p) - \mathcal{Y}(q))^2 \right. \\ & \left. - 2\mathcal{X}(p)\mathcal{X}(q)P(p)P(q) \left( 4S(p)S(q) + (1 - S^2(p))(1 - S^2(q))\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.61)$$

In Kapitel 3 hatten wir gesehen, daß auch in der gekoppelten Theorie auf Zweischleifenniveau lediglich der führende Anteil des Quarkpropagators zu diesem Erwartungswert beiträgt, sodaß Gleichung (4.61) für  $K_1 \neq 0$  ihre Gültigkeit behalten wird. Wir merken an, daß die im Propagator (4.56) enthaltene diagonale Diracstruktur – anders als bei Quarkkondensat und freiem Dirac-Hamiltonian – einen nicht-verschwindenden Beitrag zum Erwartungswert (4.61) liefert. Weiterhin spielt hier im Gegensatz zum Nulltemperaturlimes die Ersetzung des Coulombkerns durch das Farb-Coulombpotential [siehe Gleichung (3.14)] eine wichtige Rolle, da ansonsten für  $\mathbf{p} = \mathbf{q}$  Infrarotdivergenzen auftreten würden.

### Bosonischer Anteil

Für den bosonischen Anteil am thermischen Energieerwartungswert beginnen wir mit der Betrachtung des Beitrags der kinetischen Energie der transversalen Gluonen (2.56). Da diese kanonische Impulsoperatoren  $\Pi$  enthält, muß sie gemäß Gleichung (4.41) transformiert werden. Dadurch ergibt sich dasselbe Ergebnis wie im Nulltemperaturlimes, siehe Gleichung (3.82). Durch die Wirkung der darin enthaltenen Funktionalableitungen auf die fermionischen Vielteilchenzustände (4.24) entstehen, verglichen mit der reinen Yang-Mills-Theorie, zusätzliche Beiträge. Dabei können die Funktionalableitungen sowohl auf das Vakuumfunktional (4.28), als auch auf die Quasiteilchenoperatoren (4.31), (4.32) fallen, was eine Erweiterung unserer Berechnungsmethode erfordert. Hierauf gehen wir in Anhang B.2.3 näher ein.

Vernachlässigen wir jedoch die Kopplung zwischen Quarks und transversalen Gluonen, so reduziert sich der Erwartungswert auf den Beitrag des Yang-Mills-Sektors [88],

$$\langle\langle H_{\text{YM}}^E \rangle\rangle = \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) \int \bar{d}^3p \left[ \frac{(\omega(p) - \chi(p))^2}{\omega(p)} + 2n(p) \frac{\omega^2(p) + \chi^2(p)}{\omega(p)} \right]. \quad (4.62)$$



Da die potentielle Energie der Gluonen (2.57) ein reines Funktional des Eichfelds darstellt, ergeben sich in ihrem thermischen Erwartungswert keinerlei fermionische Beiträge und wir finden dasselbe Resultat wie in der Yang–Mills-Theorie,

$$\begin{aligned} \langle\langle H_{\text{YM}}^B \rangle\rangle &= \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p \frac{1 + 2n(p)}{\omega(p)} p^2 \\ &+ \frac{N_C (N_C^2 - 1)}{16} g^2 \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q \frac{1 + 2n(p)}{\omega(p)} \frac{1 + 2n(q)}{\omega(q)} (3 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}})^2). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Für den gluonischen Anteil der Farb-Coulombwechselwirkung (3.85) ergibt sich auf Zweischleifenniveau wie im Nulltemperaturlimes ein rein bosonischer Erwartungswert

$$\begin{aligned} \langle\langle H_C^{\text{YM}} \rangle\rangle &= \frac{N_C (N_C^2 - 1)}{16} \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q \left( 1 + (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}})^2 \right) V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) \\ &\times \left\{ \frac{1 + 2n(p)}{\omega(p)} (1 + 2n(q)) \omega(q) + \frac{1 + 2n(q)}{\omega(q)} (1 + 2n(p)) \omega(p) \right. \\ &\quad + \frac{1 + 2n(p)}{\omega(p)} \frac{1 + 2n(q)}{\omega(q)} (\chi(p) - \chi(q))^2 \\ &\quad \left. + 2 \left[ \frac{1 + 2n(p)}{\omega(p)} - \frac{1 + 2n(q)}{\omega(q)} \right] (\chi(p) - \chi(q)) - 2 \right\} \\ &- \frac{N_C (N_C^2 - 1)}{8} \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) \\ &\times \left\{ (1 + 2n(p))^2 + (1 + 2n(q))^2 - 2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Dieser weicht aufgrund der Ersetzung (3.14) des Coulombkerns in der vorliegenden Arbeit vom Ergebnis in Referenz [88] ab. Genauer tritt dort der zweite Term, welcher für eine Regularisierung des ansonsten IR-divergenten Erwartungswerts sorgt, nicht auf. Da dieser Zusatzterm unabhängig vom Variationskern  $\omega$  ist, spielt das für die Gapgleichung keine Rolle. Allerdings ergibt sich ein Beitrag zur Bestimmungsgleichung für  $\Omega$ , siehe unten. Da in der numerischen Behandlung der Bewegungsgleichungen in Referenz [88] der Beitrag der Farb-Coulombwechselwirkung vernachlässigt wurde, ist diese Abweichung letztlich ohne Belang.

### 4.2.3 Entropie und Teilchenzahl

Da wir vorausgesetzt haben, daß der thermische Erwartungswert gemäß Gleichung (4.2) in einen bosonischen und einen fermionischen Anteil zerfällt, ergibt sich für die Zustandssumme des Gesamtsystems  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{\text{YM}} \mathcal{Z}_{\text{Q}}$  und damit für die Entropie (2.104)

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{YM}} + \mathcal{S}_{\text{Q}}. \quad (4.65)$$

Deren bosonischer bzw. fermionischer Anteil läßt sich durch Einsetzen der Zustandssummen (siehe Anhang B.2.1 bzw. B.2.2)

$$\mathcal{Z}_{\text{YM}} = \left( \det \left\{ \text{id} \left[ 1 - \exp(-\beta \Omega(p)) \right] \right\} \right)^{-1}, \quad (4.66)$$

$$\mathcal{Z}_{\text{Q}} = \det \left\{ \text{id} \left[ 1 + \exp(-\beta \varepsilon_+(p)) \right] \right\} \det \left\{ \text{id} \left[ 1 + \exp(-\beta \varepsilon_-(p)) \right] \right\} \quad (4.67)$$

in Gleichung (2.104) bestimmen und liefert

$$\mathcal{S}_{\text{YM}} = 2(N_C^2 - 1)\delta^3(0) \int \bar{d}^3p \left[ (1 + n(p)) \ln(1 + n(p)) - n(p) \ln n(p) \right] \quad (4.68)$$

bzw.  $\mathcal{S}_Q = \mathcal{S}_Q^+ + \mathcal{S}_Q^-$  mit

$$\mathcal{S}_Q^\pm = -2N_C\delta^3(0) \int \bar{d}^3p \left[ \mathcal{N}_\pm(p) \ln \mathcal{N}_\pm(p) + (1 - \mathcal{N}_\pm(p)) \ln(1 - \mathcal{N}_\pm(p)) \right]. \quad (4.69)$$

Dies stimmt jeweils mit dem entsprechenden Ergebnis aus dem Yang–Mills- bzw. Quarksektor überein. Da  $\mathcal{S}_Q$  unabhängig von fermionischen Variationskernen ist, spielt es dabei keine Rolle, ob die Quark-Gluon-Kopplung berücksichtigt wird.

Der thermische Erwartungswert des Teilchenzahloperators (2.100) läßt sich nach Einsetzen der Entwicklung (2.72) der Quarkfelder und unter Verwendung der fermionischen Erwartungswerte (4.47) sowie der Bestimmungsgleichungen (4.34) berechnen,

$$\langle\langle N \rangle\rangle = 2N_C\delta^3(0) \int \bar{d}^3p \left( 1 + \mathcal{Y}(p) \right). \quad (4.70)$$

Wir weisen darauf hin, daß dieses Ergebnis exakt gilt, da der fermionische Anteil des thermischen Erwartungswerts kein Funktional im Eichfeld darstellt und daher keinerlei Näherungen bei der Bildung des Erwartungswerts gemacht werden müssen.<sup>64</sup> Da (4.70) weiterhin – zumindest explizit – keine Variationskerne enthält, gilt dieser Ausdruck unabhängig von der Berücksichtigung der Quark-Gluon-Kopplung.

#### 4.2.4 Variationsgleichungen

Bei Vernachlässigung der Quark-Gluon-Kopplung enthält der verwendete Ansatz für die Vielteilchenzustände (4.39), (4.24) und die Dichteoperatoren (4.44), (4.45) die fünf Variationsparameter  $S$ ,  $\varepsilon_\pm$ ,  $\omega$  und  $\Omega$ . Diese lassen sich durch Minimieren des Großkanonischen Potentials (2.103) bestimmen, wobei wir wie in Kapitel 3 die impliziten Abhängigkeiten der Kerne voneinander vernachlässigen.

#### Fermionische Gleichungen

Für den Skalarkern ergibt sich aus der Forderung  $\delta\Omega/\delta S(k) = 0$  die Gapgleichung

$$kS(k) = \frac{C_F}{2} \int \bar{d}^3p \mathcal{X}(p) V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) P(p) \left[ S(p)(1 - S^2(k)) - S(k)(1 - S^2(p)) \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right], \quad (4.71)$$

welche sich lediglich durch den Besetzungszahlfaktor  $\mathcal{X}$  von der entsprechenden Gleichung aus Kapitel 3 unterscheidet [vgl. (3.100)] und daher den korrekten Limes  $T, \mu \rightarrow 0$  besitzt. In Abhängigkeit der Massenfunktion (3.121) läßt sich die Gapgleichung (4.71) folgendermaßen ausdrücken:

$$M(k) = \frac{C_F}{2} \int \bar{d}^3p \mathcal{X}(p) V_C(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|) \frac{M(p) + M(k) \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{k^2}}{E(p)} \quad (4.72)$$

<sup>64</sup>Die Bildung des fermionischen Anteils am Erwartungswert erfolgt für endliche Temperaturen sowie im Nulltemperaturlimes immer exakt. Lediglich beim bosonischen Teil sind wir i.A. zu Näherungen gezwungen.

Zur Bestimmung der effektiven Einteilchenenergien  $\varepsilon_{\pm}$  bietet es sich an, die Variation nach den Besetzungszahlen durchzuführen und  $\delta\Omega/\delta\mathcal{N}_{\pm}(k) = 0$  zu fordern. Da  $\mathcal{N}_{\pm}$  eine monotone Funktion in  $\varepsilon_{\pm}$  ist – siehe Gleichung (4.49) – ist dies völlig äquivalent zur Variation bezüglich der Einteilchenenergien und führt auf die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\pm}(k) = & kP(k)(1 - S^2(k)) \mp \mu \\ & + \frac{C_F}{2} \int \bar{d}^3p V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) \left\{ \mp [\mathcal{Y}(p) - \mathcal{Y}(k)] - \mathcal{X}(k) \right. \\ & \left. + \mathcal{X}(p)P(p)P(k) \left[ 4S(p)S(k) + (1 - S^2(p))(1 - S^2(k))\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

In Abhängigkeit der Massenfunktion (3.121) lauten diese

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\pm}(k) = & \frac{k^2}{E(k)} \mp \mu + \frac{C_F}{2} \int \bar{d}^3p V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) \left\{ \mp [\mathcal{Y}(p) - \mathcal{Y}(k)] \right. \\ & \left. - \mathcal{X}(k) + \mathcal{X}(p) \frac{M(p)M(k) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{E(p)E(k)} \right\}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

was sich durch Einsetzen der Gapgleichung (4.72) in die Form

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\pm}(k) = & E(k) \mp \mu + \frac{C_F}{2} \int \bar{d}^3p V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) \left\{ \mp [\mathcal{Y}(p) - \mathcal{Y}(k)] \right. \\ & \left. - \mathcal{X}(k) + \frac{E(k)}{E(p)} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{k^2} \mathcal{X}(p) \right\} \end{aligned} \quad (4.75)$$

bringen läßt. Die effektiven Einteilchenenergien entsprechen daher in führender Ordnung – bis auf eine Verschiebung um das chemische Potential  $\mu$  – der Quasiteilchenenergie (3.122). Weiterhin stimmt Gleichung (4.73) im Nulltemperaturlimes mit den durch Diagonalisieren des fermionischen Hamiltonians (3.29) bestimmten effektiven Einteilchenenergien überein, siehe Anhang C.3.

Setzen wir aufgrund von asymptotischer Freiheit  $\varepsilon_{\pm}(p \rightarrow \infty) = p$  und  $S(p \rightarrow \infty) = 0$  voraus, so läßt sich analog zu Anhang D zeigen, daß bei Verwendung eines rein farbeinschließenden Potentials  $V_C = V_C^{\text{IR}}$  sowohl die Gapgleichung (4.71), als auch die Gleichung (4.73) für die effektive Energie endlich sind und ohne Renormierung numerisch behandelt werden können.

Die Gapgleichung (4.71) bzw. (4.72) stimmt mit der in den Arbeiten [109, 133–137] gefundenen überein. Die Gleichung (4.73) für die Quasiteilchenenergie weicht dagegen von der in früheren Arbeiten hergeleiteten ab, siehe beispielsweise Referenz [134]. Die Ursache dafür liegt in der von uns durchgeführten Ersetzung (3.14) des Coulombkerns, welche zu einer Regularisierung der ansonsten IR-divergenten Gleichung führt und daher prinzipiell die numerische Lösung des gekoppelten Gleichungssystems (4.71), (4.73) erlaubt. Aufgrund der IR-Divergenz konnte diese in den genannten Arbeiten nur unter Einschränkungen<sup>65</sup> durchgeführt werden. Die Infrarotmasse  $M(p \rightarrow 0)$  [Gleichung (3.141)] – und damit das Quarkcondensat – zeigt hierbei als Funktion der Temperatur für chirale Quarks einen Phasenübergang zweiter Ordnung, wobei die Übergangstemperatur mit steigendem chemischen Potential  $\mu$  abnimmt [137]. Für massive Quarks schmiedet der Phasenübergang zu einem Crossover aus [109, 136].

<sup>65</sup>In Referenz [134] wurde der Limes  $T \rightarrow 0$  betrachtet, in welchem die Besetzungszahlen (4.49) zu Stufenfunktionen entarten, während in Referenz [109, 135–137] die Einteilchenenergien gemäß  $\varepsilon_{\pm}(p) = E(p) \mp \mu$  ersetzt wurden.

**Gleichungen des Yang–Mills-Sektors**

Die Forderung  $\delta\Omega/\delta\omega(k) = 0$  führt auf die Gapgleichung

$$\omega^2(k) = k^2 + \chi^2(k) + I_{T,T}^{\text{YM}} + I_{C,T}^{\text{YM}}(k) \quad (4.76)$$

für den bosonischen Variationskern. Dabei bezeichnet

$$I_{T,T}^{\text{YM}} = \frac{2}{3} N_C g^2 \int \mathrm{d}^3 p \frac{1 + 2n(p)}{\omega(p)} \quad (4.77)$$

den gluonischen Tadpole und

$$I_{C,T}^{\text{YM}}(k) = \frac{N_C}{2} \int \mathrm{d}^3 p V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) \left( 1 + (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 \right) \times \left[ (\chi(k) - \chi(p)) - \frac{1 + 2n(p)}{2\omega(p)} (\omega^2(k) - \omega^2(p) - (\chi(k) - \chi(p))^2) \right] \quad (4.78)$$

den Beitrag der Farb-Coulombwechselwirkung bei endlichen Temperaturen. Da aufgrund der asymptotischen Freiheit  $n(p \rightarrow \infty) = 0$  gilt, stimmt das UV-Verhalten der Gapgleichung (4.76) mit derjenigen des Nulltemperaturlimes (3.109) überein und wir können dasselbe Renormierungsschema wie dort verwenden. Weiterhin geht Gleichung (4.76) im Limes  $T \rightarrow 0$  in Gleichung (3.109) über.

Für die gluonische effektive Einteilchenenergie erhalten wir aus  $\delta\Omega/\delta\Omega(k)$  die Bestimmungsgleichung

$$\frac{\Omega(k)}{\omega(k)} = 1 + \frac{N_C}{2} \int \mathrm{d}^3 p V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) \left[ \left( 1 + (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 \right) \frac{1 + 2n(p)}{2\omega(p)} - \frac{1 + 2n(k)}{\omega(k)} \right]. \quad (4.79)$$

Unter Vernachlässigung des Beitrags der Farb-Coulombwechselwirkung reduziert sich diese auf  $\Omega(p) = \omega(p)$  womit das Gleichungssystem (4.76), (4.79) entkoppelt und lediglich die Gapgleichung (4.76) zu lösen bleibt.

Während die Gapgleichung (4.76) mit derjenigen früherer Arbeiten im Yang–Mills-Sektor übereinstimmt [87, 88], ergeben sich bei der Gleichung für die Einteilchenenergie (4.79) infolge der Ersetzung des Coulombkerns (3.14) – welche für eine Regularisierung der IR-Divergenz sorgt – Unterschiede. Diese verschwinden bei Vernachlässigung der Beiträge der Farb-Coulombwechselwirkung wie sie in Referenz [87, 88] vorgenommen wurde. Die dort gefundene numerische Lösung für die Gluonenergie  $\omega$  zeigt wie die Lösung der (von uns nicht angegebenen) Gleichung für den Geistformfaktor  $d$  oberhalb einer kritischen Temperatur ein geändertes IR-Verhalten, vgl. Abschnitt 4.1.2.

# Kapitel 5

## QCD bei endlichen Temperaturen durch Kompaktifizieren einer Raumdimension

Nachdem wir im vorangegangenen Kapitel die Bewegungsgleichungen eines Systems wechselwirkender Quarks und Gluonen bei endlicher Temperatur  $T$  und chemischem Potential  $\mu$  im üblichen Hamilton'schen Formalismus durch Minimieren des Großkanonischen Potentials  $\Omega$  bestimmt haben, verwenden wir nun die in Referenz [67] entwickelte und in Abschnitt 2.4.2 vorgestellte Methodik zur Einführung endlicher Temperaturen durch Kompaktifizieren einer räumlichen Dimension. Dieser alternative Hamilton'sche Zugang wird es uns ermöglichen, mit dem dualen Kondensat und dem Polyakov-Loop zwei Ordnungsparameter für den Deconfinement-Phasenübergang auszuwerten, die im kanonischen Zugang nicht bestimmt werden können.

Dabei widmen wir uns in Abschnitt 5.1 zunächst der Berechnung des dualen sowie des chiralen Quarkkondensats und der Ermittlung der (pseudo-)kritischen Temperaturen für den Deconfinement- sowie den chiralen Phasenübergang. Anschließend erfolgt in Abschnitt 5.2 die Bestimmung des Polyakov-Loops sowie der sich daraus ergebenden pseudokritischen Temperatur für den Deconfinement-Phasenübergang.

Die Ergebnisse dieses Kapitels sind teilweise (Abschnitt 5.1) in Referenz [141] veröffentlicht, für den weiteren Teil (Abschnitt 5.2) ist die Veröffentlichung in Vorbereitung [142].

### 5.1 Berechnung von chiralem und dualen Quarkkondensat

Wir werden im Folgenden die in Abschnitt 2.4.2 vorgestellte und in Referenz [139, 140] zur Berechnung des Polyakov-Loops im reinen Yang-Mills-Sektor verwendete Methodik der Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension auf die volle QCD erweitern und damit die Temperaturabhängigkeit des dualen (2.138) sowie des chiralen Quarkkondensats (2.94) als Ordnungsparameter für den Deconfinement- und den chiralen Phasenübergang ermitteln. Dabei gehen wir in Abschnitt 5.1.1 zunächst auf die Struktur des dualen Kondensats sowie des QCD-Hamiltonians bei Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension ein. Anschließend stellen wir in Abschnitt 5.1.2 den von uns verwendeten Ansatz für das QCD-Vakuumwellenfunktional auf der kompaktifizierten räumlichen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$  vor. Die sich mit diesem Ansatz ergebende Grundzustandsenergie sowie die daraus resultierenden Bewegungsgleichungen für die Variationskerne sind Gegenstand von Abschnitt 5.1.3. In den Abschnitten 5.1.4 und 5.1.5 gehen wir schließlich auf die Ausdrücke für das chirale und duale Quarkkondensat im verwendeten Hamilton'schen Zugang sowie unsere numerischen Ergebnisse ein.

### 5.1.1 Duales Quarkkondensat und QCD-Hamiltonian auf $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$

Im üblichen Funktionalintegralzugang ist das duale Quarkkondensat durch

$$\Sigma_n = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \exp(-in\varphi) \langle \bar{\Psi}(x)\Psi(x) \rangle_\varphi \quad (5.1)$$

gegeben, siehe Gleichung (2.138). Die Quarkfelder genügen dabei den  $U(1)$ -wertigen Randbedingungen (2.139) während für die Eichfelder periodische Randbedingungen (2.107) in der euklidischen Zeit gelten. Das macht das duale Kondensat (5.1) in der üblichen Hamilton'schen Formulierung mit in Weyleichung (2.33) quantisierten Feldern unzugänglich, da hier ausschließlich statische Felder auftreten und endliche Temperaturen statt durch Kompaktifizieren der Raumzeit über die Großkanonische Zustandssumme (2.99) eingeführt werden, vgl. Abschnitt 2.4 und Kapitel 4.

Verwenden wir hingegen den in Abschnitt 2.4.2 vorgestellten alternativen Hamilton'schen Zugang, bei dem sich endliche Temperaturen aus der Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension ergeben, so läßt sich ein wohldefinierter Ausdruck für das duale Kondensat angeben. Dieser stimmt formal mit Gleichung (5.1) überein, allerdings treten ausschließlich statische Felder auf, welche infolge der durchgeführten  $O(4)$ -Rotation die Randbedingungen

$$A^a(x, y, z + \beta/2) = A^a(x, y, z - \beta/2), \quad (5.2a)$$

$$\Psi^m(x, y, z + \beta/2) = \exp(i\varphi)\Psi^m(x, y, z - \beta/2) \quad (5.2b)$$

erfüllen. Der Erwartungswert in Gleichung (5.1) ist dabei im Grundzustand des modifizierten Hamilton-Operators [siehe Gleichung (2.122)]

$$\tilde{H}(\beta, \mu) \equiv \tilde{H}_{\text{QCD}} + i\mu \int_{\beta} d^3x \Psi^{m\dagger}(\mathbf{x})\alpha_3\Psi^m(\mathbf{x}) \quad (5.3)$$

zu bilden, wobei  $\tilde{H}_{\text{QCD}}$  der eichfixierte QCD-Hamiltonian in Weyl- und Coulombbeichung auf  $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$  ist. Dieser stimmt bis auf die Ersetzung

$$\int d^3x \rightarrow \int_{\beta} d^3x \equiv \int dx \int dy \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dz \quad (5.4)$$

und die Randbedingungen (5.2) der Felder mit dem QCD-Hamiltonian (2.64) auf  $\mathbb{R}^3$  überein. Da wir den Erwartungswert  $\langle \tilde{H}(\beta, \mu) \rangle_\varphi$  auf Zweischleifenniveau berechnen werden, können wir weiterhin die in Kapitel 3 eingeführten Approximationen für den Coulombkern (3.14) sowie die Faddeev–Popov-Determinante (3.15) verwenden.

Für konkrete Berechnungen wird es von Vorteil sein, von der Orts- in die Impulsdarstellung zu wechseln. Während sich für die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten im Vergleich zu bisherigen Rechnungen keine Änderungen ergeben, bedingt die Beschränkung der  $z$ -Koordinate auf ein endliches Intervall die Diskretisierung der zugehörigen Impulsvariablen. Unter Berück-

sichtigung der Randbedingungen (5.2) erhalten wir deshalb für die Felder die Darstellung

$$\mathbf{A}^a(\mathbf{x}) = \int_{\beta} \mathrm{d}^3 p \exp(i(\mathbf{p}_{\perp} + \omega_n \hat{e}_z) \cdot \mathbf{x}) \mathbf{A}^a(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n), \quad (5.5)$$

$$\mathbf{\Pi}^a(\mathbf{x}) = \int_{\beta} \mathrm{d}^3 p \exp(-i(\mathbf{p}_{\perp} + \omega_n \hat{e}_z) \cdot \mathbf{x}) \mathbf{\Pi}^a(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n), \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \Psi^m(\mathbf{x}) &= \int_{\beta} \mathrm{d}^3 p \frac{\exp(i(\mathbf{p}_{\perp} + p_n \hat{e}_z) \cdot \mathbf{x})}{\sqrt{2}(p_{\perp}^2 + p_n^2)^{\frac{1}{4}}} \\ &\times \left( a_{\varphi}^{s,m}(\mathbf{p}_{\perp}, p_n) u^s(\mathbf{p}_{\perp} + p_n \hat{e}_z) + b_{\varphi}^{s,m\dagger}(-\mathbf{p}_{\perp}, -p_n) v^s(-\mathbf{p}_{\perp} - p_n \hat{e}_z) \right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

wobei wir die Abkürzung

$$\int_{\beta} \mathrm{d}^3 p \equiv \int \mathrm{d}^2 p_{\perp} \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \quad (5.8)$$

mit  $\mathbf{p}_{\perp} = p_x \hat{e}_x + p_y \hat{e}_y$  eingeführt haben und die bosonischen bzw. fermionischen *Matsubarafrequenzen* durch

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \quad \text{bzw.} \quad \Omega_n = \frac{2n+1}{\beta} \pi = \omega_n + \frac{\pi}{\beta} \quad (5.9)$$

gegeben sind. Aufgrund der  $U(1)$ -wertigen Randbedingungen der Quarkfelder treten in Gleichung (5.7) jedoch nicht die reinen fermionischen Matsubarafrequenzen, sondern

$$p_n = \omega_n + \frac{\varphi}{\beta} = \Omega_n + \frac{\varphi - \pi}{\beta} \quad (5.10)$$

auf. Weiterhin bezeichnet  $u$  ( $v$ ) in üblicher Weise den Eigenspinor des chiralen Diracoperators mit positiver (negativer) Energie, siehe Anhang A.1, und  $a_{\varphi}$  ( $b_{\varphi}$ ) den Vernichtoperator für einen (Anti-)Quarkzustand. Die kanonischen Vertauschungsrelationen (2.31), (2.32) implizieren für die (Eich-)Feldoperatoren im Impulsraum die Gültigkeit von<sup>66</sup>

$$\begin{aligned} \left\{ a^{s,m}(\mathbf{p}_{\perp}, p_n), a^{t,n\dagger}(\mathbf{q}_{\perp}, q_m) \right\} &= \left\{ b^{s,m}(-\mathbf{p}_{\perp}, -p_n), b^{t,n\dagger}(-\mathbf{q}_{\perp}, -q_m) \right\} \\ &= \delta^{st} \delta^{mn} \delta^2(\mathbf{p}_{\perp} - \mathbf{q}_{\perp}) \beta \delta_{n,m}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\left[ A_i^a(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n), \Pi_j^b(\mathbf{q}_{\perp}, \omega_m) \right] = i \delta^{ab} t_{ij}(\mathbf{p}_{\perp} + \omega_n \hat{e}_z) \delta^2(\mathbf{p}_{\perp} - \mathbf{q}_{\perp}) \beta \delta_{n,m} \quad (5.12)$$

und wir betonen, daß wir im Folgenden *nicht* von

$$a_{\varphi}^{s,m}(\mathbf{p}_{\perp}, p_n) = a^{s,m}(\mathbf{p}_{\perp} + p_n \hat{e}_z) \quad \text{usw.} \quad (5.13)$$

ausgehen werden.

Setzen wir die Entwicklung (5.7) in den freien Dirac-Hamiltonian  $H_Q^0$  (2.53) ein, so folgt, daß der zugehörige Diracoperator für chirale Quarks im Impulsraum die Gestalt

$$h(\mathbf{p}_{\perp}, p_n) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \left[ \mathbf{p}_{\perp} + p_n \hat{e}_z \right] = \boldsymbol{\alpha} \cdot \left[ \mathbf{p}_{\perp} + \left( \Omega_n + \frac{\varphi - \pi}{\beta} \right) \hat{e}_z \right] \quad (5.14)$$

<sup>66</sup>Alle übrigen (Anti-)Kommutatoren verschwinden.

besitzt. Vergleichen wir das mit dem entsprechenden Operator für übliche fermionische Randbedingungen,  $\varphi = \pi$ , so erkennen wir, daß die  $U(1)$ -wertigen Randbedingungen (5.2) denselben Effekt auf den modifizierten Hamiltonian (5.3) haben wie das Anlegen eines *komplexwertigen* chemischen Potentials<sup>67</sup>

$$\mu \rightarrow \mu + i \frac{\pi - \varphi}{\beta}. \quad (5.15)$$

Analog läßt sich ein (reelles) chemisches Potential  $\mu$  auch als Imaginärteil des Diracoperators auffassen, vgl. Gleichung (5.3) und (2.35).

Die Verwendung des alternativen Hamilton'schen Zugangs zu endlichen Temperaturen wird schließlich i.A. einige mathematische Umformungen bedingen, um auf sinnvolle Ergebnisse für thermodynamische Größen zu kommen:

- i) Zum einen müssen Summationen über Matsubarafrequenzen üblicherweise *resummiert* werden, wofür wir die *Poisson'sche Summenformel*

$$\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(il\beta p_z) f(p_z) \quad (5.16)$$

verwendet werden. Dabei haben wir die Integrationsvariable auf der rechten Seite als  $z$ -Komponente des (kontinuierlichen) Dreier-Impulses bezeichnet. Das hat den Vorteil, daß Impulsintegrale auf der räumlichen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$  kompakt als

$$\int_{\beta} d^3 p f(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n) = \int d^3 p f(\mathbf{p}) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(il\beta p_z) \quad (5.17)$$

geschrieben werden können. Für die Fouriertransformation einer Funktion  $f$ , die den  $U(1)$ -wertigen Randbedingungen (5.2) genügt, ergibt sich deshalb mithilfe von (5.16)

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \int_{\beta} d^3 p \exp(i(\mathbf{p}_{\perp} + p_n \hat{e}_z) \cdot \mathbf{x}) f(\mathbf{p}_{\perp}, p_n) \\ &= \int d^3 p \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) f(\mathbf{p}) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(il\beta \left[p_z - \frac{\varphi}{\beta}\right]\right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

womit sich die gesamte Phasen- und Temperaturabhängigkeit abspalten läßt. Dieser Ausdruck läßt sich durch die Wahl  $\varphi = 0$  ( $\varphi = \pi$ ) auch auf bosonische (fermionische) Randbedingungen anwenden.

Der  $l = 0$  Term auf der rechten Seite von Gleichung (5.17), (5.18) entspricht dem Beitrag bei verschwindender Temperatur (d.h.  $\beta \rightarrow \infty$ ), sodaß die Anwendung der Poisson'schen Summenformel eine einfache Isolation der (üblicherweise divergenten) Nulltemperaturbeiträge thermodynamischer Größen erlaubt. Außerdem werden im

<sup>67</sup>Alternativ folgt das auch aus einer Transformation

$$\Psi(\mathbf{x}) = \exp\left(i \frac{\varphi - \pi}{\beta} z\right) \tilde{\Psi}(\mathbf{x}),$$

wobei der Feldoperator  $\tilde{\Psi}$  den üblichen fermionischen Randbedingungen (2.121) genügt



Niedertemperaturlimes die Phasenfaktoren  $\exp(il\beta p_z)$  schon für kleine  $|l|$  hochoszillatorisch und deshalb häufig vernachlässigbar. Im Hochtemperaturlimes ( $\beta \rightarrow 0$ ) muß hingegen eine große Anzahl an Summanden berücksichtigt werden, weshalb es hier i.A. von Vorteil ist, keine Resummation durchzuführen. Aufgrund von  $\omega_n \sim 1/\beta$  läßt sich in diesem Limes stattdessen die Summe über die Matsubarafrequenzen oft auf die niedrigsten  $|\mathbf{n}|$  beschränken. Dies kann in Analogie zur Näherung des niedrigsten Landauniveaus für große Magnetfeldstärken in der Quantenmechanik gesehen werden.

- ii) In Anwesenheit eines (reellen) chemischen Potentials ist es zum anderen erforderlich, dieses analytisch fortzusetzen. Da ein reelles Potential einen Imaginärteil zum Diracoperator hinzufügt, ist ansonsten die Konvergenz der Poisson-Summe in Gleichung (5.16) nicht gegeben, siehe Referenz [67].

Dieser zweite Punkt macht die Einbeziehung eines endlichen chemischen Potentials  $\mu$  schwierig, sodaß wir im Folgenden stets von  $\mu = 0$  ausgehen werden. Nichtsdestotrotz ist der Fall  $\mu \neq 0$  aus physikalischer Sicht und in Anbetracht des Vorzeichenproblems interessant und wird Gegenstand zukünftiger Forschung sein.

## 5.1.2 Ansatz für das Vakuumwellenfunktional

### Impulsdarstellung

Für den Ansatz für das QCD-Vakuumfunktional greifen wir im Wesentlichen auf das in Kapitel 3 verwendete Funktional (3.1) mit (3.30) und (3.36) zurück, wobei die Betrachtung der kompaktifizierten Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$  anstelle von  $\mathbb{R}^3$  einige Änderungen bedingen wird. Für den bosonischen Anteil können wir uns dabei an Referenz [138] orientieren, wo der alternative Hamilton'sche Zugang zu endlichen Temperaturen bereits auf den reinen Yang–Mills-Sektor angewendet wurde.

Der Ansatz für das Grundzustandswellenfunktional der QCD auf  $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$  ist durch den Produktzustand

$$|\phi[A]\rangle_\varphi = \mathcal{N} I^{-\frac{1}{2}}[A] J^{-\frac{1}{2}}[A] \tilde{\phi}_{\text{YM}}[A] |\phi_{\text{Q}}[A]\rangle_\varphi \quad (5.19)$$

gegeben, wobei  $I$  und  $J$  die Fermi- (3.35) sowie die Faddeev–Popov-Determinante (3.15) bezeichnen<sup>68</sup> und  $\mathcal{N}$  ein globaler Normierungsfaktor ist. Für den bosonischen Anteil verwenden wir das Gauß'sche Funktional des reinen Yang–Mills-Sektors [138],

$$\tilde{\phi}_{\text{YM}}[A] = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_\beta \bar{d}^3 p A_i^a(\mathbf{p}_\perp, \omega_n) \hat{\omega}_{ij}^{ab}(\mathbf{p}_\perp, \omega_n) A_j^b(-\mathbf{p}_\perp, -\omega_n) \right]. \quad (5.20)$$

Hierbei enthält

$$\hat{\omega}_{ij}^{ab}(\mathbf{p}_\perp, \omega_n) = t_{ij}^\perp(\mathbf{p}_\perp, \omega_n) \hat{\omega}_\perp^{ab}(\mathbf{p}_\perp, \omega_n) + t_{ij}^\parallel(\mathbf{p}_\perp, \omega_n) \hat{\omega}_\parallel^{ab}(\mathbf{p}_\perp, \omega_n) \quad (5.21)$$

zwei unabhängige Variationskerne  $\omega_\perp$  und  $\omega_\parallel$ , welche mit dem transversalen Projektor im Unterraum  $\mathbb{R}^2$  senkrecht zur kompaktifizierten Dimension  $z = x_3$ ,

$$t_{ij}^\perp(\mathbf{p}) = (1 - \delta_{i3}) \left( \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p_\perp^2} \right) (1 - \delta_{j3}), \quad (5.22)$$

<sup>68</sup>Man beachte, daß sich verglichen mit den Ausdrücken auf  $\mathbb{R}^3$  stets die Änderung  $\int \rightarrow \int_\beta$  ergibt.

sowie seinem orthogonalen Komplement

$$t_{ij}^{\parallel}(\mathbf{p}) = t_{ij}(\mathbf{p}) - t_{ij}^{\perp}(\mathbf{p}) \quad (5.23)$$

verknüpft sind. Dabei ist  $t$  der transversale Projektor (2.42) auf  $\mathbb{R}^3$ . Die Aufspaltung in zwei Variationskerne ist eine Folge der durch die Kompaktifizierung gebrochenen  $O(3)$ -Invarianz des ursprünglichen Raumes  $\mathbb{R}^3$ .

Unter Verwendung des Ansatzes (5.20) ergibt sich für den statischen Gluonpropagator des Yang–Mills-Sektors [138]

$$\langle A_i^a(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n) A_j^b(\mathbf{q}_{\perp}, \omega_m) \rangle_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \delta^{ab} \left( \frac{t_{ij}^{\perp}(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n)}{\omega_{\perp}(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n)} + \frac{t_{ij}^{\parallel}(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n)}{\omega_{\parallel}(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n)} \right) \delta^2(\mathbf{p}_{\perp} + \mathbf{q}_{\perp}) \beta \delta_{n+m,0}. \quad (5.24)$$

Die Minimierung des mithilfe des Wick'schen Theorems auf Zweischleifenniveau berechneten Erwartungswerts des Yang–Mills-Hamiltonians bezüglich der beiden Variationskerne  $\omega_{\perp, \parallel}$  führt auf ein System zweier gekoppelter Integralgleichungen, welches in Referenz [138] numerisch gelöst wurde. Die gefundenen Lösungen für  $\omega_{\perp, \parallel}$  implizieren bei endlichen Temperaturen einen Deconfinement-Phasenübergang, welcher sich in einem Anstieg der (negativen) Infrarotexponenten des Geistformfaktors  $d$  [siehe Gleichung (3.11)] sowie der Gluonenergie manifestiert, vgl. auch Abschnitt 4.1.2. Weiterhin stimmen beide Variationskerne im Limes  $T \rightarrow 0$  mit dem Ergebnis des Variationsansatzes bei verschwindender Temperatur, siehe Kapitel 3 bzw. Referenz [18–21], überein.

In Kapitel 3 hatten wir gesehen, daß die ( $\omega$ -abhängigen) Kopplungsbeiträge bei Vernachlässigung von Rückkopplungseffekten der Quarks auf die Gluonen primär das UV-Verhalten der Quarkgapgleichung (3.100), (3.131) beeinflussen. Es ist daher naheliegend, daß vor allem der UV-Bereich des inversen Gluonpropagators Einfluß auf die Quarkgapgleichung und deren Lösung hat. Da die Abweichungen der Variationskerne  $\omega_{\perp, \parallel}$  vom Nulltemperaturergebnis auf den Bereich kleiner Impulse beschränkt sind, sollte es deshalb im Zuge einer ersten Analyse des Quarksektors vertretbar sein,  $\omega_{\perp, \parallel}$  durch das  $T = 0$  Resultat, genauer die Gribovformel (3.21), zu ersetzen:

$$\omega_{\perp}(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n) = \omega_{\parallel}(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n) \approx \omega(|\mathbf{p}_{\perp} + \omega_n \hat{e}_z|) \quad (5.25)$$

Dadurch reduziert sich der Gluonpropagator (5.24) auf den Gribovpropagator

$$\langle A_i^a(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n) A_j^b(\mathbf{q}_{\perp}, \omega_m) \rangle_{\text{YM}} \approx \delta^{ab} \frac{t_{ij}(\mathbf{p}_{\perp} + \omega_n \hat{e}_z)}{2\omega(|\mathbf{p}_{\perp} + \omega_n \hat{e}_z|)} \delta^2(\mathbf{p}_{\perp} + \mathbf{q}_{\perp}) \beta \delta_{n+m,0}, \quad (5.26)$$

was den erforderlichen numerischen Aufwand erheblich verringern wird.

Für den fermionischen Anteil des Vakuumwellenfunktional (5.19) verwenden wir in Anlehnung an Kapitel 3 den Ansatz

$$|\phi_Q[A]\rangle_{\varphi} = \exp \left( - \int_{\beta} \bar{d}^3 p \int_{\beta} d^3 q K_{\varphi}^{st,mn}(\mathbf{p}_{\perp}, p_n, -\mathbf{q}_{\perp}, -q_m) \times a_{\varphi}^{s,m\dagger}(\mathbf{p}_{\perp}, p_n) b_{\varphi}^{t,n\dagger}(-\mathbf{q}_{\perp}, -q_m) \right) |0\rangle, \quad (5.27)$$

wobei  $|0\rangle$  das nackte Vakuum (3.28) bezeichnet und der Variationskern  $K_\varphi$  durch

$$\begin{aligned} K_\varphi^{st,mn}(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m) &= K_{\varphi,0}^{st,mn}(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m) \\ &\quad + K_{\varphi,1}^{st,mn}(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m) \end{aligned} \quad (5.28a)$$

mit

$$K_{\varphi,0}^{st,mn}(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m) = \delta^{mn} \delta^{st} \delta^2(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{q}_\perp) \beta \delta_{n,m} s S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n), \quad (5.28b)$$

$$\begin{aligned} K_{\varphi,1}^{st,mn}(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m) &= \frac{g_a^{t mn}}{2(p_\perp^2 + p_n^2)^{\frac{1}{4}} (q_\perp^2 + q_m^2)^{\frac{1}{4}}} u^{s\dagger}(\mathbf{p}_\perp + p_n \hat{e}_z) \\ &\quad \times \left( V_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m) + \beta W_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m) \right) \\ &\quad \times \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}^a(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{q}_\perp, \omega_{n-m}) v^t(-\mathbf{q}_\perp - q_m \hat{e}_z) \end{aligned} \quad (5.28c)$$

gegeben ist. Wir setzen die einzelnen Variationskerne  $S_\varphi$ ,  $V_\varphi$  und  $W_\varphi$  als reellwertig an (siehe hierzu auch Fußnote 41), sodaß sich für das adjungierte Wellenfunktional

$$\begin{aligned} {}_\varphi \langle \phi_Q[A] | &= \langle 0 | \exp \left( - \int_\beta \bar{d}^3 p \int_\beta \bar{d}^3 q K_\varphi^{st,mn\dagger}(-\mathbf{p}_\perp, -p_n, \mathbf{q}_\perp, q_m) \right. \\ &\quad \left. \times b_\varphi^{s,m}(-\mathbf{p}_\perp, -p_n) a_\varphi^{t,n}(\mathbf{q}_\perp, q_m) \right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

mit

$$\begin{aligned} K_\varphi^{st,mn\dagger}(-\mathbf{p}_\perp, -p_n, \mathbf{q}_\perp, q_m) &= K_{\varphi,0}^{st,mn\dagger}(-\mathbf{p}_\perp, -p_n, \mathbf{q}_\perp, q_m) \\ &\quad + K_{\varphi,1}^{st,mn\dagger}(-\mathbf{p}_\perp, -p_n, \mathbf{q}_\perp, q_m), \end{aligned} \quad (5.30a)$$

$$K_{\varphi,0}^{st,mn\dagger}(-\mathbf{p}_\perp, -p_n, \mathbf{q}_\perp, q_m) = \delta^{mn} \delta^{st} \delta^2(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{q}_\perp) \beta \delta_{n,m} s S_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m), \quad (5.30b)$$

$$\begin{aligned} K_{\varphi,1}^{st,mn\dagger}(-\mathbf{p}_\perp, -p_n, \mathbf{q}_\perp, q_m) &= \frac{g_a^{t mn}}{2(p_\perp^2 + p_n^2)^{\frac{1}{4}} (q_\perp^2 + q_m^2)^{\frac{1}{4}}} v^{s\dagger}(-\mathbf{p}_\perp - p_n \hat{e}_z) \\ &\quad \times \left( V_\varphi(-\mathbf{p}_\perp, -p_n, \mathbf{q}_\perp, q_m) - \beta W_\varphi(-\mathbf{p}_\perp, -p_n, \mathbf{q}_\perp, q_m) \right) \\ &\quad \times \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}^a(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{q}_\perp, \omega_{n-m}) u^t(\mathbf{q}_\perp + q_m \hat{e}_z) \end{aligned} \quad (5.30c)$$

ergibt. In Analogie zum Ergebnis aus Kapitel 3 verwenden wir für die Vektorkerne weiterhin die Symmetrien

$$V_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m) = V_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m, -\mathbf{p}_\perp, -p_n), \quad (5.31a)$$

$$W_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m) = W_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m, -\mathbf{p}_\perp, -p_n) \quad (5.31b)$$

sowie

$$V_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m) = V_\varphi(-\mathbf{p}_\perp, -p_n, \mathbf{q}_\perp, q_m), \quad (5.32a)$$

$$W_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m) = W_\varphi(-\mathbf{p}_\perp, -p_n, \mathbf{q}_\perp, q_m). \quad (5.32b)$$

Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, besitzen die Bewegungsgleichungen auch unter diesen Voraussetzungen selbstkonsistente Lösungen.

### Ortsdarstellung

Wir geben der Vollständigkeit halber auch die Ortsdarstellung des Wellenfunktionals (5.19) an, da diese in der Veröffentlichung [141] verwendet wurde. Für den bosonischen Anteil am Wellenfunktional gilt

$$\tilde{\phi}_{\text{YM}}[A] = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_{\beta} d^3x \int_{\beta} d^3y A_i^a(\mathbf{x}) \hat{\omega}_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) A_j^b(\mathbf{y}) \right], \quad (5.33)$$

wobei der Variationskern im Orts- aus demjenigen im Impulsraum durch die Fouriertransformation

$$\hat{\omega}_{ij}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\beta} d^3p \exp(i(\mathbf{p}_{\perp} + \omega_n \hat{e}_z) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) \hat{\omega}_{ij}^{ab}(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n) \quad (5.34)$$

hervorgeht. Dabei wurde die Translationsinvarianz berücksichtigt, die Rotationsinvarianz ist durch die Kompaktifizierung gebrochen.

Für den fermionischen Anteil ergibt sich die Ortsdarstellung

$$|\phi_{\text{Q}}[A]\rangle_{\varphi} = \exp \left( - \int_{\beta} d^3x \int_{\beta} d^3y \Psi_+^{m\dagger}(\mathbf{x}) K_{\varphi}^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Psi_-^n(\mathbf{y}) \right) |0\rangle, \quad (5.35)$$

wobei  $\Psi_{\pm}$  den positiven bzw. negativen Spektralanteil des Feldoperators darstellt [siehe Gleichung (3.39)] und für den Variationskern

$$K_{\varphi}^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^{mn} \beta S_{\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + g \int_{\beta} d^3z \left( V_{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{z}) + \beta W_{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{z}) \right) t_a^{mn} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}^a(\mathbf{z}) \quad (5.36)$$

gilt. Da das Wellenfunktional überall – auch bei  $z = \beta$  – stetig sein muß, implizieren die  $U(1)$ -wertigen Randbedingungen (5.2) der Quarkfelder, daß der fermionische Kern ebenfalls Randbedingungen genügen muß:

$$K_{\varphi}^{mn}(\mathbf{x} + \beta \hat{e}_z, \mathbf{y}) = \exp(i\varphi) K_{\varphi}^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (5.37a)$$

$$K_{\varphi}^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \beta \hat{e}_z) = \exp(-i\varphi) K_{\varphi}^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (5.37b)$$

Unter Berücksichtigung der Erhaltung des Gesamtimpulses ergibt sich schließlich der folgende Zusammenhang zwischen den einzelnen Variationskernen in Orts- sowie Impulsdarstellung ( $W_{\varphi}$  analog zu  $V_{\varphi}$ ):

$$S_{\varphi}(\mathbf{x}) = \int_{\beta} d^3p \exp(i(\mathbf{p}_{\perp} + p_n \hat{e}_z) \cdot \mathbf{x}) S_{\varphi}(\mathbf{p}_{\perp}, p_n), \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} V_{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{z}) &= \int_{\beta} d^3p \int_{\beta} d^3q \exp(i(\mathbf{p}_{\perp} + p_n \hat{e}_z) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z})) \\ &\quad \times \exp(-i(\mathbf{q}_{\perp} + q_m \hat{e}_z) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z})) V_{\varphi}(\mathbf{p}_{\perp}, p_n, -\mathbf{q}_{\perp}, -q_m) \end{aligned} \quad (5.39)$$

### 5.1.3 Grundzustandsenergie und Variationsgleichungen

#### Energieerwartungswert

Im Folgenden bestimmen wir mithilfe des Ansatzes (5.19) für das QCD-Vakuumwellenfunktional auf  $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$  den Erwartungswert des modifizierten Hamiltonians (5.3) für chirale

Quarks ( $m_Q = 0$ ) im Limes eines verschwindenden chemischen Potentials  $\mu = 0$ . Dabei werden wir die Berechnung konsistent auf Zweischleifenniveau ausführen. Dies geschieht in völliger Analogie zu dem in Kapitel 3 beschriebenen Vorgehen, insbesondere impliziert die Wahl eines zu Gleichung (3.1) äquivalenten Wellenfunktionals die Gültigkeit der Darstellung (3.47) für allgemeine Erwartungswerte sowie des Wick'schen Theorems

$$\langle O[A, \Psi] \rangle_\varphi = \left\{ \exp \left( \frac{1}{4} \int_\beta d^3 p \frac{\delta}{\delta A_i^a(\mathbf{p}_\perp, \omega_n)} \frac{t_{ij}(\mathbf{p}_\perp + \omega_n \hat{e}_z)}{\omega(|\mathbf{p} + \omega_n \hat{e}_z|)} \frac{\delta}{\delta A_j^a(-\mathbf{p}_\perp, \omega_{-n})} \right) \times \langle O[A, \Psi] \rangle_{Q, \varphi} \right\} \Big|_{A=0} \quad (5.40)$$

für Erwartungswerte von Operatoren  $O$ , die kein Funktional des kanonischen Impulsoperators  $\Pi$  sind, vgl. Gleichung (3.49). Dabei ist  $\omega$  durch die Gribovformel (3.21) gegeben [vgl. (5.25)] und für den fermionischen Erwartungswert gilt

$$\langle O[A, \Pi, \Psi] \rangle_{Q, \varphi} = I^{-1}[A]_\varphi \langle \phi_Q[A] | O[A, \Pi, \Psi] | \phi_Q[A] \rangle_\varphi. \quad (5.41)$$

Die explizite Berechnung sämtlicher Erwartungswerte inklusive der Schleifenentwicklung (3.53) kann zur Gänze wie in Kapitel 3 beschrieben durchgeführt werden, weshalb wir an dieser Stelle auf weitere Details verzichten und direkt die Erwartungswerte der einzelnen Bestandteile des Hamiltonians (5.3) angeben. Da wir primär am Quarksektor interessiert sind und den Yang–Mills-Sektor bereits durch die Verwendung der Gribovformel für den inversen Gluonpropagator fixiert haben, beschränken wir uns dabei auf diejenigen Terme, welche für die fermionischen Bewegungsgleichungen relevant sind.

Für den Erwartungswert des freien Dirac-Hamiltonians (2.53) ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle H_Q^0 \rangle_\varphi = & -2N_C \beta \delta^2(0) \int_\beta d^3 p \sqrt{p_\perp^2 + p_n^2} P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n) \right) \\ & + \frac{N_C^2 - 1}{2} \beta \delta^2(0) g^2 \int_\beta d^3 p \int_\beta d^3 q \frac{P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) P_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m)}{\omega(|\mathbf{p}_\perp - \mathbf{q}_\perp + \omega_{n-m} \hat{e}_z|)} \\ & \times \left[ V_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m) X(\mathbf{p}_\perp + p_n \hat{e}_z, -\mathbf{q}_\perp - q_m \hat{e}_z) \right. \\ & \times \left\{ \sqrt{p_\perp^2 + p_n^2} P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \right. \\ & \times \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n) + 2S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) S_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m) \right) \\ & + \sqrt{q_\perp^2 + q_m^2} P_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m) \\ & \left. \left. \times \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{q}_\perp, q_m) + 2S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) S_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m) \right) \right\} \right] \\ & + W_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m) Y(\mathbf{p}_\perp + p_n \hat{e}_z, -\mathbf{q}_\perp - q_m \hat{e}_z) \\ & \times \left\{ \sqrt{p_\perp^2 + p_n^2} P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \right. \\ & \times \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n) - 2S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) S_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m) \right) \\ & \left. + \sqrt{q_\perp^2 + q_m^2} P_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m) \right\} \end{aligned}$$

$$\times \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{q}_\perp, q_m) - 2S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n)S_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m) \right) \Big] , \quad (5.42)$$

wobei wir die Abkürzungen (3.62), (3.63) für die kinematischen Faktoren  $X, Y$  sowie

$$P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) = \frac{1}{1 + S_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n)} \quad (5.43)$$

verwendet haben. Analog zu den in Kapitel 3 und 4 bestimmten Erwartungswerten auf  $\mathbb{R}^3$  läßt sich der divergente Vorfaktor  $\beta\delta^2(0)$  mit dem Volumen des zugrunde liegenden Raums  $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$  identifizieren. Weiterhin kann der Erwartungswert (5.42) wie sein Nulltemperatur-Pendant (3.74) im Sinne von Feynmandiagrammen dargestellt werden, siehe Abbildung 3.2.

Für den Erwartungswert der Quark-Gluon-Kopplung im Dirac-Hamiltonian (2.54) erhalten wir auf Zweischleifenniveau

$$\begin{aligned} \langle H_Q^A \rangle_\varphi = & -(N_C^2 - 1)\beta\delta^2(0)g^2 \int_\beta \bar{d}^3p \int_\beta \bar{d}^3q \frac{P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n)P_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m)}{\omega(|\mathbf{p}_\perp - \mathbf{q}_\perp + \omega_{n-m}\hat{e}_z|)} \\ & \times \left[ V_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m)X(\mathbf{p}_\perp + p_n\hat{e}_z, -\mathbf{q}_\perp - q_m\hat{e}_z) \right. \\ & \times \left( 1 + S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n)S_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m) \right) \\ & + W_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m)Y(\mathbf{p}_\perp + p_n\hat{e}_z, -\mathbf{q}_\perp - q_m\hat{e}_z) \\ & \left. \times \left( S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) + S_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m) \right) \right] , \quad (5.44) \end{aligned}$$

was die in Abbildung 3.3 gezeigte diagrammatische Darstellung besitzt.

Aus der Wirkung der in der kinetischen Energie der transversalen Gluonen (2.56) enthaltenen kanonischen Impulsoperatoren auf den fermionischen Anteil des Wellenfunktionals (5.19) ergibt sich der Beitrag

$$\begin{aligned} \langle H_{YM}^Q \rangle_\varphi = & \frac{N_C^2 - 1}{2}\beta\delta^2(0)g^2 \int_\beta \bar{d}^3p \int_\beta \bar{d}^3q P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n)P_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m) \\ & \times \left[ V_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m)X(\mathbf{p}_\perp + p_n\hat{e}_z, -\mathbf{q}_\perp - q_m\hat{e}_z) \right. \\ & \left. + W_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m)Y(\mathbf{p}_\perp + p_n\hat{e}_z, -\mathbf{q}_\perp - q_m\hat{e}_z) \right] \quad (5.45) \end{aligned}$$

zur Gesamtenergie. Dieser ist in Abbildung 3.5 diagrammatisch dargestellt.

Schließlich gilt für den fermionischen Anteil der Farb-Coulombwechselwirkung (2.63)

$$\begin{aligned} \langle H_C^Q \rangle_\varphi = & \frac{N_C^2 - 1}{4}\beta\delta^2(0) \int_\beta \bar{d}^3p \int_\beta \bar{d}^3q V_C(|\mathbf{p}_\perp - \mathbf{q}_\perp + \omega_{n-m}\hat{e}_z|) \\ & \times \left[ 1 - P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n)P_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m) \left\{ 4S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n)S_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n) \right) \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{q}_\perp, q_m) \right) \frac{\mathbf{p}_\perp + p_n\hat{e}_z}{\sqrt{p_\perp^2 + p_n^2}} \cdot \frac{\mathbf{q}_\perp + q_m\hat{e}_z}{\sqrt{q_\perp^2 + q_m^2}} \right\} \right] , \quad (5.46) \end{aligned}$$

was dem Feynmandiagramm in Abbildung 3.4 entspricht.

### Variationsgleichungen

Aufgrund der Ersetzung des inversen Gluonpropagators durch die Gribovformel (3.21) stellt die Grundzustandsenergie  $\langle \tilde{H}(\beta, \mu = 0) \rangle_\varphi$  lediglich ein Funktional in den drei fermionischen Variationskernen  $S_\varphi$ ,  $V_\varphi$  und  $W_\varphi$  dar. Dessen Minimierung führt wie in Kapitel 3 auf ein System von Bewegungsgleichungen für die Kerne. Dabei lassen sich die Gleichungen für die Vektorkerne  $V_\varphi$  und  $W_\varphi$ , (F.1) und (F.2), explizit in Abhängigkeit des Skalarkerns auflösen während sich für  $S_\varphi$  selber eine Integralgleichung (F.6) ergibt. Insbesondere läßt sich an diesen Gleichungen ablesen, daß die gefundenen Lösungen konsistent mit den Symmetriannahmen (5.31), (5.32) sind. Zur besseren Vergleichbarkeit mit dem Limes  $T \rightarrow 0$  sowie für die Durchführung der UV-Analyse ist es jedoch von Vorteil, nicht die Gleichungen in Abhängigkeit der Matsubarafrequenzen zu betrachten, sondern diese mithilfe von Gleichung (5.16) zu resumieren. Wir geben an dieser Stelle deshalb direkt die resummierten Gleichungen an und verweisen für die Matsubarafrequenz-abhängigen sowie die Durchführung der Resummation auf Anhang F.

Nach Resummation sowie Verschiebung der dadurch entstandenen kontinuierlichen  $z$ -Komponenten von äußerem und Schleifenimpuls um  $-\varphi/\beta$  ergibt sich für den Skalarkern  $S_\varphi$  die Gapgleichung

$$kS_\varphi(\mathbf{k}) = I_C^\varphi(\mathbf{k}) + I_{VV}^\varphi(\mathbf{k}) + I_{WW}^\varphi(\mathbf{k}) + I_{VQ}^\varphi(\mathbf{k}) + I_{WQ}^\varphi(\mathbf{k}) + I_{VE}^\varphi(\mathbf{k}) + I_{WE}^\varphi(\mathbf{k}), \quad (5.47)$$

wobei die verschiedenen Terme auf der rechten Seite durch Einschleifenintegrale gegeben sind. Der erste Term,

$$I_C^\varphi(\mathbf{k}) = \frac{C_F}{2} \int \bar{d}^3p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(il\beta \left[p_z - \frac{\varphi}{\beta}\right]\right) V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) P_\varphi(\mathbf{p}) \\ \times \left[ S_\varphi(\mathbf{p}) \left(1 - S_\varphi^2(\mathbf{k})\right) - S_\varphi(\mathbf{k}) \left(1 - S_\varphi^2(\mathbf{p})\right) \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right], \quad (5.48)$$

entstammt der Farb-Coulombwechselwirkung (5.46) und läßt sich wie sein  $T = 0$  Pendant (3.81) gemäß Abbildung 3.7 diagrammatisch darstellen. Die weiteren Terme entspringen den Zweischleifenbeiträgen des freien Dirac-Hamiltonians (5.42),

$$I_{VV}^\varphi(\mathbf{k}) = -\frac{C_F}{2} g^2 \int \bar{d}^3p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(il\beta \left[p_z - \frac{\varphi}{\beta}\right]\right) \frac{V_\varphi^2(\mathbf{p}, -\mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|)} X(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) P_\varphi(\mathbf{p}) \\ \times \left[ p P_\varphi(\mathbf{p}) \left\{ S_\varphi(\mathbf{p}) \left(1 - S_\varphi^2(\mathbf{k})\right) - S_\varphi(\mathbf{k}) \left(1 - S_\varphi^2(\mathbf{p})\right) \right\} \right. \\ \left. + k P_\varphi(\mathbf{k}) \left\{ S_\varphi(\mathbf{p}) \left(1 - 3S_\varphi^2(\mathbf{k})\right) - S_\varphi(\mathbf{k}) \left(3 - S_\varphi^2(\mathbf{k})\right) \right\} \right], \quad (5.49)$$

$$I_{WW}^\varphi(\mathbf{k}) = -\frac{C_F}{2} g^2 \int \bar{d}^3p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(il\beta \left[p_z - \frac{\varphi}{\beta}\right]\right) \frac{W_\varphi^2(\mathbf{p}, -\mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|)} Y(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) P_\varphi(\mathbf{p}) \\ \times \left[ p P_\varphi(\mathbf{p}) \left\{ S_\varphi(\mathbf{p}) \left(-1 + S_\varphi^2(\mathbf{k})\right) - S_\varphi(\mathbf{k}) \left(1 - S_\varphi^2(\mathbf{p})\right) \right\} \right. \\ \left. + k P_\varphi(\mathbf{k}) \left\{ S_\varphi(\mathbf{p}) \left(-1 + 3S_\varphi^2(\mathbf{k})\right) - S_\varphi(\mathbf{k}) \left(3 - S_\varphi^2(\mathbf{k})\right) \right\} \right], \quad (5.50)$$

dem Kopplungsterm (5.44),

$$I_{VQ}^\varphi(\mathbf{k}) = \frac{C_F}{2} g^2 \int \mathrm{d}^3 p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(il\beta \left[p_z - \frac{\varphi}{\beta}\right]\right) \frac{V_\varphi(\mathbf{p}, -\mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|)} X(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) P_\varphi(\mathbf{p}) \\ \times \left[ S_\varphi(\mathbf{p}) - 2S_\varphi(\mathbf{k}) - S_\varphi(\mathbf{p}) S_\varphi^2(\mathbf{k}) \right], \quad (5.51)$$

$$I_{WQ}^\varphi(\mathbf{k}) = \frac{C_F}{2} g^2 \int \mathrm{d}^3 p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(il\beta \left[p_z - \frac{\varphi}{\beta}\right]\right) \frac{W_\varphi(\mathbf{p}, -\mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|)} Y(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) P_\varphi(\mathbf{p}) \\ \times \left[ 1 - 2S_\varphi(\mathbf{p}) S(\mathbf{k}) - S_\varphi^2(\mathbf{k}) \right], \quad (5.52)$$

sowie der kinetischen Energie der Gluonen (5.45)

$$I_{VE}^\varphi(\mathbf{k}) = \frac{C_F}{2} g^2 S_\varphi(\mathbf{k}) \int \mathrm{d}^3 p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(il\beta \left[p_z - \frac{\varphi}{\beta}\right]\right) V_\varphi^2(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) X(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) P_\varphi(\mathbf{p}), \quad (5.53)$$

$$I_{WE}^\varphi(\mathbf{k}) = \frac{C_F}{2} g^2 S_\varphi(\mathbf{k}) \int \mathrm{d}^3 p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(il\beta \left[p_z - \frac{\varphi}{\beta}\right]\right) W_\varphi^2(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) Y(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) P_\varphi(\mathbf{p}), \quad (5.54)$$

siehe Abbildung 3.8 bis 3.10 für eine diagrammatische Darstellung.

Die beiden Vektorkerne sind dabei durch

$$V_\varphi(\mathbf{p}, -\mathbf{q}) = \frac{1 + S_\varphi(\mathbf{p}) S_\varphi(\mathbf{q})}{N_\varphi^V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \omega(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|)} \quad (5.55)$$

mit

$$N_\varphi^V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p P_\varphi(\mathbf{p}) \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{p}) + 2S_\varphi(\mathbf{p}) S_\varphi(\mathbf{q}) \right) + q P_\varphi(\mathbf{q}) \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{q}) + 2S_\varphi(\mathbf{p}) S_\varphi(\mathbf{q}) \right) \quad (5.56)$$

sowie

$$W_\varphi(\mathbf{p}, -\mathbf{q}) = \frac{S_\varphi(\mathbf{p}) + S_\varphi(\mathbf{q})}{N_\varphi^W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \omega(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|)} \quad (5.57)$$

mit

$$N_\varphi^W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p P_\varphi(\mathbf{p}) \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{p}) - 2S_\varphi(\mathbf{p}) S_\varphi(\mathbf{q}) \right) + q P_\varphi(\mathbf{q}) \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{q}) - 2S_\varphi(\mathbf{p}) S_\varphi(\mathbf{q}) \right) \quad (5.58)$$

gegeben. Das entspricht formal exakt dem Ergebnis aus Kapitel 3, vgl. Gleichung (3.93) und (3.97), und enthält insbesondere keine Faktoren der Phase  $\varphi$ , wie sie in den Schleifen der resummierten Quarkgapgleichung (5.47) auftreten, siehe z.B. den Beitrag (5.48). Die Ursache dafür ist, daß die Vektorkerne von zwei Impulsvariablen abhängen und durch die Variation beide inneren Impulse des auf Zweischleifenniveau berechneten Energiefunktions fixiert werden, wodurch sich sämtliche Phasenfaktoren kürzen lassen.

Da in sämtlichen Schleifentermen der resummierten Gapgleichung (5.47) der  $l = 0$  Term – welcher als einziger im Nulltemperaturlimes nicht-verschwindend ist – mit den entsprechenden Schleifenbeiträgen der Nulltemperatur-Gapgleichung (3.100) übereinstimmt, ergibt sich für die Gapgleichung (5.47) der korrekte Limes  $T \rightarrow 0$ . Darüber hinaus läßt sich



zeigen, daß die  $l = 0$  Terme wie erwartet sämtliche UV-divergenten Beiträge der Gapgleichung enthalten, siehe Anhang D.4. Die UV-Divergenzen der resummierten Gapgleichung (5.47) stimmen daher mit denjenigen der Nulltemperatur-Gleichung (3.100) überein. Das bedeutet, daß sich sowohl die linearen UV-Divergenzen der  $V_\varphi$ - und  $W_\varphi$ -Terme, als auch die logarithmischen Divergenzen dieser Terme sowie des UV-Beitrags ( $V_C = V_C^{\text{UV}}$ ) der Coulombwechselwirkung (5.48) exakt gegenseitig kompensieren. Für den IR-Beitrag der Coulombwechselwirkung (5.48) ergibt sich hingegen von vornherein ein endlicher Beitrag, wobei wir für das nichtabelsche Coulombpotential  $V_C$  dieselbe Näherung wie in Kapitel 3 verwendet haben, siehe Gleichung (3.117). Wir weisen darauf hin, daß die Vernachlässigung der Temperaturabhängigkeit des Coulombpotentials, welche sich z.B. in Gitterrechnungen ergibt [94], bedeutet. Diese hat aber voraussichtlich nur einen nachrangigen Effekt auf die Lösung der Gapgleichung. Da die Gapgleichung (5.47) wie ihr  $T = 0$  Limes (3.100) endlich ist, können wir analog zu Kapitel 3 auf eine Renormierung der Gleichung verzichten, sofern wir den statischen Quarkpropagator auf seine (endliche) führende Ordnung beschränken, siehe unten. Für das UV-Verhalten der Vektorkerne (5.55), (5.57) erhalten wir schließlich aufgrund der formal identischen Gestalt dasselbe Ergebnis wie im Nulltemperaturlimes, siehe Abschnitt 3.4.

Unter Verwendung der Massenfunktion (3.121)

$$M_\varphi(\mathbf{p}) = \frac{2pS_\varphi(\mathbf{p})}{1 - S_\varphi^2(\mathbf{p})} \quad (5.59)$$

sowie der Quasiteilchenenergie (3.122)

$$E_\varphi(\mathbf{p}) = \sqrt{p^2 + M_\varphi^2(\mathbf{p})} \quad (5.60)$$

läßt sich die resummierte Gapgleichung (5.47) in die für numerische Berechnungen geeignetere Form

$$M(\mathbf{k}) = \mathcal{I}_C^\varphi(\mathbf{k}) + \mathcal{I}_{VV}^\varphi(\mathbf{k}) + \mathcal{I}_{WW}^\varphi(\mathbf{k}) + \mathcal{I}_{VQ}^\varphi(\mathbf{k}) + \mathcal{I}_{WQ}^\varphi(\mathbf{k}) + \mathcal{I}_{VE}^\varphi(\mathbf{k}) + \mathcal{I}_{WE}^\varphi(\mathbf{k}) \quad (5.61)$$

bringen. Dabei sind die Schleifenbeiträge auf der rechten Seite durch

$$\mathcal{I}_C(\mathbf{k}) = \frac{C_F}{2} \int \bar{d}^3p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(il\beta \left[p_z - \frac{\varphi}{\beta}\right]\right) V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) \frac{M_\varphi(\mathbf{p}) - M_\varphi(\mathbf{k}) \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{k^2}}{E_\varphi(\mathbf{p})}, \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{VV}(\mathbf{k}) &= -\frac{C_F}{2} g^2 \int \bar{d}^3p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(il\beta \left[p_z - \frac{\varphi}{\beta}\right]\right) \frac{V_\varphi^2(\mathbf{p}, -\mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|)} X(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) \\ &\times \left\{ -\frac{E_\varphi(\mathbf{p}) + p}{2E_\varphi(\mathbf{p})} M_\varphi(\mathbf{k}) \frac{E_\varphi(\mathbf{k}) + 2k}{E_\varphi(\mathbf{k})} - p^2 \frac{E_\varphi(\mathbf{p}) + p}{2E_\varphi^2(\mathbf{p})} \frac{M_\varphi(\mathbf{k})}{k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_\varphi(\mathbf{p})}{2E_\varphi(\mathbf{p})} \frac{E_\varphi(\mathbf{k}) + k}{E_\varphi(\mathbf{k})} \left[-E_\varphi(\mathbf{k}) + 2k\right] + p M_\varphi(\mathbf{p}) \frac{E_\varphi(\mathbf{p}) + p}{2E_\varphi^2(\mathbf{p})} \right\}, \quad (5.63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{WW}(\mathbf{k}) &= -\frac{C_F}{2} g^2 \int \bar{d}^3p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(il\beta \left[p_z - \frac{\varphi}{\beta}\right]\right) \frac{W_\varphi^2(\mathbf{p}, -\mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|)} Y(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) \\ &\times \left\{ -\frac{E_\varphi(\mathbf{p}) + p}{2E_\varphi(\mathbf{p})} M_\varphi(\mathbf{k}) \frac{E_\varphi(\mathbf{k}) + 2k}{E_\varphi(\mathbf{k})} - p^2 \frac{E_\varphi(\mathbf{p}) + p}{2E_\varphi^2(\mathbf{p})} \frac{M_\varphi(\mathbf{k})}{k} \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{M_\varphi(\mathbf{p})}{2E_\varphi(\mathbf{p})} \frac{E_\varphi(\mathbf{k}) + k}{E_\varphi(\mathbf{k})} \left[ -E_\varphi(\mathbf{k}) + 2k \right] - p M_\varphi(\mathbf{p}) \frac{E_\varphi(\mathbf{p}) + p}{2E_\varphi^2(\mathbf{p})} \left. \right\}, \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{VQ}(\mathbf{k}) &= \frac{C_F}{2} g^2 \int \mathrm{d}^3 p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left( i l \beta \left[ p_z - \frac{\varphi}{\beta} \right] \right) \frac{V_\varphi(\mathbf{p}, -\mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|)} X(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) \\ &\quad \times \left[ \frac{M_\varphi(\mathbf{p})}{E_\varphi(\mathbf{p})} - \frac{E_\varphi(\mathbf{p}) + p}{E_\varphi(\mathbf{p})} \frac{M_\varphi(\mathbf{k})}{k} \right], \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{WQ}(\mathbf{k}) &= \frac{C_F}{2} g^2 \int \mathrm{d}^3 p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left( i l \beta \left[ p_z - \frac{\varphi}{\beta} \right] \right) \frac{W_\varphi(\mathbf{p}, -\mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|)} Y(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) \\ &\quad \times \left[ \frac{E_\varphi(\mathbf{p}) + p}{E_\varphi(\mathbf{p})} - \frac{M_\varphi(\mathbf{p})}{E_\varphi(\mathbf{p})} \frac{M_\varphi(\mathbf{k})}{k} \right], \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{VE}(\mathbf{k}) &= \frac{C_F}{2} g^2 \frac{M_\varphi(\mathbf{k})}{k} \int \mathrm{d}^3 p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left( i l \beta \left[ p_z - \frac{\varphi}{\beta} \right] \right) V_\varphi^2(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) X(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) \\ &\quad \times \frac{E_\varphi(\mathbf{p}) + p}{2E_\varphi(\mathbf{p})} \end{aligned} \quad (5.67)$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{WE}(\mathbf{k}) &= \frac{C_F}{2} g^2 \frac{M_\varphi(\mathbf{k})}{k} \int \mathrm{d}^3 p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left( i l \beta \left[ p_z - \frac{\varphi}{\beta} \right] \right) W_\varphi^2(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) Y(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) \\ &\quad \times \frac{E_\varphi(\mathbf{p}) + p}{2E_\varphi(\mathbf{p})} \end{aligned} \quad (5.68)$$

gegeben. Die verwendete Notation erlaubt eine einfache Identifikation mit den Beiträgen (5.48)-(5.54) der ursprünglichen Gapgleichung (5.47). Die Vektorkerne (5.55), (5.57) in Abhängigkeit der Massenfunktion sind durch

$$V_\varphi(\mathbf{p}, -\mathbf{q}) = \frac{1 + \frac{E_\varphi(\mathbf{p}) - p}{M_\varphi(\mathbf{p})} \frac{E_\varphi(\mathbf{q}) - q}{M_\varphi(\mathbf{q})}}{\frac{p^2}{E_\varphi(\mathbf{p})} \left[ 1 + \frac{M_\varphi(\mathbf{p})}{p} \frac{E_\varphi(\mathbf{q}) - q}{M_\varphi(\mathbf{q})} \right] + \frac{q^2}{E_\varphi(\mathbf{q})} \left[ 1 + \frac{M_\varphi(\mathbf{q})}{q} \frac{E_\varphi(\mathbf{p}) - p}{M_\varphi(\mathbf{p})} \right] + \omega(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|)} \quad (5.69)$$

und

$$W_\varphi(\mathbf{p}, -\mathbf{q}) = \frac{\frac{E_\varphi(\mathbf{p}) - p}{M_\varphi(\mathbf{p})} + \frac{E_\varphi(\mathbf{q}) - q}{M_\varphi(\mathbf{q})}}{\frac{p^2}{E_\varphi(\mathbf{p})} \left[ 1 - \frac{M_\varphi(\mathbf{p})}{p} \frac{E_\varphi(\mathbf{q}) - q}{M_\varphi(\mathbf{q})} \right] + \frac{q^2}{E_\varphi(\mathbf{q})} \left[ 1 - \frac{M_\varphi(\mathbf{q})}{q} \frac{E_\varphi(\mathbf{p}) - p}{M_\varphi(\mathbf{p})} \right] + \omega(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|)} \quad (5.70)$$

gegeben. Analog ließe sich, entweder unter erneuter Anwendung der Poisson'schen Summenformel (5.16) oder direkt ausgehend von der Gapgleichung in  $S_\varphi$  (F.6), eine Gapgleichung für die Massenfunktion in Abhängigkeit der Matsubarafrequenzen herleiten. Eine solche Gleichung besitzt Vorteile im Limes hoher Temperaturen, wird aber für diese Arbeit keine weitere Rolle spielen, weshalb wir auf ihre Angabe verzichten.

Die gesamte Temperaturabhängigkeit sowie die Abhängigkeit von der Phase  $\varphi$  der  $U(1)$ -wertigen Randbedingung (5.2) gehen in die Gapgleichung (5.61) lediglich durch die Exponentialfaktoren in den Schleifentermen auf der rechten Seite ein. Deren  $l = 0$  Term ist stets unabhängig von Temperatur und Phase und entspricht exakt dem jeweiligen Beitrag zur

Gapgleichung (3.131) im Limes  $T = 0$ . Der Einfachheit halber werden wir in dieser Arbeit auf die sehr aufwendige<sup>69</sup> numerische Lösung der Gapgleichung (5.61) verzichten und stattdessen die Massenfunktion durch ihren in Kapitel 3 bestimmten Nulltemperaturlimes ersetzen. Das entspricht der Reduktion von Gleichung (5.61) auf den  $l = 0$  Term und führt zu einer rein betragsabhängigen Massenfunktion

$$M_\varphi(\mathbf{p}) = M(p). \quad (5.71)$$

Für das im folgenden Abschnitt berechnete duale und chirale Quarkkondensat bedeutet das, daß wir lediglich die expliziten Temperatur- und Phasenabhängigkeiten berücksichtigen, nicht jedoch die in der Massenfunktion vorhandenen impliziten. Dies könnte wesentlichen Einfluß auf die Ordnung der Phasenübergänge sowie die kritischen Temperaturen haben, sodaß die numerische Lösung von Gleichung (5.61) Gegenstand weitergehender Untersuchungen in folgenden Arbeiten sein wird.

#### 5.1.4 Duales und chirales Quarkkondensat im Hamilton'schen Zugang in Coulombbeichung

Wir berechnen nun das chirale (2.94) sowie das duale Quarkkondensat (5.1) im Rahmen des alternativen Hamilton'schen Zugangs.

#### Statischer Quarkpropagator und chirales Quarkkondensat

Das chirale Quarkkondensat

$$\langle \bar{\Psi}^m(\mathbf{x}) \Psi^m(\mathbf{x}) \rangle_\varphi = -\text{Sp}(\beta G^{mm}(\mathbf{x}, \mathbf{x})) \quad (5.72)$$

läßt sich bei Kenntnis des statischen Quarkpropagators

$$\begin{aligned} G_{ij}^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} \langle [\Psi_i^m(\mathbf{x}), \Psi_j^{n\dagger}(\mathbf{y})] \rangle_\varphi \\ &= \delta^{mn} \int_\beta \mathrm{d}^3 p \exp(i(\mathbf{p}_\perp + p_n \hat{\mathbf{e}}_z) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) G_{ij}(\mathbf{p}_\perp, p_n) \end{aligned} \quad (5.73a)$$

$$= \delta^{mn} \int \mathrm{d}^3 p \exp(i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) G_{ij}(\mathbf{p}) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(i l \beta \left[ p_z - \frac{\varphi}{\beta} \right]\right) \quad (5.73b)$$

leicht bestimmen. Dessen Berechnung läßt sich wiederum – wie diejenige des Energieerwartungswerts – in völliger Analogie zu Kapitel 3 durchführen und liefert für  $G(\mathbf{p})$  ein zu Gleichung (3.58) äquivalentes Ergebnis. Der einzige wesentliche Unterschied ergibt sich für die beiden Schleifenbeiträge  $I_{\alpha,\beta}$  [Gleichung (3.59) und (3.60)], welche durch Anwendung der Poisson'schen Formel (5.16) zusätzlich jeweils eine Summe oszillierender Phasenfaktoren enthalten. Die UV-Analyse dieser Schleifenterme führt wie bei den Schleifenbeiträgen der Quarkgapgleichung (5.47) zu dem Ergebnis, daß lediglich der  $l = 0$  Beitrag logarithmische Divergenzen enthält, während die phasen- und temperaturabhängigen  $l \neq 0$  Terme endlich

<sup>69</sup>Der numerische Aufwand zur Lösung der Gapgleichung (5.61) ist um ein Vielfaches höher als für die Nulltemperatur-Gapgleichung (3.131). Das wird zum einen bedingt durch die zusätzliche Summation über  $l$ . Zum anderen führt die Brechung der  $O(3)$ -Invarianz dazu, daß die Massenfunktion von zwei Impulsen,  $\mathbf{p}_\perp$  und  $p_z$ , abhängt, was eine zusätzliche Integrations- und Rekursionsschleife erfordert.

sind. Diese Divergenzen besitzen dieselbe Form wie für  $T = 0$ , siehe Gleichung (3.118), (3.119), und heben sich auch für das um  $W_\varphi$  erweiterte Wellenfunktional nicht auf. Um auf eine Renormierung des Modells verzichten zu können und dennoch einen endlichen Ausdruck für das Quarkkondensat zu erhalten, müssen wir den statischen Propagator daher wie in Kapitel 3 auf seine führende Ordnung

$$G_{\text{LO}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} P_\varphi(\mathbf{p}) \left[ (1 - S_\varphi^2(\mathbf{p})) \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + 2S_\varphi(\mathbf{p})\beta \right] = \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta M_\varphi(\mathbf{p})}{2E_\varphi(\mathbf{p})} \quad (5.74)$$

beschränken. Für das chirale Quarkkondensat (5.72) ergibt sich mit Gleichung (5.74) der Ausdruck

$$\langle \bar{\Psi}^m(\mathbf{x}) \Psi^m(\mathbf{x}) \rangle_\varphi = -4N_C \int d^3p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left( il\beta \left[ p_z - \frac{\varphi}{\beta} \right] \right) P_\varphi(\mathbf{p}) S_\varphi(\mathbf{p}) \quad (5.75a)$$

$$= -2N_C \int d^3p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left( il\beta \left[ p_z - \frac{\varphi}{\beta} \right] \right) \frac{M_\varphi(\mathbf{p})}{E_\varphi(\mathbf{p})}. \quad (5.75b)$$

Wie bereits erwähnt, werden wir für die weitergehenden Auswertungen die Massenfunktion  $M_\varphi$  durch ihren Nulltemperaturlimes ersetzen. Die daraus resultierende  $O(3)$ -Invarianz der Massenfunktion, siehe Gleichung (5.71), erlaubt die explizite Ausführung der Winkelintegrationen<sup>70</sup> im Quarkkondensat (5.75) womit wir

$$\langle \bar{\Psi}^m(\mathbf{x}) \Psi^m(\mathbf{x}) \rangle_\varphi = -\frac{N_C}{\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2 M(p)}{E(p)} \left[ 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \cos(l\varphi) \text{sinc}(l\beta p) \right] \quad (5.76)$$

erhalten. Hierbei bezeichnet

$$\text{sinc} x \equiv \frac{\sin x}{x} \quad (5.77)$$

den *Kardinalsinus*. Offensichtlich ist das Quarkkondensat (5.76) eine  $2\pi$ -periodische Funktion der Phase  $\varphi$ , wie es aufgrund der Randbedingung (5.2) zu erwarten war. Anhand von Gleichung (5.76) läßt sich weiterhin der Nulltemperaturlimes des Quarkkondensats bestimmen,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \langle \bar{\Psi}^m(\mathbf{x}) \Psi^m(\mathbf{x}) \rangle_\varphi = -\frac{N_C}{\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2 M(p)}{E(p)}. \quad (5.78)$$

Dieser ist unabhängig von der Phase  $\varphi$  und stimmt mit dem in Kapitel 3 für  $\varphi = \pi$  gefundenen Resultat (3.123) überein. Da die Randbedingungen der Felder (5.2) für  $\beta \rightarrow \infty$  irrelevant werden, ist das Verschwinden von  $\varphi$  im Kondensat für diesen Limes nicht weiter verwunderlich. Demgegenüber zeigt das Hochtemperaturverhalten des Kondensats eine starke Abhängigkeit von der Phase  $\varphi$  der Randbedingungen, siehe Abschnitt 5.1.5.

<sup>70</sup>Man beachte, daß das die Vertauschung von Integration und Summation in Gleichung (5.75) bedingt. Da die Reihe nicht absolut konvergent ist, ist die Legitimität dieser Vertauschung a priori nicht klar. Der dadurch entstehende Ausdruck ist jedoch konvergent und die numerischen Ergebnisse stimmen unabhängig von der Reihenfolge von Integration und Summation überein.

Die in Gleichung (5.76) enthaltene Summe wird für fermionische Randbedingungen,  $\varphi = \pi$ , zu [143]

$$\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \operatorname{sinc}(l\beta p) = -\frac{1}{2\beta p} \left( \beta p - 2\pi \left\lfloor \frac{\beta p + \pi}{2\pi} \right\rfloor \right), \quad (5.79)$$

womit sich für das chirale Kondensat

$$\langle \bar{\Psi}^m(\mathbf{x}) \Psi^m(\mathbf{x}) \rangle_{\varphi=\pi} = -\frac{2N_C}{\pi} \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} dp \frac{pM(p)}{E(p)} \left\lfloor \frac{\beta p + \pi}{2\pi} \right\rfloor \quad (5.80)$$

ergibt. Hieran läßt sich der Hochtemperaturlimes

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \langle \bar{\Psi}^m(\mathbf{x}) \Psi^m(\mathbf{x}) \rangle_{\varphi=\pi} = 0 \quad (5.81)$$

ablesen, was die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie bei hohen Temperaturen impliziert. Für  $\varphi = 0$  ergibt sich für die Summe in Gleichung (5.76) hingegen [143]

$$\sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{sinc}(l\beta p) = \frac{1}{2\beta p} \left( \pi - \beta p + 2\pi \left\lfloor \frac{\beta p}{2\pi} \right\rfloor \right), \quad (5.82)$$

sodaß das Kondensat die Form

$$\langle \bar{\Psi}^m(\mathbf{x}) \Psi^m(\mathbf{x}) \rangle_{\varphi=0} = -\frac{N_C}{\pi} \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} dp \frac{pM(p)}{E(p)} \left( 1 + 2 \left\lfloor \frac{\beta p}{2\pi} \right\rfloor \right) \quad (5.83)$$

annimmt. Dies impliziert für hohe Temperaturen ein linear anwachsendes Verhalten,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \langle \bar{\Psi}^m(\mathbf{x}) \Psi^m(\mathbf{x}) \rangle_{\varphi=0} \sim \frac{1}{\beta}, \quad (5.84)$$

und ist ein Zeichen für die starke Abhängigkeit des Hochtemperaturlimes von den gewählten Randbedingungen.

### Duales Kondensat

Nach Einsetzen des chiralen Quarkkondensats (5.76) in die Definition des dualen Kondensats [Gleichung (5.1)] läßt sich die Integration über die Phase  $\varphi$  analytisch ausführen und wir erhalten den Ausdruck

$$\Sigma_n = -\frac{N_C}{\pi^2} \int_0^{\infty} dp \frac{p^2 M(p)}{E(p)} \left[ \delta_{n0} + \operatorname{sinc}(n\beta p) \right]. \quad (5.85)$$

Insbesondere ergibt sich damit für  $n = 1$ , den *dressed Polyakov loop*,

$$\Sigma_1 = -\frac{N_C}{\pi^2} \int_0^{\infty} dp \frac{p^2 M(p)}{E(p)} \operatorname{sinc}(\beta p). \quad (5.86)$$

Offensichtlich verschwindet diese Größe im Grenzfall niedriger Temperaturen,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \Sigma_1 = 0, \quad (5.87)$$

während sie im Hochtemperaturlimes den endlichen Wert

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \Sigma_1 = -\frac{N_C}{\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2 M(p)}{E(p)} \quad (5.88)$$

annimmt. Das entspricht dem erwarteten Verhalten eines Ordnungsparameters des Farbeinschlusses. Ein Vergleich der Limites (5.87) und (5.88) mit denjenigen des chiralen Kondensats, Gleichung (5.78) und (5.81), zeigt ferner, daß chirales und duales Kondensat im Rahmen der von uns verwendeten Näherungen genau komplementäre Limites besitzen.

### Bestimmung der pseudokritischen Temperaturen

An den Ausdrücken für chirales (5.76) und duales Quarkkondensat (5.86) läßt sich ablesen, daß beide Größen glatte Funktionen der Temperatur darstellen, d.h. sowohl die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie als auch die Aufhebung des Farbeinschlusses sind als Crossover-Phasenübergänge realisiert. Das entspricht nur teilweise den Erwartungen – siehe Abschnitt 5.1.5 für eine weitergehende Diskussion – und bedingt, daß wir Kriterien zur Fixierung der pseudokritischen Temperaturen der beiden Phasenübergänge festlegen müssen. Wir werden diese standardmäßig mit den Wendepunkten von chiralem bzw. dualem Quarkkondensat identifizieren, d.h.

$$\left. \frac{\partial^2 \langle \bar{\Psi}^m(\mathbf{x}) \Psi^m(\mathbf{x}) \rangle_{\varphi=\pi}}{\partial T^2} \right|_{T_x} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial T^2} \right|_{T_c} = 0 \quad (5.89)$$

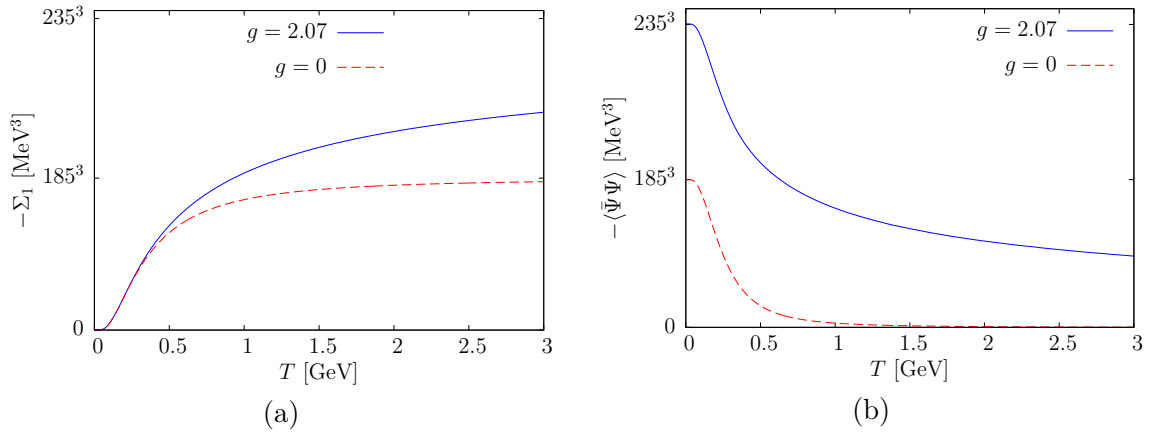
fordern. Aufgrund der Ersetzung der Massenfunktion durch ihren Nulltemperaturlimes sind wir dabei nicht zwangsläufig darauf angewiesen, die Temperaturableitungen numerisch auszuführen, sondern können ausgehend von Gleichung (5.76) sowie (5.86) die analytischen Ausdrücke

$$\frac{\partial^2 \langle \bar{\Psi}^m \Psi^m \rangle_{\varphi}}{\partial T^2} = \frac{2N_C}{\pi^2} \beta^4 \int_0^\infty dp \frac{p^4 M(p)}{E(p)} \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \cos(l\varphi) \text{sinc}(l\beta p), \quad (5.90)$$

und

$$\frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial T^2} = \frac{N_C}{\pi^2} \beta^4 \int_0^\infty dp \frac{p^4 M(p)}{E(p)} \text{sinc}(\beta p) \quad (5.91)$$

verwenden. Das ermöglicht (zumindest für  $g = 0$ ) die präzise Bestimmung der pseudokritischen Temperaturen, welche bei Verwendung numerischer Ableitungen teils nicht unerheblichen Unsicherheiten unterliegen, vgl. beispielsweise Abbildung 5.12 (a).



**Abbildung 5.1:** (a) Duales [Gleichung (5.86)] und (b) chirales Quarkkondensat [Gleichung (5.76)] für  $\varphi = \pi$  in Abhängigkeit der Temperatur für die Eichgruppe  $SU(3)$ . Auswertung bei einer Kopplung von  $g = 2.07$  (durchgezogene Linie) sowie bei Vernachlässigung von Quark-Gluon-Kopplung und UV-Beitrag des Coulombpotentials ( $g = 0$ , gestrichelte Linie).

### 5.1.5 Numerische Ergebnisse

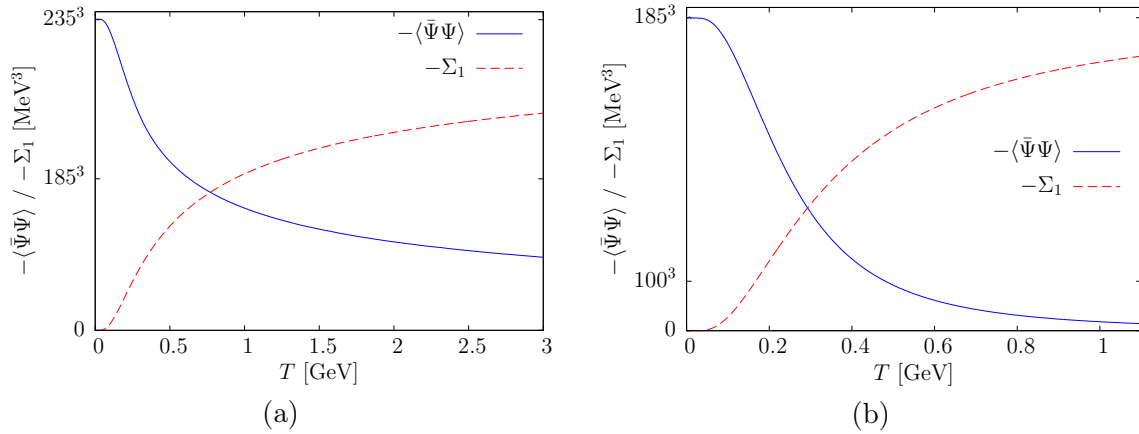
Für die numerische Auswertung des chiralen (5.76) sowie des dualen Quarkkondensats (5.86) greifen wir auf die in Abschnitt 3.4 ermittelte Nulltemperatur-Massenfunktion zurück. Diese ergab sich aus der Lösung der Gapgleichung (3.131), wobei die Kopplung  $g$  durch Fixieren des chiralen Kondensats auf seinen phänomenologischen Wert bei  $T = 0$ ,

$$\langle\bar{\Psi}(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x})\rangle_{\varphi=\pi}^{\text{phen}} = (-235 \text{ MeV})^3, \quad (5.92)$$

zu  $g \approx 2.07$  bestimmt wurde. Die physikalische Skala der Theorie hatten wir mit der Coulomb-Stringtension  $\sigma_C = 2.5\sigma$  [94] identifiziert. Schließlich ließ sich die Massenfunktion in sehr guter Weise durch die analytische Fitfunktion (3.148), (3.149) approximieren.

Die Verwendung der  $O(3)$ -invarianten Nulltemperaturlösung für die Massenfunktion ermöglichte bereits die analytische Ausführung eines Großteils der auftretenden Integrationen und führte zu kompakten Ausdrücken für das chirale und duale Kondensat, siehe Gleichung (5.76) sowie (5.86). Ersetzen wir die Massenfunktion durch den analytischen Fit, so lassen sich im Folgenden die zur Auswertung der beiden Kondensate sowie ihrer Ableitungen verbleibenden numerischen Integrationen mit vergleichsweise geringem Aufwand ausführen. Dabei umgehen wir durch Verwendung der  $T = 0$  Massenfunktion die numerisch aufwendige Lösung der resummierten Gapgleichung (5.61). Dies stellt selbstverständlich eine – in Teilen möglicherweise nicht unerhebliche – Näherung dar, erlaubt aber im Rahmen dieser Arbeit eine erste Analyse des alternativen Hamilton’schen Zugangs zur vollen QCD. Die numerische Lösung der vollen, temperaturabhängigen Gapgleichung wird Gegenstand folgender Arbeiten sein.

Für die numerische Auswertung des chiralen Quarkkondensats (5.76) wurde die Poisson-Summation im Folgenden stets auf die ersten  $l \leq 75$  Summanden begrenzt. Das beeinflusst zwar den Limes  $T \rightarrow \infty$ , zu dessen Bildung eine große Anzahl an Summanden erforderlich wäre (vgl. die Aufzählung am Ende von Abschnitt 5.1.1), spielt aber für die betrachteten



**Abbildung 5.2:** Gegenüberstellung des chiralen (durchgezogene Linie) und des dualen Quarkkondensats (gestrichelte Linie) für  $SU(3)$  bei einer Kopplung von (a)  $g = 2.07$  und (b)  $g = 0$ .

Temperaturen keine Rolle. Damit ergibt sich bei  $N_C = 3$  Farbladungen für das duale Kondensat  $\Sigma_1$  (5.86) der in Abbildung 5.1 (a) sowie für das chirale Quarkkondensat (für  $\varphi = \pi$ ) der in Abbildung 5.1 (b) dargestellte Verlauf. Zu Vergleichszwecken sind jeweils auch die Ergebnisse gezeigt, welche sich bei Vernachlässigung der Quark-Gluon-Kopplung sowie des UV-Anteils des Coulombpotentials (3.117), d.h. für  $g = 0$ , ergeben. Wie man erkennt, führt die Berücksichtigung der Quark-Gluon-Kopplung zu einem deutlichen Anstieg beider Kondensate. Das ist konsistent mit den Ergebnissen aus Kapitel 3, wo wir einen ähnlichen Effekt für den Nulltemperaturlimes des chiralen Kondensats gesehen hatten. Abbildung 5.2 zeigt den Verlauf von chiralem und dualem Kondensat in einem gemeinsamen Diagramm. In dieser Darstellung erkennt man deutlich, daß der Zerfall des chiralen Kondensats mit einem Anwachsen des dualen Kondensats verknüpft ist. Weiterhin bestätigen die numerischen Ergebnisse die im letzten Abschnitt analytisch vorhergesagten komplementären Tief- und Hochtemperaturlimites der beiden Kondensate. Allerdings werden die Grenzwerte – insbesondere für  $g = 2.07$  – erst bei sehr hohen Temperaturen angenommen. Das ist eine Folge des durch Berücksichtigung von Kopplung und UV-Anteil des Coulombpotentials erhöhten UV-Exponenten der Massenfunktion, vgl. Abschnitt 3.4, welcher primär das Verhalten bei mittleren und großen Energieskalen beeinflusst.

In Übereinstimmung mit unserer Vorhersage geht aus den Abbildungen hervor, daß die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie sowie die Aufhebung des Farbeinschlusses als Crossover-Übergänge realisiert sind. Für den Deconfinement-Phasenübergang entspricht das der Erwartung, da aufgrund der Brechung der Zentrumssymmetrie in der vollen QCD sowohl der Erwartungswert des Polyakov-Loops, als auch das duale Kondensat stets einen endlichen Wert besitzen, vgl. Abschnitt 2.5. Für die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie im Limes masseloser Quarks war hingegen nicht mit einem Crossover zu rechnen: Wie wir anhand des Columbiadiagramms, Abbildung 2.4, erkennen können, würden wir je nach Anzahl der berücksichtigten Quarkflavours vielmehr einen Phasenübergang erster (drei Flavours) oder zweiter Ordnung (zwei Flavours) erwarten. Da wir in unseren bisherigen Berechnungen immer von einem einzelnen Flavour ausgegangen sind, stellt sich die Frage, welcher dieser beiden Fälle in unserem Modell realisiert sein sollte und wieso wir



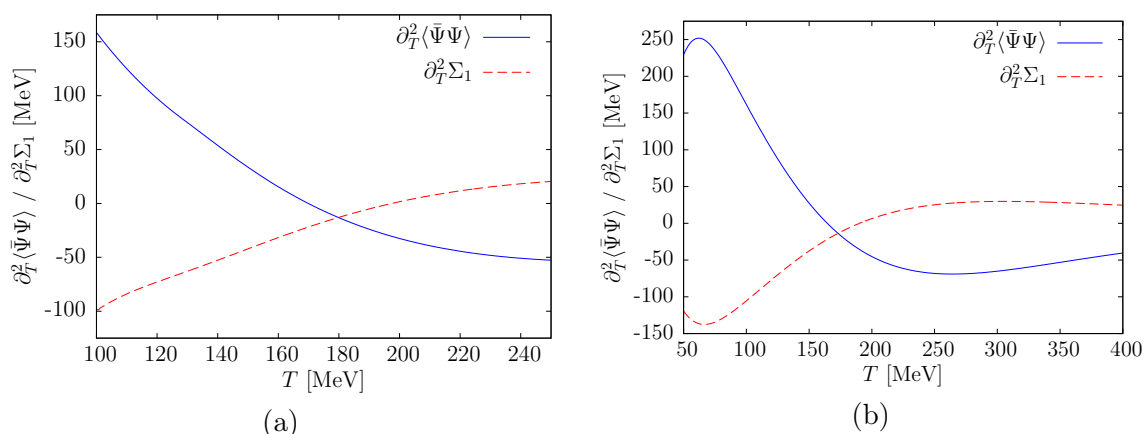
einen Crossover-Übergang finden. Würden wir in unserem Ansatz mehrere Quarkflavours berücksichtigen, ließen sich die Quarkfeldoperatoren  $\Psi_f^m$  (mit  $f = 1, \dots, N_F$ ) zu Vektoren im  $N_F$ -dimensionalen Flavourraum zusammenfassen. Ebenso wäre der fermionische Variationskern  $K$  (5.28) – und somit der Skalar- und die Vektorkerne – ein matrixwertiger Operator auf diesem Raum. Da die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen flavourblind ist, bliebe hingegen der Beitrag des Yang–Mills-Sektors unverändert. Bei Verwendung eines flavourdiagonalen fermionischen Variationskerns  $K$  würde der Erwartungswert des QCD-Hamiltonians somit in die Summe der Beiträge der einzelnen Flavours zerfallen und wir würden für jeden der Diagonaleinträge des Skalar- und der Vektorkerne exakt die Bewegungsgleichungen (5.47), (5.55) sowie (5.57) reproduzieren. Unter Beibehaltung der numerischen Lösung aus Abschnitt 3.4 – wobei wir das chirale Kondensat nun an den Mittelwert der Kondensate der betrachteten Quarkflavours anpassen müssten – würden wir (zumindest qualitativ) dieselbe Lösung für den temperaturabhängigen Verlauf des chiralen Kondensats (5.76) wie bisher erhalten und damit unabhängig von der Anzahl der betrachteten Flavours einen Crossover-Phasenübergang finden. Dessen Auftreten scheint daher entweder modellbedingt oder die Folge von Näherungen, nicht aber der Vernachlässigung von Flavours zu sein.

Betrachten wir das chirale Kondensat (5.75) vor Einsetzen der Nulltemperatur-Massenfunktion, so liegt tatsächlich die Vermutung nahe, daß eben diese Näherung den kritischen Punkt darstellt: Ohne daß die (temperaturabhängige) Massenfunktion  $M_\varphi$  bei einem kritischen Wert einen Phasenübergang zeigt, d.h. identisch zu null wird, läßt sich auch für das chirale Kondensat kein Phasenübergang erster oder zweiter Ordnung erwarten.<sup>71</sup> Der gefundene Crossover-Phasenübergang ist daher höchstwahrscheinlich eine Folge der Ersetzung (5.71) womit die berechtigte Hoffnung besteht, daß er bei Verwendung der Lösung der vollen Gapgleichung (5.61) in dieser Form nicht weiter auftreten wird. Tatsächlich zeigt zumindest die in Referenz [109, 135–137] gefundene numerische Lösung der Großkanonischen Bewegungsgleichung (4.72) für die Massenfunktion im Limes  $g = 0$  bei verschwindendem chemischen Potential  $\mu = 0$  einen Phasenübergang zweiter Ordnung. Zwar läßt sich daraus nicht auf die Ergebnisse des alternativen Hamilton’schen Zugangs schließen, allerdings erscheint diese Ordnung des Phasenübergangs durchaus plausibel zu sein: In unserem Modell werden sämtliche Quarkflavours identifiziert, was für die beiden leichtesten Quarkflavours sicher eine bessere Näherung darstellt als bei Hinzunahme des erheblich schwereren [siehe Gleichung (2.77)] Strange-Quarks. Weiterhin würde das Verschwinden der Massenfunktion bei einem Phasenübergang zweiter Ordnung die in der bisherigen Näherung sehr großen Phasenübergangsbreiten, vgl. Abbildung 5.2, reduzieren und die gefundenen Lösungen auch in dieser Hinsicht verbessern. Tatsächlich zeigen alternative Gitter- und Kontinuumsrechnungen eher schmale QCD-Phasenübergänge, vgl. z.B. Referenz [72, 128, 132].

Als nächstes widmen wir uns der Bestimmung der pseudokritischen Temperaturen der beiden Phasenübergänge, wozu wir die zweiten Ableitungen [Gleichung (5.90) für  $\varphi = \pi$  sowie Gleichung (5.91)] numerisch auswerten.<sup>72</sup> Die entsprechenden Ergebnisse sind in Ab-

<sup>71</sup>Das stimmt mit der Identifikation der Massenfunktion als alternativem Ordnungsparameter überein.

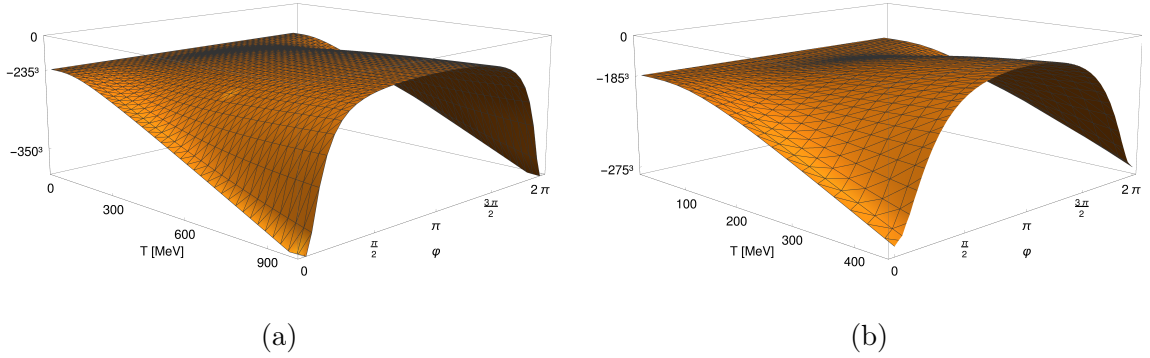
<sup>72</sup>Die in Abbildung 5.3 (a) gezeigte Kurve für das chirale Kondensat ergibt sich tatsächlich nicht aus der Auswertung von Gleichung (5.90) sondern aus der numerisch bestimmten Ableitung einer quadratischen Splineinterpolation des Kondensats. Die für  $g = 2.07$  auftretenden Instabilitäten in Gleichung (5.90) rühren von den darin enthaltenen oszillatorischen Termen her, welche im Zusammenspiel mit dem – verglichen mit  $g = 0$  – größeren UV-Exponenten der Massenfunktion das Ergebnis negativ beeinflussen. Für  $g = 0$  treten solche Schwierigkeiten nicht auf und Abbildung 5.3 (b) zeigt die Auswertung von Gleichung (5.90).



**Abbildung 5.3:** Zweite Ableitung des chiralen (durchgezogene Kurve) und des dualen Kondensats (gestrichelte Kurve) für  $SU(3)$  bei einer Kopplung von (a)  $g = 2.07$  und (b)  $g = 0$ .

Abbildung 5.3 (a) zeigt und von den Nulldurchgängen der beiden Kurven können wir auf eine pseudokritische Temperatur von  $T_c \approx 198$  MeV für den Deconfinement-Phasenübergang sowie von  $T_\chi \approx 170$  MeV für die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie schließen. Somit ergibt sich in unseren Modellrechnungen  $T_\chi < T_c$  was – wenn auch nicht in dieser Deutlichkeit – in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Gitterrechnungen ist [72]. Wir betonen aber, daß angesichts der Crossover-Übergänge sowie der in Abbildung 5.2 erkennbaren Übergangsbreiten keinesfalls auf das Vorliegen einer chiral-symmetrischen, farbeinschließenden Phase geschlossen werden kann. Weiterhin ist zu beachten, daß die genannten Gitterrechnungen mit massiven Quarks durchgeführt wurden. Die darin gefundenen pseudokritischen Temperaturen sind mit  $T_\chi \approx 155$  MeV,  $T_c \approx 165$  MeV niedriger als in unseren Berechnungen, außerdem zeigen unsere Ergebnisse eine deutlich größere Breite der Phasenübergänge. Diese Abweichungen sind voraussichtlich – neben der Vernachlässigung der Quarkmasse – primär der Verwendung der Nulltemperatur-Massenfunktion geschuldet, da die Lösung  $M_\varphi$  der vollen Gapgleichung (5.61) erwartungsgemäß für wachsende Temperaturen abfallen und damit die kritischen Temperaturen beider Phasenübergänge zu niedrigeren Werten verschieben und die Übergangsbreiten reduzieren sollte. Weiterhin muß in diesem Zusammenhang berücksichtigt werden, daß wir – neben der Nulltemperatur-Massenfunktion – auch den durch die Gribovformel (3.21) gegebenen Gluonpropagator der reinen Yang–Mills-Theorie bei  $T = 0$  verwendet und somit die Rückkopplung der Quarks an die Gluonen gänzlich vernachlässigt haben.

Aus konzeptionellen Gründen ist es empfehlenswert, unsere Ergebnisse auch mit denjenigen von Dyson–Schwinger- (DSG) und funktionalen Renormierungsgruppengleichungen (fRG) als alternativen Kontinuumsansätzen zu vergleichen. Mit DSG'en wurden Rechnungen in einer Reihe von Arbeiten durchgeführt [127–130] und lieferten schließlich unter Vernachlässigung der Rückkopplungseffekte der Quarks auf die Gluonen für zwei chirale Quarkflavours identische (pseudo-)kritische Temperaturen für die Aufhebung des Farbeinschlusses sowie die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie,  $T_\chi \approx T_c \approx 275$  MeV [129, 130]. Dabei ergab die Auswertung des dualen Kondensats einen Crossover-Übergang während das chirale Kondensat einen Übergang zweiter Ordnung zeigte. Berechnungen mithilfe von

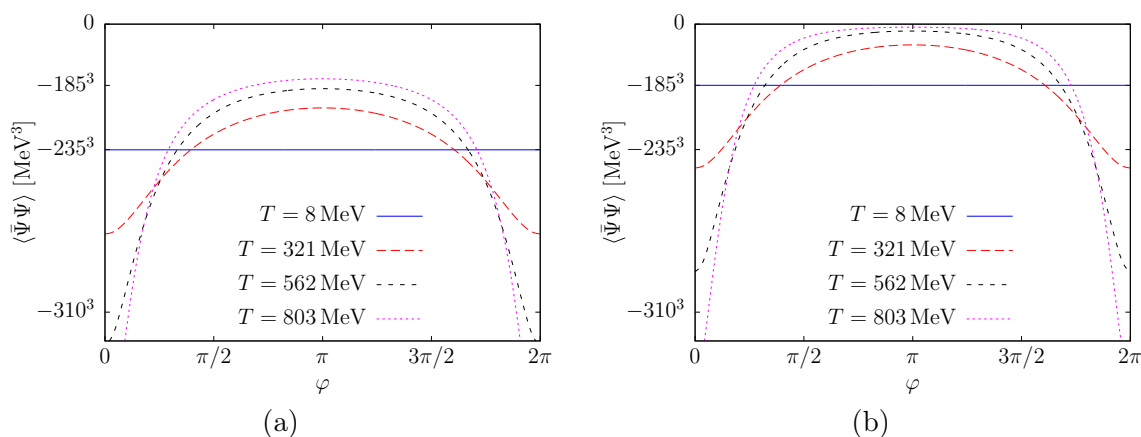


**Abbildung 5.4:** Chirales Quarkkondensat (5.76) in Einheiten von  $\text{MeV}^3$  in Abhängigkeit der Temperatur  $T$  und der Phase  $\varphi$  bei einer Kopplung von (a)  $g = 2.07$  und (b)  $g = 0$  für  $SU(3)$ .

fRG'en wurden z.B. in Referenz [131, 132] durchgeführt und lieferten bei Berücksichtigung von Rückkopplungseffekten für zwei chirale Quarkflavours die (pseudo-)kritischen Temperaturen  $T_\chi \approx T_c \approx 178 \text{ MeV}$  [131] und für physikalische Quarkmassen  $T_\chi \approx 172 \text{ MeV}$ ,  $T_c \approx 163 \text{ MeV}$  [132]; die Ordnung der Phasenübergänge entsprach jeweils den Erwartungen, vgl. Abschnitt 2.5. Unsere Ergebnisse weichen von den mit DSG'en und fRG'en erzielten primär in der Ordnung sowie der Breite der gefundenen Phasenübergänge ab, während die kritischen Temperaturen (zumindest bei fRG'en) in einer vergleichbaren – und mit Hinsicht auf Gitterrechnungen sinnvollen – Größenordnung liegen.

Verzichten wir in unseren Gleichungen auf die Kopplung zwischen Quarks und Gluonen sowie den UV-Anteil des Coulombpotentials ( $g = 0$ ), so führt dies zu einer leichten Absenkung der pseudokritischen Temperaturen auf  $T_c \approx 190 \text{ MeV}$  und  $T_\chi \approx 165 \text{ MeV}$ , siehe Abbildung 5.3 (b). Die Geringfügigkeit der Änderungen ist ein Zeichen dafür, daß durch die für  $g > 0$  auftretenden zusätzlichen Beiträge zur Quarkgapgleichung (5.61) vor allem der Bereich mittlerer und großer Energien beeinflusst wird. Das läßt sich auch gut an der Temperaturabhängigkeit der Kondensate erkennen, siehe Abbildung 5.1.

Abbildung 5.4 (a) zeigt das chirale Quarkkondensat (5.76) in Abhängigkeit der Temperatur  $T$  und der Phase  $\varphi$  der Randbedingungen (5.2). Für fermionische Randbedingungen ( $\varphi = \pi$ ) sinkt der Betrag des Kondensats mit wachsender Temperatur, während er für  $\varphi = 0$  linear anwächst. Weiterhin ist das Kondensat offenbar eine  $2\pi$ -periodische Funktion in  $\varphi$ , deren  $T = 0$  Limes völlig unabhängig von  $\varphi$  ist. All das stimmt exakt mit unseren Überlegungen aus dem vorherigen Abschnitt überein. Dasselbe gilt für das chirale Kondensat bei Vernachlässigung von Quark-Gluon-Kopplung und UV-Coulombpotential ( $g = 0$ ), welches in Abbildung 5.4 (b) dargestellt ist. Schließlich zeigt Abbildung 5.5 das chirale Quarkkondensat (5.76) in Abhängigkeit der Phase  $\varphi$  für verschiedene Temperaturen. Diese Darstellung entspricht Schnitten durch Abbildung 5.4 bei festen Werten von  $T$  und zeigt besonders die Periodizität sowie die Phasenabhängigkeit der Hoch- und Niedertemperaturlimites des Kondensats. Die in Abbildung 5.4 und 5.5 dargestellte Temperatur- und Phasenabhängigkeit des chiralen Kondensats (5.76) ist in weitestgehender qualitativer Übereinstimmung mit den Ergebnissen sowohl von Gitterrechnungen, als auch von solchen unter Verwendung von DSG'en [126–129]. Im Detail ergeben sich jedoch zwei Unterschie-



**Abbildung 5.5:** Chirales Quarkkondensat (5.76) in Abhängigkeit der Phase  $\varphi$  der Randbedingung bei verschiedenen Temperaturen sowie einer Kopplung von (a)  $g = 2.07$  und (b)  $g = 0$  für  $SU(3)$ .

de: Zum einen erhalten wir infolge des Crossover-Übergangs bei niedrigen Temperaturen einen eher sinusförmigen Verlauf des Kondensats um  $\varphi = \pi$ , während sich bei einem Phasenübergang zweiter Ordnung dort ein flaches Plateau ausbildet. Zum anderen ergibt sich bei der Verwendung von DSG'en bei periodischen Randbedingungen ( $\varphi = 0$ ) ein quadratisches Anwachsen des Kondensats mit der Temperatur [128]. Auch diese Abweichung könnte möglicherweise eine Folge der Verwendung der Nulltemperatur-Massenfunktion sein.

Unter Verwendung der in Abschnitt 3.4 bestimmten Massenfunktion (siehe Tabelle 3.3 und 3.4) lassen sich das chirale sowie das duale Quarkkondensat analog für die Eichgruppe  $SU(2)$  auswerten. Während sich am qualitativen Verlauf der Kondensate keine Änderungen ergeben, sinken die pseudokritischen Temperaturen auf  $T_\chi^{SU(2)} \approx 128 \text{ MeV}$ ,  $T_c^{SU(2)} \approx 148 \text{ MeV}$  für  $g = 2.07$ , bzw.  $T_\chi^{SU(2)} \approx 124 \text{ MeV}$ ,  $T_c^{SU(2)} \approx 143 \text{ MeV}$  für  $g = 0$ .

Trotz teilweiser Abweichungen von den Referenzwerten stellen die in diesem Abschnitt gefundenen Ergebnisse und der verwendete alternative Hamilton'sche Zugang einen vielversprechenden Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen dar. Es besteht die Aussicht, daß bei Verwendung der selbstkonsistenten Lösung der temperaturabhängigen Quarkgaggleichung (5.61) sowohl die Ordnung als auch die kritischen Temperaturen von chiralem und Deconfinement-Phasenübergang völlig korrekt reproduziert werden können. Eine weitere Verbesserung dürfte sich bei Berücksichtigung der Rückkopplungseffekte der Quarks auf die Gluonen ergeben. Im Rahmen einer ersten Untersuchung sind sowohl die verwendeten Näherungen, als auch die erzielten Ergebnisse akzeptabel. Die gefundenen Werte für die kritischen Temperaturen liegen in einem sinnvollen Größenbereich und weichen nicht allzu stark von den mit fRG'en und auf dem Gitter bestimmten Werten ab. Wir wenden den alternativen Hamilton'schen Zugang deshalb im folgenden Abschnitt zur Auswertung des Polyakov-Loops als weiteren Ordnungsparameter des Farbeinschlusses an.

## 5.2 Berechnung des effektiven Potentials des Polyakov-Loops

Die Berechnung des Erwartungswerts des in Abschnitt 2.5.4 vorgestellten Polyakov-Loops (2.129) erfordert die Anwesenheit eines Hintergrundeichfelds, sodaß wir in Abschnitt 5.2.1

zunächst auf den QCD-Hamiltonian in *Hintergrundeichung* eingehen werden. Die konkrete Wahl des Hintergrundeichfelds ist Gegenstand von Abschnitt 5.2.2, während wir in Abschnitt 5.2.3 den verwendeten Ansatz für das Vakuumfunktional vorstellen werden. Das sich damit ergebende Energiefunktional sowie die Variationsgleichungen werden in Abschnitt 5.2.4 behandelt, wobei wir uns der Einfachheit halber zunächst auf den Nulltemperaturlimites beschränken. Das Energiefunktional für endliche Temperaturen läßt sich anschließend in völliger Analogie zu Abschnitt 5.1 gewinnen und wird in Abschnitt 5.2.6 in eine für numerische Berechnungen geeignete, selbstkonsistente Form gebracht. Die Darstellung der numerischen Ergebnisse ist schließlich Inhalt von Abschnitt 5.2.7.

### 5.2.1 QCD in Hintergrundeichung

Wie in Abschnitt 2.5.4 erläutert, ist die Bestimmung des Polyakov-Loops (2.129) im üblichen Hamilton'schen Zugang aufgrund der Verwendung der Weyleichung (2.33) nicht möglich. Werden endliche Temperaturen hingegen durch den alternativen Hamilton'schen Zugang mittels der Kompaktifizierung einer räumlichen Dimension eingeführt (siehe Abschnitt 2.4.2), so läßt sich der Polyakov-Loop definieren und erhält die in Gleichung (2.137) gegebene Gestalt. Diese vereinfacht sich erheblich, sofern das Eichfeld in Polyakoveichung

$$\partial_z A_z(\mathbf{x}) = 0, \quad A_z(\mathbf{x}) = A_z(x, y) \in \mathcal{C}, \quad (5.93)$$

vgl. Gleichung (2.133), gewählt wird.<sup>73</sup> Insbesondere läßt sich dann auch der Erwartungswert  $\langle A_z \rangle$  anstelle des Erwartungswerts des Polyakov-Loops als Ordnungsparameter verwenden.

Da das Eichfeld offensichtlich eine eichabhängige Größe darstellt, muß der Erwartungswert  $\langle A_z \rangle$  gemäß des *Elitzur'schen Theorems* verschwindend sein sofern kein externes Hintergrundeichfeld  $\mathbf{a}$  vorliegt [3]. Das erfordert eine Modifikation unserer bisherigen Vorgehensweise und macht die Verwendung der Hintergrundeichung<sup>74</sup> anstelle der Coulombbeichung (2.40) sinnvoll [144], wobei wir an der Weyleichung (2.33) festhalten werden um die kanonische Quantisierung durchführen zu können. Der nicht-eichfixierte Hamiltonian besitzt dieselbe Gestalt wie in Gleichung (2.34)<sup>75</sup> und zur Fixierung der Eichung teilen wir das Eichfeld in eine (konstante) Hintergrund- sowie eine dynamische Komponente auf,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathcal{A}(\mathbf{x}), \quad (5.94)$$

und stellen die Bedingung

$$\left[ d_i(\mathbf{x}), \mathcal{A}_i(\mathbf{x}) \right] = \left[ d_i(\mathbf{x}), A_i(\mathbf{x}) - a_i \right] = 0 \quad (5.95)$$

an das Eichfeld, wobei

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \nabla + i\mathbf{a} \quad (5.96)$$

<sup>73</sup>Man beachte, daß wir im Gegensatz zu Kapitel 2 im Folgenden die Bezeichnung  $A_z$  anstelle von  $A_3$  für die  $z$ -Komponente des Eichfelds verwenden.

<sup>74</sup>Im kovarianten Fall bezeichnet man diese als *Landau-deWitt-Eichung*.

<sup>75</sup>Der Einfachheit halber betrachten wir den Hamiltonian auf der räumlichen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^3$  anstelle von  $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$ . Die Unterschiede sind dabei aber marginal und beschränken sich auf die Ersetzung  $\int d^3x \rightarrow \int_{\beta} d^3x$ , vgl. Abschnitt 5.1.1.

die kovariante Ableitung (2.5) bezüglich des Hintergrundeichfelds ist. Verwenden wir deren adjungierte Darstellung,

$$\hat{\mathbf{d}}^{ab}(\mathbf{x}) = \delta^{ab}\nabla - f^{acb}\mathbf{a}^c, \quad (5.97)$$

so läßt sich die Eichbedingung (5.95) kompakt als<sup>76</sup>

$$\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.98)$$

schreiben. Man beachte, daß wir das Eichfeld für diesen Abschnitt gemäß  $g\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$  reskaliert haben, was Vorteile bei der Behandlung des Hintergrundeichfelds bieten wird. Aus der Zerlegung (5.94) folgt weiterhin  $\langle \mathbf{A} \rangle = \mathbf{a}$ , womit das Hintergrundeichfeld als Ordnungsparameter für den Farbeinschluß dienen wird.

Die Fixierung des Hamiltonians (2.34) in Hintergrundeichung (5.98) erfolgt analog zu der in Abschnitt 2.2 beschriebenen Fixierung der Coulombbeichung mithilfe der Faddeev-Popov-Methode, siehe insbesondere auch Referenzen [139, 140]. Die Eichbedingung (5.98) impliziert dabei das Verschwinden der longitudinalen Eichfeldkomponenten

$$A_i^{\parallel}(\mathbf{x}) = \int d^3y \hat{i}_{ij}^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) A_j^b(\mathbf{y}), \quad (5.99)$$

wobei der longitudinale Projektor

$$\hat{i}_{ij}^{ab}(\mathbf{x}) = \int d^3p \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \hat{i}_{ij}^{ab}(\mathbf{p}) \quad (5.100a)$$

mit

$$\hat{i}_{ij}^{ab}(\mathbf{p}) = \hat{d}_i^{ac}(\mathbf{p}) \left[ \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{p}) \right]^{-1cd} \hat{d}_j^{db}(\mathbf{p}) = \delta^{ab} \delta_{ij} - \hat{t}_{ij}^{ab}(\mathbf{p}) \quad (5.100b)$$

$$\hat{\mathbf{d}}^{ab}(\mathbf{p}) = i\delta^{ab}\mathbf{p} - f^{acb}\mathbf{a}^c = i\delta^{ab}\mathbf{p} - \hat{\mathbf{a}}^{ab} \quad (5.100c)$$

aufgrund des Hintergrundeichfelds ein nicht-triviales Objekt im Farbraum darstellt. Die longitudinalen Anteile des kanonischen Impulsoperators (2.37) lassen sich wie in Abschnitt 2.2 durch das explizite Auflösen des Gauß'schen Gesetzes (2.50) eliminieren.

Der eichfixierte Hamiltonian in Hintergrundeichung<sup>77</sup>

$$H = H_{\text{YM}} + H_{\text{Q}} + H_{\text{C}} \quad (5.101)$$

ist deshalb wie sein Pendant in Coulombbeichung (2.51) ein Funktional der transversalen Feldkomponenten und zerfällt in drei Beiträge:

$$H_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \int d^3x \left( g^2 J^{-1}[A] \Pi_i^a(\mathbf{x}) J[A] \Pi_i^a(\mathbf{x}) + \frac{1}{g^2} B_i^a(\mathbf{x}) B_i^a(\mathbf{x}) \right) \quad (5.102)$$

ist der Hamiltonian der transversalen gluonischen Felder, wobei  $\Pi$  den kanonischen Impuls (2.37) und

$$\mathbf{B}^a = \nabla \times \mathbf{A}^a - \frac{1}{2} f^{abc} \mathbf{A}^b \times \mathbf{A}^c \quad (5.103)$$

<sup>76</sup>Es gilt  $\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} = 0$ .

<sup>77</sup>Da keine Verwechslungsgefahr mit dem Hamiltonian in Weyleichung bestehen sollte, verzichten wir auf die Einführung einer neuen Notation.

das Farbmagnetfeld bezeichnet, vgl. Gleichung (2.15). Die Faddeev–Popov-Determinante

$$J[A] = \det(\hat{G}^{-1}) \quad (5.104)$$

behält ihre in Coulombbeichung gefundene formale Struktur [Gleichung (2.47)] bei, allerdings wird der Faddeev–Popov-Operator durch die geänderte Eichbedingung (5.98) zu

$$(\hat{G}^{-1})^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (-\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{D}})^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (5.105)$$

mit der üblichen kovarianten Ableitung (2.5)

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \nabla + i\mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (5.106)$$

Der die Dynamik der Quarks in Wechselwirkung mit den transversalen Feldern beschreibende Dirac-Hamiltonian (2.35)

$$H_Q = \int d^3x \Psi^{m\dagger}(\mathbf{x}) \left[ -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \delta^{mn} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}^a(\mathbf{x}) t_a^{mn} + \beta m_Q \delta^{mn} \right] \Psi^n(\mathbf{x}) \quad (5.107)$$

ändert sich durch die Anwesenheit des Hintergrundfeldes nicht, wohingegen der Hamiltonian der Farb-Coulombwechselwirkung [vgl. Gleichung (2.58)]

$$H_C = \frac{g^2}{2} \int d^3x \int d^3y J^{-1}[A] \rho^a(\mathbf{x}) J[A] \hat{F}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho^b(\mathbf{y}) \quad (5.108)$$

auf zweierlei Weise von der Hintergrundeichung (5.98) beeinflusst wird: Zum einen durch das Auftreten der kovarianten Ableitung (5.96) im Coulombkern

$$\hat{F}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int d^3z \hat{G}^{ac}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (-\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{d}})^{cd}(\mathbf{z}) \hat{G}^{db}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \quad (5.109)$$

und zum anderen dadurch, daß der bosonische Beitrag zur Farbladungsdichte

$$\rho^a(\mathbf{x}) = \rho_Q^a(\mathbf{x}) + \rho_{\text{YM}}^a(\mathbf{x}) = \Psi^\dagger(\mathbf{x}) t_a \Psi(\mathbf{x}) + f^{abc} \mathcal{A}^b(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\Pi}^c(\mathbf{x}) \quad (5.110)$$

ausschließlich die dynamische Eichfeldkomponente enthält.

Wie gehabt tritt die Faddeev–Popov-Determinante durch die Eichfixierung auch im Integrationsmaß bei der Berechnung von Matrixelementen von Operatoren  $O$  [vgl. Gleichung (2.46)] auf

$$\langle \phi | O | \psi \rangle = \int \mathcal{D}A J[A] \phi^*[A] O[A, \Pi] \psi[A]. \quad (5.111)$$

### 5.2.2 Wahl des Hintergrundeichfelds

Da das Hintergrundeichfeld die Rolle des Ordnungsparameters  $\langle A_z \rangle$  übernimmt, muß es in Polyakovbeichung (5.93) gewählt werden. Es gilt also

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^r \mathbf{a}^k h_k, \quad (5.112)$$

wobei  $r$  der *Rang* der betrachteten Farbgruppe ist und  $h_k$  die Generatoren der Cartan-unteralgebra in fundamentaler Darstellung sowie  $\mathbf{a}^k \in \mathbb{R}^3$  konstante Vektoren sind, siehe

Anhang A.2 für eine Einführung in diese Begrifflichkeiten der Gruppentheorie. Da die Cartangeneratoren  $h_k$  sowohl für  $SU(2)$  als auch für  $SU(3)$  diagonal sind, ergibt sich für das Hintergrundfeld in fundamentaler Darstellung

$$\mathbf{a}^{mn} = \langle \mu_m | \mathbf{a} | \mu_n \rangle = \delta^{mn} \sum_{k=1}^r \mathbf{a}^k \mu_m^k \equiv \delta^{mn} \mathbf{a} \cdot \mu_m. \quad (5.113)$$

Dabei bezeichnet  $|\mu_m\rangle$  mit  $m = 1, \dots, N_C$  die Eigenvektoren der Cartangeneratoren  $h$  in der fundamentalen Darstellung (diese sind identisch mit den kartesischen Einheitsvektoren des Farbraums) und  $\mu_m$  die zu einem *Gewichtsvektor* zusammengefaßten Eigenwerte der verschiedenen Generatoren, siehe Anhang A.2. Zur Wahrung einer kompakten Darstellung werden wir im Folgenden auf die Abkürzung

$$\mathbf{p}_m \equiv \mathbf{p} + \mathbf{a} \cdot \mu_m \quad (5.114)$$

zurückgreifen.

In der adjungierten Darstellung sind die Cartangeneratoren  $\hat{H}_k$  nicht länger diagonal, sodaß das Hintergrundeichfeld hier die kompliziertere Struktur

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}^{ab} &= \langle a | \hat{\mathbf{a}} | b \rangle = \sum_{k=1}^r \langle a | \mathbf{a}^k \hat{H}_k | b \rangle = \sum_{k=1}^r \sum_{A,B=1}^{N_C^2-1} \mathbf{a}^k \langle a | \sigma_A \rangle \langle \sigma_A | \hat{H}_k | \sigma_B \rangle \langle \sigma_B | b \rangle \\ &= -i \sum_{k=1}^r \sum_{A=1}^{N_C^2-1} \mathbf{a}^k \langle a | \sigma_A \rangle \sigma_A^k \langle \sigma_A | b \rangle \equiv -i \sum_{A=1}^{N_C^2-1} \mathbf{a} \cdot \sigma_A \langle a | \sigma_A \rangle \langle \sigma_A | b \rangle \end{aligned} \quad (5.115)$$

besitzt. Dabei sind  $|a\rangle$  die kartesischen Einheitsvektoren des adjungierten Farbraums,  $|\sigma_A\rangle$  mit  $A = 1, \dots, N_C^2 - 1$  die Eigenvektoren der Cartangeneratoren in der adjungierten Darstellung und  $\sigma_A$  die zu *Wurzelvektoren* zusammengefaßten zugehörigen Eigenwerte der verschiedenen Generatoren, siehe Anhang A.2. Analog zur fundamentalen Darstellung verwenden wir für diese Darstellung die Abkürzung

$$\mathbf{p}_{\sigma_A} \equiv \mathbf{p} + \mathbf{a} \cdot \sigma_A. \quad (5.116)$$

### 5.2.3 Ansatz für das Vakuumwellenfunktional

#### Impulsdarstellung

Nachdem die Form des Hamiltonians und des Hintergrundeichfelds geklärt ist, gehen wir nun auf den Ansatz für das QCD-Vakuumwellenfunktional ein. Dabei betrachten wir der Einfachheit halber den Nulltemperaturlimes und geben direkt das Funktional in Impulsdarstellung an, welche für die Berechnung des Energieerwartungswerts wie üblich von Vorteil ist. Ungeachtet des Wechsels von der Coulomb- zur Hintergrundeichung orientieren wir uns am bereits verwendeten Funktional (3.1) bestehend aus einem fermionischen (3.30) und einem bosonischen Anteil (3.36) und machen den Produktansatz

$$|\phi^{\mathbf{a}}[A]\rangle = \phi_{\text{YM}}^{\mathbf{a}}[A] |\phi_{\text{Q}}^{\mathbf{a}}[\mathbf{A} - \mathbf{a}]\rangle. \quad (5.117)$$

Da aufgrund des Hintergrundeichfelds

$$\langle \phi^{\mathbf{a}} | \mathbf{A} | \phi^{\mathbf{a}} \rangle = \mathbf{a} \quad (5.118)$$



gelten muß, verwenden wir für das bosonische Funktional

$$\phi_{\text{YM}}^{\mathbf{a}}[A] = \mathcal{N} J^{-\frac{1}{2}}[A] I^{-\frac{1}{2}}[\mathbf{A} - \mathbf{a}] \tilde{\phi}_{\text{YM}}^{\mathbf{a}}[\mathbf{A} - \mathbf{a}] \quad (5.119)$$

mit dem Gauß'schen Funktional

$$\tilde{\phi}_{\text{YM}}^{\mathbf{a}}[A] = \exp\left(-\frac{1}{2g^2} \int \mathrm{d}^3 p A_i^a(\mathbf{p}) \hat{\omega}_{ij}^{ab}(\mathbf{p}) A_j^b(-\mathbf{p})\right), \quad (5.120)$$

vgl. Gleichung (3.6). Das entspricht dem Vorgehen im reinen Yang–Mills-Sektor [139, 140] und erfüllt unabhängig vom fermionischen Funktional automatisch die Bedingung (5.118). Der bosonische Variationskern  $\omega$  stellt dabei im Gegensatz zu den bisherigen Abschnitten aufgrund der Anwesenheit des Hintergrundeichfelds ein nicht-triviales Objekt im Farbraum dar. Weiterhin geht durch das Hintergrundeichfeld die Isotropie des Raums verloren und der Kern ist nicht mehr nur eine Funktion des Impulsbetrags. Man beachte ferner, daß die Faddeev–Popov-Determinante in Gleichung (5.119) im Gegensatz zum Gauß'schen Funktional und der Fermideterminante

$$I[A] = \langle \phi_{\text{Q}}^{\mathbf{a}}[A] | \phi_{\text{Q}}^{\mathbf{a}}[A] \rangle \quad (5.121)$$

das *unverschobene* Eichfeld enthält. Dies ist erforderlich, um die Faddeev–Popov-Determinante im Integrationsmaß kompensieren zu können, siehe Gleichung (5.111).

Für das fermionische Funktional verwenden wir den Ansatz

$$|\phi_{\text{Q}}^{\mathbf{a}}[A]\rangle = \exp\left(-\int \mathrm{d}^3 p \int \mathrm{d}^3 q K^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) a^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) b^{t,-n\dagger}(-\mathbf{q})\right) |0\rangle, \quad (5.122)$$

wobei der Variationskern durch

$$K^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = K_0^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + K_1^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (5.123a)$$

mit

$$K_0^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \delta^{mn} \delta^{st} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) s S(\mathbf{p}; m), \quad (5.123b)$$

$$K_1^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{t_a^{mn}}{2\sqrt{p_m q_n}} u^{s\dagger}(\mathbf{p}_m) \left[ V(\mathbf{p}, -\mathbf{q}; m, -n) + \beta W(\mathbf{p}, -\mathbf{q}; m, -n) \right] \\ \times \alpha_k v^t(-\mathbf{q}_n) A_k^a(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (5.123c)$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet  $a$  ( $b$ ) wie üblich den Vernichter für einen (Anti-)Quarkzustand,<sup>78</sup>  $u$ ,  $v$  die Eigenspinore des chiralen Diracoperators (siehe Anhang A.1) sowie  $S$ ,  $V$  und  $W$  den Skalar- und die beiden Vektorkerne. Bei diesen haben wir – neben dem Verlust der Isotropie des Raums – auch eine mögliche Abhängigkeit von der Farbstruktur des Hintergrundeichfelds, d.h. den Gewichtsvektoren, berücksichtigt.<sup>79</sup>

Wir werden im Folgenden sämtliche Variationskerne als reellwertig annehmen und für die Vektorkerne darüber hinaus die Symmetrierelationen<sup>80</sup>

$$V(\mathbf{p}, -\mathbf{q}; m, -n) = V(\mathbf{q}, -\mathbf{p}; n, -m), \quad W(\mathbf{p}, -\mathbf{q}; m, -n) = W(\mathbf{q}, -\mathbf{p}; n, -m) \quad (5.124a)$$

$$V(\mathbf{p}, -\mathbf{q}; m, -n) = V(-\mathbf{p}, \mathbf{q}; -m, n), \quad W(\mathbf{p}, -\mathbf{q}; m, -n) = W(-\mathbf{p}, \mathbf{q}; -m, n) \quad (5.124b)$$

<sup>78</sup>Dieser ist i.A. nicht identisch mit denjenigen aus Kapitel 3, obwohl wir der Einfachheit halber dieselbe Notation verwenden.

<sup>79</sup>Im Sinne einer kompakten Notation indizieren wir den Gewichtsvektor  $\mu_m$  lediglich durch  $m$ .

<sup>80</sup>Ein Vorzeichenwechsel bei den Gewichten  $\mu_m$ ,  $\mu_n$  entspricht einem Vorzeichenwechsel des Hintergrundeichfelds, d.h.  $\mathbf{a} \rightarrow -\mathbf{a}$  [siehe Gleichung (5.113)].

voraussetzen. Diese werden sich in den Bewegungsgleichungen (siehe Abschnitt 5.2.4) widerspiegeln und stellen daher keine Einschränkung an eine selbstkonsistente Lösung dar. Für das adjungierte fermionische Wellenfunktional ergibt sich

$$\langle \phi_{\mathbb{Q}}^{\mathbf{a}}[A] | = \langle 0 | \exp \left( - \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q K^{st,mn\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) b^{s,-m}(-\mathbf{p}) a^{t,n}(\mathbf{q}) \right) \quad (5.125)$$

mit

$$K^{st,mn\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = K_0^{st,mn\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + K_1^{st,mn\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (5.126a)$$

$$K_0^{st,mn\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \delta^{mn} \delta^{st} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) s S(\mathbf{q}; n), \quad (5.126b)$$

$$K_1^{st,mn\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{t_a^{mn}}{2\sqrt{p_m q_n}} v^{s\dagger}(-\mathbf{p}_m) \left[ V(-\mathbf{p}, \mathbf{q}; -m, n) - \beta W(-\mathbf{p}, \mathbf{q}; -m, n) \right] \\ \times \alpha_k u^t(\mathbf{q}_n) A_k^a(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (5.126c)$$

während für das Bosonische  $\langle A | \phi_{\text{YM}}^{\mathbf{a}} \rangle = \langle \phi_{\text{YM}}^{\mathbf{a}} | A \rangle$  gilt.

### Ortsdarstellung

Der Vollständigkeit halber geben wir das Wellenfunktional (5.117) auch in Ortsdarstellung an. Für dessen bosonischen Anteil gilt

$$\tilde{\phi}_{\text{YM}}^{\mathbf{a}}[A] = \exp \left( - \frac{1}{2g^2} \int d^3 x \int d^3 y A_i^a(\mathbf{x}) \hat{\omega}_{ij}^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) A_j^b(\mathbf{y}) \right), \quad (5.127)$$

wobei die Translationsinvarianz bereits berücksichtigt wurde. Für den bosonischen Variationskern ergibt sich nach Einsetzen der Entwicklung (2.67) der Zusammenhang

$$\hat{\omega}_{ij}^{ab}(\mathbf{x}) = \int \bar{d}^3 p \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \hat{\omega}_{ij}^{ab}(\mathbf{p}) \quad (5.128)$$

mit der Impulsdarstellung.

Der fermionische Anteil des Wellenfunctionals ist in üblicher Weise durch

$$|\phi_{\mathbb{Q}}^{\mathbf{a}}[A]\rangle = \exp \left( - \int d^3 x \int d^3 y \Psi_+^{m\dagger}(\mathbf{x}) K^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Psi_-^n(\mathbf{y}) \right) |0\rangle \quad (5.129)$$

mit dem Variationskern

$$K^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^{mn} \beta S^m(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \int d^3 z \left[ V^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{z}) + \beta W^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{z}) \right] t_a^{mn} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}^a(\mathbf{z}) \quad (5.130)$$

gegeben. Die Anwesenheit des konstanten Hintergrundeichfelds macht die Verwendung der Fourierdarstellung

$$\Psi^m(\mathbf{x}) = \int \bar{d}^3 p \frac{\exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}{\sqrt{2p_m}} \left( a^{s,m}(\mathbf{p}) u^s(\mathbf{p}_m) + b^{s,-m\dagger}(-\mathbf{p}) v^s(-\mathbf{p}_m) \right) \quad (5.131)$$

für den Feldoperator empfehlenswert und wir erhalten nach kurzer Rechnung den Zusammenhang ( $W$  analog zu  $V$ )

$$S^m(\mathbf{x}) = \int \bar{d}^3 p \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) S(\mathbf{p}; m), \quad (5.132)$$

$$V^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{z}) = \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q \exp(i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z})) \exp(-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z})) \\ \times V(\mathbf{p}, -\mathbf{q}; m, -n) \quad (5.133)$$

zwischen den Variationskernen in Orts- und Impulsraum.

## 5.2.4 Grundzustandsenergie und Variationsgleichungen

### Energieerwartungswert

Für den Erwartungswert eines beliebigen Operators  $O$  ergibt sich durch Einsetzen des Wellenfunktional (5.117) in das Matrixelement (5.111) der Ausdruck

$$\begin{aligned} \langle O[A, \Pi, \Psi] \rangle_{\mathbf{a}} &\equiv \langle \phi^{\mathbf{a}}[A] | O[A, \Pi, \Psi] | \phi^{\mathbf{a}}[A] \rangle \\ &= |\mathcal{N}|^2 \int \mathcal{D}A' \tilde{\phi}_{\text{YM}}^{\mathbf{a}}[A' - \mathbf{a}] \langle \tilde{O}[A', \Pi', \Psi] \rangle_{\text{Q}} \tilde{\phi}_{\text{YM}}^{\mathbf{a}}[A' - \mathbf{a}]. \end{aligned} \quad (5.134)$$

Dabei wird der fermionische Anteil des Erwartungswerts

$$\langle \tilde{O}[A, \Pi, \Psi] \rangle_{\text{Q}} = I^{-1}[\mathbf{A} - \mathbf{a}] \langle \phi_{\text{Q}}^{\mathbf{a}}[\mathbf{A} - \mathbf{a}] | \tilde{O}[A, \Pi, \Psi] | \phi_{\text{Q}}^{\mathbf{a}}[\mathbf{A} - \mathbf{a}] \rangle \quad (5.135)$$

mit

$$\tilde{O}[A, \Pi, \Psi] = J^{\frac{1}{2}}[A] I^{\frac{1}{2}}[\mathbf{A} - \mathbf{a}] O[A, \Pi, \Psi] J^{-\frac{1}{2}}[A] I^{-\frac{1}{2}}[\mathbf{A} - \mathbf{a}], \quad (5.136)$$

vgl. Gleichung (3.46) und (3.48), wie üblich vor dem Bosonischen berechnet. Führen wir im Funktionalintegral die Verschiebung  $\mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{a}$  durch, so ergibt sich für den Erwartungswert

$$\langle O[A, \Pi, \Psi] \rangle_{\mathbf{a}} = |\mathcal{N}|^2 \int \mathcal{D}A \phi_{\text{YM}}^{\mathbf{a}}[A] \langle \tilde{O}[\mathbf{A} + \mathbf{a}, \Pi, \Psi] \rangle_{\text{Q}} \phi_{\text{YM}}^{\mathbf{a}}[A], \quad (5.137)$$

wobei zu beachten ist, daß sich der kanonische Impulsoperator unter der Verschiebung um das konstante Hintergrundeichfeld nicht ändert,  $\mathbf{\Pi}' = \mathbf{\Pi}$ . Der Ausdruck (5.137) entspricht formal einem Erwartungswert bezüglich des Wellenfunktional *ohne* Hintergrundeichfeld, siehe Gleichung (3.47). Allerdings müssen die Felder im Operator  $O$  sowie in der Faddeev–Popov-Determinante um  $\mathbf{a}$  verschoben werden, siehe Gleichung (5.135). Für den QCD-Hamiltonian in Hintergrundeichung (5.101) entspricht diese Verschiebung der Ersetzung der gewöhnlichen Ableitung durch die kovariante Ableitung bezüglich des Hintergrundeichfelds (5.96),  $\nabla \rightarrow \mathbf{d}$ , sowie der Farbladungsdichte (5.110) durch die übliche Dichte (2.59), siehe Referenz [140]. Der verschobene QCD-Hamiltonian enthält das Hintergrundeichfeld damit ausschließlich in Verbindung mit der kovarianten Ableitung  $\mathbf{d}$  (5.96). Allerdings entsprechen die Eichfelder  $\mathbf{A}$  auch nach der Verschiebung *nicht* denjenigen ohne Hintergrundeichfeld, da dieses explizit in den transversalen Projektor (5.100) eingeht.

Die Berechnung von Erwartungswerten läßt sich analog zu dem in Kapitel 3 beschriebenen Vorgehen durchführen (siehe auch Anhang B) und liefert für den statischen Gluonpropagator

$$\langle \mathcal{A}_i^a(\mathbf{p}) \mathcal{A}_j^b(\mathbf{q}) \rangle_{\mathbf{a}} = \frac{g^2}{2} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) (\hat{\omega}^{-1})_{ij}^{ab}(\mathbf{p}) = g^2 \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \hat{D}_{ij}^{ab}(\mathbf{p}). \quad (5.138)$$

Da das Hintergrundeichfeld die Isotropie des Farbraums bricht, kann der Propagator  $\hat{D}$  nicht farbdagonal sein. Stattdessen ist es naheliegend, daß er dieselbe Farbstruktur wie das Hintergrundeichfeld als einzige farbabhängige externe Größe besitzt. Dieses ist diagonal

bezüglich der Eigenbasis der adjungierten Cartangeneratoren, sodaß sich unter Ausnutzung der Transversalität des Eichfelds die Spektraldarstellung

$$\hat{D}_{ij}^{ab}(\mathbf{p}) = \sum_A t_{ij}^{\sigma_A}(\mathbf{p}) D^{\sigma_A}(\mathbf{p}) \langle a | \sigma_A \rangle \langle \sigma_A | b \rangle \quad (5.139)$$

ergibt. Der transversale Projektor  $t$  folgt aus<sup>81</sup>

$$\hat{t}_{ij}^{ab}(\mathbf{p}) = \sum_A t_{ij}^{\sigma_A}(\mathbf{p}) \langle a | \sigma_A \rangle \langle \sigma_A | b \rangle \quad (5.140)$$

und mithilfe von Gleichung (5.100) erkennt man, daß  $t_{ij}^{\sigma_A}(\mathbf{p}) = t_{ij}(\mathbf{p}_{\sigma_A})$  mit dem üblichen Projektor (2.42) gilt. Da wir im Folgenden die Rückkopplungseffekte der Quarks auf die Gluonen vernachlässigen werden, können wir den Propagator  $D^{\sigma_A}$  durch sein Ergebnis im reinen Yang–Mills-Sektor [139, 140] ersetzen,

$$D^{\sigma_A}(\mathbf{p}) = D(|\mathbf{p}_{\sigma_A}|) = \frac{1}{2\omega(|\mathbf{p}_{\sigma_A}|)}. \quad (5.141)$$

Dabei ist  $\omega$  der inverse Gluonpropagator ohne Hintergrundfeld (siehe Abschnitt 3.1.2), für welchen wir die Gribovformel (3.21) verwenden werden.

Für den Erwartungswert eines Operators  $O$  der unabhängig vom kanonischen Impuls ist, ergibt sich die auf dem Wick'schen Theorem beruhende Bestimmungsformel [vgl. Gleichung (3.49)]

$$\langle O[A, \Psi] \rangle_{\mathbf{a}} = \left\{ \exp \left( \frac{g^2}{2} \int d^3p \frac{\delta}{\delta A_i^a(\mathbf{p})} \hat{D}_{ij}^{ab}(\mathbf{p}) \frac{\delta}{\delta A_j^b(-\mathbf{p})} \right) \langle O[\mathbf{A} + \mathbf{a}, \Psi] \rangle_{\mathbf{Q}} \right\} \Big|_{A=0}, \quad (5.142)$$

wobei der fermionische Erwartungswert (5.135) in diesem Fall durch

$$\langle O[\mathbf{A} + \mathbf{a}, \Psi] \rangle_{\mathbf{Q}} = I^{-1}[A] \langle \phi_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{a}}[A] | O[\mathbf{A} + \mathbf{a}, \Psi] | \phi_{\mathbf{Q}}^{\mathbf{a}}[A] \rangle \quad (5.143)$$

gegeben ist. Wie in Kapitel 3 beschrieben, ermöglicht die Reihenentwicklung von Gleichung (5.142) bis zum linearen Glied die konsistente Berechnung des Energiefunktionals auf Zweischleifenniveau.

Bei der Bestimmung des Energieerwartungswerts ergibt sich im Vergleich zu früheren Kapiteln ein wesentlicher Unterschied bei der Behandlung der Farbstruktur: Bislang konnten sämtliche Spuren über den (adjungierten) Farbraum in dessen kartesischer Basis ausgewertet werden, da der bosonische Variationskern bezüglich dieser diagonal war. Das Hintergrundfeld bedingt die Auswertung der Spuren in der Eigenbasis der adjungierten Cartangeneratoren, auf welche wir im Folgenden eingehen werden. Dazu betrachten wir den symbolischen Ausdruck

$$\sum_{a,b} t_a^{m_1 m_2} t_b^{m_2 m_3} \hat{Z}^{ab} = \sum_{a,b} \sum_{A,B} t_a^{m_1 m_2} t_b^{m_2 m_3} \langle a | \sigma_A \rangle \langle \sigma_A | \hat{Z} | \sigma_B \rangle \langle \sigma_B | b \rangle, \quad (5.144)$$

wobei  $\hat{Z}$  in der Berechnung des Energieerwartungswerts dem transversalen Projektor (5.140), Gluonpropagator (5.139) oder Erwartungswert des Coulombkerns (5.109) entspricht. Insbesondere ist  $\hat{Z}$  stets diagonal bezüglich der Eigenvektoren der adjungierten

<sup>81</sup>Da  $\hat{t}$  [Gleichung (5.100)] durch die kovariante Ableitung  $\hat{\mathbf{d}}$  (5.97) gegeben ist, muß es bezüglich der Cartaneigenbasis diagonal sein.

Cartangeneratoren: Für den transversalen Projektor und den Gluonpropagator hatten wir das bereits gesehen und für den Erwartungswert des Coulombkerns folgt dies aufgrund der auf Zweischleifenniveau gültigen Faktorisierung (3.10) aus den entsprechenden Eigenschaften des Geistpropagators [139, 140], d.h.

$$g^2 \langle \hat{F}^{ab}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \rangle_{\mathbf{a}} = \sum_A V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{q} + \mathbf{a} \cdot \sigma_A|) \langle a | \sigma_A \rangle \langle \sigma_A | b \rangle \quad (5.145)$$

mit dem Coulombpotential  $V_C$  (3.13). Führen wir die Farbmatrizen in der Cartaneigenbasis

$$t_{\sigma_A} = \sum_a t_a \langle a | \sigma_A \rangle \quad (5.146)$$

ein, so erhalten wir aufgrund von  $t_a^\dagger = t_a$  sowie der Diagonalität von  $\hat{Z}$  für Gleichung (5.144) das Zwischenergebnis

$$\sum_{a,b} t_a^{m_1 m_2} t_b^{m_2 m_3} \hat{Z}^{ab} = \sum_A t_{\sigma_A}^{m_1 m_2} t_{\sigma_A}^{m_2 m_3 \dagger} Z^{\sigma_A} = \sum_A t_{\sigma_A}^{m_1 m_2} t_{\sigma_A}^{m_3 m_2 *} Z^{\sigma_A}. \quad (5.147)$$

Die konkrete Struktur der Matrizen (5.146), siehe Anhang A.2, impliziert, daß ein nicht-verschwindender Beitrag nur möglich ist, sofern  $m_1 = m_3$  gilt und der Zusammenhang

$$\sigma_A = \mu_{m_1} - \mu_{m_2} \quad (5.148)$$

zwischen den beteiligten Wurzel- und Gewichtsvektoren besteht. Damit finden wir für Gleichung (5.144) schließlich

$$\sum_{a,b} t_a^{m_1 m_2} t_b^{m_2 m_3} \hat{Z}^{ab} = \delta^{m_1 m_3} \sum_{\sigma_A} |t_{\sigma_A}^{m_1 m_2}|^2 Z^{\sigma_A} = \delta^{m_1 m_3} \sum_{m_2} |t_{\mu_{m_1} - \mu_{m_2}}^{m_1 m_2}|^2 Z^{\mu_{m_1} - \mu_{m_2}}. \quad (5.149)$$

Die sonstigen zur Berechnung des Energieerwartungswerts erforderlichen Schritte und Näherungen inklusive der Schleifenentwicklung gestalten sich analog zu Kapitel 3, sodaß wir hier auf weitere Details verzichten werden. Da wir den Gluonpropagator bereits durch denjenigen des reinen Yang–Mills-Sektors fixiert haben, beschränken wir uns darüber hinaus auf denjenigen Teil des Energieerwartungswerts, welcher für die Beschreibung des Quarksektors relevant ist.

Für den Einteilchen-Dirac-Hamiltonian (5.107) im chiralen Limes  $m_Q = 0$  ergibt sich durch die zur Bildung des Erwartungswerts erforderliche Verschiebung des Eichfelds

$$\begin{aligned} H_Q|_{\mathbf{A}+\mathbf{a}} &= \int d^3x \Psi^{m\dagger}(\mathbf{x}) \left[ -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \delta^{mn} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \left( \mathbf{A}^a(\mathbf{x}) + \mathbf{a}^a \right) t_a^{mn} \right] \Psi^n(\mathbf{x}) \\ &= \int d^3x \Psi^{m\dagger}(\mathbf{x}) \left[ \boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\nabla + \mathbf{a} \cdot \mu_m) \delta^{mn} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}^a(\mathbf{x}) t_a^{mn} \right] \Psi^n(\mathbf{x}) \\ &\equiv H_Q^0 + H_Q^A. \end{aligned} \quad (5.150)$$

Wir betonen diesen an sich simplen Schritt, da wir den aus der Verschiebung stammenden Term aufgrund seiner trivialen Farbstruktur dem freien Anteil zugeschlagen haben, obwohl er seinen Ursprung im Kopplungsterm hat. Für den Erwartungswert des so erweiterten

freien Dirac-Hamiltonians ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle H_Q^0 \rangle_{\mathbf{a}} = & -2\delta^3(0) \sum_m \int \bar{d}^3 p p_m P(\mathbf{p}; m) \left(1 - S^2(\mathbf{p}; m)\right) \\
& + \delta^3(0) g^2 \sum_{m,n} \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q |t_{\mu_m - \mu_n}^{mn}|^2 \frac{P(\mathbf{p}; m) P(\mathbf{q}; n)}{\omega(|\mathbf{p}_m - \mathbf{q}_n|)} \\
& \times \left[ V^2(\mathbf{p}, -\mathbf{q}; m, -n) X(\mathbf{p}_m, -\mathbf{q}_n) \right. \\
& \quad \times \left\{ p_m P(\mathbf{p}; m) \left(1 - S^2(\mathbf{p}; m) + 2S(\mathbf{p}; m) S(\mathbf{q}; n)\right) \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + q_n P(\mathbf{q}; n) \left(1 - S^2(\mathbf{q}; n) + 2S(\mathbf{p}; m) S(\mathbf{q}; n)\right) \right\} \right. \\
& \quad + W^2(\mathbf{p}, -\mathbf{q}; m, -n) Y(\mathbf{p}_m, -\mathbf{q}_n) \\
& \quad \times \left\{ p_m P(\mathbf{p}; m) \left(1 - S^2(\mathbf{p}; m) - 2S(\mathbf{p}; m) S(\mathbf{q}; n)\right) \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + q_n P(\mathbf{q}; n) \left(1 - S^2(\mathbf{q}; n) - 2S(\mathbf{p}; m) S(\mathbf{q}; n)\right) \right\} \right], \quad (5.151)
\end{aligned}$$

wobei

$$P(\mathbf{p}; m) = \frac{1}{1 + S^2(\mathbf{p}; m)} \quad (5.152)$$

gilt und  $X$ ,  $Y$  durch Gleichung (3.62), (3.63) gegeben sind. Wie üblich läßt sich der divergente Vorfaktor als Volumen des Raums  $\mathbb{R}^3$  [Gleichung (3.73)] auffassen und der Erwartungswert im Sinne von Feynmandiagrammen graphisch darstellen, siehe Abbildung 3.2.

Für den Erwartungswert des gemäß Gleichung (5.150) definierten Kopplungsterms erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle H_Q^A \rangle_{\mathbf{a}} = & -2\delta^3(0) g^2 \sum_{m,n} \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q |t_{\mu_m - \mu_n}^{mn}|^2 \frac{P(\mathbf{p}; m) P(\mathbf{q}; n)}{\omega(|\mathbf{p}_m - \mathbf{q}_n|)} \\
& \times \left[ V(\mathbf{p}, -\mathbf{q}; m, -n) X(\mathbf{p}_m, -\mathbf{q}_n) \left(1 + S(\mathbf{p}; m) S(\mathbf{q}; n)\right) \right. \\
& \quad \left. + W(\mathbf{p}, -\mathbf{q}; m, -n) Y(\mathbf{p}_m, -\mathbf{q}_n) \left(S(\mathbf{p}; m) + S(\mathbf{q}; n)\right) \right], \quad (5.153)
\end{aligned}$$

was dem in Abbildung 3.3 gezeigten Feynmandiagramm entspricht.

Durch die Wirkung der im Hamiltonian der transversalen gluonischen Felder (5.102) enthaltenen kanonischen Impulsoperatoren auf das fermionische Wellenfunktional (5.122) ergibt sich der Beitrag

$$\begin{aligned}
\langle H_{YM}^Q \rangle_{\mathbf{a}} = & \delta^3(0) g^2 \sum_{m,n} \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q |t_{\mu_m - \mu_n}^{mn}|^2 P(\mathbf{p}; m) P(\mathbf{q}; n) \\
& \times \left[ V^2(\mathbf{p}, -\mathbf{q}; m, -n) X(\mathbf{p}_m, -\mathbf{q}_n) \right. \\
& \quad \left. + W^2(\mathbf{p}, -\mathbf{q}; m, -n) Y(\mathbf{p}_m, -\mathbf{q}_n) \right], \quad (5.154)
\end{aligned}$$

welcher in Abbildung 3.5 diagrammatisch dargestellt ist.

Schließlich führt der rein fermionische Anteil der Farb-Coulombwechselwirkung (5.108) zum Beitrag

$$\begin{aligned} \langle H_C^Q \rangle_a &= \frac{1}{2} \delta^3(0) \sum_{m,n} \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q |t_{\mu_m - \mu_n}^{mn}|^2 V_C(|\mathbf{p}_m - \mathbf{q}_n|) \\ &\quad \times \left[ 1 - P(\mathbf{p}; m) P(\mathbf{q}; n) \left( 4S(\mathbf{p}; m) S(\mathbf{q}; n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( 1 - S^2(\mathbf{p}; m) \right) \left( 1 - S^2(\mathbf{q}; n) \right) \hat{\mathbf{p}}_m \cdot \hat{\mathbf{q}}_n \right] \end{aligned} \quad (5.155)$$

zum fermionischen Energiefunktional. Dieser besitzt eine graphische Darstellung gemäß Abbildung 3.4.

### Variationsgleichungen

Da der inverse Gluonpropagator  $\omega$  durch die Verwendung der Gribovformel (3.21) fixiert wurde, besitzt das fermionische Energiefunktional mit den Variationskernen  $S$ ,  $V$  und  $W$  drei unabhängige Parameter. Die Minimierung des Energiefunktionals bezüglich dieser Größen führt auf ein System gekoppelter Bestimmungsgleichungen, wobei sich die Gleichungen für die Vektorkerne  $V$  und  $W$  wie üblich explizit auflösen lassen. Für  $V$  ergibt sich dabei

$$V(\mathbf{p}, -\mathbf{q}; m, -n) = \frac{1 + S(\mathbf{p}; m) S(\mathbf{q}; n)}{N^V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; m, n) + \omega(|\mathbf{p}_m - \mathbf{q}_n|)}, \quad (5.156)$$

wobei

$$\begin{aligned} N^V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; m, n) &\equiv p_m P(\mathbf{p}; m) \left( 1 - S^2(\mathbf{p}; m) + 2S(\mathbf{p}; m) S(\mathbf{q}; n) \right) \\ &\quad + q_n P(\mathbf{q}; n) \left( 1 - S^2(\mathbf{q}; n) + 2S(\mathbf{p}; m) S(\mathbf{q}; n) \right) \end{aligned} \quad (5.157)$$

ist, während für  $W$

$$W(\mathbf{p}, -\mathbf{q}; m, -n) = \frac{S(\mathbf{p}; m) + S(\mathbf{q}; n)}{N^W(\mathbf{p}, \mathbf{q}; m, n) + \omega(|\mathbf{p}_m - \mathbf{q}_n|)} \quad (5.158)$$

mit

$$\begin{aligned} N^W(\mathbf{p}, \mathbf{q}; m, n) &\equiv p_m P(\mathbf{p}; m) \left( 1 - S^2(\mathbf{p}; m) - 2S(\mathbf{p}; m) S(\mathbf{q}; n) \right) \\ &\quad + q_n P(\mathbf{q}; n) \left( 1 - S^2(\mathbf{q}; n) - 2S(\mathbf{p}; m) S(\mathbf{q}; n) \right) \end{aligned} \quad (5.159)$$

gilt. Die Bestimmungsgleichungen (5.156) und (5.158) genügen der Symmetriebedingung (5.124a), während Bedingung (5.124b) erfüllt ist, sofern für den Skalarkern  $S(\mathbf{p}; m) = S(-\mathbf{p}; -m)$  gilt.

Nach Auflösen der Bestimmungsgleichungen für  $V$  und  $W$  verbleibt lediglich die Gapgleichung für  $S$  zu lösen. Diese besitzt die gewohnte Gestalt

$$\begin{aligned} k_l S(\mathbf{k}; l) &= I_C^Q(\mathbf{k}; l) + I_{VV}^Q(\mathbf{k}; l) + I_{WW}^Q(\mathbf{k}; l) + I_{VQ}^Q(\mathbf{k}; l) + I_{WQ}^Q(\mathbf{k}; l) \\ &\quad + I_{VE}^Q(\mathbf{k}; l) + I_{WE}^Q(\mathbf{k}; l), \end{aligned} \quad (5.160)$$

wobei die rechte Seite durch eine Reihe von Einschleifenbeiträgen gegeben ist:

$$I_C^Q(\mathbf{k}; l) = \frac{1}{2} \sum_m \int \bar{d}^3 p |t_{\mu_m - \mu_l}^{ml}|^2 V_C(|\mathbf{p}_m - \mathbf{k}_l|) P(\mathbf{p}; m) \\ \times \left[ S(\mathbf{p}; m) \left( 1 - S^2(\mathbf{k}; l) \right) - S(\mathbf{k}; l) \left( 1 - S^2(\mathbf{p}; m) \right) \hat{\mathbf{p}}_m \cdot \hat{\mathbf{k}}_l \right] \quad (5.161)$$

entstammt dem Beitrag der Farb-Coulombwechselwirkung (5.155),

$$I_{VV}^Q(\mathbf{k}; l) = -\frac{g^2}{2} \sum_m \int \bar{d}^3 p |t_{\mu_m - \mu_l}^{ml}|^2 \frac{V^2(\mathbf{p}, -\mathbf{k}; m, -l)}{\omega(|\mathbf{p}_m - \mathbf{k}_l|)} X(\mathbf{p}_m, -\mathbf{k}_l) P(\mathbf{p}; m) \\ \times \left\{ p_m P(\mathbf{p}; m) \left( S(\mathbf{p}; m) \left[ 1 - S^2(\mathbf{k}; l) \right] - S(\mathbf{k}; l) \left[ 1 - S^2(\mathbf{p}; m) \right] \right) \right. \\ \left. + k_l P(\mathbf{k}; l) \left( S(\mathbf{p}; m) \left[ 1 - 3S^2(\mathbf{k}; l) \right] - S(\mathbf{k}; l) \left[ 3 - S^2(\mathbf{k}; l) \right] \right) \right\} \quad (5.162)$$

und

$$I_{WW}^Q(\mathbf{k}; l) = -\frac{g^2}{2} \sum_m \int \bar{d}^3 p |t_{\mu_m - \mu_l}^{ml}|^2 \frac{W^2(\mathbf{p}, -\mathbf{k}; m, -l)}{\omega(|\mathbf{p}_m - \mathbf{k}_l|)} Y(\mathbf{p}_m, -\mathbf{k}_l) P(\mathbf{p}; m) \\ \times \left\{ p_m P(\mathbf{p}; m) \left( -S(\mathbf{p}; m) \left[ 1 - S^2(\mathbf{k}; l) \right] - S(\mathbf{k}; l) \left[ 1 - S^2(\mathbf{p}; m) \right] \right) \right. \\ \left. - k_l P(\mathbf{k}; l) \left( S(\mathbf{p}; m) \left[ 1 - 3S^2(\mathbf{k}; l) \right] + S(\mathbf{k}; l) \left[ 3 - S^2(\mathbf{k}; l) \right] \right) \right\} \quad (5.163)$$

den Zweischleifenbeiträgen des freien Dirac-Hamiltonians (5.151),

$$I_{VQ}^Q(\mathbf{k}; l) = \frac{g^2}{2} \sum_m \int \bar{d}^3 p |t_{\mu_m - \mu_l}^{ml}|^2 \frac{V(\mathbf{p}, -\mathbf{k}; m, -l)}{\omega(|\mathbf{p}_m - \mathbf{k}_l|)} X(\mathbf{p}_m, -\mathbf{k}_l) P(\mathbf{p}; m) \\ \times \left\{ S(\mathbf{p}; m) \left[ 1 - S^2(\mathbf{k}; l) \right] - 2S(\mathbf{k}; l) \right\} \quad (5.164)$$

sowie

$$I_{WQ}^Q(\mathbf{k}; l) = \frac{g^2}{2} \sum_m \int \bar{d}^3 p |t_{\mu_m - \mu_l}^{ml}|^2 \frac{W(\mathbf{p}, -\mathbf{k}; m, -l)}{\omega(|\mathbf{p}_m - \mathbf{k}_l|)} Y(\mathbf{p}_m, -\mathbf{k}_l) P(\mathbf{p}; m) \\ \times \left\{ 1 - 2S(\mathbf{p}; m) S(\mathbf{k}; l) - S^2(\mathbf{k}; l) \right\} \quad (5.165)$$

dem Kopplungsterm (5.153) und schließlich

$$I_{VE}^Q(\mathbf{k}; l) = \frac{g^2}{2} S(\mathbf{k}; l) \sum_m \int \bar{d}^3 p |t_{\mu_m - \mu_l}^{ml}|^2 V^2(\mathbf{p}, -\mathbf{k}; m, -l) X(\mathbf{p}_m, -\mathbf{k}_l) P(\mathbf{p}; m) \quad (5.166)$$

sowie

$$I_{WE}^Q(\mathbf{k}; l) = \frac{g^2}{2} S(\mathbf{k}; l) \sum_m \int \bar{d}^3 p |t_{\mu_m - \mu_l}^{ml}|^2 W^2(\mathbf{p}, -\mathbf{k}; m, -l) Y(\mathbf{p}_m, -\mathbf{k}_l) P(\mathbf{p}; m) \quad (5.167)$$



dem fermionischen Anteil der kinetischen Energie der transversalen Gluonen (5.154). Sämtliche dieser Beiträge und auch die linke Seite der Gapgleichung (5.160) lassen sich wie ihre in Kapitel 3 gefundenen Gegenstücke diagrammatisch darstellen, siehe Abbildung 3.6 bis 3.10.

Die Gapgleichung (5.160) ist selbstkonsistent unter der Symmetrieannahme  $S(\mathbf{p}; m) = S(-\mathbf{p}; -m)$ , wobei berücksichtigt werden muß, daß der Vorzeichenwechsel im Gewichtsvektor  $\mu_m$  einen Vorzeichenwechsel im Hintergrundfeld,  $\mathbf{a} \rightarrow -\mathbf{a}$ , bedeutet. Somit ist auch die Symmetrie (5.124b) der Vektorkerne erfüllt.

Führen wir in der Gapgleichung (5.160) für die Schleifenimpulse die Verschiebung

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{a} \cdot \mu_m \quad (5.168)$$

durch und werten die Gleichung beim äußeren Impuls

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{a} \cdot \mu_l \quad (5.169)$$

aus, so verbleibt in Gleichung (5.160) – nach Einsetzen der Bestimmungsgleichungen (5.156) und (5.158) für die Vektorkerne – lediglich über die Farbmatrizen  $t_{\mu_m - \mu_l}$  eine explizite Abhängigkeit von den Gewichtsvektoren und damit dem Hintergrundeichfeld. Unter der Annahme, daß der verschobene Skalarkern  $S(\mathbf{p} - \mathbf{a} \cdot \mu_m; m)$  unabhängig von den Gewichten bzw. dem Hintergrundfeld ist, läßt sich die in Gleichung (5.160) enthaltene Summe über die Gewichtsvektoren unter Verwendung der in Anhang A.2 gegebenen Farbmatrizen ausführen und liefert unabhängig vom Wert des Gewichtsvektors  $\mu_l$

$$\sum_m |t_{\mu_m - \mu_l}^{ml}|^2 = C_F = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{für } SU(2) \\ \frac{4}{3} & \text{für } SU(3). \end{cases} \quad (5.170)$$

Die Gapgleichung (5.160) reduziert sich dann vollständig auf die Nulltemperatur-Gleichung ohne Hintergrundfeld [Gleichung (3.100)] und besitzt die Lösung  $S(\mathbf{p} - \mathbf{a} \cdot \mu_m; m) = S(p)$  bzw.

$$S(\mathbf{p}; m) = S(|\mathbf{p} + \mathbf{a} \cdot \mu_m|) = S(p_m), \quad (5.171)$$

wobei  $S(p)$  der Skalarkern aus Kapitel 3 ist. Der Effekt des Hintergrundeichfelds beschränkt sich im Nulltemperaturlimes daher auf eine bloße Verschiebung des Impulsarguments, was dem Resultat des reinen Yang–Mills-Sektors entspricht [139, 140]. Setzen wir dieses Ergebnis in das fermionische Energiefunktional [Gleichung (5.151), (5.153) bis (5.155)] ein, so läßt sich das Hintergrundfeld dort vollständig durch Verschieben der Schleifenimpulse entfernen und zeigt folglich keinerlei Effekt.

### 5.2.5 Erweiterung auf endliche Temperaturen

Die Berechnung des Polyakov-Loops (2.137) ist nur für endliche Temperaturen sinnvoll, weshalb wir im Folgenden auf die dafür erforderlichen Anpassungen eingehen werden. Während das Hintergrundeichfeld in der Form (5.112) beibehalten werden kann, wird am QCD-Hamiltonian in Hintergrundeichung (5.101) die Ersetzung  $\int d^3x \rightarrow \int_\beta d^3x$  [Gleichung (5.4)] erforderlich. Die Gluon- bzw. Quarkfelder erfüllen hierbei übliche bosonische bzw. fermionische Randbedingungen, siehe Gleichung (2.121). Für den Ansatz des Vakuumwellenfunktionals stellt das in Abschnitt 5.1 verwendete Funktional (5.19) mit dem

bosonischen (5.20) und fermionischen Anteil (5.27) sowie  $\varphi = \pi$  den Ausgangspunkt dar. An diesem lassen sich dieselben Veränderungen vornehmen, die das Funktional (5.117) von demjenigen im Nulltemperaturlimes in Coulombbeichung [Gleichung (3.1)] unterscheiden.

Unter denselben Näherungen wie in Abschnitt 5.1 ersetzen wir die beiden gluonischen Variationskerne  $\omega_{\perp,\parallel}$  durch die Gribovformel. Weiterhin verwenden wir das im Nulltemperaturlimes gefundene Ergebnis, daß das Hintergrundfeld lediglich für eine Verschiebung der Impulsvariablen sorgt [139, 140],

$$\hat{\omega}_{\perp,\parallel}^{ab}(\mathbf{p}_{\perp}, \omega_n) \approx \sum_A t(\mathbf{p}_{\sigma_A}) \omega(|\mathbf{p}_{\perp} + \omega_n \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{a} \cdot \sigma_A|) \langle a | \sigma_A \rangle \langle \sigma_A | b \rangle. \quad (5.172)$$

Dabei ist  $t$  der transversale Projektor (2.42). Der Energieerwartungswert läßt sich analog zu Abschnitt 5.1 bestimmen, wobei die Farbstruktur gemäß Gleichung (5.149) ausgewertet werden muß. Die Minimierung des Energiefunktionals führt auf das übliche System von Bestimmungsgleichungen für die fermionischen Variationskerne. Wie in Abschnitt 5.1 verzichten wir auf die numerische Lösung der temperaturabhängigen Gapgleichung und ersetzen stattdessen den Skalarkern durch seinen Nulltemperaturlimes, wobei sich in Anwesenheit des Hintergrundfelds

$$S_{\varphi=\pi}(\mathbf{p}_{\perp}, p_n; m) \approx S(|\mathbf{p}_{\perp} + \Omega_n \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{a} \cdot \mu_m|) \quad (5.173)$$

ergibt. Dieser Ausdruck für den Skalarkern auf  $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$  ist konsistent mit dem verwendeten inversen Gluonpropagator (5.172) und entspricht der Ersetzung des durch Poisson-Resummation (5.18) entstehenden Kerns durch den Nulltemperatur-Skalarkern mit verschobenem Impulsargument, vgl. Gleichung (F.16) sowie (5.171). Wir betonen, daß die Approximationen (5.172) und (5.173) voraussichtlich nicht unerhebliche Eingriffe darstellen und eine selbstkonsistente Lösung der temperaturabhängigen Bewegungsgleichungen nicht ersetzen können, vgl. die Diskussion in Abschnitt 5.1.5. In diesem Zusammenhang weisen wir darauf hin, daß die volle Lösung der Bewegungsgleichungen bei endlichen Temperaturen in Anwesenheit des Hintergrundfelds – anders als im Nulltemperaturlimes – *nicht* durch eine Verschiebung des Impulsarguments aus derjenigen für  $\mathbf{a} = 0$  hervorgehen wird: Da die Quarkgapgleichung durch Anwendung der Poisson'schen Summenformel (5.16) impulsabhängige Phasenfaktoren enthält, vgl. Gleichung (5.47), führt eine Verschiebung (5.168) des Schleifenimpulses zur Entstehung nicht-trivialer Farbfaktoren, die im Limes  $\mathbf{a} = 0$  nicht auftreten.

Da wir endliche Temperaturen durch Kompaktifizieren der  $z$ -Achse einführen, bietet es sich an, das Hintergrundfeld gemäß

$$\mathbf{a}^{mn} = \sum_k \mathbf{a}^k h_k^{mn} = \delta^{mn} \sum_k a^k \mu_m^k \hat{\mathbf{e}}_z = \delta^{mn} \mathbf{a} \cdot \mu_m \hat{\mathbf{e}}_z \quad (5.174)$$

zu wählen. Mögliche  $x$ - bzw.  $y$ -Komponenten könnten durch Verschieben der Schleifenimpulse zum Verschwinden gebracht werden.

## 5.2.6 Effektives Potential

### Selbstkonsistentes Energiefunktional

Der Vergleich des Energiefunktionals aus Abschnitt 5.1.3 [Gleichung (5.42), (5.44)-(5.46)] mit demjenigen aus Abschnitt 5.2.4 [Gleichung (5.151), (5.153)-(5.155)] zeigt, daß wir bei

Verwendung der Näherungen (5.172) und (5.173) das selbstkonsistente Energiefunktional bei endlicher Temperatur  $T$  und in Anwesenheit des Hintergrundeichfelds  $\mathbf{a}$  aus demjenigen bei  $T = 0$  und  $\mathbf{a} = 0$  [Gleichung (3.166)] gewinnen können, indem wir die Ersetzungen

$$\int \bar{d}^3 p \rightarrow \int_{\beta} \bar{d}^3 p, \quad (5.175)$$

$$\delta^3(0) \rightarrow \delta^2(0)\beta, \quad (5.176)$$

$$p_z \rightarrow \begin{cases} \omega_n + \mathbf{a} \cdot \sigma_A & \text{für bosonische Größen} \\ \Omega_n + \mathbf{a} \cdot \mu_m & \text{für fermionische Größen,} \end{cases} \quad (5.177)$$

$$\omega(p) \rightarrow \omega(|\mathbf{p}_{\perp} + \omega_n \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{a} \cdot \sigma_A|), \quad (5.178)$$

$$\chi(p) \rightarrow \chi(|\mathbf{p}_{\perp} + \omega_n \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{a} \cdot \sigma_A|), \quad (5.179)$$

$$S(p) \rightarrow S(|\mathbf{p}_{\perp} + \Omega_n \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{a} \cdot \mu_m|) \quad (5.180)$$

vornehmen und sämtliche Farbfaktoren durch Summationen über die Gewichts- (Fermionen) bzw. Wurzelvektoren (Bosonen) ersetzen.

Für den bosonischen Anteil des selbstkonsistenten Energiefunktionals ergibt sich ausgehend von Gleichung (3.154)

$$E_{\text{YM}}[\beta, a] = \delta^2(0)\beta \sum_A \int_{\beta} \bar{d}^3 p \left[ \omega(|\mathbf{p}_{\perp} + (\omega_n + \mathbf{a} \cdot \sigma_A) \hat{\mathbf{e}}_z|) - \chi(|\mathbf{p}_{\perp} + (\omega_n + \mathbf{a} \cdot \sigma_A) \hat{\mathbf{e}}_z|) \right], \quad (5.181)$$

wobei wir uns auf Einschleifenbeiträge beschränken und  $\chi$  die skalare Krümmung (3.18) ist. Für den fermionischen Anteil verwenden wir als Ausgangspunkt das selbstkonsistente Funktional (3.165), welches sich nach Einsetzen der Vektorkerngleichungen und der Quarkgapgleichung auf Einschleifenniveau ergeben hat,

$$E_{\text{Q}}[\beta, a] = -\delta^2(0)\beta \sum_m \int_{\beta} \bar{d}^3 p \frac{|\mathbf{p}_{\perp} + (\Omega_n + \mathbf{a} \cdot \mu_m) \hat{\mathbf{e}}_z|^2}{E(|\mathbf{p}_{\perp} + (\Omega_n + \mathbf{a} \cdot \mu_m) \hat{\mathbf{e}}_z|)}. \quad (5.182)$$

Dabei ist  $E$  die Quasiteilchenenergie (3.122) mit der üblichen Massenfunktion  $M$  (3.121). Da er durch Einsetzen der gluonischen Gapgleichung des Yang–Mills-Sektors entstanden ist (siehe Kapitel 3), stimmt der bosonische Anteil des Energiefunktionals (5.181) mit demjenigen des reinen Yang–Mills-Sektors [139, 140] überein.<sup>82</sup>

### Effektives Potential und regularisierte UV-Limites

Wie erwähnt, dient im verwendeten Zugang in Polyakovgleichung das Hintergrundeichfeld  $\mathbf{a}$  als Ordnungsparameter des Deconfinement-Phasenübergangs, da es in eindeutiger Weise festlegt, ob der Erwartungswert des Polyakov-Loops (2.137) verschwindet (siehe unten). Der Wert des Hintergrundeichfelds bei einer bestimmten Temperatur  $T$  wird dabei durch die Forderung fixiert, daß das effektive Potential [144]

$$e[\beta, a] \equiv \frac{\langle H \rangle}{(d-1)\text{Vol}} \quad (5.183)$$

<sup>82</sup>Man beachte, daß das Energiefunktional in Referenz [139, 140] um einen globalen Faktor 2 zu groß ist.

als Funktion des Hintergrundeichfelds minimal wird [80, 81]. Dabei bezeichnet Vol das Volumen der zugrunde liegenden räumlichen Mannigfaltigkeit und  $d$  die Anzahl ihrer Dimensionen, d.h. in unserem Fall

$$(d-1)\text{Vol} = 2\delta^2(0)\beta. \quad (5.184)$$

Der Erwartungswert des Hamiltonians entspricht dem selbstkonsistenten Energiefunktional,  $\langle H \rangle = E_{\text{YM}}[\beta, a] + E_{\text{Q}}[\beta, a]$ .

Die Bestimmung des Minimums des effektiven Potentials (5.183) ergibt nur dann Sinn, wenn dieses endlich ist. Das trifft weder auf den bosonischen (5.181), noch auf den fermionischen Anteil (5.182) des Energiefunktionals in der gegebenen Form zu, vgl. Abschnitt 3.5. Wir greifen deshalb auf die in Referenz [140] verwendete Form der Regularisierung zurück: Dazu wird vom effektiven Potential zunächst das Funktional bei verschwindendem Hintergrundfeld abgezogen,

$$\bar{e}[\beta, a] \equiv e[\beta, a] - e[\beta, 0], \quad (5.185)$$

was einer Fixierung des Energienullpunkts entspricht und sämtliche Hintergrundfeld-unabhängigen Divergenzen entfernt. Anschließend wird der UV-Limes des so entstandenen Funktionals extrahiert,

$$\bar{e}[\beta, a] = \left[ \bar{e}[\beta, a] - \bar{e}_{\text{UV}}[\beta, a] \right] + \bar{e}_{\text{UV}}[\beta, a], \quad (5.186)$$

wobei der Term in eckigen Klammern endlich ist und numerisch ausgewertet werden kann, während der UV-Limes  $\bar{e}_{\text{UV}}$  analytisch in regularisierter Form bestimmt werden muß.

Für den UV-Limes des fermionischen Anteils am effektiven Potential ergibt sich mittels Gleichung (5.182)

$$e_{\text{Q,UV}}[\beta, a] = -\frac{1}{2} \sum_m \int_{\beta} \bar{d}^3 p \left| \mathbf{p}_{\perp} + (\Omega_n + a \cdot \mu_m) \hat{e}_z \right|. \quad (5.187)$$

Das läßt sich nach Anwendung der Poisson'schen Summenformel (5.16) durch eine Proper-Time-Darstellung in eine regularisierte Form bringen und analytisch auswerten, siehe Anhang D.5, sodaß wir schließlich

$$\bar{e}_{\text{Q,UV}}[\beta, a] = \frac{\pi^2}{3\beta^4} \sum_m \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\beta a \cdot \mu_m}{2\pi} \right)^2 - \left( \frac{\beta a \cdot \mu_m}{2\pi} \right)^4 \right] \quad (5.188)$$

erhalten. Dieser Ausdruck gilt für ein Hintergrundfeld mit

$$-\pi \leq \beta a \cdot \mu_m \leq \pi \quad (5.189)$$

und muß ansonsten periodisch fortgesetzt werden.

Da die skalare Krümmung  $\chi$  gegenüber dem inversen Gluonpropagator  $\omega$  für große Impulse unterdrückt ist [22], trägt ausschließlich  $\omega$  zum UV-Limes des bosonischen Teils des Energiefunktionals bei, womit sich mithilfe der Gribovformel (3.21)

$$e_{\text{YM,UV}}[\beta, a] = \frac{1}{2} \sum_A \int_{\beta} \bar{d}^3 p \left| \mathbf{p}_{\perp} + (\omega_n + a \cdot \sigma_A) \hat{e}_z \right| \quad (5.190)$$

ergibt. Dieser Ausdruck läßt sich analytisch auswerten und führt auf [140]<sup>83</sup>

$$\bar{e}_{\text{YM,UV}}[\beta, a] = \frac{2\pi^2}{3\beta^4} \sum_{A, a \cdot \sigma_A \geq 0} \left( \frac{\beta a \cdot \sigma_A}{2\pi} \right)^2 \left[ \frac{\beta a \cdot \sigma_A}{2\pi} - 1 \right]^2, \quad (5.191)$$

was mit dem zuerst in Referenz [145] im Zuge einer Rechnung auf Einschleifenniveau in Landaugleichung gefundenen *Weiss'schen Potential* übereinstimmt. Man beachte, daß das Hintergrundfeld in Gleichung (5.191) auf

$$0 \leq \beta a \cdot \sigma_A \leq 2\pi \quad (5.192)$$

eingeschränkt ist und darüber hinaus periodisch fortgesetzt werden muß. Dadurch erstreckt sich die Summe nur über die *positiven* Wurzelvektoren mit  $a \cdot \sigma_A \geq 0$ .

Für den fermionischen Anteil am regularisierten effektiven Potential (5.186) gilt mit Gleichung (5.182) und (5.188)

$$\begin{aligned} \bar{e}_{\text{Q}}[\beta, a] = & -\frac{1}{2} \sum_m \int_{\beta} d^3p \left( \frac{|\mathbf{p}_{\perp} + (\Omega_n + a \cdot \mu_m) \hat{e}_z|^2}{E(|\mathbf{p}_{\perp} + (\Omega_n + a \cdot \mu_m) \hat{e}_z|)} - |\mathbf{p}_{\perp} + (\Omega_n + a \cdot \mu_m) \hat{e}_z| \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_m \int_{\beta} d^3p \left( \frac{|\mathbf{p}_{\perp} + \Omega_n \hat{e}_z|^2}{E(|\mathbf{p}_{\perp} + \Omega_n \hat{e}_z|)} - |\mathbf{p}_{\perp} + \Omega_n \hat{e}_z| \right) \\ & + \frac{\pi^2}{3\beta^4} \sum_m \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\beta a \cdot \mu_m}{2\pi} \right)^2 - \left( \frac{\beta a \cdot \mu_m}{2\pi} \right)^4 \right]. \end{aligned} \quad (5.193)$$

Die Verwendung der  $O(3)$ -invarianten Nulltemperatur-Massenfunktion  $M$  erlaubt es, in den ersten beiden Termen in Gleichung (5.193) nach Anwendung der Poisson'schen Summenformel (5.16) und Verschiebung des Schleifenimpulses, die Winkelintegrationen explizit auszuführen,<sup>84</sup> sodaß sich für das fermionische effektive Potential alternativ Folgendes ergibt:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{\text{Q}}[\beta, a] = & -\frac{1}{2\pi^2\beta} \sum_m \int_0^{\infty} dp \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{\sin(\beta lp)}{l} [\cos(\beta la \cdot \mu_m) - 1] \left( \frac{p^3}{E(p)} - p^2 \right) \\ & + \frac{\pi^2}{3\beta^4} \sum_m \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\beta a \cdot \mu_m}{2\pi} \right)^2 - \left( \frac{\beta a \cdot \mu_m}{2\pi} \right)^4 \right] \end{aligned} \quad (5.194)$$

Der bosonische Anteil des effektiven Potentials (5.186) ist gemäß Gleichung (5.181) und (5.191) durch

<sup>83</sup>Die entsprechende Rechnung ist weitestgehend analog zu derjenigen, die wir in Anhang D.5 für den fermionischen Anteil ausführen.

<sup>84</sup>Das bedingt das Vertauschen der Winkelintegrale mit der nicht absolut konvergenten Summe über  $l$ . Die mit den beiden Ausdrücken (5.193), (5.194) für das effektive Potential gewonnenen numerischen Ergebnisse stimmen im Rahmen der numerischen Genauigkeit aber überein.

$$\begin{aligned}
\bar{e}_{\text{YM}}[\beta, a] &= \frac{1}{2} \sum_A \int_{\beta} \bar{d}^3 p \left[ \omega(|\mathbf{p}_{\perp} + (\omega_n + a \cdot \sigma_A) \hat{e}_z|) - |\mathbf{p}_{\perp} + (\omega_n + a \cdot \sigma_A) \hat{e}_z| \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_A \int_{\beta} \bar{d}^3 p \left[ \omega(|\mathbf{p}_{\perp} + \omega_n \hat{e}_z|) - |\mathbf{p}_{\perp} + \omega_n \hat{e}_z| \right] \\
&\quad + \frac{2\pi^2}{3\beta^4} \sum_{A, a \cdot \sigma_A \geq 0} \left( \frac{\beta a \cdot \sigma_A}{2\pi} \right)^2 \left[ \frac{\beta a \cdot \sigma_A}{2\pi} - 1 \right]^2
\end{aligned} \tag{5.195}$$

gegeben, wobei die skalare Krümmung vernachlässigt wurde, d.h.  $\chi = 0$ . Auf den Grund für diese Näherung werden wir im folgenden Abschnitt 5.2.7 eingehen. Da die Gribovformel (3.21) für den inversen Gluonpropagator  $O(3)$ -invariant ist, lassen sich in Gleichung (5.195) nach Poisson-Resummation und Verschiebung des Impulses ebenfalls die Winkelintegrationen analytisch ausführen, wodurch wir

$$\begin{aligned}
\bar{e}_{\text{YM}}[\beta, a] &= \frac{1}{\pi^2 \beta} \sum_{A, a \cdot \sigma_A \geq 0} \int_0^{\infty} dp \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(\beta l p)}{l} \left[ \cos(\beta l a \cdot \sigma_A) - 1 \right] p (\omega(p) - p) \\
&\quad + \frac{2\pi^2}{3\beta^4} \sum_{A, a \cdot \sigma_A \geq 0} \left( \frac{\beta a \cdot \sigma_A}{2\pi} \right)^2 \left[ \frac{\beta a \cdot \sigma_A}{2\pi} - 1 \right]^2
\end{aligned} \tag{5.196}$$

erhalten. Dabei haben wir ausgenutzt, daß sämtliche nicht-verschwindende Wurzelvektoren paarweise mit verschiedenen Vorzeichen auftreten [110]. Jedes solche Paar läßt sich als eine Einbettung der Gruppe  $SU(2)$  in  $SU(N_C)$  auffassen, sodaß beispielsweise das später betrachtete effektive Potential für  $SU(3)$  der Summe von drei  $SU(2)$  Potentialen entspricht.

### Explizite Form des Polyakov-Loops

Ob das aus dem Minimum des effektiven Potentials bestimmte Hintergrundfeld das Verschwinden des Farbeinschlusses impliziert, folgt aus dem Erwartungswert des Polyakov-Loops (2.137)

$$P[\langle A_z \rangle] = P[a] = \frac{1}{N_C} \text{Sp} \exp(i\beta a) \geq \langle P[A_z] \rangle, \tag{5.197}$$

wobei der letzte Schritt aufgrund der Jensen'schen Ungleichung zumindest für die Farbgruppe  $SU(2)$  gilt. Mithilfe der in Anhang A.2 gegebenen Farbgeneratoren ergibt sich für diese Gruppe mit  $a = a^3 t_3$

$$P[a^3] = \cos\left(\frac{\beta a^3}{2}\right). \tag{5.198}$$

Für  $SU(3)$  mit  $a = a^3 t_3 + a^8 t_8$  gilt dagegen

$$P[a^3, a^8] = \frac{1}{3} \left[ 2 \cos\left(\frac{\beta a^3}{2}\right) \exp\left(i \frac{\beta a^8}{2\sqrt{3}}\right) + \exp\left(-i \frac{\beta a^8}{\sqrt{3}}\right) \right]. \tag{5.199}$$

Dieser Ausdruck ist i.A. komplexwertig und erfüllt daher die Jensen'sche Ungleichung nicht (bzw. ist dafür möglicherweise die Einfügung von Beträgen erforderlich, vgl. den Beweis für  $SU(2)$  in Referenz [82]). Die numerischen Ergebnisse des folgenden Abschnitts belegen aber,

daß das absolute Minimum des effektiven Potentials stets (auch) für  $a^8 = 0$  angenommen wird, sodaß die Betrachtung von

$$P[a^3, a^8 = 0] = \frac{1}{3} \left[ 1 + 2 \cos \left( \frac{\beta a^3}{2} \right) \right] \quad (5.200)$$

ausreichend ist. Dies erfüllt analog zum  $SU(2)$ -Ausdruck (5.198) die Jensen'sche Ungleichung. Anhand von Gleichung (5.198) bzw. (5.199) erkennt man schließlich, daß der Polyakov-Loop durch das gemäß Gleichung (5.189) bzw. (5.192) eingeschränkte Hintergrundfeld in eindeutiger Weise festgelegt wird.

## 5.2.7 Numerische Ergebnisse

### Effektives Potential

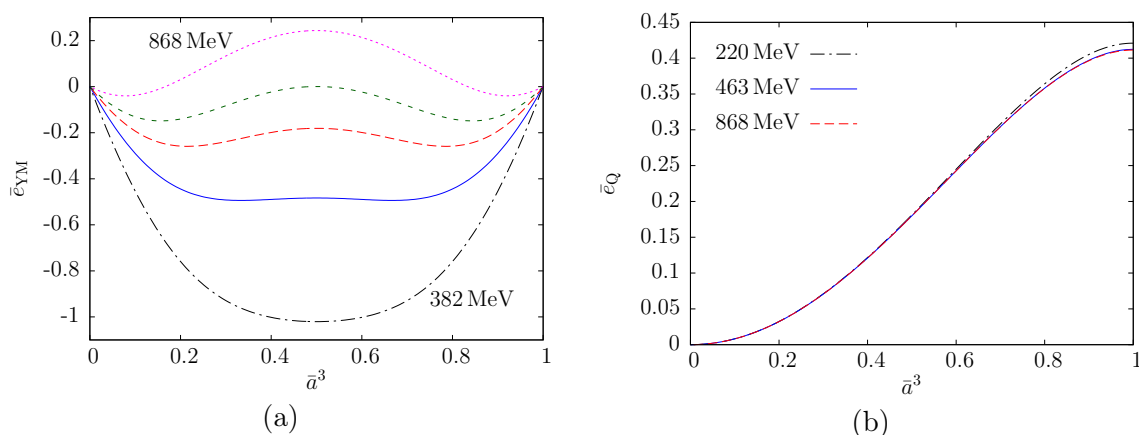
Die Bestimmung der (pseudo-)kritischen Temperatur des Deconfinement-Übergangs bedarf zunächst der Berechnung des effektiven Potentials  $\bar{e} = \bar{e}_Q + \bar{e}_{\text{YM}}$  (5.185). Der fermionische Anteil  $\bar{e}_Q$  ist dabei durch Gleichung (5.193) bzw. (5.194) gegeben. Für seine Auswertung greifen wir auf die in Kapitel 3 bestimmte Quarkmassenfunktion im Nulltemperaturlimes zurück. Diese stellt die Lösung der Quarkgaggleichung (3.131) dar und ergibt sich – bis auf eine Verschiebung des Impulsarguments [vgl. (5.171)] – auch im Nulltemperaturlimes der Theorie in Hintergrundgleichung. Die Massenfunktion läßt sich in sehr guter Weise durch den analytischen Fit (3.148), (3.149) approximieren, was die Ausführung numerischer Integrationen erheblich vereinfacht. Der Wert der Kopplung  $g$  wurde durch Fixieren des chiralen Kondensats auf dessen phänomenologischen Wert (3.142) zu  $g \approx 2.07$  bestimmt, wobei für die Coulomb-Stringtension  $\sigma_C = 2.5\sigma$  [94] verwendet wurde. Neben der so ermittelten physikalischen  $SU(3)$ -Massenfunktion verwenden wir die in Abschnitt 3.4 angegebene  $SU(2)$ -Massenfunktion, welche auch für diese Eichgruppe ein qualitatives Urteil über die Auswirkungen des Quarksektors auf die (pseudo-)kritische Temperatur erlauben wird.

Der bosonische Anteil des effektiven Potentials  $\bar{e}_{\text{YM}}$  ist durch Gleichung (5.195) bzw. (5.196) gegeben. Dabei wurde im Vergleich mit dem bosonischen Energiefunktional (5.181) der Beitrag der skalaren Krümmung  $\chi$  vernachlässigt. Das ist erforderlich, um im Limes niedriger Temperaturen zuverlässige Ergebnisse zu erzielen: Bei Berücksichtigung von  $\chi$  wird das Energiefunktional bei zu niedrigen Temperaturen positiv und impliziert deshalb das physikalisch nicht sinnvolle Auftreten einer deconfinierten Phase [146]. Da solche Schwierigkeiten im reinen Yang–Mills-Sektor nicht auftreten, scheint das ein Zeichen dafür zu sein, daß das verwendete fermionische Energiefunktional (5.182) auf Einschleifenniveau nicht mit dem bosonischen Funktional (5.181) kompatibel ist und die Einbeziehung der Krümmung  $\chi$  die Betrachtung der bislang vernachlässigten fermionischen Zweischleifenbeiträge erforderlich machen würde.

Für den inversen Gluonpropagator  $\omega$  verwenden wir standardmäßig die Gribovformel (3.21), was die Ausführung numerischer Integrationen auch für den Gluonsektor erheblich erleichtert. Im reinen Yang–Mills-Sektor hat sich zudem gezeigt, daß die Verwendung der selbstkonsistenten Nulltemperatur-Lösung anstelle der Gribovformel nur zu einer unwesentlichen Änderung der kritischen Temperatur führt [140].

Für die folgende Rechnung ist eine Darstellung des effektiven Potentials in dimensionslosen Variablen sinnvoll. Wir ersetzen daher das Hintergrundfeld durch

$$\bar{a} \equiv \frac{\beta a}{2\pi} \quad (5.201)$$



**Abbildung 5.6:** (a) Effektives Potential des reinen Yang–Mills-Sektors (5.195) für die Eichgruppe  $SU(2)$  bei Temperaturen zwischen 382 MeV und 868 MeV (von unten nach oben) als Funktion des dimensionslosen Hintergrundfelds (5.201). (b) Fermionisches effektives Potential (5.193) für die Kopplung  $g = 2.07$  und verschiedene Temperaturen.

und betrachten das effektive Potential

$$\bar{e}[\beta, \bar{a}] \equiv \beta^4 \bar{e}[\beta, a = 2\pi\bar{a}/\beta], \quad (5.202)$$

dessen Minima als Funktion von  $\bar{a}$  äquivalent zu denjenigen des Potentials (5.186) sind. Für den UV-Limes dieses Potentials ergibt sich unabhängig von der Temperatur

$$\bar{e}_{\text{UV}}[\beta, \bar{a}] = \frac{2\pi^2}{3} \sum_{A, \bar{a} \cdot \sigma_A \geq 0} (\bar{a} \cdot \sigma_A)^2 [\bar{a} \cdot \sigma_A - 1]^2 + \frac{\pi^2}{3} \sum_m \left[ \frac{1}{2} (\bar{a} \cdot \mu_m)^2 - (\bar{a} \cdot \mu_m)^4 \right], \quad (5.203)$$

was aufgrund der Beschränkung (5.189) positiv semidefinit ist und sein Minimum für  $\bar{a} = a = 0$  annimmt. Für den Polyakov-Loop (5.197) bedeutet das  $P[a = 0] = \text{Sp}(\text{id})/N_C = 1 \neq 0$  und das System befindet sich in der nicht-zentrumssymmetrischen, deconfinierten Phase. Da der UV-Anteil des Potentials bei hohen Temperaturen dominant ist, entspricht das den Erwartungen.

Wir betrachten das effektive Potential (5.202) zunächst für  $SU(2)$ . Mit den in Anhang A.2 gegebenen Wurzeln und Gewichten dieser Gruppe folgt, daß sowohl der bosonische, als auch der fermionische Anteil des Potentials periodische Funktionen des Hintergrundfelds  $\bar{a}^3$  sind, wobei die Periode des fermionischen Teils doppelt so groß wie die des Bosonischen ist. Da der fermionische Anteil eine gerade Funktion in  $\bar{a}$  ist, siehe Gleichung (5.194), läßt sich das Hintergrundeichfeld dennoch ohne Informationsverlust gemäß der bosonischen Periode auf

$$0 \leq \bar{a}^3 \leq 1 \quad (5.204)$$

einschränken. Für die numerische Auswertung greifen wir auf die Potentiale in Abhängigkeit der Matsubarafrequenzen, Gleichung (5.193) und (5.195), zurück, da diese eine höhere numerische Stabilität besitzen als die Poisson-resummierten Gleichungen.<sup>85</sup> Das sich daraus

<sup>85</sup>Das betrifft vor allem den bosonischen Anteil, in welchem die Summe über  $l$  nur langsam konvergiert, da verglichen mit dem fermionischen Funktional kein Faktor  $(-1)^l$  auftritt.



ergebende bosonische effektive Potential (5.195) ist in Abbildung 5.6 (a) für verschiedene Temperaturen dargestellt. Neben der Periodizität erkennt man, daß das Minimum des Potentials von  $\bar{a}^3 = 0.5$  für niedrige Temperaturen in Richtung  $\bar{a}^3 = 0$  (bzw.  $\bar{a}^3 = 1$ ) für höhere Temperaturen wandert. Da das Potential in der Umgebung von  $\bar{a}^3 = 0.5$  zunächst sehr flach wird, entspricht dies einem Phasenübergang zweiter Ordnung, siehe unten. Abbildung 5.6 (b) zeigt die analoge Darstellung des fermionischen effektiven Potentials (5.193). Im Unterschied zum bosonischen Potential besitzt dieses unabhängig von der Temperatur ein Minimum bei  $\bar{a}^3 = 0$ , d.h. das reine Quarksystem würde sich stets in der deconfinierten Phase befinden – was sinnvoll ist, da der Farbeinschluß eine Eigenschaft der Gluonen ist. Das fermionische Potential zeigt im dargestellten Bereich<sup>86</sup> so gut wie keine Temperaturabhängigkeit und wird stark von seinem UV-Anteil dominiert. Weiterhin erkennt man an Abbildung 5.6 (b), daß es die doppelte Periode des bosonischen Potentials besitzt.

Abbildung 5.7 (a) zeigt das gesamte effektive Potential in dimensionslosen Einheiten (5.202). Wie im reinen Yang–Mills-Sektor gilt, daß das Potentialminimum bei steigender Temperatur in Richtung  $\bar{a}^3 = 0$  verschoben wird. Durch die Einbeziehung der Fermionen vollzieht sich dieser Wandel gleichmäßiger, was ein Zeichen für einen Crossover-Übergang ist. Weiterhin verschwindet infolge der durch die Fermionen vergrößerten Periode das entartete zweite Potentialminimum bei  $\bar{a}^3 > 0.5$ . In Abbildung 5.7 (b) ist zu Vergleichszwecken das effektive Potential bei Vernachlässigung der Quark-Gluon-Kopplung sowie des UV-Anteils des Coulombpotentials ( $g = 0$ ) gezeigt. Dessen Verlauf entspricht beinahe vollkommen demjenigen für  $g = 2.07$ . Die Ursache für die schwache Abhängigkeit von der Stärke der Kopplung  $g$  liegt in der Dominanz des ( $g$ -unabhängigen) UV-Anteils des fermionischen effektiven Potentials, vgl. Abbildung 5.6 (b). Eine Änderung der Kopplung beeinflusst lediglich den stark unterdrückten Restbeitrag, d.h. die ersten beiden Terme in Gleichung (5.193). Tatsächlich sind aber auch in diesen Termen die Auswirkungen einer geänderten Kopplung gering: Wie wir in Abschnitt 3.4 gesehen hatten, beeinflusst die Kopplung primär das UV-Verhalten der Massenfunktion  $M$ . In das effektive Potential (5.193) geht  $M$  aber lediglich in Form der Quasiteilchenenergie (3.122) ein, wo sie im UV unterdrückt ist. Abbildung 5.7 (c) zeigt schließlich den UV-Limes des effektiven Potentials, Gleichung (5.203). Wie bereits festgestellt, besitzt dieser in dimensionslosen Einheiten keine Temperaturabhängigkeit.

Die numerische Auswertung des effektiven Potentials (5.202) für die Eichgruppe  $SU(3)$  läßt sich mithilfe der in Anhang A.2 gegebenen Ausdrücke für Wurzel- und Gewichtsvektoren analog zum Fall  $SU(2)$  durchführen. Aufgrund des höheren Rangs  $r = 2$  von  $SU(3)$  ist das effektive Potential ein Funktional von zwei Hintergrundeichfeldkomponenten  $a^3$  und  $a^8$ , welche sich für eine vollständige Darstellung auf die Perioden

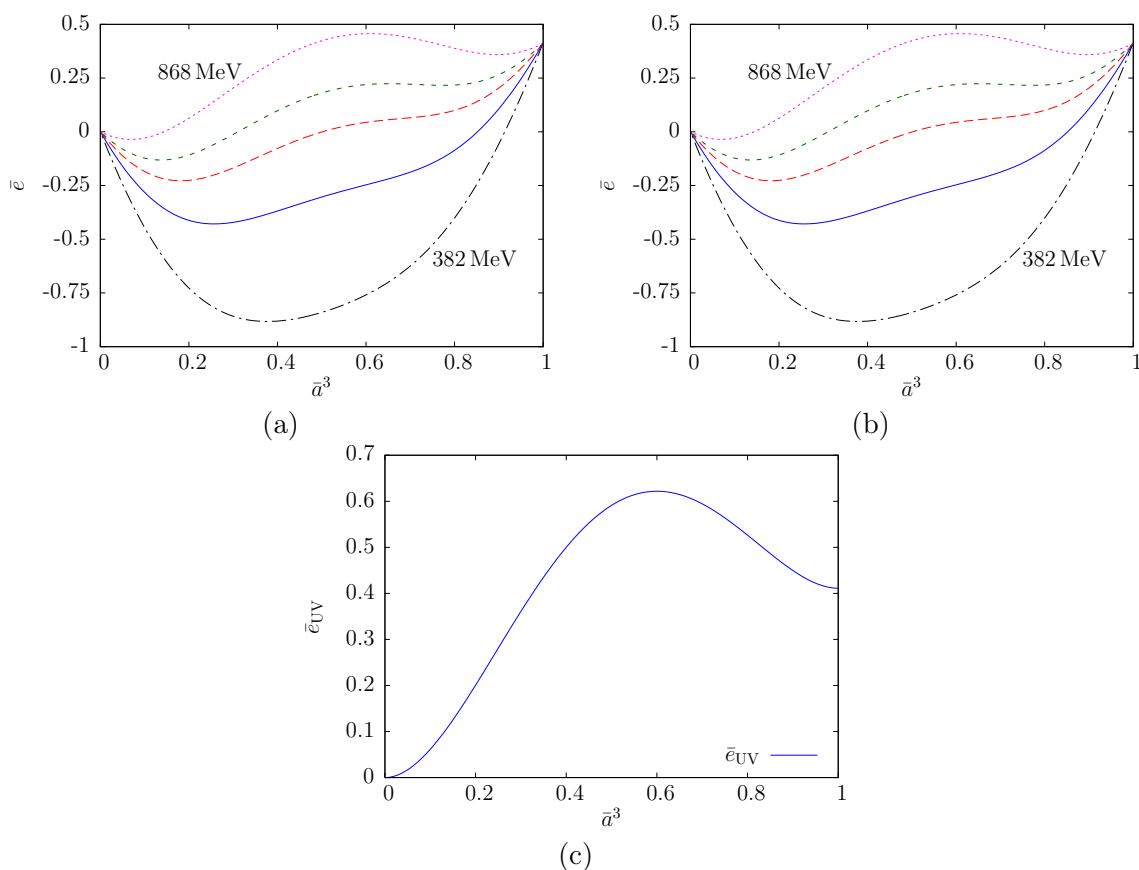
$$0 \leq \bar{a}^3 \leq 2, \quad (5.205a)$$

$$0 \leq \bar{a}^8 \leq 2\sqrt{3} \quad (5.205b)$$

einschränken lassen.<sup>87</sup> Da das effektive Potential der Summe dreier  $SU(2)$  Potentiale entspricht, verzichten wir auf die separate Betrachtung der bosonischen und fermionischen

<sup>86</sup>Im Limes  $T \rightarrow 0$  verschwindet das fermionische Potential jedoch per Konstruktion: Da der Nulltemperaturlimes wie gezeigt unabhängig vom Hintergrundfeld ist, folgt dies unmittelbar aus dem Abzug des Limes  $a = 0$ . Auch die Multiplikation mit  $\beta^4$  ändert hieran nichts.

<sup>87</sup>Im Gegensatz zu  $SU(2)$  entspricht die aus dem fermionischen effektiven Potential resultierende Periode nicht dem Doppelten der Bosonischen. Die angegebene Periode wurde so gewählt, daß das gesamte effektive Potential periodisch ist.

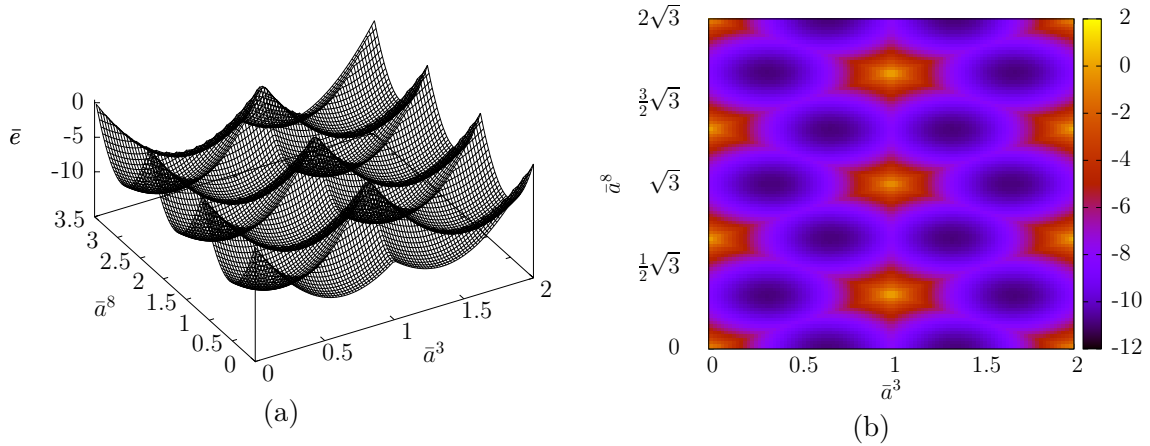


**Abbildung 5.7:** (a) Effektives Potential für die Eichgruppe  $SU(2)$  bei verschiedenen Temperaturen zwischen 382 MeV und 868 MeV (von unten nach oben) als Funktion des dimensionslosen Hintergrundfelds (5.201). Die Kopplung ist auf  $g = 2.07$  fixiert. (b) Wie Abbildung (a) bei Vernachlässigung von Quark-Gluon-Kopplung und UV-Coulombpotential ( $g = 0$ ). (c) UV-Anteil des reskalierten effektiven Potentials (5.203) für  $SU(2)$  mit auf  $g = 2.07$  fixierter Kopplung.

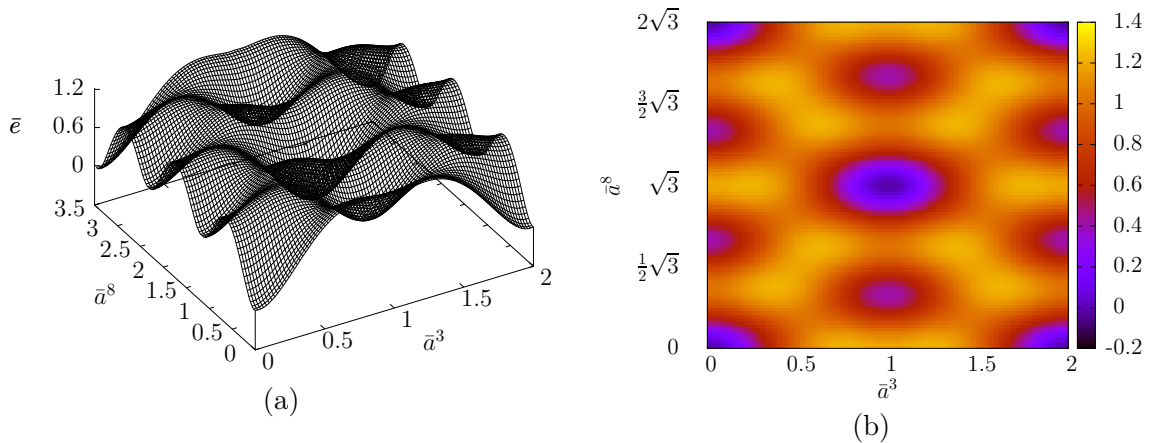
Anteile des Potentials und widmen uns direkt dem vollständigen Potential (5.202): Abbildung 5.8 zeigt das effektive Potential bei einer niedrigen Temperatur (225 MeV) unterhalb des pseudokritischen Werts  $T_c$  in einer dreidimensionalen Darstellung sowie als Heatmap. Bei Erhöhung der Temperatur deutlich oberhalb von  $T_c$  (1.80 GeV) ergibt sich für das Potential der in Abbildung 5.9 gezeigte Verlauf. Neben der Verschiebung der Lage der Maxima und Minima bei Erhöhung der Temperatur läßt sich aus den beiden Abbildungen darauf schließen, daß das absolute Minimum – u.a. – stets entlang des Schnittes  $\bar{a}^8 = 0$  zu finden ist. Die Beschränkung auf diesen Schnitt vereinfacht die Berechnungen erheblich, da sich das effektive Potential dadurch als die Summe aus einem vollständigen und zwei rein bosonischen  $SU(2)$ -Potentials schreiben läßt,

$$\bar{e}^{SU(3)}[\beta, \bar{a}^3, \bar{a}^8 = 0] = \bar{e}^{SU(2)}[\beta, \bar{a}^3] + 2 \bar{e}_{YM}^{SU(2)}[\beta, \bar{a}^3/2]. \quad (5.206)$$

Die Darstellung dieses Potentials bei unterschiedlichen Temperaturen ist in Abbildung

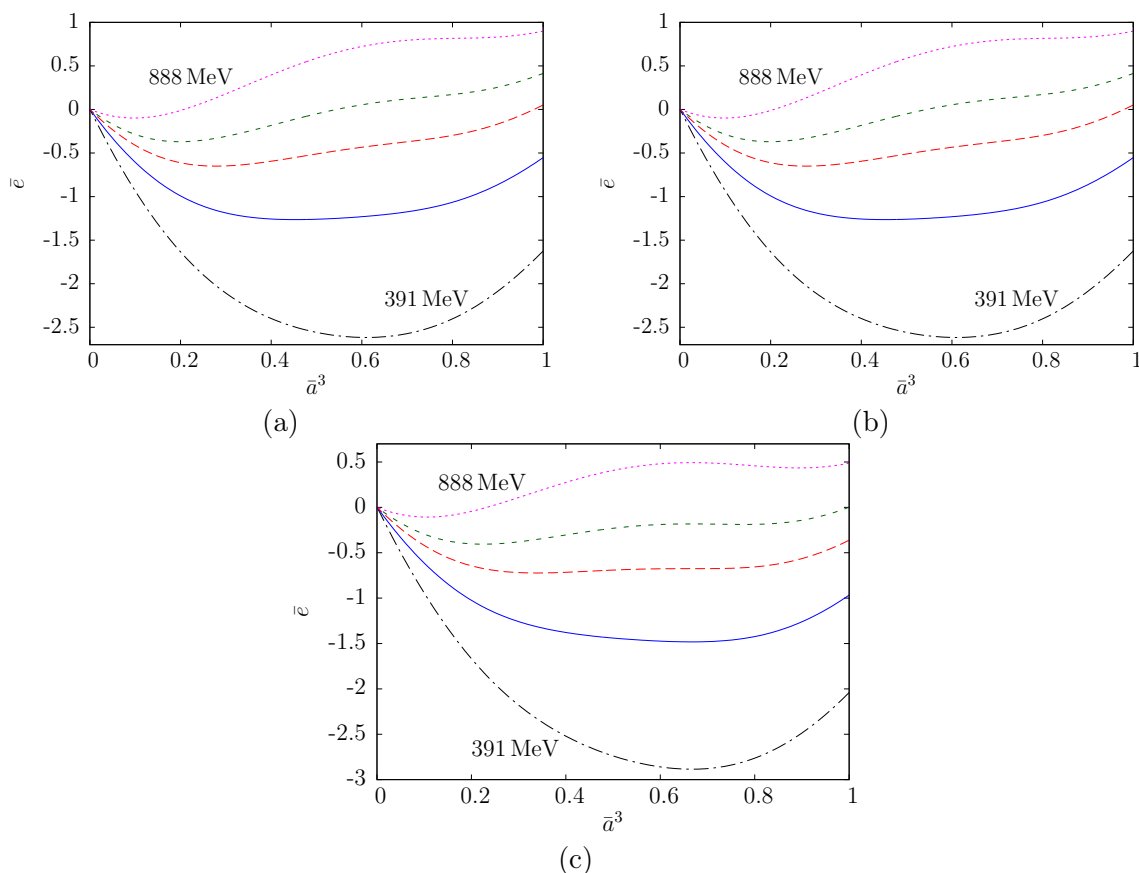


**Abbildung 5.8:** Effektives Potential für die Eichgruppe  $SU(3)$  als Funktion der dimensionslosen Hintergrundfeldkomponenten (5.201), (a) in dreidimensionaler Darstellung und (b) als Heatmap. Die Kopplung ist auf  $g = 2.07$  fixiert, die Temperatur liegt mit  $T = 225$  MeV unterhalb des pseudokritischen Werts.



**Abbildung 5.9:** Wie Abbildung 5.8 für eine Temperatur oberhalb des pseudokritischen Werts ( $T = 1.80$  GeV).

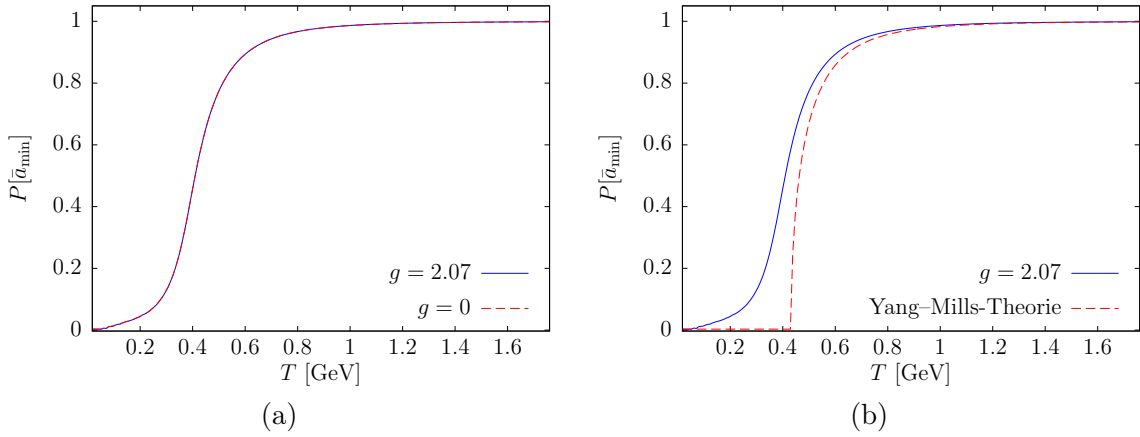
5.10 (a) zu finden und zeigt wie für  $SU(2)$  eine kontinuierliche Verschiebung des Potentialminimums, nun von  $\bar{a}^3 = 2/3$  bei niedrigen zu  $\bar{a}^3 = 0$  bei hohen Temperaturen. Am Polyakov-Loop (5.200) erkennen wir, daß dies der Aufhebung des Farbeinschlusses entspricht. Bei Vernachlässigung von Quark-Gluon-Kopplung und UV-Anteil des Coulombpotentials ( $g = 0$ ) ergibt sich ein sehr ähnliches Bild, welches in Abbildung 5.10 (b) dargestellt ist. Wird der Quarksektor gänzlich vernachlässigt, so finden wir den in Abbildung 5.10 (c) gezeigten Potentialverlauf. Da das Potentialminimum völlig verflacht bevor es sich von  $\bar{a}^3 = 2/3$  wegbewegt, ergibt sich im reinen Yang-Mills-Sektor anstelle des Crossovers ein Phasenübergang erster Ordnung.



**Abbildung 5.10:** (a) Effektives Potential für die Eichgruppe  $SU(3)$  bei verschiedenen Temperaturen zwischen 391 MeV und 888 MeV (von unten nach oben) als Funktion des dimensionslosen Hintergrundfelds (5.201) für den Schnitt  $\bar{a}^8 = 0$ . Die Kopplung ist auf  $g = 2.07$  fixiert. (b) wie Abbildung (a) bei Vernachlässigung von Quark-Gluon-Kopplung und UV-Coulombpotential ( $g = 0$ ). (c) wie Abbildung (a) für den reinen Yang-Mills-Sektor.

### Polyakov-Loop

Zur Bestimmung der Temperaturabhängigkeit des Polyakov-Loops (5.197) muß das Minimum des effektiven Potentials (5.202) als Funktion des Hintergrundfelds (5.201) bei verschiedenen Temperaturen bestimmt und in Gleichung (5.198) für  $SU(2)$  bzw. (5.200) für  $SU(3)$  eingesetzt werden. Mithilfe des soeben berechneten Potentials ergibt sich für  $SU(2)$  der in Abbildung 5.11 dargestellte Verlauf. Dabei vergleichen wir das Ergebnis bei einer Kopplung von  $g = 2.07$  mit demjenigen bei Vernachlässigung von Quark-Gluon-Kopplung und UV-Coulombpotential [Unterabbildung (a)] sowie mit dem Resultat des reinen Yang-Mills-Sektors [Unterabbildung (b)]. Während die Kurven mit und ohne Kopplung einen optisch völlig äquivalenten Verlauf und einen Crossover-Übergang zeigen, unterscheidet sich das Ergebnis des Yang-Mills-Sektors mit einem Phasenübergang zweiter Ordnung deutlich. Da die Berücksichtigung von Quarks die Zentrumssymmetrie explizit bricht und zu einem endlichen Wert der freien Energie in Gleichung (2.131) führt, war die Änderung

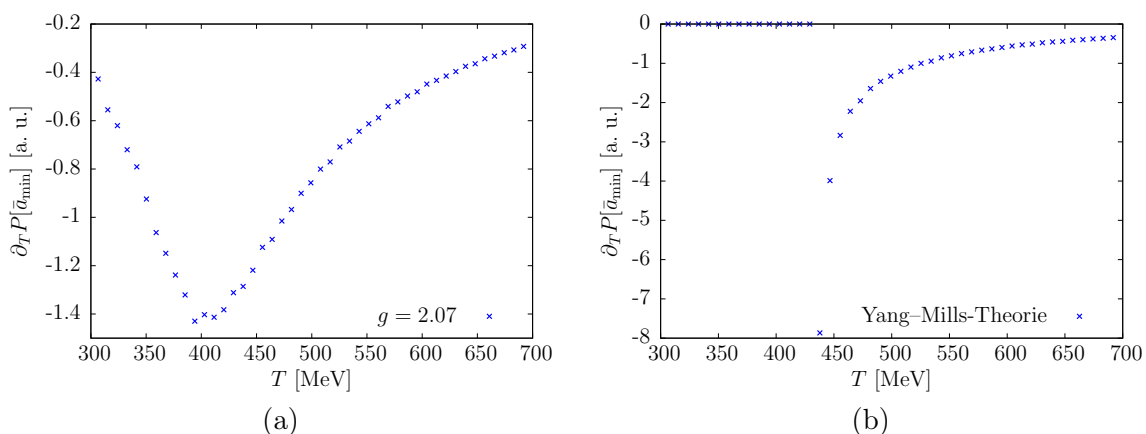


**Abbildung 5.11:** Verlauf des Polyakov-Loops  $P[\bar{a}^3 = \bar{a}_{\min}]$  (5.198) als Funktion der Temperatur  $T$  für die Eichgruppe  $SU(2)$ . (a) Vergleich der Ergebnisse bei einer Quark-Gluon-Kopplung von  $g = 2.07$  (durchgezogene Linie) und bei Vernachlässigung der Kopplung (gestrichelte Linie), (b) Vergleich der Ergebnisse bei einer Quark-Gluon-Kopplung von  $g = 2.07$  (durchgezogene Linie) mit denen des reinen Yang-Mills-Sektors (gestrichelte Linie).

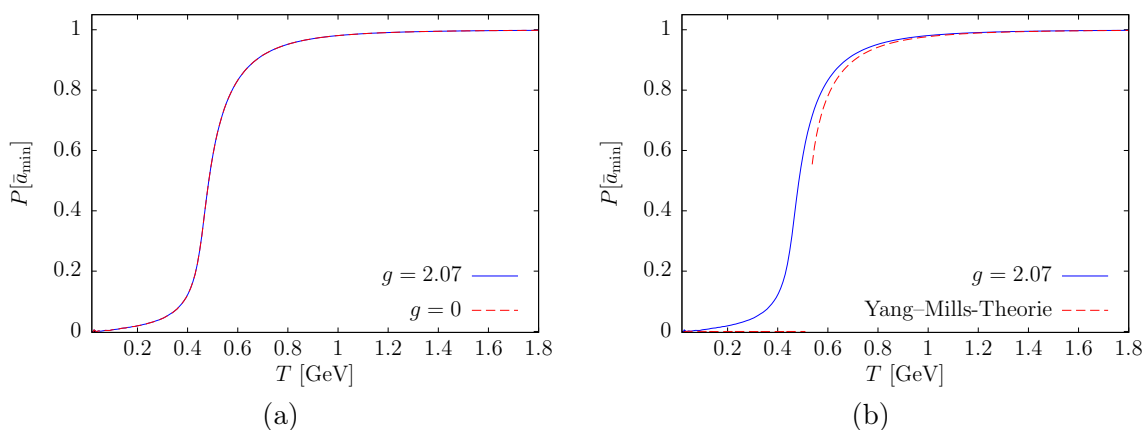
der Ordnung des Phasenübergangs genau so erwartbar.

Zur Ermittlung der (pseudo-)kritischen Phasenübergangstemperatur bestimmen wir wie in Abschnitt 5.1 den Wendepunkt des Ordnungsparameters als Funktion der Temperatur. Der Verlauf der numerisch bestimmten Ableitung des Polyakov-Loops ist in Abbildung 5.12 für die gekoppelte Theorie sowie den reinen Yang-Mills-Sektor dargestellt. Anhand des Minimums der Ableitung ergibt sich für die gekoppelte Theorie mit  $g = 2.07$  (sowie im Limes  $g = 0$ ) eine (pseudo-)kritische Temperatur von  $T_c \approx 405$  MeV (mit größeren numerischen Unsicherheiten), während wir für die reine Yang-Mills-Theorie  $T_c \approx 438$  MeV erhalten. Da Quarks der Fermistatistik gehorchen und daher dem Farbeinschluß entgegen wirken sollten, entspricht die Absenkung der Phasenübergangstemperatur bei Berücksichtigung des Quarksektors – wie auch das Ausschmieren des Übergangs zu einem Crossover – dem erwarteten physikalischen Bild. Daß der Wert der Kopplung  $g$  dabei keinerlei wahrnehmbaren Effekt besitzt, ist etwas verwunderlich und Folge der Dominanz des UV-Anteils des fermionischen effektiven Potentials. Die Berücksichtigung fermionischer Zweischleifenbeiträge dürfte insbesondere an diesem Punkt zu Veränderungen führen, wobei die Effekte der Kopplung aber auch bei der Betrachtung des dualen Kondensats nicht wesentlich für die kritischen Temperaturen waren, vgl. Abschnitt 5.1. Generell gilt, daß die soeben bestimmten (pseudo-)kritischen Temperaturen verglichen mit den Ergebnissen aus Gitter- und alternativen Kontinuumsrechnungen von 275 – 310 MeV für den reinen Yang-Mills-Sektor [80, 88, 125] und 303 MeV für ein gekoppeltes Quark-Gluon-System<sup>88</sup> [129] erheblich zu hoch sind. Das läßt sich sowohl auf die Vernachlässigung der skalaren Krümmung  $\chi$  und der Zweischleifenbeiträge des fermionischen Energiefunktionals, als auch auf die Verwendung der Nulltemperaturlösungen für Massenfunktion und inversen Gluonpropagator sowie den Verzicht auf die Quark-Gluon-Rückkopplung zurückführen. Insbesondere die Berücksichtigung der Krümmung führt im Yang-Mills-Sektor zu einer deutlichen Absenkung der

<sup>88</sup>Der angegebene Wert bezieht sich auf ein System mit chiralen Quarks bei Vernachlässigung der Rückkopplungseffekte der Quarks auf die Gluonen.



**Abbildung 5.12:** Ableitung des Polyakov-Loops (5.198) als Funktion der Temperatur  $T$  für die Eichgruppe  $SU(2)$ : (a) Für eine Quark-Gluon-Kopplung von  $g = 2.07$  und (b) für den reinen Yang-Mills-Sektor.



**Abbildung 5.13:** Wie Abbildung 5.11 für die Eichgruppe  $SU(3)$ .

kritischen Temperatur bis in den erwarteten Bereich [139, 140].

Die analoge Auswertung des Polyakov-Loops für  $SU(3)$  liefert den in Abbildung 5.13 gezeigten Verlauf. Während sich im reinen Yang-Mills-Sektor ein Phasenübergang erster Ordnung ergibt, führt die Einbeziehung von Quarks zu einem Crossover-Übergang. Beides deckt sich mit den Erwartungen, vgl. die Anmerkungen zu  $SU(2)$  sowie das Columbiadiagramm, Abbildung 2.4. Für die Ableitung des Polyakov-Loops findet sich das in Abbildung 5.14 dargestellte Ergebnis. Aus dem Minimum der Ableitung folgt für die (pseudo-)kritische Temperatur bei einer Kopplung von  $g = 2.07$  (sowie im Limes  $g = 0$ )  $T_c \approx 475$  MeV und im reinen Yang-Mills-Sektor  $T_c \approx 525$  MeV. Die Einbeziehung der Quarks senkt wie für  $SU(2)$  die Übergangstemperatur ab, wobei die gefundenen Werte deutlich von den Referenzwerten von etwa 165 MeV für die volle QCD mit massiven Quarks [72, 73] und 275 – 285 MeV [81, 125, 147] für den Yang-Mills-Sektor abweichen.

Trotz der zu hohen Werte für die pseudokritische Temperatur sowohl für  $SU(2)$ , als auch für  $SU(3)$  läßt sich festhalten, daß die Berücksichtigung des Quarksektors den erwarteten

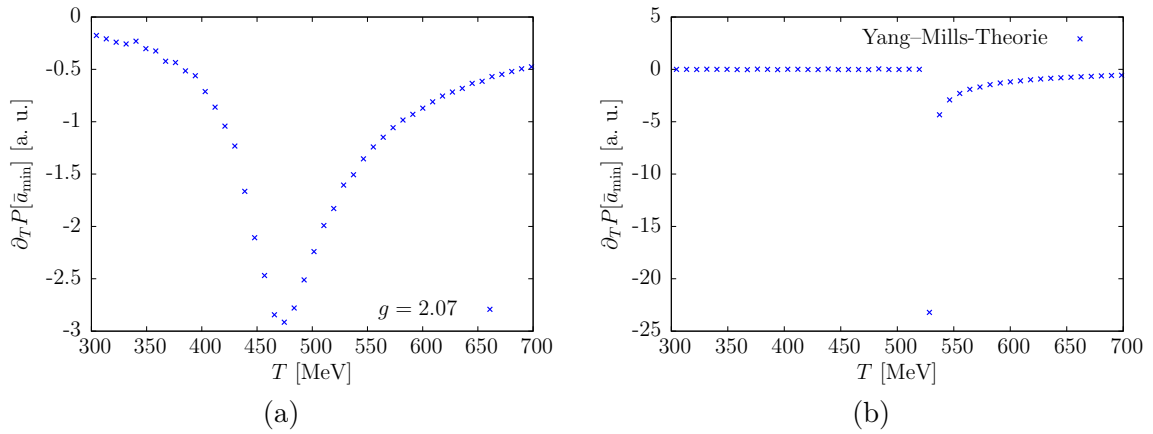


Abbildung 5.14: Wie Abbildung 5.12 für die Eichgruppe  $SU(3)$ .

Effekt besitzt: In beiden Fällen wird der Übergang zu einem Crossover ausgeschmied und die Übergangstemperatur verglichen mit dem Yang-Mills-Sektor deutlich um etwa 8–10% erniedrigt ( $SU(2)$  etwa 30 MeV,  $SU(3)$  etwa 50 MeV). Daß die (pseudo-)kritischen Temperaturen generell erheblich über den Referenzwerten liegen, ist aufgrund der Vernachlässigung der skalaren Krümmung  $\chi$  wenig überraschend. Nehmen wir die Ergebnisse des Yang-Mills-Sektors bei Berücksichtigung von  $\chi$ ,  $T_c \approx 270$  MeV für  $SU(2)$  und  $T_c \approx 280$  MeV für  $SU(3)$  [140], als Ausgangspunkt, so ergibt sich bei der von uns gefundenen Verringerung der pseudokritischen Temperaturen um etwa 10% durch Berücksichtigung der Quark-Gluon-Kopplung bereits ein deutlich realistischerer Wert. Dieser sollte sich bei Verwendung der selbstkonsistenten Lösungen der temperaturabhängigen Bewegungsgleichungen für Quarkmassenfunktion und inversen Gluonpropagator anstelle der Nulltemperaturlimites sowie bei Berücksichtigung der Quark-Gluon-Rückkopplung und Zweischleifenbeiträgen zum Energiefunktional noch weiter verbessern lassen. Das stellt einen interessanten Ausgangspunkt für weitere Folgeuntersuchungen dar.





# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben uns in dieser Arbeit mit der Weiterentwicklung des Variationszugangs zur QCD in Hamilton'scher Formulierung in Coulombbeichung sowie dessen Anwendung im Nulltemperaturlimes und bei endlichen Temperaturen und chemischen Potentialen befaßt.

Die Formulierung der QCD im Hamilton'schen Zugang war Gegenstand des einführenden **Kapitels 2**, in welchem wir auch auf unser gegenwärtiges Verständnis vom QCD-Phasendiagramm eingegangen sind. Das Studium der faszinierenden Niederenergieeffekte der QCD sowie der bei endlichen Temperaturen bzw. chemischen Potentialen erwarteten Phasenübergänge ist nur in nicht-perturbativen Zugängen möglich und war eine wesentliche Motivation für diese Arbeit. In **Kapitel 3** haben wir dabei den ursprünglich in Referenz [18, 19, 21, 22] für den Yang–Mills-Sektor entwickelten und in Referenz [23–25] auf die volle QCD erweiterten Variationszugang im Nulltemperaturlimes aufgegriffen und in mehreren Punkten wesentlich verbessert. Zunächst wurde die in früheren Arbeiten vernachlässigte Wechselwirkung des Yang–Mills-Anteils des QCD-Hamiltonians mit dem fermionischen Teil des Vakuumwellenfunktionals voll berücksichtigt, was zu zusätzlichen Beiträgen in den Bewegungsgleichungen von Quarks und Gluonen führt. Diese sind von derselben Größenordnung wie die Beiträge aus der Quark-Gluon-Kopplung im fermionischen Dirac-Hamiltonian. Weiterhin wurde erstmals auch im Quarksektor der UV-Anteil des Farb-Coulombpotentials berücksichtigt. Unter Verzicht auf Näherungen der Vorgängerarbeiten [23–25] konnte die Berechnung des Energieerwartungswerts konsistent auf Zweischleifenniveau durchgeführt werden. Im Ansatz für den fermionischen Teil des Vakuumwellenfunktionals wurde schließlich mithilfe eines weiteren vektoriiellen Variationskerns eine zusätzliche Diracstruktur berücksichtigt. Deren Notwendigkeit läßt sich motivieren, indem die Auswirkungen der Quark-Gluon-Kopplung als störungstheoretische Korrektur eines nicht-trivialen BCS-Wellenfunktionals – also des effektiven Vakuums eines Systems von Quarks die über ein nichtabelsches Farb-Coulombpotential wechselwirken – betrachtet wird. Der zusätzliche Vektorkern führt nicht nur zu einer Vergrößerung des Raums der für die Variation verfügbaren Wellenfunktionale, sondern auch zum Verschwinden sämtlicher linearer UV-Divergenzen aus der Quarkgaggleichung, womit seine Berücksichtigung eine deutliche qualitative Verbesserung des Ansatzes darstellt. Das gibt Veranlassung, einen solchen Kern auch in alternativen Variationsrechnungen unter Verwendung von Dyson–Schwinger-Gleichungen einzusetzen.

Neben den linearen verschwinden infolge der Berücksichtigung des UV-Coulombpotentials auch die logarithmischen UV-Divergenzen aus der Quarkgaggleichung. Das impliziert zum einen, daß die Beiträge von UV-Coulombpotential und Quark-Gluon-Kopplung von derselben Größenordnung sein müssen und erlaubt zum anderen eine numerische Behandlung der Quarkgaggleichung ohne eine Renormierung durchführen zu müssen. Die Bestimmungsgleichungen der Vektorkerne lassen sich explizit auflösen und zeigen im Gegensatz

zu früheren Arbeiten das für einen Quark-Gluon-Vertex physikalisch korrekte Verhalten. In der gluonischen Gapgleichung äußert sich die Quark-Gluon-Kopplung durch Auftreten einer Quarkschleife. Generell stimmen sämtliche Bewegungsgleichungen sowie Quarkpropagator und Energieerwartungswert sowohl mit ihren störungstheoretischen Limites, als auch mit den Ergebnissen alternativer Variationsrechnungen unter Verwendung von Dyson-Schwinger-Gleichungen überein.

Die Quark- und Gluongapgleichung wurden unter Vernachlässigung der Rückkopplungseffekte der Quarks auf die Gluonen separiert und numerisch gelöst. Die gluonische Gleichung reduziert sich dabei auf das Ergebnis des Yang-Mills-Sektors und ihre Lösung läßt sich in guter Näherung durch den Gribovpropagator ersetzen. In der numerischen Lösung der Quarkgapgleichung zeigt sich, daß die zusätzlichen Beiträge infolge der Quark-Gluon-Kopplung sowie des UV-Coulombpotentials primär das Verhalten der effektiven Quarkmassenfunktion im UV beeinflussen, während das IR-Verhalten durch das farbeinschließende IR-Coulombpotential dominiert wird. Im verwendeten Hamilton'schen Zugang zur QCD in Coulombbeichung wird die physikalische Skala des Quarksektors in Form der Coulomb-Stringtension  $\sigma_C = 2.5\sigma$  durch den Gluonsektor vorgegeben, allerdings bleibt die Kopplungskonstante  $g$  unbestimmt. Wir nutzen diese deshalb, um das chirale Quarkkondensat auf seinen phänomenologischen Wert von  $(-235 \text{ MeV})^3$  zu fixieren, was  $g \approx 2.07$  erfordert. Das entspricht einem Wert der laufenden Kopplung bei mittleren bis hohen Impulsskalen. Während das chirale Kondensat gegenüber dem unter Vernachlässigung von Quark-Gluon-Kopplung und UV-Coulombpotential – d.h. im Limes  $g = 0$  – gefundenen Wert um 27% anwächst, verharrt der IR-Wert der effektiven Quarkmassenfunktion mit 135 MeV infolge der Dominanz des IR-Coulombpotentials annähernd auf dem bei  $g = 0$  erreichten Niveau. Vernachlässigen wir den farbeinschließenden Teil des Coulombpotentials, verschwindet das chirale Kondensat unabhängig vom Wert der Quark-Gluon-Kopplung und die chirale Symmetrie wird nicht spontan gebrochen. Man beachte dabei, daß wir in dieser Arbeit stets von masselosen Quarks ausgegangen sind.

In **Kapitel 4** wurde der Variationsansatz aus Kapitel 3 im Rahmen des Großkanonischen Ensembles auf endliche Temperaturen  $T$  und chemische Potentiale  $\mu$  ausgedehnt. Das stellt eine Erweiterung früherer Arbeiten im Yang-Mills- [87, 88] sowie im Quarksektor [109, 133–137] dar und bietet eine erste Beschreibung der vollen QCD bei endlichen Temperaturen und chemischen Potentialen im verwendeten Hamilton'schen Zugang. Dabei ist insbesondere der Bereich  $\mu \neq 0$  von großem Interesse, da er in Gitterrechnungen aufgrund des Vorzeichenproblems (bislang) nicht zugänglich ist. Die zur Berechnung des Großkanonischen Potentials erforderlichen Techniken wurden motiviert, wobei es erforderlich war, die Spur über den Fockraum in einen bosonischen und fermionischen Anteil aufzuteilen und den QCD-Hamiltonian im Dichteoperator durch entsprechende effektive Einteilchenoperatoren zu ersetzen. Aufgrund der Eichfeld-Abhängigkeit der fermionischen Quasiteilchenoperatoren gestaltet sich die explizite Auswertung des Großkanonischen Potentials sehr aufwendig, weshalb wir diese lediglich für den Fall einer vernachlässigten Quark-Gluon-Kopplung durchgeführt haben. Die dabei gefundenen Gleichungen stimmen mit den Ergebnissen früherer Arbeiten überein und implizieren die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie sowie die Aufhebung des Farbeinschlusses bei hinreichend hohen Temperaturen bzw. chemischen Potentialen. Aufgrund allgemeiner Betrachtungen läßt sich darauf schließen, daß dies auch in der gekoppelten Theorie der Fall sein muß.

Alternativ zum Großkanonischen Ensemble lassen sich endliche Temperaturen und chemische Potentiale durch Kompaktifizieren einer räumlichen Dimension einführen [67]. Die-

ser Zugang wurde von uns in **Kapitel 5** verfolgt und besitzt gegenüber dem üblichen kanonischen Zugang aus Kapitel 4 einige entscheidende Vorteile: Zunächst erlaubt er den direkten Zugriff auf das duale Quarkkondensat sowie den Polyakov-Loop als Ordnungsparemeter für den Farbeinschluß, während diese im Großkanonischen Ensemble unzugänglich sind. Weiterhin läßt sich auf die im Großkanonischen Ensemble erforderliche Näherung durch Verwenden effektiver Einteilchenoperatoren im Dichteoperator verzichten und auch die Berechnung von Erwartungswerten gestaltet sich erheblich einfacher. Wir haben diesen Zugang in der vorliegenden Arbeit daher bevorzugt behandelt. In Abschnitt 5.1 wurden zunächst die Bewegungsgleichungen auf der kompaktifizierten räumlichen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$  zur Beschreibung der QCD in Coulombbeichung bei endlichen Temperaturen hergeleitet. Dabei erfüllen die Eichfelder wie in der Yang–Mills-Theorie [138] periodische Randbedingungen, während für die Quarkfelder  $U(1)$ -wertige Randbedingungen angesetzt werden, welche die Auswertung des dualen Quarkkondensats gestatten. Die Bestimmung des Energieerwartungswerts auf Zweischleifenniveau sowie der Bewegungsgleichungen gestaltet sich analog zu Kapitel 3, wobei wir in einer ersten Näherung den Gluonpropagator durch seinen für große Impulse – und damit in der Quarkgagleichung – dominanten Nulltemperaturlimes ersetzt haben. Die so gefundene, endliche Poisson-resummierte Quarkgagleichung wurde in einer weiteren Näherung ebenfalls auf ihren Nulltemperaturlimes reduziert, womit die Auswertung von dualem und chiralem Quarkkondensat unter Verwendung der numerischen Lösung aus Kapitel 3 möglich wurde. Beide Kondensate zeigen – vermutlich infolge dieser Näherung – einen Crossover-Phasenübergang, wobei die pseudokritischen Temperaturen mit  $T_\chi \approx 170 \text{ MeV}$  für die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie bzw.  $T_c \approx 198 \text{ MeV}$  für die Aufhebung des Farbeinschlusses in recht guter Übereinstimmung mit Gitterdaten ( $T_\chi \approx 155 \text{ MeV}$ ,  $T_c \approx 165 \text{ MeV}$ ) sind. Daneben besitzt das chirale Quarkkondensat für mittlere und hohe Temperaturen eine starke Abhängigkeit von der Phase der  $U(1)$ -wertigen Randbedingung der Quarkfelder. Im Limes  $g \rightarrow 0$  reduzieren sich die pseudokritischen Temperaturen geringfügig auf  $T_\chi \approx 165 \text{ MeV}$  und  $T_c \approx 190 \text{ MeV}$ .

In Abschnitt 5.2 wurde der alternative Hamilton’sche Zugang zu endlichen Temperaturen schließlich zur Beschreibung der QCD in Hintergrundeichung verwendet, was eine Erweiterung früherer, auf den Yang–Mills-Sektor beschränkter Arbeiten [139, 140] darstellt. Nach der Motivation des QCD-Hamiltonians in Hintergrundeichung haben wir den Variationszugang zunächst im Nulltemperaturlimes betrachtet und konnten dabei zeigen, daß sich das Hintergrundeichfeld lediglich in einer Verschiebung der Impulsargumente äußert. Unter denselben Näherungen wie in Abschnitt 5.1 ließen sich diese Ergebnisse des Nulltemperaturlimes auf die Theorie bei endlichen Temperaturen übertragen. Das effektive Potential des Polyakov-Loops wurde auf Einschleifenniveau bestimmt, wobei ein selbstkonsistentes Energiefunktional – welches sich nach Einsetzen der Bewegungsgleichungen in den Energieerwartungswert ergibt – zugrunde gelegt wurde. Die kritische Temperatur des Deconfinement-Übergangs läßt sich aus dem Minimum des effektiven Potentials als Funktion des Hintergrundeichfelds bestimmen. Die Beschränkung auf fermionische Einschleifenbeiträge macht allerdings einen Verzicht auf die skalare Krümmung im bosonischen Anteil erforderlich, wodurch die Phasenübergangstemperaturen widernatürlich erhöht werden [140]. Die Berücksichtigung des Quarksektors schmiert den in der reinen Yang–Mills-Theorie für die Eichgruppe  $SU(2)/SU(3)$  gefundenen Deconfinement-Phasenübergang zweiter/erster Ordnung wie erhofft zu einem Crossover-Übergang aus und reduziert die kritischen Temperaturen um etwa 10 % von  $T_c \approx 438 \text{ MeV}/T_c \approx 525 \text{ MeV}$  auf  $T_c \approx 405 \text{ MeV}/T_c \approx 475 \text{ MeV}$ . Diese Absenkung entspricht dem erwarteten physikalischen Effekt durch die Einbeziehung der

dem Pauliprinzip gehorchenden Quarks. Im Limes  $g \rightarrow 0$  ergeben sich aufgrund des auf Einschleifenniveau dominanten,  $g$ -unabhängigen UV-Anteils des fermionischen effektiven Potentials dieselben Übergangstemperaturen wie für  $g = 2.07$ . Die deutlich zu hohen kritischen Temperaturen werden durch den (bislang erforderlichen) Verzicht auf die skalare Krümmung sowie durch die Verwendung der Nulltemperaturpropagatoren und die Vernachlässigung von Rückkopplungseffekten verursacht. Legen wir die im Yang–Mills-Sektor [139, 140] gefundenen Werte zugrunde, so sollte sich durch Berücksichtigung der skalaren Krümmung eine deutliche Verbesserung ergeben.

Zusammenfassend zeigt der Variationszugang zur QCD in der vorliegenden Arbeit sowohl im Nulltemperaturlimes, als auch in einer ersten Betrachtung endlicher Temperaturen zufriedenstellende Ergebnisse. Für weitergehende Arbeiten und Verbesserungen ergeben sich dennoch einige Ansatzpunkte: Da die Verwendung der Nulltemperaturpropagatoren in der kompaktifizierten Theorie einige unphysikalische Eigenschaften mit sich bringt, sollte insbesondere die numerische Lösung der Bewegungsgleichungen auf  $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$  zu signifikanten Verbesserungen führen. Dabei wäre ein Vergleich der Ergebnisse der Gleichungen in Abhängigkeit der Matsubarafrequenzen und der Poisson-resummierten Form interessant. Zur Absenkung der sich aus dem Erwartungswert des Polyakov-Loops ergebenden Übergangstemperaturen wäre zudem die Einbeziehung von fermionischen Zweischleifentermen in das effektive Potential wünschenswert. Damit könnte möglicherweise auf die bisher erforderliche Vernachlässigung der skalaren Krümmung verzichtet werden. Ein weiterer naheliegender Schritt ist die vollständige Herleitung und numerische Lösung der sich aus dem Großkanonischen Ensemble ergebenden Bewegungsgleichungen. Deren Ergebnis ließe sich mit demjenigen der kompaktifizierten Theorie vergleichen, was einen Einblick in die Güte der – in beiden Fällen gemachten – Näherungen erlauben würde. Weiterhin bieten die großkanonischen Bewegungsgleichungen voraussichtlich den einfacheren Zugriff auf endliche chemische Potentiale, welche in Hinblick auf das QCD-Phasendiagramm und das Vorzeichenproblem von besonders großem Interesse sind. Dennoch steht auch die Einbeziehung chemischer Potentiale in die kompaktifizierte Theorie im Fokus zukünftiger Projekte. Eine grundsätzliche Verbesserung sowohl im Nulltemperaturlimes, als auch bei endlichen Temperaturen sollte sich schließlich bei Berücksichtigung von Rückkopplungseffekten der Quarks auf die Gluonen ergeben.

Die Erweiterung des betrachteten Modells auf massive Quarks wurde vor geraumer Zeit im Limes  $g = 0$  durchgeführt [108, 109, 136] und wäre für die volle Theorie bei endlichen Temperaturen und chemischen Potentialen ebenfalls von Interesse, da sich so die Ordnung des QCD-Phasenübergangs gemäß dem Columbiadiagramm studieren ließe. In diesem Zusammenhang wäre die Erweiterung auf mehrere Quarkflavours naheliegend. Generell ist auch die Einbeziehung weiterer Variationskerne denkbar, was infolge der dann aller Voraussicht nach nicht länger endlichen Quarkgapgleichung die Frage nach einer konsistenten Renormierung der Theorie nach sich zöge. Die in dieser Arbeit vorgestellte Methodik läßt sich schließlich nach notwendigen Veränderungen auf Probleme auf anderen räumlichen Mannigfaltigkeiten anwenden, beispielsweise sind momentan Untersuchungen für Graphen (zwei räumliche Dimensionen) im Gange und auch für das Schwingermodell (eine räumliche Dimension) möglich. Da das Variationsprinzip eines der grundlegenden Prinzipien der Physik darstellt, sind aber eventuell auch Anwendungen in anderen Gebieten möglich.

# Anhang A

## Explizite Form der Dirac- und Farbstruktur

### A.1 Explizite Form der Diracstruktur

#### A.1.1 Dirac- und Paulimatrizen

Für die Diracmatrizen verwenden wir die Darstellung

$$\beta = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & -\text{id} \end{pmatrix} = \gamma_0, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \beta\gamma_i, \quad (\text{A.1})$$

wobei  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , die Pauli'schen Spinmatrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

bezeichnet. Ferner führen wir die Matrix

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \text{id} \\ \text{id} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

ein. Aus den Vertauschungsrelationen der Paulimatrizen,

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\text{id}, \quad (\text{A.4})$$

folgt für die Diracmatrizen

$$[\alpha_i, \alpha_j] = 2i\varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}, \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}\text{id}. \quad (\text{A.5})$$

Außerdem gilt

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0, \quad \{\gamma_5, \beta\} = 0, \quad [\alpha_i, \gamma_5] = 0. \quad (\text{A.6})$$

Für die Gammamatrizen entsprechen diese Vertauschungsrelationen der Cliffordalgebra

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.7})$$

wobei  $g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  die Minkowskimetrik ist.

Für die Spuren der Diracmatrizen erhalten wir damit:

$$\text{Sp}\{\alpha_i\} = \text{Sp}\{\beta\} = \text{Sp}\{\gamma_5\} = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Sp}\{\alpha_i\alpha_j\} = 4\delta_{ij}, \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Sp}\{\alpha_i\beta\} = \text{Sp}\{\alpha_i\gamma_5\} = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\text{Sp}\{\alpha_i\alpha_j\alpha_k\alpha_l\} = 4[\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}], \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Sp}\{\alpha^m\beta^{2n+1}\} = \text{Sp}\{\delta^{2n+1}\} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Hierbei sind  $n, m \in \mathbb{N}_0$  und  $\delta$  bezeichnet eine beliebige Diracmatrix.

### A.1.2 Chirale Diracspinoren

Für den Fall chiraler, d.h. masseloser ( $m_Q = 0$ ) Teilchen besitzt die stationäre Diracgleichung mit dem Diracoperator (2.71) in Impulsdarstellung die Form

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \chi^s(\mathbf{p}) = e(\mathbf{p}) \chi^s(\mathbf{p}) \quad (\text{A.13a})$$

$$\Leftrightarrow (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^2 \chi^s(\mathbf{p}) = e(\mathbf{p}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \chi^s(\mathbf{p})$$

$$\Leftrightarrow p^2 \chi^s(\mathbf{p}) = e^2(\mathbf{p}) \chi^s(\mathbf{p}), \quad (\text{A.13b})$$

woran wir die beiden Eigenwerte  $e_{\pm}(\mathbf{p}) = \pm p$  ablesen können. Jeder von ihnen ist zweifach entartet, nämlich in eine Spin-Up und -Down Komponente. Zur besseren Unterscheidung bezeichnen wir Eigenspinore mit positivem Eigenwert mit  $u^s(\mathbf{p})$  und solche mit negativem Eigenwert mit  $v^s(-\mathbf{p})$ , d.h. es gilt

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} u^s(\mathbf{p}) = p u^s(\mathbf{p}), \quad (\text{A.14a})$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} v^s(-\mathbf{p}) = -p v^s(-\mathbf{p}). \quad (\text{A.14b})$$

Um die Spinore eindeutig zu charakterisieren, wählen wir sie so, daß sie nicht nur Eigenzustände zum Diracoperator, sondern gleichzeitig auch zum *Helizitätsoperator*

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \hat{p}_i = \gamma_5 \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \quad (\text{A.15})$$

sind. Anhand der Vertauschungsrelationen der Paulimatrizen (A.4) erkennen wir, daß

$$\left[ \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, \boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right] = 0 \quad (\text{A.16})$$

gilt und eine solche gemeinsame Eigenbasis existieren muß. Um diese zu finden, betrachten wir die Eigenwertgleichung

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \xi(\mathbf{p}, s) = s \xi(\mathbf{p}, s) \quad (\text{A.17a})$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{p}_3 & \hat{p}_1 - i\hat{p}_2 \\ \hat{p}_1 + i\hat{p}_2 & -\hat{p}_3 \end{pmatrix} \xi(\mathbf{p}, s) = s \xi(\mathbf{p}, s). \quad (\text{A.17b})$$

Analog zur Umformung der stationären Diracgleichung (A.13) sehen wir, daß die Eigenwerte durch  $s = \pm 1$  gegeben sind. Die Bestimmung der Eigenvektoren der Matrixgleichung (A.17) liefert als eine mögliche Lösung

$$\xi(\mathbf{p}, s = 1) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \hat{p}_3)}} \begin{pmatrix} 1 + \hat{p}_3 \\ \hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.18a})$$

$$\xi(\mathbf{p}, s = -1) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \hat{p}_3)}} \begin{pmatrix} -\hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \\ 1 + \hat{p}_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.18b})$$

Diese ist wohldefiniert für  $\hat{\mathbf{p}}^T \neq (0, 0, -1)$ , was jedoch kein Problem darstellt, da wir die Eigenvektoren für den kritischen Punkt aus denjenigen für  $\hat{\mathbf{p}}^T = (0, 0, 1)$  gewinnen können. Wir merken weiterhin an, daß aus der Eigenwertgleichung (A.17) ersichtlich ist,

daß  $\xi(-\mathbf{p}, s)$  Eigenvektor von  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$  mit Eigenwert  $-s$  ist. Ferner genügen die Eigenvektoren (A.18) der Normierungsbedingung

$$\xi^\dagger(\mathbf{p}, s)\xi(\mathbf{p}, t) = \delta^{st} \quad (\text{A.19})$$

und für die spektrale Projektion läßt sich

$$\xi(\mathbf{p}, s)\xi^\dagger(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{2}(\text{id} + s\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \quad (\text{A.20})$$

zeigen. Für den Erwartungswert eines beliebig orientierten Spins ergibt sich schließlich die Beziehung

$$\xi^\dagger(\mathbf{p}, s)\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}}\xi(\mathbf{p}, s) = s\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}}. \quad (\text{A.21})$$

Unter Verwendung dieser Ergebnisse folgt, daß wir durch

$$u^s(\mathbf{p}) = \sqrt{p} \begin{pmatrix} \xi(\mathbf{p}, s) \\ s\xi(\mathbf{p}, s) \end{pmatrix}, \quad v^s(-\mathbf{p}) = \sqrt{p} \begin{pmatrix} s\xi(\mathbf{p}, s) \\ -\xi(\mathbf{p}, s) \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

die gesuchten Eigenspinore des Diracoperators (2.71) erhalten. Diese sind gemäß

$$u^{s\dagger}(\mathbf{p})u^t(\mathbf{p}) = v^{s\dagger}(-\mathbf{p})v^t(-\mathbf{p}) = 2p\delta^{st}, \quad (\text{A.23a})$$

$$u^{s\dagger}(\mathbf{p})v^t(-\mathbf{p}) = v^{s\dagger}(-\mathbf{p})u^t(\mathbf{p}) = 0 \quad (\text{A.23b})$$

normiert und erfüllen die Beziehungen

$$\beta u^s(\mathbf{p}) = s v^s(-\mathbf{p}), \quad (\text{A.24a})$$

$$\beta v^s(-\mathbf{p}) = s u^s(\mathbf{p}), \quad (\text{A.24b})$$

$$\gamma_5 u^s(\mathbf{p}) = s u^s(\mathbf{p}), \quad (\text{A.24c})$$

$$\gamma_5 v^s(-\mathbf{p}) = -s v^s(-\mathbf{p}), \quad (\text{A.24d})$$

womit sich

$$\bar{u}^s(\mathbf{p})u^t(\mathbf{p}) \equiv u^{s\dagger}(\mathbf{p})\beta u^t(\mathbf{p}) = 0, \quad (\text{A.25a})$$

$$\bar{v}^s(-\mathbf{p})v^t(-\mathbf{p}) = 0 \quad (\text{A.25b})$$

ergibt. Für die spektralen Projektionen gilt

$$u^s(\mathbf{p})u^{s\dagger}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}p \left( [\text{id} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}] + s\gamma_5 [\text{id} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}] \right), \quad (\text{A.26a})$$

$$v^s(-\mathbf{p})v^{s\dagger}(-\mathbf{p}) = \frac{1}{2}p \left( [\text{id} - \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}] - s\gamma_5 [\text{id} - \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}] \right), \quad (\text{A.26b})$$

$$u^s(\mathbf{p})v^{s\dagger}(-\mathbf{p}) = \frac{1}{2}p \left( s\beta [\text{id} - \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}] - \beta\gamma_5 [\text{id} - \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}] \right), \quad (\text{A.26c})$$

$$v^s(-\mathbf{p})u^{s\dagger}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}p \left( s\beta [\text{id} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}] + \beta\gamma_5 [\text{id} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}] \right), \quad (\text{A.26d})$$

wobei wir wie in Gleichung (A.20) *nicht* über den Spin  $s$  summieren. Schließlich erhalten wir für die Erwartungswerte eines beliebig orientierten Diracoperators (2.71):

$$u^{s\dagger}(\mathbf{p})\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{q} u^t(\mathbf{p}) = 2pq\delta^{st} \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}}, \quad (\text{A.27a})$$

$$v^{s\dagger}(-\mathbf{p})\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{q} v^t(-\mathbf{p}) = -2pq\delta^{st} \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}}, \quad (\text{A.27b})$$

$$u^{s\dagger}(\mathbf{p})\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{q} v^t(-\mathbf{p}) = -2pq\delta^{s,-t} \xi^\dagger(\mathbf{p}, s)\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}}\xi(\mathbf{p}, -s), \quad (\text{A.27c})$$

$$v^{s\dagger}(-\mathbf{p})\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{q} u^t(\mathbf{p}) = -2pq\delta^{s,-t} \xi^\dagger(\mathbf{p}, s)\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}}\xi(\mathbf{p}, -s) \quad (\text{A.27d})$$

## A.2 Anmerkungen zur Farbstruktur

### A.2.1 Explizite Form der Farbstruktur

Für die Generatoren  $t_a$  der Gruppe  $SU(2)$  in der fundamentalen Darstellung gilt

$$t_a = \frac{1}{2}\sigma_a, \quad a = 1, \dots, 3, \quad (\text{A.28})$$

wobei  $\sigma_a$  die Paulimatrizen (A.2) sind. Die Generatoren in der adjungierten Darstellung ergeben sich aus  $\hat{T}_a^{bc} = f^{bac}$  mit den durch den *Levi-Civita-Tensor* gegebenen Strukturkonstanten  $f^{abc} = \varepsilon_{abc}$ .

Für die Generatoren der Gruppe  $SU(3)$  in der fundamentalen Darstellung gilt

$$t_a = \frac{1}{2}\lambda_a, \quad a = 1, \dots, 8 \quad (\text{A.29})$$

mit den *Gell-Mann-Matrizen*  $\lambda_a$ . In der üblicherweise verwendeten Darstellung folgt hieraus

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t_7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ t_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t_5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t_8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \\ t_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t_6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Die Generatoren in der adjungierten Darstellung,  $\hat{T}_a^{bc} = f^{bac}$ , ergeben sich wiederum direkt aus den Strukturkonstanten

$abc$	123	147	156	246	257	345	367	458	678
$f^{abc}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

wobei sämtliche nicht genannte Kombinationen  $abc$  entweder verschwindend sind oder sich durch Permutation ergeben.

### A.2.2 Definition der Cartanunteralgebra

Wie wir in Kapitel 2 gesehen hatten, vertauschen die einzelnen Generatoren der Farbgruppe  $SU(N_C)$  i.A. nicht untereinander, siehe Gleichung (2.9). Es läßt sich aber stets eine Untermenge

$$\mathcal{C} \equiv \left\{ h_k \mid k = 1, \dots, r \right\} \subset \left\{ t_a \mid a = 1, \dots, N_C^2 - 1 \right\} \quad (\text{A.31})$$

der Generatoren so wählen, daß

$$[h_k, h_l] = 0 \quad \forall \quad h_k, h_l \in \mathcal{C} \quad (\text{A.32})$$



gilt. Das maximal mögliche  $r$  bezeichnet man als den Rang der Farbgruppe und die zugehörige Untermenge  $\mathcal{C}$  als die Cartanunteralgebra.<sup>89</sup> Da die Elemente der Cartanunteralgebra miteinander kommutieren, müssen ihre Matrixdarstellungen simultan diagonalisierbar sein, d.h.

$$h_k|\mu_m\rangle = \mu_m^k|\mu_m\rangle \quad (\text{A.33})$$

mit  $m = 1, \dots, N_C$  sowie  $k = 1, \dots, r$  erfüllen. Dabei bezeichnet man die Eigenwerte  $\mu_m^k$  als *Gewichte* und faßt sie zur Wahrung einer kompakten Notation zu  $N_C$  Gewichtsvektoren

$$\mu_1 \equiv \begin{pmatrix} \mu_1^1 \\ \vdots \\ \mu_1^r \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mu_{N_C} \equiv \begin{pmatrix} \mu_{N_C}^1 \\ \vdots \\ \mu_{N_C}^r \end{pmatrix} \quad (\text{A.34})$$

zusammen.

Verwenden wir anstelle der fundamentalen die adjungierte Darstellung, so gilt weiterhin

$$[\hat{H}_k, \hat{H}_l] = 0 \quad \forall \quad k, l = 1, \dots, r \quad (\text{A.35})$$

und aufgrund dessen

$$\hat{H}_k|\sigma_A\rangle = -i\sigma_A^k|\sigma_A\rangle \quad (\text{A.36})$$

mit  $A = 1, \dots, N_C^2 - 1$  sowie  $k = 1, \dots, r$ . Die Eigenwerte  $\sigma_A^k$  werden als *Wurzeln* bezeichnet und zu  $N_C^2 - 1$  Wurzelvektoren

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1^1 \\ \vdots \\ \sigma_1^r \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \sigma_{N_C^2-1} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{N_C^2-1}^1 \\ \vdots \\ \sigma_{N_C^2-1}^r \end{pmatrix} \quad (\text{A.37})$$

zusammengefaßt. Der Wert der Gewichte sowie der Wurzeln ist durch die Normierung (2.10) eindeutig festgelegt [110].

### A.2.3 Explizite Struktur der Cartanunteralgebra für $SU(2)$ und $SU(3)$

Da wir in dieser Arbeit ausschließlich die Gruppen  $SU(2)$  und  $SU(3)$  betrachten, geben wir im Folgenden nur für diese die explizite Form der Cartanunteralgebren an:

Die Gruppe  $SU(2)$  besitzt Rang  $r = 1$  und die Darstellung (A.28) der Farbgeneratoren macht die Wahl

$$h_1 = t_3 \quad (\text{A.38})$$

des Cartangenerators sinnvoll, da so die Eigenvektoren  $|\mu_m\rangle$  den kartesischen Einheitsvektoren entsprechen. Insbesondere können wir deshalb die Notation

$$t_a^{mn} = \langle \mu_m | t_a | \mu_n \rangle \quad (\text{A.39})$$

<sup>89</sup>Entsprechend heißt die von  $\mathcal{C}$  erzeugte (abelsche) Gruppe die *Cartanuntergruppe* von  $SU(N_C)$ .

verwenden. Aufgrund von  $r = 1$  sind die Gewichte eindimensional und haben den Wert [siehe Gleichung (A.2)]

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = -\frac{1}{2}. \quad (\text{A.40})$$

Im Gegensatz dazu ist der Cartangenerator

$$\hat{H}_1 = \hat{T}_3 \quad (\text{A.41})$$

bezüglich der kartesischen Basis des adjungierten Farbraums nicht diagonal. Die explizite Rechnung liefert für die (eindimensionalen) Wurzeln

$$\sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 1 \quad (\text{A.42})$$

und für die zugehörigen Eigenvektoren

$$e_{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_{\sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.43})$$

wobei  $e_{\sigma_A}^a = \langle a | \sigma_A \rangle$  ist und  $|a\rangle$ ,  $a = 1, \dots, N_C^2 - 1$  die kartesischen Einheitsvektoren des adjungierten Farbraums bezeichnet.

Die Gruppe  $SU(3)$  hat Rang  $r = 2$  und wir wählen die Cartangeneratoren gemäß

$$h_1 = t_3, \quad h_2 = t_8, \quad (\text{A.44})$$

womit die Eigenvektoren  $|\mu_m\rangle$  der kartesischen Basis entsprechen und die Notation (A.39) verwendet werden kann. Für die Gewichtsvektoren ergibt sich dabei

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \mu_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.45})$$

Die Cartangeneratoren

$$\hat{H}_1 = \hat{T}_3, \quad \hat{H}_2 = \hat{T}_8 \quad (\text{A.46})$$

in der adjungierten Darstellung müssen explizit diagonalisiert werden. Das liefert für die Wurzelvektoren

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, & \sigma_3 &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, & \sigma_5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \sigma_7 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, & \sigma_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, & \sigma_6 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \sigma_8 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

und für die zugehörigen Eigenvektoren  $e_{\sigma_A}^a = \langle a | \sigma_A \rangle$

$$e_{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ i \ 1 \ 0)^T, \quad (\text{A.48a})$$

$$e_{\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \ 0 \ 0 \ i \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad (\text{A.48b})$$

$$e_{\sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -i \ 1 \ 0)^T, \quad (\text{A.48c})$$

$$e_{\sigma_4} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \ 0 \ 0 \ -i \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad (\text{A.48d})$$

$$e_{\sigma_5} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T, \quad (\text{A.48e})$$

$$e_{\sigma_6} = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad (\text{A.48f})$$

$$e_{\sigma_7} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad (\text{A.48g})$$

$$e_{\sigma_8} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-i \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T. \quad (\text{A.48h})$$

#### A.2.4 Farbmatrizen in der Cartaneigenbasis

Wir geben hier die explizite Struktur der Farbmatrizen in der Cartaneigenbasis (5.146),

$$t_{\sigma_A} = \sum_a t_a \langle a | \sigma_A \rangle, \quad (\text{A.49})$$

an. Unter Verwendung von Gleichung (A.28) sowie (A.43) ergibt sich für die Farbgruppe  $SU(2)$

$$t_{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_{\sigma_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad t_{\sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.50})$$

Analog erhalten wir mittels Gleichung (A.30) und (A.48) für  $SU(3)$

$$\begin{aligned} t_{\sigma_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & t_{\sigma_4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t_{\sigma_7} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ t_{\sigma_2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t_{\sigma_5} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, & t_{\sigma_8} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ t_{\sigma_3} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & t_{\sigma_6} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

In beiden Farbgruppen gilt

$$t_{-\sigma_A} = t_{\sigma_A}^\dagger, \quad (\text{A.52})$$

wobei  $-\sigma_A$  das Negative des Wurzelvektors  $\sigma_A$  ist. In diesem Zusammenhang sei darauf verwiesen, daß sämtliche nicht-verschwindende Wurzelvektoren paarweise mit verschiedenen Vorzeichen auftreten, vgl. Gleichung (A.42) und (A.47). Für einen verschwindenden Wurzelvektor  $\sigma_A$  impliziert Gleichung (A.52), daß die zugehörige Farbmatrix  $t_{\sigma_A}$  selbstadjungiert ist.



# Anhang B

## Explizite Berechnung von Erwartungswerten

### B.1 Nulltemperaturlimes

#### B.1.1 Bosonische Erwartungswerte

Wir geben im Folgenden eine Einführung in die Berechnung bosonischer Erwartungswerte, wie sie in der reinen Yang–Mills-Theorie sowie im Gluonsektor der vollen QCD auftreten. Dazu betrachten wir das *Erzeugende Funktional*

$$\mathfrak{Z}_{\text{YM}}[j] \equiv \left\langle \exp \left( \int \mathrm{d}^3 p j_i^a(\mathbf{p}) A_i^a(\mathbf{p}) \right) \right\rangle_{\text{YM}}, \quad (\text{B.1})$$

wobei die *Quellfelder*  $j$  i.A. komplexwertige Vektorfelder darstellen. Da Gleichung (B.1) durch den Erwartungswert eines ausschließlich Eichfeld-abhängigen Funktionals gegeben ist, läßt sich das Erzeugende Funktional gemäß Gleichung (3.4) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_{\text{YM}}[j] &= |\mathcal{N}_{\text{YM}}|^2 \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^*[A] \exp \left( \int \mathrm{d}^3 p j_i^a(\mathbf{p}) A_i^a(\mathbf{p}) \right) \tilde{\phi}_{\text{YM}}[A] \\ &= |\mathcal{N}_{\text{YM}}|^2 \int \mathcal{D}A \exp \left( - \int \mathrm{d}^3 p \left[ A_i^a(\mathbf{p}) t_{ij}(\mathbf{p}) \omega(\mathbf{p}) A_j^a(-\mathbf{p}) - j_i^a(\mathbf{p}) A_i^a(\mathbf{p}) \right] \right) \\ &= |\mathcal{N}_{\text{YM}}|^2 (\det 2\omega)^{-\frac{1}{2}} \exp \left( \frac{1}{4} \int \mathrm{d}^3 p j_i^a(\mathbf{p}) \frac{t_{ij}(\mathbf{p})}{\omega(p)} j_j^a(-\mathbf{p}) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Hierbei haben wir verwendet, daß sich das Funktionalintegral nach Einsetzen des Wellenfunktionals (3.6) und quadratischer Ergänzung aufgrund seiner Gauß'schen Gestalt explizit auflösen läßt [110]. Aus der letzten Gleichung läßt sich der Wert der Normierungskonstanten ablesen,

$$1 = \mathfrak{Z}_{\text{YM}}[j = 0] = |\mathcal{N}_{\text{YM}}|^2 (\det 2\omega)^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.3})$$

womit wir schließlich

$$\mathfrak{Z}_{\text{YM}}[j] = \exp \left( \frac{1}{4} \int \mathrm{d}^3 p j_i^a(\mathbf{p}) \frac{t_{ij}(\mathbf{p})}{\omega(p)} j_j^a(-\mathbf{p}) \right) \quad (\text{B.4})$$

erhalten. Der Erwartungswert von Operatoren, welche ausschließlich vom Eichfeld abhängen, läßt sich als Ableitung des Erzeugenden Funktionals nach den Quellfeldern darstellen,

$$\langle O[A] \rangle_{\text{YM}} = O[\delta/\delta j] \mathfrak{Z}_{\text{YM}}[j] \Big|_{j=0}. \quad (\text{B.5})$$

Das liefert beispielsweise für den Gluonpropagator den in Gleichung (3.7) gegebenen Ausdruck,

$$D_{ij}^{ab}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\delta}{\delta j_i^a(\mathbf{p})} \frac{\delta}{\delta j_j^b(\mathbf{q})} \mathfrak{Z}_{\text{YM}}[j] \Big|_{j=0} = \delta^{ab} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) t_{ij}(\mathbf{p}) \frac{1}{2\omega(p)}, \quad (\text{B.6})$$

und läßt sich nach einigen Umformungen in die Form (3.8) bringen [18, 21]. Weiterhin impliziert die Gestalt des Erzeugenden Funktional (B.4) die folgenden Aussagen:

- Der Erwartungswert eines Terms bestehend aus einer **ungeraden** Anzahl an Eichfeldern ist stets verschwindend, was daraus folgt, daß Gleichung (B.4) ausschließlich gerade Potenzen der Quellfelder enthält.
- Der Erwartungswert einer **geraden** Anzahl an Eichfeldern läßt sich in die Summe der Produkte aller möglicher *Kontraktionen* – welche statischen Gluonpropagatoren entsprechen – zerlegen. Beispielsweise ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \langle A(1)A(2)A(3)A(4) \rangle_{\text{YM}} &= \langle A(1)A(2) \rangle_{\text{YM}} \langle A(3)A(4) \rangle_{\text{YM}} \\ &+ \langle A(1)A(3) \rangle_{\text{YM}} \langle A(2)A(4) \rangle_{\text{YM}} + \langle A(1)A(4) \rangle_{\text{YM}} \langle A(2)A(3) \rangle_{\text{YM}} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Beide Aussagen sind direkte Konsequenzen des Wick'schen Theorems, welches hier aufgrund der Wahl eines Gauß'schen Wellenfunktional (3.6) im Ansatz gilt, siehe Referenz [110] für weitere Details.

Abschließend bemerken wir, daß mithilfe des Erzeugenden Funktional (B.1) auch Erwartungswerte von Operatoren bestimmt werden können, welche explizit vom kanonischen Impuls abhängen. Hierzu müssen jedoch zunächst sämtliche funktionale Ableitungen (2.70) ausgeführt werden, sodaß ein ausschließlich Eichfeld-abhängiger Ausdruck entsteht.

### B.1.2 Fermionische Erwartungswerte

Zur Berechnung des fermionischen Erwartungswerts (3.48) von Produkten aus Quarkfeldern verfahren wir analog zu Referenz [110] und führen *kohärente Zustände*

$$|\xi\rangle \equiv \exp\left[a^\dagger(1)\xi_+(1) + b^\dagger(1)\xi_-^*(1)\right] |0\rangle, \quad (\text{B.8a})$$

$$\langle \xi| \equiv \langle 0| \exp\left[\xi_+^*(1)a(1) + \xi_-(1)b(1)\right] \quad (\text{B.8b})$$

ein, wobei  $\xi_\pm$  *Graßmannfelder* bezeichnet, welche der *Graßmannalgebra*

$$\left\{ \xi_\pm^{s,m(*)}(\mathbf{p}), \xi_\pm^{t,n(*)}(\mathbf{q}) \right\} = \left\{ \xi_\pm^{s,m(*)}(\mathbf{p}), \xi_\mp^{t,n(*)}(\mathbf{q}) \right\} = 0, \quad (\text{B.9a})$$

$$\left\{ \xi_\pm^{s,m(*)}(\mathbf{p}), a^{t,n}(\mathbf{q}) \right\} = \left\{ \xi_\pm^{s,m(*)}(\mathbf{p}), b^{t,n}(\mathbf{q}) \right\} = 0, \quad (\text{B.9b})$$

genügen. Daraus folgt

$$a^{s,m}(\mathbf{p})|\xi\rangle = \xi_+^{s,m}(\mathbf{p})|\xi\rangle, \quad \langle \xi|a^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) = \langle \xi|\xi_+^{s,m*}(\mathbf{p}), \quad (\text{B.10a})$$

$$b^{s,m}(\mathbf{p})|\xi\rangle = \xi_-^{s,m*}(\mathbf{p})|\xi\rangle, \quad \langle \xi|b^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) = \langle \xi|\xi_-^{s,m}(\mathbf{p}), \quad (\text{B.10b})$$

womit sich die kohärenten Zustände als Eigenzustände der fermionischen Vernichtoperatoren  $a, b$  mit den Graßmannfeldern als zugehörige Eigenwerte interpretieren lassen. Wird

die Integration und Differentiation über Graßmannfelder in üblicher Weise eingeführt, ergibt sich für den Identitätsoperator die Darstellung

$$\text{id} = \int d\mu(\xi) |\xi\rangle\langle\xi| \quad (\text{B.11})$$

mit dem Integrationsmaß [110]

$$d\mu(\xi) = \left( \prod_{\mathbf{p}, s, m} d\xi_+^{s, m*}(\mathbf{p}) d\xi_+^{s, m}(\mathbf{p}) d\xi_-^{s, m}(\mathbf{p}) d\xi_-^{s, m*}(\mathbf{p}) \right) \exp\left(-\left[\xi_+^*(1)\xi_+(1) + \xi_-(1)\xi_-^*(1)\right]\right). \quad (\text{B.12})$$

Durch Einschleiben von Identitäten (B.11) ist es möglich, fermionische Erwartungswerte in Funktionalintegrale über Graßmannfelder umzuwandeln und explizit auszuwerten. Das ist in Analogie zu der in Kapitel 2 eingeführten Ortsdarstellung bezüglich des Eichfelds zu sehen.

Eine elegantere Berechnungsmethode bietet die Einführung des Erzeugenden Funktionals

$$\mathfrak{Z}_Q[\eta] \equiv \langle\phi_Q| \exp\left(\eta_+^*(1)a(1) - \eta_-(1)b(1)\right) \exp\left(a^\dagger(2)\eta_+(2) - b^\dagger(2)\eta_-^*(2)\right)|\phi_Q\rangle, \quad (\text{B.13})$$

wobei  $\eta_\pm$  fermionische Quellfelder bezeichnet, welche ebenfalls der Graßmannalgebra (B.9) genügen. Wie im bosonischen Fall sind die Ableitungen des Erzeugenden Funktionals nach den Quellfeldern mit den gesuchten Erwartungswerten verknüpft, z.B. gilt<sup>90</sup>

$$\langle a^{s, m}(\mathbf{p}) a^{t, n\dagger}(\mathbf{q}) \rangle_Q = -\frac{1}{\mathfrak{Z}_Q[0]} \frac{\delta}{\delta\eta_+^{s, m*}(\mathbf{p})} \frac{\delta}{\delta\eta_+^{t, n}(\mathbf{q})} \mathfrak{Z}_Q[\eta] \Big|_{\eta=0}. \quad (\text{B.14})$$

Die praktische Nutzung solcher Ableitungen erfordert die Bestimmung des Erzeugenden Funktionals, welche für das in Form einer Slaterdeterminante gewählte fermionische Wellenfunktional (3.30) exakt möglich ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_Q[\eta] &= \int d\mu(\xi) \langle\phi_Q| \exp\left(\eta_+^*(1)a(1) - \eta_-(1)b(1)\right)|\xi\rangle \\ &\quad \times \langle\xi| \exp\left(a^\dagger(2)\eta_+(2) - b^\dagger(2)\eta_-^*(2)\right)|\phi_Q\rangle \\ &= \int d\mu(\xi) \langle\phi_Q|\xi\rangle \exp\left(\eta_+^*(1)\xi_+(1) - \eta_-(1)\xi_-^*(1)\right) \\ &\quad \times \exp\left(\xi_+^*(2)\eta_+(2) - \xi_-(2)\eta_-^*(2)\right) \langle\xi|\phi_Q\rangle \\ &= \int d\mu(\xi) \exp\left(-\xi_-^*(1)K^\dagger(1, 2)\xi_+(2)\right) \exp\left(\eta_+^*(3)\xi_+(3) - \eta_-(3)\xi_-^*(3)\right) \\ &\quad \times \exp\left(\xi_+^*(4)\eta_+(4) - \xi_-(4)\eta_-^*(4)\right) \exp\left(-\xi_+^*(5)K(5, 6)\xi_-(6)\right) \\ &= \int \left( \prod d\xi_+^* d\xi_+ d\xi_- d\xi_-^* \right) \exp\left(-\xi_+^*(1)\xi_+(1) - \xi_-(1)\xi_-^*(1)\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\xi_-^*(2)K^\dagger(2, 3)\xi_+(3) - \xi_+^*(2)K(2, 3)\xi_-(3)\right) \end{aligned}$$

<sup>90</sup>Man beachte, daß aufgrund der Graßmannalgebra die Reihenfolge der Ableitungen relevant ist.

$$\begin{aligned}
& \times \exp\left(\eta_+^*(4)\xi_+(4) - \eta_-(4)\xi_-^*(4) + \xi_+^*(4)\eta_+(4) - \xi_-(4)\eta_-^*(4)\right) \\
& = \int \left( \prod d\xi_+^* d\xi_+ d\xi_- d\xi_-^* \right) \\
& \quad \times \exp\left(-\begin{pmatrix} \xi_+^* \\ \xi_-^* \end{pmatrix}^T (1) \begin{pmatrix} \text{id} & K \\ K^\dagger & -\text{id} \end{pmatrix} (1, 2) \begin{pmatrix} \xi_+ \\ \xi_- \end{pmatrix} (2)\right) \\
& \quad \times \exp\left(\begin{pmatrix} \eta_+^* \\ \eta_-^* \end{pmatrix}^T (3) \begin{pmatrix} \xi_+ \\ \xi_- \end{pmatrix} (3) + \begin{pmatrix} \xi_+^* \\ \xi_-^* \end{pmatrix}^T (3) \begin{pmatrix} \eta_+ \\ \eta_- \end{pmatrix} (3)\right) \tag{B.15}
\end{aligned}$$

Nach Einführung der übergeordnete Vektornotation

$$\xi^{s,m}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \xi_+^{s,m}(\mathbf{p}) \\ \xi_-^{s,m}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad \xi^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \xi_+^{s,m*}(\mathbf{p}) \\ \xi_-^{s,m*}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}^T, \quad \dots \tag{B.16}$$

sowie der Matrixdarstellung der inversen *Quarkgreensfunktion*

$$\Omega^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \delta^{st} \delta^{mn} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) & K^{st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ K^{st,mn\dagger}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & -\delta^{st} \delta^{mn} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \end{pmatrix} \tag{B.17}$$

reduziert sich das Erzeugende Funktional (B.15) auf ein fermionisches Gaußintegral, welches sich explizit lösen läßt [110]:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z}_Q[\eta] & = \int d\xi^\dagger d\xi \exp\left(-\xi^\dagger(1)\Omega(1, 2)\xi(2) + \eta^\dagger(1)\xi(1) + \xi^\dagger(1)\eta(1)\right) \\
& = \det \Omega \exp\left(\eta^\dagger(1)\Omega^{-1}(1, 2)\eta(2)\right) \tag{B.18}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis liefert für die Fermideterminante den Ausdruck

$$I[A] = \langle \phi_Q[A] | \phi_Q[A] \rangle = \mathfrak{Z}_Q[0] = \det \Omega, \tag{B.19}$$

welcher sich mithilfe von

$$\Omega(1, 2)\Omega(2, 3) = \begin{pmatrix} [\text{id} + KK^\dagger] & 0 \\ 0 & [\text{id} + K^\dagger K] \end{pmatrix} (1, 3) \tag{B.20}$$

weiter auswerten läßt: Aufgrund der Teilchen–Antiteilchen-Symmetrie gilt

$$(\det \Omega)^2 = \det \Omega^2 = \det [\text{id} + KK^\dagger] \det [\text{id} + K^\dagger K] = (\det [\text{id} + KK^\dagger])^2 \tag{B.21}$$

und somit

$$\det \Omega = \pm \det [\text{id} + KK^\dagger], \tag{B.22}$$

wobei die Determinantenformel für Blockmatrizen verwendet wurde. Da sämtliche Eigenwerte von  $[\text{id} + KK^\dagger]$  wegen der Spinsymmetrie zweifach entartet sein müssen, reduziert sich (B.22) schließlich auf die in Gleichung (3.51) angegebene Form  $I[A] = \det [\text{id} + KK^\dagger]$ .

Zur Berechnung fermionischer Erwartungswerte müssen wir gemäß Gleichung (B.18) die fermionische Greensfunktion  $\Omega^{-1}$  ermitteln. Durch Inversion von Gleichung (B.17) läßt sich nachprüfen, daß diese durch

$$\Omega^{-1}(1, 2) = \begin{pmatrix} [\text{id} + KK^\dagger]^{-1} & [\text{id} + KK^\dagger]^{-1} K \\ [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} K^\dagger & -[\text{id} + K^\dagger K]^{-1} \end{pmatrix} (1, 2) \tag{B.23}$$



gegeben ist. Setzen wir das in Gleichung (B.18) ein, so lassen sich die zur Berechnung von Erwartungswerten nötigen Ableitungen des Erzeugenden Funktional einfach ausführen.<sup>91</sup> Beispielsweise erhalten wir für das Operatorpaar (B.14):

$$\langle a^{s,m}(\mathbf{p})a^{t,n\dagger}(\mathbf{q}) \rangle_{\mathcal{Q}} = \left[ \text{id} + KK^\dagger \right]^{-1st,mn}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (\text{B.24})$$

Die Erwartungswerte der übrigen Operatorpaare lassen sich analog bilden und liefern die in Gleichung (3.50) genannten Ergebnisse. Für den Erwartungswert einer beliebigen Zahl von Erzeugern/Vernichtern ergeben sich aus dem Erzeugenden Funktional (B.18) die folgenden Aussagen, welche eine direkte Konsequenz des Wick'schen Theorems sind:<sup>92</sup>

- Der fermionische Erwartungswert einer **ungeraden** Anzahl an Erzeugern/Vernichtern ist stets verschwindend. Das folgt daraus, daß das Erzeugende Funktional (B.18) nur Terme mit einer geraden Anzahl an Quellfeldern enthält.
- Der fermionische Erwartungswert einer **geraden** Anzahl an Erzeugern/Vernichtern läßt sich bestimmen, indem wir diesen in die Summe aller möglicher Kontraktionen zerlegen. Dabei ist zu beachten, daß aufgrund der fermionischen Antikommutationsrelationen (2.73) eine ungerade Anzahl an Permutationen im Zuge der Kontraktionsbildung zu einem negativen Vorzeichen führt. Beispielsweise ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \psi(1)\psi(2)\psi(3)\psi(4) \rangle_{\mathcal{Q}} &= \langle \psi(1)\psi(2) \rangle_{\mathcal{Q}} \langle \psi(3)\psi(4) \rangle_{\mathcal{Q}} \\ &\quad - \langle \psi(1)\psi(3) \rangle_{\mathcal{Q}} \langle \psi(2)\psi(4) \rangle_{\mathcal{Q}} + \langle \psi(1)\psi(4) \rangle_{\mathcal{Q}} \langle \psi(2)\psi(3) \rangle_{\mathcal{Q}}, \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

wobei die  $\psi = c_1a + c_2b + c_3a^\dagger + c_4b^\dagger$  beliebige lineare Funktionale der Erzeuger/Vernichter sind. Wie man an der Gestalt des Erzeugenden Funktional (B.18) erkennt, ist für diese Aussage weiterhin relevant, daß der betrachtete Erwartungswert normiert ist.

### B.1.3 Statischer Quarkpropagator

Unter Verwendung der Antikommutationsrelationen (2.31) reduziert sich der statische Quarkpropagator (3.56) auf

$$G_{ij}^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \Psi_i^m(\mathbf{x})\Psi_j^{n\dagger}(\mathbf{y}) \rangle - \frac{1}{2}\delta^{mn}\delta_{ij}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{B.26})$$

womit wir lediglich den ersten Term auf der rechten Seite zu berechnen haben. Setzen wir in diesen die Entwicklung (2.72) der Quarkfelder ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \Psi_i^{m_1}(\mathbf{x})\Psi_j^{m_2\dagger}(\mathbf{y}) \rangle &= \\ &= \int d^3p_1 \int d^3p_2 \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}} \\ &\quad \times \left( \langle a^{s_1, m_1}(\mathbf{p}_1)a^{s_2, m_2\dagger}(\mathbf{p}_2) \rangle u_i^{s_1}(\mathbf{p}_1)u_j^{s_2\dagger}(\mathbf{p}_2) \exp(i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x} - i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{y}) \right. \\ &\quad \left. + \langle a^{s_1, m_1}(\mathbf{p}_1)b^{s_2, m_2}(\mathbf{p}_2) \rangle u_i^{s_1}(\mathbf{p}_1)v_j^{s_2\dagger}(\mathbf{p}_2) \exp(i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x} + i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{y}) \right) \end{aligned}$$

<sup>91</sup>Hierzu müssen wir die Vektoren  $\eta^{(\dagger)}$  durch ihre Komponenten ausdrücken.

<sup>92</sup>Für eine allgemeinere Fassung des Wick'schen Theorems siehe Referenz [110].

$$\begin{aligned}
& + \langle b^{s_1, m_1 \dagger}(\mathbf{p}_1) a^{s_2, m_2 \dagger}(\mathbf{p}_2) v_i^{s_1}(\mathbf{p}_1) u_j^{s_2 \dagger}(\mathbf{p}_2) \exp(-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x} - i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{y}) \\
& + \langle b^{s_1, m_1 \dagger}(\mathbf{p}_1) b^{s_2, m_2}(\mathbf{p}_2) v_i^{s_1}(\mathbf{p}_1) v_j^{s_2 \dagger}(\mathbf{p}_2) \exp(-i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x} + i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{y}) \rangle, \quad (\text{B.27})
\end{aligned}$$

wobei sich der fermionische Erwartungswert der Erzeuger-/Vernichterpaare anhand von Gleichung (3.50) bestimmen läßt:

$$\langle a(1)a^\dagger(2) \rangle = \langle [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(1, 2) \rangle, \quad (\text{B.28a})$$

$$\begin{aligned}
\langle b^\dagger(1)b(2) \rangle & = \langle ([\text{id} + K^\dagger K]^{-1} K^\dagger K)(1, 2) \rangle \\
& = \langle (\text{id} - [\text{id} + K^\dagger K]^{-1})(1, 2) \rangle, \quad (\text{B.28b})
\end{aligned}$$

$$\langle a(1)b(2) \rangle = \langle ([\text{id} + KK^\dagger]^{-1} K)(1, 2) \rangle, \quad (\text{B.28c})$$

$$\langle b^\dagger(1)a^\dagger(2) \rangle = \langle ([\text{id} + K^\dagger K]^{-1} K^\dagger)(1, 2) \rangle \quad (\text{B.28d})$$

Obwohl der fermionische Erwartungswert (3.48) berechnet wurde, haben wir zur Wahrung einer kompakten Notation auf der rechten Seite weiterhin den vollen Erwartungswert  $\langle \dots \rangle$  gesetzt, was aufgrund von  $\langle O[A] \rangle_Q = O[A]$  legitim ist. Zur weiteren Auswertung der einzelnen Erwartungswerte verwenden wir die Reihenentwicklung (3.53), wobei wir die Berechnung exemplarisch anhand des ersten Terms (B.28a) demonstrieren werden.

Nach Einsetzen von Gleichung (3.53) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle a(1)a^\dagger(2) \rangle & = [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(1, 2) \Big|_{A=0} \\
& + \frac{1}{4} \int \bar{d}^3 q \frac{\delta}{\delta A_i^a(\mathbf{q})} \frac{t_{ij}(\mathbf{q})}{\omega(\mathbf{q})} \frac{\delta}{\delta A_j^a(-\mathbf{q})} [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(1, 2) \Big|_{A=0}. \quad (\text{B.29})
\end{aligned}$$

Aufgrund von

$$\begin{aligned}
K(1, 3)K^\dagger(3, 2) \Big|_{A=0} & = \delta^{s_1 s_3} \delta^{m_1 m_3} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3) s_1 S(p_1) \delta^{s_3 s_2} \delta^{m_3 m_2} \delta(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2) s_3 S(p_3) \\
& = \delta^{s_1 s_2} \delta^{m_1 m_2} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) S^2(p_1) \quad (\text{B.30})
\end{aligned}$$

gilt für den führenden Term offenbar

$$\begin{aligned}
[\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(1, 2) \Big|_{A=0} & = \delta^{s_1 s_2} \delta^{m_1 m_2} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \frac{1}{1 + S^2(p_1)} \\
& = \delta^{s_1 s_2} \delta^{m_1 m_2} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) P(p_1). \quad (\text{B.31})
\end{aligned}$$

Für das zweite Glied der Reihenentwicklung (B.29) berechnen wir zunächst die Funktionalableitungen, wobei wir die Abkürzungen  $A_i^a(\mathbf{q}) = A(9)$ ,  $A_j^a(-\mathbf{q}) = A(10)$  verwenden:

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta A(9)} \frac{\delta}{\delta A(10)} [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(1, 2) \Big|_{A=0} = \\
& = -\frac{\delta}{\delta A(9)} [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(1, 3) \frac{\delta K(3, 4)K^\dagger(4, 5)}{\delta A(10)} [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(5, 2) \Big|_{A=0} \\
& = [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(1, 6) \frac{\delta K(6, 7)K^\dagger(7, 8)}{\delta A(9)} [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(8, 3) \frac{\delta K(3, 4)K^\dagger(4, 5)}{\delta A(10)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(5, 2) \Big|_{A=0} \\
& - [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(1, 3) \frac{\delta^2 K(3, 4)K^\dagger(4, 5)}{\delta A(9)\delta A(10)} [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(5, 2) \Big|_{A=0} \\
& + [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(1, 3) \frac{\delta K(3, 4)K^\dagger(4, 5)}{\delta A(10)} [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(5, 6) \frac{\delta K(6, 7)K^\dagger(7, 8)}{\delta A(9)} \\
& \times [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(8, 2) \Big|_{A=0} \\
& = P(p_1)P(p_2)P(p_3) \frac{\delta K(1, 7)K^\dagger(7, 3)}{\delta A(9)} \frac{\delta K(3, 4)K^\dagger(4, 2)}{\delta A(10)} \Big|_{A=0} \\
& + P(p_1)P(p_2)P(p_5) \frac{\delta K(1, 4)K^\dagger(4, 5)}{\delta A(10)} \frac{\delta K(5, 7)K^\dagger(7, 2)}{\delta A(9)} \Big|_{A=0} \\
& - P(p_1)P(p_2) \frac{\delta^2 K(1, 4)K^\dagger(4, 2)}{\delta A(9)\delta A(10)} \tag{B.32}
\end{aligned}$$

Da Gleichung (B.29) invariant unter  $\mathbf{q} \leftrightarrow -\mathbf{q}$ ,  $i \leftrightarrow j$  ist, können wir eine Symmetrie unter der Vertauschung von 9 und 10 annehmen und erhalten

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta A(9)} \frac{\delta}{\delta A(10)} [\text{id} + KK^\dagger]^{-1}(1, 2) \Big|_{A=0} = \\
& = 2P(p_1)P(p_2)P(p_3) \frac{\delta K(1, 7)K^\dagger(7, 3)}{\delta A(9)} \frac{\delta K(3, 4)K^\dagger(4, 2)}{\delta A(10)} \Big|_{A=0} \\
& - P(p_1)P(p_2) \frac{\delta^2 K(1, 4)K^\dagger(4, 2)}{\delta A(9)\delta A(10)}, \tag{B.33}
\end{aligned}$$

wobei beim letzten Term die Reihenfolge der Ableitungen egal ist. Nach Einsetzen des Ansatzes (3.31) für den Variationskern  $K$ , Ausführen der Funktionalableitungen sowie Eliminieren der auftretenden spektralen Diracprojektionen mittels der in Anhang A.1 gegebenen Relationen ergibt sich bei Ausnutzung der Symmetrie unter  $9 \leftrightarrow 10$

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta K(1, 7)K^\dagger(7, 3)}{\delta A(9)} \frac{\delta K(3, 4)K^\dagger(4, 2)}{\delta A(10)} \Big|_{A=0} = \\
& = \delta^{m_1 m_2} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{q} - \mathbf{p}_3) \frac{C_F}{4p_1} g^2 u^{s_1 \dagger}(\mathbf{p}_1) \\
& \times \left[ V(\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}) V(-\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}, \mathbf{p}_1) \left( S(p_1) - S(|\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}|) \right)^2 \right. \\
& \quad \times \alpha_i \left( \text{id} - \boldsymbol{\alpha} \cdot \widehat{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{q})} \right) \alpha_j \\
& \quad + W(\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}) W(-\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}, \mathbf{p}_1) \left( S(p_1) + S(|\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}|) \right)^2 \\
& \quad \times \alpha_i \left( \text{id} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \widehat{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{q})} \right) \alpha_j \\
& \quad \left. - \left( V(\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}) W(-\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}, \mathbf{p}_1) + V(-\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}, \mathbf{p}_1) W(\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}) \right) \right. \\
& \quad \left. \times \left( S(p_1) + S(|\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}|) \right) \left( S(p_1) - S(|\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}|) \right) \alpha_i \alpha_j \beta \right] u^{s_2}(\mathbf{p}_1) \tag{B.34}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^2 K(1, 4)K^\dagger(4, 2)}{\delta A(9)\delta A(10)} = \\
& = \delta^{m_1 m_2} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \frac{C_F}{2p_1} g^2 u^{s_1 \dagger}(\mathbf{p}_1) \\
& \quad \times \left[ \left( V(\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_1 - \mathbf{q})W(-\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}, \mathbf{p}_1) + V(-\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}, \mathbf{p}_1)W(\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}) \right) \alpha_i \alpha_j \beta \right. \\
& \quad + V(\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_1 - \mathbf{q})V(-\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}, \mathbf{p}_1) \alpha_i \left( \text{id} - \boldsymbol{\alpha} \cdot \widehat{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{q})} \right) \alpha_j \\
& \quad \left. + W(\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_1 - \mathbf{q})W(-\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}, \mathbf{p}_1) \alpha_i \left( \text{id} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \widehat{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{q})} \right) \alpha_j \right] u^{s_2}(\mathbf{p}_1), \quad (\text{B.35})
\end{aligned}$$

wobei für die Farbstruktur die Normierungsbedingung

$$t_a^{m_1 m_3} t_a^{m_3 m_2} = \delta^{m_1 m_2} \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} = \delta^{m_1 m_2} C_F \quad (\text{B.36})$$

verwendet wurde. Setzen wir diese Resultate in Gleichung (B.29) ein, so erhalten wir nach Ausführen der Spuren über die Diracmatrizen mithilfe der Relationen aus Anhang A.1 das Ergebnis

$$\langle a^{s_1, m_1}(\mathbf{p}_1) a^{s_2, m_2 \dagger}(\mathbf{p}_2) \rangle = \delta^{s_1 s_2} \delta^{m_1 m_2} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) P(p_1) \left[ 1 - \frac{1}{2} J_\alpha(\mathbf{p}_1) \right] \quad (\text{B.37})$$

mit dem Schleifenterm (3.59). Der Ausdruck (B.37) läßt sich wiederum in Gleichung (B.27) einsetzen und ermöglicht dort die Auswertung des spektralen Projektors  $uu^\dagger$  sowie die Extraktion der Impulsdarstellung. In völliger Analogie läßt sich für die übrigen in Gleichung (B.28) genannten Operatorpaare verfahren was schlußendlich auf den in Gleichung (3.58) gegebenen statischen Quarkpropagator führt. Ohne auf weitere Details einzugehen, bemerken wir, daß diese Rechnung auch die Symmetrierelation

$$\langle [\text{id} + KK^\dagger]^{-1 s_1 s_2, m_1 m_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \rangle = \langle [\text{id} + K^\dagger K]^{-1 s_1 s_2, m_1 m_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \rangle \quad (\text{B.38})$$

liefert. Diese war aufgrund der Teilchen–Antiteilchen-Symmetrie im Ansatz für das Vakuumwellenfunktional erwartbar.

### B.1.4 Kopplungsterm

Nach Einsetzen der Entwicklung (2.72) des Quarkfelds besitzt der Kopplungsterm (2.54) die Gestalt

$$\begin{aligned}
H_Q^A & = g \int \bar{d}^3 p_1 \int \bar{d}^3 p_2 \int \bar{d}^3 q \delta(\mathbf{q} + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) A_i^a(\mathbf{q}) t_a^{m_1 m_2} \\
& \quad \times \left[ D_{1,i}^{s_1 s_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) a^{s_1, m_1 \dagger}(\mathbf{p}_1) a^{s_2, m_2}(\mathbf{p}_2) \right. \\
& \quad + D_{2,i}^{s_1 s_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) b^{s_1, m_1}(-\mathbf{p}_1) b^{s_2, m_2 \dagger}(-\mathbf{p}_2) \\
& \quad + D_{3,i}^{s_1 s_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) a^{s_1, m_1 \dagger}(\mathbf{p}_1) b^{s_2, m_2 \dagger}(-\mathbf{p}_2) \\
& \quad \left. + D_{4,i}^{s_1 s_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) b^{s_1, m_1}(-\mathbf{p}_1) a^{s_2, m_2}(\mathbf{p}_2) \right], \quad (\text{B.39})
\end{aligned}$$

aus welcher sich mit Gleichung (3.50) der Erwartungswert

$$\begin{aligned}
\langle H_Q^A \rangle &= g \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \int d^3 q \delta(\mathbf{q} + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) t_a^{m_1 m_2} \\
&\quad \times \left[ D_{1,i}^{s_1 s_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \langle A_i^a(\mathbf{q}) \left( \text{id} - [\text{id} + K K^\dagger]^{-1} \right)^{s_2 s_1, m_2 m_1}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \rangle \right. \\
&\quad + D_{2,i}^{s_1 s_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \langle A_i^a(\mathbf{q}) [\text{id} + K^\dagger K]^{-1 s_2 s_1, m_2 m_1}(-\mathbf{p}_2, -\mathbf{p}_1) \rangle \\
&\quad - D_{3,i}^{s_1 s_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \langle A_i^a(\mathbf{q}) \left( [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} K^\dagger \right)^{s_2 s_1, m_2 m_1}(-\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \rangle \\
&\quad \left. - D_{4,i}^{s_1 s_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \langle A_i^a(\mathbf{q}) \left( [\text{id} + K K^\dagger]^{-1} K \right)^{s_2 s_1, m_2 m_1}(\mathbf{p}_2, -\mathbf{p}_1) \rangle \right] \quad (\text{B.40})
\end{aligned}$$

ergibt. Dabei haben wir die Abkürzung

$$D_{1,i}^{s_1 s_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}} u^{s_1 \dagger}(\mathbf{p}_1) \alpha_i u^{s_2}(\mathbf{p}_2), \quad (\text{B.41a})$$

$$D_{2,i}^{s_1 s_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}} v^{s_1 \dagger}(-\mathbf{p}_1) \alpha_i v^{s_2}(-\mathbf{p}_2), \quad (\text{B.41b})$$

$$D_{3,i}^{s_1 s_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}} u^{s_1 \dagger}(\mathbf{p}) \alpha_i v^{s_2}(-\mathbf{p}_2), \quad (\text{B.41c})$$

$$D_{4,i}^{s_1 s_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}} v^{s_1 \dagger}(-\mathbf{p}_1) \alpha_i u^{s_2}(\mathbf{p}_2) \quad (\text{B.41d})$$

für die enthaltene Diracstruktur verwendet. Für die weitere Auswertung des Erwartungswerts betrachten wir das Wick'sche Theorem in der Form (3.49), mittels der sich die Identität<sup>93</sup>

$$\langle A_i^a(\mathbf{q}) O[A, \Psi] \rangle = \frac{1}{2} \frac{t_{ij}(\mathbf{q})}{\omega(\mathbf{q})} \left\langle \left( \frac{\delta}{\delta A_j^a(-\mathbf{q})} \langle O[A, \Psi] \rangle_Q \right) \right\rangle \quad (\text{B.42})$$

zeigen läßt. Diese impliziert bei Verwendung der Entwicklung (3.53)

$$\langle A_i^a(\mathbf{q}) O[A, \Psi] \rangle \approx \frac{1}{2} \frac{t_{ij}(\mathbf{q})}{\omega(\mathbf{q})} \frac{\delta}{\delta A_j^a(-\mathbf{q})} \langle O[A, \Psi] \rangle_Q \Big|_{A=0}, \quad (\text{B.43})$$

womit wir für die beiden ersten Erwartungswerte in Gleichung (B.40) Folgendes erhalten:

$$\begin{aligned}
&\langle A_i^a(\mathbf{q}) \left( \text{id} - [\text{id} + K K^\dagger]^{-1} \right)^{s_2 s_1, m_2 m_1}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \rangle \\
&= -\frac{1}{2} \frac{t_{ij}(\mathbf{q})}{\omega(\mathbf{q})} \left\langle \left( \frac{\delta}{\delta A_j^a(-\mathbf{q})} [\text{id} + K K^\dagger]^{-1 s_2 s_1, m_2 m_1}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \frac{t_{ij}(\mathbf{q})}{\omega(\mathbf{q})} P(p_1) P(p_2) \frac{\delta}{\delta A_j^a(-\mathbf{q})} (K K^\dagger)^{s_2 s_1, m_2 m_1}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \Big|_{A=0} \\
&= \delta(\mathbf{q} + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \frac{t_{ij}(\mathbf{q})}{4\omega(\mathbf{q})} \frac{g t_a^{m_2 m_1}}{\sqrt{p_1 p_2}} P(p_1) P(p_2)
\end{aligned}$$

<sup>93</sup>Man beachte, daß die Funktionalableitung ausschließlich auf den fermionischen Erwartungswert  $\langle O[A, \Psi] \rangle_Q$  und nicht auf das in  $\langle \dots \rangle$  enthaltene bosonische Wellenfunktional wirkt.

$$\begin{aligned} & \times u^{s_2^\dagger}(\mathbf{p}_2) \left[ \beta V(-\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \left( S(p_2) - S(p_1) \right) \right. \\ & \quad \left. - W(-\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \left( S(p_1) + S(p_2) \right) \right] \alpha_j u^{s_1}(\mathbf{p}_1), \end{aligned} \quad (\text{B.44a})$$

$$\begin{aligned} & \langle A_i^a(\mathbf{q}) [\text{id} + K^\dagger K]^{-1 s_2 s_1, m_2 m_1}(-\mathbf{p}_2, -\mathbf{p}_1) \rangle \\ & = -\delta(\mathbf{q} + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \frac{t_{ij}(\mathbf{q}) g_a^{t_{m_2 m_1}}}{4\omega(\mathbf{q}) \sqrt{p_1 p_2}} P(p_1) P(p_2) \\ & \quad \times v^{s_2^\dagger}(-\mathbf{p}_2) \left[ \beta V(-\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \left( S(p_2) - S(p_1) \right) \right. \\ & \quad \left. + W(-\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \left( S(p_1) + S(p_2) \right) \right] \alpha_j v^{s_1}(-\mathbf{p}_1) \end{aligned} \quad (\text{B.44b})$$

Nach Multiplikation mit  $D_1$  bzw.  $D_2$  und Ausführen der Summation über die Spinindizes verschwindet jeweils der Anteil  $\sim V$ , sodaß diese beiden Terme nur für  $W \neq 0$  zum Erwartungswert beitragen. Das ist soweit noch in Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus Referenz [23–25]. Für den dritten Erwartungswert ergibt sich

$$\begin{aligned} & \langle A_i^a(\mathbf{q}) \left( [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} K^\dagger \right)^{s_2 s_1, m_2 m_1}(-\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \rangle \\ & = \frac{1}{2} \frac{t_{ij}(\mathbf{q})}{\omega(\mathbf{q})} \left\langle \left( \frac{\delta}{\delta A_j^a(-\mathbf{q})} \left( [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} K^\dagger \right)^{s_2 s_1, m_2 m_1}(-\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

mit der Ableitung:

$$\begin{aligned} & \left\langle \left( \frac{\delta}{\delta A(10)} [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} (2, 3) K^\dagger(3, 1) \right) \right\rangle \\ & = -\left\langle [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} (2, 4) \frac{\delta(K^\dagger K)(4, 5)}{\delta A(10)} [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} (5, 3) K^\dagger(3, 1) \right\rangle \\ & \quad + \left\langle [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} (2, 3) \frac{\delta K^\dagger(3, 1)}{\delta A(10)} \right\rangle \quad (\text{B.46a}) \\ & = -\left\langle [\sim]^{-1} (2, 4) \left( \frac{\delta K^\dagger(4, 6)}{\delta A(10)} K(6, 5) + K^\dagger(4, 6) \frac{\delta K(6, 5)}{\delta A(10)} \right) [\sim]^{-1} (5, 3) K^\dagger(3, 1) \right\rangle \\ & \quad + \left\langle [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} (2, 3) \frac{\delta K^\dagger(3, 1)}{\delta A(10)} \right\rangle \\ & = -\left\langle [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} (2, 4) \frac{\delta K^\dagger(4, 6)}{\delta A(10)} [\text{id} + K K^\dagger]^{-1} (6, 5) (K K^\dagger)(5, 1) \right\rangle \\ & \quad - \left\langle [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} (2, 4) K^\dagger(4, 6) \frac{\delta K(6, 5)}{\delta A(10)} [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} (5, 3) K^\dagger(3, 1) \right\rangle \\ & \quad + \left\langle [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} (2, 3) \frac{\delta K^\dagger(3, 1)}{\delta A(10)} \right\rangle \\ & = -\left\langle [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} (2, 4) \frac{\delta K^\dagger(4, 1)}{\delta A(10)} \right\rangle + \left\langle [\sim]^{-1} (2, 4) \frac{\delta K^\dagger(4, 6)}{\delta A(10)} [\sim]^{-1} (6, 1) \right\rangle \\ & \quad - \left\langle [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} (2, 4) K^\dagger(4, 6) \frac{\delta K(6, 5)}{\delta A(10)} [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} (5, 3) K^\dagger(3, 1) \right\rangle \\ & \quad + \left\langle [\text{id} + K^\dagger K]^{-1} (2, 3) \frac{\delta K^\dagger(3, 1)}{\delta A(10)} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle [\text{id} + K^\dagger K]^{-1}(2, 4) \frac{\delta K^\dagger(4, 6)}{\delta A(10)} [\text{id} + K K^\dagger]^{-1}(6, 1) \rangle \\
&\quad - \langle [\text{id} + K^\dagger K]^{-1}(2, 4) K^\dagger(4, 6) \frac{\delta K(6, 5)}{\delta A(10)} [\text{id} + K^\dagger K]^{-1}(5, 3) K^\dagger(3, 1) \rangle \quad (\text{B.46b}) \\
&\approx P(p_1)P(p_2) \frac{\delta K^\dagger(2, 1)}{\delta A(10)} - P(p_2)P(p_3)K^\dagger(2, 6) \frac{\delta K(6, 3)}{\delta A(10)} K^\dagger(3, 1) \Big|_{A=0} \\
&= \delta(\mathbf{q} + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \frac{g_a^{t_{m_2 m_1}}}{2\sqrt{p_1 p_2}} P(p_1)P(p_2) \\
&\quad \times v^{s_2^\dagger}(-\mathbf{p}_2) \left[ V(-\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \left( 1 + S(p_1)S(p_2) \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \beta W(-\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \left( 1 - S(p_1)S(p_2) \right) \right] \alpha_j u^{s_1}(\mathbf{p}_1) \quad (\text{B.46c})
\end{aligned}$$

An dieser Stelle zeigen sich deutliche Unterschiede zu den früheren Arbeiten [23–25]: Mit der dort verwendeten, auf der Näherung (3.54) beruhenden Berechnungsmethode ist der einzige nicht-verschwindende Beitrag der zweite Term in Gleichung (B.46a). Dieser Beitrag verschwindet im Verlauf unserer Rechnung vollständig. Da sämtliche Umformungen bis Gleichung (B.46b) auf der exakten Relation (B.42) beruhen, ist das keine Folge von Näherungen, sondern gilt identisch. Diese grundlegend verschiedene Form des Erwartungswerts des Kopplungsterms hat entscheidenden Einfluß auf die Struktur der Vektorkerne.

Für den vierten Erwartungswert in Gleichung (B.40) erhalten wir analog zum Dritten:

$$\begin{aligned}
&\langle A_i^a(\mathbf{q}) \left( [\text{id} + K K^\dagger]^{-1} K \right)^{s_2 s_1, m_2 m_1}(\mathbf{p}_2, -\mathbf{p}_1) \rangle \\
&= \delta(\mathbf{q} + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \frac{t_{ij}(\mathbf{q})}{4\omega(\mathbf{q})} \frac{g_a^{t_{m_2 m_1}}}{\sqrt{p_1 p_2}} P(p_1)P(p_2) \\
&\quad \times u^{s_2^\dagger}(\mathbf{p}_2) \left[ V(-\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \left( 1 + S(p_1)S(p_2) \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + \beta W(-\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \left( 1 - S(p_1)S(p_2) \right) \right] \alpha_j v^{s_1}(-\mathbf{p}_1) \quad (\text{B.47})
\end{aligned}$$

Setzen wir die einzelnen Erwartungswerte in Gleichung (B.40) ein und führen die verbleibenden Dirac- und Farbspuren aus, so erhalten wir das in Gleichung (3.75) angegebene Ergebnis. Dabei verschwinden beim dritten und vierten Term die Beiträge  $\sim W$ .

### B.1.5 Kinetische Energie der transversalen Gluonen

Wir betrachten zunächst diejenigen Terme in Gleichung (3.82), welche die Faddeev–Popov-Determinante  $J$  enthalten,

$$\tilde{H}_{\text{YM}}^E \Big|_J = -\frac{1}{8} \int \mathrm{d}^3 p \left( \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln J \right] \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln J \right] + 2 \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln J \right] \right). \quad (\text{B.48})$$

Da diese keine freien Impulsoperatoren aufweisen, welche auf das Wellenfunktional wirken könnten, stellen sie reine Funktionale im Eichfeld dar. Ihr Erwartungswert läßt sich bei Verwendung des genäherten Ausdrucks (3.15) für  $J$  sehr einfach bilden:

$$-\frac{1}{8} \left\langle \int \mathrm{d}^3 p \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln J \right] \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln J \right] \right\rangle = \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) \int \mathrm{d}^3 p \frac{\chi^2(p)}{\omega(p)}, \quad (\text{B.49a})$$

$$-\frac{1}{4} \left\langle \int \mathrm{d}^3 p \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln J \right] \right\rangle = -(N_C^2 - 1) \delta^3(0) \int \mathrm{d}^3 p \chi(p) \quad (\text{B.49b})$$

Als nächstes betrachten wir die Terme in Gleichung (3.82), welche keine Faddeev–Popov-Determinante enthalten,

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{YM}}^E|_{J=0} = & \frac{1}{2} \int d^3p \left( \Pi_i^a(\mathbf{p})\Pi_i^a(-\mathbf{p}) - \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right] \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right] \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln I \right] - \frac{1}{2} \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p})\Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln I \right] \right). \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Diese weisen sowohl freie, als auch an die Fermideterminante  $I$  gebundene Impulsoperatoren auf. Für die weitere Rechnung wäre es angenehm, analog zur Faddeev–Popov- auch für die Fermideterminante eine Gauß'sche Form der Art (3.15) anzunehmen, allerdings ist das nicht in selbstkonsistenter Weise möglich. Um dennoch zu Vereinfachungen zu gelangen, bietet es sich an, zunächst eine partielle Integration im Eichfeld im Erwartungswert von Gleichung (B.50) durchzuführen. Da der bosonische Anteil des Erwartungswerts ein Funktionalintegral im Eichfeld darstellt [siehe Gleichung (3.47)], ist das bei Vorliegen freier Impulsoperatoren (d.h. Funktionalableitungen) möglich und liefert für beliebige Funktionale  $f, g$

$$\int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^*[A] f[A] \Pi g[A] \tilde{\phi}_{\text{YM}}[A] = - \int \mathcal{D}A \left[ \Pi \tilde{\phi}_{\text{YM}}^*[A] f[A] \right] g[A] \tilde{\phi}_{\text{YM}}[A]. \quad (\text{B.51})$$

Dabei haben wir vorausgesetzt, daß die Oberflächenterme verschwinden. Wenden wir das auf den Erwartungswert des zweiten Terms in Gleichung (B.50) an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}|^{-2} \langle \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right] \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \rangle \\ = \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}} I^{-1} \langle \phi_{\text{Q}} | \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right] \Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_{\text{Q}} \rangle \tilde{\phi}_{\text{YM}} \end{aligned} \quad (\text{B.52a})$$

$$\begin{aligned} &= - \int \mathcal{D}A \left( \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}} I^{-1} \langle \phi_{\text{Q}} | \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right] | \phi_{\text{Q}} \rangle \tilde{\phi}_{\text{YM}} \right. \\ &= - \int \mathcal{D}A \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}} \right] I^{-1} \langle \phi_{\text{Q}} | \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right] | \phi_{\text{Q}} \rangle \tilde{\phi}_{\text{YM}} \\ &\quad + \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2 \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln I \right] I^{-1} \langle \phi_{\text{Q}} | \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right] | \phi_{\text{Q}} \rangle \\ &\quad - \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2 I^{-1} \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \langle \phi_{\text{Q}} | \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right] | \phi_{\text{Q}} \rangle \right. \\ &\quad \left. - \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2 I^{-1} \langle \phi_{\text{Q}} | \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right] | \phi_{\text{Q}} \rangle \right. \\ &= - \int \mathcal{D}A \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}} \right] \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right] \tilde{\phi}_{\text{YM}} \\ &\quad + \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2 \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln I \right] \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right] \\ &\quad - \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2 I^{-1} \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \langle \phi_{\text{Q}} | \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right] | \phi_{\text{Q}} \rangle \right. \\ &\quad \left. - \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2 \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right], \end{aligned} \quad (\text{B.52b})$$

wobei wir berücksichtigt haben, daß die Fermideterminante  $I$  keine Quarkfelder enthält und bei Verwendung eines reellwertigen bosonischen Variationskerns  $\tilde{\phi}_{\text{YM}}^* = \tilde{\phi}_{\text{YM}}$  gilt. Anhand



von Gleichung (B.52a) ergibt sich zudem

$$|\mathcal{N}|^{-2} \langle [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I] \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \rangle = \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2 I^{-1} \langle \phi_Q | [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I] [\Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q] \rangle + \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}} [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I] [\Pi_i^a(-\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}}]. \quad (\text{B.53})$$

Da weiterhin die Definition der Fermideterminante (3.35) die Relation

$$[\Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I] = I^{-1} [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \langle \phi_Q |] | \phi_Q \rangle + I^{-1} \langle \phi_Q | [\Pi_i^a(\mathbf{p}) | \phi_Q] \quad (\text{B.54})$$

impliziert, erhalten wir aus dem Vergleich von Gleichung (B.52b) mit (B.53) die Identität

$$2 \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}} [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I] [\Pi_i^a(-\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}}] = - \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2 [\Pi_i^a(-\mathbf{p}) \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I] \quad (\text{B.55})$$

und nach deren Einsetzen in Gleichung (B.53)

$$\begin{aligned} & \langle [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I] \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \rangle + \frac{1}{2} \langle [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln I] \rangle = \\ & = |\mathcal{N}|^2 \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2 I^{-1} \langle \phi_Q | [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I] [\Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q] \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

Als nächstes betrachten wir den Erwartungswert des ersten Terms in Gleichung (B.50):

$$\begin{aligned} & |\mathcal{N}|^{-2} \langle \Pi_i^a(\mathbf{p}) \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \rangle \\ & = \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}} I^{-1} \langle \phi_Q | \Pi_i^a(\mathbf{p}) \Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q \rangle \tilde{\phi}_{\text{YM}} \\ & = - \int \mathcal{D}A [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}} I^{-1} \langle \phi_Q |] [\Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q] \tilde{\phi}_{\text{YM}} \\ & = - \int \mathcal{D}A \left( [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}}] I^{-1} \langle \phi_Q | - \tilde{\phi}_{\text{YM}} [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I] I^{-1} \langle \phi_Q | \right. \\ & \quad \left. + \tilde{\phi}_{\text{YM}} I^{-1} [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \langle \phi_Q |] \right) \left( [\Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q] \tilde{\phi}_{\text{YM}} + | \phi_Q \rangle [\Pi_i^a(-\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}}] \right) \\ & = - \int \mathcal{D}A [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}}] I^{-1} \langle \phi_Q | [\Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q] \tilde{\phi}_{\text{YM}} \\ & \quad - \int \mathcal{D}A [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}}] [\Pi_i^a(-\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}}] \\ & \quad + \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2 [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I] I^{-1} \langle \phi_Q | [\Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q] \rangle \\ & \quad + \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}} [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I] [\Pi_i^a(-\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}}] \\ & \quad - \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2 I^{-1} [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \langle \phi_Q |] [\Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q] \rangle \\ & \quad - \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}} I^{-1} [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \langle \phi_Q |] | \phi_Q \rangle [\Pi_i^a(-\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}}] \\ & = - \int \mathcal{D}A [\Pi_i^a(\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}}] [\Pi_i^a(-\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2 \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right] I^{-1} \langle \phi_Q | \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q \rangle \right] \\
& - \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2 I^{-1} \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \langle \phi_Q | \right] \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q \rangle \right], \tag{B.57}
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Identität (B.54) verwendet haben. Damit reduziert sich der Erwartungswert von Gleichung (B.50) auf

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{H}_{\text{YM}}^E |_{J=0} \rangle & = -\frac{1}{2} |\mathcal{N}|^2 \int \tilde{d}^3 p \int \mathcal{D}A \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}}[A] \right] \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}}[A] \right] \\
& - \frac{1}{2} |\mathcal{N}|^2 \int \tilde{d}^3 p \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2[A] I^{-1}[A] \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \langle \phi_Q[A] | \right] \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q[A] \rangle \right] \\
& + \frac{1}{8} |\mathcal{N}|^2 \int \tilde{d}^3 p \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2[A] \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I[A] \right] \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln I[A] \right]. \tag{B.58}
\end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist rein bosonischer Natur und lässt sich nach Ausführen der Funktionalableitungen einfach auswerten:

$$-\frac{1}{2} |\mathcal{N}|^2 \int \tilde{d}^3 p \int \mathcal{D}A \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}}[A] \right] \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \tilde{\phi}_{\text{YM}}[A] \right] = \frac{N_{\text{C}}^2 - 1}{2} \delta^3(0) \int \tilde{d}^3 p \omega(p) \tag{B.59}$$

Der zweite Term ist fermionischen Ursprungs und entspricht nach Berechnung der Funktionalableitungen dem Erwartungswert eines Produkts aus vier Erzeuger- bzw. Vernichtoperatoren,

$$I^{-1} \left[ \Pi \langle \phi_Q | \right] \left[ \Pi | \phi_Q \rangle \right] \sim \langle b a a^\dagger b^\dagger \rangle_{\text{Q}}. \tag{B.60}$$

Dieser lässt sich mittels des Wick'schen Theorems in die Form

$$I^{-1} \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \langle \phi_Q | \right] \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q \rangle \right] = I^{-2} \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \langle \phi_Q | \right] | \phi_Q \rangle \langle \phi_Q | \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q \rangle \right] + Q \tag{B.61}$$

bringen, wobei

$$Q \sim \langle b b^\dagger \rangle_{\text{Q}} \langle a a^\dagger \rangle_{\text{Q}} \tag{B.62}$$

den Termen entspricht, die entstehen wenn ein Erzeuger-/Vernichtoperator aus  $[\Pi \langle \phi_Q |]$  mit einem aus  $[\Pi | \phi_Q \rangle]$  kontrahiert wird. Da sich für den dritten Term in Gleichung (B.58) mit der Relation (B.54) die Identität

$$\begin{aligned}
I^2 \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln I \right] \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln I \right] & = \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \langle \phi_Q | \right] | \phi_Q \rangle \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \langle \phi_Q | \right] | \phi_Q \rangle \\
& + \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \langle \phi_Q | \right] | \phi_Q \rangle \langle \phi_Q | \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q \rangle \right] \\
& + \langle \phi_Q | \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) | \phi_Q \rangle \right] \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \langle \phi_Q | \right] | \phi_Q \rangle \\
& + \langle \phi_Q | \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) | \phi_Q \rangle \right] \langle \phi_Q | \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q \rangle \right] \tag{B.63}
\end{aligned}$$

ergibt, läßt sich der Erwartungswert (B.58) schließlich in die Form

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{H}_{\text{YM}}^E |_{J=0} \rangle &= \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p \omega(p) - \frac{1}{2} |\mathcal{N}|^2 \int \bar{d}^3 p \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2 Q \\
&\quad + \frac{1}{8} |\mathcal{N}|^2 \int \bar{d}^3 p \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}^2 I^{-2} \\
&\quad \times \left( \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \langle \phi_Q | \right] | \phi_Q \rangle \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \langle \phi_Q | \right] | \phi_Q \rangle \right. \\
&\quad \quad - 2 \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \langle \phi_Q | \right] | \phi_Q \rangle \langle \phi_Q | \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q \rangle \right] \\
&\quad \quad \left. + \langle \phi_Q | \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) | \phi_Q \rangle \right] \langle \phi_Q | \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) | \phi_Q \rangle \right] \right) \quad (\text{B.64})
\end{aligned}$$

bringen. Waren bislang sämtliche Umformungen von Gleichung (B.58) exakt, so sind wir für die verbleibende Auswertung des zweiten und dritten Terms in Gleichung (B.64) auf die Reihenentwicklung (3.53) angewiesen. Dabei zeigt sich, daß bereits der jeweils führende Beitrag auf Zweischleifenniveau ist womit wir insgesamt auf das Ergebnis

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{H}_{\text{YM}}^E |_{J=0} \rangle &= \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) g^2 \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q P(p) P(q) V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) V(\mathbf{q}, \mathbf{p}) X(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\
&\quad + \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) g^2 \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q P(p) P(q) W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) Y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\
&\quad + \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p \omega(p) \quad (\text{B.65})
\end{aligned}$$

kommen. Dieses entspricht zusammen mit Gleichung (B.49) dem in Gleichung (3.83) angegebenen Ausdruck. Der fermionische Beitrag entspringt dabei vollständig der gemischten Kontraktion  $Q$ , während sich die übrigen fermionischen Terme auf Zweischleifenniveau gegenseitig kompensieren.

## B.2 Endliche Temperaturen

### B.2.1 Bosonische thermische Erwartungswerte

Wir gehen im Folgenden auf die Berechnung bosonischer thermischer Erwartungswerte ein, welche sich durch die Anwesenheit des Dichteoperators und der Spur über die Vielteilchenzustände von der Erwartungswertbildung im Nulltemperaturlimes unterscheidet. Dabei orientieren wir uns am Vorgehen in den Referenzen [51, 110] und führen zunächst bosonische kohärente Zustände

$$|\chi\rangle \equiv \exp\left[\mathbf{a}^\dagger(1)\chi(1)\right] |\tilde{\phi}_{\text{YM}}\rangle, \quad (\text{B.66a})$$

$$\langle \chi | \equiv \langle \tilde{\phi}_{\text{YM}} | \exp\left[\chi^*(1)\mathbf{a}(1)\right] \quad (\text{B.66b})$$

ein, wobei  $\chi \in \mathbb{C}$  ist. Da

$$\mathbf{a}_i^a(\mathbf{p}) |\chi\rangle = \chi_i^a(\mathbf{p}) |\chi\rangle \quad (\text{B.67})$$

gilt, entsprechen diese komplexen Zahlen den Eigenwerten der bosonischen Vernichterooperatoren mit den kohärenten Zuständen als zugehörigen Eigenzuständen. Es läßt sich zeigen,

daß die kohärenten Zustände (B.66) eine übervollständige Basis mit der Vollständigkeitsrelation

$$\text{id} = \int d\mu(\chi) |\chi\rangle\langle\chi| \quad (\text{B.68})$$

bilden, wobei das Integrationsmaß durch

$$d\mu(\chi) = \left( \prod_{\mathbf{p}, i, a} \frac{d\chi_i^{a*}(\mathbf{p}) d\chi_i^a(\mathbf{p})}{2\pi i} \right) \exp \left[ -\chi^*(1)\chi(1) \right] \quad (\text{B.69})$$

gegeben ist [51].

Durch Einschieben von Identitäten (B.67) sowie unter Verwendung der Vollständigkeit der Basis (4.7),

$$\text{id} = |\mathcal{N}_{\text{YM}}|^2 \sum_n \langle \tilde{n} | \tilde{n} \rangle, \quad (\text{B.70})$$

ergibt sich für einen beliebigen Operator  $O$  der Zusammenhang

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}_{\text{YM}}|^2 \sum_n \langle \tilde{n} | O | \tilde{n} \rangle &= |\mathcal{N}_{\text{YM}}|^2 \sum_n \int d\mu(\chi) \int d\mu(\varphi) \langle \tilde{n} | \varphi \rangle \langle \varphi | O | \chi \rangle \langle \chi | \tilde{n} \rangle \\ &= \int d\mu(\varphi) \langle \varphi | O | \varphi \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

aus welchem für den bosonischen Anteil des thermischen Erwartungswerts (4.40)

$$\begin{aligned} \|O\| &= |\mathcal{N}_{\text{YM}}|^2 \sum_n \langle \tilde{n} | \tilde{\mathcal{D}}_{\text{YM}} O | \tilde{n} \rangle = |\mathcal{N}_{\text{YM}}|^2 \sum_n \langle \tilde{n} | O \tilde{\mathcal{D}}_{\text{YM}} | \tilde{n} \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{YM}}} \int d\mu(\varphi) \langle \varphi | O \exp(-\beta h_{\text{YM}}) | \varphi \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

folgt. Dabei haben wir im zweiten Schritt die Zyklizität der Spur über die Zustände  $|\tilde{n}\rangle$  genutzt. Setzen wir nun die Definition der kohärenten Zustände (B.66) ein, so ergibt sich aufgrund von  $\exp(\beta h_{\text{YM}}) |\tilde{\phi}_{\text{YM}}\rangle = |\tilde{\phi}_{\text{YM}}\rangle$  zunächst

$$\exp(-\beta h_{\text{YM}}) |\varphi\rangle = \exp \left[ \exp(-\beta h_{\text{YM}}) \mathbf{a}^\dagger(1) \varphi(1) \exp(\beta h_{\text{YM}}) \right] |\tilde{\phi}_{\text{YM}}\rangle, \quad (\text{B.73})$$

was sich mithilfe der *Lie'schen Entwicklungsformel*,

$$\exp(A) B \exp(-A) = \sum_k \frac{1}{k!} [A, B]_k, \quad (\text{B.74a})$$

wobei

$$[A, B]_k = \left[ A, [A, B]_{k-1} \right] \quad \text{mit} \quad [A, B]_0 = B \quad (\text{B.74b})$$

gilt, zu

$$\exp(-\beta h_{\text{YM}}) |\varphi\rangle = \exp \left( \exp(-\beta \Omega(p_1)) \varphi(1) \mathbf{a}^\dagger(1) \right) |\tilde{\phi}_{\text{YM}}\rangle = |\exp(-\beta \Omega) \varphi\rangle \quad (\text{B.75})$$

umformen läßt. Dadurch finden wir für den thermischen Erwartungswert (B.72)

$$\|O\| = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{YM}}} \int d\mu(\varphi) \langle \varphi | O | \exp(-\beta\Omega) \varphi \rangle. \quad (\text{B.76})$$

Anstatt dieses Funktionalintegral über die kohärenten Bosezustände für sämtliche relevante Operatoren  $O$  explizit auszuwerten, bietet es sich an, analog zum Nulltemperaturlimit ein bosonisches Erzeugendes Funktional

$$\mathfrak{Z}_{\text{YM}}[J] \equiv |\mathcal{N}_{\text{YM}}|^2 \sum_n \langle \tilde{n} | \tilde{\mathcal{D}}_{\text{YM}} \exp(\mathfrak{a}^\dagger(1)J(1)) \exp(\mathfrak{a}(2)J^*(2)) | \tilde{n} \rangle \quad (\text{B.77})$$

einzuführen, wobei die komplexwertigen Quellfelder mit  $J$  bezeichnet werden. Nach Einsetzen von Gleichung (B.76) läßt sich das Erzeugende Funktional auf ein komplexes Gaußintegral reduzieren und auflösen,

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_{\text{YM}}[J] &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{YM}}} \int d\mu(\varphi) \langle \varphi | \exp(\mathfrak{a}^\dagger(1)J(1)) \exp(\mathfrak{a}(2)J^*(2)) | \exp(-\beta\Omega) \varphi \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{YM}}} \int d\mu(\varphi) \exp(\varphi^*(1)J(1)) \exp(J^*(2) \exp(-\beta\Omega(p_2))\varphi(2)) \\ &\quad \times \exp(\varphi^*(3) \exp(-\beta\Omega(p_3))\varphi(3)) \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{YM}}} \int \left( \prod \frac{d\varphi^* d\varphi}{2\pi i} \right) \exp(-\varphi^*(1) [1 - \exp(-\beta\Omega(p_1))] \varphi(1) \\ &\quad + \varphi^*(1)J(1) + J^*(1) \exp(-\beta\Omega(p_1))\varphi(1)) \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{YM}}} \left( \det \left\{ \text{id} [1 - \exp(-\beta\Omega(p))] \right\} \right)^{-1} \exp(J^*(1)n(p_1)J(1)). \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt die bosonischen thermischen Besetzungszahlen (4.19) eingeführt. Da  $\mathfrak{Z}_{\text{YM}}[0] = 1$  ist, läßt sich damit auch die bosonische Zustandssumme bestimmen,

$$\mathcal{Z}_{\text{YM}} = \left( \det \left\{ \text{id} [1 - \exp(-\beta\Omega(p))] \right\} \right)^{-1}. \quad (\text{B.79})$$

Aus dem Erzeugenden Funktional (B.77) lassen sich die thermischen Erwartungswerte *normalgeordneter* Operatoren  $N$ , bei denen sämtliche Erzeuger  $\mathfrak{a}^\dagger$  links von den Vernichtern  $\mathfrak{a}$  stehen, durch Ableiten nach den Quellfeldern bestimmen,

$$\|N[\mathfrak{a}^\dagger(1), \mathfrak{a}(2)]\| = N[\delta/\delta J(1), \delta/\delta J^*(2)] \mathfrak{Z}_{\text{YM}}[J] |_{J=0}. \quad (\text{B.80})$$

Das ist für den reinen Yang–Mills-Sektor ausreichend und liefert für die bosonischen Propagatoren die in Gleichung (4.18), (4.21) und (4.22) aufgeführten Ergebnisse. Die Bestimmung des bosonischen Erwartungswerts fermionischer Operatoren in der vollen QCD ist aufgrund der fehlenden Normalordnung mit dem Funktional (B.77) aber nicht möglich, weshalb wir zusätzlich das ausschließlich Eichfeld-abhängige Funktional

$$\mathfrak{Z}_{\text{YM}}^A[j] \equiv |\mathcal{N}_{\text{YM}}|^2 \sum_n \langle \tilde{n} | \tilde{\mathcal{D}}_{\text{YM}} \exp(j(1)A(1)) | \tilde{n} \rangle \quad (\text{B.81})$$

einführen. Dieses läßt sich nach Einsetzen der Zerlegung (4.3) für das Eichfeld und unter Verwendung der *Baker–Campbell–Hausdorff-Formel*<sup>94</sup>

$$\exp(\tau(A+B)) = \exp(\tau A) \exp\left(-\frac{1}{2}\tau^2[A, B]\right) \exp(\tau B) \quad (\text{B.82})$$

durch das Erzeugende Funktional (B.77) ausdrücken wodurch sich

$$\mathfrak{Z}_{\text{YM}}^A[j] = \exp\left(\frac{1}{4} \int \mathrm{d}^3p j_i^a(\mathbf{p}) t_{ij}(\mathbf{p}) \frac{1+2n(p)}{\omega(p)} j_j^a(-\mathbf{p})\right) \quad (\text{B.83})$$

ergibt. Vergleichen wir dieses Resultat mit dem Erzeugenden Funktional für  $T = 0$ , Gleichung (B.4), so zeigt sich, daß beide Funktionale bis auf die Ersetzung  $1/\omega \rightarrow (1+2n)/\omega$  übereinstimmen. Da das auch für das Erzeugende Funktional (B.83) und Gleichung (3.8) der Fall sein muß, folgt hieraus die Gültigkeit des Wick'schen Theorems in der Form (4.20) bei endlichen Temperaturen und chemischen Potentialen. Ebenso impliziert die Gestalt des Erzeugenden Funktionals (B.83), daß die im Nulltemperaturlimes gefundenen Aussagen des allgemeinen Wick'schen Theorems (vgl. Anhang B.1.1) erhalten bleiben: Der thermische Erwartungswert eines Produkts aus einer ungeraden Anzahl an Eichfeldern verschwindet, während sich das einer geraden Anzahl auf die Summe der Produkte aller möglicher Kontraktionen reduziert.

## B.2.2 Fermionische thermische Erwartungswerte

Zur Berechnung fermionischer thermischer Erwartungswerte verfahren wir wie in Referenz [110] und führen zunächst die kohärenten Zustände

$$|\xi\rangle \equiv |\xi_+, \xi_-^*\rangle = \exp\left[\mathcal{A}^\dagger(1)\xi_+(1) + \mathcal{B}^\dagger(1)\xi_-^*(1)\right] |\phi_{\text{Q}}\rangle, \quad (\text{B.84a})$$

$$\langle\xi| \equiv \langle\xi_+^*, \xi_-| = \langle\phi_{\text{Q}}| \exp\left[\xi_+^*(1)\mathcal{A}(1) + \xi_-(1)\mathcal{B}(1)\right] \quad (\text{B.84b})$$

ein, welche im Gegensatz zum Nulltemperaturlimes (B.8) die Bogoljubov-transformierten Quasiteilchenoperatoren (4.31), (4.32) enthalten. Man beachte, daß wir zur Bezeichnung der Zustände sowie der Graßmannfelder dieselbe Notation wie in Anhang B.1.2 verwendet haben, was aber zu keinerlei Irritationen führen sollte. Bis auf die Ersetzung  $a \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $b \rightarrow \mathcal{B}$  erfüllen die kohärenten Zustände (B.84) dieselben Eigenwertgleichungen (B.10) wie die Zustände (B.8). Selbiges gilt für die Vollständigkeitsrelation (B.11) mit (B.12) sowie die Algebra (B.9) der Graßmannfelder  $\xi_\pm$ .

Der fermionische thermische Erwartungswert (4.43) eines Operators  $O$  läßt sich in völliger Analogie zu dem im vorherigen Abschnitt B.2.1 betrachteten Bosonischen umformen, wobei wir zu beachten haben, daß aufgrund der Graßmannalgebra Vertauschungen von Feldern zu zusätzlichen Vorzeichen führen. Unter der Annahme, daß der Operator  $O$  eine gerade Anzahl an Fermioperatoren enthält – was in dieser Arbeit stets der Fall sein wird – ergibt sich

$$\langle\langle O \rangle\rangle_{\text{Q}} = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{Q}}} \int \mathrm{d}\mu(\xi) \langle -\xi_+^*, -\xi_- | O | \xi_+ \exp(-\beta\varepsilon_+), \xi_-^* \exp(-\beta\varepsilon_-) \rangle, \quad (\text{B.85})$$

<sup>94</sup>Es gilt  $[\mathfrak{a}(1), [\mathfrak{a}(2), \mathfrak{a}^\dagger(3)]] = 0$ .

vgl. Gleichung (B.76). Das negative Vorzeichen im Brazustand ist dabei eine Folge der Vertauschungen im zu Gleichung (B.72) äquivalenten Schritt.

Für das gemäß

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_Q[\eta] \equiv \sum_{n_A, n_B} I^{-1}[A] \langle n_A n_B | \mathcal{D}_Q \exp\left(\mathcal{A}^\dagger(1)\eta_+(1) - \mathcal{B}^\dagger(1)\eta_-^*(1)\right) \\ \times \exp\left(\eta_+^*(2)\mathcal{A}(2) - \eta_-(2)\mathcal{B}(2)\right) | n_A n_B \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.86})$$

definierte fermionische Erzeugende Funktional folgt damit:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_Q[\eta] &= \frac{1}{\mathcal{Z}_Q} \int d\mu(\xi) \langle -\xi_+^*, -\xi_- | \exp\left(\mathcal{A}^\dagger(1)\eta_+(1) - \mathcal{B}^\dagger(1)\eta_-^*(1)\right) \\ &\quad \times \exp\left(\eta_+^*(2)\mathcal{A}(2) - \eta_-(2)\mathcal{B}(2)\right) | \xi_+ \exp(-\beta\varepsilon_+), \xi_-^* \exp(-\beta\varepsilon_-) \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_Q} \int \left( \prod d\xi_+^* d\xi_+ d\xi_- d\xi_-^* \right) \\ &\quad \times \exp\left(-\xi_+^*(1) \left[1 + \exp(-\beta\varepsilon_+(p_1))\right] \xi_+(1) \right. \\ &\quad \left. - \xi_-^*(1) \left[-1 - \exp(-\beta\varepsilon_-(p_1))\right] \xi_-(1) \right. \\ &\quad \left. - \xi_+^*(1)\eta_+(1) + \xi_-^*(1) \exp(-\beta\varepsilon_-(p_1))\eta_-(1) \right. \\ &\quad \left. - \eta_+^*(1) \exp(-\beta\varepsilon_+(p_1))\xi_+(1) + \eta_-^*(1)\xi_-(1) \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_Q} \int d\xi^\dagger d\xi \exp\left(-\xi^\dagger(1)M(1,2)\xi(2) + \xi^\dagger(1)\varrho(1) + \varsigma^\dagger(1)\xi(1)\right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_Q} \det M \exp\left(\varsigma^\dagger(1)M^{-1}(1,2)\varrho(2)\right) \end{aligned} \quad (\text{B.87})$$

Ähnlich wie im Nulltemperaturlimes, Anhang B.1.2, haben wir im vorletzten Schritt die übergeordnete Vektornotation

$$\begin{aligned} \xi(1) &= \begin{pmatrix} \xi_+(1) \\ \xi_-(1) \end{pmatrix}, & \varrho(1) &= \begin{pmatrix} -\eta_+(1) \\ \exp(-\beta\varepsilon_-(p_1))\eta_-(1) \end{pmatrix}, \\ \xi^\dagger(1) &= \begin{pmatrix} \xi_+^*(1) \\ \xi_-^*(1) \end{pmatrix}^\text{T}, & \varsigma^\dagger(1) &= \begin{pmatrix} \eta_+^*(1) \exp(-\beta\varepsilon_+(p_1)) \\ \eta_-^*(1) \end{pmatrix}^\text{T} \end{aligned} \quad (\text{B.88})$$

mit der Matrix

$$M(1,2) = \delta(1,2) \begin{pmatrix} 1 + \exp(-\beta\varepsilon_+(p_1)) & 0 \\ 0 & -1 - \exp(-\beta\varepsilon_-(p_1)) \end{pmatrix} \quad (\text{B.89})$$

eingeführt. Aus der Bedingung  $\mathfrak{Z}_Q[0] = 1$  finden wir für die fermionische Zustandssumme

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_Q &= \det M = \det \left\{ \text{id} \left[ 1 + \exp(-\beta\varepsilon_+(p)) \right] \right\} \det \left\{ \text{id} \left[ -1 - \exp(-\beta\varepsilon_-(p)) \right] \right\} \\ &= \det \left\{ \text{id} \left[ 1 + \exp(-\beta\varepsilon_+(p)) \right] \right\} \det \left\{ \text{id} \left[ 1 + \exp(-\beta\varepsilon_-(p)) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.90})$$

wobei wir die Determinantenformel für Blockmatrizen sowie im letzten Schritt die zweifache Entartung der Eigenwerte im Spinraum verwendet haben.<sup>95</sup> Setzen wir dies zusammen mit der einfach bestimmbaren inversen Matrix  $M^{-1}$  sowie den Ausdrücken für  $\varrho, \varsigma$  wieder in Gleichung (B.87) ein, so ergibt sich für das Erzeugende Funktional

$$\mathfrak{Z}_Q[\eta] = \exp \left( - \int \mathrm{d}^3 p \left[ \eta_+^{s,m*}(\mathbf{p}) \mathcal{N}_+(\mathbf{p}) \eta_+^{s,m}(\mathbf{p}) + \eta_-^{s,m*}(\mathbf{p}) \mathcal{N}_-(\mathbf{p}) \eta_-^{s,m}(\mathbf{p}) \right] \right), \quad (\text{B.91})$$

wobei  $\mathcal{N}_\pm$  die fermionischen thermischen Besetzungszahlen (4.49) bezeichnet.

Analog zum Nulltemperaturlimes lassen sich aus den Ableitungen des Erzeugenden Funktionals (B.91) die thermischen Erwartungswerte von Paaren von Quasiteilchenoperatoren bestimmen. Beispielsweise gilt (man beachte, daß die Reihenfolge der Ableitungen aufgrund der Graßmannalgebra relevant ist)

$$\langle\langle \mathcal{A}^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) \mathcal{A}^{t,n}(\mathbf{q}) \rangle\rangle_Q = - \frac{\delta}{\delta \eta_+^{s,m}(\mathbf{p})} \frac{\delta}{\delta \eta_+^{t,n*}(\mathbf{q})} \mathfrak{Z}_Q[\eta] \Big|_{\eta=0} = \delta^{st} \delta^{mn} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \mathcal{N}_+(\mathbf{p}). \quad (\text{B.92})$$

Die übrigen Erwartungswerte folgen analog und liefern das in Gleichung (4.47) genannte Ergebnis. Aus dem Erzeugenden Funktional (B.91) läßt sich weiterhin auf die Gültigkeit der am Ende von Abschnitt B.1.2 genannten Aussagen des Wick'schen Theorems auch bei endlichen Temperaturen und chemischen Potentialen schließen. Dabei müssen die Nulltemperatur-Erwartungswerte lediglich durch die entsprechenden thermischen Erwartungswerte ersetzt werden.

### B.2.3 Kinetische Energie der transversalen Gluonen

Der thermische Erwartungswert der in Gleichung (B.48) angegebenen Bestandteile der transformierten kinetischen Energie (3.82), welche explizit die Faddeev–Popov-Determinante  $J$  enthalten, läßt sich unter Verwendung der Näherung (3.15) für  $J$  wie im Nulltemperaturlimes auswerten und liefert das (rein bosonische) Ergebnis

$$-\frac{1}{8} \left\| \int \mathrm{d}^3 p \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \ln J \right] \left[ \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln J \right] \right\| = \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) \int \mathrm{d}^3 p \frac{1 + 2n(p)}{\omega(p)} \chi^2(p), \quad (\text{B.93a})$$

$$-\frac{1}{4} \left\| \int \mathrm{d}^3 p \left[ \Pi_i^a(\mathbf{p}) \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \ln J \right] \right\| = -(N_C^2 - 1) \delta^3(0) \int \mathrm{d}^3 p \chi(p), \quad (\text{B.93b})$$

vgl. Gleichung (B.49).

Für diejenigen Bestandteile die keine Faddeev–Popov-Determinante enthalten [Gleichung (B.50)], müssen wir unsere Herangehensweise dagegen modifizieren. Anders als im Nulltemperaturlimes ist es bei endlichen Temperaturen nicht länger hilfreich, für freie Impulsoperatoren eine partielle Integration im Eichfeld durchzuführen, da die entstehende Funktionalableitung u.a. auf die Dichteoperatoren (4.44), (4.45) fallen und die Berechnung dadurch erschwert würde. Wir lassen daher sämtliche Funktionalableitungen ausschließlich nach rechts auf die Vielteilchenzustände  $|n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}}\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle$  wirken.

<sup>95</sup>Die Determinanten in Gleichung (B.90) sind auf dem positiven bzw. negativen Eigenraum des durch die Bogoljubovtransformation entstehenden effektiven Einteilchenoperators zu bilden, vgl. Anhang C.3 für den entsprechenden Operator im Limes  $T \rightarrow 0, g \rightarrow 0$ .



Fällt die Ableitung auf den fermionischen Anteil  $|n_{\mathcal{A}}n_{\mathcal{B}}\rangle$ , so müssen wir berücksichtigen, daß die Quasiteilchenoperatoren  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  [Gleichung (4.31), (4.32)] explizit Eichfeld-abhängig sind und die Funktionalableitung auf sämtliche Quasiteilchenoperatoren wirken kann, die im Vielteilchenzustand *aktiv*, d.h. enthalten sind:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta A(9)} |n_{\mathcal{A}}n_{\mathcal{B}}\rangle &= \left( \frac{\delta}{\delta A(9)} \mathcal{A}^\dagger(1) \right) \mathcal{A}^\dagger(1') \dots \mathcal{B}^\dagger(2) \dots |\phi_{\mathcal{Q}}\rangle + \dots \\ &+ \mathcal{A}^\dagger(1) \dots \left( \frac{\delta}{\delta A(9)} \mathcal{B}^\dagger(2) \right) \mathcal{B}^\dagger(2') \dots |\phi_{\mathcal{Q}}\rangle + \dots \\ &+ \mathcal{A}^\dagger(1) \dots \mathcal{B}^\dagger(2) \dots \frac{\delta}{\delta A(9)} |\phi_{\mathcal{Q}}\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.94})$$

wobei

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta A(9)} |\phi_{\mathcal{Q}}\rangle &= - \left( \frac{\delta K(1,2)}{\delta A(9)} \right) a^\dagger(1) b^\dagger(2) |\phi_{\mathcal{Q}}\rangle \\ &= - \left( \frac{\delta K(1,2)}{\delta A(9)} \right) \left( \mathcal{U}(3,1) \mathcal{V}(4,2) \mathcal{A}^\dagger(3) \mathcal{B}^\dagger(4) \right. \\ &\quad \left. - K^\dagger(3,1) \mathcal{V}(3,4) \mathcal{V}(4,2) \right) |\phi_{\mathcal{Q}}\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.95})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta A(9)} \mathcal{A}^\dagger(1) &= \frac{\delta}{\delta A(9)} \mathcal{U}(2,1) \left[ a^\dagger(2) + K^\dagger(3,2) b(3) \right] \\ &= \frac{\delta \mathcal{U}(2,1)}{\delta A(9)} a^\dagger(2) + \left[ \frac{\delta \mathcal{U}(2,1)}{\delta A(9)} K^\dagger(3,2) + \mathcal{U}(2,1) \frac{\delta K^\dagger(3,2)}{\delta A(9)} \right] b(3) \\ &= \left( \mathcal{U}^{-1}(5,2) \frac{\delta \mathcal{U}(2,1)}{\delta A(9)} + \mathcal{U}(5,4) K(4,3) \frac{\delta K^\dagger(3,2)}{\delta A(9)} \mathcal{U}(2,1) \right) \mathcal{A}^\dagger(5) \\ &\quad + \mathcal{V}(3,4) \frac{\delta K^\dagger(3,2)}{\delta A(9)} \mathcal{U}(2,1) \mathcal{B}(4) \\ &\equiv \alpha(1,5;9) \mathcal{A}^\dagger(5) + \beta(1,4;9) \mathcal{B}(4) \end{aligned} \quad (\text{B.96})$$

sowie analog

$$\frac{\delta}{\delta A(9)} \mathcal{B}^\dagger(1) \equiv \gamma(1,5;9) \mathcal{B}^\dagger(5) + \varepsilon(1,4;9) \mathcal{A}(4) \quad (\text{B.97})$$

gilt. Ebenso lassen sich die zweiten Ableitungen bilden.

Da der fermionische Dichteoperator (4.45) diagonal gewählt wurde, finden wir für das Matrixelement im fermionischen Erwartungswert (4.43) eines Ableitungsoperators

$$\begin{aligned} \langle n_{\mathcal{A}}n_{\mathcal{B}} | \mathcal{D}_{\mathcal{Q}} \frac{\delta}{\delta A(9)} | n_{\mathcal{A}}n_{\mathcal{B}} \rangle &= \left( \alpha(1,1,9) + \dots + \gamma(2,2,9) + \dots + \left( \frac{\delta K(1,2)}{\delta A(9)} \right) K^\dagger(3,1) \mathcal{V}(3,4) \mathcal{V}(4,2) \right) \\ &\quad \times \langle \phi_{\mathcal{Q}} | \dots \mathcal{B}(2) \dots \mathcal{A}(1) \mathcal{D}_{\mathcal{Q}} \mathcal{A}^\dagger(1) \dots \mathcal{B}^\dagger(2) \dots | \phi_{\mathcal{Q}} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.98})$$

d.h. es ergeben sich nur nicht-verschwindende Beiträge, sofern im Ketzustand dieselben Quasiteilchenoperatoren aktiv sind wie im Brazustand. Damit reduziert sich das Problem

auf die Berechnung des Matrixelements

$$\langle \phi_Q | \dots \mathcal{B}(2) \dots \mathcal{A}(1) \mathcal{D}_Q \mathcal{A}^\dagger(1) \dots \mathcal{B}^\dagger(2) \dots | \phi_Q \rangle, \quad (\text{B.99})$$

welches bei Verwendung einer Besetzungszahldarstellung als

$$\langle \phi_Q | \dots (\mathcal{B}(2))^{n_2^{\mathcal{B}}} \dots (\mathcal{A}(1))^{n_1^{\mathcal{A}}} \mathcal{D}_Q (\mathcal{A}^\dagger(1))^{n_1^{\mathcal{A}}} \dots (\mathcal{B}^\dagger(2))^{n_2^{\mathcal{B}}} \dots | \phi_Q \rangle \quad (\text{B.100})$$

mit  $n_i^{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = 0, 1$  geschrieben werden kann. In diesem lassen sich sukzessive sämtliche Erzeugeroperatoren am Dichteoperator vorbeiziehen und mit den zugehörigen Vernichtoperatoren kontrahieren, wodurch wir für (B.100)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathcal{Z}_Q} \exp\left(-\beta n_1^{\mathcal{A}} \varepsilon_+(p_1) - \dots - \beta n_2^{\mathcal{B}} \varepsilon_-(p_2) - \dots\right) \langle \phi_Q | \phi_Q \rangle \\ &= \frac{I[A]}{\mathcal{Z}_Q} \exp\left(-\beta \left[ \sum_i n_i^{\mathcal{A}} \varepsilon_+(p_i) + \sum_j n_j^{\mathcal{B}} \varepsilon_-(p_j) \right]\right) \\ &= \frac{I[A]}{\mathcal{Z}_Q} \prod_i \exp\left(-\beta n_i^{\mathcal{A}} \varepsilon_+(p_i)\right) \prod_j \exp\left(-\beta n_j^{\mathcal{B}} \varepsilon_-(p_j)\right) \end{aligned} \quad (\text{B.101})$$

erhalten. Dabei lassen wir nach dem ersten Schritt die Summation über die Indices sämtlicher Quasiteilchenoperatoren laufen. Da für inaktive Operatoren  $n^{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = 0$  gilt, ändert das den Wert gegenüber dem ursprünglichen Ausdruck, in welchem wir lediglich über die in  $|n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}}\rangle$  aktiven Operatoren summieren, nicht. Insbesondere finden wir mit dem Matrixelement (B.101) für den fermionischen thermischen Erwartungswert des Identitätsoperators

$$\begin{aligned} \langle\langle \text{id} \rangle\rangle_Q &= \frac{1}{\mathcal{Z}_Q} \sum_{n=0,1} \prod_i \exp\left(-\beta n_i^{\mathcal{A}} \varepsilon_+(p_i)\right) \prod_j \exp\left(-\beta n_j^{\mathcal{B}} \varepsilon_-(p_j)\right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_Q} \prod_i \left[1 + \exp(-\beta \varepsilon_+(p_i))\right] \prod_j \left[1 + \exp(-\beta \varepsilon_-(p_j))\right] \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_Q} \exp\left(\sum_i \ln\left[1 + \exp(-\beta \varepsilon_+(p_i))\right]\right) \exp\left(\sum_j \ln\left[1 + \exp(-\beta \varepsilon_-(p_j))\right]\right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_Q} \det\left\{\text{id}\left[1 + \exp(-\beta \varepsilon_+(p))\right]\right\} \det\left\{\text{id}\left[1 + \exp(-\beta \varepsilon_-(p))\right]\right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.102})$$

vgl. Gleichung (B.90).

Zur Bildung des fermionischen thermischen Erwartungswerts eines Ableitungsoperators müssen wir berücksichtigen, daß diejenigen Quasiteilchenoperatoren, auf die die Funktionalableitung wirkt, zwangsläufig aktiv sind während alle übrigen beliebige Besetzungszahlen  $n^{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = 0, 1$  besitzen können. Mittels Gleichung (B.98) und (B.101) ergibt sich daher:

$$\begin{aligned} \langle\langle \frac{\delta}{\delta A(9)} \rangle\rangle_Q &= \frac{1}{\mathcal{Z}_Q} \sum_i \alpha(i, i, 9) \exp(-\beta \varepsilon_+(p_i)) \prod_{k \neq i} \left[1 + \exp(-\beta \varepsilon_+(p_k))\right] \\ &\quad \times \prod_j \left[1 + \exp(-\beta \varepsilon_-(p_j))\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\mathcal{Z}_Q} \sum_j \gamma(j, j, 9) \exp(-\beta \varepsilon_-(p_j)) \prod_{k \neq j} [1 + \exp(-\beta \varepsilon_-(p_k))] \\
& \quad \times \prod_i [1 + \exp(-\beta \varepsilon_+(p_i))] \\
& + \left( \frac{\delta K(1, 2)}{\delta A(9)} \right) K^\dagger(3, 1) \mathcal{V}(3, 4) \mathcal{V}(4, 2) \\
= & \frac{1}{\mathcal{Z}_Q} \sum_i \alpha(i, i, 9) \frac{\exp(-\beta \varepsilon_+(p_i))}{1 + \exp(-\beta \varepsilon_+(p_i))} \prod_k [1 + \exp(-\beta \varepsilon_+(p_k))] \\
& \quad \times \prod_j [1 + \exp(-\beta \varepsilon_-(p_j))] \\
& + \frac{1}{\mathcal{Z}_Q} \sum_j \gamma(j, j, 9) \frac{\exp(-\beta \varepsilon_-(p_j))}{1 + \exp(-\beta \varepsilon_-(p_j))} \prod_k [1 + \exp(-\beta \varepsilon_-(p_k))] \\
& \quad \times \prod_i [1 + \exp(-\beta \varepsilon_+(p_i))] \\
& + \left( \frac{\delta K(1, 2)}{\delta A(9)} \right) K^\dagger(3, 1) \mathcal{V}(3, 4) \mathcal{V}(4, 2) \\
= & \alpha(1, 1, 9) \mathcal{N}_+(p_1) + \gamma(2, 2, 9) \mathcal{N}_-(p_2) \\
& + \left( \frac{\delta K(1, 2)}{\delta A(9)} \right) K^\dagger(3, 1) \mathcal{V}(3, 4) \mathcal{V}(4, 2) \tag{B.103}
\end{aligned}$$

In analoger Weise läßt sich der fermionische thermische Erwartungswert zweier Ableitungsoperatoren bilden.

Damit ist es prinzipiell möglich, den thermischen Erwartungswert sämtlicher Terme in Gleichung (B.50) zu bestimmen:

Fallen beide freien Impulsoperatoren des **ersten** Terms auf den fermionischen Vielteilchenzustand  $|n_{\mathcal{A}} n_{\mathcal{B}}\rangle$ , so stellt der fermionische Anteil des Erwartungswerts wie Gleichung (B.103) ein Funktional im Eichfeld dar, dessen bosonischer Erwartungswert mithilfe der Entwicklung (4.50) gebildet werden kann. Fällt eine der Ableitungen auf den fermionischen und eine auf den bosonischen Vielteilchenzustand, so verbleibt nach Bildung des fermionischen Anteils des thermischen Erwartungswerts ein Term der Form  $\|f[A] \Pi\|$ , wobei  $f[A]$  das aus dem fermionischen Erwartungswert (B.103) resultierende Funktional im Eichfeld repräsentiert. Da mit Gleichung (4.21) folgt, daß Erwartungswerte der Form  $\|A \Pi\|$  unabhängig von bosonischen Besetzungszahlen sind, können wir den genannten Ausdruck ohne weiteres auf den Nulltemperaturanteil

$$\|f[A] \Pi\| \rightarrow |\mathcal{N}|^2 \int \mathcal{D}A \tilde{\phi}_{\text{YM}}[A] f[A] \Pi \tilde{\phi}_{\text{YM}}[A] \tag{B.104}$$

reduzieren, welcher sich wie in Kapitel 3 bzw. Anhang B.1.5 beschrieben auswerten läßt. Fallen schließlich beide freien Ableitungen auf den bosonischen Vielteilchenzustand, so wird der fermionische Anteil am thermischen Erwartungswert trivial und wir finden mithilfe von Gleichung (4.21) dasselbe Ergebnis wie im Yang-Mills-Sektor

$$\frac{1}{2} \left\| \int d^3 p \Pi_i^a(\mathbf{p}) \Pi_i^a(-\mathbf{p}) \right\| = \frac{N_{\text{C}}^2 - 1}{2} \delta^3(0) \int d^3 p (1 + 2n(p)) \omega(p). \tag{B.105}$$

Für den **zweiten**, **dritten** und **vierten** Term in Gleichung (B.50) läßt sich die Wirkung des Impulsoperators auf die Fermideterminante mittels Gleichung (3.51) explizit auswerten und führt auf ein Funktional im Eichfeld. Der thermische Erwartungswert des zweiten Terms ergibt sich damit analog zu demjenigen Anteil des ersten Terms, in welchem eine Funktionalableitung auf den fermionischen Vielteilchenzustand fällt während die zweite frei entweder ebenfalls auf den fermionischen oder den bosonischen Zustand wirken kann. Der Erwartungswert des dritten und vierten Terms folgt dagegen unmittelbar aus der Entwicklung (4.50).

Da jede Ableitung des fermionischen Variationskerns  $K$  (4.29) mit einem Quark-Gluon-Vertex verknüpft ist, läßt sich schließlich festhalten, daß in den allermeisten oben beschriebenen Fällen bereits die führende Ordnung von Gleichung (4.50) auf Zweischleifenniveau sein wird. Ein entsprechendes Resultat galt bereits im Nulltemperaturlimes, siehe Anhang B.1.5.

# Anhang C

## Störungstheoretische Motivation des Quarkwellenfunktional

Die laufende Kopplung  $\alpha_S = \frac{g^2}{4\pi} > 1$  macht eine störungstheoretische Behandlung des Niederenergiesektors der QCD unmöglich. Der Hochenergiesektor entspricht dagegen aufgrund der asymptotischen Freiheit im Wesentlichen störungstheoretischen Vorhersagen. Da nicht-perturbative Ansätze auch für große Energieskalen ihre Gültigkeit behalten, ist eine störungstheoretische Behandlung der QCD im Hamilton'schen Zugang ebenfalls von Interesse. Man erhofft sich davon u.a. Erkenntnisse über die Regularisierung und Renormierung der Theorie, aber auch bezüglich der Wahl des Ansatzes für das Vakuumwellenfunktional. Die störungstheoretische Behandlung der reinen Yang–Mills-Theorie im Hamilton'schen Zugang in Coulombbeichung erfolgte in Referenz [148, 149] in stationärer *Rayleigh–Schrödinger-Störungstheorie*<sup>96</sup> und wurde in Referenz [113] auf den Quarksektor erweitert. Die gefundenen Ergebnisse decken sich mit denjenigen störungstheoretischer Berechnungen unter Verwendung von Dyson–Schwinger-Gleichungen in Coulombbeichung [150].

Als Ausgangspunkt für den Quarksektor wurde in Referenz [113] das nackte fermionische Vakuum (3.28) verwendet. Das führt zu einem störungstheoretischen Quarkwellenfunktional, in das die Quark-Gluon-Kopplung lediglich über die Diracstruktur  $\alpha$  eingeht und welches im Limes  $S \rightarrow 0$  mit unserem Ergebnis aus Kapitel 3 übereinstimmt. Wir geben in Anhang C.1 die für diese Arbeit relevanten Ergebnisse aus Referenz [113] sowie zu Vergleichszwecken das daraus folgende Energiefunktional – welches in Referenz [113] nicht berechnet wurde – an. In Anhang C.2 betrachten wir als Erweiterung von Referenz [113] den Quarksektor in Rayleigh–Schrödinger-Störungstheorie ausgehend vom BCS-Wellenfunktional (3.27). Das störungstheoretische Quarkwellenfunktional nimmt so exakt die in Kapitel 3 verwendete Form an und motiviert wesentlich unseren Ansatz für das QCD-Vakuumwellenfunktional.

### C.1 Störungstheoretisches Energiefunktional für nacktes Vakuum

Im Rahmen der Rayleigh–Schrödinger-Störungstheorie entwickeln wir den nicht-normierten störungstheoretischen Vakuumzustand der QCD,

$$|0\rangle_{\text{pert}} \sim |0\rangle_{\text{QCD}} + g|0\rangle_{\text{QCD}}^1 + g^2|0\rangle_{\text{QCD}}^2 + \mathcal{O}(g^3), \quad (\text{C.1})$$

---

<sup>96</sup>Für eine Einführung verweisen wir auf Referenz [51] bzw. ein anderes Quantenmechanik-Lehrbuch der Wahl.

sowie den eichfixierten QCD-Hamiltonian (2.64)

$$\bar{H}_{\text{QCD}} = H_0 + gH_1 + g^2H_2 + \mathcal{O}(g^3) \quad (\text{C.2})$$

in Potenzen der Kopplungskonstante  $g$ . Dabei beschränken wir uns auf diejenigen Terme, die für den Quarksektor von Relevanz sind:

$$H_0 = H_{\text{Q}}^0 + H_{\text{YM}}^{E,0} = H_{\text{Q}}^0 + \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{\Pi}^a(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{\Pi}^a(\mathbf{x}), \quad (\text{C.3})$$

$$gH_1 = H_{\text{Q}}^A, \quad (\text{C.4})$$

$$g^2H_2 = H_{\text{C}}^{\text{Q}}, \quad (\text{C.5})$$

wobei  $H_{\text{Q}}^0$  der freie (2.53) und  $H_{\text{Q}}^A$  der Kopplungsanteil (2.54) des Dirac-Hamiltonians sowie  $H_{\text{C}}^{\text{Q}}$  der Quarkanteil der Farb-Coulombwechselwirkung (2.63) ist.<sup>97</sup> Unter Berücksichtigung, daß die Faddeev–Popov-Determinante über die kovariante Ableitung von  $g$  abhängt, vgl. Gleichung (2.47) und (2.48), geht in  $H_0$  zudem der *führende* Beitrag der kinetischen Energie der Gluonen (2.56) ein.

Die störungstheoretischen Korrekturen zum Wellenfunktional sind per Definition orthogonal zum ungestörten Grundzustand,

$${}_{\text{QCD}}\langle 0|0\rangle_{\text{QCD}}^i = 0 \quad \forall i, \quad (\text{C.6})$$

und die Korrektur erster Ordnung läßt sich gemäß

$$|0\rangle_{\text{QCD}}^1 = - \sum_N \frac{\langle N|H_1|0\rangle_{\text{QCD}}}{E_N - E_0} |N\rangle \quad (\text{C.7})$$

aus dem Hamiltonian (C.4) und dem Grundzustand  $|0\rangle_{\text{QCD}}$  berechnen. Dabei bezeichnet  $E_0 = {}_{\text{QCD}}\langle 0|H_0|0\rangle_{\text{QCD}}$  die Grundzustandsenergie und die Summe erstreckt sich über sämtliche  $N$ -Teilchenzustände  $|N\rangle$  mit Energie  $E_N$ .

In Referenz [113] wurde für den ungestörten Grundzustand der Ansatz

$$|0\rangle_{\text{QCD}} = |0\rangle \otimes |0\rangle_{\text{YM}} \quad (\text{C.8})$$

mit dem Gauß'schen Wellenfunktional [vgl. Gleichung (3.2)]

$$\langle A|0\rangle_{\text{YM}} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^3p \frac{1}{p} A_i^a(\mathbf{p}) A_i^a(-\mathbf{p})\right) \quad (\text{C.9})$$

sowie dem nackten fermionischen Vakuum  $|0\rangle$  [Gleichung (3.28)] verwendet. Der Produktzustand (C.8) ist Eigenzustand des nackten Hamiltonians  $H_0$  (C.3) und führt im störungstheoretischen Vakuum (C.1) zum linearen Korrekturterm

$$|0\rangle_{\text{QCD}}^1 = - \int d^3p \int d^3q \frac{1}{2\sqrt{pq}} \frac{u^{s\dagger}(\mathbf{p}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}^a(\mathbf{p} + \mathbf{q}) t_a^{mn} v^t(\mathbf{q})}{p + q + |\mathbf{p} + \mathbf{q}|} a^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) b^{t,n\dagger}(\mathbf{q}) |0\rangle_{\text{QCD}}, \quad (\text{C.10})$$

wobei wir das Ergebnis aus Referenz [113] für die in dieser Arbeit verwendeten chiralen

<sup>97</sup>Man beachte, daß der farbeinschließende Anteil des Coulombterms aufgrund der Ersetzung (3.14) nicht mehr direkt von  $g$  abhängt. Wir orientieren uns für die Identifikation von  $H_2$  an der ursprünglichen Form des eichfixierten QCD-Hamiltonians.

Quarks angepaßt haben. Die Berechnung von Erwartungswerten gestaltet sich dabei wie in Kapitel 3, siehe auch Anhang B. Für die fermionischen Teile des Energieerwartungswerts bis zur Ordnung  $g^2$  ergibt sich damit

$${}_{\text{QCD}}\langle 0|H_0|0\rangle_{\text{QCD}} = -2N_C\delta^3(0) \int \bar{d}^3p p, \quad (\text{C.11})$$

$${}_{\text{QCD}}\langle 0|H_1|0\rangle_{\text{QCD}}^1 = -\frac{N_C^2-1}{2}\delta^3(0) \int \bar{d}^3p \int \bar{d}^3q \frac{1}{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|} \frac{X(\mathbf{p},\mathbf{q})}{p+q+|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}, \quad (\text{C.12})$$

$${}_{\text{QCD}}\langle 0|H_Q^0|0\rangle_{\text{QCD}}^1 = \frac{N_C^2-1}{2}\delta^3(0) \int \bar{d}^3p \int \bar{d}^3q \frac{p+q}{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|} \left( \frac{1}{p+q+|\mathbf{p}+\mathbf{q}|} \right)^2 \times X(\mathbf{p},\mathbf{q}), \quad (\text{C.13})$$

$${}_{\text{QCD}}\langle 0|H_{\text{YM}}^{E,0}|0\rangle_{\text{QCD}}^1 = \frac{N_C^2-1}{2}\delta^3(0) \int \bar{d}^3p \int \bar{d}^3q \left( \frac{1}{p+q+|\mathbf{p}+\mathbf{q}|} \right)^2 X(\mathbf{p},\mathbf{q}) \quad (\text{C.14})$$

$${}_{\text{QCD}}\langle 0|H_C^Q|0\rangle_{\text{QCD}} = \frac{N_C^2-1}{4}\delta^3(0) \int \bar{d}^3p \int \bar{d}^3q V_C(|\mathbf{p}+\mathbf{q}|) (1+\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{q}}), \quad (\text{C.15})$$

wobei  $X, Y$  durch Gleichung (3.62) bzw. (3.63) gegeben ist. Der Energieerwartungswert (C.11) bis (C.15) entspricht dem Ergebnis aus Abschnitt 3.2 im Limes  $S \rightarrow 0$ , vgl. Gleichung (3.87), wobei die Vektorkerne  $V$  und  $W$  durch ihre Bestimmungsgleichungen (3.93), (3.97) und die Gluonenergie durch ihren UV-Limes  $\omega(p) = p$  zu ersetzen sind. Im Vergleich mit den früheren Arbeiten [23–25] ergeben sich dagegen signifikante Unterschiede.

## C.2 Störungstheoretisches Quarkwellenfunktional für BCS-Vakuum

Die auf dem nackten fermionischen Vakuum (3.28) aufgebaute Störungstheorie reproduziert das in Kapitel 3 für große Impulse gefundene Verhalten. Insbesondere impliziert der Korrekturterm (C.10) das Vorliegen eines Kopplungsterms im fermionischen Wellenfunktional mit der Diracstruktur  $\alpha$ . Auf die (nicht-perturbativen) Variationskerne  $S$  und  $W$  bzw. die mit ihnen verknüpften Diracstrukturen ergeben sich aber keinerlei Rückschlüsse.

Wir betrachten daher die Rayleigh–Schrödinger-Störungstheorie aufbauend auf dem fermionischen BCS-Vakuumzustand (3.27), wobei wir für den Yang–Mills-Sektor unverändert das nackte Funktional (C.9) verwenden,

$$|0\rangle_{\text{QCD}} = |0\rangle_{\text{BCS}} \otimes |0\rangle_{\text{YM}}. \quad (\text{C.16})$$

Der Skalarkern  $S$  [siehe Gleichung (3.27)] ist durch die Lösung der Quarkgapgleichung (3.100) im Limes  $g = 0$ , d.h. bei Vernachlässigung von Quark-Gluon-Kopplung und UV-Anteil des Coulombpotentials, gegeben. Das störungstheoretische Vakuum (C.16) ist *kein* Eigenzustand von  $H_0$  [Gleichung (C.3)], sondern approximativer Grundzustand von

$$\tilde{H}_0 = H_Q^0 + H_C^{\text{Q,IR}} + H_{\text{YM}}^{E,0}. \quad (\text{C.17})$$

Genauer ist das fermionische BCS-Funktional (3.27) Grundzustand des *Mean-Field-Hamiltonians* bestehend aus der Summe von  $H_Q^0$  und dem effektiven Einteilchen-Anteil von

$H_C^{\text{Q,IR}}$ , vgl. Gleichung (3.29). Das folgt aus der Variationsrechnung in Kapitel 3 oder anschaulicher anhand einer Bogoljubovtransformation, siehe Anhang C.3. Entsprechend wird das BCS-Vakuum (3.27) nicht von den ursprünglichen Operatoren  $a$  und  $b$ , sondern von deren Bogoljubovtransformierten  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  [siehe Gleichung (4.31) bzw. (4.32) mit  $K_1 = 0$ ] vernichtet. Der neue ungestörte Hamiltonian (C.17) bedingt Änderungen an der quadratischen Korrektur (C.5) des Hamiltonoperators (dort verschwindet der Anteil  $H_C^{\text{Q,IR}}$ ), während die lineare Korrektur (C.4) erhalten bleibt.<sup>98</sup>

Für die lineare Korrektur des Vakuumfunktionals, Gleichung (C.7), ergibt sich ein nicht-verschwindender Beitrag für einen Zustand bestehend aus einem Gluon, einem Quark und einem Antiquark, d.h.

$$|N\rangle \sim A_k^a(-\mathbf{p}_1) a^{s,m\dagger}(\mathbf{p}_2) b^{t,n\dagger}(\mathbf{p}_3) |0\rangle_{\text{QCD}}. \quad (\text{C.18})$$

Das entsprechende Matrixelement im Zähler von Gleichung (C.7) läßt sich wie in Anhang B beschrieben berechnen und lautet

$$\begin{aligned} \langle N|H_1|0\rangle_{\text{QCD}} &\sim -t_a^{mn} t_{kl}(\mathbf{p}_1) \frac{1}{2p_1} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) \frac{1}{2\sqrt{p_2 p_3}} P(p_2) P(p_3) u^{s\dagger}(\mathbf{p}_2) \\ &\times \left( [1 + S(p_2)S(p_3)] \alpha_l + [S(p_2) + S(p_3)] \beta \alpha_l \right) v^t(\mathbf{p}_3) \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

mit  $P$  gemäß Gleichung (3.61). Da  $a^\dagger$  ( $b^\dagger$ ) keinen Eigenzustand von  $\tilde{H}_0$  [Gleichung (C.17)] erzeugt, ist die Energie  $E_N$  im Nenner von (C.7) unbestimmt. Für unsere Zwecke spielt das aber keine Rolle, denn die Diracstruktur der Korrektur des Wellenfunktionals ist durch den Zähler (C.19) gegeben. Dieser impliziert neben dem Kopplungsterm  $\sim \alpha$  das Vorliegen eines zweiten Terms  $\sim \beta \alpha$ , wie wir ihn im Ansatz (3.31) für das Wellenfunktional vorgesehen haben. Man beachte ferner, daß die  $S$ -Abhängigkeit des Zählers (C.19) exakt mit derjenigen des Variationsergebnisses für die Vektorkerne übereinstimmt, vgl. Gleichung (3.93), (3.97).

### C.3 Effektiver fermionischer Einteilchenoperator

Wir gehen nun genauer auf den fermionischen Anteil

$$H_Q^0 + H_C^{\text{Q,IR}} \quad (\text{C.20})$$

des ungestörten QCD-Hamiltonians (C.17) ein. Dieser entspricht dem Hamiltonian des sich bei Vernachlässigung von Quark-Gluon-Kopplung und UV-Anteil des Coulombpotentials (d.h. für  $g = 0$ ) ergebenden Quarkmodells, vgl. Gleichung (3.29).

Unterziehen wir die fermionischen Erzeuger- und Vernichteroperatoren einer Bogoljubovtransformation

$$a^{s,m}(\mathbf{p}) = P^{\frac{1}{2}}(p) \left[ \mathcal{A}^{s,m}(\mathbf{p}) - sS(p) \mathcal{B}^{s,m\dagger}(-\mathbf{p}) \right], \quad (\text{C.21})$$

$$b^{s,m}(\mathbf{p}) = P^{\frac{1}{2}}(p) \left[ \mathcal{B}^{s,m}(\mathbf{p}) + sS(p) \mathcal{A}^{s,m\dagger}(-\mathbf{p}) \right], \quad (\text{C.22})$$

vgl. Gleichung (4.35), (4.36) für  $K_1 = 0$ , so finden wir für das Quarkfeld die Entwicklung

$$\Psi^m(\mathbf{x}) = \int d^3p \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \left( \mathcal{A}^{s,m}(\mathbf{p}) U^s(\mathbf{p}) + \mathcal{B}^{s,m\dagger}(-\mathbf{p}) V^s(-\mathbf{p}) \right) \quad (\text{C.23})$$

<sup>98</sup>Diese Aufspaltung spiegelt für den Quarksektor die Struktur des Hamiltonians nach der Absorption des Faktors  $g^2$  (3.14) wieder, vgl. Fußnote 97 und den fehlenden Faktor  $g^2$  im IR-Coulombpotential (3.117).



mit den Spinoren

$$U^s(\mathbf{p}) = P^{\frac{1}{2}}(p) \left[ u^s(\mathbf{p}) + sS(p)v^s(-\mathbf{p}) \right], \quad (\text{C.24})$$

$$V^s(-\mathbf{p}) = P^{\frac{1}{2}}(p) \left[ v^s(-\mathbf{p}) - sS(p)u^s(\mathbf{p}) \right]. \quad (\text{C.25})$$

Nach Einsetzen der Entwicklung (C.23) besitzt der freie Dirac-Hamiltonian (2.53) die Gestalt

$$\begin{aligned} H_Q^0 &= 2N_C \delta^3(0) \int \mathrm{d}^3p p (1 - 2P(p)) \\ &\quad - \int \mathrm{d}^3p p \left[ 1 - 2P(p) \right] \left[ \mathcal{A}^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) \mathcal{A}^{s,m}(\mathbf{p}) + \mathcal{B}^{s,m\dagger}(-\mathbf{p}) \mathcal{B}^{s,m}(-\mathbf{p}) \right] \\ &\quad + 2 \sum_s s \int \mathrm{d}^3p p P(p) S(p) \left[ \mathcal{A}^{s,m}(\mathbf{p}) \mathcal{B}^{s,m}(-\mathbf{p}) + \mathcal{B}^{s,m\dagger}(-\mathbf{p}) \mathcal{A}^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) \right], \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

an welcher sich aufgrund von  $\mathcal{A}|0\rangle_{\text{BCS}} = \mathcal{B}|0\rangle_{\text{BCS}} = 0$  der Erwartungswert

$$\langle H_Q^0 \rangle = 2N_C \delta^3(0) \int \mathrm{d}^3p p (1 - 2P(p)) \quad (\text{C.27})$$

ablesen läßt, vgl. Gleichung (3.74).

Für den IR-Anteil der Coulombwechselwirkung  $H_C^{\text{Q,IR}}$ , Gleichung (3.76), gestaltet sich die Umformung aufwendiger: Nach Einsetzen der Entwicklung (C.23) zerfällt er in eine Summe aus 16 Termen. Diese lassen sich unter Verwendung der Vertauschungsrelationen (4.33) bzw. einer speziellen Form des Wick'schen Theorems (siehe beispielsweise Referenz [110]) in Normalordnung<sup>99</sup> bringen. Aus den entstehenden normalgeordneten Produkten von vier und zwei Quasiteilchenoperatoren sowie den vollständig kontrahierten Beiträgen ergibt sich unter Vernachlässigung der Vier-Operator-Terme der folgende effektive Einteilchen-Anteil der Coulombwechselwirkung:

$$\begin{aligned} H_C^{\text{eff}} &= \frac{N_C^2 - 1}{4} \delta^3(0) \int \mathrm{d}^3p \int \mathrm{d}^3q V_C^{\text{IR}}(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) \\ &\quad \times \left[ 1 - P(p)P(q) \left( 4S(p)S(q) + (1 - S^2(p))(1 - S^2(q)) \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}} \right) \right] \\ &\quad - \frac{C_F}{2} \int \mathrm{d}^3p \int \mathrm{d}^3q V_C^{\text{IR}}(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) \left[ \mathcal{A}^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) \mathcal{A}^{s,m}(\mathbf{p}) + \mathcal{B}^{s,m\dagger}(-\mathbf{p}) \mathcal{B}^{s,m}(-\mathbf{p}) \right] \\ &\quad \times \left[ 1 - P(p)P(q) \left( 4S(p)S(q) + (1 - S^2(p))(1 - S^2(q)) \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}} \right) \right] \\ &\quad + C_F \sum_s s \int \mathrm{d}^3p \int \mathrm{d}^3q V_C^{\text{IR}}(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) \\ &\quad \times \left[ \mathcal{A}^{s,m}(\mathbf{p}) \mathcal{B}^{s,m}(-\mathbf{p}) + \mathcal{B}^{s,m\dagger}(-\mathbf{p}) \mathcal{A}^{s,m\dagger}(\mathbf{p}) \right] \\ &\quad \times P(p)P(q) \left[ S(p) \left( 1 - S^2(q) \right) \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}} - S(q) \left( 1 - S^2(p) \right) \right] \end{aligned}$$

<sup>99</sup>Darunter versteht man eine Darstellung, bei der sämtliche Vernichtoperatoren rechts von den Erzeugeroperatoren stehen.

$$\begin{aligned}
& + \frac{C_F}{2} \sum_s \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q V_C^{\text{IR}}(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) \\
& \quad \times \left[ \mathcal{A}^{-s,m}(\mathbf{p}) \mathcal{B}^{s,m}(-\mathbf{p}) + \mathcal{B}^{-s,m^\dagger}(-\mathbf{p}) \mathcal{A}^{s,m^\dagger}(\mathbf{p}) \right] \\
& \quad \times P(q) \left( 1 - S^2(q) \right) \xi^\dagger(\mathbf{p}, s) \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \xi(\mathbf{p}, -s); \tag{C.28}
\end{aligned}$$

siehe Anhang A.1 für die Definition der Vektoren  $\xi$ . Der letzte Term in Gleichung (C.28) enthält Paare von Quasiteilchenoperatoren mit unterschiedlichen Spinprojektionen was mit der Spinstruktur des BCS-Wellenfunktionals (3.27) nicht vereinbar ist und weswegen wir diesen Term nicht weiter berücksichtigen werden. Der erste Term entspricht hingegen dem Erwartungswert des Coulombterms, vgl. Gleichung (3.81).

Aus der Summe von Gleichung (C.26) und (C.28) folgt, daß der effektive Einteilchen-Anteil des Hamiltonians (C.20) aus einem diagonalen Beitrag (z.B.  $\sim \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}$ ) sowie einem nicht-diagonalen Beitrag (z.B.  $\sim \mathcal{A} \mathcal{B}$ ) besteht. Die Forderung nach dem Verschwinden des nicht-diagonalen Anteils führt auf die Quarkgapgleichung (3.100) im Limes  $g \rightarrow 0$ . Verwenden wir für den Skalar kern  $S$  die Lösung der Gapgleichung, so ist das BCS-Wellenfunktional (3.27) Eigenzustand des verbleibenden (diagonalen) effektiven Einteilchen-Hamiltonians

$$\begin{aligned}
H_Q^0 + H_C^{\text{eff}} &= 2N_C \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p p (1 - 2P(p)) \\
& + \frac{N_C^2 - 1}{4} \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q V_C^{\text{IR}}(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) \\
& \quad \times \left[ 1 - P(p)P(q) \left( 4S(p)S(q) + (1 - S^2(p))(1 - S^2(q)) \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}} \right) \right] \\
& - \int \bar{d}^3 p p \left[ 1 - 2P(p) \right] \left[ \mathcal{A}^{s,m^\dagger}(\mathbf{p}) \mathcal{A}^{s,m}(\mathbf{p}) + \mathcal{B}^{s,m^\dagger}(-\mathbf{p}) \mathcal{B}^{s,m}(-\mathbf{p}) \right] \\
& - \frac{C_F}{2} \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q V_C^{\text{IR}}(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) \\
& \quad \times \left[ 1 - P(p)P(q) \left( 4S(p)S(q) + (1 - S^2(p))(1 - S^2(q)) \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}} \right) \right] \\
& \quad \times \left[ \mathcal{A}^{s,m^\dagger}(\mathbf{p}) \mathcal{A}^{s,m}(\mathbf{p}) + \mathcal{B}^{s,m^\dagger}(-\mathbf{p}) \mathcal{B}^{s,m}(-\mathbf{p}) \right], \tag{C.29}
\end{aligned}$$

wobei der zugehörige Eigenwert durch den Energieerwartungswert (3.89) im Limes  $g \rightarrow 0$  gegeben ist.

# Anhang D

## UV-Analyse

### D.1 Quarkgapgleichung

Wir untersuchen im Folgenden das Verhalten der Quarkgapgleichung (3.100) im UV, d.h. für große Schleifenimpulse  $\mathbf{p}$ . Hierzu führen wir für die Schleifenintegrationen Kugelkoordinaten  $(p, \varphi_p, \vartheta_p)$  ein, wobei wir den Polarwinkel  $\vartheta_p$  so wählen, daß

$$\cos \vartheta_p = \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = z \quad (\text{D.1})$$

gilt. Da sämtliche Integranden in Gleichung (3.100) ausschließlich Funktionen in  $z$  sowie den Beträgen  $p$  und  $k$  sind, läßt sich die Integration über den Azimutwinkel  $\varphi_p$  in der UV-Entwicklung stets explizit ausführen.

Für die verbleibenden Integrationen in  $p, z$  nehmen wir an, daß  $p \gg k$  gilt,<sup>100</sup> entwickeln den Integranden in eine Taylorreihe in der dimensionslosen Größe

$$\xi \equiv k/p \ll 1 \quad (\text{D.2})$$

bis zu Termen der Ordnung  $\mathcal{O}(\xi^2)$  und ersetzen die obere Grenze der  $p$ -Integration durch einen Cutoff  $\Lambda < \infty$ .<sup>101</sup> Das macht die  $z$ - und  $p$ -Integration analytisch ausführbar und reduziert die Integrale auf diejenigen Bestandteile, welche als Funktion von  $\Lambda$  divergieren. Schließlich führen wir noch eine Energie- bzw. Impulsskala  $\mu$  ein, womit sämtliche dimensionsbehaftete Größen in dimensionsloser Form

$$\bar{p} \equiv \frac{p}{\mu} \quad (\text{D.3})$$

geschrieben werden können.

Zur Bestimmung der Taylorreihe benötigen wir Informationen über das Verhalten des Skalarkerns  $S$  sowie des inversen Gluonpropagators  $\omega$  bei großen Impulsen. Für  $\omega$  erhalten wir mithilfe der Gribovformel (3.21) in relevanter Ordnung

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \omega(p) = p. \quad (\text{D.4})$$

Für den Skalarkern folgt das exakte UV-Verhalten erst aus der Lösung der Gapgleichung (3.100). Im Limes  $g = 0$  läßt sich in Winkelnäherung  $S(p \rightarrow \infty) \sim p^{-5}$  zeigen (siehe Anhang E), was auch von numerischen Berechnungen gestützt wird (vgl. Abschnitt 3.4 und Referenz

<sup>100</sup>Diese Bedingung ist bei hinreichend großen Schleifenimpulsen sicher erfüllt, da  $\mathbf{k}$  zwar beliebig aber fest ist.

<sup>101</sup>Der Wert der unteren Grenze ist willkürlich, da die Taylorentwicklung für kleine Schleifenimpulse nicht konvergiert.

[23, 107, 115]). Für  $g \neq 0$  ist eine direkte Bestimmung nicht möglich, allerdings sollte sich wegen der stetigen Abhängigkeit der Gapgleichung von  $g$  das UV-Verhalten für moderate Werte von  $g$  nicht allzu drastisch von demjenigen für  $g = 0$  unterscheiden. Weiterhin sollte auch aufgrund der asymptotischen Freiheit der Integrand des chiralen Quarkkondensats (3.71) und deshalb der Skalarkern für große Impulse verschwinden. Wir gehen daher im Folgenden davon aus, daß

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S(p) = 0 \quad (\text{D.5})$$

bis zu der für uns relevanten Ordnung gilt. Wir verweisen darauf, daß wir die asymptotische Form von  $S$  (D.5) und  $\omega$  (D.4) nur bei Funktionen des Schleifen- und nicht des äußeren Impulses verwenden werden.

Zu Illustrationszwecken führen wir die UV-Analyse für den  $V$ -abhängigen Beitrag  $I_{VQ}^Q$  (3.104) des Kopplungsterms zur Quarkgapgleichung explizit durch. Unter Verwendung der UV-Limites von  $S$  und  $\omega$  ergibt sich:

$$P(p) \approx 1, \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} V(\mathbf{p}, \mathbf{k}) &= \frac{1 + S(p)S(k)}{N^V(p, k) + \omega(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|)} \\ &\approx \left[ p + kP(k) \left( 1 - S^2(k) \right) + \omega(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|) \right]^{-1} \\ &\approx \left[ p + kP(k) \left( 1 - S^2(k) \right) + \left( p^2 + k^2 + 2pkz \right)^{1/2} \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{p} \left[ 1 + \xi P(k) \left( 1 - S^2(k) \right) + \left( 1 + \xi^2 + 2\xi z \right)^{1/2} \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{2p} \left[ 1 - \frac{1}{2} \xi \left( P(k) \left( 1 - S^2(k) \right) + z \right) + \mathcal{O}(\xi^2) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{1}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|)} = \frac{1}{p} \left[ 1 - \xi z + \mathcal{O}(\xi^2) \right], \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} X(\mathbf{p}, \mathbf{k}) &= 1 - \frac{(p + kz)(k + pz)}{p^2 + k^2 + 2pkz} \\ &= 1 - \frac{(1 + \xi z)(z + \xi)}{1 + 2\xi z + \xi^2} \\ &= 1 - \left( z + \xi(1 + z^2) + \xi^2 z \right) \left( 1 + 2\xi z + \xi^2 \right)^{-1} \\ &= 1 - z - \xi(1 - z^2) + \mathcal{O}(\xi^2) \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Setzen wir das in Gleichung (3.104) ein, so erhalten wir unter Einführung des Cutoffs  $\Lambda$

$$\begin{aligned} I_{VQ}^Q(k) &\approx -C_F g^2 S(k) \int^\Lambda d^3 p \frac{1}{2p} \left[ 1 - \frac{1}{2} \xi \left( P(k) \left( 1 - S^2(k) \right) + z \right) \right] \frac{1}{p} \\ &\quad \times \left[ 1 - \xi z \right] \left[ 1 - z - \xi(1 - z^2) \right] \\ &= -\frac{C_F}{2} g^2 S(k) \int^\Lambda d^3 p \frac{1}{p^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \xi \left( P(k) \left( 1 - S^2(k) \right) + z \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ 1 - z - \xi(1 + z - 2z^2) \right] \\
& = -\frac{C_F}{2} g^2 S(k) \int^\Lambda \bar{d}^3 p \frac{1}{p^2} \left\{ 1 - z \right. \\
& \quad \left. - \xi \left[ 1 + \frac{3}{2} z - \frac{5}{2} z^2 + \frac{1}{2} P(k) (1 - S^2(k)) (1 - z) \right] \right\} \\
& = -\frac{C_F}{2(2\pi)^3} g^2 S(k) \int^\Lambda dp \int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi_p \left\{ 1 - z \right. \\
& \quad \left. - \xi \left[ 1 + \frac{3}{2} z - \frac{5}{2} z^2 + \frac{1}{2} P(k) (1 - S^2(k)) (1 - z) \right] \right\} \\
& = -\frac{C_F}{8\pi^2} g^2 S(k) \int^\Lambda dp \int_{-1}^1 dz \left\{ 1 - z \right. \\
& \quad \left. - \xi \left[ 1 + \frac{3}{2} z - \frac{5}{2} z^2 + \frac{1}{2} P(k) (1 - S^2(k)) (1 - z) \right] \right\} \\
& = -\frac{C_F \mu}{8\pi^2} g^2 S(k) \int^{\Lambda/\mu} d\bar{p} \left\{ 2 - \xi \left[ \frac{1}{3} + P(k) (1 - S^2(k)) \right] \right\} \\
& = -\frac{C_F}{8\pi^2} g^2 S(k) \left\{ 2\Lambda + k \left[ \frac{2}{3} - 2P(k) \right] \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \mathcal{O}(1/\Lambda) \right\}, \tag{D.10}
\end{aligned}$$

d.h. eine lineare und logarithmische UV-Divergenz.

Die UV-Analyse der übrigen Schleifenbeiträge der Gapgleichung (3.100) läßt sich analog ausführen und liefert – neben einem endlichen Beitrag für  $I_C^{\text{Q,IR}}$  – das Ergebnis

$$I_{VV}^{\text{Q}}(k) = \frac{C_F}{16\pi^2} g^2 S(k) \left\{ \Lambda + 2kP(k) \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right\} + \text{e.T.}, \tag{D.11}$$

$$I_{WW}^{\text{Q}}(k) = \frac{C_F}{16\pi^2} g^2 S^3(k) \left\{ \Lambda + 2kP(k) \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right\} + \text{e.T.}, \tag{D.12}$$

$$I_{WQ}^{\text{Q}}(k) = \frac{C_F}{16\pi^2} g^2 S(k) (1 - S^2(k)) \left\{ 2\Lambda + k \left[ \frac{4}{3} - 2P(k) \right] \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right\} + \text{e.T.}, \tag{D.13}$$

$$I_{VE}^{\text{Q}}(k) = \frac{C_F}{16\pi^2} g^2 S(k) \left\{ \Lambda + k \left[ \frac{2}{3} - 2P(k) \right] \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right\} + \text{e.T.}, \tag{D.14}$$

$$I_{WE}^{\text{Q}}(k) = \frac{C_F}{16\pi^2} g^2 S^3(k) \left\{ \Lambda + k \left[ \frac{4}{3} - 2P(k) \right] \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right\} + \text{e.T.}, \tag{D.15}$$

$$I_C^{\text{Q,UV}} = -\frac{C_F}{6\pi^2} g^2 k S(k) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \text{e.T.}, \tag{D.16}$$

wobei e.T. endliche Terme bezeichnet. Damit erhalten wir für die  $V$ -abhängigen Anteile der Quarkgapgleichung die Gesamtdivergenz

$$I_{VV}^{\text{Q}}(k) + I_{VQ}^{\text{Q}}(k) + I_{VE}^{\text{Q}}(k) = \frac{C_F}{16\pi^2} g^2 S(k) \left\{ -2\Lambda + k \left[ -\frac{2}{3} + 4P(k) \right] \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right\} + \text{e.T.} \tag{D.17}$$

während sich für die  $W$ -abhängigen Terme

$$I_{WW}^Q(k) + I_{WQ}^Q(k) + I_{WE}^Q(k) = \frac{C_F}{16\pi^2} g^2 S(k) \left\{ 2\Lambda + k \left[ \frac{10}{3} - 4P(k) \right] \ln \frac{\Lambda}{\mu} \right\} + \text{e.T.} \quad (\text{D.18})$$

ergibt. Wir sehen explizit, daß bei alleiniger Verwendung des Vektorkerns  $V$  eine lineare UV-Divergenz in der Gapgleichung (3.100) verbleiben würde. Erst in der Summe aus  $V$ - und  $W$ -Beiträgen wird diese gehoben:

$$I_{VV}^Q(k) + I_{VQ}^Q(k) + I_{VE}^Q(k) + I_{WW}^Q(k) + I_{WQ}^Q(k) + I_{WE}^Q(k) = \frac{C_F}{6\pi^2} g^2 k S(k) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \text{e.T.} \quad (\text{D.19})$$

Die in dieser Summe verbleibende logarithmische Divergenz wird exakt von der Divergenz des UV-Beitrags der Coulombwechselwirkung [Gleichung (D.16)] kompensiert, womit die Gapgleichung (3.100) als Ganzes UV-endlich ist.

## D.2 Statischer Quarkpropagator

Für die Schleifenbeiträge (3.59), (3.60) des statischen Quarkpropagators (3.58) ergeben sich in einer zu Anhang D.1 analogen Rechnung die UV-Divergenzen

$$I_\alpha(p) = \frac{C_F g^2}{8\pi^2} (1 - S^2(p)) \ln \frac{\Lambda}{\mu}, \quad (\text{D.20})$$

$$I_\beta(p) = \frac{C_F g^2}{8\pi^2} S(p) \ln \frac{\Lambda}{\mu}. \quad (\text{D.21})$$

Das ausschließliche Auftreten logarithmischer Divergenzen ist hierbei – im Gegensatz zur Quarkgapgleichung – keine Folge einer exakten Kompensation durch die Einführung des Vektorkerns  $W$ .

## D.3 Fermionisches Energiefunktional

Die fermionischen Anteile der selbstkonsistenten Energiefunktionale (3.151) und (3.160) enthalten eine Reihe von Zweischleifentermen. Deren UV-Analyse unterscheidet sich von derjenigen von Einschleifentermen (siehe Anhang D.1), da wir nicht annehmen können, daß einer der beiden auftretenden Schleifenimpulse  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  betragsmäßig wesentlich größer ist als der andere. Daher läßt sich nicht mehr ohne weiteres auf die UV-Form (D.4), (D.5) der Variationskerne zurückgreifen.

Zur Einführung des an Zweischleifenterme angepaßten Schemas gehen wir etwas ausführlicher auf die Analyse des Erwartungswerts des Kopplungsterms  $E_Q^A = \langle H_Q^A \rangle$  [Gleichung (3.75)] ein. Für dessen  $W$ -abhängigen Anteil

$$-(N_C^2 - 1) \delta^3(0) g^2 \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q \frac{W(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} P(q) P(p) (S(p) + S(q)) Y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (\text{D.22})$$

finden wir nach Einsetzen der Bestimmungsgleichung für den Vektorkern  $W$  [Gleichung (3.97)] im Zähler den Faktor

$$S^2(p) + S^2(q) + 2S(p)S(q). \quad (\text{D.23})$$

Unter der Annahme, daß der Skalarkern  $S$  im UV hinreichend schnell abfallend ist, können wir darauf schließen, daß diejenigen Schleifen UV-endlich sind, welche einen Skalarkern im Zähler des Integranden enthalten. Da für den Term  $\sim S(p)S(q)$  beide Schleifen UV-endlich sind, spielt er für die Bestimmung der UV-Divergenzen keine Rolle und wird nicht weiter berücksichtigt.

Für den Term  $\sim S^2(p)$  bzw.  $\sim S^2(q)$  ist lediglich die  $p$ - bzw.  $q$ -Schleife endlich, während die andere UV-divergent ist. Diese divergenten Beiträge dominieren das Verhalten des gesamten Zweischleifenterms. Das ermöglicht es, analog zur UV-Analyse der Gapgleichung für den Integranden der *divergenten* Schleife eine Reihenentwicklung unter Verwendung der UV-Limites (D.4), (D.5) durchzuführen. Aus Darstellungsgründen geben wir dabei in weiteren Rechnungen lediglich die divergenten Beiträge an. Betrachten wir den Term  $\sim S^2(p)$ , so ergibt sich für die (divergente)  $q$ -Schleife ( $z = \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}}$ )

$$\begin{aligned} & \int^{\Lambda} dq q^2 \int_{-1}^1 dz \frac{P(p)}{|\mathbf{p} + \mathbf{q}|} \frac{S^2(p)}{pP(p)(1 - S^2(p)) + q + |\mathbf{p} + \mathbf{q}|} \left( 1 + \frac{(p + qz)(q + pz)}{p^2 + q^2 + 2pqz} \right) \\ &= \frac{1}{2} P(p) S^2(p) \left( 2\Lambda + p \ln \frac{\Lambda}{\mu} \left[ \frac{4}{3} - 2P(p) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

und für den Beitrag  $\sim S^2(p)$  als Ganzes:

$$-(N_C^2 - 1) \delta^3(0) \frac{g^2}{(2\pi)^4} \int dp p^2 P(p) S^2(p) \left( 2\Lambda + p \ln \frac{\Lambda}{\mu} \left[ \frac{4}{3} - 2P(p) \right] \right) \quad (\text{D.25})$$

Da der ursprüngliche Ausdruck (D.22) symmetrisch in  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  ist, muß der Beitrag  $\sim S^2(q)$  dasselbe Ergebnis liefern wie derjenige  $\sim S^2(p)$  und wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned} & -(N_C^2 - 1) \delta^3(0) g^2 \int \mathfrak{d}^3 p \int \mathfrak{d}^3 q \frac{W(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} P(q) P(p) (S(p) + S(q)) Y(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ &= -2(N_C^2 - 1) \delta^3(0) \frac{g^2}{(2\pi)^4} \int dp p^2 P(p) S^2(p) \\ & \quad \times \left( 2\Lambda + p \ln \frac{\Lambda}{\mu} \left[ \frac{1}{3} - P(p) (1 - S^2(p)) \right] \right) + \text{e.T.}, \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

wobei e.T. endliche Zweischleifenterme bezeichnet.

Setzen wir in den  $V$ -abhängigen Anteil des Kopplungsterms (3.75)

$$\mathcal{I}_V \equiv -(N_C^2 - 1) \delta^3(0) g^2 \int \mathfrak{d}^3 p \int \mathfrak{d}^3 q \frac{V(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} P(q) P(p) (1 + S(q)S(p)) X(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (\text{D.27})$$

den Ausdruck (3.93) für den Vektorkern ein, so enthält der Zähler den Faktor

$$1 + 2S(p)S(q) + S^2(p)S^2(q). \quad (\text{D.28})$$

Die Terme  $\sim S(p)S(q)$  sowie  $\sim S^2(p)S^2(q)$  sind für die Bestimmung der UV-Divergenzen uninteressant, da sowohl ihre  $q$ - als auch ihre  $p$ -Schleife endlich ist. Für den Term  $\sim 1$  sind *beide* Schleifen UV-divergent, was die Behandlung mittels der üblichen Reihenentwicklung unmöglich macht. Um dennoch Aussagen treffen zu können, ziehen wir von Gleichung

(D.27) den Erwartungswert des Kopplungsterms (3.75) im nackten fermionischen Vakuum ( $S = 0$ ),

$$\mathcal{I}_V^0 \equiv -(N_C^2 - 1)\delta^3(0)g^2 \int \bar{d}^3p \int \bar{d}^3q \frac{1}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} \frac{1}{p + q + \omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} X(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (\text{D.29})$$

ab. Dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_V - \mathcal{I}_V^0 &= -(N_C^2 - 1)\delta^3(0)g^2 \int \bar{d}^3p \int \bar{d}^3q \frac{P(p)P(q)}{\omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} X(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ &\quad \times \frac{1}{p + q + \omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} \frac{1}{NV(p, q) + \omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)} \\ &\quad \times \left( p \left[ S^2(p) - 2S(p)S(q) - S^2(q) + S^2(p)S^2(q) - 2S(p)S^3(q) \right] \right. \\ &\quad \left. + q \left[ S^2(q) - 2S(p)S(q) - S^2(p) + S^2(p)S^2(q) - 2S^3(p)S(q) \right] \right. \\ &\quad \left. - \omega(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|) \left[ S^2(p) + S^2(q) + S^2(p)S^2(q) \right] \right) + \text{e.T.} \quad (\text{D.30}) \end{aligned}$$

Für die Beiträge  $\sim S^2(p)$  bzw.  $\sim S^2(q)$  sind lediglich die  $p$ - bzw.  $q$ -Schleife endlich, während für alle übrigen beide Schleifen endlich sind. Das gestattet die Anwendung derselben Methodik wie für den  $W$ -abhängigen Anteil, womit wir für die divergente Struktur der  $q$ -Schleife des Beitrags  $\sim S^2(p)$  Folgendes erhalten:

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{\Lambda} dq q^2 \int_{-1}^1 dz \frac{P(p)}{|\mathbf{p} + \mathbf{q}|} \left( 1 - \frac{(p + qz)(q + pz)}{p^2 + q^2 + 2pqz} \right) \frac{1}{p + q + |\mathbf{p} + \mathbf{q}|} \\ &\quad \times \frac{pS^2(p) - qS^2(p) - |\mathbf{p} + \mathbf{q}|S^2(p)}{pP(p)(1 - S^2(p)) + q + |\mathbf{p} + \mathbf{q}|} \\ &= -\frac{1}{2}P(p)S^2(p) \left( 2\Lambda - p \ln \frac{\Lambda}{\mu} \left[ \frac{4}{3} + 2P(p) \right] \right) \quad (\text{D.31}) \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Symmetrie in  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  ergibt sich hiermit für den Gesamtausdruck:

$$\mathcal{I}_V - \mathcal{I}_V^0 = 2(N_C^2 - 1)\delta^3(0) \frac{g^2}{(2\pi)^4} \int dp p^2 P(p) S^2(p) \left( 2\Lambda - p \ln \frac{\Lambda}{\mu} \left[ \frac{4}{3} + 2P(p) \right] \right) + \text{e.T.} \quad (\text{D.32})$$

Zusätzlich läßt sich in  $\mathcal{I}_V^0$  (D.29) der inverse Gluonpropagator durch sein nacktes Pendant ersetzen,  $\omega(p) \rightarrow p$ . Da die Differenz  $\omega(p) - p$  im UV schnell abfallend ist, führt das zu keinen divergenten Zusatztermen, d.h.

$$\mathcal{I}_V^0 = -(N_C^2 - 1)\delta^3(0)g^2 \int \bar{d}^3p \int \bar{d}^3q \frac{1}{|\mathbf{p} + \mathbf{q}|} \frac{1}{p + q + |\mathbf{p} + \mathbf{q}|} X(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \text{e.T.} \quad (\text{D.33})$$

Addieren wir die Divergenzen von  $V$ - und  $W$ -abhängigem Anteil, Gleichung (D.26) und (D.32), so heben sich die linearen Divergenzen wie in der Quarkgaggleichung (3.100) gegenseitig auf und wir erhalten für Gleichung (3.75) den Ausdruck

$$\begin{aligned} E_Q^A &= -(N_C^2 - 1)\delta^3(0)g^2 \int \bar{d}^3p \int \bar{d}^3q \frac{1}{|\mathbf{p} + \mathbf{q}|} \frac{1}{p + q + |\mathbf{p} + \mathbf{q}|} X(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ &\quad - \frac{2(N_C^2 - 1)}{3\pi^2} \delta^3(0)g^2 \ln \frac{\Lambda}{\mu} \int \bar{d}^3p p P(p) S^2(p) + \text{e.T.} \quad (\text{D.34}) \end{aligned}$$



Man beachte, daß der führende, rein divergente Zweischleifenterm dem Beitrag des nackten Vakuums ( $S(p) = 0$ ,  $\omega(p) = p$ ) entspricht.

Die weiteren fermionischen Zweischleifenbeiträge in Gleichung (3.151) und (3.160) lassen sich analog behandeln, was auf die Ausdrücke

$$E_Q^{0,2S} = \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) g^2 \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q \frac{1}{|\mathbf{p} + \mathbf{q}|} \frac{p + q}{(p + q + |\mathbf{p} + \mathbf{q}|)^2} X(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \text{e.T.}, \quad (\text{D.35})$$

$$E_Q^E = \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) g^2 \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q \left( \frac{1}{p + q + |\mathbf{p} + \mathbf{q}|} \right)^2 X(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ + \frac{N_C^2 - 1}{3\pi^2} \delta^3(0) g^2 \ln \frac{\Lambda}{\mu} \int \bar{d}^3 p p P(p) S^2(p) + \text{e.T.}, \quad (\text{D.36})$$

$$E_C^{\text{Q,UV}} = \frac{N_C^2 - 1}{4} \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q V_C^{\text{UV}}(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) (1 - \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \\ + \frac{N_C^2 - 1}{3\pi^2} \delta^3(0) g^2 \ln \frac{\Lambda}{\mu} \int \bar{d}^3 p p P(p) S^2(p) + \text{e.T.} \quad (\text{D.37})$$

sowie

$$E_C^{\text{Q,IR}} = \frac{N_C^2 - 1}{4} \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q V_C^{\text{IR}}(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) (1 - \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \\ + \frac{N_C^2 - 1}{2} \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p \int \bar{d}^3 q V_C^{\text{IR}}(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) P(p) P(q) \\ \times \left( [S^2(p) + S^2(q)] \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}} - 2S(p)S(q) \right) \quad (\text{D.38})$$

führt. Dabei haben wir lediglich für den IR-Anteil der Coulombwechselwirkung (3.81) die genaue Struktur des endlichen Zweischleifenbeitrags angegeben. Die Analyse des fermionischen Einschleifenbeitrags (3.152) zum Energiefunktional (3.151) bzw. (3.160) ist wie in Anhang D.1 beschrieben möglich und liefert

$$E_Q^{0,1S} = -2N_C \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p p + 4N_C \delta^3(0) \int \bar{d}^3 p p P(p) S^2(p). \quad (\text{D.39})$$

Die führenden Terme in Gleichung (D.34)-(D.39) stimmen mit den jeweiligen Vakuumbeträgen für  $S(p) = 0$ ,  $\omega(p) = p$  überein und lassen sich explizit berechnen, wobei sich die rein divergenten Ausdrücke

$$E_Q^{0,1S} \Big|_{S=0, \omega=p} = -N_C \frac{\delta^3(0)}{(2\pi)^2} \Lambda^4, \quad (\text{D.40})$$

$$E_Q^{0,2S} \Big|_{S=0, \omega=p} = -\frac{N_C^2 - 1}{3} \frac{\delta^3(0)}{(2\pi)^4} \frac{7 - 12 \ln 2}{6} g^2 \Lambda^4, \quad (\text{D.41})$$

$$E_Q^A \Big|_{S=0, \omega=p} = -\frac{2(N_C^2 - 1)}{3} \frac{\delta^3(0)}{(2\pi)^4} (1 - \ln 2) g^2 \Lambda^4, \quad (\text{D.42})$$

$$E_Q^E \Big|_{S=0, \omega=p} = \frac{N_C^2 - 1}{3} \frac{\delta^3(0)}{(2\pi)^4} \frac{13 - 18 \ln 2}{6} g^2 \Lambda^4, \quad (\text{D.43})$$

$$E_C^{\text{Q,UV}}|_{S=0,\omega=p} = \frac{N_C^2 - 1}{3} \frac{\delta^3(0)}{(2\pi)^4} (1 - \ln 2) g^2 \Lambda^4, \quad (\text{D.44})$$

$$E_C^{\text{Q,IR}}|_{S=0,\omega=p} = (N_C^2 - 1) \frac{\delta^3(0)}{(2\pi)^3} \sigma_C \Lambda^2 \quad (\text{D.45})$$

ergeben.

Einsetzen von Gleichung (D.34)-(D.39) in das Energiefunktional (3.160) zeigt, daß sich die logarithmischen UV-Divergenzen wie in der Quarkgaggleichung (3.100) gegenseitig kompensieren. Dabei hebt der UV-Anteil der Coulombwechselwirkung die Divergenzen von  $V$ - und  $W$ -abhängigen Termen auf. Der fermionische Anteil des Energiefunktionals (3.160) weist daher nur diejenigen UV-Divergenzen auf, welche bereits im Energiefunktional bezüglich des perturbativen Vakuums ( $S(p) = 0$ ,  $\omega(p) = p$ ) enthalten sind.

Für das Energiefunktional (3.151) ist das nicht der Fall, da nach Einsetzen der vollen Gluonaggleichung (3.108) fermionische Beiträge in den bosonischen Anteil des Funktionals eingehen.

## D.4 Resummierte Gaggleichung

Wir untersuchen das UV-Verhalten der Schleifenbeiträge auf der rechten Seite der resummierten Quarkgaggleichung (5.47). Dabei werden wir wie im Nulltemperaturlimes vorgehen und die UV-Limites [vgl. Gleichung (D.4), (D.5)]

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \omega(p) = p, \quad (\text{D.46})$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_\varphi(\mathbf{p}) = 0 \quad (\text{D.47})$$

voraussetzen. Da die  $l = 0$  Terme der resummierten Gaggleichung (5.47) exakt denjenigen der Nulltemperatur-Gaggleichung (3.100) entsprechen, ergibt sich für diese das in Anhang D.1 bestimmte UV-Verhalten und wir können uns auf die Terme  $l \neq 0$  beschränken. Zu Illustrationszwecken führen wir die UV-Analyse für den  $V_\varphi$ -abhängigen Beitrag (5.51) des Kopplungsterms explizit aus. Ignorieren wir die Reihenfolge von Summation und Integration, so gilt:

$$\begin{aligned} I_{VQ}^{\varphi,\beta}(\mathbf{k}) &= \frac{C_F g^2}{2} \int d^3 p \sum_{l \neq 0} \exp\left(i l \beta \left[ p_z - \frac{\varphi}{\beta} \right]\right) \frac{V_\varphi(\mathbf{p}, -\mathbf{k})}{\omega(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|)} X(\mathbf{p}, -\mathbf{k}) P_\varphi(\mathbf{p}) \\ &\quad \times \left[ S_\varphi(\mathbf{p}) - 2S_\varphi(\mathbf{k}) - S_\varphi(\mathbf{p}) S_\varphi^2(\mathbf{k}) \right] \\ &= \frac{C_F g^2}{8\pi^3} \int d^3 p \sum_{l=1}^{\infty} \cos\left(l \beta \left[ p_z - \frac{\varphi}{\beta} \right]\right) \frac{1}{2p} \\ &\quad \times \left( 1 - \frac{1}{2} \xi \left[ P_\varphi(\mathbf{k}) (1 - S_\varphi^2(\mathbf{k})) - \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right] \right) \\ &\quad \times \frac{1}{p} \left( 1 + \xi \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right) \left( 1 + \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} - \xi \left\{ 1 - [\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}}]^2 \right\} \right) \left[ -2S_\varphi(\mathbf{k}) \right] \\ &= -\frac{C_F g^2}{8\pi^3} S_\varphi(\mathbf{k}) \int d^3 p \sum_{l=1}^{\infty} \cos\left(l \beta \left[ p_z - \frac{\varphi}{\beta} \right]\right) \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

$$\times \left( 1 + \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} - \xi \left[ \frac{1}{2} + P_\varphi(\mathbf{k}) - 2\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} + P_\varphi(\mathbf{k})\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} - \frac{5}{2} [\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}}]^2 \right] \right) \quad (\text{D.48})$$

Unter Verwendung von Kugelkoordinaten ergibt sich

$$p_z = p \cos \vartheta_p = pz, \quad (\text{D.49})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_p \sin \vartheta_p \\ \sin \varphi_p \sin \vartheta_p \\ \cos \vartheta_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_k \sin \vartheta_k \\ \sin \varphi_k \sin \vartheta_k \\ \cos \vartheta_k \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{1 - z^2} \sin \vartheta_k \left[ \cos \varphi_p \cos \varphi_k + \sin \varphi_p \sin \varphi_k \right] + z \cos \vartheta_k \end{aligned} \quad (\text{D.50})$$

und somit nach Ausführung der Integration über Azimut- und Polarwinkel:<sup>102</sup>

$$\begin{aligned} I_{VQ}^{\varphi,\beta}(\mathbf{k}) &= -\frac{C_F g^2}{4\pi^2} S_\varphi(\mathbf{k}) \int_{-1}^{\Lambda} dp \int_{-1}^1 dz \sum_{l=1}^{\infty} \cos \left( l\beta \left[ pz - \frac{\varphi}{\beta} \right] \right) \\ &\quad \times \left( 1 + z \cos \vartheta_k - \xi \left[ \frac{1}{2} + P_\varphi(\mathbf{k}) - z \left[ 2 \cos \vartheta_k - P_\varphi(\mathbf{k}) \cos \vartheta_k \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{5}{2} \left[ \sin^2 \vartheta_k + z^2 \left( \cos^2 \vartheta_k - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta_k \right) \right] \right] \right) \\ &= -\frac{C_F g^2}{4\pi^2} S_\varphi(\mathbf{k}) \int_{-1}^{\Lambda} dp \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{2 \sin(l\beta p) \cos(l\varphi)}{l\beta p} \right. \\ &\quad - \frac{2 \cos \vartheta_k \sin(l\varphi)}{l^2 \beta^2 p^2} \left( l\beta p \cos(l\beta p) - \sin(l\beta p) \right) \\ &\quad - \xi \left[ \left( \frac{1}{2} + P_\varphi(\mathbf{k}) \right) \frac{2 \sin(\beta l p) \cos(l\varphi)}{\beta l p} \right. \\ &\quad \left. + \left( 2 - P_\varphi(\mathbf{k}) \right) \frac{2 \cos \vartheta_k \sin(l\varphi)}{\beta^2 l^2 p^2} \left( l\beta p \cos(l\beta p) - \sin(l\beta p) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{2} \left[ \frac{2 \sin^2 \vartheta_k \sin(\beta l p) \cos(l\varphi)}{\beta l p} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( 2 \cos^2 \vartheta_k - \sin^2 \vartheta_k \right) \frac{\cos(l\varphi)}{\beta^3 l^3 p^3} \right] \right] \\ &\quad \times \left( [\beta^2 l^2 p^2 - 2] \sin(\beta l p) + 2\beta l p \cos(\beta l p) \right) \Big] \Big] \quad (\text{D.51}) \end{aligned}$$

<sup>102</sup>Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dz \cos(az + b) &= \frac{2}{a} \sin a \cos b, \\ \int_{-1}^1 dz z \cos(az + b) &= \frac{2 \sin b}{a^2} (a \cos a - \sin a), \\ \int_{-1}^1 dz z^2 \cos(az + b) &= \frac{2 \cos b}{a^3} \left( [a^2 - 2] \sin a + 2a \cos a \right). \end{aligned}$$

Die verbleibende  $p$ -Integration ist unabhängig von  $l$  endlich, sodaß wir darauf schließen können, daß die  $l \neq 0$  Beiträge von  $I_{VQ}^\varphi$  (5.51) frei von UV-Divergenzen sind.

Die UV-Analyse der übrigen Schleifenbeiträge der Gapgleichung läßt sich analog durchführen und liefert ein identisches Ergebnis, sodaß die resummierte Gapgleichung (5.47) nur durch die  $l = 0$  Terme UV-Divergenzen enthält. Diese stimmen mit denen der Nulltemperatur-Gapgleichung (3.100) überein womit Gleichung (5.47) UV-endlich ist.

## D.5 UV-Limes des fermionischen Anteils am effektiven Potentials

Wir werten den UV-Limes des effektiven Quarkpotentials (5.187) aus, wozu wir

$$\mathcal{E}[a] \equiv -2e_{Q,UV}[\beta, a] \quad (D.52)$$

setzen. Durch Anwenden der Poisson'schen Summenformel (5.16) ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[a] &= \sum_m \int_\beta \bar{d}^3 p \left( p_\perp^2 + (\Omega_n + a \cdot \mu_m)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_m \int \bar{d}^2 p_\perp \int \bar{d} y \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left( i l \beta \left[ y - \frac{\pi}{\beta} - a \cdot \mu_m \right] \right) \left( p_\perp^2 + y^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (D.53)$$

Unter Verwendung der Proper-Time-Darstellung (siehe Anmerkung D.5.1)

$$x = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \int_{1/\Delta^2}^{\infty} d\tau \tau^{-\frac{3}{2}} \exp(-\tau x^2) \quad (D.54)$$

mit  $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$  wird das zu:<sup>103</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[a] &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_m \int \bar{d}^2 p_\perp \int \bar{d} y \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \exp\left( i l \beta [y - a \cdot \mu_m] \right) \\ &\quad \times \int_{1/\Delta^2}^{\infty} d\tau \tau^{-\frac{3}{2}} \exp\left( -\tau (p_\perp^2 + y^2) \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi^{\frac{5}{2}}} \sum_m \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \int_{1/\Delta^2}^{\infty} d\tau \int \bar{d} y \tau^{-\frac{3}{2}} \exp(-\tau y^2) \exp\left( i l \beta [y - a \cdot \mu_m] \right) \\ &\quad \times \int_0^{\infty} dp_\perp p_\perp \exp(-\tau p_\perp^2) \\ &= -\frac{1}{16\pi^{\frac{5}{2}}} \sum_m \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \int_{1/\Delta^2}^{\infty} d\tau \int \bar{d} y \tau^{-\frac{5}{2}} \exp(-\tau y^2) \exp\left( i l \beta [y - a \cdot \mu_m] \right) \end{aligned}$$

<sup>103</sup>Zur Wahrung einer kompakten Notation verzichten wir auf die explizite Nennung des Limes  $\Delta \rightarrow \infty$ .

$$= -\frac{1}{16\pi^2} \sum_m \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \exp(-il\beta\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\mu}_m) \int_{1/\Delta^2}^{\infty} d\tau \tau^{-3} \exp\left(-\frac{l^2\beta^2}{4\tau}\right) \quad (\text{D.55})$$

Dabei haben wir die Reihenfolge von Summationen und Integrationen vertauscht, obwohl nicht alle auftretenden Reihen absolut konvergent sind. Der Ausdruck, welchen wir abschließend finden werden, wird aber frei von Divergenzen sein. Im Limes  $\Delta \rightarrow \infty$  ist der  $l = 0$  Term in Gleichung (D.55) nicht wohldefiniert, da für diesen die durch  $\tau^{-3}$  verursachte Polstelle im Integranden nicht durch die Exponentialfunktion gehoben werden kann.<sup>104</sup> Allerdings ist dieser Term unabhängig vom Hintergrundfeld  $\mathbf{a}$ , sodaß er bei Abzug des Funktionals für  $\mathbf{a} = 0$  [siehe (5.185)] verschwindet:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[a] - \mathcal{E}[0] &= -\frac{1}{16\pi^2} \sum_m \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \left[ \exp(-il\beta\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\mu}_m) - 1 \right] \int_0^{\infty} d\tau \tau^{-3} \exp\left(-\frac{l^2\beta^2}{4\tau}\right) \\ &= -\frac{1}{\pi^2\beta^4} \sum_m \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l^4} \left[ \exp(-il\beta\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\mu}_m) - 1 \right] \int_0^{\infty} du u \exp(-u) \\ &= -\frac{2}{\pi^2\beta^4} \sum_m \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l^4} \left[ \cos(l\beta\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\mu}_m) - 1 \right] \\ &= -\frac{2\pi^2}{3\beta^4} \sum_m \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\beta\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\mu}_m}{2\pi} \right)^2 - \left( \frac{\beta\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\mu}_m}{2\pi} \right)^4 \right] \end{aligned} \quad (\text{D.56})$$

Die Ausführung der Summe über  $l$  im letzten Schritt bedingt die Beschränkung des Hintergrundfelds auf

$$-\pi \leq \beta\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\mu}_m \leq \pi, \quad (\text{D.57})$$

siehe Anmerkung D.5.2. Dies stellt keine Einschränkung dar, da das ursprüngliche Energiefunktional (D.53) periodisch im Hintergrundfeld ist und das Intervall (D.57) genau eine volle Periode abdeckt. Ersetzen wir in Gleichung (D.56)  $\mathcal{E}$  gemäß seiner Definition (D.52), so finden wir den im Hauptteil der Arbeit angegebenen Ausdruck (5.188) für das effektive Potential.

*Anmerkung D.5.1:* Proper-Time-Darstellung

Die Euler'sche Gammafunktion ist gegeben durch

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dt t^{x-1} \exp(-t).$$

Führen wir die Substitution  $t \rightarrow At$  durch, so erhalten wir

$$\Gamma(x) = A^x \int_0^{\infty} dt t^{x-1} \exp(-At) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{A^x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{\infty} dt t^{x-1} \exp(-At).$$

Dabei sind wir davon ausgegangen, daß sämtliche Integrale wohldefiniert sind. Für  $x < 1$  besitzt der Integrand einen Pol im Ursprung und wir müssen einen IR-Cutoff  $1/\Delta^2$  als untere Integrationsgrenze einführen.

<sup>104</sup>Man beachte, daß der Term  $l = 0$  identisch mit dem Nulltemperaturlimes des effektiven Potentials ist.

*Anmerkung D.5.2:* Ausführung der  $l$ -Summation

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{\cos(lx)}{l^4} &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(l\pi) \cos(lx)}{l^4} \\
 &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(l[x + \pi])}{l^4} \\
 &= \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2[x + \pi]^2}{12} + \frac{\pi[x + \pi]^3}{12} - \frac{[x + \pi]^4}{48} \\
 &= \frac{-15x^4 + 30\pi^2x^2 - 7\pi^4}{720}
 \end{aligned}$$

Zur Ausführung der Summation haben wir auf Gleichung (1.443/6) in Referenz [143] zurückgegriffen, wobei wir die Einschränkung  $x \in [-\pi, \pi]$  in Kauf nehmen müssen. Für Werte von  $x$  außerhalb dieses Intervalls muß der Ausdruck entsprechend periodisch fortgesetzt werden. Für  $x = 0$  folgt schließlich

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l^4} = -\frac{7\pi^4}{720}.$$

# Anhang E

## Analyse der Lösung der Quarkgapgleichung

Zur Analyse des asymptotischen Verhaltens der Lösung der Quarkgapgleichung (3.100) bzw. (3.131) werden wir zweierlei Methoden verwenden: Skalierungsargumente im IR sowie Berechnungen in Winkelnäherung im UV. Die Aussagekraft beider Methoden ist begrenzt, die folgenden Ergebnisse sollten daher nicht als strenger Beweis, sondern lediglich als Hinweis auf das Verhalten der Lösung der Gapgleichung verstanden werden.

### E.1 Verhalten der Lösung im UV

#### E.1.1 Winkelnäherung

Wir betrachten die Gapgleichung in der Massenfunktion (3.131) zunächst im Limes  $g = 0$  in dimensionslosen Einheiten von  $\mu = \sqrt{C_F \sigma_C}$  [siehe Gleichung (3.145)],

$$M(k) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3p \frac{1}{|\mathbf{p} - \mathbf{k}|^4} \frac{M(p) - M(k) \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{k^2}}{E(p)}. \quad (\text{E.1})$$

Wir vereinfachen diesen Ausdruck durch Anwenden der Winkelnäherung, d.h.

$$|\mathbf{p} - \mathbf{k}| \approx \max\{p, k\}, \quad (\text{E.2})$$

wobei wir den kinematischen Faktor

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = pk \cos \vartheta_p = pkz \quad (\text{E.3})$$

in der Gapgleichung unverändert lassen.<sup>105</sup> Das führt auf

$$M(k) = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^k dp \frac{p^2 M(p)}{k^4 E(p)} + \int_k^\infty dp \frac{p^{-2} M(p)}{E(p)} \right]. \quad (\text{E.4})$$

Für die Massenfunktion verwenden wir nun den Potenzansatz

$$M(p) = p^\alpha, \quad (\text{E.5})$$

<sup>105</sup>Dies bedingt das Verschwinden des Beitrags  $\sim \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}$  bei Ausführen der Integration über  $\vartheta_p$  bzw.  $z$ . Die alternative Ersetzung

$$2\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = p^2 + k^2 - |\mathbf{p} - \mathbf{k}|^2 = \min\{p^2, k^2\}$$

scheint aber die gravierendere Näherung zu sein. Die Beibehaltung des kinematischen Faktors ist außerdem in Übereinstimmung mit dem Vorgehen im Gluonsektor, siehe Referenz [18].

wobei der Exponent aufgrund der asymptotischen Freiheit der Theorie negativ sein muß. Man beachte, daß wir ein – eventuell mögliches – logarithmisches Verhalten der Massenfunktion a priori ausgeschlossen haben. Mit dem Ansatz (E.5) ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned}
k^\alpha &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^k dp \frac{p^{\alpha+2}}{k^4 \sqrt{p^2 + p^{2\alpha}}} + \int_k^\infty dp \frac{p^{\alpha-2}}{\sqrt{p^2 + p^{2\alpha}}} \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{p^3}{3k^4} {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2(1-\alpha)}; 1 + \frac{3}{2(1-\alpha)}; -p^{2-2\alpha} \right) \right]_0^k \\
&\quad + \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{1}{p} {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2(\alpha-1)}; 1 + \frac{1}{2(\alpha-1)}; -p^{2-2\alpha} \right) \right]_k^\infty
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Hierbei bezeichnet

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \tag{E.7}$$

die (*Gauß'sche*) *Hypergeometrische Funktion*. Da ihr Konvergenzradius durch  $|z| < 1$  (unter bestimmten Voraussetzungen  $|z| \leq 1$ ) gegeben ist, wir aber den Limes  $p, k \rightarrow \infty$  betrachten müssen, verwenden wir die Identität

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} {}_2F_1 \left( a, a-c+1; a-b+1; \frac{1}{z} \right) \\
&\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} {}_2F_1 \left( b, b-c+1; b-a+1; \frac{1}{z} \right).
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Weiterhin ergibt sich aus der Definition der Hypergeometrischen Funktion

$$\lim_{z \rightarrow 0} {}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \mathcal{O}(z) \quad \text{sowie} \quad {}_2F_1(a, 0; c; z) = 1, \tag{E.9}$$

siehe Referenz [151]. Damit erhalten wir im Limes  $k \rightarrow \infty$  die Gleichung:

$$\begin{aligned}
k^\alpha &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{3k} \left\{ \frac{\Gamma \left( 1 + \frac{3}{2(1-\alpha)} \right) \Gamma \left( \frac{3}{2(1-\alpha)} - \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{3}{2(1-\alpha)} \right) \Gamma \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2(1-\alpha)} \right)} k^{\alpha-1} \right. \right. \\
&\quad \times {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{3}{2(1-\alpha)}; \frac{3}{2} - \frac{3}{2(1-\alpha)}; -k^{2\alpha-2} \right) \\
&\quad + \frac{\Gamma \left( 1 + \frac{3}{2(1-\alpha)} \right) \Gamma \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2(1-\alpha)} \right)}{\Gamma \left( \frac{1}{2} \right) \Gamma(1)} k^{-3} \\
&\quad \left. \times {}_2F_1 \left( \frac{3}{2(1-\alpha)}, 0; \frac{1}{2} + \frac{3}{2(1-\alpha)}; -k^{2\alpha-2} \right) \right\} \\
&\quad - \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{p^3}{3k^4} + \mathcal{O}(p^{5-2\alpha}) \right] \Bigg)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\pi} \left( \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \left\{ \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2(\alpha-1)}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2(\alpha-1)} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2(\alpha-1)}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(\alpha-1)}\right)} p^{\alpha-1} \right. \right. \\
& \quad \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\alpha-1)}; \frac{3}{2} - \frac{1}{2(\alpha-1)}; -p^{2\alpha-2}\right) \\
& \quad + \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2(\alpha-1)}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(\alpha-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)} p \\
& \quad \left. \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2(\alpha-1)}, 0; \frac{1}{2} + \frac{1}{2(\alpha-1)}; -p^{2\alpha-2}\right) \right\} \\
& - \frac{1}{k} \left\{ \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2(\alpha-1)}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2(\alpha-1)} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2(\alpha-1)}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(\alpha-1)}\right)} k^{\alpha-1} \right. \\
& \quad \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\alpha-1)}; \frac{3}{2} - \frac{1}{2(\alpha-1)}; -k^{2\alpha-2}\right) \\
& \quad + \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2(\alpha-1)}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(\alpha-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)} k \\
& \quad \left. \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2(\alpha-1)}, 0; \frac{1}{2} + \frac{1}{2(\alpha-1)}; -k^{2\alpha-2}\right) \right\} \\
& = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{2(1-\alpha)}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2(1-\alpha)} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2(1-\alpha)}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2(1-\alpha)}\right)} \frac{1}{3} k^{\alpha-2} + \mathcal{O}(k^{3\alpha-4}) \right. \\
& \quad + \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{2(1-\alpha)}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2(1-\alpha)}\right)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{3} k^{-4} - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2(\alpha-1)}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(\alpha-1)}\right)}{\sqrt{\pi}} \\
& \quad + \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2(\alpha-1)}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2(\alpha-1)} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2(\alpha-1)}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(\alpha-1)}\right)} k^{\alpha-2} + \mathcal{O}(k^{3\alpha-4}) \\
& \quad \left. + \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2(\alpha-1)}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(\alpha-1)}\right)}{\sqrt{\pi}} \right) \tag{E.10}
\end{aligned}$$

Vergleich der führenden Potenz in  $k$  auf beiden Seiten liefert für den Exponenten

$$\alpha = \max\{\alpha - 2, -4\} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -4. \tag{E.11}$$

Die verwendete Relation (E.8) ist nur für

$$|\arg(-z)| < \pi, \quad (a-b) \notin \mathbb{Z} \tag{E.12}$$

gültig. Für den gefundenen Exponenten  $\alpha = -4$  ist  $-z = p^{2-2\alpha} = p^{10}$  eine positive Zahl, d.h.  $\arg(-z) = 0 < \pi$ . Anhand von

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2(1-\alpha)} = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}, \tag{E.13a}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2(\alpha-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5} \quad (\text{E.13b})$$

folgt, daß auch die zweite Bedingung erfüllt ist, womit der UV-Exponent  $\alpha = -4$  zu keinem offensichtlichen Widerspruch führt.

Der Exponent  $\alpha = -4$  deckt sich mit den numerischen Ergebnissen dieser (siehe Abschnitt 3.4) und früherer Arbeiten [23, 107, 115]. Allerdings ist zu berücksichtigen, daß die Verwendung der Winkelnäherung sowie die Ersetzung der Massenfunktion durch den UV-Ansatz (E.5) auf dem *gesamten* Impulsbereich nur eine approximative Lösung erwarten läßt, von der die tatsächliche Massenfunktion abweichen kann.

Infolge der für  $g > 0$  auftretenden zusätzlichen Schleifenbeiträge auf der rechten Seite der Gapgleichung (3.131) ist eine Übertragung der eben angestellten Betrachtungen auf diesen Fall nicht ohne weiteres möglich: Insbesondere die Vektorkerne bringen selbst in Winkelnäherung recht komplexe algebraische Terme in die Integranden ein, die die erforderliche analytische Ausführung sämtlicher Integrationen erheblich erschweren. Da die begrenzte Aussagekraft der UV-Analyse einen solchen Aufwand nicht rechtfertigt, verzichten wir in dieser Arbeit auf die Analyse der Zusatzterme.

### E.1.2 Skalierungsargument

Alternativ zur Winkelnäherung läßt sich das UV-Verhalten der Lösung der Gapgleichung (3.131) durch ein Reskalierungsargument untersuchen: Dazu verwenden wir für die Massenfunktion erneut den Potenzansatz (E.5) und vollziehen den Übergang zu großen äußeren Impulsen durch die Ersetzung  $k \rightarrow \lambda k$  mit  $\lambda \gg 1$ . Damit erhalten wir aus der Gapgleichung im Limes  $g = 0$  [siehe Gleichung (E.1)]

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha k^\alpha &= \frac{1}{2\pi^2} \int d^3p \frac{1}{|\mathbf{p} - \lambda \mathbf{k}|^4} \frac{p^\alpha - \lambda^{\alpha-1} k^\alpha \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{k^2}}{\sqrt{p^2 + p^{2\alpha}}} \\ &= \frac{\lambda^{\alpha-2}}{2\pi^2} \int d^3q \frac{1}{|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^4} \frac{q^\alpha - k^\alpha \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}}{k^2}}{\sqrt{q^2 + \lambda^{2\alpha-2} q^{2\alpha}}}, \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

wobei wir im zweiten Schritt  $\mathbf{p} \rightarrow \lambda \mathbf{q}$  gesetzt haben. Aus dieser Gleichung läßt sich ein Faktor  $\lambda^\alpha$  kürzen, womit sich

$$k^\alpha = \frac{\lambda^{-2}}{2\pi^2} \int d^3q \frac{1}{|\mathbf{q} - \mathbf{k}|^4} \frac{q^\alpha - k^\alpha \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}}{k^2}}{\sqrt{q^2 + \lambda^{2\alpha-2} q^{2\alpha}}} \quad (\text{E.15})$$

ergibt. Da die linke Seite unabhängig von  $\lambda$  ist, sollte das auch für die Rechte gelten. Allerdings läßt sich daraus keine Aussage über den Wert des Exponenten  $\alpha$  ableiten (zumindest ist das nicht auf offensichtliche Art und Weise möglich). Das bedeutet aber nicht, daß ein Potenzgesetz für den UV-Limes der Massenfunktion, wie es die Verwendung der Winkelnäherung nahe gelegt hat, ausgeschlossen ist.

## E.2 Verhalten der Lösung im IR

Zur Untersuchung des IR-Verhaltens betrachten wir die zu Gleichung (3.131) äquivalente Gapgleichung in  $S$  (3.100) mithilfe eines Skalierungsarguments.<sup>106</sup> Für den Skalarkern

<sup>106</sup>Die Betrachtung in Winkelnäherung ist wie im UV nur im Limes  $g = 0$  möglich und liefert eine für  $p \rightarrow 0$  anwachsenden Massenfunktion, was wenig sinnvoll erscheint.

machen wir den Potenzansatz

$$S(p \rightarrow 0) \sim p^{-\alpha} \quad (\text{E.16})$$

und vollziehen den IR-Limes des äußeren Impulses durch die Ersetzung  $k \rightarrow \lambda k$  mit endlichem  $k$  und  $\lambda \rightarrow 0$ . Analog führen wir im Schleifenimpuls die Substitution  $\mathbf{p} \rightarrow \lambda \mathbf{q}$  durch. Wie in der UV-Analyse verwenden wir die asymptotische Form (E.16) des Skalarkerns sowie der Gribovformel (3.21),

$$\omega(p \rightarrow 0) = \frac{M_G^2}{p}, \quad (\text{E.17})$$

auf dem gesamten Impulsbereich. Da wir zum Schluß die führende Potenz von  $\lambda$  auf der linken und rechten Seite der Gapgleichung (3.100) vergleichen werden, genügt es, ausschließlich die führenden Potenzen der einzelnen Schleifenterme zu bestimmen. Skalarkern und inverser Gluonpropagator lassen sich dabei pauschal durch

$$S \sim \lambda^{-\alpha}, \quad \omega \sim \lambda^{-1} \quad (\text{E.18})$$

ersetzen während der Nennerterm  $P$  (3.61) eine Fallunterscheidung für  $\alpha$  erforderlich macht.

### E.2.1 Divergenter Skalarkern

Für einen IR-divergenten Skalarkern mit  $\alpha > 0$  erhalten wir

$$P \sim \lambda^{2\alpha} \quad (\text{E.19})$$

womit die Vektorkerne (3.93), (3.97) die Asymptotik

$$\begin{aligned} V(\mathbf{p}, \mathbf{k}) &= \frac{1 + S(p)S(k)}{N^V(p, k) + \omega(|\mathbf{p} + \mathbf{k}|)} \\ &\sim \left[1 + \lambda^{-2\alpha}\right] \left[2\lambda\lambda^{2\alpha} \left(1 - \lambda^{-2\alpha} + 2\lambda^{-2\alpha}\right) + \lambda^{-1}\right]^{-1} \\ &\sim \left[\lambda + \lambda^{1-2\alpha}\right] \left[1 + \lambda^{2+2\alpha} + \lambda^2\right]^{-1} \\ &\sim \lambda^{1-2\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{E.20a})$$

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \sim \lambda^{1-\alpha} \quad (\text{E.20b})$$

besitzen. Die kinematischen Faktoren  $X$  (3.62) und  $Y$  (3.63) reduzieren sich auf

$$X, Y \sim 1. \quad (\text{E.21})$$

Für die linke Seite der Gapgleichung (3.100) ergibt sich damit die Asymptotik

$$kS(k) \sim \lambda^{1-\alpha} \quad (\text{E.22})$$

während für die Schleifenterme auf der rechten Seite

$$I_C^Q(k) \sim \int \bar{d}^3p V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) P(p) \left[ S(p)(1 - S^2(k)) - S(k)(1 - S^2(p)) \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right] \\ \sim \underbrace{\lambda^3}_{=\bar{d}^3p} \underbrace{(\lambda^{-4} + \lambda^{-2})}_{=V_C} \underbrace{\lambda^{2\alpha}}_{=P} \underbrace{(\lambda^{-\alpha} + \lambda^{-3\alpha})}_{=S(1-S^2)} \sim \lambda^{-1-\alpha}, \quad (\text{E.23})$$

$$I_{VV}^Q(k) \sim \lambda^{7-3\alpha}, \quad I_{WW}^Q(k) \sim \lambda^{7-\alpha}, \quad (\text{E.24})$$

$$I_{VQ}^Q(k) \sim \lambda^{5-3\alpha}, \quad I_{WQ}^Q(k) \sim \lambda^{5-\alpha}, \quad (\text{E.25})$$

$$I_{VE}^Q(k) \sim \lambda^{5-3\alpha}, \quad I_{WE}^Q(k) \sim \lambda^{5-\alpha} \quad (\text{E.26})$$

gilt. Die Forderung, daß die führende Potenz der linken mit derjenigen der rechten Seite der Gleichung übereinstimmt, führt auf die nicht erfüllbare Bedingung

$$1 - \alpha = \min\{-1 - \alpha, 5 - 3\alpha\} \\ \Leftrightarrow \alpha = \max\{2 + \alpha, -4 + 3\alpha\} \\ \Leftrightarrow \alpha = \begin{cases} 2 + \alpha & \text{falls } \alpha < 3 \\ 3\alpha - 4 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \not\Leftarrow \quad (\text{E.27})$$

### E.2.2 Verschwindender Skalarkern

Für einen im IR verschwindenden Skalarkern,  $\alpha < 0$ , gilt

$$P \sim 1 \quad (\text{E.28})$$

und damit für die Vektorkerne

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \sim \lambda, \quad W(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \sim \lambda^{1-\alpha}. \quad (\text{E.29})$$

Analog zum Fall  $\alpha > 0$  folgt für die Schleifenterme auf der rechten Seite der Gapgleichung (3.100):

$$I_C^Q(k) \sim \lambda^{-1-\alpha}, \quad (\text{E.30})$$

$$I_{VV}^Q(k) \sim \lambda^{7-\alpha}, \quad I_{WW}^Q(k) \sim \lambda^{7-3\alpha}, \quad (\text{E.31})$$

$$I_{VQ}^Q(k) \sim \lambda^{5-\alpha}, \quad I_{WQ}^Q(k) \sim \lambda^{5-\alpha}, \quad (\text{E.32})$$

$$I_{VE}^Q(k) \sim \lambda^{5-\alpha}, \quad I_{WE}^Q(k) \sim \lambda^{5-3\alpha}. \quad (\text{E.33})$$

Ein Vergleich mit der linken Seite (E.22) der Gleichung führt auf die Bedingung

$$1 - \alpha = -1 - \alpha, \quad (\text{E.34})$$

welche offenbar ebenfalls keine Lösung besitzt.

Da sowohl ein divergenter, als auch ein verschwindender Skalarkern zum Widerspruch führen, bleibt gemäß des Skalierungsarguments als letzte Möglichkeit

$$S(k \rightarrow 0) = \text{konst.} \neq 0. \quad (\text{E.35})$$

Einsetzen dieses Limes in die Gapgleichung (3.100) führt auf eine Gleichung, die sich für  $g > 0$  weder explizit auflösen, noch zum Widerspruch führen läßt. Lediglich für  $g = 0$  ergibt sich daraus die konsistente Lösung  $S(0) = 1$ .

# Anhang F

## Bewegungsgleichungen auf $\mathbb{R}^2 \times S^1(\beta)$

### F.1 Bewegungsgleichungen in Abhängigkeit der Matsubarafrequenzen

Die Variation der Grundzustandsenergie  $\langle \tilde{H}(\beta, \mu = 0) \rangle_\varphi$  mit den in Gleichung (5.42), (5.44) bis (5.46) gegebenen Einzelbeiträgen nach den Vektorkernen  $V_\varphi$ ,  $W_\varphi$  führt auf die beiden Bestimmungsgleichungen

$$V_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m) = \frac{1 + S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n)S_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m)}{N^V(\mathbf{p}_\perp, p_n, \mathbf{q}_\perp, q_m) + \omega(|\mathbf{p}_\perp - \mathbf{q}_\perp + \omega_{n-m}\hat{e}_z|)} \quad (\text{F.1})$$

und

$$W_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{q}_\perp, -q_m) = \frac{S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) + S_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m)}{N^W(\mathbf{p}_\perp, p_n, \mathbf{q}_\perp, q_m) + \omega(|\mathbf{p}_\perp - \mathbf{q}_\perp + \omega_{n-m}\hat{e}_z|)}, \quad (\text{F.2})$$

wobei wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned} N^V(\mathbf{p}_\perp, p_n, \mathbf{q}_\perp, q_m) &\equiv \\ &\equiv \sqrt{p_\perp^2 + p_n^2} P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \left(1 - S_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n) + 2S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n)S_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m)\right) \\ &\quad + \sqrt{q_\perp^2 + q_m^2} P_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m) \left(1 - S_\varphi^2(\mathbf{q}_\perp, q_m) + 2S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n)S_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m)\right), \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

$$\begin{aligned} N^W(\mathbf{p}_\perp, p_n, \mathbf{q}_\perp, q_m) &\equiv \\ &\equiv \sqrt{p_\perp^2 + p_n^2} P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \left(1 - S_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n) - 2S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n)S_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m)\right) \\ &\quad + \sqrt{q_\perp^2 + q_m^2} P_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m) \left(1 - S_\varphi^2(\mathbf{q}_\perp, q_m) - 2S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n)S_\varphi(\mathbf{q}_\perp, q_m)\right) \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

eingeführt haben. Wie in Kapitel 3 lassen sich die Vektorkerne somit bei Kenntnis des Skalarkerns und des inversen Gluonpropagators direkt berechnen. Weiterhin gelten für den Ursprung der einzelnen Bestandteile von Gleichung (F.1) und (F.2) die Aussagen aus Abschnitt 3.3.1: Die Zähler entspringen dem Kopplungsterm (5.44) während die Nenner die Beiträge von freiem Dirac-Hamiltonian (5.42) sowie kinetischer Energie der Gluonen (5.45) enthalten. Schließlich erfüllen die Vektorkerne (F.1) und (F.2) die Symmetrierelation (5.31), sowie (5.32) sofern

$$S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) = S_\varphi(-\mathbf{p}_\perp, -p_n) \quad (\text{F.5})$$

gilt.

Für den Skalarkern  $S_\varphi$  ergibt sich aus der Minimierung des Energieerwartungswerts die Gapgleichung

$$\begin{aligned} \sqrt{k_\perp^2 + k_l^2} S_\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) &= I_C^\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) + I_{VV}^\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) + I_{WW}^\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) + I_{VQ}^\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) \\ &\quad + I_{WQ}^\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) + I_{VE}^\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) + I_{WE}^\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l). \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Die rechte Seite der Gleichung enthält eine Summe von Einschleifentermen, welche sich im Detail wie folgt zusammensetzen: Die Farb-Coulombwechselwirkung (5.46) liefert den Beitrag

$$\begin{aligned} I_C^\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) &= \\ &= \frac{C_F}{2} \int_\beta \mathrm{d}^3 p V_C(|\mathbf{p}_\perp - \mathbf{k}_\perp + \omega_{n-l} \hat{e}_z|) P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \left[ S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{k}_\perp, k_l) \right) \right. \\ &\quad \left. - S_\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n) \right) \frac{\mathbf{p}_\perp + p_n \hat{e}_z}{\sqrt{p_\perp^2 + p_n^2}} \cdot \frac{\mathbf{k}_\perp + k_l \hat{e}_z}{\sqrt{k_\perp^2 + k_l^2}} \right], \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

aus dem Zweischleifenbeitrag des freien Dirac-Hamiltonians (5.42) ergibt sich

$$\begin{aligned} I_{VV}^\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) &= \\ &= -\frac{C_F}{2} g^2 \int_\beta \mathrm{d}^3 p \frac{V_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{k}_\perp, -k_l)}{\omega(|\mathbf{p}_\perp - \mathbf{k}_\perp + \omega_{n-l} \hat{e}_z|)} X(\mathbf{p}_\perp + p_n \hat{e}_z, -\mathbf{k}_\perp - k_l \hat{e}_z) P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \\ &\quad \times \left[ \sqrt{p_\perp^2 + p_n^2} P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \left\{ S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{k}_\perp, k_l) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - S_\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n) \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{k_\perp^2 + k_l^2} P_\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) \left\{ S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \left( 1 - 3S_\varphi^2(\mathbf{k}_\perp, k_l) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - S_\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) \left( 3 - S_\varphi^2(\mathbf{k}_\perp, k_l) \right) \right\} \right], \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

$$\begin{aligned} I_{WW}^\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) &= \\ &= -\frac{C_F}{2} g^2 \int_\beta \mathrm{d}^3 p \frac{W_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{k}_\perp, -k_l)}{\omega(|\mathbf{p}_\perp - \mathbf{k}_\perp + \omega_{n-l} \hat{e}_z|)} Y(\mathbf{p}_\perp + p_n \hat{e}_z, -\mathbf{k}_\perp - k_l \hat{e}_z) P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \\ &\quad \times \left[ \sqrt{p_\perp^2 + p_n^2} P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \left\{ S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \left( -1 + S_\varphi^2(\mathbf{k}_\perp, k_l) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - S_\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n) \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{k_\perp^2 + k_l^2} P_\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) \left\{ S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \left( -1 + 3S_\varphi^2(\mathbf{k}_\perp, k_l) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - S_\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) \left( 3 - S_\varphi^2(\mathbf{k}_\perp, k_l) \right) \right\} \right], \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

der Kopplungsterm (5.44) führt zu

$$I_{VQ}^\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) = \frac{C_F}{2} g^2 \int_\beta d^3 p \frac{V_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{k}_\perp, -k_l)}{\omega(|\mathbf{p}_\perp - \mathbf{k}_\perp + \omega_{n-l} \hat{e}_z|)} X(\mathbf{p}_\perp + p_n \hat{e}_z, -\mathbf{k}_\perp - k_l \hat{e}_z) \\ \times P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \left[ S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) - 2S_\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) - S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) S_\varphi^2(\mathbf{k}_\perp, k_l) \right], \quad (\text{F.10})$$

$$I_{WQ}^\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) = \frac{C_F}{2} g^2 \int_\beta d^3 p \frac{W_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{k}_\perp, -k_l)}{\omega(|\mathbf{p}_\perp - \mathbf{k}_\perp + \omega_{n-l} \hat{e}_z|)} Y(\mathbf{p}_\perp + p_n \hat{e}_z, -\mathbf{k}_\perp - k_l \hat{e}_z) \\ \times P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) \left[ 1 - 2S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n) S_\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) - S_\varphi^2(\mathbf{k}_\perp, k_l) \right] \quad (\text{F.11})$$

und die kinetische Energie der Gluonen (5.45) schließlich zu

$$I_{VE}^\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) = \frac{C_F}{2} g^2 S_\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) \int_\beta d^3 p V_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{k}_\perp, -k_l) \\ \times X(\mathbf{p}_\perp + p_n \hat{e}_z, -\mathbf{k}_\perp - k_l \hat{e}_z) P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n), \quad (\text{F.12})$$

$$I_{WE}^\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) = \frac{C_F}{2} g^2 S_\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) \int_\beta d^3 p W_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_n, -\mathbf{k}_\perp, -k_l) \\ \times Y(\mathbf{p}_\perp + p_n \hat{e}_z, -\mathbf{k}_\perp - k_l \hat{e}_z) P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_n). \quad (\text{F.13})$$

Alle diese Schleifenbeiträge lassen sich im Sinne von Feynmandiagrammen graphisch interpretieren, wobei sich dasselbe Ergebnis einstellt wie für die jeweiligen Pendants auf  $\mathbb{R}^3$  (d.h. im Nulltemperaturlimes), siehe Abbildung 3.7 bis 3.10.

Weiterhin folgt aus der Gapgleichung (F.6), daß der Skalarkern  $S_\varphi$  der Symmetrierelation (F.5) genügt. Dabei ist zu beachten, daß die Transformation  $p_n \rightarrow -p_n$  einen Vorzeichenwechsel in der Phase bedingt,  $\varphi \rightarrow -\varphi$ .

## F.2 Resummation der Gapgleichung

Im Folgenden wenden wir die Poisson'sche Summenformel (5.16) auf die Gapgleichung (F.6) in Abhängigkeit der Matsubarafrequenzen an. Für den Beitrag der Coulombwechselwirkung (F.7) ergibt sich damit zunächst

$$I_C^\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) = \frac{C_F}{2} \int d^3 p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(il\beta p_z) V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{k}_\perp - \omega_l \hat{e}_z|) P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_z + \varphi/\beta) \\ \times \left[ S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_z + \varphi/\beta) \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{k}_\perp, k_l) \right) \right. \\ \left. - S_\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_l) \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_z + \varphi/\beta) \right) \frac{\mathbf{p} + \frac{\varphi}{\beta} \hat{e}_z}{|\mathbf{p} + \frac{\varphi}{\beta} \hat{e}_z|} \cdot \frac{\mathbf{k}_\perp + k_l \hat{e}_z}{\sqrt{k_\perp^2 + k_l^2}} \right] \quad (\text{F.14})$$

und auch für die übrigen Schleifenbeiträge (F.8) bis (F.13) lassen sich analoge Ausdrücke herleiten. Auf der rechten Seite der Gapgleichung treten daher ausschließlich kontinuierliche Schleifenimpulse auf, wodurch es möglich wird, auch die  $z$ -Komponente des äußeren Impulses zu beliebigen kontinuierlichen Werten fortzusetzen. Für den Beitrag der Coulombwechselwirkung (F.14) erhalten wir beispielsweise

$$I_C^\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_z + \varphi/\beta) = \frac{C_F}{2} \int \bar{d}^3 p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(il\beta p_z) V_C(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) P_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_z + \varphi/\beta) \\ \times \left[ S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_z + \varphi/\beta) \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{k}_\perp, k_z + \varphi/\beta) \right) \right. \\ \left. - S_\varphi(\mathbf{k}_\perp, k_z + \varphi/\beta) \left( 1 - S_\varphi^2(\mathbf{p}_\perp, p_z + \varphi/\beta) \right) \frac{\mathbf{p} + \frac{\varphi}{\beta} \hat{\mathbf{e}}_z}{|\mathbf{p} + \frac{\varphi}{\beta} \hat{\mathbf{e}}_z|} \cdot \frac{\mathbf{k} + \frac{\varphi}{\beta} \hat{\mathbf{e}}_z}{|\mathbf{k} + \frac{\varphi}{\beta} \hat{\mathbf{e}}_z|} \right]. \quad (\text{F.15})$$

Verschieben wir die  $z$ -Komponente des äußeren und des inneren Impulses jeweils um  $-\varphi/\beta$  und verwenden die Notation

$$S_\varphi(\mathbf{p}_\perp, p_z) \equiv S_\varphi(\mathbf{p}), \quad (\text{F.16})$$

so ergibt sich für den Beitrag (F.15) der Coulombwechselwirkung zur Quarkgapgleichung der in Gleichung (5.48) gegebene Ausdruck. Auch die übrigen Schleifenbeiträge (F.8) bis (F.13) nehmen so die in Abschnitt 5.1.3 angegebene Form an, wobei die Vektorkerne (F.1), (F.2) in kontinuierlichen Koordinaten durch Gleichung (5.55), (5.57) gegeben sind. Damit besitzt die Gapgleichung (F.6) nach Anwendung der Poisson'schen Summenformel die Gestalt (5.47). Ohne weitere Rechnung weisen wir darauf hin, daß wir die Resummation bereits in den einzelnen Bestandteilen des Energiefunktional, Gleichung (5.42) und (5.44) bis (5.46), hätten durchführen können. Die Minimierung dieses resummierten Energiefunktional hätte auf die identische Gapgleichung (5.47) geführt.



# Literatur

- [1] G. Aad et al., Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett.* **B716**, 1–29 (2012), arXiv: 1207.7214.
- [2] S. Chatrchyan et al., Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Phys. Lett.* **B716**, 30–61 (2012), arXiv: 1207.7235.
- [3] J. Greensite: *An Introduction to the Confinement Problem*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag 2011.
- [4] C. Gattringer und C. B. Lang: *Quantum chromodynamics on the lattice*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag 2010.
- [5] O. Philipsen, *Lattice QCD at non-zero temperature and baryon density*. In: Modern perspectives in lattice QCD: Quantum field theory and high performance computing. Proceedings, International School, 93rd Session, Les Houches, France, August 3-28, 2009, arXiv: 1009.4089.
- [6] C. Gattringer und K. Langfeld, Approaches to the sign problem in lattice field theory. *Int. J. Mod. Phys.* **A31**, 1643007 (2016), arXiv: 1603.09517.
- [7] F. Karsch, Lattice QCD at high temperature and density. *Lect. Notes Phys.* **583**, 209–249 (2002), arXiv: hep-lat/0106019.
- [8] C. S. Fischer, Infrared properties of QCD from Dyson-Schwinger equations. *J. Phys.* **G32**, R253–R291 (2006), arXiv: hep-ph/0605173.
- [9] R. Alkofer und L. von Smekal, The infrared behavior of QCD Green’s functions: Confinement dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. *Phys. Rept.* **353**, 281 (2001), arXiv: hep-ph/0007355.
- [10] D. Binosi und J. Papavassiliou, Pinch Technique: Theory and Applications. *Phys. Rept.* **479**, 1–152 (2009), arXiv: 0909.2536.
- [11] P. Watson und H. Reinhardt, Propagator Dyson-Schwinger equations of Coulomb gauge Yang-Mills theory within the first order formalism. *Phys. Rev. D* **75**, 045021 (2007), arXiv: hep-th/0612114.
- [12] P. Watson und H. Reinhardt, Two-point functions of Coulomb gauge Yang-Mills theory. *Phys. Rev. D* **77**, 025030 (2008), arXiv: 0709.3963.
- [13] P. Watson und H. Reinhardt, Slavnov-Taylor identities in Coulomb gauge Yang-Mills theory. *Eur. Phys. J.* **C65**, 567–585 (2010), arXiv: 0812.1989.
- [14] J. M. Pawłowski, Aspects of the functional renormalisation group. *Annals Phys.* **322**, 2831–2915 (2007), arXiv: hep-th/0512261.
- [15] H. Gies, Introduction to the functional RG and applications to gauge theories. *Lect. Notes Phys.* **852**, 287–348 (2012), arXiv: hep-ph/0611146.

- [16] M. Quandt, H. Reinhardt und J. Heffner, Covariant variational approach to Yang-Mills theory. *Phys. Rev. D* **89**, 065037 (2014), arXiv: 1310.5950.
- [17] M. Quandt und H. Reinhardt, A covariant variational approach to Yang-Mills Theory at finite temperatures. *Phys. Rev. D* **92**, 025051 (2015), arXiv: 1503.06993.
- [18] C. Feuchter und H. Reinhardt, Variational solution of the Yang-Mills Schrödinger equation in Coulomb gauge. *Phys. Rev. D* **70**, 105021 (2004), arXiv: hep-th/0408236.
- [19] C. Feuchter und H. Reinhardt, Quark and gluon confinement in Coulomb gauge, (2004), arXiv: hep-th/0402106.
- [20] H. Reinhardt und C. Feuchter, Yang-Mills wave functional in Coulomb gauge. *Phys. Rev. D* **71**, 105002 (2005), arXiv: hep-th/0408237.
- [21] C. Feuchter, *Yang-Mills Theorie in Coulombbeichung*. Dissertation, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, Tübingen 2006.
- [22] D. Epple, H. Reinhardt und W. Schleifenbaum, Confining solution of the Dyson-Schwinger equations in Coulomb gauge. *Phys. Rev. D* **75**, 045011 (2007), arXiv: hep-th/0612241.
- [23] M. Pak und H. Reinhardt, Quark sector of the QCD groundstate in Coulomb gauge. *Phys. Rev. D* **88**, 125021 (2013), arXiv: 1310.1797.
- [24] M. Pak und H. Reinhardt, Chiral symmetry breaking in Hamiltonian QCD in Coulomb gauge. *Physics Letters B* **707**, 566–569 (2012), arXiv: 1107.5263.
- [25] M. Pak, *The Quark Sector of the QCD Ground State in Coulomb Gauge*. Dissertation, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, Tübingen 2012.
- [26] D. R. Campagnari und H. Reinhardt, Non-Gaussian wave functionals in Coulomb gauge Yang-Mills theory. *Phys. Rev. D* **82**, 105021 (2010), arXiv: 1009.4599.
- [27] D. R. Campagnari und H. Reinhardt, Dyson-Schwinger approach to Hamiltonian Quantum Chromodynamics. *Phys. Rev. D* **92**, 065021 (2015), arXiv: 1507.01414.
- [28] D. R. Campagnari et al., *Dyson-Schwinger Approach to Hamiltonian QCD*. In: 12th Conference on Quark Confinement and the Hadron Spectrum (Confinement XII) Thessaloniki, Greece, August 29-September 2, 2016, arXiv: 1610.06456.
- [29] H. Weyl, Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie. *Annalen Phys.* **59**, 101–133 (1919).
- [30] H. Weyl, Elektron und Gravitation. I. *Z. Phys.* **56**, 330–352 (1929).
- [31] V. Fock, Über die invariante Form der Wellen- und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt. *Z. Phys.* **39**, 226–232 (1926).
- [32] J. D. Jackson und L. B. Okun, Historical roots of gauge invariance. *Rev. Mod. Phys.* **73**, 663–680 (2001), arXiv: hep-ph/0012061.
- [33] C.-N. Yang und R. L. Mills, Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Phys. Rev.* **96**, 191–195 (1954).
- [34] R. Jackiw, Introduction to the Yang-Mills Quantum Theory. *Rev. Mod. Phys.* **52**, 661–673 (1980).

- [35] S. L. Glashow, Partial-symmetries of weak interactions. Nucl. Phys. **22**, 579–588 (1961).
- [36] S. Weinberg, A Model of Leptons. Phys. Rev. Lett. **19**, 1264–1266 (1967).
- [37] M. Gell-Mann, A schematic model of baryons and mesons. Phys. Lett. **8**, 214–215 (1964).
- [38] G. Zweig, An  $SU(3)$  model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2. Aus: *Developments in the Quark Theory of Hadrons. Vol. 1. 1964 - 1978*, S. 22–101. Hrsg. von D. Lichtenberg und S. P. Rosen, 1964.
- [39] G. 't Hooft, Renormalization of massless Yang-Mills fields. Nucl. Phys. **B33**, 173–199 (1971).
- [40] G. 't Hooft und M. J. G. Veltman, Regularization and renormalization of gauge fields. Nucl. Phys. **B44**, 189–213 (1972).
- [41] D. J. Gross und F. Wilczek, Asymptotically Free Gauge Theories. 1. Phys. Rev. D **8**, 3633–3652 (1973).
- [42] H. D. Politzer, Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? Phys. Rev. Lett. **30**, 1346–1349 (1973).
- [43] D. Zwanziger, *Continuum and lattice Coulomb gauge Hamiltonian*. In: Confinement, duality, and nonperturbative aspects of QCD. Proceedings, NATO Advanced Study Institute, Newton Institute Workshop, Cambridge, UK, June 23-July 4, 1997, arXiv: hep-th/9710157.
- [44] V. Gribov, Quantization of non-Abelian gauge theories. Nuclear Physics B **139**, 1–19 (1978).
- [45] N. Vandersickel und D. Zwanziger, The Gribov problem and QCD dynamics. Phys. Rept. **520**, 175–251 (2012), arXiv: 1202.1491.
- [46] D. Zwanziger, Renormalization in the Coulomb gauge and order parameter for confinement in QCD. Nuclear Physics B **518**, 237–272 (1998).
- [47] A. Cucchieri und T. Mendes, What's up with IR gluon and ghost propagators in Landau gauge? A puzzling answer from huge lattices. PoS **LAT2007**, 297 (2007), arXiv: 0710.0412.
- [48] G. Burgio, M. Quandt und H. Reinhardt, Coulomb-Gauge Gluon Propagator and the Gribov Formula. Phys. Rev. Lett. **102**, 032002 (2009), arXiv: 0807.3291.
- [49] R. Alkofer und J. Greensite, Quark Confinement: The Hard Problem of Hadron Physics. J. Phys. **G34**, S3 (2007), arXiv: hep-ph/0610365.
- [50] H. Reinhardt et al., *Hamiltonian approach to QCD in Coulomb gauge: Gribov's confinement scenario at work*. In: 5th International Conference on New Frontiers in Physics Kolymbari, Crete, Greece, July 6-14, 2016, arXiv: 1607.08143.
- [51] H. Reinhardt: *Quantenmechanik 1*. München: Oldenbourg Verlag 2012.
- [52] C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Review of Particle Physics. Chinese Physics C **40**, 100001 (2016).
- [53] F. J. Ynduráin: *The Theory of Quark and Gluon Interactions*. 3. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer 1999.

- [54] W. Weise, *The QCD vacuum and its hadronic excitations*. In: Proceedings, 58th Scottish Universities Summer School in physics, SUSSP58, St. Andrews, UK, August 22-28, 2004, arXiv: [nucl-th/0504087](#).
- [55] T.-P. Cheng und L.-F. Li: *Gauge theory of elementary particle physics*. New York: Oxford University Press 1984.
- [56] R. Williams, C. S. Fischer und M. R. Pennington, Antiquark-quark condensate for light quarks beyond the chiral limit. *Phys. Lett.* **B645**, 167–172 (2007), arXiv: [hep-ph/0612061](#).
- [57] M. Gell-Mann, R. J. Oakes und B. Renner, Behavior of current divergences under  $SU(3) \times SU(3)$ . *Phys. Rev.* **175**, 2195–2199 (1968).
- [58] S. Aoki et al., Review of lattice results concerning low-energy particle physics. *Eur. Phys. J.* **C74**, 2890 (2014), arXiv: [1310.8555](#).
- [59] T. Banks und A. Casher, Chiral symmetry breaking in confining theories. *Nuclear Physics B* **169**, 103–125 (1980).
- [60] J. Gattnar et al., Center vortices and Dirac eigenmodes in  $SU(2)$  lattice gauge theory. *Nuclear Physics B* **716**, 105–127 (2005), arXiv: [hep-lat/0412032](#).
- [61] K. Fujikawa, Path Integral Measure for Gauge Invariant Fermion Theories. *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1195–1198 (1979).
- [62] K. Fujikawa, Path Integral for Gauge Theories with Fermions. *Phys. Rev.* **D21**, 2848 (1980).
- [63] D. R. Campagnari und H. Reinhardt, Topological susceptibility in  $SU(2)$  Yang-Mills theory in the Hamiltonian approach in Coulomb gauge. *Phys. Rev. D* **78**, 085001 (2008), arXiv: [0807.1195](#).
- [64] K. Fukushima und T. Hatsuda, The phase diagram of dense QCD. *Rept. Prog. Phys.* **74**, 014001 (2011), arXiv: [1005.4814](#).
- [65] M. A. Stephanov, QCD phase diagram: An Overview. *PoS LAT2006*, 024 (2006), arXiv: [hep-lat/0701002](#).
- [66] J. I. Kapusta und C. Gale: *Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications*. 2. Aufl. Cambridge: Cambridge University Press 2006.
- [67] H. Reinhardt, Hamiltonian finite-temperature quantum field theory from its vacuum on partially compactified space. *Phys. Rev. D* **94**, 045016 (2016), arXiv: [1604.06273](#).
- [68] H. Reinhardt, Resolution of Gauss' law in Yang-Mills theory by gauge-invariant projection: Topology and magnetic monopoles. *Nuclear Physics B* **503**, 505–529 (1997), arXiv: [hep-th/9702049](#).
- [69] R. M. Dreizler und C. S. Lüdde: *Statistische Mechanik und Thermodynamik*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum 2016.
- [70] C. Bonati et al., Constraints on the two-flavor QCD phase diagram from imaginary chemical potential. *PoS LAT2011*, 189 (2011), arXiv: [1201.2769](#).
- [71] O. Philipsen, Status of the QCD Phase Diagram from Lattice Calculations. *Acta Phys. Polon. Supp.* **5**, 825–835 (2012), arXiv: [1111.5370](#).

- [72] S. Borsányi et al., Is there still any  $T_c$  mystery in lattice QCD? Results with physical masses in the continuum limit III. JHEP **09**, 073 (2010), arXiv: 1005.3508.
- [73] A. Bazavov et al., The chiral and deconfinement aspects of the QCD transition. Phys. Rev. D **85**, 054503 (2012), arXiv: 1111.1710.
- [74] Y. Aoki, Z. Fodor, S. Katz und K. Szabó, The QCD transition temperature: Results with physical masses in the continuum limit. Physics Letters B **643**, 46–54 (2006), arXiv: hep-lat/0609068.
- [75] Y. Aoki et al., The QCD transition temperature: results with physical masses in the continuum limit II. JHEP **06**, 088 (2009), arXiv: 0903.4155.
- [76] B. Lucini und M. Panero,  $SU(N)$  gauge theories at large  $N$ . Phys. Rept. **526**, 93–163 (2013), arXiv: 1210.4997.
- [77] A. M. Polyakov, Thermal Properties of Gauge Fields and Quark Liberation. Phys. Lett. **B72**, 477–480 (1978).
- [78] L. Susskind, Lattice Models of Quark Confinement at High Temperature. Phys. Rev. D **20**, 2610–2618 (1979).
- [79] L. D. McLerran und B. Svetitsky, Quark liberation at high temperature: A Monte Carlo study of  $SU(2)$  gauge theory. Phys. Rev. D **24**, 450–460 (1981).
- [80] F. Marhauser und J. M. Pawłowski, Confinement in Polyakov Gauge, (2008), arXiv: 0812.1144.
- [81] J. Braun, H. Gies und J. M. Pawłowski, Quark Confinement from Color Confinement. Phys. Lett. **B684**, 262–267 (2010), arXiv: 0708.2413.
- [82] M. Quandt und H. Reinhardt, Covariant variational approach to Yang-Mills Theory: effective potential of the Polyakov loop. Phys. Rev. D **94**, 065015 (2016), arXiv: 1603.08058.
- [83] J. Braun und T. K. Herbst, On the Relation of the Deconfinement and the Chiral Phase Transition in Gauge Theories with Fundamental and Adjoint Matter, (2012), arXiv: 1205.0779.
- [84] C. Gattringer, Linking confinement to spectral properties of the Dirac operator. Phys. Rev. Lett. **97**, 032003 (2006), arXiv: hep-lat/0605018.
- [85] F. Synatschke, A. Wipf und K. Langfeld, Relation between chiral symmetry breaking and confinement in YM-theories. Phys. Rev. D **77**, 114018 (2008), arXiv: 0803.0271.
- [86] E. Bilgici, F. Bruckmann, C. Gattringer und C. Hagen, Dual quark condensate and dressed Polyakov loops. Phys. Rev. D **77**, 094007 (2008), arXiv: 0801.4051.
- [87] H. Reinhardt, D. R. Campagnari und A. P. Szczepaniak, Variational approach to Yang-Mills theory at finite temperatures. Phys. Rev. D **84**, 045006 (2011), arXiv: 1107.3389.
- [88] J. Heffner, H. Reinhardt und D. R. Campagnari, Deconfinement phase transition in the Hamiltonian approach to Yang-Mills theory in Coulomb gauge. Phys. Rev. D **85**, 125029 (2012), arXiv: 1206.3936.
- [89] K. G. Wilson, Confinement of Quarks. Phys. Rev. D **10**, 2445–2459 (1974).

- [90] G. 't Hooft, On the phase transition towards permanent quark confinement. Nucl. Phys. **B138**, 1–25 (1978).
- [91] M. Pak und H. Reinhardt, Wilson loop from a Dyson equation. Phys. Rev. D **80**, 125022 (2009), arXiv: 0910.2916.
- [92] H. Reinhardt und D. Epple, The 't Hooft loop in the Hamiltonian approach to Yang-Mills theory in Coulomb gauge. Phys. Rev. D **76**, 065015 (2007), arXiv: 0706.0175.
- [93] H. Reinhardt et al., *Hamiltonian approach to QCD in Coulomb gauge at zero and finite temperature*, arXiv: 1609.09370.
- [94] G. Burgio, M. Quandt, H. Reinhardt und H. Vogt, Coulomb versus physical string tension on the lattice. Phys. Rev. D **92**, 034518 (2015), arXiv: 1503.09064.
- [95] P. Vastag, H. Reinhardt und D. Campagnari, Improved variational approach to QCD in Coulomb gauge. Phys. Rev. D **93**, 065003 (2016), arXiv: 1512.06733.
- [96] D. R. Campagnari, E. Ebadati, H. Reinhardt und P. Vastag, Revised variational approach to QCD in Coulomb gauge. Phys. Rev. D **94**, 074027 (2016), arXiv: 1608.06820.
- [97] D. Schütte, Nonperturbative many-body techniques applied to a Yang-Mills field theory. Phys. Rev. D **31**, 810–821 (1985).
- [98] A. P. Szczepaniak und E. S. Swanson, Coulomb gauge QCD, confinement, and the constituent representation. Phys. Rev. D **65**, 025012 (2001), arXiv: hep-ph/0107078.
- [99] H. Reinhardt, Dielectric Function of the QCD Vacuum. Phys. Rev. Lett. **101**, 061602 (2008), arXiv: 0803.0504.
- [100] D. Zwanziger, No Confinement without Coulomb Confinement. Phys. Rev. Lett. **90**, 102001 (2003), arXiv: hep-lat/0209105.
- [101] J. Bardeen, L. N. Cooper und J. R. Schrieffer, Microscopic Theory of Superconductivity. Phys. Rev. **106**, 162–164 (1957).
- [102] M. Tinkham: *Introduction to Superconductivity*. 2. Aufl. New York: McGraw-Hill 1996.
- [103] Y. Nambu und G. Jona-Lasinio, Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I. Phys. Rev. **122**, 345–358 (1961).
- [104] Y. Nambu und G. Jona-Lasinio, Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II. Phys. Rev. **124**, 246–254 (1961).
- [105] J. R. Finger und J. E. Mandula, Quark pair condensation and chiral symmetry breaking in QCD. Nuclear Physics B **199**, 168–188 (1982).
- [106] A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pène und J.-C. Raynal, Spontaneous breaking of chiral symmetry for confining potentials. Phys. Rev. D **29**, 1233–1257 (1984).
- [107] S. Adler und A. Davis, Chiral symmetry breaking in Coulomb gauge QCD. Nuclear Physics B **244**, 469–491 (1984).
- [108] R. Alkofer und P. Amundsen, Chiral symmetry breaking in an instantaneous approximation to Coulomb gauge QCD. Nuclear Physics B **306**, 305–342 (1988).

- [109] R. Alkofer, *Chirale Symmetriebrechung und der chirale Phasenübergang in instantanen Näherungen zur Quantenchromodynamik in Coulombbeichung*. Dissertation, Technische Universität München, München 1988.
- [110] H. Reinhardt: *Quantenmechanik 2*. München: Oldenbourg Verlag 2013.
- [111] D. J. Thouless: *Quantenmechanik der Vielteilchensysteme*. Mannheim: Bibliographisches Institut 1964.
- [112] D. R. Campagnari: Persönliche Mitteilung, Veröffentlichung in Vorbereitung.
- [113] D. R. Campagnari und H. Reinhardt, Hamiltonian approach to QCD in Coulomb gauge: Perturbative treatment of the quark sector. *Int. J. Mod. Phys. A* **30**, 1550100 (2015), arXiv: 1404.2797.
- [114] D. Epple, H. Reinhardt, W. Schleifenbaum und A. P. Szczepaniak, Subcritical solution of the Yang-Mills Schrödinger equation in the Coulomb gauge. *Phys. Rev. D* **77**, 085007 (2008), arXiv: 0712.3694.
- [115] P. Watson und H. Reinhardt, Leading-order infrared quantum chromodynamics in Coulomb gauge. *Phys. Rev. D* **85**, 025014 (2012), arXiv: 1111.6078.
- [116] Y. Nakagawa, A. Nakamura, T. Saito und H. Toki, Scaling study of the gluon propagator in Coulomb gauge QCD on isotropic and anisotropic lattices. *Phys. Rev. D* **83**, 114503 (2011), arXiv: 1105.6185.
- [117] A. Voigt, E.-M. Ilgenfritz, M. Müller-Preußker und A. Sternbeck, Effective Coulomb potential in  $SU(3)$  lattice Yang-Mills theory. *Phys. Rev. D* **78**, 014501 (2008), arXiv: 0803.2307.
- [118] J. Greensite und A. P. Szczepaniak, Coulomb string tension, asymptotic string tension, and the gluon chain. *Phys. Rev. D* **91**, 034503 (2015), arXiv: 1410.3525.
- [119] J. Greensite, S. Olejnik und D. Zwanziger, Coulomb energy, remnant symmetry, and the phases of non-Abelian gauge theories. *Phys. Rev. D* **69**, 074506 (2004), arXiv: hep-lat/0401003.
- [120] A. Yamamoto und H. Suganuma, Relevant gluonic energy scale of spontaneous chiral symmetry breaking from lattice QCD. *Phys. Rev. D* **81**, 014506 (2010), arXiv: 0911.5391.
- [121] W. Schleifenbaum, *Nonperturbative aspects of Yang-Mills theory*. Dissertation, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, Tübingen 2008.
- [122] A. Dumitru et al., Effective Matrix Model for Deconfinement in Pure Gauge Theories. *Phys. Rev. D* **86**, 105017 (2012), arXiv: 1205.0137.
- [123] U. Reinosa, J. Serreau, M. Tissier und N. Wschebor, Two-loop study of the deconfinement transition in Yang-Mills theories:  $SU(3)$  and beyond. *Phys. Rev. D* **93**, 105002 (2016), arXiv: 1511.07690.
- [124] F. E. Canfora et al., Effect of the Gribov horizon on the Polyakov loop and vice versa. *Eur. Phys. J. C* **75**, 326 (2015), arXiv: 1505.02287.
- [125] B. Lucini, M. Teper und U. Wenger, The High temperature phase transition in  $SU(N)$  gauge theories. *JHEP* **01**, 061 (2004), arXiv: hep-lat/0307017.
- [126] B. Zhang et al., Dual condensate and QCD phase transition. *AIP Conf. Proc.* **1343**, 170–172 (2011), arXiv: 1012.2314.

- [127] C. S. Fischer, Deconfinement Phase Transition and the Quark Condensate. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 052003 (2009), arXiv: 0904.2700.
- [128] C. S. Fischer und J. A. Müller, Chiral and deconfinement transition from Dyson-Schwinger equations. *Phys. Rev. D* **80**, 074029 (2009), arXiv: 0908.0007.
- [129] C. S. Fischer, A. Maas und J. A. Müller, Chiral and deconfinement transition from correlation functions:  $SU(2)$  vs.  $SU(3)$ . *Eur. Phys. J.* **C68**, 165–181 (2010), arXiv: 1003.1960.
- [130] L. Fister und J. M. Pawłowski, Confinement from Correlation Functions. *Phys. Rev. D* **88**, 045010 (2013), arXiv: 1301.4163.
- [131] J. Braun, L. M. Haas, F. Marhauser und J. M. Pawłowski, Phase Structure of Two-Flavor QCD at Finite Chemical Potential. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 022002 (2011), arXiv: 0908.0008.
- [132] T. K. Herbst et al., Thermodynamics of QCD at vanishing density. *Phys. Lett.* **B731**, 248–256 (2014), arXiv: 1308.3621.
- [133] A. Davis und A. Matheson, Chiral symmetry breaking at finite temperature in Coulomb gauge QCD. *Nuclear Physics B* **246**, 203–220 (1984).
- [134] A. Kocić, Chiral-symmetry restoration at finite densities in Coulomb-gauge QCD. *Phys. Rev. D* **33**, 1785–1794 (1986).
- [135] R. Alkofer und P. A. Amundsen, A Model for the Chiral Phase Transition in QCD. *Phys. Lett.* **B187**, 395–400 (1987).
- [136] R. Alkofer, P. A. Amundsen und K. Langfeld, Chiral symmetry breaking and pion properties at finite temperatures. *Z. Phys.* **C42**, 199–208 (1989).
- [137] P. M. Lo und E. S. Swanson, Confinement models at finite temperature and density. *Phys. Rev. D* **81**, 034030 (2010), arXiv: 0908.4099.
- [138] J. Heffner und H. Reinhardt, Finite-temperature Yang-Mills theory in the Hamiltonian approach in Coulomb gauge from a compactified spatial dimension. *Phys. Rev. D* **91**, 085022 (2015), arXiv: 1501.05858.
- [139] H. Reinhardt und J. Heffner, The effective potential of the confinement order parameter in the Hamilton approach. *Phys. Lett.* **B718**, 672–677 (2012), arXiv: 1210.1742.
- [140] H. Reinhardt und J. Heffner, Effective potential of the confinement order parameter in the Hamiltonian approach. *Phys. Rev. D* **88**, 045024 (2013), arXiv: 1304.2980.
- [141] H. Reinhardt und P. Vastag, Chiral and deconfinement phase transition in the Hamiltonian approach to QCD in Coulomb gauge. *Phys. Rev. D* **94**, 105005 (2016), arXiv: 1605.03740.
- [142] J. Heffner, H. Reinhardt, P. Vastag und E. Ebadati: Veröffentlichung in Vorbereitung.
- [143] I. S. Gradshteyn und I. M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series, and Products*. 8. Aufl. Amsterdam: Elsevier Academic Press 2015.
- [144] S. Weinberg: *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge: Cambridge University Press 1996.



- 
- [145] N. Weiss, The effective potential for the order parameter of gauge theories at finite temperature. *Phys. Rev. D* **24**, 475 (1981).
  - [146] J. Heffner: Persönliche Mitteilung.
  - [147] G. Boyd et al., Thermodynamics of  $SU(3)$  lattice gauge theory. *Nucl. Phys.* **B469**, 419–444 (1996), arXiv: [hep-lat/9602007](#).
  - [148] D. R. Campagnari, H. Reinhardt und A. Weber, Perturbation theory in the Hamiltonian approach to Yang-Mills theory in Coulomb gauge. *Phys. Rev. D* **80**, 025005 (2009), arXiv: [0904.3490](#).
  - [149] D. Campagnari et al., Equal-time two-point correlation functions in Coulomb gauge Yang-Mills theory. *Nucl. Phys.* **B842**, 501–528 (2011), arXiv: [0910.4548](#).
  - [150] C. Popovici, P. Watson und H. Reinhardt, Quarks in Coulomb gauge perturbation theory. *Phys. Rev. D* **79**, 045006 (2009), arXiv: [0810.4887](#).
  - [151] W. Magnus, F. Oberhettinger und R. Soni: *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. 3. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag 1966.



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Schematische Darstellung des QCD-Phasendiagramms . . . . .	26
2.2	Illustration von $S^1(\beta) \times \mathbb{R}^3$ . . . . .	30
2.3	Illustration zur Ordnung von Phasenübergängen . . . . .	34
2.4	Darstellung der Ordnung des QCD-Phasenübergangs (Columbiadiagramm)	35
2.5	Illustration des Polyakov-Loops . . . . .	37
3.1	Statischer Gluonpropagator der reinen Yang–Mills-Theorie . . . . .	47
3.2	Diagrammatische Darstellung des Erwartungswerts des freien Dirac-Hamiltonians . . . . .	58
3.3	Diagrammatische Darstellung des Erwartungswerts des Kopplungsterms . . . . .	58
3.4	Diagrammatische Darstellung des Erwartungswerts des fermionischen Anteils der Farb-Coulombwechselwirkung . . . . .	60
3.5	Diagrammatische Darstellung der fermionischen Beiträge zum Erwartungswert der kinetischen Energie der Gluonen . . . . .	61
3.6	Diagrammatische Darstellung des Beitrags des Einschleifenanteils des freien Dirac-Hamiltonians zur Quarkgapgleichung . . . . .	64
3.7	Diagrammatische Darstellung des Beitrags der Coulombwechselwirkung zur Quarkgapgleichung . . . . .	65
3.8	Diagrammatische Darstellung der Beiträge der Zweischleifenanteile des freien Dirac-Hamiltonians zur Quarkgapgleichung . . . . .	65
3.9	Diagrammatische Darstellung der Beiträge des Kopplungsterms zur Quarkgapgleichung . . . . .	66
3.10	Diagrammatische Darstellung der Beiträge der kinetischen Energie der Gluonen zur Quarkgapgleichung . . . . .	66
3.11	Diagrammatische Darstellung der Beiträge des freien Dirac-Hamiltonians zur Quarkgapgleichung . . . . .	67
3.12	Diagrammatische Darstellung der Beiträge des Kopplungsterms zur Quarkgapgleichung . . . . .	68
3.13	Numerische Lösung der Quarkgapgleichung in $M$ für $g = 0$ und verschiedene Stützstellenzahlen der Winkelintegration . . . . .	76
3.14	Numerische Lösung der Quarkgapgleichung in $M$ für verschiedene Kopplungsstärken . . . . .	78
3.15	Integrand des chiralen Kondensats für verschiedene Kopplungsstärken . . . . .	79
3.16	Lösung der Quarkgapgleichung in $M$ für $g = 2.07$ . . . . .	80
3.17	Vergleich des gefitteten Integranden des chiralen Kondensats mit der numerisch bestimmten Lösung . . . . .	81
3.18	Skalarkern aus der Lösung der Quarkgapgleichung für $g = 2.07$ . . . . .	82
3.19	Dichte besetzter Quarkzustände . . . . .	82
3.20	Vektorkerne $V(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ und $W(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ als Funktion von $p = q$ und $z = \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}}$ . . . . .	83
3.21	Lösung der Quarkgapgleichung in $M$ für $g = 2.07$ und Eichgruppe $SU(2)$ . . . . .	84

3.22	Laufende Kopplung $g_r$ in Abhängigkeit der Impulsskala . . . . .	85
5.1	Duales und chirales Quarkkondensat für $SU(3)$ . . . . .	127
5.2	Gegenüberstellung von dualem und chiralem Quarkkondensat für $SU(3)$ . .	128
5.3	Zweite Ableitung von chiralem und dualem Quarkkondensat für $SU(3)$ . .	130
5.4	Temperatur- und Phasenabhängigkeit des chiralen Kondensats für $SU(3)$ .	131
5.5	Phasenabhängigkeit des chiralen Quarkkondensats für $SU(3)$ bei verschiedenen Temperaturen . . . . .	132
5.6	Bosonischer und fermionischer Anteil des effektiven Potentials in Abhängigkeit des Hintergrundfelds bei verschiedenen Temperaturen für $SU(2)$ . . .	152
5.7	Effektives Potential in Abhängigkeit des Hintergrundfelds bei verschiedenen Temperaturen für $SU(2)$ . . . . .	154
5.8	Effektives Potential in Abhängigkeit des Hintergrundfelds für $SU(3)$ (unterhalb der pseudokritischen Temperatur) . . . . .	155
5.9	Effektives Potential in Abhängigkeit des Hintergrundfelds für $SU(3)$ (oberhalb der pseudokritischen Temperatur) . . . . .	155
5.10	$\bar{a}^8 = 0$ -Schnitt des effektiven Potentials bei verschiedenen Temperaturen für $SU(3)$ . . . . .	156
5.11	Polyakov-Loop als Funktion der Temperatur für $SU(2)$ . . . . .	157
5.12	Ableitung des Polyakov-Loops als Funktion der Temperatur für $SU(2)$ . .	158
5.13	Polyakov-Loop als Funktion der Temperatur für $SU(3)$ . . . . .	158
5.14	Ableitung des Polyakov-Loops als Funktion der Temperatur für $SU(3)$ . .	159

# Danksagung

An erster Stelle gebührt mein besonderer Dank meinem Doktorvater Hugo Reinhardt, der es mir ermöglicht hat, mich über dreieinhalb Jahre mit diesem spannendem Thema auseinanderzusetzen und diese Arbeit zu erstellen. Über den gesamten Zeitraum hinweg hat er mich fair und äußerst kompetent betreut und die Arbeit in zahllosen Diskussionen und mit großem persönlichen Einsatz entscheidend voran getrieben. Gerade an den schwierigen Stellen sorgte er durch hilfreiche Ratschläge und Ideen für weiteres Vorankommen.

Amand Fäßler und Reinhard Alkofer danke ich für die freundliche und problemlose Bereitschaft, die weitere Begutachtung dieser für wahr nicht zu kurz geratenen Arbeit zu übernehmen. Weiterhin danke ich den Kollegen der Arbeitsgruppen Reinhardt, Gutsche, Jäger und Vogelsang für die zu jeder Zeit äußerst angenehme Arbeitsatmosphäre sowie die überaus unterhaltsamen Diskussionen in den notwendigen Arbeitspausen. Besonders danken möchte ich hierbei Davide Campagnari, der – von der ersten Rechnung bis zum Binden der Arbeit auf den letzten Drücker – stets eine kompetente Anlaufstelle für Probleme aller Art war und mir auch in den Kaffeepausen höchst angenehme Gesellschaft geleistet hat, sowie meinem langjährigen Bürokollegen Ehsan Ebadati für zahlreiche angeregte Gespräche sowie das genügsame Erdulden jeglicher Stimmungslagen und die dadurch erst mögliche, allzeit entspannte Atmosphäre im Büro.

Jens Grimmel, Martin Lambertsen, Günter Lang, Dhia Mansour, Matthias Schwille, Markus Stecker, David Wharam und besonders Jonathan Seyrich möchte ich für viele Diskussionen und Besprechungen danken, die eine sehr willkommene Auflockerung im Arbeitsalltag boten. Anna Münzer und Davide Campagnari sei zudem auch für die kritische Durchsicht von Teilen dieser Arbeit sowie hilfreiche Anmerkungen gedankt.

Diese Arbeit wurde teilweise von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG; Vertragsnummer DFG-Re856/10-1 und DFG-Re856/9-2) gefördert, der dafür an dieser Stelle gedankt sei. Ebenso danken möchte ich dem Kepler-Kolleg der Universität Tübingen für die Möglichkeit zur Teilnahme an den jährlichen Treffen in Heiligkreuztal, Blaubeuren sowie Lauterbad.

Schließlich gebührt mein allergrößter Dank meiner Familie, welche mich mein ganzes Leben hinweg begleitet und aufopferungsvoll unterstützt hat. Ohne ihren Einsatz hätte ich nicht die Freiräume zum Promovieren gehabt und diese Arbeit hätte nie entstehen können!

